Facultad de Educación

Decaimiento exponencial: una experiencia de aprendizaje a través de la modelación matemática con tecnologías digitales

Andrés Felipe Guzmán Cuartas

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Departamento de enseñanza de las Ciencias y las Artes
Licenciatura en Matemáticas y Física
Medellín – Antioquia, Colombia

2018

Facultad de Educación

Decaimiento exponencial: una experiencia de aprendizaje a través de la modelación matemática con tecnologías digitales

Andrés Felipe Guzmán Cuartas

ASESORES:

Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa

Mg. Jaime Andrés Carmona Mesa

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de enseñanza de las Ciencias y las Artes

Licenciatura en Matemáticas y Física

Medellín – Antioquia, Colombia

2018

Facultad de Educación

Agradecimientos

A mi madre y a mi abuela, que desde el inicio de mis estudios en primaria se esforzaron para que nunca faltara nada, soñaron con ver una persona formada en valores y con principios éticos, que aportase a la sociedad de forma significativa y trascendental. A ellas les debo todo lo que soy.

A la universidad de Antioquia, alma máter, porque en sus pasillos, aulas, bibliotecas y plazas pude conocer personas muy valiosas, que de una u otra forma contribuyeron en mi formación como docente en matemáticas y física, permitiéndome ver y hacer parte del camino de la liberación y la revolución de los pueblos.

A todos los profesores de la licenciatura en matemáticas y física, por su paciencia, cariño y comprensión. Sé que siempre dieron todo lo que tienen, espero reencontrarme con ustedes en el ejercicio docente, estar a su altura y disfrutar juntos de un café caliente.

Agradezco a mis colegas, compañeros de estudio y lucha porque me enseñaron a estar pendiente de aquel que necesita ayuda, aprendí a dar el primer paso.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

En este trabajo se presenta una experiencia de aprendizaje, que se originó a partir de la necesidad de integrar tecnología digital en la clase de matemáticas. Con el propósito de identificar los aportes de la modelación matemática con tecnologías digitales al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de la educación media, se construyó una actividad de análisis del decaimiento del voltaje en un condensador inscrito en un circuito RC. Se hizo un estudio de casos para desarrollar el análisis de los datos obtenidos durante la investigación realizada en el centro de práctica. Se concluye con la clasificación de las acciones mentales de los casos al interactuar con Proteus 8.5 y Excel o GeoGebra en el proceso de obtención del modelo matemático para la caída de voltaje.

Palabras claves: Decaimiento exponencial, modelación matemática, tecnologías digitales, razonamiento covariacional, acciones mentales, estudio de casos.

Summary

This work presents a learning experience, which originated from the need to integrate digital technology in the math class. In order to identify the contributions of mathematical modeling with digital technologies to the development of covariational reasoning in middle school students, a voltage decay analysis activity was built in a capacitor registered in an RC circuit. A case study was made to develop the analysis of the data obtained during the research carried out in the practice center. It concludes with the classification of the mental actions of the cases when interacting with Proteus 8.5 and Excel or GeoGebra in the process of obtaining the mathematical model for the voltage drop.

Key words: Exponential decay, mathematical modeling, digital technologies, covariation reasoning, mental actions, case studies.

Introducción

Integrar tecnología en la enseñanza de las matemáticas se reconoce como una línea de investigación en el área (Drijvers et al., 2016). Este trabajo pretende aportar elementos que permitan evidenciar el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de décimo grado, al abordar el estudio del decaimiento de voltaje en un condensador electrolítico, usando geometría dinámica y hojas de cálculo a través de recursos como GeoGebra y Excel, a partir de la gráfica que representa la descarga de un condensador, obtenida con el osciloscopio de Proteus 8.5, para determinar y analizar el comportamiento, variación y covariación de variables inscritas en el desarrollo de una experiencia de aprendizaje basada en la simulación de un circuito RC.

En el capítulo uno se desarrolla el problema de investigación con estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Fe y Alegría Luis Amigó del barrio Moravia Oriente, se describe el origen y la necesidad de identificar los aportes de la modelación matemática al desarrollo del razonamiento covariacional integrando tecnologías digitales. A esto se añade una breve descripción de la génesis de la función exponencial, el análisis de experiencias de aula donde se promueve la construcción conceptual de este tipo de funciones en contextos de modelación matemática; se define la pregunta y el objetivo de investigación en el marco de la modelación del decaimiento de voltaje en un condensador de un circuito RC.

El capítulo dos se compone por los elementos teóricos que definen la modelación matemática en educación matemática (Blum & Borromeo, 2009), modelación matemática integrando tecnologías (Vasco, 2006), el pensamiento variacional y el razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003; Saldanha & Thompson, 1998; Vasco, 2006). A propósito de la modelación del decaimiento de voltaje en un condensador en un circuito RC, se mencionan características de una función exponencial en términos de la razón de cambio y la obtención del modelo matemático para el voltaje en un condensador (Halliday, Resnick, & Krane, 1999).

En el capítulo tres se describen aspectos metodológicos del estudio intrínseco de los casos Y, D y M en una investigación cualitativa (Flick, 2007; Sampieri et al., 2014; Stake, 1998). A continuación, se desarrolla la actividad planteada en el aula, la modelación de la caída de voltaje en un condensador en un circuito RC al integrar tecnologías digitales potentes como Proteus 8.5, GeoGebra o Excel; para la manipulación dinámica de gráficas y obtención del modelo matemático para representar dicha caída de voltaje en términos teórico-prácticos.

Finalmente, en el capítulo cuatro se hace el análisis de los resultados, con base en la triangulación de datos extraídos de material audiovisual, escrito y la observación participante durante el desarrollo de la experiencia de aprendizaje con los casos seleccionados. La finalidad de dicho análisis se enfocó en las acciones mentales descritas dentro del marco conceptual para el razonamiento covariacional de los estudiantes [tabla 4.] adaptado de Carlson et al. (2003) para el decaimiento de voltaje en el proceso de descarga de un condensador en un circuito RC, para identificar los aportes de la modelación con tecnologías digitales al desarrollo de dicho razonamiento en estudiantes de décimo grado que interactúan con dispositivos electrónicos en el aula de clase; además de las recomendaciones a tener en cuenta en futuras investigaciones y las limitaciones existentes en el desarrollo de esta experiencia de aprendizaje.

1. El problema de investigación

En esta sección se desarrolla la idea, motivos y origen de las necesidades para formular el problema de investigación y para construir una experiencia de aprendizaje en la cual el objeto de estudio es la caída de voltaje de un condensador en un contexto de modelación matemática con un circuito RC. Posteriormente se presenta una revisión de los antecedentes que obedecen al objeto de estudio. A esto se añade la pregunta y el objetivo de esta investigación.

