



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

DIFICULTADES EN LA ARGUMENTACIÓN.

Caso: Estudiantes de un curso de Fundamentos de Aritmética de la Licenciatura en

1803

Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia  
Facultad de Educación

Por:

Ruggeri Antonio Espinoza Castaño

ruggeri.espinoza@udea.edu.co

Jaime Humberto David Serna

humberto.david@udea.edu.co

Asesor:

René Alejandro Londoño Cano

Doctor en Educación: Línea de Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EDUMATH (EDUCACIÓN MATEMÁTICA E

HISTORIA U DE A - EAFIT)

CATEGORÍA B - COLCIENCIAS

2018



## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero en un primer momento agradecer a Dios por darme la oportunidad de estudiar esta maravillosa carrera, de regalarme constantemente su bendición y contar con grandes personas a mi alrededor que ayudaron en este caminar y proceso formativo.

Mencionar especialmente al profesor René Alejandro Londoño Cano, quien fuera mi profesor de cálculo y quien nos correspondió en suerte ser nuestro asesor de práctica y trabajo de grado, agradecer por poner a disposición su conocimiento en pro de este proyecto, por su paciencia, los reiterados llamados de atención y la motivación para fortalecernos en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

A mi compañero Jaime David, con quien tuve la oportunidad de compartir este proyecto, agradecerle por ser un excelente compañero, por la paciencia, los consejos, la ayuda y la motivación.

A la profesora Eliana Barbosa por enseñarme a no ser “tan cuadriculado” y entender que antes de enseñar, es importante comprender la manera en que los otros aprenden.

Agradecer a mis padres que sin su apoyo no lograría llegar tan lejos en mis proyectos y sueños, a mis hermanos y demás familiares que me brindaron palabras de aliento para salir adelante.



Finalmente, darle gracias a mi novia Juliana Tabora por toda vez que me dio palabras de aliento

**Facultad de Educación**  
cuando sentía que no era capaz con mi carrera y con mi formación.

**Ruggery Antonio Espinoza Castaño.**

Soy lo que soy y tengo lo que tengo, gracias a Dios que me dio la vida y que me sigue bendiciendo día a día, por ello, en primera instancia, mis agradecimientos son para ese ser divino. A mi madre, que sin su apoyo no hubiese sido posible empezar esta hermosa carrera. También agradezco a mi profesor René Alejandro Londoño Cano, asesor de este trabajo y a quien admiro profundamente por ser un excelente profesional y por su calidad humana. A mi compañero Ruggery Espinoza por su ayuda para sacar adelante el trabajo. A mi amigo Juan Acevedo, por esos días en los que nos sentábamos a hablar sobre la investigación y que con sus aportes me llenaba de ideas para la realización del instrumento que se aplicó en la investigación. Agradezco a las Alejas de mi vida, a mi hermana del alma y a mi gran amiga. Al doctor John Henry Durango Urrego por incitarme a realizar un trabajo en argumentación y por los momentos de conversación sobre el tema. Por último, y no menos importante, quisiera agradecer a cada uno de los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia que hicieron parte de la investigación, y con quienes tuve la oportunidad de compartir conocimientos en las diferentes secciones de monitoria del curso de Fundamentos de Aritmética.



**TABLA DE CONTENIDO**

<b>INDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>VII</b>
<b>INDICE DE TABLAS .....</b>	<b>IX</b>
<b>RESUMEN .....</b>	<b>X</b>
<b>CAPITULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>11</b>
1.1. ANTECEDENTES .....	11
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	21
1.2.1. JUSTIFICACIÓN .....	21
1.2.2. PROBLEMA .....	24
1.2.3. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN .....	24
1.2.4. OBJETO DE ESTUDIO: .....	24
1.3. OBJETIVOS .....	25
1.3.1. Objetivo general.....	25
1.3.2. Objetivos específicos .....	25
<b>CAPITULO 2: MARCO REFERENCIAL .....</b>	<b>26</b>



2.1	MARCO CONTEXTUAL.....	26
	<b>Facultad de Educación</b>	
2.2.	MARCO LEGAL .....	29
2.3.	MARCO TEÓRICO .....	34
2.4.	MARCO CONCEPTUAL .....	37
	<b>CAPITULO 3: METODOLOGÍA.....</b>	<b>40</b>
3.1.	MÉTODO .....	40
3.2.	LA SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES.....	41
3.2.1.	Caso I: Visualización – Exploración.....	42
3.2.2.	Caso II: Conjeturación – Verificación.....	43
3.2.3.	Caso III: Producto.....	43
3.3.	RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.....	44
3.4.	DISEÑO DEL INSTRUMENTO.....	45
3.4.1.	Instrumento A.....	45
3.4.2.	Instrumento B .....	48
	<b>CAPITULO 4: ANÁLISIS Y RESULTADOS.....</b>	<b>52</b>
	INSTRUMENTO A .....	52
	INSTRUMENTO B .....	59
	Cuadro resumen del mal desempeño de los estudiantes en los dos test realizados. ....	64
4.1.	Caso tipo 1 .....	65
4.2.	Caso tipo 2 .....	68



4.3.03 Caso tipo 3 .....73

**Facultad de Educación**

**CAPITULO 5: CONCLUSIONES .....83**

5.1. Consecución de los objetivos .....83

5.2. Sobre el diseño del instrumento .....85

5.3. Proyección hacia el futuro .....87

**CAPITULO 6: REFERENCIAS .....90**

**ANEXO 1: INSTRUMENTO A .....93**

**ANEXO 2: INSTRUMENTO B .....99**

**ANEXO 3: SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS Y SITUACIONES .....103**

**ANEXO 4: CONSENTIMIENTO INFORMADO .....111**

**ANEXO 5: CONSENTIMIENTO PARA USO DEL BUEN NOMBRE .....115**



**INDICE DE FIGURAS**

Figura 1. <i>Funciones de las demostraciones matemáticas.</i> .....	13
Figura 2. Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. .....	28
Figura 3: La Actividad Demostrativa.....	36
Figura 4: Respuesta de estudiante caso tipo 1, problema 1, instrumento A.....	65
Figura 5: Respuesta de estudiante caso tipo 1, problema 2, instrumento A.....	66
Figura 6: Respuesta de estudiante caso tipo 1, problema 3, instrumento A.....	66
Figura 7: Respuesta de estudiante caso tipo 1, situación 2, instrumento B.....	67
Figura 8: Respuesta de estudiante caso tipo 1, situación 3, instrumento B.....	67
Figura 9: Respuesta de estudiante caso tipo 2, problemas 6 y 7, instrumento A.....	68
Figura 10: Respuestas de estudiantes caso tipo 2, situación 4, instrumento B.....	70
Figura 11: Respuesta de estudiante caso tipo 2, situación 3, instrumento B.....	70
Figura 12: Respuesta de estudiante caso tipo 2, situación 3, instrumento B.....	71
Figura 13: Respuesta dada por la estudiante #6, problema 2, instrumento A. ....	72
Figura 14: argumento que la estudiante da para la anterior respuesta. ....	72
Figura 15: solución dada por la estudiante #6, problema 3, instrumento A.....	72
Figura 16: Respuesta dada por la estudiante #6, problema 4, instrumento A. ....	73



Figura 17: argumento que la estudiante presenta para la anterior respuesta. ....73

**Facultad de Educación**

Figura 18: Respuesta dada por el estudiante #2, problema 14, instrumento A. ....74

Figura 19: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 13 del instrumento A.....75

Figura 20: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 13 del instrumento A.....75

Figura 21: Respuestas dadas por dos estudiantes de los anteriores casos, problema 14 del instrumento A. ....76

Figura 22: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 10 del instrumento A.....77

Figura 23: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 11 del instrumento A.....77

Figura 24: Demostraciones hechas por el estudiante #1 de los problemas 13 y 14 del instrumento A.....79

Figura 25: Dificultad que presenta el estudiante #1 en la solución de la situación 2 del instrumento B, que involucra el aspecto proceso. ....79

Figura 25: Dificultad que presenta el estudiante #1 en la solución de la situación 2 del instrumento B, que involucra el aspecto proceso. ....80

Figura 26: Respuesta dada por el estudiante #2, problemas 6 y 7 del instrumento A. ....81

Figura 27: Solución a la situación 3 del instrumento B. ....81

Figura 28: Solución a la situación 4 del instrumento B. ....82



**INDICE DE TABLAS**

Tabla 1: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 1.....	52
Tabla 2: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 2.....	53
Tabla 3: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 3.....	54
Tabla 4: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 4.....	55
Tabla 5: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 5.....	56
Tabla 6: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por la estudiante 6.....	56
Tabla 7: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por la estudiante 7.....	57
Tabla 8: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por la estudiante 8.....	58
<i>Tabla 9: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 1. ....</i>	<i>59</i>
Tabla 10: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 2.....	59
Tabla 11: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 3.....	60
Tabla 12: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 4.....	60
Tabla 13: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 5.....	61
Tabla 14: Respuestas dadas a las situaciones por la estudiante 6.....	62
Tabla 15: Respuestas dadas a las situaciones por la estudiante 7.....	62
Tabla 16: Respuestas dadas a las situaciones por la estudiante 8.....	63
Tabla 17: Resumen de los desaciertos que tuvieron los estudiantes en los dos test realizados.....	64



## RESUMEN

Este trabajo da cuenta de las dificultades en la argumentación que presentan algunos estudiantes de un curso de Fundamentos de Aritmética de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, al momento de resolver problemas de razonamiento lógico que intencionalmente atienden al aspecto proceso y producto, los cuales son permeados por la argumentación en el marco teórico de la Actividad Demostrativa. Para ello, se hace un estudio de casos con enfoque cualitativo, permitiendo así dilucidar dichas dificultades en los estudiantes. Finalmente, el trabajo arroja que hay serias dificultades en la argumentación, sobre todo cuando se abordan problemas que requieren de un lenguaje más formal y riguroso, no obstante, algunos ni siquiera logran pasar satisfactoriamente por las acciones de conjeturación y verificación, propias del aspecto proceso de la Actividad Demostrativa.

**Palabras claves:** Argumentación, Actividad Demostrativa, problemas de razonamiento lógico.



### CAPITULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se aborda lo referente al problema de investigación, en él se presentan los antecedentes, la formulación del problema, la justificación, los objetivos y la pregunta que guiará el trabajo de investigación.

#### 1.1. ANTECEDENTES

Se ha realizado un rastreo bibliográfico con el fin de hallar investigaciones, propuestas o trabajos sobre la tríada “demostración – lógica – argumentación”. El hecho de indagar en general sobre la demostración y la lógica estriba en que estas traen consigo elementos que nos permitirán entender aspectos de la argumentación, pues es esta la que establece un vínculo inherente con ambas cuestiones.

No podemos iniciar este compendio sin mencionar el libro de “cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas” de Solow (1987), en el que se destacan las técnicas más comunes para demostrar, “Usted dispone de tres técnicas principales para tratar de demostrar que “A implica B”: los métodos progresivo-regresivo, contrapositivo, y por contradicción” (pág. 97). En el capítulo 10 de este mismo libro, Solow (1987, pág. 90) habla de que la negación de negaciones conduce a confusiones, sobre todo al trabajar con proposiciones que contienen cuantificadores y destaca tres pasos para encontrar la negación de una proposición:



Primer paso: ponga la palabra No en frente de la proposición

## Facultad de Educación

Segundo paso: si la palabra No aparece a la izquierda de un cuantificador, muévala hacia la derecha del cuantificador y póngala exactamente antes del algo que sucede. Cuando hace esto, usted cambia mágicamente el cuantificador por su opuesto, de manera que “para todo” se convierte en “existe” y “existe” se convierte en “para todo”.

Tercer paso: cuando todos los cuantificadores aparezcan a la izquierda de la palabra NO, elimine el NO incorporándolo en la proposición que aparece inmediatamente a su derecha. (pág. 92)

La dificultad en la negación de proposiciones radica en la forma que se aplican las reglas que se vislumbran; los estudiantes tienden a confundir el orden en que debe aplicarse la negación, a omitir pasos o a confundir el lenguaje, y ello es un impedimento para establecer lo que realmente se debe demostrar. De igual manera se expone lo que ocurre al negar una disyunción y una conjunción, lo que conocemos como ley de D'Morgan.

El libro del profesor Solow es una herramienta valiosa para aprender a demostrar, su lenguaje es exquisito y por medio de ejemplos matemáticos concretos se ponen en juego las reglas, métodos y conceptos lógicos implicados en la demostración, por lo que lo hace asequible no solo al docente si no al estudiante que quiere aprender a hacer demostraciones matemáticas. Cabe decir que para el profesor “una de sus metas principales es que el estudiante aprenda a leer demostraciones como las que aparecen en los libros de texto” (Solow, 1987, pág. 7) y aprenda a sistematizarlas, de tal forma que luego sea capaz de hacer sus propias demostraciones, y es que, en definitiva, si bien existen unos procedimientos para demostrar, cada quien tiene su estilo de cómo hacerlo, algunos gastan más líneas que otros, unos prefieren un método más que otro (claro



esta que no todo se puede demostrar por un único método, además de que uno puede ser más

**Facultad de Educación**

viable que otro, dependiendo lo que se quiera demostrar), el caso es que siempre debe respetarse

el proceso deductivo, es decir, que cada paso en la demostración esté justificado para que se

llegue a concluir la validez de la proposición.

Resaltamos además como estrategia para comprender algunos conceptos de la lógica y los

procesos argumentativos, el leer demostraciones ya hechas, no para imitar o aprender de

memoria su procedimiento, si no para observar regularidades, relaciones entre los conceptos,

maneras de proceder, y de esta forma ser conscientes de la naturaleza de los conceptos y de la

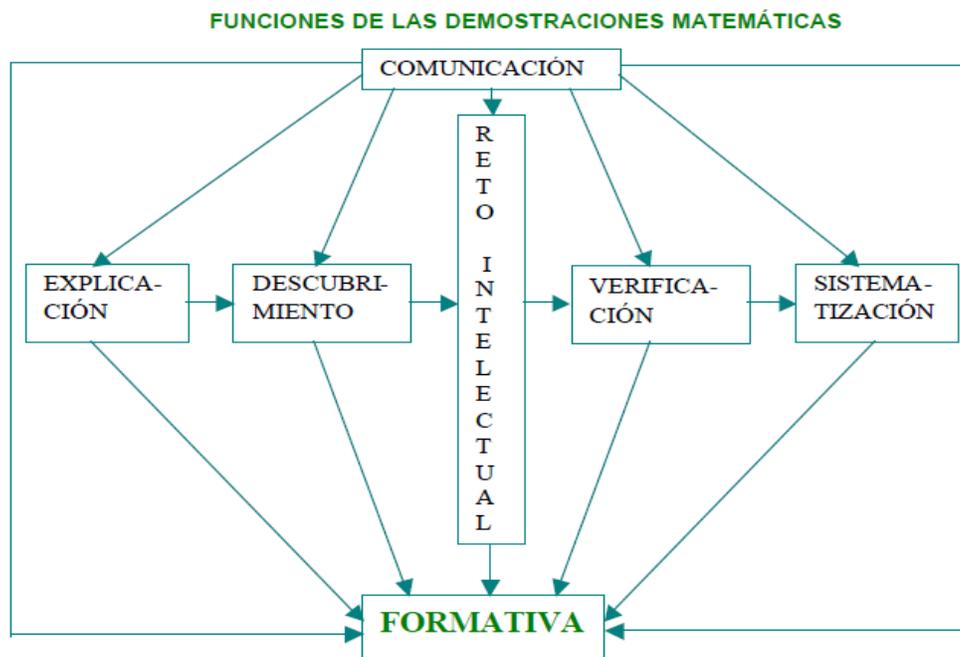
argumentación, y del rol que desempeña ésta dentro de la demostración, para posteriormente

ponerlo en práctica en la realización de otras demostraciones, ya sean en principio análogas a las

leídas.

En cuanto a las funciones de la demostración podemos citar el trabajo de Villiers, (1993), que

posteriormente es retomado por Bravo y Arrieta (2005) con el siguiente esquema:



**Figura 1. Funciones de las demostraciones matemáticas.**



Iberoamericana de Educación.

En él recalcan el valor formativo de las demostraciones. Se convierten éstas en una actividad significativa para los estudiantes, por cuanto desarrolla conocimientos, habilidades y valores.

Ahora, rastreando algunos trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones, encontramos el realizado por Ibañes (2001) en el que se trabajan cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración:

- ¿En qué consiste entender las demostraciones matemáticas?
- ¿Qué clase de pruebas convencen a nuestros estudiantes?
- ¿Reconocen los alumnos las demostraciones matemáticas?
- ¿Cómo influye la manera de redactar los enunciados de los teoremas en su comprensión por parte de los alumnos? (pág. 3)

Y revisando estas cuestiones, grosso modo, podemos decir que: es necesario comprender el enunciado que se quiere demostrar, identificando y utilizando adecuadamente los conectivos lógicos en el proceso argumentativo, al igual que las reglas lógicas asociadas. El trabajo arroja también que las demostraciones con mayores cualidades explicativas son las que más convencen a los estudiantes y no aquellas que tienen fines probatorios.

Por otra parte, Fiallo, Camargo y Gutiérrez, (2013) afirman que:

aún persisten serias dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de

la demostración en todos los niveles educativos, pero principalmente en la formación



de maestros. Es asunto que debe atenderse de manera urgente, pues las experiencias

**Facultad de Educación**

académicas de los futuros educadores influyen de marcada manera en la importancia con

la que asuman la enseñanza de la demostración en la escuela. (pág. 199)

Este dato ratifica la importancia y la pertinencia de nuestro trabajo de investigación, apelando a que para estos autores y para nosotros, el asunto de la demostración es de vital utilidad en la formación de maestros, y requiere, por tanto, investigaciones que contribuyan a mejorar su enseñanza y aprendizaje, reconociéndola como un aspecto fundamental de las matemáticas y que se sustenta en la argumentación.

Y hablando un poco de los problemas u obstáculos que se presentan en los estudiantes, que impiden avanzar en los procesos argumentativos, hacemos referencia al trabajo de Travieso y Hernández (2017) que nos indica que:

Gran parte de los estudiantes no son capaces de resolver las tareas de carácter teórico.

Los estudiantes no desarrollan procedimientos lógicos del pensamiento, necesarios para responder tareas lógicas.

A los estudiantes universitarios les resulta cada vez más difícil explicar un hecho o fenómeno expresando sus ideas correctamente, de forma directa y precisa.

Utilizan estrategias o acciones aprendidas de memoria para resolver problemas, a veces, complejos, lo que no funciona, lógicamente, en el caso del análisis teórico de una situación dada, donde tiene que llegar a una solución de forma creativa e independiente.

(pág. 54)



Lo anterior coincide con nuestro pensamiento, en cuanto a que uno de los problemas más

**Facultad de Educación**

presentes en los estudiantes, que impide la comprensión de algunos conceptos de la lógica y que también impide el aprender a argumentar, es la reproducción memorística de las demostraciones, pues no permite que se de paso a la creatividad, a la intuición y al correcto proceder en el proceso deductivo de una demostración. Asimismo, no permite que el estudiante pueda llegar a demostrar otras proposiciones matemáticas, pues no entenderá que cada demostración, si bien tiene una cierta estructura, es diferente en algo a las demás.

Aquí cabe hablar de la intuición como elemento importante en los procesos argumentativos.

Según Crespo (2014):

La intuición, entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida en la investigación y en el aprendizaje. Ante el planteo de un problema matemático, debe despertarse el interés, basado en la aceptación de la incertidumbre como parte del proceso de aprendizaje. La intuición, por momentos saltea escalones del razonamiento lógico. Es cierto que este método puede conducirnos por caminos falsos, por ello es necesario extremar el cuidado, pero debe aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje. Debemos recordar que, en los niveles elemental, básico y medio, no se están formando matemáticos, se está enseñando a usar la matemática y educando en la comprensión y el manejo del método de esta ciencia. Se está enseñando a pensar lógicamente. Hace falta educar a la intuición. (pág. 24)

La autora destaca la importancia que tiene la intuición en el aprendizaje y por tanto advierte que se le debe educar, ¿acaso la intuición se educa?, pensarían muchos, refiriéndose a que por el contrario es algo innato al ser humano, el que la posee la posee, y el que no, no, sin embargo,



podríamos decir que la intuición es algo místico, es una especie de conocimiento instantáneo que

**Facultad de Educación**

se nos presenta cuando observamos algo o nos enfrentamos a un concepto, es decir, no se construye de manera racional, es ahí cuando surgen cuestiones que no pueden explicarse o incluso verbalizarse, el sujeto simplemente pone en evidencia lo que le evocó el concepto, en el caso de una demostración, lo que él cree que debe hacerse, sin tener una razón justa de por qué lo hace de esa manera y no de otra, es como si la intuición estuviese guiada no por el pensamiento, si no por una especie de “presentimiento” gobernado por las emociones, que son más sentidas que pensadas, pero que podríamos atribuir su naturaleza a las condiciones particulares del sujeto, de esta manera la intuición estaría mediada por una carga experiencial, por una capacidad en la percepción e incluso por las creencias que se hallan instaurado en el sujeto a partir de la cultura y su entorno social, y por tanto si se puede educar en ello.

Podríamos pensar, que cuando comúnmente decimos “de tanto hacer demostraciones, uno coge malicia”, nos estamos refiriendo a una intuición que está siendo educada, pero que pierde su naturaleza, porque ésta de alguna manera ya está influenciada por un pensamiento abstracto que se va elaborando a partir del razonamiento.

Ahora bien, no podríamos dejar de lado los trabajos de Hanna (2000), en los que resaltamos entre otras cosas el papel del docente en la motivación que ejerce sobre los estudiantes para que estos exploren y hagan el esfuerzo de realizar demostraciones.

Y sin duda alguna, un referente en el tema es Nicolás Balacheff (2000) con el estudio de “los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas”, que tuvo como fin “dilucidar la posición y el sentido de los procesos de prueba puestos en ejecución en la solución del problema, particularmente examinando de qué manera los alumnos llegan a la convicción de la validez de la solución que se proponen” (Balacheff, 2000, pág. 7).



Para este autor la interacción social juega un gran papel en los procesos demostrativos, pues se

**Facultad de Educación**

establecen negociaciones entre los estudiantes y entre éstos y el profesor, de tal forma que se pueda llevar a cabalidad el acto demostrativo, es así como se considera a la demostración una actividad social, es decir, se construye con los otros.

Hasta aquí se han revisado algunos trabajos sobre la demostración en matemáticas; a continuación, se hará énfasis en un trabajo específico sobre un concepto de la lógica como lo es la implicación, y a partir de este, citar las palabras de una docente que reafirma una dificultad muy notoria en los estudiantes a la hora de demostrar y argumentar en matemáticas.

Seguidamente se exponen dos trabajos que se han realizado propiamente en argumentación.

Alvarado y González (2010) en un estudio de casos sobre la implicación lógica, encuentran algunas dificultades en la argumentación. Por ejemplo, al estudiar el caso de Nancy se evidencia una falacia de afirmación del consecuente, es decir, cuando trata de demostrar que  $p \rightarrow q$  asume que  $q$  es verdadero y trata de deducir  $p$ , llevando a pensar a los autores “que no admite el papel condicional de la hipótesis, lo que viene a confirmar que una de las dificultades observadas en los alumnos es el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y conclusión” (Alvarado Monroy & Gonzalez Astudillo, 2010, pág. 81).

Además, el dominio del lenguaje era escaso a la hora de argumentar, como también lo identifica la profesora Susanna S. Epp (2003) en sus alumnos, afirmando que:

As I taught the course, however, I found that my students' difficulties were much more profound than I had imagined. Indeed, I was almost overwhelmed by the poor quality of their proof-writing attempts. Often their efforts consisted of little more than a few disconnected calculations and imprecisely or incorrectly used words and phrases that did not even advance the substance of



their cases. My students seemed to live in a different logical and linguistic world from the one I

**Facultad de Educación**

inhabited, a world that made it very difficult for them to engage in the kind of abstract

mathematical thinking I was trying to help them learn. (pág. 886).

En castellano, básicamente la anterior cita hace referencia a que la profesora descubre la mala calidad de redacción de sus alumnos en cuanto a las pruebas. Estos usaban palabras y frases de manera imprecisa o incorrectas, lo que hacía difícil que pudieran comprender el tipo de pensamiento matemático abstracto que la profesora quería que ellos aprendieran.

Es quizá la falta de dominio del lenguaje una dificultad recurrente a la hora de argumentar en matemáticas, porque interviene allí el argot del joven que pretende hacerlo. Pero este no es el problema mayor, el problema radica en la terminología y conceptualización errónea utilizada al hilar las frases que servirán de argumento en la demostración, se hacen pruebas de mala calidad.

El maestro en este aspecto debe involucrar a los alumnos en un mundo lógico y lingüístico en el que puedan construir los códigos necesarios para el pensamiento matemático abstracto que les servirá para realizar operaciones mentales superiores y comprender las matemáticas de una manera más global.

Ahora bien, en argumentación encontramos el trabajo de Calle y Mena (2017), realizado con estudiantes de grado once, en él se pudo evidenciar que:

En los argumentos escritos por los estudiantes se presentaron inconvenientes debido, tal vez, a la falta de orientación en su entorno escolar sobre procesos argumentativos desde las diferentes áreas del conocimiento; los estudiantes no están acostumbrados a exponer sus puntos de vista y mucho menos a defenderlos o sustentarlos de forma precisa y coherente, no siempre encuentran necesario presentar sus ideas en un



**Facultad de Educación**

Es así como las autoras identifican dificultades a nivel semántico y sintáctico en los argumentos expuestos por los estudiantes, y esto obedece precisamente a que poco o nada se trabaja la argumentación como una forma de adquirir y construir conocimientos en interacción con los otros, a partir de las diferentes áreas del saber que componen el ciclo escolar.