1.1. Formulación del problema de investigación

La Institución Educativa Fe y Alegría Luis Amigó se encuentra ubicada en el barrio Moravia (Comuna 4, Medellín, Antioquia, Colombia), según datos del DANE Moravia es considerado como una de las comunidades más densamente pobladas del país con aproximadamente 41.352 habitantes en 2018; el contexto y la historia de la comunidad se ha visto enmarcado por acciones violentas, desastres naturales, problemas sanitarios y sobrepoblación originada por el asentamiento de comunidades desplazadas y migraciones de familias desde variados territorios del país en busca de oportunidades laborales, educativas y de salud.

El problema de investigación se formuló a partir de la experiencia del autor como habitante del sector y egresado de la I. E. Fe y Alegría; ahora, durante la práctica como docente de matemáticas en ésta, se encontró la oportunidad de proponer el estudio de situaciones que permitieran articular las matemáticas con el mundo real y las tecnologías disponibles en el contexto. El estudio de funciones llamó la atención desde el principio de la incursión en estudios de pregrado, al realizar el curso de Introducción al Cálculo, sea por el diverso campo de aplicaciones en áreas como la biología, la estadística, la ingeniería, sociodemografía, finanzas, electricidad y electrónica, entre otras.

Adicional a lo anterior cabe mencionar el continuo acompañamiento del profesor Jaime Nolasco Menoyos Gaviria en la formación como estudiante en educación media y el cual ayudó a propiciar una experiencia que integró tecnologías digitales con el aprendizaje de las matemáticas en el aula. Este trabajo documentó y analizó una experiencia donde la modelación matemática se convirtió en el medio para estudiar una situación práctica, que posibilitase identificar el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes, mediante el estudio del decaimiento de voltaje en un condensador, que se puede representar como una función exponencial a través de un modelo matemático obtenido mediante una regresión lineal de dos variables.

La literatura reporta el desafío de enseñar funciones exponenciales en el aula, en términos de Rizzo (2014), los estudiantes suelen presentar dificultades para identificar las variables, la variación de cantidades relacionadas y así mismo para argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos o analíticos mediante el lenguaje verbal. Al respecto, la autora afirma que habitualmente el estudio de funciones se aborda “a través de la elaboración de tablas de valores para luego realizar su gráfica aproximada, y análisis de esta. Este proceso demanda mucho tiempo, dejando poco espacio para las aplicaciones y reflexiones” (p. 4.).

La intención de resolver o interpretar un problema de aplicación en el cual se identifiquen habilidades generales de razonamiento matemático al definir variables en una situación, una gráfica, se limita a intentar resolver ejercicios desde la interacción algorítmica y operativa, generalmente se inhibe la parte conceptual que surge del razonamiento matemático (Carlson et al., 2003; Thompson & Carlson, 2016).

En términos generales, el MEN (2006) propone respecto con lo mencionado hasta este punto, que:

> Se hace necesario pasar de una enseñanza orientada sólo hacia el logro de objetivos específicos relacionados con los contenidos del área y hacia la retención de dichos contenidos, a una enseñanza que se oriente a apoyar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas (p. 48.).

Por lo tanto, se debe empezar a implementar un conjunto de propuestas que aporten conocimiento para la cotidianidad; en donde el estudiante demuestre que el conocimiento adquirido en el aula de matemáticas se encuentra interiorizado, a través de acciones tales como la conducta económica, la conciencia corporal, la sobrepoblación mundial (causas y efectos), el manejo de programas y *software*, la conciencia social, cultural y natural del ser humano y el universo, comprendiendo de igual forma los limitantes físicos, tecnológicos, racionales y espirituales que coexisten en cada contexto.

Por ende, se reconoce la importancia que tiene el análisis de funciones en las matemáticas y lo fundamental para llevar a cabo el estudio de fenómenos naturales y sociales. Este trabajo pretende aportar elementos que permitan evidenciar el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de la I. E. Fe y Alegría Luis Amigó al abordar el estudio del decaimiento de voltaje en un condensador electrolítico, usando geometría dinámica y hojas de cálculo a través de recursos como GeoGebra y Excel, a partir de la gráfica que representa la descarga de un condensador, obtenida con el osciloscopio de Proteus 8.5, para determinar y analizar el comportamiento, variación y covariación de variables inscritas en el desarrollo de una experiencia de aprendizaje basada en la simulación de un circuito RC. Estos recursos posibilitan el desarrollo del lenguaje simbólico inscrito en la construcción del conocimiento matemático formal de los estudiantes al momento de experimentar con tecnologías digitales en el aula (Bray & Tangney, 2017; James & Singer, 2016; Vasco, 2006).

Integrar tecnología en la enseñanza de las matemáticas se reconoce como una línea de investigación en el área (Drijvers et al., 2016). Al respecto, se conocen recursos como GeoGebra, Symbolab, Photomath, Microsoft Excel y WolframAlpha potentes para llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje de diversas temáticas relacionadas con el estudio de las matemáticas previas al cálculo. Aunque los estudiantes son buenos para manejar los recursos y obtener resultados (desde el punto de vista técnico), existen dificultades para dar significado e interpretar dichos resultados de forma clara.

En un sentido piagetiano, se resalta la importancia de fortalecer el aprendizaje obtenido mediante operaciones concretas y desarrollo del lenguaje común (como condición necesaria pero no suficiente para completar estructuras lógicas) que se origina del razonamiento matemático producido en la resolución de problemas y comprensión de situaciones que posibilitan el refinamiento de las operaciones intelectuales en los estudiantes para la comprensión de la realidad producida por la experiencia en el aula de matemáticas y la cotidianidad de cada uno (Piaget, 1972). En consecuencia, se promovió la posibilidad de interrelacionar las matemáticas con el mundo real mediante la modelación de situaciones que permitan indagar, identificar y obtener conclusiones relacionadas con el desarrollo del razonamiento covariacional, es decir, las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra, evidenciado en las acciones mentales de los estudiantes durante la experiencia de aula (Blum & Borromeo, 2009; Carlson et al., 2003; Confrey & Smith, 1995).

En este contexto y posterior al diálogo con los profesores de matemáticas, ciencias e informática, surgió el interés de construir una experiencia que posibilitase en la institución educativa Fe y Alegría Luis Amigó, integrar tecnologías digitales para estudiar fenómenos que implican el uso y conceptualización de funciones, en este caso una situación real, la caída de voltaje en un condensador cuando se descarga, que se puede representar y modelar como una función exponencial decreciente, mediante procesos de construcción permanente del conocimiento matemático, en las que formas elementales de explicación de los fenómenos y problemas sean sustituidas de manera progresiva por formas más complejas, superiores (Orobio Ocoro & Ortiz Legarda, 1997).

Se considera importante para el desarrollo de esta investigación, propiciar la apropiación de los recursos en los estudiantes, por lo que es menester incurrir en el diseño de experiencias en las cuales se puedan acercar al funcionamiento de aparatos y piezas electrónicas como resistores, capacitores, transistores, fuentes AC-DC, el osciloscopio, microcontroladores, etc. Con el fin de que ellos puedan incursionar en propuestas que integren ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, y así ampliar la participación de los alumnos de la institución en proyectos de aula, en los que, por ejemplo, el ambiente basado en proyectos de creación de programas y sistemas de control den cuenta de la capacidad que se tiene para contribuir al desarrollo social, cultural, tecnológico, científico, académico y ambiental de la comunidad educativa (James & Singer, 2016).