Además, el trabajo logra entrever la importancia de la argumentación, no solo desde la parte simbólica y formal, sino de la que se hace desde un lenguaje natural y empírico, que es también la apuesta de este trabajo de investigación, en el que la intuición toma gran importancia y es fundamental para transitar de un lenguaje natural a un lenguaje lógico formal, pero advirtiendo también, que esta nos puede conducir por caminos erróneos, de ahí que sea un medio y no un fin utilizarla de manera adecuada para que ayude al aprendizaje y al saber matemático.

Por último, en la tesis doctoral de Durango (2017) titulado “Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso”, se propone un Modelo Teórico Integral sobre argumentación, en el que se amplía la forma en como comúnmente se argumenta en matemáticas, se pasa de un modelo de argumentos a dos columnas como es la afirmación-razón, que obedece a unas cualidades lógicas, a un modelo de argumentos a cuatro columnas, en el que se incorporan las cualidades retóricas y las cualidades dialécticas. Esta incorporación “permitió mostrar evidencias empíricas de la importancia de la persuasión, del convencimiento, del diálogo y del monólogo en la argumentación de los maestros en formación inicial en su práctica pedagógica” (Durango Urrego, 2017, pág. 181), hecho que constata que la argumentación es una actividad social, en la que se da lugar a la refutación, a la impugnación de afirmaciones, a la negociación, para que los implicados por medio del diálogo y de los elementos que lo nutren como lo es el uso de analogías, de metáforas, de representaciones,



lleguen a consensos que fortalezcan los procesos tanto argumentativos como demostrativos que

**Facultad de Educación**

sustentan el quehacer matemático, y favorezcan a su vez, la construcción de conocimiento.

## **1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En este apartado se justifica el por qué las dificultades en argumentación son objeto de investigación y se aborda la formulación del problema.

### **1.2.1. JUSTIFICACIÓN**

Las demostraciones en matemáticas suelen ser la piedra en el camino para la gran mayoría de los estudiantes en los primeros niveles de un programa de formación profesoral en ciencias, como lo es la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas de la Universidad de Antioquia; algunos no han tenido un acercamiento a los conceptos de la lógica que se utilizan en demostraciones matemáticas en el bachillerato, pues tales conceptos, en general, han sido tratados como un problema de difícil comprensión y en muchos casos innecesarios, si se compara con la gran cantidad de temas que se deben abarcar en los periodos académicos, por tanto, la enseñanza tradicional no los utiliza, provocando entonces que al iniciar el primer semestre de carrera, los estudiantes se enfrenten a un nuevo pensamiento que choca con las ideas y maneras de ver las matemáticas, ya no simplemente como el resolver problemas y llegar a un resultado, sino precisamente a corroborar que efectivamente ese es el resultado y no otro, por medio de una demostración; una demostración que requiere de argumentos y de razonamientos que sustenten su veracidad.

Ahora bien, considerando que las demostraciones en matemáticas no se trabajan (en la mayoría de los casos) en las aulas escolares colombianas, ¿por qué se trabajan en los planes de formación profesoral en matemáticas?, ¿para qué se trabajan?, ¿Qué función cumplen?, son algunas de las



preguntas que pueden hacerse, incluso los mismos estudiantes de estas carreras, apelando a que

**Facultad de Educación**

no tiene ningún sentido demostrar y mejor preocuparse por la aplicabilidad de los conceptos que se ponen en juego.

Al respecto, se podría pensar también que el demostrar puede generar en sí mismo problemas de aprendizaje asociados con la atención e incluso con la discalculia en alguna de sus manifestaciones y más, en personas que no van a ser científicos como tal, debido al rigor y formalismo que las demostraciones acarrearán, sin embargo, “las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar” (Bravo Estévez, del Sol Martínez, & Valdés, 2001, pág. 4).

Lo anterior, que puede pensarse como algo contradictorio, es solo una manera en la que se puede reflexionar al respecto a través de algunos colectivos de pensamiento, y que a nuestro parecer coincidimos en las ventajas que los procesos demostrativos y argumentativos pueden originar en el individuo, dotándolo de aptitudes para realizar conjeturas, inferencias, deducciones, además de tener la capacidad de validar o refutar proposiciones, etc., de tal forma que los elementos en juego le permitan ampliar su mundo; no solo entender que las demostraciones se aplican en la geometría, como ya muchos trabajos de investigación lo recalcan, sino también en otras áreas de las matemáticas como la aritmética (curso en el que se encuentra la población objeto de estudio de esta investigación) y mejor aún en otras disciplinas, pues según Hempel (1995): “las demostraciones matemáticas se basan exclusivamente en deducciones lógicas” (pág. 9), deducciones que permiten incurrir y ser aprovechadas por estas otras ciencias en busca de certeza y formalización, por eso este autor considera a las matemáticas como la “reina de las ciencias” (Hempel, 1995, pág. 1). Y es que las matemáticas les sirven de fundamento.



El hecho de resaltar la importancia de la demostración en matemáticas estriba también en que, al

**Facultad de Educación**

relacionar los conceptos allí involucrados por medio de razonamientos lógicos, el estudiante pueda identificar la “naturaleza” de ciertos enunciados y proposiciones matemáticas, en aras de adquirir también la capacidad de referirse a qué contextos estos tienen aplicabilidad. Además, la demostración desarrolla un pensamiento creativo, quizá especulativo y permite reflexionar sobre lo que se tienen como verdades matemáticas; verdades que no son absolutas, pero son verdades en ciertos contextos.

Por otra parte, la argumentación es la columna vertebral de la demostración, es el acto de justificar o refutar una tesis o proposición por medio de razonamientos. No solo se hace uso de ella en el campo de las matemáticas sino también en las demás ciencias y disciplinas, de hecho se puede ver como un proceso natural que se usa todo el tiempo como en una conversación, en la que se intenta persuadir y convencer al otro de que se tiene la razón, cabe aclarar que dependiendo del terreno de donde se esté trabajando, ésta obedece a unas particularidades y a unas características, por ejemplo el demostrar en matemáticas obedece a un asunto de argumentación más de índole deductiva.

Apelando a que las dificultades en las actividades demostrativas se focalizan en los procesos argumentativos, como lo evidencia uno de los investigadores de este trabajo en los espacios de monitoria de un curso de Fundamentos de Aritmética de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, desempeñando el rol de monitor, se pretenden identificar las dificultades, en cuanto a la argumentación, que presentan los estudiantes a la hora de enfrentarse con problemas de razonamiento lógico, en aras de mejorar en un futuro el desarrollo de los procesos demostrativos. Esta identificación de las dificultades puede hacerse con estudiantes de otros cursos de matemáticas en los que se haga uso de demostraciones, es



importante decir que la gran mayoría de los estudiantes del curso Fundamentos de Aritmética

**Facultad de Educación**

han pasado o están actualmente cursando estudios en geometría; el hecho de que el trabajo se

enmarque en el área de la lógica matemática, es porque el pensamiento lógico transversa tanto el

pensamiento numérico, como el geométrico, y con ello pretendemos que se experimenten otras

formas de argumentar, que escape a la forma en cómo se presentan en un curso como el de

aritmética o el de geometría, pero teniendo en cuenta que los elementos constitutivos de estas

ramas de las matemáticas son en algunos casos similares y pueden adoptarse formas de

argumentar semejantes. Procuramos que con esto se dé más cabida a la razonabilidad, a la

intuición, a la negociación, a la persuasión y a la interacción con los otros, para que se construya

conocimiento y se aprenda a argumentar y posteriormente a demostrar en matemáticas,

considerando que la argumentación no es una condición suficiente para aprender a demostrar,

pero si una condición necesaria.

**1.2.2. PROBLEMA**

La mayoría de los estudiantes de un curso de fundamentos de aritmética, de la licenciatura en

educación básica con énfasis en matemáticas de la universidad de Antioquia, presentan

dificultades en la argumentación, lo que impide el desarrollo de los procesos demostrativos.

**1.2.3. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

¿Qué dificultades en la argumentación, presentan los estudiantes de un curso de Fundamentos de

Aritmética de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad

de Antioquia?

**1.2.4. OBJETO DE ESTUDIO**

Las dificultades en la argumentación.



**1.3. OBJETIVOS**

**Facultad de Educación**

**1.3.1. Objetivo general**

Identificar las dificultades en la argumentación, que presentan los estudiantes de un curso de Fundamentos de Aritmética de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia.

**1.3.2. Objetivos específicos**

Diseñar un instrumento para identificar las dificultades en la argumentación.

Categorizar cada una de las dificultades en la argumentación, de acuerdo a los procesos involucrados en la actividad demostrativa.

**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



### CAPITULO 2: MARCO REFERENCIAL

En esta sección se abordarán los diferentes marcos: el marco contextual, el marco legal, el marco teórico y el marco conceptual, que serán referentes en el trabajo de investigación.

#### 2.1. MARCO CONTEXTUAL

La Universidad de Antioquia es una Institución de Educación Superior creada mediante la Ley 71 de 1878 del extinguido Estado Soberano de Antioquia, es una institución estatal del orden departamental; mediante el Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964 del Gobierno Nacional obtuvo reconocimiento como Universidad, código ICFES 1201, Registro de Alta Calidad, Acreditación Institucional del Ministerio de Educación Nacional, Resolución 16516 del 14 de diciembre de 2012, NIT 890.980.040-8.

Está organizada como un Ente Universitario Autónomo con régimen especial, vinculada al Ministerio de Educación Nacional en lo atinente a las políticas y la planeación del sector educativo y al Sistema Nacional de Ciencia y Tecnología. Tiene por objeto la búsqueda, desarrollo y difusión del conocimiento en los campos de las humanidades, la ciencia, las artes, la filosofía, la técnica y la tecnología, mediante las actividades de investigación, de docencia y de extensión, realizadas en los programas de Educación Superior de pregrado y de posgrado con



La Universidad tiene su domicilio en la calle 67 No. 53 - 108, ciudad de Medellín, Departamento de Antioquia, República de Colombia. Con arreglo a la Ley y al Estatuto General, puede establecer seccionales y dependencias en cualquier lugar del territorio nacional, y crear o formar parte de corporaciones, fundaciones y otras instituciones públicas o de economía mixta; cuenta con 4 escuelas, 4 institutos, 3 corporaciones y 14 facultades que son las dependencias básicas y fundamentales de la estructura académico-administrativa de la Universidad, con la autonomía que los estatutos y los reglamentos les confieren para darse su organización interna, administrar sus recursos, planificar y promover su desarrollo, coordinar, dirigir y administrar investigación, docencia y extensión, en todas sus modalidades y niveles, en un área del conocimiento o en áreas afines. Son dirigidas por un decano y el consejo de la facultad.

La Facultad de Educación está ubicada en la Ciudad Universitaria (sede principal de la Universidad de Antioquia), la cual se encuentra en el barrio Sevilla en la zona nor-oriental de la ciudad de Medellín, Colombia. Calle 67 Número 53 - 108 Bloque 09. Dentro de sus programas se encuentra la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de modalidad presencial y jornada diurna, con una periodicidad de admisión semestral y un número total de créditos de 177 para poder optar por el título de *licenciado (a) en educación básica con énfasis en matemáticas*.

Tiene como propósito general:

Formar maestros de matemáticas, para la educación básica, que contribuyan al mejoramiento de la calidad de la educación en el país, con: sólida formación matemática,



didáctica y pedagógica e investigativa en los saberes que le son propios; apropiación de las

**Facultad de Educación**  
metodologías y procedimientos para resolver problemas que le planteen su profesión;

compromiso y reconocimiento como un ser consciente y activo para la transformación de

la sociedad; conocimiento de los desarrollos de la ciencia y la tecnología; visión de futuro,

que le permita enfrentar los retos de la evolución de la profesión. (Facultad de Educación,

2008, pág. 16)

Su plan de estudio se muestra a continuación:



Figura 2. Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Fuente: tomado del documento maestro de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas. (2014)

En el Plan de Estudios se encuentra el curso de Fundamentos de Aritmética, que actualmente cuenta con dos grupos de aproximadamente 25 estudiantes cada uno, en su mayoría de los estratos



1,2 y 3. Este curso hace parte del núcleo académico referido al pensamiento numérico, pero tiene

**Facultad de Educación**

dentro del programa un tópico acerca de la lógica, en el que se trabajan los conectivos lógicos y las reglas de inferencia, que posteriormente servirán como base preliminar para abordar problemas relacionados con conjuntos y con los sistemas numéricos. El número de créditos del curso es de 4, con una intensidad horaria de 96 horas en el semestre, que se distribuyen en 6 horas a la semana.

## **2.2. MARCO LEGAL**

Antes de mencionar los aspectos legales que enmarcan el trabajo de investigación, es bueno recurrir a la historia para indagar sobre lo que se ha hecho en la educación matemática colombiana con respecto a la lógica, a la demostración y a la argumentación, que es la triada en la que nos enfocaremos para llevar a cabo esta investigación, teniendo como población, estudiantes de un curso de Fundamentos de Aritmética.

La aritmética es quizá una de las ramas de las matemáticas que más se ha enseñado en Colombia, por lo menos desde los años cincuenta en conjunto con la geometría. En los años 70 la Misión Alemana escribió los primeros textos para enseñanza primaria incluyendo conceptos elementales de lógica y conjuntos, cinco años más tarde se publican una serie de guías con la ayuda del Instituto Colombiano de Pedagogía (ICOLPE), introduciéndose en ellas los conceptos de conjuntos, cardinalidad, relaciones de orden y de equivalencia, propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa y cancelativa para la suma y la multiplicación e infinitud de los números naturales y racionales. Después de la aparición oficial de los conjuntos dentro de los contenidos de enseñanza, en el año 78 se da una reforma curricular (decreto 1419) que permitió la enseñanza de la lógica desde el segundo año de primaria hasta el quinto grado, pasando por el significado de las expresiones **y, o, todos, algunos y ninguno**, se analizan estas expresiones dentro del lenguaje ordinario, se introduce la noción de proposición, el valor de verdad de las



proposiciones y la negación de proposiciones, además, se dan los nombres a los conectivos

**Facultad de Educación**

lógicos. Estos contenidos se mantuvieron hasta finales de la década de los 80, pues la falta de preparación de los profesores de matemáticas los hizo volver a la enseñanza clásica de una matemática parcelada. No obstante, algo de la lógica se siguió enseñando, por lo general, al principio de los cursos para dar soporte a las operaciones entre conjuntos y nada más. Mas tarde y como lo plantea Gómez (2014):

Una exploración de los programas basada en las series de textos de mayor circulación, *Matemática Progresiva* y *Matemáticas en Acción*, las cuales determinaron los contenidos del currículo, imponiéndose sobre el currículo oficial para la enseñanza de la matemática en el bachillerato, entre mediados de los ochenta y finales de los noventa, mostró lo siguiente: En sexto grado la primera unidad comprendía los temas razonamiento y conjuntos, proposiciones y sus negaciones, proposiciones abiertas y cerradas, cuantificadores, conjuntos, notación y representación, disyunción y unión entre conjuntos, conjunción e intersección de conjuntos, diferencia y diferencia simétrica; en séptimo grado la primera unidad estudiaba lógica y conjuntos, las proposiciones, de los conjuntos a la intersección, disyunción y unión, complemento y negación, diferencia de conjuntos, diferencia simétrica y cuantificadores; en octavo grado la unidad ocho incluía lógica y conjuntos, lógica proposicional, tablas de verdad para las proposiciones compuestas, método directo de demostración, método indirecto de demostración; en el noveno grado se retoman nuevamente las tablas de verdad y los métodos de demostración; en los grados diez y once no hay contenidos de lógica ni conjuntos. (pág. 174).



Ahora bien, es con la Ley General de Educación (ley 115) de (1994) que se reorganiza la

## **Facultad de Educación**

educación en Colombia y con ella se da prioridad a la Educación Matemática a partir de los

Lineamientos Curriculares de 1998.

Según estos lineamientos, los conocimientos matemáticos se organizan en 5 pensamientos:

pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico o de medida, pensamiento aleatorio o probabilístico y el pensamiento variacional. Consultando los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, el pensamiento lógico es un pensamiento aparte del pensamiento matemático, pero que en conjunción logran en el individuo un ser matemáticamente competente. Piaget, citado en los estándares, propone que “el pensamiento lógico actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y que el pensamiento matemático se distingue del lógico porque versa sobre el número y sobre el espacio, dando lugar a la aritmética y a la geometría” (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Sin embargo, si nos vamos a la descripción de los 5 pensamientos, notamos que la lógica transversaliza estos pensamientos, por ejemplo, cuando en el pensamiento numérico se habla de comparar y cuantificar situaciones con números en diferentes contextos, se está haciendo uso de términos de la lógica. Por otra parte, debemos aceptar que el pensamiento matemático y el pensamiento lógico guardan una estrecha relación en cuanto a procesos que comparten, como el razonamiento y el desarrollo de competencias argumentativas que implican probar o refutar y de esta manera poder llegar a una demostración formal. El hecho de que el pensamiento lógico no esté considerado como un pensamiento matemático, radica en que las matemáticas no son las únicas que pueden contribuir a formar un pensamiento lógico en los estudiantes, otros saberes e incluso muchas actividades humanas como el deporte, pueden favorecer el desarrollo de competencias argumentativas y deductivas, fortaleciendo así tal pensamiento.



Cabe decir que en los artículos 20, 21 y 22 de la Ley General de Educación (1994) se proponen

**Facultad de Educación**  
como objetivos de la educación básica:

- Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.
- El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones.
- El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, lógicos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y de la vida humana. (págs. 6-7).

En estos objetivos se hace alusión al razonamiento lógico, que es considerado como un proceso general, y es el que más se acerca a lo que nos compete en este trabajo, por tanto, hacemos alusión a este a través de los lineamientos curriculares y de los estándares.

Se entiende por **razonar**, la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. Es importante tener en cuenta la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo, empezar por razonamientos de tipo informal hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento. Además, conviene enfatizar que el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y, por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas.

Según los Lineamientos Curriculares (1998), Razonar en matemáticas tiene que ver con:



- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.

**Facultad de Educación**

- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (pág. 54)

Es claro que desde el Ministerio de Educación Nacional se promueve que los estudiantes hagan actividades que desarrollen el razonamiento lógico empezando desde los primeros grados y en relación con el contexto, de tal forma que a partir de sus experiencias puedan percibir regularidades, hacer predicciones y conjeturas, dar explicaciones coherentes de las situaciones, proponer soluciones posibles a los problemas planteados, de manera que estas se adopten o se rechacen con argumentos y razones; igualmente, estas actividades ayudan a comprender que las matemáticas no son una memorización de fórmulas, sino que tienen sentido, que potencian la capacidad de pensar, además, que pueden ser muy divertidas, contrario, a lo que muchos piensan de ella.

También, en las situaciones de aprendizaje es importante reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo (que va de lo particular a lo general) como el abductivo (en el que se elabora una hipótesis explicativa sin fuerza probatoria), al formular hipótesis o conjeturas, y el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas



previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos.

Se identifica en todo esto que los procesos demostrativos y argumentativos son evidentes en las actividades que realizan los estudiantes a la hora de aprender matemáticas, así no se hagan a veces explícitos en los documentos que describen los programas de enseñanza y aprendizaje a nivel de educación básica y media, y a nivel universitario.

### **2.3. MARCO TEÓRICO**

Esta investigación está fundamentada en la “Actividad demostrativa” trabajada por Samper, et al (2006), en la que los elementos que la componen están permeados por un enfoque argumentativo que se instaura en una perspectiva sociocultural del aprendizaje. Ésta permitirá identificar las dificultades en la argumentación a partir de las diferentes acciones del proceso y producto que caracterizan dicha actividad. Cabe decir, que este marco teórico fue utilizado en el trabajo de Salazar (2018) titulado “Dificultades que presentan los estudiantes del grado 10° del colegio Colombo Británico de Envigado en el acercamiento a la actividad demostrativa en geometría” y permitió alcanzar los objetivos propuestos, es así que consideramos pertinente hacer uso de este, sobre todo porque establece nexos entre procesos heurísticos asociados al descubrimiento y en el que la intuición tiene su asidero, además de los procesos deductivos asociados a la lógica de la justificación.

A continuación, se dan unas apreciaciones en cuanto a las acciones incluidas en los aspectos: proceso y producto de la Actividad demostrativa. El proceso, relacionado con actividades que involucran ejecuciones de tipo empírico o heurístico, y el producto, con acciones propias de la práctica de justificar, más acordes al acto demostrativo.



La secuencialidad de las acciones no es estrictamente evidente, pero pareciese ser una ruta

**Facultad de Educación**

adecuada, tal y como lo expresa Samper, et al (2006): “la organización de las acciones en una lista no supone ningún orden, pero insinúa una secuencia que parece natural en la actividad demostrativa” (pág. 59).

**Elementos del aspecto proceso**

**Visualización:** Tiene que ver con comprender acciones básicas a partir de la observación (mirada matemática), en el que se puede de algún modo representar un hecho gráficamente, y establecer e identificar elementos y relaciones subyacentes, para generar así inferencias sobre el problema propuesto.

**Exploración:** En esta etapa se llevan a cabo acciones empíricas, cuyo objetivo es descubrir propiedades o relaciones entre propiedades, para comprender una situación particular. Por ejemplo, se pueden construir tablas o utilizar otros recursos que permitan asociar elementos y poder abordar el problema.

**Conjeturación:** Hace referencia a la postulación de afirmaciones de tipo condicional “si... entonces...” a la luz del análisis que se hace de las acciones de visualización y exploración y del convencimiento personal logrado por el estudiante, de tal forma que tenga la iniciativa de comprometerse con una justificación.

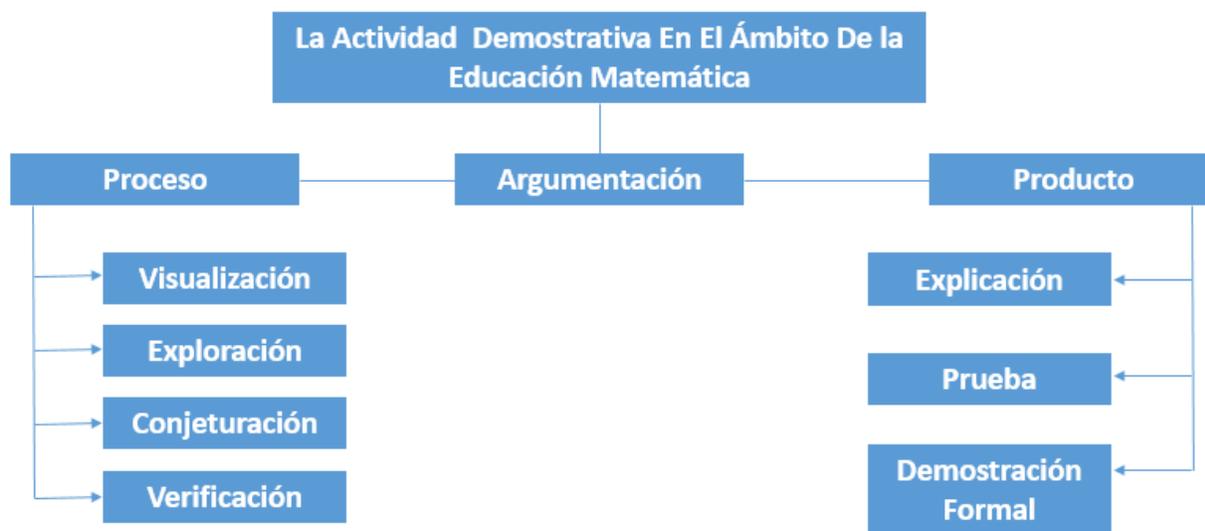
**Verificación:** Tiene que ver con acciones empíricas que pongan a prueba la conjetura realizada, de manera que se pueda validar y ratificar la afirmación postulada.

**Explicación:** Hace referencia a la construcción de un discurso (justificación) basado en las acciones realizadas en el aspecto proceso, en el que se intenta convencer al otro sobre la veracidad de una afirmación y el porqué de la solución que se sugiere. Es de carácter empírico y obedece a un lenguaje cotidiano.

**Prueba:** Tiene que ver con la argumentación de una situación en la que se explicitan afirmaciones y razones haciendo uso de propiedades, pero que carece del rigor estructural de una demostración, además, es reconocida y aceptada por el grupo de personas que estén involucrados en el problema propuesto.

**Demostración formal:** Hace referencia a una justificación de carácter deductivo, organizada, referidas a un sistema axiomático que obedece a un conjunto de reglas lógicas que permiten concluir la validez de la proposición.

El siguiente esquema, esboza el referente teórico de la Actividad Demostrativa.



(Samper, et al., 2006, p. 63).

Figura 3: La Actividad Demostrativa



**Facultad de Educación**

Hasta ahora se han definido algunos conceptos muy importantes tenidos en cuenta en el trabajo de investigación, como lo es la definición de intuición propuesta por Crespo (2014), y lo que se entiende por razonar según los Lineamientos Curriculares, además, se han abordado algunas interpretaciones de las acciones incluidas en los aspectos: proceso y producto de la Actividad Demostrativa. A continuación, se pretende ahondar sobre qué se entiende por argumentación, qué es la lógica y qué son problemas de razonamiento lógico.