En primera instancia, para desarrollar la experiencia de aprendizaje en la institución educativa se realizó la revisión y análisis de investigaciones en repositorios institucionales de entidades y universidades locales e internacionales (p. ej. CEDED, Apollo, CU Scholar) y bases de datos como Scielo, Eric, Springer, Jstore, Science Direct, Dialnet, relacionadas con la temática de investigación. A continuación, una breve descripción de la génesis de la función exponencial y la manera en la que se abordó su estudio en experiencias de aula.

1.2. Antecedentes

El concepto de función ha ganado un gran espacio en los procesos de investigación de la educación matemática, es visto actualmente como uno de los conceptos matemáticos de mayor importancia por sus diversos aportes para modelar situaciones en áreas como la estadística, las artes plásticas, ingeniería, biología, arquitectura, comercio, entre otras (García Mesa, 2016; Medina, 2012; Rizzo, 2014; Villa-Ochoa, 2012).

Cuando se hace alusión a la función exponencial, necesariamente se hace alusión al concepto de potencia. Dicho concepto se relaciona con la geometría plana y del espacio desde tiempos antiquísimos a través de la construcción de conceptos como el área y volumen de figuras, por ejemplo, el área de un cuadrado: $A = l * l = l^2$ o el volumen de un cubo: $V = l * l * l = l^3$.

Por otra parte, se asocia a *la economía en la escritura* en matemáticas y ciencias con el fin de representar cantidades muy grandes con un sistema de numeración que posibilite la descripción de dichas cantidades con una notación práctica; por ejemplo, Arquímedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) vio la necesidad de desarrollar una notación en su obra "El Arenario" para algunas potencias ligadas a números grandes que surgieron de realizar cálculos astronómicos para determinar distancias y relaciones entre el sol, planetas y estrellas.

El manejo de exponentes negativos y la consolidación del uso de los exponentes se evidencia en trabajos como *arithmetica integra* del teólogo alemán y creador de las primeras tablas de logaritmos Michael Stifel (1487 – 1567), el francés René Descartes (1596 – 1650) consolida en sus estudios en matemáticas y geometría analítica los cambios en la naturaleza de los exponentes, brindando herramientas y procedimientos flexibles y prácticos para el álgebra con el fin de estudiar curvas en el plano que lleva su nombre: el plano cartesiano. Aprovechando todo lo anterior, matemáticos como John Wallis (1606 – 1703) profundizan en el estudio de curvas haciendo uso de exponentes fraccionarios y exponentes negativos; Wallis se permite conceptualizar lo que hoy se conoce como los exponentes continuos (Dennis & Confrey, 2000). Años más tarde Leonard Euler (1707 – 1783) exploró el estudio de las funciones continuas y publicó en 1748 *Introduction to Analysis to the infinite* incluyendo las funciones exponenciales con base natural y logarítmicas, en lo que se conoce hoy como: funciones trascendentes.

Vargas et al. (2011) desde el punto de vista de la enseñanza de la función exponencial, señalan que:

> Se ha realizado una inversión respecto a su génesis histórica dado que lo habitual es que se enseñe previamente a la función logaritmo cuando, en realidad, surgió como inversa de ésta. Esto ha conducido a que se descuiden aspectos que la dotan de significado y que tienen que ver tanto con dicha génesis histórica como puede ser la relación entre la estructura aditiva de los exponentes y la multiplicativa de la variable dependiente como con las aplicaciones de la función exponencial en ámbitos muy diversos como las ciencias naturales o la economía. Esto pone de manifiesto los prerrequisitos para su construcción como los nuevos significados que deben ser generados: razón de cambio, covariación y crecimiento. (p.2)

Lo mencionado previamente, se relaciona de alguna manera con la llegada de las calculadoras a las aulas en la década de los 80'. Al respecto, Sureda et al. (2017) afirman:

> Los logaritmos dejaron de ser necesarios como herramientas de cálculo; y al perder su razón de ser los profesores de la escuela secundaria, prácticamente la dejaron de enseñar durante casi una década. La función exponencial, ligada fundamentalmente a la definición de la función logarítmica quedó al igual que ésta, relegada al programa curricular. (p.12)

En consecuencia, Sureda et al. (2017) promueve el estudio de la función exponencial a partir de la modelación de problemas reales, que complementen de forma significativa el vivir de los estudiantes, desde el abordaje de problemas tradicionales de interés simple y compuesto en situaciones de ahorro, reproducción bacteriana y animal, en la que la construcción del modelo matemático para cada situación permite en gran manera la comprensión de fenómenos de crecimiento o brindar la formula $\boldsymbol{f(t) = k \cdot a^{wt} + b}$ con el fin de variar los valores del intercepto $\boldsymbol{b}$ entre (-∞, +∞), los coeficientes de la base y el exponente $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{w}$ respectivamente entre (-∞, +∞), $\boldsymbol{a}$ entre cero y uno, así como para valores mayores que uno, con ayuda de *software*, con el objetivo de identificar y aprender en torno a las transformaciones en amplitud, crecimiento, decrecimiento y cambios de concavidad de la gráfica de la función (Sureda, 2012; Sureda, Otero, & Donvito, 2017). A partir de este tipo de actividades el estudiante puede identificar como cambia la coordenada $f(t)$ respecto a los cambios en la coordenada t, la dirección del cambio, la coordinación de las magnitudes relativas de cambio en las variables t y $f(t)$, entre otras acciones mentales que den evidencia y posibiliten el desarrollo del razonamiento covariacional en los estudiantes.

En otras experiencias con estudiantes de educación secundaria y media, se encontró registro de algunas situaciones de aula que investigan en torno al desarrollo del pensamiento covariacional de ellos a partir de la modelación matemática, Ferrari et al. (2017) realizan un diseño de aprendizaje basado en las ideas de Confrey y Smith (1995), el cual “contribuyó a la percepción de los estudiantes de los patrones de crecimiento permitiéndoles deducir la yuxtaposición de las operaciones “multiplicar sumando” y “dividir restando” para facilitar cálculos”, al fomentar el análisis de una función en términos de cambios coordinados de x e y (Ferrari & Farfán, 2017).

Definir una función en términos de correspondencia de los valores de la variable dependiente respecto a la independiente, donde una visión del decaimiento o crecimiento exponencial como una relación entre dos cantidades continuamente covalentes puede promoverse en el desarrollo de actividades con un enfoque instructivo en la covariación (Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, & Amidon, 2016). Al respecto, se asumió en el presente trabajo el razonamiento covariacional “como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson et al., 2003).

Dentro de la configuración conceptual de la función exponencial, este estudio pretendió indagar, identificar y analizar aspectos que den cuenta del razonamiento covariacional de los estudiantes inmersos en una experiencia que se enmarcó en el contexto de modelación de un circuito RC, con el fin de estudiar y reflexionar en torno al modelo matemático que representa una caída de voltaje respecto al tiempo y la relación existente entre el valor de la resistencia y el capacitor como parámetros en el modelo obtenido.

Surgió la necesidad de modelar con tecnologías digitales el comportamiento del voltaje en el condensador, debido a que el periodo de descarga fue aproximadamente de 1.3 segundos, desde la percepción humana no se logró obtener la información gráfica y analítica, como la que brindó Proteus 8.5 durante la práctica; así mismo, surge la necesidad de hacer una regresión lineal de dos variables en poco tiempo (disminuyendo la carga operativa), con ayuda de GeoGebra o Microsoft Excel, durante la obtención experimental del modelo matemático, en un escenario donde fue necesario (por parte de los estudiantes) incorporar todos los conocimientos adquiridos en el área.

En consecuencia, el interés de esta investigación se enfocó en brindar una respuesta a la siguiente pregunta:

1.3. Pregunta de investigación

¿Cómo aporta la modelación matemática con tecnologías digitales al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de educación media de la I.E. Fe y Alegría Luis Amigó?

1.4. Objetivo general

Identificar los aportes de la modelación matemática con tecnologías digitales al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de educación media de la I.E. Fe y Alegría Luis Amigó.

2. Marco teórico

En este apartado se describen los elementos que definen el proceso de modelación matemática, el aprendizaje con tecnologías y el esquema teórico para el razonamiento covariacional en educación matemática. Posteriormente se define la función exponencial como objeto matemático y la obtención de la ecuación o modelo matemático de la caída de voltaje dependiente del tiempo para la descarga del condensador en un circuito RC.

2.1. Modelación matemática en educación matemática

Las matemáticas a lo largo la historia se han originado y desarrollado en contextos que las relacionan con la interpretación de fenómenos y situaciones del *mundo real*. En palabras de Villa-Ochoa (2007) la modelación matemática puede considerarse como un puente entre el mundo real y las matemáticas, donde el proceso de modelación matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de *modelos* propios de las demás ciencias. En consecuencia, “se concibe la modelación como una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, ya que proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, al tiempo que permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase”(Villa-Ochoa, 2007).

Para el desarrollo de esta investigación fue necesario hacer una distinción entre modelación matemática y modelo en el escenario de la Educación Matemática; en este sentidoVilla-Ochoa, plantea que:

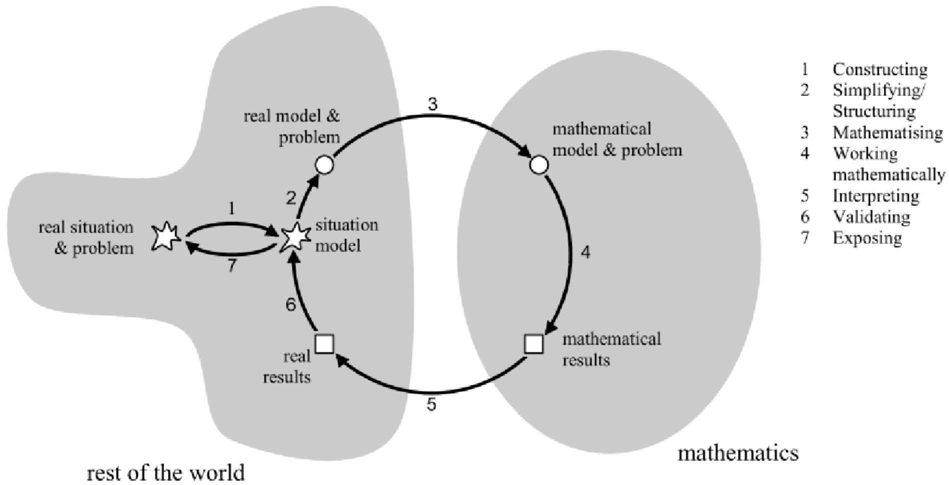
> Entendemos por modelación matemática escolar al proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas.
>
> Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una compresión del fenómeno y resolver el problema. (2010, p. 9)

En este sentido la modelación matemática puede entenderse como interpretación de fenómenos cotidianos representados en símbolos matemáticos, y para hacer la distinción con el modelo, Bassanezi citado por Posada y Villa-Ochoa consideran que:

> Un modelo matemático radica en tener un lenguaje conciso que expresa nuestras ideas de manera clara y sin ambigüedades, además de proporcionar un arsenal enorme de resultados (teoremas) que propicien el uso de elementos computacionales para calcular sus soluciones numéricas. Por ello se llama simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representan de alguna forma un fenómeno o situación estudiada (2006, p. 74).

En consecuencia, este trabajo adopta el “*modelling cycle”* propuesto por Blum y Borromeo (2009) para el análisis cognitivo de las tareas de modelación matemática:

figura 1. Modelling Cycle



modelling cycle (Blum & Borromeo, 2009) p.46

En el *modelling cycle* el estudiante debe entender la situación problema, para construir el modelo matemático; en el proceso de modelación, la situación se debe simplificar y estructurar para trabajar con la información precisa. La matematización del fenómeno o situación, transforma el modelo real en un modelo matemático definido a partir de las condiciones o variables que se tengan en cuenta (en este caso mediante la representación de pares ordenados en la gráfica proporcionada por el osciloscopio). Trabajando matemáticamente (calculando, resolviendo las ecuaciones, etc.) los resultados que se interpretan en el mundo real como resultados reales. La interpretación y validación de los resultados matemáticos respecto a los resultados reales pueden invitar a darle otra vuelta al bucle con la intención de refinar el modelo obtenido, en este caso el estudiante debe explicar la forma y los aspectos tenidos en cuenta en la construcción del modelo matemático del fenómeno o situación problema.

Dentro de este contexto, se trabajó con los estudiantes durante la experiencia de aula, el reto de interpretar y reflexionar con base en los datos obtenidos durante el proceso de modelación, con el fin de determinar la validez del modelo matemático obtenido a medida que se reformulaba. A esto se añade que "el desarrollo de habilidades de modelación es un proceso largo que requiere de un sistema educativo, que proporcione elementos para que los estudiantes desarrollen sus potencialidades de manera tal que le permitan pensar crítica e independientemente" (García, 2004).

2.2. Modelación matemática con tecnologías digitales

La modelación como proceso en el cual se procura la obtención de un modelo matemático que permita representar un fenómeno real, articula el mundo de las matemáticas con el mundo real. Al respecto, Vasco (2006, p. 142) describe la modelación como "el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad" y "como todo arte, el arte de la modelación se aprende haciéndolo".

Al integrar la modelación matemática con tecnología se incorpora a un método de enseñanza y aprendizaje una serie de recursos, que complementan el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes y profesores de forma diferente, distinta a la tradicional. Programas como Derive, Modellus o GeoGebra han sido utilizados con frecuencia para la modelación de fenómenos dinámicos, para el estudio de funciones (Baldonado, 2012; Martinez-Gómez, 2013; Rizzo, 2014; Sureda et al., 2017) y la tasa de variación instantánea (Villa-Ochoa, Gonzalez-Gómez, & Carmona-Mesa, 2018).