La **argumentación** es un término que hace referencia a una acción que toma cierto aspecto y obedece a algunas reglas según el ámbito desde el cual se trabaje, por ello su amplia definición, asumida por diferentes autores de distintas áreas del conocimiento, a veces viene acompañada de un apellido, como por ejemplo la argumentación en matemáticas; en este trabajo se adoptarán solo algunas apreciaciones sobre ella, que entren en concordancia con los objetivos del trabajo, de manera que se pueda acotar el vasto significado que esta adquiere.

Martin (2016) afirma que:

La definición de argumentación alude a la acción de argumentar, básicamente esta acción consiste en proporcionar argumentos y razonamientos con el propósito de demostrar algo, permitiendo por medios lingüísticos resolver discrepancias o problemas obviando así el recurso a la fuerza o coacción física. (pág. 1)

En la misma línea, Haidar (2000) plantea que: “la argumentación es un procedimiento por el cual una persona, o grupo de personas, intenta persuadir a un auditorio para que adopte determinada posición, recurriendo a argumentos que buscan demostrar la validez de lo propuesto” (pág. 75).



En ambas definiciones se logra percibir a la argumentación como una actividad social, que

**Facultad de Educación**

además, es racional, como también nos lo hace saber Díaz y Grajales (2010) en su proyecto de investigación sobre el razonamiento en el desarrollo del pensamiento lógico, afirmando que:

La argumentación es un proceso complejo que se emplea en dos sentidos diferentes, ambos relacionados con la persuasión. Uno para describir un discurso que defiende un mensaje concreto basado en razones; otro para provocar conflicto entre personas que no comparten el mismo punto de vista. (págs. 33 - 34)

Por otra parte, Rodríguez (2004) nos confiere otra definición muy corta pero no menos importante, según este, “la argumentación es un proceso secuencial que permite inferir conclusiones a partir de ciertas premisas” (pág. 3). Esta posición es adoptable a la hora de hablar de argumentación matemática, o más concretamente, de la argumentación que se lleva a cabo en la resolución de problemas de razonamiento lógico, en los que, a partir de unas premisas, hipótesis, datos, supuestos, se llega a una conclusión, aplicando adecuadamente las reglas lógicas necesarias para deducir lo requerido.

Ahora, con respecto a la lógica, Castillo (2018) en su libro “Lógica Matemática”, la define como:

La lógica es la ciencia que estudia el razonamiento, donde “razonar” consiste en obtener afirmaciones (llamadas conclusiones) a partir de otras afirmaciones (llamadas premisas) con los criterios adecuados para que podamos tener la garantía de que, si las premisas son verdaderas, entonces las conclusiones obtenidas también tienen que serlo necesariamente. (pág. 9)

Es de notar, que el termino lógica nos remite al concepto de razonamiento. Por otro lado, y de acuerdo con Sáenz, Arrieta y Pardo (2000), citado en Iriarte y otros (2010), “la lógica es la

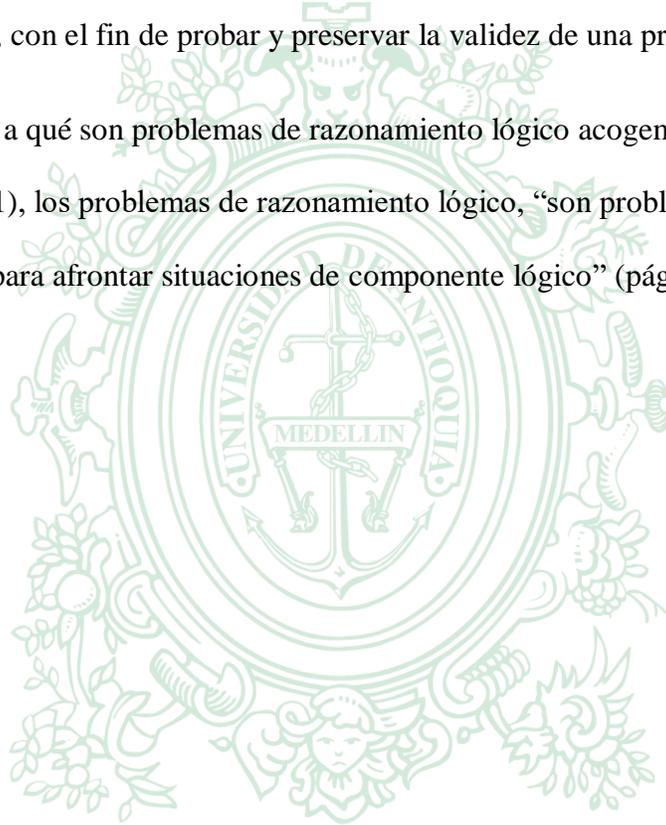


ciencia que establece las reglas mediante las cuales se elaboran los pensamientos que permiten

**Facultad de Educación**

llegar a la verdad o plantear la solución a un problema” (pág. 42). De aquí, que podamos considerar a la lógica, habiendo definido también lo que es la argumentación, como el estudio de los argumentos, en el que estos se organizan y se desarrollan ordenada y coherentemente siguiendo unas reglas, con el fin de probar y preservar la validez de una proposición.

Por último, en cuanto a qué son problemas de razonamiento lógico acogemos la definición que nos brinda Caro (2011), los problemas de razonamiento lógico, “son problemas que permiten desarrollar destrezas para afrontar situaciones de componente lógico” (pág. 271).





### **CAPITULO 3: METODOLOGÍA**

Tratándose de una investigación en el ámbito de la Educación Matemática, es apropiado utilizar un enfoque cualitativo para la recolección de información, pues este permite analizar e interpretar comportamientos, observaciones y aptitudes de los estudiantes a la hora de enfrentarse con problemas de razonamiento lógico en aras de identificar dificultades en la argumentación, que precisamente por tener esta un carácter social, avala la metodología a utilizar, teniendo en cuenta que lo que se busca es estudiar un contexto en particular en el que intervienen seres humanos, como lo son los estudiantes que hacen parte del trabajo investigativo.

#### **3.1. MÉTODO**

El estudio de casos fue el método elegido para esta investigación, pues es un método que permite un análisis detallado de la información, sobre todo, en el contexto educativo, cuyo objetivo principal es la particularización, no la generalización, de tal forma que permite observar y analizar aspectos complejos de un caso en particular, que por otros métodos no se logran identificar. Lo que interesa es conocer bien el caso en su unicidad y comprenderlo a profundidad.

Este método permitió dilucidar dificultades en la argumentación que presentan algunos estudiantes a la hora de enfrentarse con problemas de razonamiento lógico y que como afirma Stake (1999): “podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular” (pág.



16), ya sea este caso en realidad el conglomerado de varios casos seleccionados, que en suma

**Facultad de Educación**

llevan a resultados que el investigador como fuente de interpretación puede considerar para la consecución de los objetivos del estudio, teniendo presente lo dicho en un capítulo anterior, y es que la investigación se ha realizado como una primera pesquisa para mejorar en un futuro asuntos que involucran actividades demostrativas, de ahí que el referente teórico haga alusión a ello.

**3.2. LA SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES**

En esta investigación se tuvo la pretensión de trabajar con dos grupos de estudiantes, el primer grupo conformado por estudiantes de primer semestre que cursan actualmente el curso de Fundamentos de Aritmética, y el otro grupo, conformado por estudiantes que actualmente están entre el segundo y tercer semestre de carrera y que ya lo han finiquitado, esto con el fin de obtener quizá algunos resultados emergentes que nos permitieran contrastar las dificultades en la argumentación encontradas en ambos grupos.

El primer grupo no fue posible establecerlo debido a la negativa de la gran mayoría de estudiantes por participar, los pocos que lo hicieron, se sintieron de algún modo obligados o interesados simplemente por una posible nota en el curso, de tal forma que solo querían que su nombre figurara sin proporcionar elementos relevantes para la investigación, dejando casi todo sin hacer, no porque no supieran sino por apatía por lo que allí se les pedía, querían acabar rápido el test; esta situación llevó a los investigadores a descartar la opción de trabajar con ellos. En cambio, la participación de los estudiantes del segundo grupo y que son aquellos que ya han cursado el curso de Fundamentos de Aritmética, se da de manera voluntaria. Presentaban estos una buena disposición para hacer parte de la investigación, además, de estar comprometidos en mejorar en los procesos argumentativos y demostrativos en su formación como maestros, este



hecho alude a lo que Stake (1999) llama “rentabilidad”, pues la selección que se hace permite

**Facultad de Educación**

que los estudiantes se expresen con mayor naturalidad, sin sentir presión u otro tipo de condicionamientos, esto reduce el tiempo destinado a la implementación de la metodología, y permite una mejor descripción de lo que se quiere obtener, por ello es importante “escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean acogidas” (Stake, 1999, pág. 17).

De esta manera habrá posiblemente una mayor fiabilidad en los resultados, pues se tendrán a participantes un tanto motivados, contextualizados y con alguna intención más allá del mero hecho de participar.

Cabe decir que los participantes de este grupo, 8 en total, eran estudiantes que regularmente asistían a las sesiones de monitoría del curso Fundamentos de Aritmética y que lograron finalizar el curso con gran satisfacción, destacándose entre los demás estudiantes de su curso, esto es importante porque de algún modo el identificar las dificultades en la argumentación que presentan estos estudiantes, podría ser un indicio para realizar una generalización menor, como lo afirma Stake, frente a la situación, es decir, previendo que dichas dificultades tienden a replicarse o incluso a aumentar si se trabajara con otro grupo de estudiantes no tan destacados.

De acuerdo con los resultados obtenidos de este grupo, se estableció una clasificación según los desempeños de los estudiantes, agrupando elementos del aspecto proceso y producto de la actividad demostrativa, con el fin de definir sólo tres niveles que serán los casos objeto de estudio, de esta manera, los casos quedan conformados por:

**3.2.1. Caso I: Visualización – Exploración**

Este nivel se considera como el de desempeño más bajo, los estudiantes que se ubican en él no son capaces de comprender acciones básicas a partir de la observación, ni pueden descubrir, reconocer e identificar propiedades y las relaciones entre estas, de manera que se les dificulta



representar hechos gráficamente, como por ejemplo, pasar de un enunciado escrito en palabras a

**Facultad de Educación**

un lenguaje simbólico y representativo de las proposiciones que componen el enunciado. Se les dificulta también, asociar elementos que permitan abordar adecuadamente el problema e incluso la interpretación misma de este.

**3.2.2. Caso II: Conjeturación – Verificación**

Los estudiantes que se ubican en este nivel es porque han mostrado un desempeño adecuado en los procesos de visualización y exploración, esto según la secuencialidad natural que sugiere la actividad demostrativa, pero no logran postular afirmaciones que luego puedan ser verificadas y constatadas a través de acciones empíricas en las que la intuición cobra gran relevancia para encontrarle una solución al problema propuesto, es decir, las inferencias y conjeturas que realizan a partir de una situación no son correctas y las relaciones que establecen no son adecuadas para abordar el problema, además, los razonamientos que usan no son coherentes, concretos ni concisos.

**3.2.3. Caso III: Producto**

Este nivel es de un desempeño más alto sin llegar a ser el ideal alcanzado por los estudiantes. Si bien, los estudiantes que se ubican en este nivel es porque han pasado satisfactoriamente por las acciones del aspecto proceso, bajo la secuencialidad natural que sugiere la actividad demostrativa, estos no logran pasar de un conocimiento empírico y heurístico a un conocimiento basado en la argumentación caracterizada por estructuras lógicas, más acordes al acto demostrativo, explicativo y justificativo. Los argumentos que exponen solo dan cuenta de las acciones empíricas y no formales que se requieren para abordar el problema, se presentan falencias en la justificación, hay mal uso de propiedades, reglas, etc., que no permiten establecer



una secuencia sólida, organizada y coherente de enunciados que lleguen a la conclusión que se pide.

**Facultad de Educación**

**Nota:** Los anteriores casos quedan caracterizados de ese modo aceptando la secuencialidad natural que sugiere la actividad demostrativa, pero puede que no se presente estrictamente así, teniendo en cuenta que un primer instrumento etiquetado como “instrumento A” evalúa específicamente cada uno de los aspectos del proceso y producto de la actividad demostrativa por separado, y las situaciones que se plantean pueden ser unas más complejas que otras, además, al ser preguntas de selección múltiple en su mayoría, un estudiante por ejemplo podría contestar mal las preguntas referidas al proceso de visualización o de exploración y dar una respuesta acertada a las preguntas referidas al proceso de conjeturación o verificación, debido a la aleatoriedad y probabilidad que este tipo de preguntas genera en relación con la respuesta, por lo que entonces, estos niveles son más viables analizarlos a partir de los resultados de un segundo instrumento etiquetado como “instrumento B”, sin embargo, se tendrán en cuenta también los resultados del instrumento A, basados en los razonamientos que el estudiante haga para llegar a la respuesta; esto cuando se presente un caso como el que se ha citado, de lo contrario se asumirá la secuencialidad de los procesos.

### **3.3. RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN**

Para alcanzar los objetivos de la investigación se diseñaron los dos instrumentos mencionados en la sección anterior, los cuales se constituyeron en forma de test que dieron cuenta de las dificultades en la argumentación presentadas por los estudiantes a la hora de enfrentarse con problemas de razonamiento lógico y que caracterizan los casos escogidos según los desempeños logrados, el primero en base a identificar puntualmente dificultades en los aspectos proceso y producto de la actividad demostrativa y el segundo con una mirada más general sobre la



argumentación a partir de situaciones problema que contenían varios aspectos a la vez y que

**Facultad de Educación**  
permitieron indagar con mayor pericia las dificultades presentadas al intentar darles solución.

Los test fueron aplicados en dos secciones y en lugares diferentes al salón de clase, favoreciendo así la comodidad y disposición de los estudiantes para responder a estos.

### **3.4. DISEÑO DEL INSTRUMENTO**

Los instrumentos (A y B) se construyeron especialmente fundamentados en situaciones y problemas de razonamiento lógico de un nivel apropiado para los estudiantes, pues ya todos habían visto los conceptos básicos de la lógica necesarios para responder acertadamente, sobre todo, en el instrumento A, y para el instrumento B no se requería contar con muchos conocimientos al respecto, sino utilizar la intuición y el razonamiento para buscarle solución a los problemas. La elección de los problemas que se plantean no es para estudiantes de un alto nivel de razonamiento, pues la idea es encontrar dificultades en un contexto particular, en el que hay diversidad de pensamientos y por tanto diferentes formas de acercarse al conocimiento y de argumentar.

A continuación, se describirá la intencionalidad de cada uno de los instrumentos, y a su vez también, la intencionalidad de cada situación o problema planteado en dichos instrumentos.

#### **3.4.1. Instrumento A**

Este instrumento tiene como finalidad ayudar a identificar dificultades en los aspectos proceso y producto de la actividad demostrativa de manera particular, es decir, a partir de problemas en los que es más perceptible un proceso que otro para hallar su solución. Así, se formularon dos problemas para identificar dificultades en cada proceso, dotando el instrumento de un total de 14 problemas, que en su mayoría hacen uso de la selección múltiple con una única respuesta. A



continuación, se explica la intención de cada uno de los pares de problemas propuestos para

**Facultad de Educación**  
identificar dificultades en los distintos procesos.

**Problemas 1 y 2:** Estos dos problemas están enfocados en el proceso de visualización buscando que el estudiante a partir de la observación, y teniendo en cuenta lo que estamos concibiendo como mirada matemática, logre reconocer de una proposición compuesta, el antecedente y el consecuente, además de que pueda visualizar la correspondencia simbólica con la retórica, para ello se provee la información de que en el caso expuesto, una “coma” representa un “entonces” y la expresión “pero” representa una conjunción adversativa, pues no nos interesa con esto saber si el estudiante sabe o no sabe sino que si se le da una información sea capaz de reconocer y visualizar dicha información.

**Problemas 3 y 4:** Estos dos problemas corresponden al proceso de exploración, por ello se proponen dos situaciones que permiten realizar acciones empíricas con el fin de descubrir propiedades y relaciones entre propiedades a partir de algunas instrucciones que se dan en el problema, esto permite que el estudiante “juegue” con la información que se ofrece, de manera que pueda ir asociando elementos que ayuden a resolverlo.

**Problemas 5 y 6:** Estos dos problemas hacen referencia al proceso de conjeturación, por lo que los problemas permiten al estudiante hacer inferencias sobre la solución del problema. En este tipo de problemas es más notable el uso de la intuición para buscar regularidades, postular afirmaciones e inferir sobre lo que está pasando en la situación analizada. De allí que uno de los problemas sea precisamente una sucesión en la que se pide al estudiante descubrir el siguiente número de la secuencia y logre identificar un patrón que pueda formalizar matemáticamente.



**Problemas 7 y 8:** Estos obedecen al proceso de verificación. El problema 7 es la continuación

## Facultad de Educación

del problema 6, pues a partir de la conjetura realizada en este problema, se puede validar y

ratificar que el patrón identificado se cumple para hallar el siguiente número de la sucesión. Por

otra parte, el problema 8 consiste en que dadas unas condiciones, que son los valores de verdad

de algunas proposiciones, se verifique cuál de los enunciados es lógicamente falso, para ello se

deben tener en cuenta las tablas de verdad de los conectivos lógicos, que no se explicitan en el

instrumento, porque son de conocimiento mutuo, sin embargo, durante la prueba, los

investigadores les recordaron a los estudiantes participantes, las siguientes afirmaciones: 1. Una

implicación sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente falso; 2. Una conjunción

solo es verdadera si ambas proposiciones que la componen son verdaderas; 3. Una disyunción

solo es falsa si las proposiciones que la componen son ambas falsas; 4. El bicondicional es

verdadero siempre que ambas proposiciones que la componen tienen el mismo valor de verdad.

Esto se hizo porque como se dijo anteriormente, lo que nos interesa es la dificultad que presenta

el estudiante en el proceso de verificación y no como tal en la comprensión de los conceptos

implicados.

**Problemas 9 y 10:** Considerando que a los estudiantes les cuesta dar explicaciones sobre los procesos que realizan, se plantearon dos pruebas, de manera que pudieran argumentar y justificar

cada paso dentro de ellas a partir del lenguaje empírico que poseen, además, se les pide explicar si dicha argumentación en ambas pruebas es válida o no en el desarrollo de estas. Con ello se

pretende diferenciar los conceptos de válido, inválido, falsedad y verdad, los dos primeros

referidos a la argumentación y los otros dos referidos a las proposiciones. De esta manera, en el

problema 9 se observa una prueba que llega a una conclusión falsa y también presenta una



argumentación inválida, por su parte, el problema 10 parte de una hipótesis falsa y llega a una conclusión verdadera siendo la argumentación para este caso válida.

**Problemas 11 y 12:** Con estos problemas y las ayudas que se brindan se pretende que el estudiante realice las pruebas pertinentes, en las que se expliciten afirmaciones y razones en base al uso de propiedades.

**Problemas 13 y 14:** Estos problemas corresponden al tipo demostración formal, por lo tanto, se pide que a partir de unas premisas se llegue a una conclusión que requiere de una argumentación más rigurosa, formal y organizada, haciendo uso de reglas y equivalencias lógicas.

### **3.4.2. Instrumento B**

En este instrumento se plantean 5 situaciones que, de manera abierta, entiéndase por abierta la posibilidad de argumentar de una manera libre y subjetiva, permitiesen identificar dificultades en la argumentación a la hora de responder a dichas situaciones, en asocio a los diferentes procesos de la actividad demostrativa. Se contempló la idea de que a partir de un problema de razonamiento lógico se desprendieran preguntas para hacer explícitos los diferentes procesos, pero esto no fue posible, pues habían problemas que abarcaban el aspecto proceso y no se podían probar o demostrar formalmente, y problemas que se enfocaban más en el aspecto producto, no daban cuenta de algunas acciones del aspecto proceso, aun así, este tipo de problemas pueden ser más completos, en el sentido de que las acciones empíricas y heurísticas que caracterizan el aspecto proceso están implícitas dentro de la solución del problema, esto si aceptamos la secuencialidad natural que sugiere la actividad demostrativa.



Así pues, de las situaciones seleccionadas, unas permitan entrever acciones del aspecto proceso

## Facultad de Educación

y otras del aspecto producto; a continuación, se describe la intencionalidad de cada una de las situaciones.

### Situación 1:

Con esta situación no se pretende crear burla, sino generar un ambiente agradable y cercano para los estudiantes; el fin no es el nombre de doña Pastora, ícono de la Universidad de Antioquia, bien pudo haber sido otro nombre u otra situación, por lo que no debe causar revuelo si este trabajo lo lee una persona externa que no la conozca, lo que nos interesa es la lógica que hay en las afirmaciones que se plantean. Se busca que el estudiante responda a la pregunta que se realiza, teniendo en cuenta para ello conceptos como: antecedente, consecuente, condicional modus ponens, suficiente y necesario. Si bien, las dificultades que se pueden evidenciar en este caso involucran al aspecto proceso, son más claras las dificultades en el aspecto producto, sobre todo porque la pregunta permite que se lleve a cabo una explicación o prueba para la cuestión.

### Situación 2:

Son muy populares los problemas de razonamiento lógico que involucran verdades y mentiras, en esta situación se plantea uno que tiene que ver con quién ha sido el culpable del robo de un parcial de aritmética teniendo en cuenta en este caso que sólo una de las personas dice la verdad. La situación supone analizar casos y razonar por contradicción para encontrar la respuesta, por eso se requiere de acciones que caracterizan el aspecto proceso de la actividad demostrativa, sobre todo se necesita de la exploración, de la conjeturación y justamente de la verificación. De esta manera se espera que el estudiante busque los medios ya sean simbólicos, retóricos, explicativos, etc, para llegar a resolver el problema. Cabe decir que este problema puede formalizarse y demostrarse lógicamente haciendo uso del método adecuado y utilizando las



reglas de inferencia y equivalencias lógicas necesarias, lo que sugiere que hay muchas formas de

**Facultad de Educación**

abordarlo, y es precisamente esa la razón por la cual se plantea, identificando las dificultades que presentan los estudiantes al argumentar según las distintas maneras en cómo conciben el problema y le intentan dar solución.

**Situación 3:**

El problema que se plantea es una de las versiones del famoso “problema de los sombreros”, con este se espera una argumentación muy nutrida por parte de los estudiantes, en el que se reflejen los procesos de visualización, exploración, conjeturación, verificación y explicación, dadas las condiciones del problema, pues estas incitan a la realización de acciones sobre todo empíricas y heurísticas para llegar a la solución, por tanto las dificultades se evalúan en estas acciones.

**Situación 4:**

Este problema es otro de los famosos problemas de lógica que se encuentran en las redes y que tiene algunas variantes, en este caso se trata de ¿cómo pueden cruzar un puente cuatro individuos en 17 minutos o menos, sabiendo que el puente caerá en exactamente en los 17 minutos?, y para ello se tienen ciertas condiciones. El problema es tal que puede crear una disonancia cognitiva en el estudiante, es decir, se produce algo contraintuitivo a lo que el estudiante piensa, dado el hecho de que según las condiciones, si sumamos el tiempo que cada individuo tarda en cruzar el puente, este sumaría 18 minutos y el puente cae en 17 minutos, lo que haría jugar con la idea de que no es posible resolver el problema. Por eso con esta situación, se pretende que el estudiante de algún modo use su intuición y rompa con los esquemas mentales que tiene para que pueda visualizar, explorar, conjeturar, verificar y explicar la manera en la que puede resolverse el problema, atendiendo a las condiciones establecidas. Por ello las dificultades se centran en los procesos mencionados.

**Situación 5:**

**Facultad de Educación**

Dado que la mayoría de las situaciones antes mencionadas evalúan más el aspecto proceso, con este problema se le da cabida al aspecto producto, sin decir con ello que el aspecto proceso quede relegado; en este caso dicho problema tiene el mismo enunciado que el problema 5 del instrumento A, sólo que en esta ocasión se pide en específico deducir una conclusión dadas las premisas; se pretende que el estudiante haga una demostración formal para resolver la situación.

Esta situación nos servirá para identificar las dificultades que presentan los estudiantes al intentar argumentar formalmente, además, de contrastar la realización o no de la demostración con la respuesta dada al problema 5 del instrumento A, como medio para verificar si el estudiante respondió acertadamente siendo consciente de la solución del problema o si fue fruto del azar.

Es así como con los anteriores instrumentos, se pretende recolectar la información necesaria para lograr identificar las dificultades relacionadas en el objetivo del presente estudio.



## **CAPITULO 4: ANÁLISIS Y RESULTADOS**

En este capítulo se socializarán las dificultades en la argumentación que se pueden evidenciar en los 8 estudiantes que hicieron parte de la investigación, para ello se hará una clasificación del desempeño general de cada estudiante según los resultados obtenidos en los dos test realizados, de acuerdo con las características que se determinaron para cada uno de los tres casos descritos en el capítulo anterior, proporcionando las respectivas evidencias.

A continuación, se hace un recuento de los resultados obtenidos por cada estudiante, según el instrumento aplicado, esto con el fin de identificar aspectos que marquen su desempeño y las dificultades que presentaron a la hora de resolver los problemas de razonamiento lógico propuestos en los dos test.

### **INSTRUMENTO A**

#### **Estudiante 1**

*Tabla 1: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 1.*

<b>Problema</b>	<b>Análisis</b>
1	Responde acertadamente identificando la hipótesis de la proposición compuesta.
2	No responde acertadamente, ignora la nota que dice: la expresión “pero” representa una conjunción adversativa.
3	No completa acertadamente el cuadro mágico, en una de las diagonales la implicación no es verdadera.



4	Responde acertadamente, disponiendo los elementos como indican las condiciones del problema.
5	Responde acertadamente, tiene una buena capacidad de conjeturar a partir de las premisas que se dan.
6	Responde acertadamente, encuentra el número que sigue en la sucesión, sin embargo, no es coherente al explicar el patrón hallado.
7	Responde acertadamente al verificar con el patrón encontrado, el séptimo número de la sucesión
8	Responde acertadamente, al verificar a partir de la información que se proporciona, cuál de los enunciados es el falso.
9	Justifica muy bien los pasos de la prueba y encuentra el error, no explicita sobre si la argumentación es o no válida, solo afirma que la división por cero no lo es.
10	No explicita sobre si la argumentación es o no válida, sin embargo, afirma que como la hipótesis es falsa puede concluirse cualquier cosa, en otras palabras, quiere decir que cuando se parte de una hipótesis falsa esta puede conducir a proposiciones falsas o verdaderas.
11	Responde acertadamente, realizando la prueba para ello.
12	Aunque hay un pequeño error aritmético en el proceso, el sentido de la prueba no se pierde y logra llegar a lo que se pide.
13	Demuestra correctamente el problema propuesto, utilizando las reglas y equivalencias lógicas de manera adecuada.
14	Deduce correctamente a partir de una demostración en prosa, que S es lógicamente verdadera.

**Estudiante 2**

**Tabla 2: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 2.**

Problema	Análisis
1	No responde acertadamente, cree que la proposición compuesta es en sí misma la hipótesis.
2	Responde acertadamente, haciendo una buena correspondencia entre la parte retórica y simbólica.
3	No completa acertadamente el cuadro mágico, en una de las diagonales la implicación no es verdadera.
4	Responde acertadamente, pero no da información sobre la disposición de los elementos según las condiciones establecidas.
5	No responde acertadamente, de hecho, selecciona dos respuestas que son contradictorias entre sí.
6	Responde acertadamente al hallar el patrón de la sucesión, realizando una formalización de este.



7	Efectivamente, el patrón hallado le permite encontrar el séptimo número de la sucesión.
8	Responde acertadamente cuál de los enunciados es el falso, al verificar a partir de la información que se proporciona.
9	Justifica muy bien los pasos de la prueba y encuentra el error, no explicita sobre si la argumentación es o no es válida, solo afirma que los ceros no se pueden cancelar.
10	No justifica ninguno de los pasos de la prueba, además afirma que: “a partir de una falsedad no se puede llegar a una verdad.”
11	Realiza una buena prueba del ejercicio propuesto.
12	Realiza una prueba sencilla del teorema.
13	No deduce la tesis de manera correcta, aludiendo que este hecho se da gracias a la premisa 4, lo cual es erróneo sin tener en cuenta las demás premisas y sin justificación alguna.
14	Responde mal al problema, deduce que $\sim R$ es lógicamente verdadero gracias a la premisa 4 ( $\sim S \rightarrow \sim R$ ), es decir, el estudiante cree que al tener una implicación como premisa que es lógicamente verdadera, necesariamente el consecuente de esta implicación es verdadero.

### Estudiante 3

Tabla 3: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 3.

Problema	Análisis
1	No responde acertadamente, el estudiante argumenta que todo el enunciado es la hipótesis.
2	Responde acertadamente. El estudiante expresa que para ello hace una interpretación asignando a cada proposición simple o atómica una letra.
3	Si bien el estudiante afirma que el ejercicio es sencillo de realizar, no organiza correctamente las proposiciones y los conectivos lógicos en el cuadro mágico.
4	Responde acertadamente e intenta representar la información que se da en el ejercicio.
5	No responde acertadamente, a pesar de ello infiere que la respuesta “a” puede concluirse del enunciado.
6	Identifica el número que sigue en la sucesión, pero no describe muy bien el patrón hallado.
7	A partir del patrón hallado, logra encontrar el séptimo número de la sucesión.
8	Responde acertadamente usando los valores de verdad de cada proposición y verificando según la tabla de verdad de los conectivos lógicos el enunciado falso.
9	Identifica que hay un error en el proceso, pero no explicita si la argumentación es o no válida.



10	Justifica de manera incorrecta el paso 3 del ejercicio, lo que lo lleva a decir que la argumentación no es válida en el desarrollo de la prueba.
11	Llega a la respuesta correcta pero no realiza la prueba para ello.
12	No responde el ejercicio propuesto.
13	No realiza la demostración que se pide, el estudiante expresa que no sabe cómo llegar a una conjunción ( $\wedge$ ) sin tener este conectivo en las premisas dadas.
14	No responde acertadamente al ejercicio porque hace un uso inadecuado de la ley de simplificación.

## Estudiante 4

Tabla 4: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 4.

Problema	Análisis
1	No responde acertadamente, confunde la tesis con la hipótesis.
2	Responde acertadamente, el estudiante expresa que la estructura del enunciado solo deja el literal “a” como representación válida.
3	Completa el cuadro mágico de manera adecuada.
4	Responde acertadamente, disponiendo los elementos como indican las condiciones del problema.
5	Responde acertadamente, pero es confusa la explicación que realiza sobre la respuesta a dicha conjetura.
6	No responde acertadamente e incluso modifica el quinto número para hacer coincidir el “supuesto” patrón hallado que tampoco corresponde con los números propuestos por él.
7	Debido a que no hay coincidencia de los valores hallados con el patrón, no se logra una respuesta correcta.
8	Responde acertadamente usando los valores de verdad de cada proposición y verificando según la tabla de verdad de los conectivos lógicos el enunciado falso.
9	Justifica bien los pasos de la prueba y encuentra el error, no explicita sobre si la argumentación es o no es válida, afirma que como $(a-b) = 0$ no se puede usar como inverso multiplicativo.
10	El estudiante afirma que la argumentación no es válida y presenta algunos errores en la justificación, por ejemplo, toma la hipótesis como verdadera y la tesis como falsa, cuando en realidad sucede al contrario.
11	Responde acertadamente, realizando la prueba para ello.
12	Realiza la prueba del ejercicio propuesto.
13	El estudiante no logra deducir la tesis a partir de las premisas dadas, debido a que como él mismo manifiesta: “la deducción no es posible porque en las premisas no hay H y por muchas transformaciones que se hagan, no lograremos conseguirla”



14	No responde acertadamente al ejercicio porque hace un uso inadecuado de la ley de simplificación.
----	---

**Estudiante 5**

*Tabla 5: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por el estudiante 5.*

Problema	Análisis
1	Responde acertadamente, el estudiante afirma que la expresión “si voy” representa un término de suposición, por lo tanto, es hipótesis.
2	No responde acertadamente, ignora la nota que dice: la expresión “pero” representa una conjunción adversativa.
3	No resuelve de forma correcta el cuadro mágico.
4	Responde acertadamente, disponiendo los elementos como indican las condiciones del problema.
5	No responde acertadamente, no proporciona evidencias para la respuesta que da.
6	Responde acertadamente, encuentra el número que sigue en la sucesión, sin embargo, no explica las características del patrón.
7	Halla correctamente el séptimo número de la sucesión.
8	Responde acertadamente pero no ofrece evidencias que justifiquen la opción elegida.
9	No realiza la justificación de cada uno de los pasos, ni dice nada sobre si la argumentación es válida o no en el desarrollo de la prueba. Solo lanza una pregunta sobre qué fue lo que pasó en el paso 4.
10	Afirma que la argumentación no es válida, lo justifica diciendo que en el paso 3 la adición no es la misma. El estudiante desconoce lo que realmente se hizo en dicho paso.
11	No responde acertadamente, pareciese ser que el estudiante no tiene claridad sobre la ley distributiva, lo que lo lleva a un resultado erróneo.
12	No resuelve el ejercicio
13	En este ejercicio el estudiante expresa que no es capaz de realizar la demostración, pese a que se le facilitan las reglas y equivalencias lógicas necesarias para abordar el problema.
14	El estudiante no resuelve el ejercicio por la justificación anterior.

**Estudiante 6**

*Tabla 6: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por la estudiante 6.*

Problema	Análisis
1	No responde acertadamente, confunde la tesis con la hipótesis.
2	Responde acertadamente, la estudiante expresa que le fue fácil llegar a la respuesta debido a la nota que se sugiere en este punto.



3	Completa el cuadro mágico de manera adecuada.
4	Responde acertadamente, la estudiante afirma que para disponer los elementos es importante seguir las instrucciones que indica el problema.
5	No responde acertadamente, la estudiante expresa que no sabe cómo representar lógicamente el enunciado para poder llegar a una conclusión, sin embargo, la simbolización que realiza es casi la que se pide para abordar el problema.
6	Identifica correctamente el patrón explicando las características de este.
7	Verifica con el patrón hallado, el séptimo número de la sucesión.
8	Responde acertadamente, la estudiante manifiesta que para llegar a la respuesta tuvo en cuenta las tablas de verdad.
9	Justifica muy bien los pasos de la prueba y encuentra el error, no explicita sobre si la argumentación es o no válida, solo afirma que la división por cero es una indeterminación.
10	Utiliza las propiedades y leyes adecuadas para justificar los pasos de la prueba, lo que expone la estudiante allí, logra entrever que para ella la argumentación es válida, pues afirma que cuando se parte de algo falso se puede llegar a conclusiones tanto falsas como verdaderas.
11	Responde la prueba acertadamente, en sus cálculos se refleja el uso del método del tanteo.
12	La estudiante manifiesta no saber de qué forma realizar la prueba, quizá por el planteamiento inicial que hace a partir de la nota del enunciado.
13	La estudiante no realiza la demostración aludiendo que no sabe demostrar cuando se tienen tantas premisas.
14	La estudiante expresa no saber de qué manera manipular las premisas en la demostración para llegar a una de las respuestas dadas.

### Estudiante 7

**Tabla 7: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por la estudiante 7.**

Problema	Análisis
1	Responde acertadamente identificando la hipótesis de la proposición compuesta.
2	No responde acertadamente, ignora la nota que dice: la expresión “pero” representa una conjunción adversativa.
3	Completa el cuadro mágico de manera adecuada.
4	Responde acertadamente, disponiendo los elementos como indican las condiciones del problema.
5	No responde.
6	Identifica el número que sigue en la sucesión, pero no describe muy bien las condiciones que se deben cumplir en el patrón hallado.
7	Verifica con el patrón hallado, el séptimo número de la sucesión, sin embargo, la estudiante aclara que sería importante hacer una formulación



	general del patrón, puesto que el procedimiento que ella usa sería difícil para encontrar números en posiciones altas.
8	Responde acertadamente usando los valores de verdad de cada proposición y verificando según la tabla de verdad de los conectivos lógicos el enunciado falso.
9	No justifica bien los pasos de la prueba, sin embargo, encuentra el error de la división por cero. No explicita sobre si la argumentación es o no válida.
10	Justifica mal uno de los pasos de la prueba y afirma que la argumentación no es válida en el desarrollo de esta.
11	Responde acertadamente, realizando la prueba para ello.
12	El procedimiento realizado por la estudiante es erróneo y no llega a probar el teorema propuesto.
13	No responde.
14	No responde.

## Estudiante 8

Tabla 8: Análisis de las respuestas dadas a los problemas por la estudiante 8.

Problema	Análisis
1	Responde acertadamente identificando la hipótesis de la proposición compuesta.
2	No responde acertadamente, ignora la nota que dice: la expresión “pero” representa una conjunción adversativa.
3	No completa acertadamente el cuadro mágico, en una de las diagonales la implicación no es verdadera.
4	Responde acertadamente, disponiendo los elementos como indican las condiciones del problema.
5	No responde acertadamente, no proporciona evidencias para la respuesta que da.
6	Responde acertadamente, encuentra el número que sigue en la sucesión, sin embargo, no explica las características del patrón.
7	Halla correctamente el séptimo número de la sucesión.
8	Responde acertadamente usando los valores de verdad de cada proposición y verificando según la tabla de verdad de los conectivos lógicos, afirmando que el enunciado falso.
9	Presenta un error en la justificación de uno de los pasos de la prueba, encuentra el error de la división por cero, pero no explicita sobre si la argumentación es o no válida.
10	No justifica bien los pasos de la prueba y deja entrever que como se parte de una hipótesis falsa, la argumentación no es válida.
11	Responde acertadamente, realizando la prueba para ello.
12	La estudiante manifiesta no saber de qué forma realizar la prueba, quizá por el planteamiento inicial que hace a partir de la nota del enunciado.



13	La estudiante intentó hacer la demostración, pero hace un mal uso de la ley de simplificación y no logra deducir lo que se pide.
14	No responde.

## INSTRUMENTO B

### Estudiante 1

Tabla 9: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 1.

Situación	Análisis
1	El estudiante no responde acertadamente la situación, pues logra deducir que el profesor debió aprobarles el curso, es decir, que los estudiantes pudieron ganar lógicamente la acusación; esto haciendo una mala representación simbólica del enunciado, pues confunde un sí y solo sí con el condicional que presenta la situación.
2	El estudiante responde mal la pregunta planteada en la situación, afirmando que Valentina fue quien se robó el parcial, partiendo de que Camilo y Edwin dicen la verdad, sin tener en consideración que la condición del problema es que <b>sólo uno de ellos dice la verdad</b> , además, da por hecho que la afirmación de Luz también es verdadera.
3	El estudiante logra responder acertadamente el color del sombrero del ciego, sin embargo, lo hace porque en su razonamiento expresa que tanto el prisionero con visión normal y el tuerto tienen sombrero rojo, luego por descarte, el ciego debe tener un sombrero blanco, dejando de lado las demás disposiciones posibles para el caso.
4	El estudiante resuelve acertadamente el problema.
5	El estudiante realiza una demostración en prosa que, aunque carece de un rigor estructural es coherente en su proceder, analizando los valores de verdad de las diferentes proposiciones con el fin de concluir que Dios no quiere que apruebe Aritmética.

### Estudiante 2

Tabla 10: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 2.

Situación	Análisis
1	El estudiante no responde acertadamente la situación, utiliza la inferencia lógica del Modus Ponens para afirmar que el profesor debió aprobarles el curso, partiendo de un mal uso del condicional expuesto en el enunciado.
2	El estudiante responde acertadamente a la situación planteada, empieza suponiendo que lo que dice Camilo es falso, este supuesto lo lleva a una contradicción que lo ayuda a afirmar que Camilo es quien tiene que decir la



	verdad y de esta manera poder concluir que fue Luz quien efectivamente se robó el parcial debido a que su afirmación es necesariamente falsa, según la condición planteada en el problema.
<b>3</b>	Responde acertadamente realizando un buen razonamiento de la situación planteada.
<b>4</b>	Responde acertadamente, resuelve la situación empleando una tabla como medio para representar los procedimientos que realiza según las condiciones planteadas en el problema.
<b>5</b>	El estudiante deduce lo que se pide, sin embargo, el proceso que realiza para ello se presenta de una forma desordenada y carente del rigor estructural que caracteriza a una demostración formal.

**Estudiante 3**

**Tabla 11: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 3.**

<b>Situación</b>	<b>Análisis</b>
<b>1</b>	Si bien el estudiante responde acertadamente al decir que los estudiantes no pudieron ganar lógicamente la acusación, no explica claramente porque ocurre este hecho, además de que parte de una mala representación del condicional expuesto en el enunciado.
<b>2</b>	No responde a la situación debido a que, como él mismo expresa: “no es seguro saber quién se robó el parcial porque en cada afirmación se deben conocer por lo menos dos casos correctos”.
<b>3</b>	No responde acertadamente la situación, proporcionando una vaga explicación respecto a la forma en que, tanto el prisionero con visión normal como el prisionero tuerto, podían saber cada uno el color de su sombrero.
<b>4</b>	No logra resolver la situación, el estudiante expresa que: “analizando y construyendo diferentes métodos para lograr que todos cruzaran en menos de 17 minutos, llegué a la conclusión que no se podría, pues se necesitan por lo menos 2 ó 3 minutos más”.
<b>5</b>	No realiza la demostración debido a que parte de un mal agrupamiento de los conectivos lógicos en relación con las proposiciones, lo que lo lleva a pensar que no es posible concluir lo que se pide.

**Estudiante 4**

**Tabla 12: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 4.**

<b>Situación</b>	<b>Análisis</b>
<b>1</b>	El estudiante expresa que es difícil que los estudiantes ganen con lógica, sin embargo, no brinda una información coherente que avale su respuesta.
<b>2</b>	El estudiante responde acertadamente, afirma que: “Luz se robó el parcial, pues si solo una persona dice la verdad, la combinación que planteo se cumple sin contradicciones y arroja a luz como culpable”.



<b>3</b>	El estudiante no aborda el problema, manifiesta que no es posible resolverlo debido a que faltan datos, además expresa que el ciego simplemente adivinó y simuló que sabía.
<b>4</b>	El estudiante no resuelve el problema, expresa que es imposible debido a que el sólo paso de tres de los cuatro individuos toma los 17 minutos, por tanto, la única manera de cumplir con lo requerido es que se puedan lanzar la linterna.
<b>5</b>	No realiza la demostración que se pide, solo trata de representar

**Estudiante 5**

**Tabla 13: Respuestas dadas a las situaciones por el estudiante 5.**

<b>Situación</b>	<b>Análisis</b>
<b>1</b>	El estudiante no responde acertadamente, pues logra deducir que el profesor debió aprobarles el curso, es decir, que los estudiantes pudieron ganar lógicamente la acusación; esto haciendo uso del Modus Ponens, pues parte de una mala representación simbólica del enunciado, confunde un sí y solo sí con el condicional que presenta la situación, permitiéndole utilizar dicha regla de inferencia.
<b>2</b>	El estudiante no responde acertadamente, en el razonamiento que hace juega con las posibilidades de quién pudo ser el que robó el parcial, suponiendo el caso en el que todos los sospechosos mintieran y también el caso en el que todos dijeran la verdad, este hecho no le permite encontrar un sólo culpable sino varios, según la suposición que haga, omite la condición que el problema le ofrece y es que sólo uno de ellos es quien dice la verdad.
<b>3</b>	El estudiante logra responder acertadamente el color del sombrero del ciego, sin embargo, lo hace porque en su razonamiento expresa que tanto el prisionero con visión normal y el tuerto tienen sombrero rojo, luego, por lógica, el ciego debe tener un sombrero blanco, dejando de lado las demás disposiciones posibles para el caso.
<b>4</b>	El estudiante no resuelve el problema, menciona algunas opciones para cumplir con la condición de cruzar el puente en 17 minutos, por ejemplo, considerar que la linterna tiene el alcance suficiente para alumbrar todo el puente o que los más rápidos carguen a los otros para cruzar a tiempo, de lo contrario, no podrían cruzar todos.
<b>5</b>	No realiza la demostración, sólo trata de simbolizar las proposiciones que componen el enunciado.

Tabla 14: Respuestas dadas a las situaciones por la estudiante 6.

Situación	Análisis
1	La estudiante responde bien a la pregunta, sin embargo, no realiza una explicación coherente que respalde su respuesta
2	La estudiante no resuelve la situación, expresa que no sabe cómo relacionar lógicamente las afirmaciones de los acusados para saber quién fue el que se robó el parcial, además, en el razonamiento que hace se puede evidenciar que supone que lo que dice uno de los acusados es falso y lo que dicen los demás es verdad, todo lo contrario a la condición que plantea el ejercicio.
3	La estudiante no resuelve la situación, expresa que: “no sé de qué color era el sombrero del ciego, pues al hacer pruebas puede ser blanco o rojo, solo sé que los otros al poder ver, podían observar los sombreros de sus compañeros, por lo cual al observar no veían dos sombreros rojos simultáneos”, esto último que expresa la estudiante es cierto, pero no brinda más información que permita responder acertadamente las preguntas que se plantean.
4	No encuentra como resolver la situación, piensa en la posibilidad de que, si se pudiera lanzar la linterna de lado a lado, lograrían pasar todos en menos de 17 minutos.
5	No realiza la demostración.

## Estudiante 7

Tabla 15: Respuestas dadas a las situaciones por la estudiante 7.

Situación	Análisis
1	La estudiante no responde acertadamente, confunde un sí y solo sí con el condicional que presenta la situación, por ello dice que, si la proposición que involucra a Pastora se cumple, el profesor también debe cumplir, luego los estudiantes pueden ganar lógicamente la acusación.
2	Responde acertadamente la situación, afirmando que Camilo es quien dice la verdad y los otros son los que mienten, luego al ser falsa la declaración de Luz, esta resulta siendo la culpable del robo del parcial.
3	La estudiante piensa que el prisionero ciego tenía un sombrero blanco, sin embargo, no presenta argumentos que validen su apreciación.
4	La estudiante hace algunas suposiciones para poder resolver la situación, por ejemplo, considerar que el puente es corto, que se puede lanzar la linterna de lado a lado, que primero pase Deiby con Daniel de tal forma que este último visualice en donde están los huecos, para que luego pueda pasar sin linterna, etc., es decir, recurre a unas formas de abordar el problema que no son las que se espera obtener.



<b>5</b>	No realiza la demostración, la estudiante expresa que: “se me dificulta resolver este tipo de problemas, porque al operar con las reglas que me presentan pienso que llegaría a algo ilógico para mí”.
----------	--

**Estudiante 8**

**Tabla 16: Respuestas dadas a las situaciones por la estudiante 8.**

<b>Situación</b>	<b>Análisis</b>
<b>1</b>	La estudiante no responde acertadamente, hace una mala representación simbólica del enunciado, pues confunde un sí y solo sí con el condicional que presenta la situación y esto la lleva a la conclusión de que los estudiantes pudieron ganar lógicamente la acusación.
<b>2</b>	Responde acertadamente, afirma que solo se puede dar que Camilo es quien dice la verdad, esto para no tener contradicciones.
<b>3</b>	No responde acertadamente, dice que el ciego tiene sombrero rojo, para ello hace el siguiente razonamiento: “solo uno de los dos (tuerto o ciego) puede tener sombrero rojo, porque si ambos tienen sombrero rojo, el que ve sabría por descarte que tiene un sombrero blanco, por tanto, el que ve tiene sombrero blanco. Igual que en el caso anterior, por descarte el tuerto no puede tener sombrero rojo, sino que tiene un sombrero blanco, entonces el ciego puede deducir de la misma manera que su sombrero es rojo”. En este razonamiento la estudiante no tiene en cuenta que son tres los sombreros blancos y que uno de ellos lo tiene el prisionero ciego, pues si este tuviera sombrero rojo alguno de los otros hubiesen sabido el color de su sombrero.
<b>4</b>	No resuelve el ejercicio de manera adecuada, recurre a una solución vaga: “el primero que debe pasar solo con la linterna es Deiby, ya que al demorarse más puede visualizar y memorizar donde se encuentran los huecos para indicarles a los otros cuando vayan a pasar. Luego pasa Luis con Juan y por último Daniel”.
<b>5</b>	No realiza la demostración.

El siguiente cuadro resume el desempeño de los estudiantes, las X representan los desaciertos que los estudiantes tuvieron en los problemas o situaciones planteadas en los dos test.



**Cuadro resumen del mal desempeño de los estudiantes en los dos test realizados.**

**Facultad de Educación**

**Tabla 17: Resumen de los desaciertos que tuvieron los estudiantes en los dos test realizados.**

Estudiante	Problemas - Instrumento A														Situaciones Instrumento B				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	1	2	3	4	5
1		X	X												X	X	X		
2	X		X		X					X			X	X	X				
3	X		X		X				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4	X					X	X			X			X	X	X		X	X	X
5		X	X		X				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6	X				X							X	X	X	X	X	X	X	X
7		X			X					X		X	X	X	X		X	X	X
8		X	X		X					X		X	X	X	X		X	X	X

A partir de estos resultados, se observa que el desempeño de algunos estudiantes varió de un instrumento al otro, quizá por el tipo de problemas, preguntas o situaciones planteadas en estos, lo que dificultó establecer cuáles estudiantes podían ser ubicados en el caso I, es decir, cuáles estudiantes tenían dificultades en los procesos de visualización y de exploración. Para ello, se centró el interés en el desempeño obtenido en el instrumento B, pues el instrumento A en relación con el aspecto proceso de la actividad demostrativa, evaluaba de una forma que podría arrojar resultados equívocos por tratarse de preguntas de selección múltiple en su mayoría, luego, los resultados obtenidos en esta prueba fueron tenidos en cuenta siempre y cuando el estudiante justificara su respuesta, de no hacerlo, y en vista de obtener malos resultados en el instrumento B, se tendría en cuenta el desempeño en este último, para clasificarlo según las dificultades presentadas.

1 8 0 3

Así pues, los estudiantes quedan distribuidos en los siguientes casos, de acuerdo con las regularidades presentadas en las dificultades que presentan y en concordancia con las características que los definen.



4.1. Caso tipo 1

Facultad de Educación

Los estudiantes que se ubican en este nivel fueron: Estudiante #3 y #5.

Estos dos estudiantes son los de más bajo desempeño, presentan dificultades en los procesos de visualización y de exploración; no son capaces de descubrir, reconocer, identificar, asociar y representar elementos que les permitan abordar adecuadamente los problemas propuestos, además, se les dificulta comprender enunciados que sugieren el seguimiento de instrucciones.

Las siguientes imágenes muestran el desempeño de los dos estudiantes en algunos de los problemas o situaciones que involucran procesos de visualización o de exploración, o de ambos a la vez.