Cuando se integra modelación matemática con tecnología en educación matemática, es menester tener en cuenta que no todas las instituciones cuentan con los equipos, infraestructura y conexión a internet adecuada para desarrollar de manera óptima la modelación de un fenómeno dentro del aula de clase. Por lo anterior hay que planear y plantear con cautela las clases en las que se integra tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, ya que el uso de tecnología en vez de ser mediadora se puede convertir en un obstáculo.

Aunque existen potentes programas y calculadoras que grafican, simulan e iteran algoritmos, el aprendizaje de las matemáticas no siempre se da de forma significativa, ya que como lo señala Vasco (2006):

> […] el problema principal de los computadores y las calculadoras graficadoras es que se les atribuyó cualidades mágicas para resolver todos los problemas de la educación matemática. Pronto se vio que sí aumentaban la motivación de los estudiantes para interactuar con los computadores y calculadoras, pero que la conceptualización matemática volvía a quedar rezagada. La facilidad de cálculo y el tamaño y resolución de pantallas mostró que lo único que se hizo fue cambiar unos problemas por otros, unas preocupaciones por otras, y unos tipos de errores por otros. (p. 146)

Con todo y lo anterior, es fundamental nutrir cada experiencia de aula con estrategias que sirvan para aumentar el aprovechamiento de los recursos que se integran a los procesos de aprendizaje a través de la modelación matemática, originadas a partir del uso de programas de alta calidad y una formación ininterrumpida de los profesores en lo que respecta al dominio de los recursos (investigación, creatividad, apropiación, diversión) y sus actualizaciones, que posibiliten el ahorro de tiempo en la manipulación de datos y disminución en la carga operativa con la finalidad de dejar tiempo para el análisis y reflexión de los fenómenos estudiados. La representación de máquinas y circuitos, las reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares permiten el desarrollo del pensamiento variacional (Vasco, 2006). En este sentido, la modelación matemática del decaimiento de voltaje en el condensador electrolítico integrando tecnología digital, fue el camino para identificar como aporta (o no), al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de décimo grado.

2.3. Pensamiento variacional y covariacional

En términos de Vasco (2006), el pensamiento variacional se puede definir aproximadamente como:

> una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p.138).

En consecuencia, este autor señala que el objeto del pensamiento variacional “es entonces la covariación de cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad” y su principal propósito es la modelación (p. 139). Esquematizado en las siguientes fases o momentos:

- Momento de captación de patrones de variación: Lo que cambia de lo que permanece constante.

- Momento de creación de un modelo mental.
- Momento de echar andar el modelo.
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
- Momento de reformulación del modelo.

Si hay una tecnología socialmente disponible que permita hacerlo, habría también otros momentos:

- Momento de formulación simbólica.
- Momento de calcular con esa información.
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
- Momento de reformulación del modelo.

Por lo tanto y considerando la importancia de definir un esquema que posibilite visualizar el desarrollo del pensamiento y el conocimiento matemático adquirido en el aula de clase por los estudiantes de décimo grado de la institución educativa Fe y Alegría Luis Amigó, los cuales son el centro de este trabajo, se toma el marco conceptual de Carlson et al (2003) para indagar en los resultados de los estudios que describen la forma en que los estudiantes razonan covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de variación asociadas a funciones exponenciales.

En dicho marco conceptual los autores comprenden y definen el razonamiento covariacional “como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p.124). En el cual se comprenden cinco acciones mentales (tabla 1), que “proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación” (p. 127), teniendo en cuenta que la habilidad de razonamiento covariacional solo se puede determinar cuándo se examina el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibidos en el momento de responder a dichas tareas asociadas a la interpretación de eventos dinámicos.

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la

	función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tomado de (Carlson et al., 2003, p.128)

Basados en las acciones mentales presentadas en lala tabla 1, Carlson et al.2003 clasifican a los estudiantes en niveles de razonamiento covariacional de acuerdo con "la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea" (p. 128). Saldanha y Thompson (1998) abordaron la idea de covariación en términos de las imágenes que pueden apoyar la capacidad de uno para pensar covariacionalmente, describiendo el pensamiento covariacional como la capacidad de mantener mentalmente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades simultáneamente.

Tabla 2. Marco conceptual para los niveles de covariación. (Carlson et al., 2003, p. 129)

Niveles del razonamiento covariacional
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con

cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

Nivel 4 (N4). Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4

Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

2.4. La función exponencial

Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie.
Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques.
Sans les deux on ne pénètre au fond de rien.
Gottfried W. Leibniz

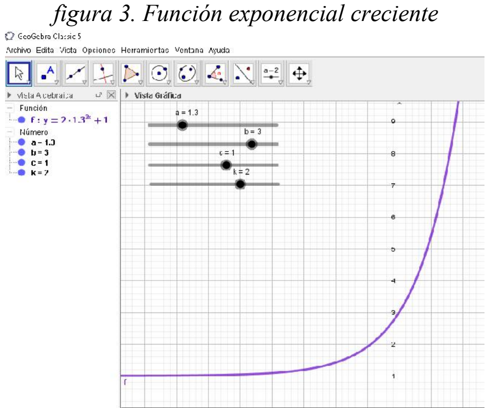
En este apartado es importante poner atención en la pregunta: ¿Qué significa aprender la función exponencial?

Para responder a esta pregunta, no nos podemos limitar a la definición formal de los libros de texto tradicionales, en los que se define la función exponencial como una relación de correspondencia que obedece a la expresión:

$$y = f(x) = k \cdot a^{bx} + c \qquad (1)$$

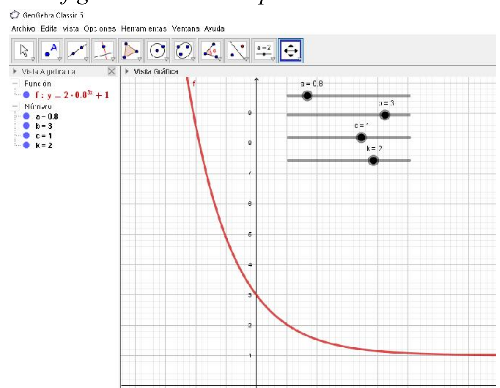
Donde a es un número real mayor que cero, y se considera como la variable dependiente, x la variable independiente y b, c, k constantes pertenecientes al conjunto de todos los números reales, a partir de ahora ℝ. Si $\boldsymbol{a > 1}$ se dice que $y = f(x)$ es creciente [figura 2]. Si $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$, es $y \;=\; f(x)$ decreciente [Figura 3]. El número c representa el

figura 3. Función exponencial creciente



Gráfica $y = f(x) = k \cdot a^{bx} + c$, con $a > 1$

figura 2. Función exponencial decreciente

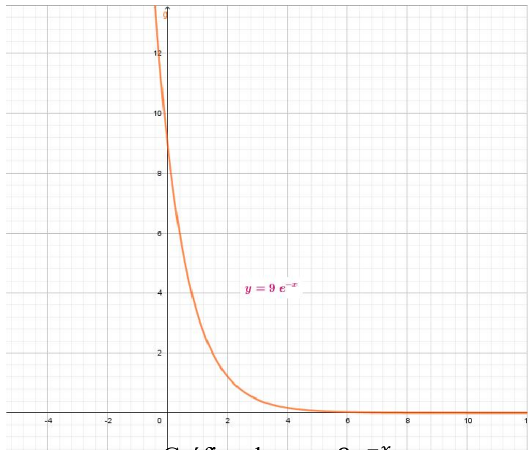


Gráfica $y = f(x) = k \cdot a^{bx} + c$, con $0 < a < 1$

intercepto o el corte con el eje vertical y. El dominio de $f(x) = k \cdot a^{bx} + c$ es el conjunto de los posibles valores que puede tomar la variable independiente x, en este caso el Dom$f(x) =$ ℝ. Es fundamental interiorizar la forma en la que covarían las variables relacionadas, identificar los intervalos donde la función crece o decrece de forma rápida o lenta, con la intencionalidad de comprender el fenómeno objeto de estudio.

Adicional a lo anterior, se tiene el caso en que la base es mayor que 1 y el exponente es negativo, por ejemplo, $y = 9e^{-x}$, es una función decreciente como se muestra en la siguiente figura:

figura 4. Gráfica función exponencial con exponente negativo



Gráfica de $y = 9e^{-x}$

Se considera a la función exponencial como la función inversa de la función logaritmo debido a que se cumple la siguiente equivalencia: $a^x = b \leftrightarrow log_a b = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se lee: "Sea a a la x igual a b si y sólo si el logaritmo a de b es igual a x , para todo x en $\mathbb{R}$".

La función exponencial es una función inyectiva, es decir, a cada valor del conjunto de salida $\boldsymbol{y}$ le corresponde un único valor del conjunto de entrada $\boldsymbol{x}$. Además, todas las funciones exponenciales cumplen con las propiedades de la potenciación. Sean $a, m. n$ números cualquiera en $\mathbb{R}$, tal que:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ (2)
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3)
3. $a^0 = 1$ (4)
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (5)
5. $si\ a^m = a^n\ entonces\ m = n$ (6)

La razón de cambio de una función exponencial de la forma: $y = f(x) = k \cdot a^{bx}$ se construye haciendo uso de algunas propiedades de la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(k \cdot a^{bx}) = k\frac{d}{dx}(a^{bx}) \tag{7}$$

Operando, se tiene por propiedades de los logaritmos que: $a^{bx} = e^{bx\log(a)}$, luego:

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{d}{dx}\left(e^{bx\log(a)}\right) = kb \cdot log(a) \cdot e^{bx \cdot log(a)} = kb \cdot log(a) \cdot a^{bx} \tag{8}$$

La ecuación (8) se puede reescribir haciendo la sustitución $y = k \cdot a^{bx}$, $b \cdot log(a) = \mu$ así:

$$\frac{dy}{dx} = kb \cdot log(a) \cdot a^{bx} = \mu k \cdot a^{bx} = \mu y \tag{9}$$

La ecuación (9) es la expresión que representa la razón de cambio de y respecto a x en una función exponencial con la forma de (1), de esta manera se puede tener en cuenta que la variación de la razón de cambio $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ respecto a la función $\boldsymbol{y}$ es constante.

Despejando (9):

$$\frac{(\frac{dy}{dx})}{y} = \mu. \tag{10}$$

La expresión anterior, es útil para identificar si el modelo matemático obtenido en clase obedece a un comportamiento exponencial. En este caso se tiene en cuenta la covariación de las variables de la función exponencial y la relación con la tasa de variación promedio (AM4) e instantánea (AM5), como un valor constante.

2.5. Modelo matemático del voltaje en el proceso de descarga de un condensador en un circuito RC.

En la modelación de la caída de voltaje respecto al tiempo en un condensador, es importante tener como referencia el modelo matemático que surge a partir de la construcción formal y conceptual de los fenómenos físicos que justifican científicamente el funcionamiento del circuito RC. Pues, es fundamental tenerlo en cuenta para comparar, interpretar y reflexionar alrededor de los modelos matemáticos obtenidos por los estudiantes mediante el análisis de regresión de dos variables en Excel o GeoGebra.

Para empezar, tendremos en cuenta el diagrama de la figura 5, para modelar la situación:

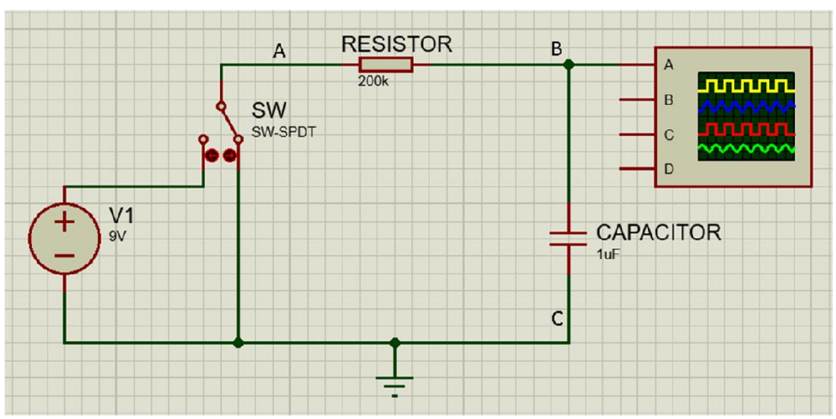


figura 5. Diagrama Circuito RC

El Circuito RC está conformado por una resistencia y un condensador conectados en serie, donde la corriente va de la terminal positiva a la negativa cuando el circuito está encendido (ON).

Con el condensador previamente cargado con una carga q , es decir, En $t = 0$, $q = q_o$.

La ecuación de la caída de potencial en el capacitor (anexo 1) es:

$$\boldsymbol{V_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (11)$$

Si el voltaje inicial $V_0 = \frac{q_0}{C}$, entonces la expresión para representar la diferencia de potencial en el condensador es: $\boldsymbol{V_c = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$ (12)

Por tanto, en el instante $t = \tau = RC$, $\boldsymbol{V_c}(\tau) = \boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{e}^{-\frac{\tau}{\tau}} = \boldsymbol{V}_0 e^{-1} = 0{,}37\boldsymbol{V}_0$

En este caso la constante de tiempo τ representa en el circuito, el tiempo que tarda el condensador en reducir su diferencia de potencial (o su carga) al 37% de su valor inicial (Halliday et al., 1999).

El tiempo de descarga de un condensador en un circuito RC es aproximadamente cinco veces el valor de $\tau = RC$.

3. Metodología

En este capítulo se aborda la descripción del componente metodológico y de los elementos que argumentan la pertinencia de un enfoque cualitativo y la implementación de un estudio de caso para el desarrollo de la investigación.