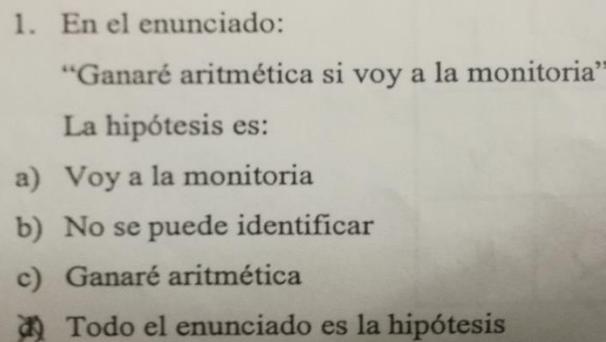


Figura 4: Respuesta de estudiante caso tipo 1, problema 1, instrumento A.

El estudiante en este caso cree que la proposición compuesta es en sí misma la hipótesis; presenta dificultades en el reconocimiento de las proposiciones simples que componen el enunciado y en la identificación de la hipótesis, que cumple un papel condicional dentro del enunciado.

2. El profesor de aritmética hace el siguiente comentario:  
 “Si asisto a los seminarios, los estudiantes me valorarán y conservaré mi puesto; pero si no asisto, mis colegas me acusarán y la decana me llamará la atención”  
 Si P, Q, R, S y T representan proposiciones simples, el enunciado completo se puede representar lógicamente como:

a)  $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\sim P \rightarrow (S \wedge T))$   
 b)  $(P \wedge Q \wedge R) \wedge (\sim P \wedge S \wedge T)$   
~~c)  $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \vee (\sim P \rightarrow (S \wedge T))$~~   
 d)  $(P \rightarrow Q) \wedge (\sim P \rightarrow R)$

**Nota:** tenga en cuenta que una coma representa un entonces y la expresión pero representa una conjunción adversativa.

Figura 5: Respuesta de estudiante caso tipo 1, problema 2, instrumento A.

El estudiante ignora la nota que dice: la expresión “pero” representa una conjunción adversativa, por eso tiene dificultades en visualizar la correspondencia simbólica con la retórica.

3. Si se tiene que las proposiciones P, Q, R son verdaderas y las proposiciones S, T, H, son falsas; complete el siguiente cuadro mágico, teniendo en cuenta que:

- En la fila del medio deben ir conectores lógicos y se deben utilizar las 6 proposiciones.
- Las proposiciones compuestas resultantes en las columnas y diagonales deben ser verdaderas en todas las direcciones.

P	S	T
↔	∨	∧
R	Q	H

\* Gasta un poco de tiempo (6 minutos más o menos), pero es "sencillo" de realizar si y solo si se interpreta y se organiza correctamente.

Figura 6: Respuesta de estudiante caso tipo 1, problema 3, instrumento A.

Si bien el estudiante afirma que el ejercicio es sencillo de realizar, no hace una buena disposición de las proposiciones y los conectivos lógicos en el cuadro mágico, presentando así dificultades al

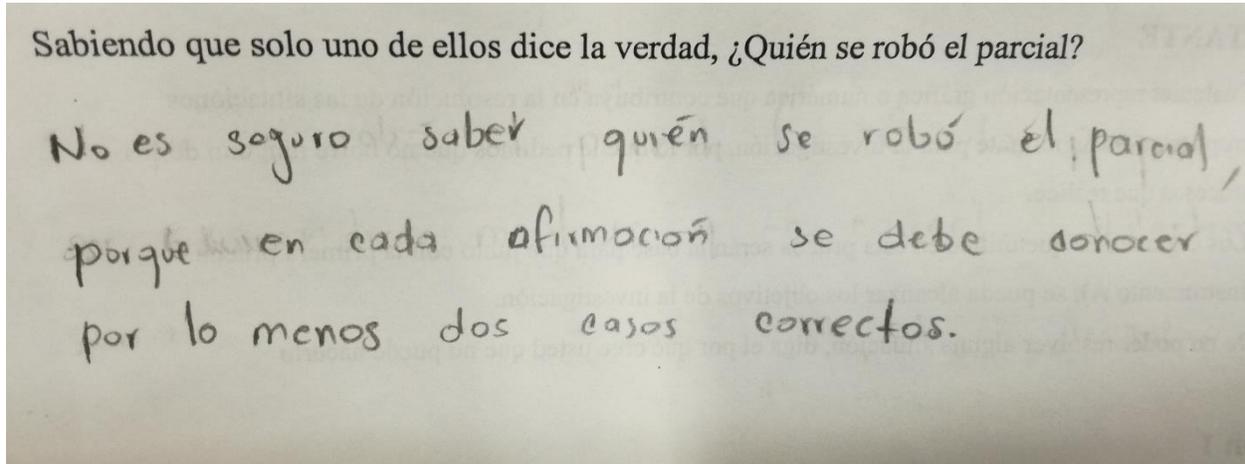


relacionar los elementos que ofrece el problema de manera que las proposiciones que se formen

**Facultad de Educación**

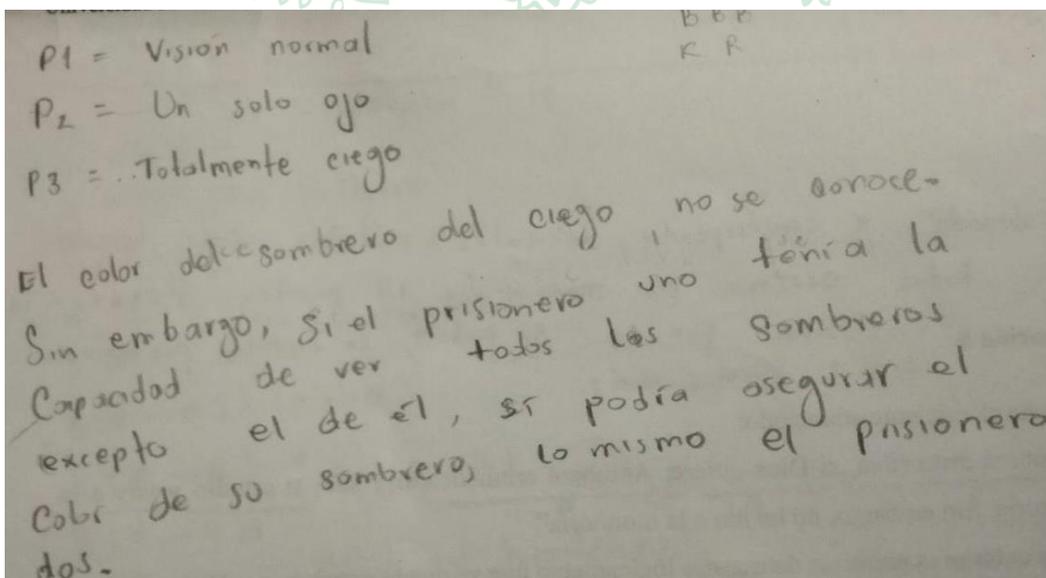
puedan ser verdaderas tanto en las columnas como en las diagonales miradas en cualquier

dirección.



**Figura 7: Respuesta de estudiante caso tipo 1, situación 2, instrumento B.**

No es claro porque el estudiante afirma que: “se deben conocer por lo menos dos casos correctos”; con su argumento se puede ver que tiene dificultades en el proceso de exploración, que implica descubrir y establecer relaciones a partir de la información que proporciona el enunciado con el fin de buscar su solución.



**Figura 8: Respuesta de estudiante caso tipo 1, situación 3, instrumento B.**



El estudiante realiza una vaga explicación respecto a la forma en que, tanto el prisionero con

**Facultad de Educación**

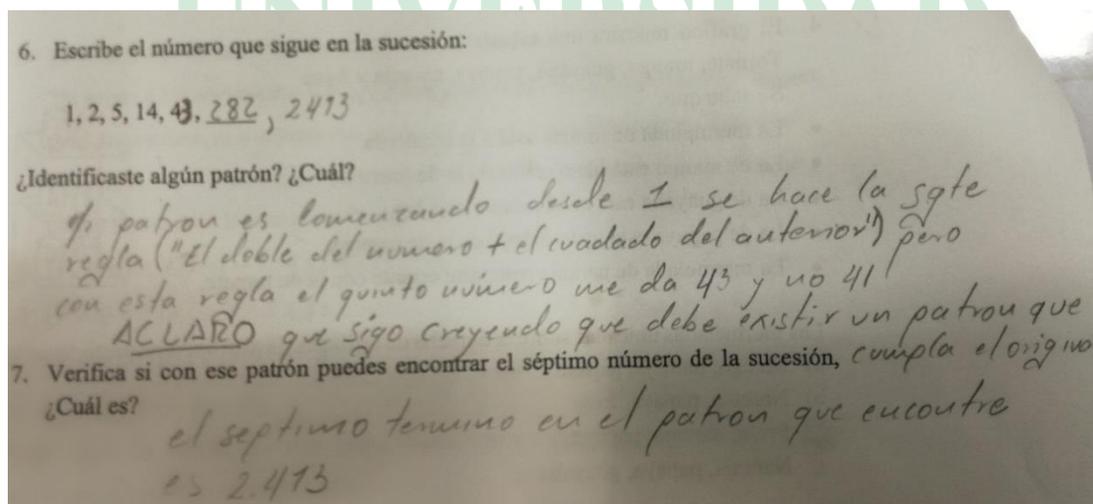
visión normal como el prisionero tuerto podían saber cada uno el color de su sombrero. Presenta dificultades tanto en el proceso de visualización como en el proceso de exploración; no tiene en consideración las condiciones que le ofrece el ejercicio, por tanto, no logra ir más allá de simplemente declarar que el sombrero del ciego no se conoce.

**4.2. Caso tipo 2**

**En este segundo nivel se ubican los estudiantes #4, #6, #7 y #8, quienes tienen un desempeño de acuerdo a las características descritas para este caso.**

Estos estudiantes mostraron un desempeño adecuado en los procesos de visualización y de exploración, sin embargo, presentan dificultades a la hora de resolver problemas o situaciones que implican el uso de la intuición para realizar inferencias y conjeturas, y posteriormente, ejecutar procesos de verificación a partir de lo que se les plantea, con el fin de hallar su solución. Además, muchos de sus razonamientos están apoyados en la emotividad y subjetividad, por lo que no son concretos ni coherentes.

A continuación, se presentan algunas evidencias para este caso.



**Figura 9: Respuesta de estudiante caso tipo 2, problemas 6 y 7, instrumento A.**



El estudiante en este caso no logra identificar el patrón que rige la sucesión sugerida en el

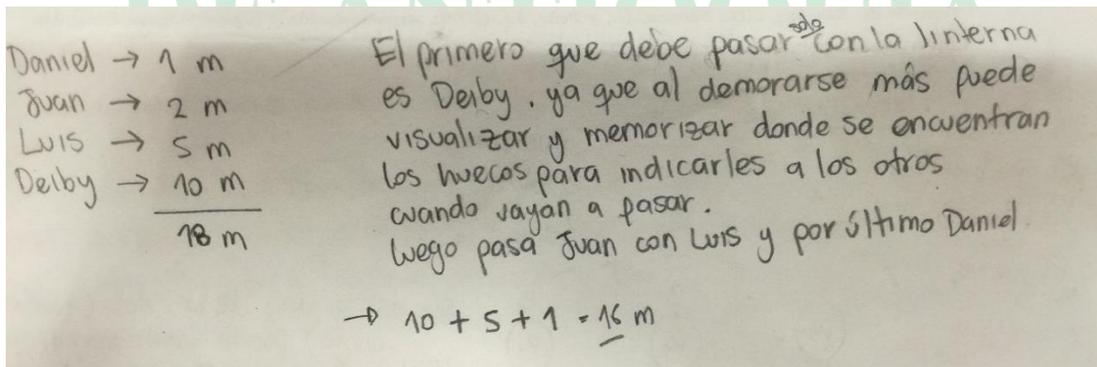
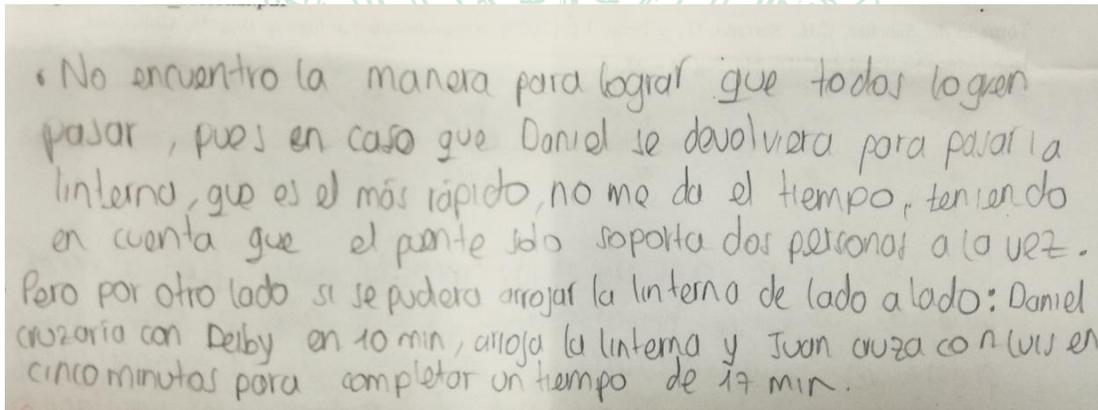
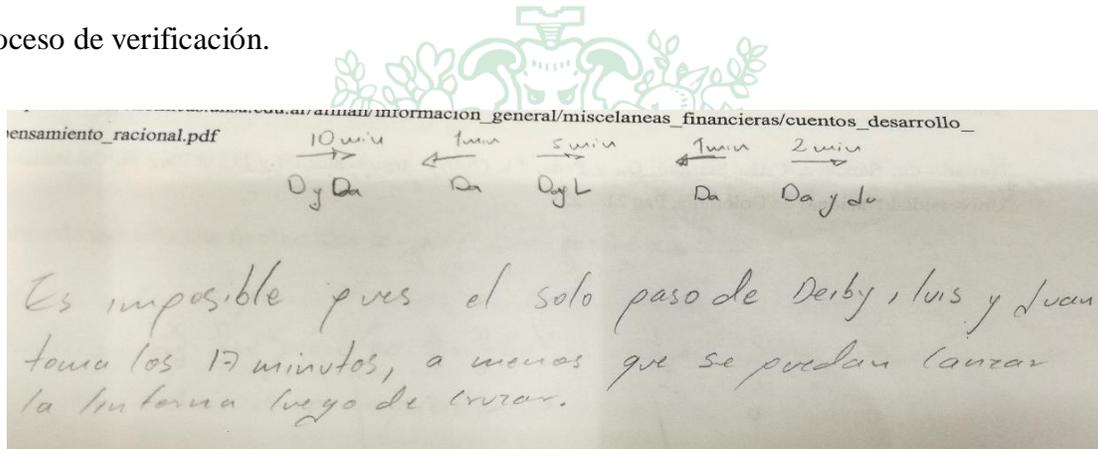
**Facultad de Educación**

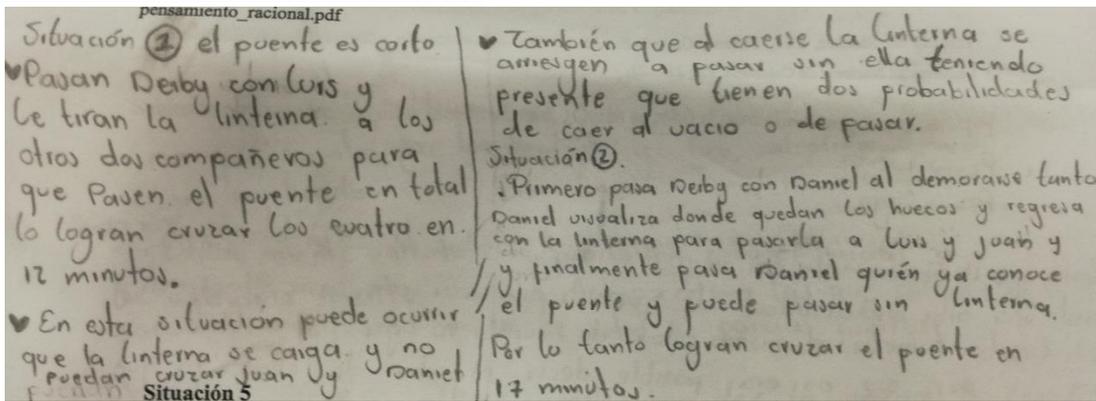
problema, en vez de esto, recurre a modificar el quinto número de la sucesión para hacer

coincidir el “supuesto” patrón hallado que tampoco corresponde con los números propuestos por

él. Es claro que el estudiante presenta dificultades tanto en el proceso de conjeturación como en

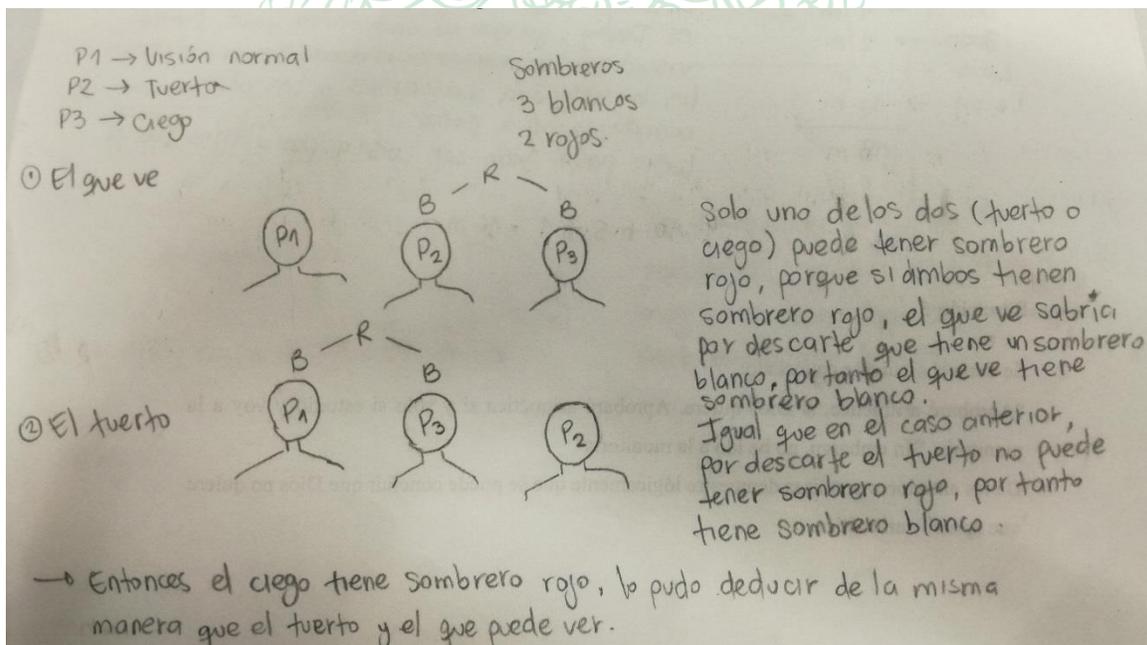
el proceso de verificación.





**Figura 10: Respuestas de estudiantes caso tipo 2, situación 4, instrumento B.**

Con estos argumentos se evidencia que los estudiantes no tienen una buena capacidad de conjeturar y de intuir sobre cómo pueden pasar el puente los cuatro individuos sin necesidad de recurrir a todos los supuestos que hacen como: lanzar la linterna de lado a lado, considerar que el puente es corto, visualizar los huecos para luego pasar sin necesidad de la linterna, etc., además, a pesar de los supuestos que hacen, fallan en la verificación del tiempo en que logran pasar los individuos el puente.



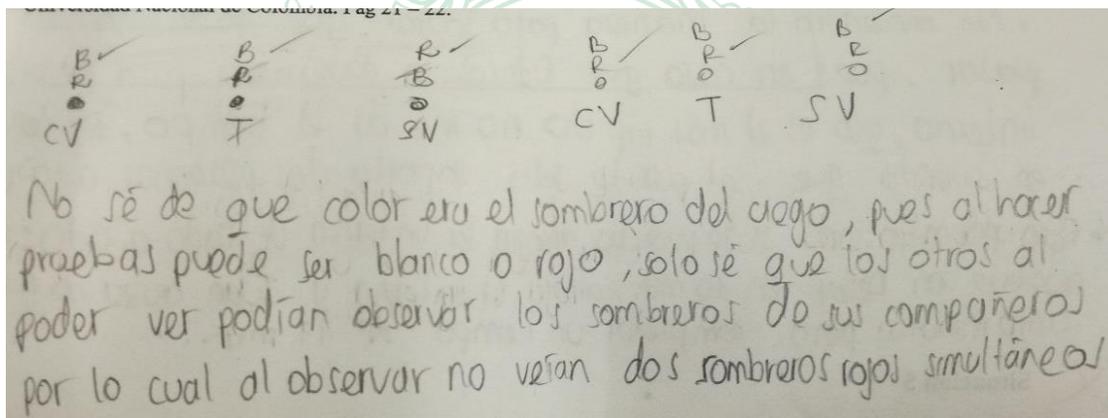
**Figura 11: Respuesta de estudiante caso tipo 2, situación 3, instrumento B.**



El estudiante en este caso realiza una mala inferencia de la situación, afirmando que el sombrero del ciego es de color rojo, a pesar de que insinúa con las primeras líneas un buen razonamiento

**Facultad de Educación**

del ciego es de color rojo, a pesar de que insinúa con las primeras líneas un buen razonamiento del problema. Es claro también, que presenta dificultades en el proceso de verificación, pues si fuese sometido a prueba la conjetura realizada, se hubiera dado cuenta que no es posible que el ciego tuviera un sombrero de ese color, porque siendo así, alguno de los otros dos prisioneros hubiese respondido acertadamente a la pregunta del carcelero.



*Figura 12: Respuesta de estudiante caso tipo 2, situación 3, instrumento B.*

Lo último que expresa el estudiante de este caso es cierto, pero se queda corto en sus argumentos al decir que el sombrero del ciego puede ser blanco o rojo, sin tener en cuenta a través de un proceso de verificación, que dicho sombrero no puede ser rojo, dadas las apreciaciones expuestas en el enunciado. Por tanto, los estudiantes presentan dificultades en los procesos descritos para este caso.

**Nota:** La estudiante #6, a pesar de que no tuvo buen desempeño en las situaciones expuestas en el instrumento B, no se ubicó en el caso I sino en el caso II, debido a que la estudiante en los procesos de visualización y de exploración evaluados a partir del instrumento A, proporcionó



argumentos que sustentaban sus respuestas, como se puede evidenciar en las siguientes

**Facultad de Educación**  
imágenes.

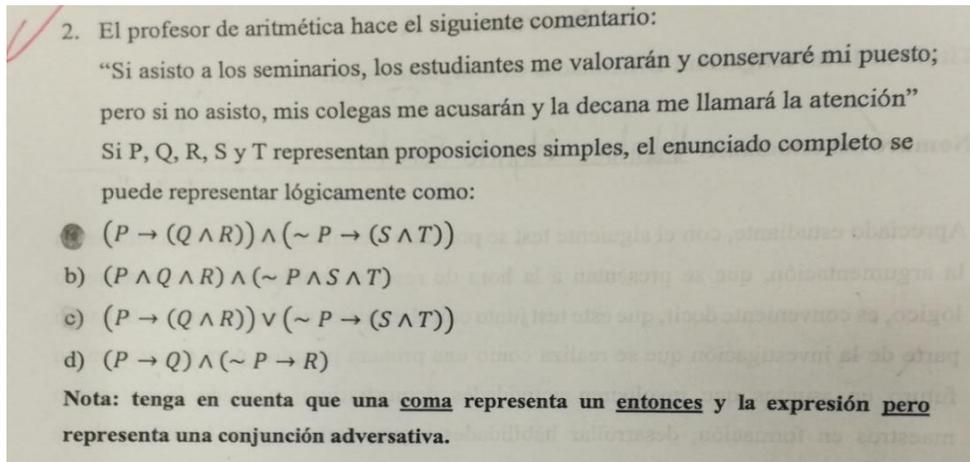


Figura 13: Respuesta dada por la estudiante #6, problema 2, instrumento A.

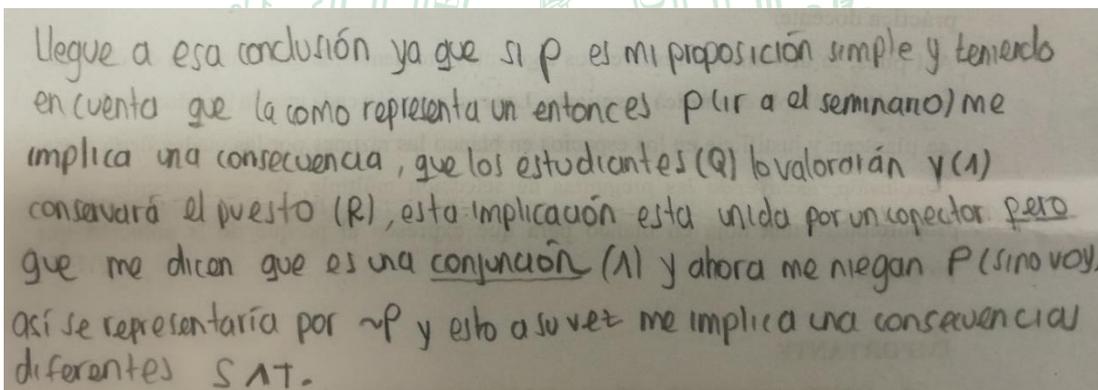


Figura 14: argumento que la estudiante da para la anterior respuesta.