3.1. El enfoque cualitativo

Como se mencionó en el primer capítulo, el presente trabajo plantea como pregunta de investigación ¿Cómo aporta la modelación matemática con tecnologías digitales al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de educación media de la I.E. Fe y Alegría Luis Amigó? En consecuencia, se hizo necesario profundizar en las maneras en que los estudiantes abordan y se enfrentan a situaciones inmersas en un contexto de modelación matemática, fue menester centrarse y poner atención en las percepciones, prioridades, apreciaciones y subjetividades del investigador y de los estudiantes como parte del proceso de investigación.

Desde esta perspectiva, conviene señalar que se consideró pertinente que el diseño metodológico se enfocara en el paradigma cualitativo debido a que permite ver, identificar, características de la realidad de la población estudiantil en la institución, las causas y el curso de las interacciones que se originan y desarrollan en el aula, en un ambiente natural y en contextos diferentes, en donde la forma de actuar, hablar y pensar puede validar, a través de ideas y argumentos, la representación de un fenómeno de la vida real a través de un modelo matemático (Flick, 2007). En este sentido, Hernández et al. (2014, p.8) señalan que los estudios que se fundamentan en una investigación cualitativa:

- Se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas).
- En la mayoría de los estudios cualitativos no se prueban hipótesis, sino que se generan durante el proceso y se perfeccionan conforme se recaban más datos; son un resultado del estudio.
- El enfoque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni predeterminados completamente.
- La aproximación cualitativa evalúa el desarrollo natural de los sucesos, es decir, no hay manipulación ni estimulación de la realidad (Corbetta, 2003).

A lo anterior Stake (2010, p. 44) añade que “los modelos cualitativos habituales requieren que las personas más responsables de las interpretaciones estén en el trabajo de campo, haciendo observaciones, emitiendo juicios subjetivos, analizando y resumiendo, a la vez que se dan cuenta de su propia conciencia". Por su parte Hernández et al. (2014) resalta que "los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos" (p. 7). La constante transformación y replanteamiento de los cuestionamientos de esta investigación, fortaleciendo los autores y bases del marco teórico a medida que avanzó dicho trabajo, además, el contacto con los estudiantes mediante entrevistas, cuestionamientos, clases, experiencias en espacios de conceptualización y aprendizaje, permitió contemplar casos específicos con el fin de identificar características de desarrollo del razonamiento covariacional a través de las acciones, respuestas, análisis y reacciones en relación a lo que van captando los estudiantes en el aula de matemáticas durante el estudio de funciones y gráficas(Hernández et al., 2014).

3.2. El método: El estudio de casos

Como se mencionó en apartados anteriores, esta investigación consideró el estudio de casos como metodología de investigación teniendo como referente a Robert Stake (2010), el cual dice que "el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes". Desde esta perspectiva y teniendo en cuenta el rumbo que tomó esta investigación a medida que se fue desarrollando, la necesidad de estudiar casos tomó fuerza cuando se decidió estudiar, analizar e interpretar detenidamente y de manera profunda el proceso de algunos estudiantes, que hicieron parte de la experiencia de aprendizaje de forma voluntaria y constante. Dentro del contexto mostraron el interés de estudiar el fenómeno descrito en secciones anteriores y que se relaciona con el proceso de modelación de la descarga de un condensador en un circuito RC con tecnologías digitales en el aula; con el fin de comprender la forma en la que construyen argumentos, y desarrollan el pensamiento en la búsqueda y obtención de un modelo matemático para la caída de voltaje en un condensador.

Esta investigación promovió la interpretación de las acciones, respuestas, intervenciones, reflexiones, conclusiones y demás rasgos que permitieron llevar a cabo el análisis de resultados, originado por la necesidad de estudiar los casos, en particular en que el estudiante presenta dificultades, particularidades, o que presenta curiosidades en determinado procedimiento técnico y que desde ese estudio de caso particular se puede concebir una formulación sobre otros casos o problemáticas sin llegar a generalizaciones, siendo el estudio de caso lo importante más allá de las preguntas o cuestionarios, por lo que fue conveniente realizar un estudio intrínseco de casos, teniendo en cuenta la modulación que se desarrolló durante la etapa de práctica docente con los estudiantes, la articulación del proceso investigativo en consecuencia con los soportes y referentes teóricos, y la armonización con las actividades diarias que constituyen la formación del ambiente institucional y cultural de la comunidad académica(Stake, 2010). Además, los casos escogidos se eligieron dentro del criterio que determina la obtención máxima y rentable de material, que aporte a la investigación datos relevantes para el análisis de las acciones mentales de los estudiantes en el estudio de la caída de voltaje en un condensador inscrito en un circuito RC (Carlson et al., 2003).

La elección de los estudiantes se desarrolló de acuerdo con pautas que obedecen criterios como la buena comunicación, la participación, el interés por la temática, la constancia, la asistencia y la disposición para responder y atender los cuestionamientos que surgieron en la etapa de indagación y desarrollo de las actividades, que permitieron la visualización de procedimientos y expresiones que surgieron en el aula de clase.

3.3. Proteus 8.5, Microsoft Excel y GeoGebra como recursos disponibles para la modelación matemática de la caída de voltaje en un condensador.

Cuando se hizo la investigación, revisando, se encontró que la institución cuenta con una serie de recursos potentes, que permiten desarrollar unos procesos de modelación específicos, luego, debido a la pertinencia del contexto, se incluyó Proteus 8.5 para el montaje del circuito y obtención gráfica del decaimiento de voltaje en el condensador y para la obtención del modelo matemático del fenómeno, tres estudiantes usaron Microsoft Excel y solo uno de ellos usó GeoGebra.

En el desarrollo de esta experiencia de aprendizaje, se utilizó una versión demo de Proteus 8.5, software utilizado para el estudio y diseño de sistemas electrónicos, disponible de forma gratuita en el sitio oficial de Labcenter Electronics[1]; de este recurso se usaron los componentes: CAP-ELEC (*generic electrlytic capacitor*), RESISTOR (*analog resistor primitive*), SW-SPDT (*Interactive SPDT switch*) y VSOURCE (*DC voltaje source*) incluidos en la librería ASSIMMDLS y ACTIVE. El osciloscopio fue el instrumento que posibilitó la obtención de la gráfica de la señal que genera la diferencia de potencial en el interior del condensador cada vez que se abre y se cierra el paso de corriente con el suiche.

A través de la mesa de ayuda de la secretaría de educación del municipio de Medellín, se instaló GeoGebra en los computadores disponibles para los estudiantes de la institución

[1] Sitio oficial para la descarga de Proteus Design Suite: https://www.labcenter.com/downloads/

educativa Fe y Alegría Luis Amigó, este software de libre acceso y desarrollo fue usado para posibilitar la obtención del modelo matemático del fenómeno objeto de estudio. Del mismo modo, se integró Microsoft Excel a la experiencia, contando con la licencia institucional, debido a que este recurso ofrece potentes herramientas para la realización y análisis de regresión lineal de dos variables con ayuda de los diagramas de dispersión, los cuales permitieron reflexionar en torno a la elección del modelo matemático apropiado para la representación de la caída de voltaje en un contexto real.