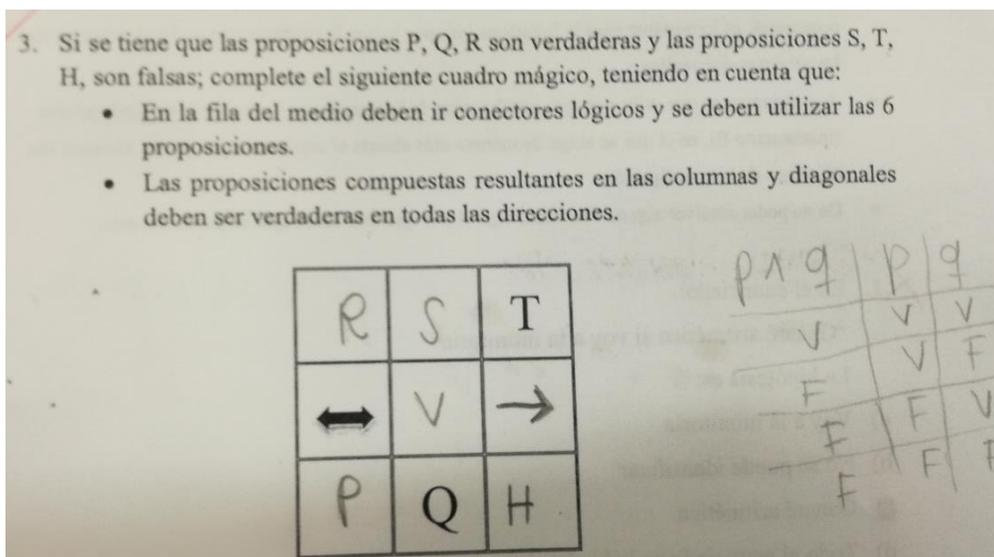
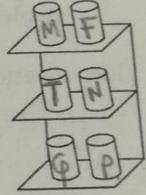


Figura 15: solución dada por la estudiante #6, problema 3, instrumento A.

4. El gráfico muestra una estantería con frascos de mermelada de 6 sabores así: Tomate, mango, guayaba, papaya, naranja y fresa. Se sabe que:

- La mermelada de tomate está a la izquierda. ✓
- La de mango está justo arriba de la de tomate. ✓
- La de guayaba está en el estante más bajo. ✓
- La de papaya está justo debajo de la de naranja. ✓
- La mermelada de naranja comparte estante con la de tomate. ✓



Las mermeladas ubicadas sobre la derecha de arriba hacia abajo son respectivamente:

- a) Mango, naranja, papaya
- b) Naranja, papaya, fresa
- c) Fresa, naranja, papaya
- d) Naranja, papaya, guayaba

Figura 16: Respuesta dada por la estudiante #6, problema 4, instrumento A.

Para llegar a la conclusión solo comencé a seguir la primera instrucción de manera arbitraria y a medida que iba continuando con las siguientes las reacomodaba hasta que cumpliera con todas las instrucciones, faltandome así un frasco el cual correspondía a la fruta de la cual no me dieron ninguna instrucción.

Figura 17: argumento que la estudiante presenta para la anterior respuesta.

### 4.3. Caso tipo 3

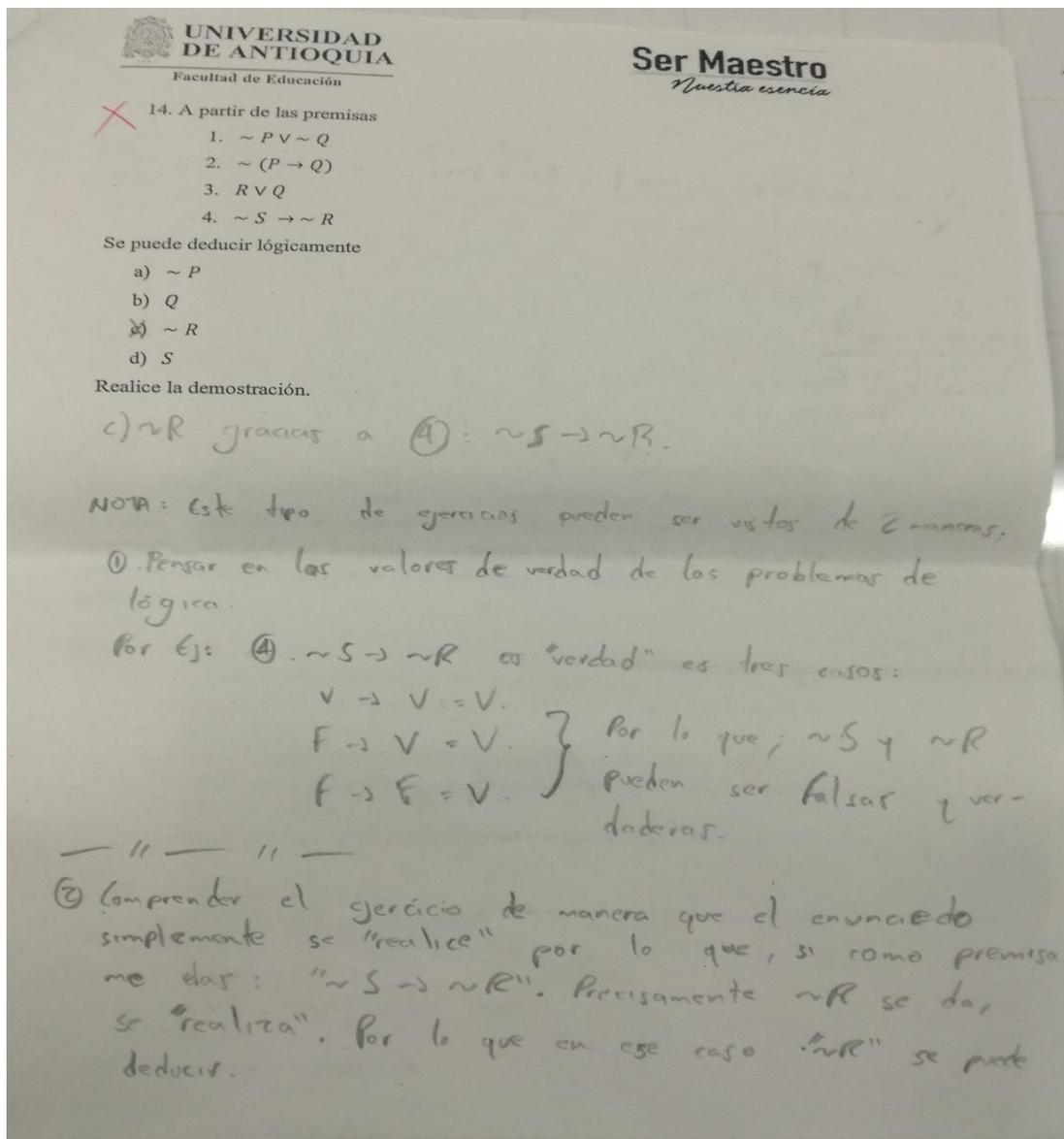
El estudiante #2 es el único que se ubica en este nivel, debido a que cumple con muy buen desempeño en el aspecto *proceso*, pero presenta dificultades en el aspecto *producto* de la actividad demostrativa.

Este estudiante carece de un lenguaje más formal y riguroso al momento de realizar una demostración, los argumentos que utiliza son propios de las acciones del aspecto proceso y no los requeridos en el aspecto producto de la actividad demostrativa, además, se observan falencias



en la justificación que emplea para demostrar, no es coherente con las afirmaciones que realiza,

**Facultad de Educación**  
como se puede evidenciar en la siguiente imagen:



**Figura 18: Respuesta dada por el estudiante #2, problema 14, instrumento A.**

En esta imagen se puede ver como el estudiante responde mal al problema, deduce que  $\sim R$  es lógicamente verdadero gracias a la premisa 4 ( $\sim S \rightarrow \sim R$ ), es decir, el estudiante cree que al tener una implicación como premisa que es lógicamente verdadera, necesariamente el consecuente de esta implicación es verdadero.



Por otra parte, y destacando que, si bien el estudiante #2 es el único ubicado en este nivel, los

**Facultad de Educación**

estudiantes de los otros casos también presentan dificultades en el aspecto producto debido a la secuencialidad natural que estamos manejando en relación con la actividad demostrativa. Las siguientes imágenes muestran este hecho.

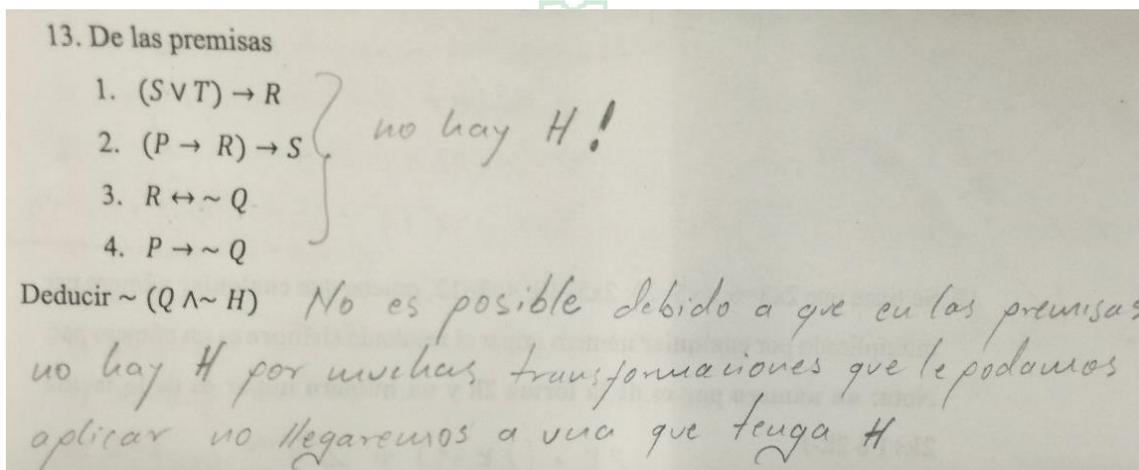


Figura 19: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 13 del instrumento A.

Como se observa, el estudiante atribuye la no solución del problema a que H no aparece dentro de las premisas. Desconoce principalmente la ley de adjunción en una disyunción.

Algo similar ocurre con otro estudiante al abordar este mismo problema, solo que en vez de referirse a la proposición H, hace alusión al conectivo lógico ( $\wedge$ ).

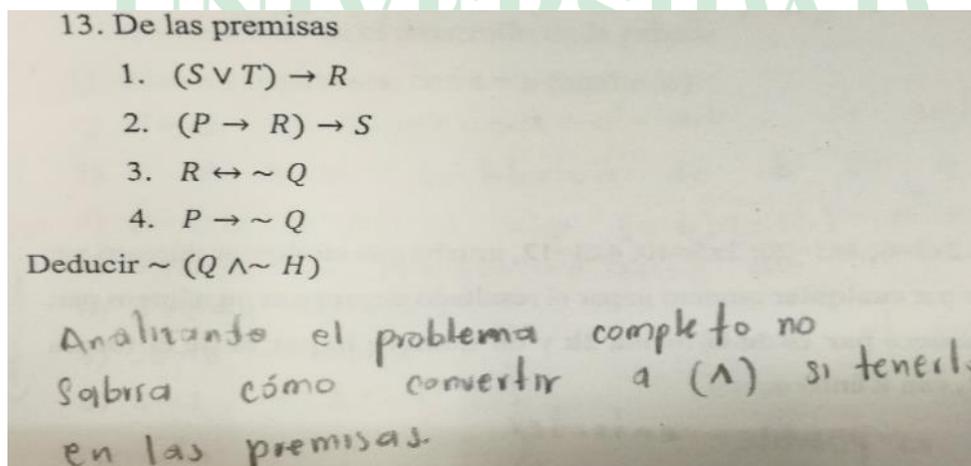


Figura 20: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 13 del instrumento A.



Y en el problema 14 del instrumento A se observa un mal uso de la ley de simplificación, hecho

**Facultad de Educación**

que se refleja en dos de los estudiantes de los anteriores casos.

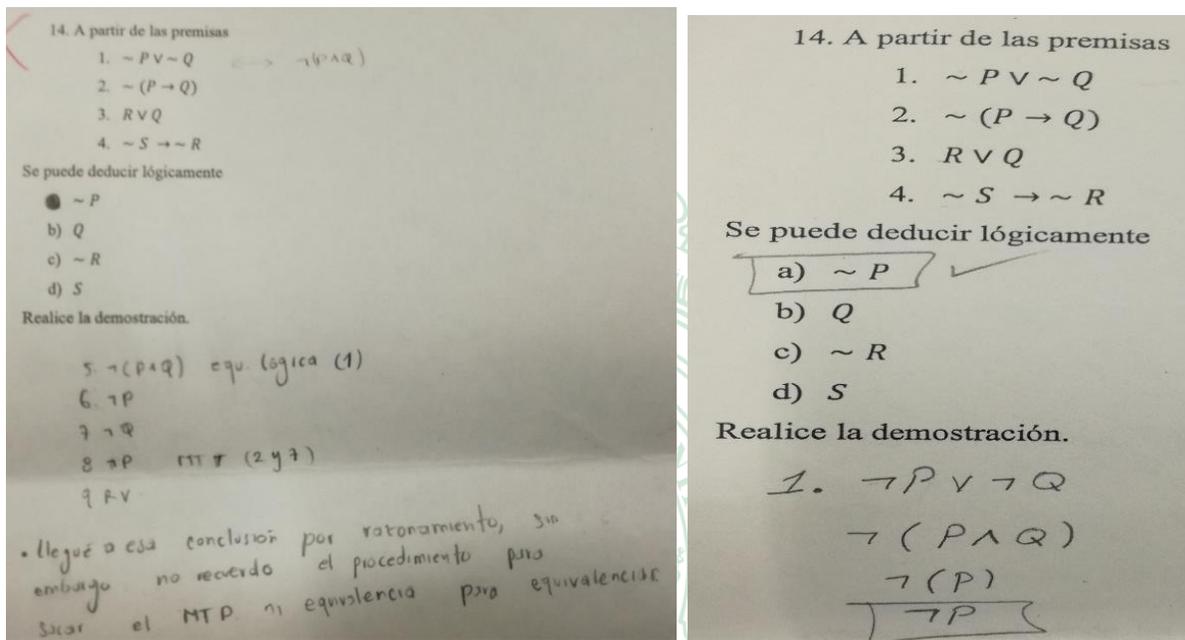


Figura 21: Respuestas dadas por dos estudiantes de los anteriores casos, problema 14 del instrumento A.

En ambos procedimientos no se tiene en cuenta que la conjunción que surge luego de la equivalencia con la premisa 1, que no es más que la ley de D'Morgan, está afectada por una negación, por lo que no se puede simplificar negando cada una de las proposiciones que componen la conjunción.

También se presentan dificultades al abordar los problemas expuestos en el instrumento A, referidos a los elementos del aspecto producto como la explicación y prueba.

10. Justifique cada paso de la siguiente prueba y explique por qué la argumentación es válida o no en el desarrollo de la prueba.

- 1)  $-1 = 1$  (hipótesis)  
2)  $1 = -1$   
3)  $(-1) + 1 = 1 + (-1)$   
4)  $0 = 0$
- Si tomamos  $-1 = 1$  como verdadero tenemos que descartar que uno es el inverso aditivo del otro por eso el paso 4) no es coherente, lo correcto sería algo así:  $2(-1) = 2(1)$*
- Por lo tanto no es válida esa argumentación*

Figura 22: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 10 del instrumento A

El estudiante afirma que la argumentación no es válida y presenta algunos errores en la justificación, por ejemplo, toma la hipótesis como verdadera y la tesis como falsa, cuando en realidad sucede lo contrario.

11. Si  $x \cdot y = 6$  &  $(x + y)^2 = 25$  entonces  $x^2 + y^2$  es igual a:
- a) 11  
 b) 12  
c) 13  
d) 14
- Nota: escriba la prueba, recuerde que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**
- $x^2 + y^2$   
 $x \cdot x + y \cdot y$   
 $x = y + y \cdot x$   
 $6 + 6 = 12$

Figura 23: Respuesta dada por un estudiante de los anteriores casos, problema 11 del instrumento A

En la prueba que realiza el estudiante pareciera ser que no tiene claridad sobre la ley distributiva, lo que lo lleva a un resultado erróneo. Confunde la ley distributiva de la multiplicación con una especie de “ley distributiva de la suma con respecto a la multiplicación”, cosa que no se cumple en Aritmética, aunque sí en álgebra Booleana.



**Nota:** Con los resultados del estudiante #1 se reta la secuencialidad natural que sugiere la

**Facultad de Educación**

actividad demostrativa. Este estudiante presenta algunas dificultades al resolver las tres primeras situaciones del instrumento B, caracterizadas por evaluar sobre todo el aspecto proceso e igualmente falla en el instrumento A en una de las preguntas referidas al proceso de visualización y en otra referida al proceso de exploración, sin embargo, las preguntas del aspecto producto expuestas en el instrumento A como también la situación 5 del instrumento B, las aborda de una manera adecuada, presentando fortalezas en los procesos deductivos y formales que se requieren para demostrar. Por eso, a este estudiante no lo situamos en ninguno de los casos, se convierte en un hito que parece cuestionar el marco teórico utilizado. Por otra parte, el estudiante #2, que hace parte del caso tipo 3, es quien tiene el mejor desempeño en las situaciones referidas al aspecto proceso de la actividad demostrativa expuestas en el instrumento B, pero es también quien presenta serias dificultades a la hora de demostrar formalmente, propio del aspecto producto de la actividad demostrativa.

Lo anterior insinúa que en muchas ocasiones las acciones empíricas y heurísticas propias del aspecto proceso, se pierden cuando se aprende a demostrar formalmente haciendo uso de las reglas de inferencia y equivalencias lógicas, es como si la intuición que prevalece en este aspecto, fuera reemplazada por estructuras que no permiten salirse de un pensamiento puramente lógico y deductivo, de igual forma sucede con quien es capaz de hacer uso de la intuición, del lenguaje común, de procesos inductivos y de descubrimiento, pero se le dificulta poder demostrar formalmente un enunciado haciendo uso de la lógica, es como si el aspecto proceso y el aspecto producto de la actividad demostrativa formaran una dicotomía, que no coexisten al mismo tiempo en algunos casos. Esta sería una idea interesante para reflexionar y trabajar en otra



investigación; por el momento, y siendo fieles a la actividad demostrativa, tomaremos estos dos

**Facultad de Educación**  
aspectos como complementarios.

A continuación, se presentan algunas de las respuestas dadas por el estudiante #1 y el estudiante #2 a los problemas o situaciones planteadas, que reflejan lo dicho en los párrafos anteriores.

13. De las premisas

1.  $(S \vee T) \rightarrow R$
2.  $(P \rightarrow R) \rightarrow S$
3.  $R \leftrightarrow \sim Q$
4.  $P \rightarrow \sim Q$

Deducir  $\sim(Q \wedge \sim H)$

$$\frac{\neg Q \vee H}{Q \rightarrow H}$$

5)  $\neg Q \rightarrow R$  De 3  
 6)  $P \rightarrow R$  Transit. de 4 y 5  
 7)  $S$  MP de 6 en 2  
 8)  $S \vee T$  Ley de adición  
 9)  $R$  MP de 8 en 1  
 10)  $R \rightarrow \neg Q$  De 3  
 11)  $\neg Q$  MP de 9 en 10  
 12)  $\neg Q \vee H$  Ley adición  
 13)  $\neg(Q \wedge \neg H)$

14. A partir de las premisas

1.  $\sim P \vee \sim Q$
2.  $\sim(P \rightarrow Q)$
3.  $R \vee Q$   $\neg R \rightarrow Q$
4.  $\sim S \rightarrow \sim R$   $\neg Q \rightarrow R$

Se puede deducir lógicamente

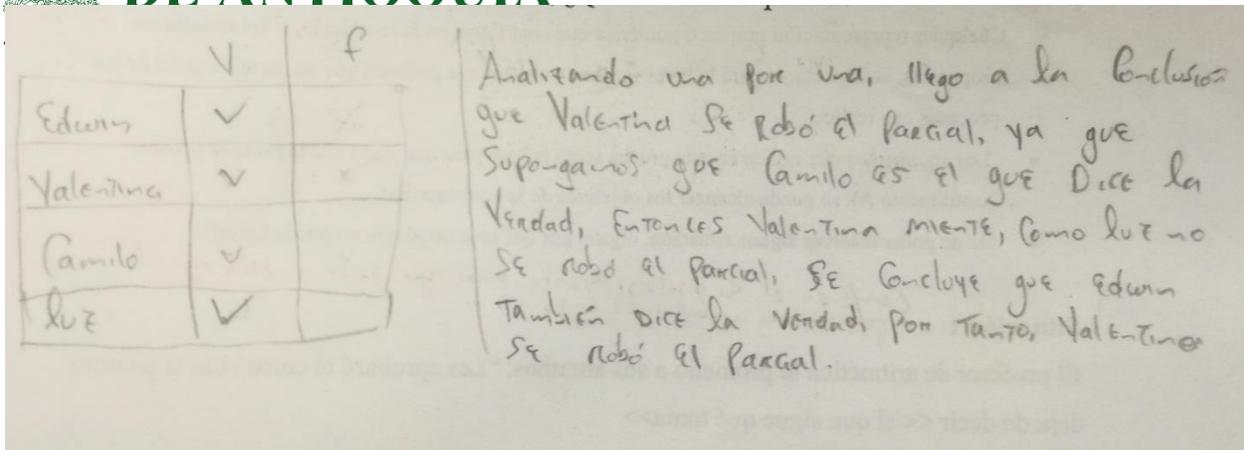
- a)  $\sim P$
- b)  $Q$
- c)  $\sim R$
- d)  $S$

Realice la demostración.

DE 2 TENEMOS  $\neg(P \rightarrow Q)$  ENTONCES  $\neg(\neg P \vee Q)$ , POR TANTO  $P \wedge \neg Q$  SON VERDADERAS, DE 3 TENEMOS  $R \vee Q$ , CONTRADIENDO  $\neg Q \rightarrow R$ , DE DONDE DEDUCIMOS  $R$ , POR TANTO, HACIENDO CONTRADICCIÓN EN 4 TENEMOS  $\neg \sim S$  MP TENEMOS  $S$ . DE DONDE LA RESPUESTA ES  $S$ .

**Figura 24:** Demostraciones hechas por el estudiante #1 de los problemas 13 y 14 del instrumento A.

En estas imágenes se observa la capacidad que tiene el estudiante para argumentar a partir de las reglas de inferencia y equivalencias lógicas, utiliza tanto la demostración tipo afirmación-razón como la demostración en prosa para abordar los problemas.



**Figura 26:** Dificultad que presenta el estudiante #1 en la solución de la situación 2 del instrumento B, que involucra el aspecto proceso.

Con los argumentos que da el estudiante para resolver la situación, se percibe que no tiene en cuenta la condición que ofrece el enunciado y es que **sólo uno de ellos dice la verdad**, si bien, supone que Camilo es quien dice la verdad, da por hecho que la afirmación de Luz también es verdadera, al igual que la de Edwin, lo que lo lleva a una solución errónea. Esto indica que el estudiante presenta dificultades para seguir instrucciones, para explorar, para realizar inferencias a partir de la información que se le proporciona y también para verificar que la solución se corresponde con las condiciones iniciales del problema.

Las siguientes imágenes reflejan el buen desempeño del estudiante #2 en algunos de los problemas y situaciones que evalúan elementos del aspecto *proceso* de la actividad demostrativas.

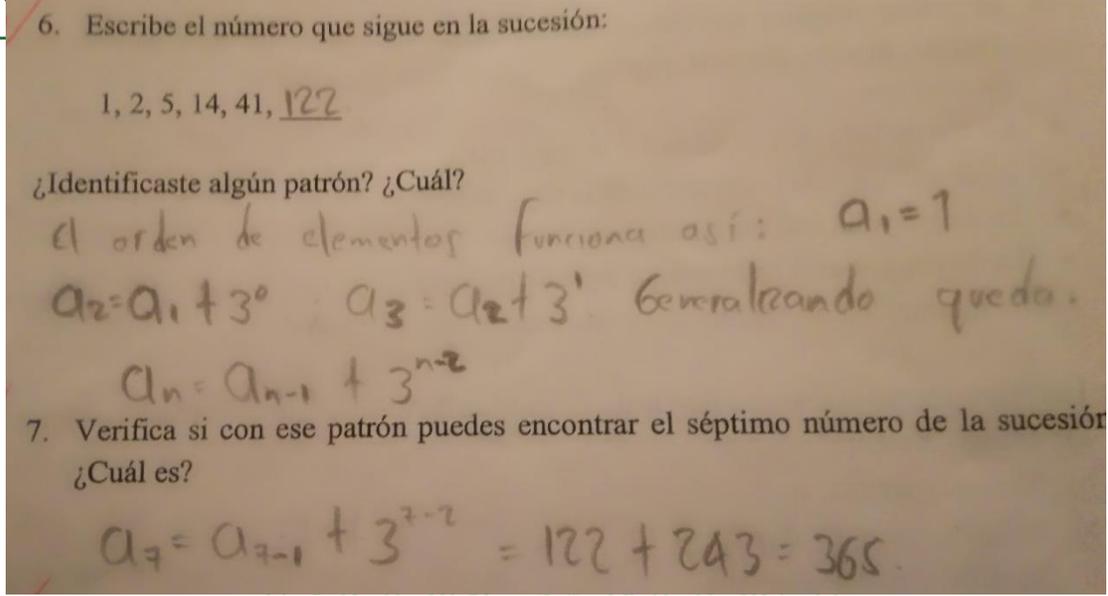


Figura 27: Respuesta dada por el estudiante #2, problemas 6 y 7 del instrumento A.