3.4. Situación planteada en el aula de clases

En el siguiente apartado se encuentra descrito el planteamiento de la situación teórico-práctica que permitió promover la experiencia de aprendizaje en el contexto del aula de clase de matemáticas, con estudiantes de educación media de 14 a 17 años. El estudio del fenómeno de caída de voltaje respecto al tiempo transcurrido en un circuito RC (resistencia-condensador) a través del proceso de modelación matemática para identificar y reconocer cómo aporta dicho proceso a los estudiantes en el aprendizaje de funciones, en este caso la exponencial, adicionalmente dar cuenta del desarrollo del pensamiento covariacional en ellos, en camino a la obtención del modelo matemático del decaimiento de voltaje en un condensador electrolítico con ayuda de recursos como Excel, GeoGebra y Proteus 8.5.

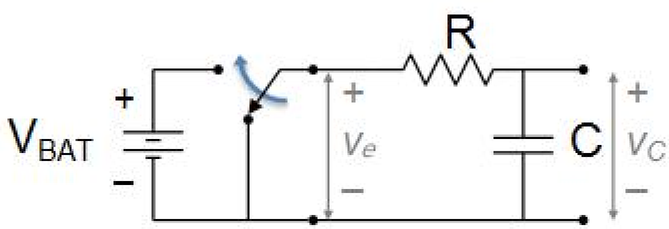
Modelación de un Circuito RC (Anexo 2)

Con el objetivo de identificar las características y representación gráfica y dinámica del modelo de descarga de un condensador con Proteus, se propuso la siguiente actividad para desarrollarla en el aula de clase con estudiantes de décimo grado.

Materiales: Fuente DC 9V, resistencias, condensador, multímetro, protoboard.

De acuerdo con el siguiente esquema:

figura 6. Diagrama esquemático Circuito RC



En Proteus 8.5, diseña el montaje propuesto en la figura 6. Con ayuda del osciloscopio describe el tipo de gráfica que se muestra y cómo cambia al variar el valor de la resistencia y del condensador.

En consecuencia con el marco conceptual descrito en el capítulo dos de este trabajo, y con la finalidad de identificar las acciones mentales en los estudiantes que integraron tecnología para estudiar el fenómeno de descarga en un condensador (la caída de voltaje), se orientó la construcción del modelo matemático a partir de los siguientes cuestionamientos:

a. ¿Cuál es el dominio de la función representada en la gráfica? ¿Cómo puedes identificarlo? Argumenta tu respuesta.

b. ¿Cuál es el comportamiento del voltaje en el condensador antes y después de abrir el swich? Argumenta tu respuesta.
c. Haga un bosquejo de la gráfica del voltaje en función del tiempo que describa lo que sucede cuando se varía el valor de la resistencia y la capacitancia permanece constante, de la misma forma, describe lo que pasa al variar el valor del capacitor mientras el valor de la resistencia permanece constante.
d. Construye un modelo matemático que represente la caída de voltaje en el condensador. Explica cómo se obtuvo y porqué es el más indicado para representar el fenómeno.

La pregunta **a.** se hizo con la intencionalidad de identificar si el estudiante era capaz de definir la variable independiente (tiempo), la variable dependiente (voltaje) y la designación de los ejes en la pantalla del osciloscopio (AM1); a esto se añade la manipulación y calibración de la escala de medida para la recolección de los datos a usar en la regresión lineal con dos variables. La pregunta **b.** estuvo dirigida la acción de coordinar la dirección del cambio del voltaje con la cantidad de cambio del tiempo (AM2).

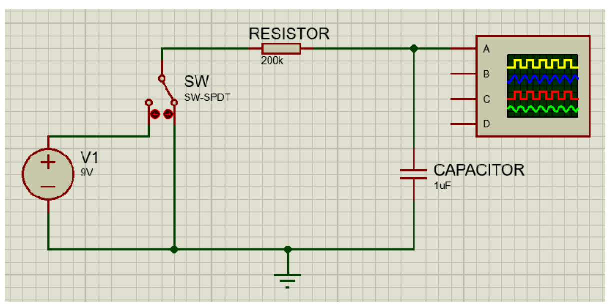
Para identificar la acción mental de coordinar la cantidad del cambio del voltaje con la cantidad de cambio en el tiempo, mientras se imaginan cambios en el tiempo (AM3), se propuso la actividad que figura en el numeral **c.** ya que este tipo de ejercicio mental requiere identificar el efecto que genera en la gráfica cambiar los valores de la resistencia y del condensador, cambios de concavidad, de amplitud, puntos de inflexión, entre otros. Y para desarrollar el proceso de modelación matemática, se propuso en el numeral **d.** hallar el modelo matemático de este fenómeno con ayuda de Excel o GeoGebra, mediante la regresión lineal de dos variables en hojas de cálculo, y así, posibilitar el ambiente para reflexionar sobre el comportamiento del fenómeno, su utilidad, aplicación y otros aspectos relacionados con el aprendizaje técnico y conceptual.

3.5.Modelación de un Circuito RC

Cuando se habla de un circuito RC, se hace referencia a un circuito que está compuesto por una fuente de alimentación de corriente directa DC, un resistor (Ω), y un Capacitor o Condensador (F) conectados en serie.

El condensador es útil en circuitos donde existen voltajes y corrientes variables con el tiempo (Halliday et al., 1999). En este caso se usó un condensador electrolítico de 1µF, un resistor de 200 kΩ y una fuente de 9V DC corriente continua, obedeciendo al siguiente diagrama esquemático:

figura 7. Mapa esquemático Circuito RC



El suiche (SW) es incluido para abrir y cerrar el paso de corriente con el fin de producir el cambio de potencial o voltaje. En términos físicos el condensador almacena energía en un campo electrostático producido por la diferencia de carga entre las placas internas separadas entre sí por un dieléctrico. Podemos sacar energía con relativa lentitud (más de varios segundos) de la batería al capacitor, el cual libera rápidamente (en cuestión de milisegundos) cuando pasa a algún dispositivo que lo descarga (motor, foco, led, etc.).

3.5.1. Simulación en Proteus 8.5

Al montar el circuito RC en Proteus 8.5 se pudo hacer el uso del osciloscopio que se encuentra integrado en la sección de instrumentos; esta herramienta permitió simular y recrear la gráfica del comportamiento de voltaje (eje vertical) en el condensador respecto al tiempo (eje horizontal), lo cual posibilitó el análisis dinámico del fenómeno físico estudiado, la manipulación de escalas de medida en la pantalla y la interacción práctica entre el mundo real (la naturaleza, los fenómenos sociales, la cotidianidad, la ciencia, entre otros) y las matemáticas a través de los estudiantes (Blum & Borromeo, 2009).