Este estudiante fue el único en hacer una formalización del patrón hallado de la sucesión. Se aprecia una buena capacidad de conjeturación y de verificación.

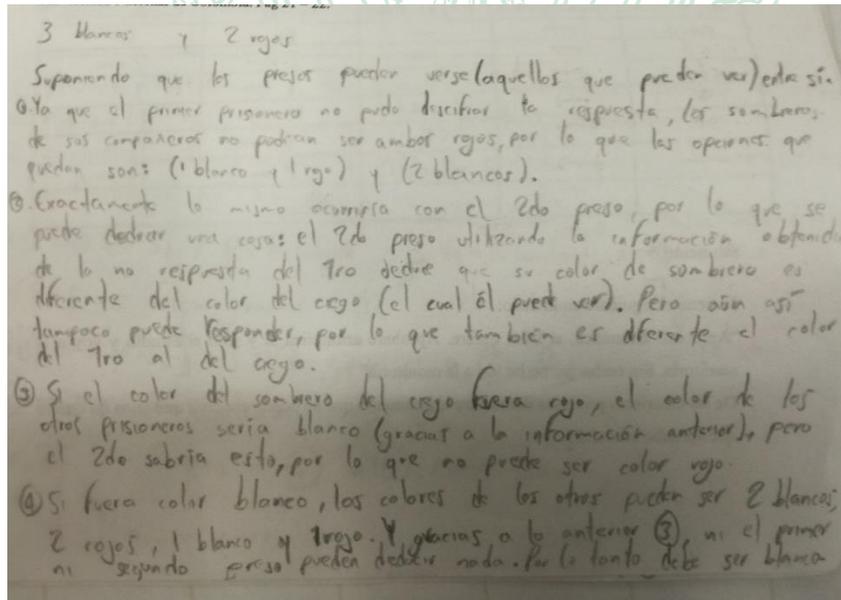


Figura 28: Solución a la situación 3 del instrumento B.

En la argumentación que presenta el estudiante para resolver la situación, se identifica un buen desempeño en los procesos de visualización, exploración, conjeturación, verificación y también en la explicación. El estudiante tiene en cuenta la información que le proporciona el problema, y



a partir de ello, juega con las distintas posibilidades que se pueden dar para el caso, llegando a la

**Facultad de Educación**

conclusión de que la única opción posible es que el prisionero ciego tenga un sombrero de color blanco.

pensamiento\_racional.pdf "abcd" = Participantes / a = 1 min. / c = 5 min.  
b = 2 min. / d = 10 min.

A: Pto inicio.	Movim. Dirección	B: Pto final	Tiempo.	Tiempo Total
abcd.	—	—	0	0
cd	→	ab.	2 min.	2 min.
cd, a	←	b.	1 min.	3 min.
a.	→	b, cd	10 min.	13 min.
ab	←	cd	2 min.	15 min.
—	→	abcd.	2 min.	17 min.

**Figura 29: Solución a la situación 4 del instrumento B.**

En la solución de esta situación el estudiante vuelve y se destaca por presentar buen desempeño en el aspecto *proceso* de la actividad demostrativa, emplea una tabla como medio para representar los procedimientos que realiza según las condiciones planteadas en el problema. Se aprecia cómo el uso de la intuición es importante para abordar este tipo de problemas, que chocan de algún modo con la razón y que en muchos casos hacen desistir de encontrarles solución, pues requieren dejar a un lado esquemas mentales ya incorporados para poder percatarse de los detalles necesarios para resolver la situación.



## **CAPITULO 5: CONCLUSIONES**

En este capítulo se hace una síntesis de los principales logros alcanzados, teniendo en cuenta los objetivos y la pregunta que orientó el trabajo investigativo. Para ello, se analiza la consecución de los objetivos propuestos, el rol y pertinencia del instrumento concebido y la proyección hacia el futuro que surge luego de la investigación realizada.

### **5.1. Consecución de los objetivos**

En este trabajo investigativo se propuso como objetivo general, identificar las dificultades en la argumentación, que presentan los estudiantes que han pasado por un curso de Fundamentos de Aritmética de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, con base en la solución de situaciones y problemas de razonamiento lógico. Esto sirvió como una forma de evaluar, diferente a como se hace en cursos regulares como geometría y Fundamentos de Aritmética, el desempeño en cuanto a los argumentos que presentan los estudiantes para responder a dichas situaciones o problemas, teniendo en cuenta que la lógica permea todos estos procesos, tanto argumentativos como demostrativos, por tal razón se utilizó el marco teórico de la actividad demostrativa, permitiendo con este poder identificar las dificultades en la argumentación a partir de los diferentes procesos tanto empíricos y heurísticos como formales y deductivos que lo caracterizan.



Para lograr el objetivo general se propusieron los siguientes objetivos específicos:

**Facultad de Educación**

**1. Diseñar un instrumento para identificar las dificultades en la argumentación.**

Para el cumplimiento de dicho objetivo se diseñaron dos test teniendo en cuenta los elementos que componen el referente teórico de la actividad demostrativa y, además, el conocimiento y experiencia de los investigadores en el acercamiento a problemas de razonamiento lógico, debido que se han desempeñado en algunas oportunidades como profesores de razonamiento lógico matemático en diferentes cursos preuniversitarios y contando también, que uno de ellos ejerce como monitor del curso de Fundamentos de Aritmética, de tal forma que favorecieran la búsqueda de las pretensiones. El primer test evaluó las diferentes acciones del aspecto proceso y producto de la actividad demostrativa de forma individual y, el segundo, de una manera más global dichas acciones, posibilitando así, a partir de la metodología utilizada, el alcance del objetivo general.

**2. Categorizar cada una de las dificultades en la argumentación, de acuerdo a los procesos involucrados en la actividad demostrativa.**

A partir de los dos test aplicados y en relación con las dificultades encontradas, se pudo establecer una categorización y clasificación de los estudiantes según las características definidas para cada caso, teniendo en cuenta el referente teórico de la actividad demostrativa. Esto arrojó como resultados que:

- La mitad de los estudiantes que hicieron parte de la investigación se encuentran en el caso tipo II, es decir, presentan dificultades en los procesos de conjeturación y verificación, hecho que se manifiesta a la hora de resolver problemas o situaciones que implican el uso de la intuición para realizar inferencias y conjeturas y, posteriormente,



ejecutar procesos de verificación a partir de lo que se les plantea. Además, muchos de sus

**Facultad de Educación**

razonamientos están apoyados en la emotividad y subjetividad, por lo que no son

concretos ni coherentes.

- Todos los estudiantes, excepto el #1, presentan dificultades en el aspecto producto de la actividad demostrativa; les cuesta expresar sus ideas de forma precisa y coherente, quizá porque no están acostumbrados y menos en el área de matemáticas a hacer uso de este recurso. La dificultad más marcada se presenta a la hora de realizar demostraciones ya sean del tipo afirmación – razón o en prosa, los estudiantes carecen de un lenguaje más formal y riguroso, los argumentos que presentan siguen siendo muy propios de las acciones del aspecto proceso, aun así, esto no es del todo malo, la dificultad radica en la justificación que ofrecen para la solución de las situaciones y problemas propuestos, presentando falencias e incoherencias en sus distintas afirmaciones.
- Como se ha expresado en el capítulo 4, el estudiante #1, debido a su particular desempeño, hace cuestionar la secuencialidad natural que sugiere el marco teórico utilizado, y junto con el desempeño del estudiante #2, insinúan que en algunos casos el aspecto proceso y el aspecto producto que conforman la actividad demostrativa no presentan puntos de convergencia o al menos no son fáciles de establecer.

**5.2. Sobre el diseño del instrumento**

Los instrumentos aplicados que consistieron en dos test, fueron diseñados teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Ambos test fueron enfocados en situaciones o problemas de razonamiento lógico, en aras de identificar las dificultades que se presentaban en este aspecto.



El primer test fue concebido de tal forma que evaluara las cuatro acciones del aspecto

## **Facultad de Educación**

proceso y las tres acciones del aspecto producto de la actividad demostrativa, de manera individual. Para ello, se consolidaron dos problemas para cada una de las acciones, de tal forma que se identificaran plenamente las dificultades en estas; si bien, había problemas que podían involucrar más de una acción, la selección de estos se hizo en función de que esa particular acción fuera más evidente que las otras.

- El segundo instrumento se construyó con situaciones problema, que evaluaban a la vez varias acciones del aspecto proceso y producto de la actividad demostrativa, una de ellas contextual, pero que involucraba un asunto plenamente lógico. Estas situaciones fueron intencionalmente seleccionadas, de tal forma que permitieran observar una argumentación más nutrida por parte de los estudiantes y con más elementos para identificar las principales dificultades, debido a las diferentes formas de proceder ante la búsqueda de la solución de dichas situaciones.

En general, estos test fueron pertinentes para lograr alcanzar los propósitos de la investigación, sin embargo, pueden mejorarse, sobre todo el expuesto en el instrumento B, buscando situaciones de las cuales se puedan desprender preguntas que hagan visibles todas las acciones del aspecto proceso y producto de la actividad demostrativa, que se reitera, son difíciles de conseguir mas no imposibles de establecerse.

Además, se pudo percibir que los test tuvieron buena aceptación por parte de los estudiantes.

Muchos salían luego de la aplicación de estos, diciendo frases como: “a mí me va muy mal conjeturando”, “yo sé explicar las cosas, pero como que no logro formalizarlas, cuando veo que hay que demostrar de una me bloqueo”, “yo entiendo el problema pero no sé cómo hacerme explicar”; es decir, los estudiantes, si bien, no saben por ejemplo, que a partir del primer test



(instrumento A) se está evaluando los diferentes procesos de la actividad demostrativa, ellos

**Facultad de Educación**

instintivamente los evocan, lo que ratifica que el instrumento concebido sí desempeñó un papel acorde con lo que se pretendía buscar.

**5.3. Proyección hacia el futuro**

Esta investigación sienta en el campo académico un referente que utiliza el marco teórico de la actividad demostrativa (poco explorado en otros campos diferente a la geometría), para abordar las dificultades en la argumentación a partir de problemas de razonamiento lógico, permitiéndose con esto, comprender la argumentación como un proceso, procedimiento, acción, etc., que no se restringe a las ciencias sociales y jurídicas, si no que su uso debe trascender a todas las disciplinas, especialmente a las ciencias exactas como las matemáticas, y en sus diversas ramas, en las que se posibilite la construcción de conocimientos y saberes a partir de la interacción con los otros. Por eso consideramos que este trabajo solo es el comienzo para ahondar más en el asunto, considerando que es necesario cambiar esos modelos de enseñanza-aprendizaje limitados a la mera transmisión de conocimientos por parte de un maestro que enseña y un alumno que aprende inculcados por un currículo a merced del mercado y atento a las pruebas estandarizadas, por modelos en los que se permita el debate, la refutación, la negociación, etc., como medios para no sólo adquirir un conocimiento en específico sino para formar ciudadanos del mundo, que contribuyan a una mejor sociedad.

A continuación, se suscitan algunas cuestiones que surgen de esta investigación.

1. El marco teórico de la actividad demostrativa puede utilizarse para investigar acerca de los procesos argumentativos y demostrativos en otras ramas de las matemáticas, a la vez que puede apoyarse de recursos digitales para profundizar en acciones que conforman el



aspecto proceso, tales como: la visualización, la exploración, la conjeturación y la

**Facultad de Educación**

verificación, esto no quiere decir que para las acciones del aspecto producto no existan

recursos, de hecho en lógica se puede utilizar por ejemplo el software “logic coach

10” para hacer demostraciones, solo que estos son más abundantes y fáciles de conseguir

para el primer aspecto.

2. Se podría desarrollar una investigación con la misma intención de este trabajo, pero que, a partir de una sola situación o problema de razonamiento lógico, se puedan desligar preguntas referidas a todas las acciones que conforman el marco teórico de la actividad demostrativa, esto con el fin de contrastar los resultados de ambas investigaciones y someterlas a juicios que contribuyan a mejorar los procesos tanto argumentativos como demostrativos de los estudiantes.
3. Si bien, el asunto de la intuición se tocó someramente en este trabajo, sería interesante indagar más sobre la relación y el papel que ésta establece con las acciones heurísticas y de descubrimiento que hacen parte del aspecto proceso de la actividad demostrativa, y cómo puede facilitar el empalme con el aspecto producto sin desaparecer, sino al contrario, irse educando en ello a medida que se avanza en los procesos argumentativos y demostrativos; además, que se tome en consideración una enseñanza de la lógica que no se restrinja a los conceptos teóricos que la delimitan, sino que esté en función de la praxis, de tal forma que le permita al estudiante resolver situaciones problema haciendo uso de la argumentación.
4. Otro asunto que puede explorarse es la relación lenguaje-argumentación, ¿será que tener una apropiación del lenguaje matemático garantiza un buen desempeño en los procesos argumentativos y demostrativos?



Por último, se espera que los resultados obtenidos en esta investigación se tengan en cuenta para

**Facultad de Educación**

tomar medidas que permitan mejorar los procesos argumentativos y demostrativos de los

estudiantes en los diferentes espacios de formación que se imparten en el programa de la

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, a

la vez, que ayuden en un futuro a enriquecer las prácticas pedagógicas a nivel escolar y

universitario.



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Alvarado Monroy, A., & Gonzalez Astudillo, M. T. (2010). LA IMPLICACIÓN LÓGICA EN EL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: ESTUDIO DE UN CASO. *enseñanza de las ciencias*, 28(1), 73-84.
- Balacheff, N. (2000). *PROCESOS DE PRUEBA EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICAS*. Bogotá: una empresa docente - Universidad de los Andes.
- Bravo Estévez, M. d., del Sol Martínez, J. L., & Valdés, E. A. (2001). EL VALOR FORMATIVO DE LAS DEMOSTRACIONES. *Instituto Superior Pedagógico "Conrado Benítez García"*.
- Bravo, M. L., & Arrieta, J. J. (2005). Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. No.35 (3).
- Calle Amaya, B., & Mena Vargas, D. (2017). *Una propuesta didáctica para el desarrollo de la capacidad de argumentación escrita desde la lógica proposicional*. Medellín: Universidad de Medellín.
- Caro, C. M. (2011). Tipos de problemas matematicos. *Pedagogia Magna*, No. 11, 265 - 274.
- Castillo, C. I. (2018). *Logica Matematica*. España: Universidad de Valencia. Obtenido de <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica2.pdf>
- CONGRESO DE LA REPÚBLICA DE COLOMBIA. (1994). *Ley 115 - ley general de educación*.
- Crespo Crespo, C. R. (2014). LA IMPORTANCIA DE LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA.
- de Villiers, M. (1993). EL PAPEL Y LA FUNCIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. *Epsilon*(26), 15-30.
- Díaz, N. L., & Grajales, D. C. (2010). *EL RAZONAMIENTO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO A TRAVÉS DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA BASADA EN EL ENFOQUE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira. Obtenido de



- Durango Urrego, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Facultad de Educacion. (2008). *Documento informe de Auto-evaluación presentado para la acreditación de alta calidad de la Licenciatura en Educación Básica, con Énfasis en Matemáticas*. . Medellín: Universidad de Antioquia.
- Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. . *Revista integración de la Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander. Vol. 31. No 2.*, 181 - 205.
- Gómez Mulett, A. S. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Cincuenta años de reformas en el currículo colombiano de Matemática en los niveles básico y medio de educación. *REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*(38), 155-176.
- Haidar, J. (2000). La argumentación: problemáticas, modelos operativos. En N. d. Lugo, *La Producción Textual en el Discurso Científico* (págs. 67 -98). Mexico, D.F.: Universidad Autonoma Metropolitana. Obtenido de <http://www.uam.mx/cdi/pdf/publicaciones/produccion/argumentacion.pdf>
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 5-23.
- Hempel, C. G. (1995). La geometría y la ciencia empírica. *Sigma, el mundo de las matemáticas*, 23-34.
- Ibañes Jalón, M. J. (2001). CUATRO CUESTIONES EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN. *QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACION EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*.
- Iriarte Diaz Granados, F., Espeleta Maya, Á., Zapata Zapata, E., Cortina Peñaranda, L., Zambrano Ojeda, E., & Fernández Candama, F. (2010). El razonamiento lógico en estudiantes universitarios. *Zona Próxima, núm. 12.*, 40 - 61.
- LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS. (2014). *DOCUMENTO MAESTRO*. MEDELLIN.
- Martin, J. d. (2016). *Técnicas de argumentacion segun Chaim Perelman. Argumentos rigurosos y su aplicacion juridica*. España: Universidad de la Rioja, Servicio de publicaciones. Obtenido de [https://biblioteca.unirioja.es/tfe\\_e/TFE001427.pdf](https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE001427.pdf)
- Ministerio de Educacion Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. . Bogota, D.C.: Imprenta nacional de Colombia.



Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estandares Básicos de Competencia en Matemáticas*. Bogotá, D.C.: Imprenta Nacional de Colombia.

Rodríguez Bello, L. I. (2004). EL MODELO ARGUMENTATIVO DE TOULMIN EN LA ESCRITURA DE ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA. *Revista Digital Universitaria*, Vol. 5, No. 1, 1- 18. Obtenido de [http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/ene\\_art2.pdf](http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/ene_art2.pdf)

S.Epp, S. (2003). the role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886 - 899.

Salazar Mejía, M. L. (2018). *Dificultades que presentan los estudiantes del grado 10° del colegio Colombo Británico de Envigado en el acercamiento a la actividad demostrativa en geometría*. Medellín: Universidad de Medellín.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la Formación Inicial del Profesor de Matemáticas*. Bogotá: Nomos S.A.

Solow, D. (1987). *cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. Mexico, D.F.: Limusa.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata, S.L. Obtenido de <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf>

Travieso Valdés, D., & Hernández Díaz, A. (2017). El desarrollo del pensamiento lógico a través del proceso enseñanza-aprendizaje. *Revista Cubana de Educación Superior*, 36(1), 53 - 68. Obtenido de [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0257-43142017000100006&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0257-43142017000100006&lng=es&tlng=es).



## **ANEXO 1: INSTRUMENTO A**

**Título de la investigación:** Dificultades en la argumentación

**Nombre del estudiante:** \_\_\_\_\_

Apreciado estudiante, con el siguiente test se pretenden identificar algunas dificultades en la argumentación que se presentan a la hora de resolver problemas de razonamiento lógico, es conveniente decir, que este test junto con el expuesto en el instrumento B, hacen parte de la investigación que se realiza como una primera pesquisa para mejorar en un futuro en asuntos que involucren actividades demostrativas, y desde luego, como maestros en formación, desarrollar habilidades argumentativas para beneficio de la práctica docente.

Así pues, lo invitamos a resolver los siguientes problemas, la gran mayoría de ellos de selección múltiple con **única respuesta**. Lea con atención cada una de las situaciones que se plantean y justifique en los espacios en blanco las razones por las cuales llegó a esa conclusión, incluyendo las preguntas de selección múltiple, de ser necesario se les proporcionará una hoja en blanco para que expresen el porqué de la solución que proponen.

### **IMPORTANTE.**

- Cualquier representación gráfica o numérica que contribuya en la resolución de las situaciones propuestas, es importante para la investigación, por lo que le pedimos que no borre ninguno de los procesos que realice.
- Los argumentos que utilice en esta prueba serán la base para que junto con la segunda prueba (instrumento B), en el que se exige de manera más abierta el argumentar, se pueda alcanzar los objetivos de la investigación.
- De no poder resolver alguna situación, diga el por qué cree usted que no puede hacerlo.



En el enunciado:

**Facultad de Educación**

“Ganaré aritmética si voy a la monitoría”

La hipótesis es:

- Voy a la monitoría
- No se puede identificar
- Ganaré aritmética
- Todo el enunciado es la hipótesis

2. El profesor de aritmética hace el siguiente comentario:

“Si asisto a los seminarios, los estudiantes me valorarán y conservaré mi puesto; pero si no asisto, mis colegas me acusarán y la decana me llamará la atención”

Si P, Q, R, S y T representan proposiciones simples, el enunciado completo se puede representar lógicamente como:

- $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\sim P \rightarrow (S \wedge T))$
- $(P \wedge Q \wedge R) \wedge (\sim P \wedge S \wedge T)$
- $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \vee (\sim P \rightarrow (S \wedge T))$
- $(P \rightarrow Q) \wedge (\sim P \rightarrow R)$

**Nota: tenga en cuenta que una coma en este enunciado representa un entonces y la expresión pero representa una conjunción adversativa.**

3. Si se tiene que las proposiciones P, Q, R son verdaderas y las proposiciones S, T, H, son falsas; complete el siguiente cuadro mágico, teniendo en cuenta que:

- En la fila del medio deben ir conectores lógicos y se deben utilizar las 6 proposiciones.
- Las proposiciones compuestas resultantes en las columnas y diagonales deben ser verdaderas en todas las direcciones.



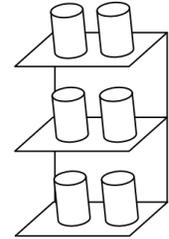
Facultad de Educación

		T
↔		
	Q	

4. El gráfico muestra una estantería con frascos de mermelada de 6 sabores así: Tomate, mango, guayaba, papaya, naranja y fresa.

Se sabe que:

- La mermelada de tomate está a la izquierda.
- La de mango está justo arriba de la de tomate.
- La de guayaba está en el estante más bajo.
- La de papaya está justo debajo de la de naranja.
- La mermelada de naranja comparte estante con la de tomate.



Las mermeladas ubicadas sobre la derecha de arriba hacia abajo son respectivamente:

- Mango, naranja, papaya
- Naranja, papaya, fresa
- Fresa, naranja, papaya
- Naranja, papaya, guayaba

Ejercicio tomado de un examen de admisión de la universidad de Antioquia.

5. Se tiene el siguiente enunciado:

“Aprobaré aritmética, si Dios quiere. Aprobaré aritmética si y solo si estudio y voy a la monitoria. Sin embargo, no he ido a la monitoria”

De las anteriores premisas no podría concluirse que:

- No aprobaré aritmética
- Dios quiere que apruebe aritmética
- Dios no quiere que apruebe aritmética



d) Ninguna de las anteriores

**Facultad de Educación**

6. Escribe el número que sigue en la sucesión:

1, 2, 5, 14, 41, \_\_\_\_\_

¿Identificaste algún patrón? ¿Cuál?

7. Verifica si con ese patrón puedes encontrar el séptimo número de la sucesión, ¿Cuál es?

8. Si P es verdadero, Q es falso, R es falso y S es verdadero; el enunciado falso es:

a)  $Q \rightarrow \sim P$

b)  $\sim (P \rightarrow Q)$

c)  $Q \rightarrow (R \vee \sim S)$

d)  $(P \wedge Q) \vee (\sim R \wedge \sim S)$

9. Justifique cada paso de la siguiente prueba y explique por qué la argumentación es válida o no en el desarrollo de la prueba.

1) Sean a y b números, con  $a = b$  (hipótesis)

2)  $a^2 = ab$

3)  $a^2 - b^2 = ab - b^2$

4)  $(a - b)(a + b) = b(a - b)$

5)  $a + b = b$

6)  $b + b = b$

7)  $2b = b$

8)  $2 = 1$

Tomado de: Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, D.C.: Imprenta nacional de Colombia.



10. Justifique cada paso de la siguiente prueba y explique por qué la argumentación es válida

o no en el desarrollo de la prueba.  
**Facultad de Educación**

- 1)  $-1 = 1$  (hipótesis)
- 2)  $1 = -1$
- 3)  $(-1) + 1 = 1 + (-1)$
- 4)  $0 = 0$

Tomado de: Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, D.C.: Imprenta nacional de Colombia.

11. Si  $x \cdot y = 6$  &  $(x + y)^2 = 25$  entonces  $x^2 + y^2$  es igual a:

- a) 11
- b) 12
- c) 13
- d) 14

**Nota:** escriba la prueba, recuerde que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

12. Se tiene que  $2 \times 3 = 6$ ;  $4 \times 5 = 20$ ;  $2 \times 5 = 10$ ;  $4 \times 3 = 12$ , pruebe que **cualquier** número par multiplicado por **cualquier** número impar el resultado **siempre** es un número par.

**Nota:** un número par es de la forma  $2k$  y un número impar es de la forma  $2k+1$  ó  $2k-1$ , con  $k$  entero

Para los problemas 13 y 14 tenga en cuenta las siguientes reglas y equivalencias:

Doble negación	Silogismo hipotético	Modus Ponens
$\frac{\sim(\sim p)}{p}$	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$	$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$



<b>Ley de adición</b>	<b>Ley de simplificación</b>	<b>Ley de D'Morgan</b>
$\frac{p}{p \vee q}$	$\frac{p \wedge q}{p}$	$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
<b>Modus Tolendo</b>	<b>Regla de equivalencia</b>	<b>Regla del bicondicional</b>
<b>Tollens</b> $\frac{p \rightarrow q}{\sim q}$ <hr/> $\sim p$	$\frac{p \rightarrow q}{\sim p \vee q}$	$\frac{p \leftrightarrow q}{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$

13. De las premisas

1.  $(S \vee T) \rightarrow R$
2.  $(P \rightarrow R) \rightarrow S$
3.  $R \leftrightarrow \sim Q$
4.  $P \rightarrow \sim Q$

Deducir  $\sim (Q \wedge \sim H)$

14. A partir de las premisas

1.  $\sim P \vee \sim Q$
2.  $\sim (P \rightarrow Q)$
3.  $R \vee Q$
4.  $\sim S \rightarrow \sim R$

Se puede deducir lógicamente

- a)  $\sim P$
- b)  $Q$
- c)  $\sim R$
- d)  $S$

Realice la demostración.



**ANEXO 2: INSTRUMENTO B**

**Título de la investigación:** Dificultades en la argumentación

**Nombre del estudiante:** \_\_\_\_\_

Apreciado estudiante, con el siguiente test se pretenden identificar algunas dificultades en la argumentación, que se presentan a la hora de resolver problemas de razonamiento lógico; es conveniente decir, que este test junto con el expuesto en el instrumento A, hacen parte de la investigación que se realiza como una primera pesquisa para mejorar en un futuro asuntos que involucran actividades demostrativas y, desde luego, como maestros en formación, desarrollar habilidades argumentativas para beneficio de la práctica docente.

Así pues, lo invitamos a resolver los siguientes problemas, para ello lea con atención cada una de las situaciones que se plantean y justifique las razones por las cuales llega a la conclusión que propone, expresándolas de manera coherente

**IMPORTANTE**

- Cualquier representación gráfica o numérica que contribuya en la resolución de las situaciones propuestas, es importante para la investigación, por lo que le pedimos que no borre ninguno de los procesos que realice.
- Los argumentos que utilice en esta prueba serán la base para que junto con la primera prueba (instrumento A), se pueda alcanzar los objetivos de la investigación.
- De no poder resolver alguna situación, diga el por qué cree usted que no puede hacerlo



**Situación 1**

**Facultad de Educación**

El profesor de aritmética le prometió a sus alumnos: “Les aprobaré el curso solo si Pastora deja de decir << el que sigue qué toma>>

Pastora dejó de decir << el que sigue qué toma >> sin embargo, el profesor se negó a aprobarles el curso.

Los estudiantes acusaron al profesor ante la coordinación por incumplir su promesa.

¿Los estudiantes pudieron ganar lógicamente la acusación? ¿Por qué?

**Situación 2**

Se robaron un parcial de aritmética y el docente encargado acusa a 4 sospechosos de fraude que al ser interrogados formulan las siguientes declaraciones:

Edwin: Valentina se robó el parcial.

Valentina: Camilo fue quien se robó el parcial.

Camilo: Valentina miente cuando dice que yo me robé el parcial.

Luz: Yo no robé el parcial.

Sabiendo que solo uno de ellos dice la verdad, ¿Quién se robó el parcial?

**Situación 3**

De tres prisioneros que se hallaban en cierta cárcel, uno tenía visión normal, el otro tenía un solo ojo y el tercero era totalmente ciego. El carcelero dijo a los prisioneros que, de un conjunto de tres sombreros blancos y dos rojos, elegiría tres de ellos y los colocaría sobre sus cabezas. Ninguno de ellos podría ver el color de su sombrero.



Luego el carcelero ofreció la libertad al prisionero con visión normal si podía decir de qué color era su sombrero; el prisionero confesó que no podía. Enseguida el carcelero hizo la misma oferta al prisionero tuerto, quien tampoco le pudo decir el color de su sombrero.

El carcelero no le hizo la pregunta al ciego, sin embargo, este esbozó una ancha sonrisa y le dijo al carcelero de qué color era su sombrero y quedó libre.

¿De qué color era el sombrero del ciego?

¿Cómo fue capaz el prisionero ciego de saber el color de su sombrero cuando los demás no pudieron?

Tomado de: Sánchez, C.H., Serrano, G., y Peña, J.I. (2009). *Argumentación y lógica*. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia. Pag 21 – 22.

#### **Situación 4**

Cuatro individuos deben cruzar un puente colgante destartalado, sólo para peatones, durante una noche muy oscura. En algunas partes hay huecos de modo que, para no pisar en falso y caer al vacío, deben usar una linterna que ilumine el camino. El puente sólo soporta el peso de dos de las personas al mismo tiempo (si fueran más, se desmoronaría). Hay sólo una linterna. Los cuatro caminan a velocidades diferentes:

Daniel puede cruzar el puente en un minuto;

Juan, en dos minutos;

Luis, en cinco minutos y

Deiby, es el más lento, en diez minutos.

El puente caerá en exactamente 17 minutos. ¿Cómo pueden cruzar los cuatro?

Recuperado el 27/08/2018 de:

[http://www.economicas.unsa.edu.ar/afinan/informacion\\_general/miscelaneas\\_financieras/cuentos\\_desarrollo\\_pensamiento\\_racional.pdf](http://www.economicas.unsa.edu.ar/afinan/informacion_general/miscelaneas_financieras/cuentos_desarrollo_pensamiento_racional.pdf)

**Situación 5**

**Facultad de Educación**

Se tiene el siguiente enunciado:

“Aprobaré aritmética, si Dios quiere. Aprobaré aritmética si y solo si estudio y voy a la monitoría.  
Sin embargo, no he ido a la monitoría”

De las anteriores premisas demuestre lógicamente que se puede concluir que Dios no quiere que apruebe aritmética.

Para ello tenga en cuenta las siguientes reglas y equivalencias:

<p><b>Doble negación</b></p> $\frac{\sim(\sim p)}{p}$	<p><b>Silogismo hipotético</b></p> $\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$	<p><b>Modus Ponens</b></p> $\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$
<p><b>Ley de adición</b></p> $\frac{p}{p \vee q}$	<p><b>Ley de simplificación</b></p> $\frac{p \wedge q}{p}$	<p><b>Ley de D’Morgan</b></p> $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
<p><b>Modus Tolendo</b></p> <p><b>Tollens</b></p> $\frac{p \rightarrow q \quad \sim q}{\sim p}$	<p><b>Regla de equivalencia</b></p> $\frac{p \rightarrow q}{\sim p \vee q}$	<p><b>Regla del bicondicional</b></p> $\frac{p \leftrightarrow q}{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$



ANEXO 3: SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS Y SITUACIONES

INSTRUMENTO A

Problema 1

R/ a

Problema 2

R/ a

Problema 3

Una de las posibles soluciones para el cuadro mágico, es la siguiente:

P	S	T
↔	V	→
R	Q	H

Problema 4

1ra Condición	
T	
T	
T	

2da Condición	
M	
T M	
T	

3ra Condición	
M	
T M	
T G	G

4ta Condición	
M	N

5ta Condición	
M	F



	T M	P N		T	N
Faculta	T G	G P		G	P

**Solución:** La 5ta condición nos permite identificar la ubicación de las mermeladas, resultando en el lado derecho, de arriba hacia abajo las mermeladas de fresa, naranja y papaya, es decir, la opción C.

**Problema 5**

Sea

P: Aprobaré aritmética.

Q: Dios quiere que apruebe aritmética.

R: Yo estudio.

S: Voy a la monitoria.

1) $Q \rightarrow P$ 2) $P \leftrightarrow (R \wedge S)$ 3) $\sim S$	Premisas
4) $(P \rightarrow (R \wedge S)) \wedge ((R \wedge S) \rightarrow P)$	Definición del bicondicional en 2
5) $P \rightarrow R \wedge S$	Simplificación en 4
6) $Q \rightarrow R \wedge S$	Transitividad entre 1 y 5
7) $\sim S \vee \sim R$	Adjunción en 3
8) $\sim R \vee \sim S$	Conmutatividad en 7
9) $\sim(R \wedge S)$	Ley de D'Morgan en 8
10) $\sim Q$	MTT entre 6 y 9
11) $\sim P$	MTT entre 5 y 9
Luego se puede deducir tanto que “Dios no quiere que apruebe aritmética” como “no aprobaré aritmética” la única que no se puede concluir es que “Dios quiere que apruebe aritmética”	

Por tanto, R/ b

**Problema 6**

R/ número de la sucesión: 122

Una posible formalización del patrón para obtener los valores de la sucesión es:



$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 3^0$$

$$a_3 = a_2 + 3^1$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + 3^{n-2}$$

### Problema 7

Con la generalización anterior se puede obtener el séptimo número así:

$$a_7 = a_{7-1} + 3^{7-2}$$

$$a_7 = a_6 + 3^5$$

$$a_7 = 122 + 243$$

$$a_7 = 365$$

### Problema 8

$$(P \wedge Q) \vee (\sim R \wedge \sim S)$$

P	$\wedge$	Q	$\vee$	$\sim R$	$\vee$	$\sim S$
V		F		V		F
	F				F	
			F			

R/ d

### Problema 9

1) Sean a y b números, con $a=b$ (hipótesis)	Premisa
2) $a^2 = ab$	Ley uniforme
3) $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Ley uniforme
4) $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Factorización
5) $a + b = b$	Este paso se obtiene de simplificar $(a-b)$ en la igualdad, lo cual es un error porque $a-b=0$ por hipótesis
6) $b + b = b$	Por hipótesis $a=b$
7) $2b = b$	Suma de términos semejantes



8) $2 = 1$	Simplificación
------------	----------------

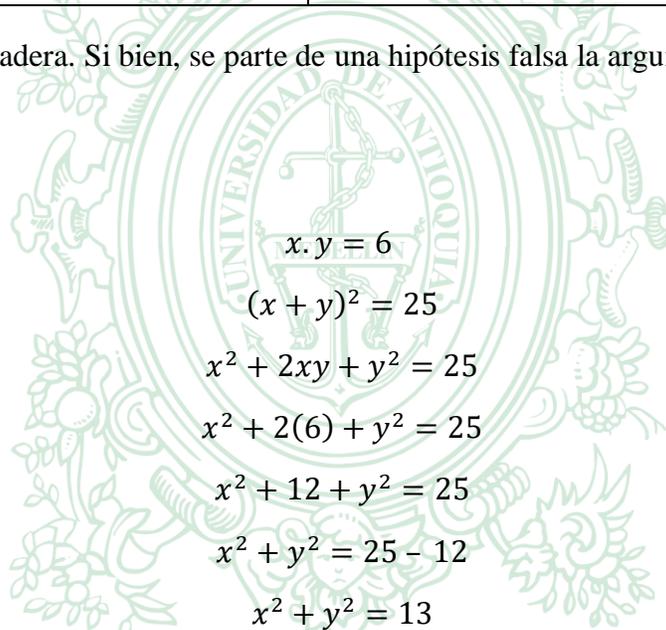
La conclusión es falsa y surge de una argumentación no válida.

**Problema 10**

5) $-1 = 1$ (hipótesis)	premisa
6) $1 = -1$	reflexividad
7) $(-1) + 1 = 1 + (-1)$	Suma a ambos miembros de la igualdad
8) $0 = 0$	Inverso aditivo

La conclusión es verdadera. Si bien, se parte de una hipótesis falsa la argumentación es válida.

**Problema 11**



$$x \cdot y = 6$$

$$(x + y)^2 = 25$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25$$

$$x^2 + 2(6) + y^2 = 25$$

$$x^2 + 12 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 25 - 12$$

$$x^2 + y^2 = 13$$

**Problema 12**

Número par:  $2k$ ,  $k$  entero

Número impar:  $2k+1$ ,  $k$  entero

$$2k(2k+1) = 4k^2 + 2k = 2(2k^2+k) = 2q \text{ siendo } 2k^2+k = q$$

Luego par por impar da par.

**Problema 13**

1) $(S \vee T) \rightarrow R$ 2) $(P \rightarrow R) \rightarrow S$	Premisas
---	----------



3) $R \leftrightarrow \sim Q$	
4) $\sim(Q \wedge \sim H)$	Tesis
5) $(R \rightarrow \sim Q) \wedge (\sim Q \rightarrow R)$	Definición de bicondicional en 3
6) $\sim Q \rightarrow R$	Simplificación en 5
7) $P \rightarrow R$	Transitividad entre 4 y 6
8) $S$	MP entre 2 y 7
9) $S \vee T$	Adjunción en 8
10) $R$	MP entre 1 y 9
11) $R \rightarrow \sim Q$	Simplificación en 5
12) $\sim Q$	MP entre 10 y 11
13) $\sim Q \vee H$	Adjunción en 12
14) $\sim(Q \wedge \sim H)$	Ley de D'Morgan
Queda así realizada la deducción lógica del problema 13.	

**Problema 14**

1) $P \vee Q$	Premisas
2) $\sim(P \rightarrow Q)$	
3) $R \vee Q$	
4) $\sim S \rightarrow \sim R$	
5) $\sim R \rightarrow Q$	Equivalencia en 3
6) $\sim(\sim P \vee Q)$	Equivalencia en 2
7) $\sim(\sim P) \wedge \sim Q$	Ley de D'Morgan
8) $P \wedge \sim Q$	Doble negación en 7
9) $P$	Simplificación en 8
10) $\sim Q$	Simplificación en 8
11) $\sim(\sim R)$	MTT entre 5 y 10
12) $R$	Doble negación en 11
13) $R \rightarrow S$	Contrarrecíproco y doble negación en 4
14) $S$	MP entre 12 y 13
De lo anterior se puede deducir lógicamente S	

R/ d

**Facultad de Educación**  
**Situación 1**

Los estudiantes **no** pudieron ganar lógicamente la acusación, veamos su análisis.

Las proposiciones fueron:

p: “Les aprobaré el curso”

q: “Pastora deja de decir: El que sigue que toma”

La promesa fue  $p \rightarrow q$ , que se lee lógicamente: “p solo si q”.

Luego, si se tiene q no se puede deducir p, no hay ninguna regla que permita hacerlo. Los estudiantes tienden a interpretarlo de la siguiente manera:  $q \rightarrow p$ : “Si Pastora deja de decir el que sigue que toma, les aprobaré el curso”, y como tienen q, por Modus Ponens concluyen p.

**Situación 2**

Nombres	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
Edwin	V	I	F	I	F	I	F	
Valentina	F	C	V	I	F	I	F	I
Camilo	F	I-C	F	C-C	V	I-I	F	I-C
Luz	F	C	F	C	F	C	V	I

En la tabla se ha utilizado la siguiente notación:

F- falso V – verdadero I- inocente C – culpable.

**Caso 1:** Si suponemos que Edwin dice la verdad, es inocente, entonces Valentina y Luz son culpables y Camilo sería inocente y culpable a la vez, lo que es imposible y se descarta esta posibilidad.

**Caso 2:** Si suponemos que Valentina dice la verdad sería inocente, al igual que Edwin, entonces Camilo y Luz serían culpables y como es uno solo el culpable se descarta esta posibilidad.

**Caso 3:** Suponiendo que Camilo dice la verdad, deducimos fácilmente que Edwin, Valentina y Camilo son inocentes y solo Luz aparece como única culpable y esta es una posible solución.

**Caso 4:** Si Luz dice la verdad, llegamos rápidamente a una contradicción, pues Camilo sería inocente y culpable a la vez y esto es imposible.

Haciendo una valoración de los cuatro casos, podemos concluir que el **único en que no se llega a una contradicción** es en el tercero, por lo tanto Luz es la culpable.



**Facultad de Educación**

Otra manera de resolver la situación es suponiendo la culpabilidad de cada uno de los implicados y observar en cual caso se cumple que solo uno dice la verdad según sus declaraciones.

Realizando lo anterior se obtiene el siguiente cuadro.

	<b>Edwin</b>	<b>Valentina</b>	<b>Camilo</b>	<b>Luz</b>
<b>Edwin</b>	F	V	F	F
<b>Valentina</b>	F	F	V	F
<b>Camilo</b>	V	V	F	V
<b>Luz</b>	V	V	V	F

Como se puede ver, cuando se supone que Luz es la culpable se obtiene que solo Camilo es quien dice la verdad y esta es la condición que ofrece el problema.

**Situación 3**

Para hallar la solución, el ciego debió razonar de la siguiente manera:

«Hay tres sombreros blancos y dos rojos. Si el de visión normal hubiera visto en cada uno de nosotros los sombreros rojos, hubiera dicho sin dudar:

«Mi sombrero es blanco». Como no respondió, se deduce que tenía dudas. Por lo tanto, hay dos posibilidades:

Vio dos sombreros blancos o

Vio un sombrero blanco y uno rojo.

De acuerdo con la primera posibilidad, mi sombrero es blanco.

De acuerdo con la segunda posibilidad, ¿quién tiene el sombrero rojo? Si lo tuviera yo, el tuerto hubiera respondido:

«Veo que el Ciego lleva un sombrero rojo. Si el mío fuera también rojo, el de visión normal hubiera respondido que el suyo era blanco. Por lo tanto, el mío es blanco».

Pero al no haber respondido, es porque mi sombrero tiene que ser blanco y no rojo.

**Situación 4**

**La solución a esta situación se presenta de la siguiente manera:**

Primero cruzan Daniel y Juan (2 minutos).



**Facultad de Educación**  
Cruzan Luis y Deiby (10 minutos).

Vuelve Daniel (1 minuto).

Cruzan nuevamente Daniel y Juan (2 minutos).

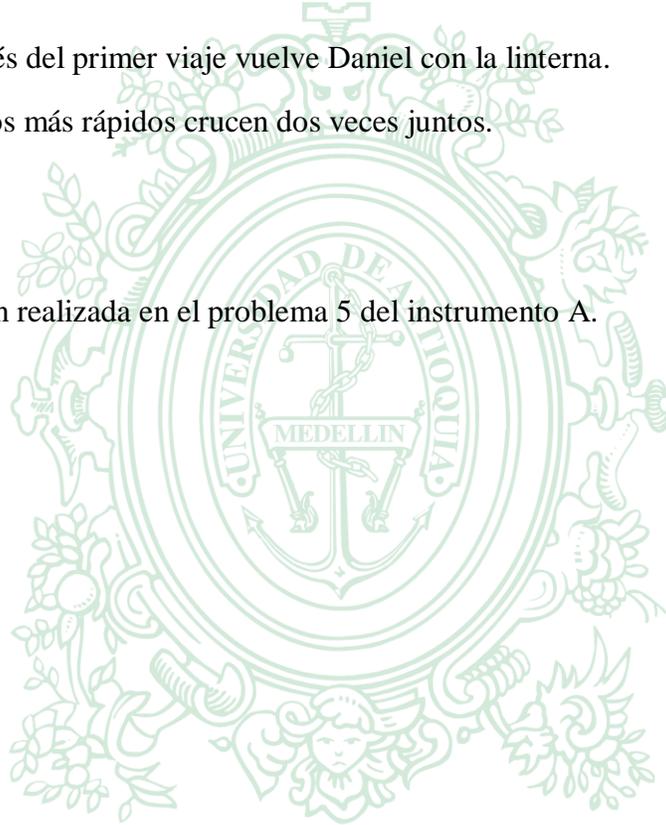
Total: 17 minutos.

Es lo mismo si después del primer viaje vuelve Daniel con la linterna.

La clave es que los dos más rápidos crucen dos veces juntos.

### **Situación 5**

Véase la demostración realizada en el problema 5 del instrumento A.





**ANEXO 4: CONSENTIMIENTO INFORMADO**

**Universidad de Antioquia, Facultad de Educación**

**Licenciatura en Matemáticas y Física**

**CONSENTIMIENTO INFORMADO**

**Título de la Investigación:** Dificultades en la Argumentación.

**Investigadores:** Ruggery Antonio Espinoza Castaño – Jaime Humberto David Serna

Yo \_\_\_\_\_, en calidad de coordinador del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, una vez informado sobre los propósitos, objetivos, procedimientos de intervención y evaluación que se llevarán a cabo en esta investigación y los posibles alcances; autorizo a los jóvenes:

\_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_, estudiantes de trabajo de grado del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación, para realizar dos test que permitan recolectar datos para su investigación, en el espacio formativo del área de fundamentos de aritmética del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Adicionalmente se me informó que:

- La participación en dicho trabajo por parte de los estudiantes y docentes, no me reporta ningún beneficio de tipo material o económico. Sin embargo, se espera que los resultados obtenidos permitan mejorar los procesos de enseñanza – aprendizaje en el programa.



Los resultados de la investigación serán comunicados en forma escrita y oral, los cuales

serán usados exclusivamente para fines académicos, es decir, solamente serán comunicados en publicaciones científicas o de divulgación institucional y en eventos académicos.

- La información obtenida de la aplicación de los test y del estudio realizado será confidencial, el nombre de los participantes de la investigación se mantendrá en reserva.

Hago constar que el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

En constancia firmo:

\_\_\_\_\_

Nombre: \_\_\_\_\_

Documento de identidad: \_\_\_\_\_

Ciudad y fecha: \_\_\_\_\_

**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**Formato adaptado de:**

<https://www.autonoma.edu.co/sites/default/files/attachments/article/106/05-Formatos-Recoleccion-Consentimiento-UAM-2010.pdf>



Facultad de Educación



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Ser Maestro  
*Nuestra esencia*

Universidad de Antioquia, Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

CONSENTIMIENTO INFORMADO

**Título de la Investigación:** Dificultades en la Argumentación.

**Investigadores:** Ruggery Antonio Espinoza Castaño – Jaime Humberto David Serna

Yo Iván Leonardo Cely Quintero en calidad de coordinador del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, una vez informado sobre los propósitos, objetivos, procedimientos de intervención y evaluación que se llevarán a cabo en esta investigación y los posibles alcances; autorizo a los jóvenes:

Ruggery Espinoza y Jaime Serna,  
estudiantes de trabajo de grado del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación, para realizar dos test que permitan recolectar datos para su investigación, en el espacio formativo del área de fundamentos de aritmética del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Adicionalmente se me informó que:

- La participación en dicho trabajo por parte de los estudiantes y docentes, no me reporta ningún beneficio de tipo material o económico. Sin embargo, se espera que los resultados obtenidos permitan mejorar los procesos de enseñanza – aprendizaje en el programa.
- Los resultados de la investigación serán comunicados en forma escrita y oral, los cuales serán usados exclusivamente para fines académicos, es decir, solamente serán comunicados en publicaciones científicas o de divulgación institucional y en eventos académicos.
- La información obtenida de la aplicación de los test y del estudio realizado será confidencial, el nombre de los participantes de la investigación se mantendrá en reserva.



Facultad de Educación



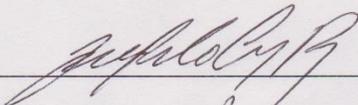
UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Ser Maestro  
*Nuestra esencia*

Hago constar que el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

En constancia firmo:

  
Nombre: Ivan Leonardo Cely Pineda  
Documento de identidad: 71766272  
Ciudad y fecha: Medellin / 18-09-2018

Formato adaptado de:

<https://www.autonoma.edu.co/sites/default/files/attachments/article/106/05-Formatos-Recoleccion-Consentimiento-UAM-2010.pdf>



**ANEXO 5: CONSENTIMIENTO PARA USO DEL BUEN NOMBRE**

**Universidad de Antioquia, Facultad de Educación**

**Licenciatura en Matemáticas y Física**

**CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA USO DEL BUEN NOMBRE**

**Título de la Investigación:** Dificultades en la Argumentación.

**Investigadores:** Ruggery Antonio Espinoza Castaño – Jaime Humberto David Serna

La universidad de Antioquia se caracteriza por ser un espacio de integración y participación de diversas personas que confieren un sentido de humanización y sensibilización ante los diferentes procesos educativos que se viven en el claustro universitario; una de estas personas, es doña Pastora, quien dentro de su amabilidad y el servicio que ofrece en la cafetería de la institución, permite que los estudiantes tengan un momento de alegría y de interacción con personas diferentes al espacio formativo, por su particular forma de hacer cuentas y otorgar los turnos.

A raíz de la investigación que indaga por las dificultades en la argumentación, se hace uso dentro de una de las situaciones el nombre de doña Pastora, por ello, partiendo de lo anterior, se hace necesario solicitar permiso para el uso del buen nombre de quien se considera un ícono de nuestra institución, para fines meramente educativos, sin incentivar la burla o el irrespeto, sino más bien con la posibilidad de relacionar un hecho particular con los propósitos de la investigación, a la vez, que permita generar un ambiente agradable y cercano para los estudiantes objetos de estudio.

Por lo tanto, informamos a través de este consentimiento a la señora \_\_\_\_\_ identificada con cédula \_\_\_\_\_



Que el uso de su buen nombre será exclusivamente para uso de la investigación y que solicitamos permiso para realizar con fines educativos una muestra de su característica forma de atender y ofertar sus productos en la cafetería.

Firma:



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



Universidad de Antioquia, Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

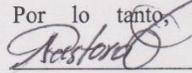
CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA USO DEL BUEN NOMBRE

**Título de la Investigación:** Dificultades en la Argumentación.

**Investigadores:** Ruggery Antonio Espinoza Castaño – Jaime Humberto David Serna

La universidad de Antioquia se caracteriza por ser un espacio de integración y participación de diversas personas que confieren un sentido de humanización y sensibilización ante los diferentes procesos educativos que se viven en el claustro universitario; una de estas personas, es doña Pastora, quien dentro de su amabilidad y el servicio que ofrece en la cafetería de la institución, permite que los estudiantes tengan un momento de alegría y de interacción con personas diferentes al espacio formativo, por su particular forma de hacer cuentas y otorgar los turnos.

A raíz de la investigación que indaga por las dificultades en la argumentación, se hace uso dentro de una de las situaciones el nombre de doña Pastora, por ello, partiendo de lo anterior, se hace necesario solicitar permiso para el uso del buen nombre de quien se considera un icono de nuestra institución, para fines meramente educativos, sin incentivar la burla o el irrespeto, sino mas bien con la posibilidad de relacionar un hecho particular con los propósitos de la investigación, a la vez, que permita generar un ambiente agradable y cercano para los estudiantes objetos de estudio.

Por lo tanto, informamos a través de este consentimiento a la señora  identificada con cédula 32434384

Que el uso de su buen nombre será exclusivamente para uso de la investigación y que solicitamos permiso para realizar con fines educativos una muestra de su característica forma de atender y ofertar sus productos en la cafetería.

Firma:

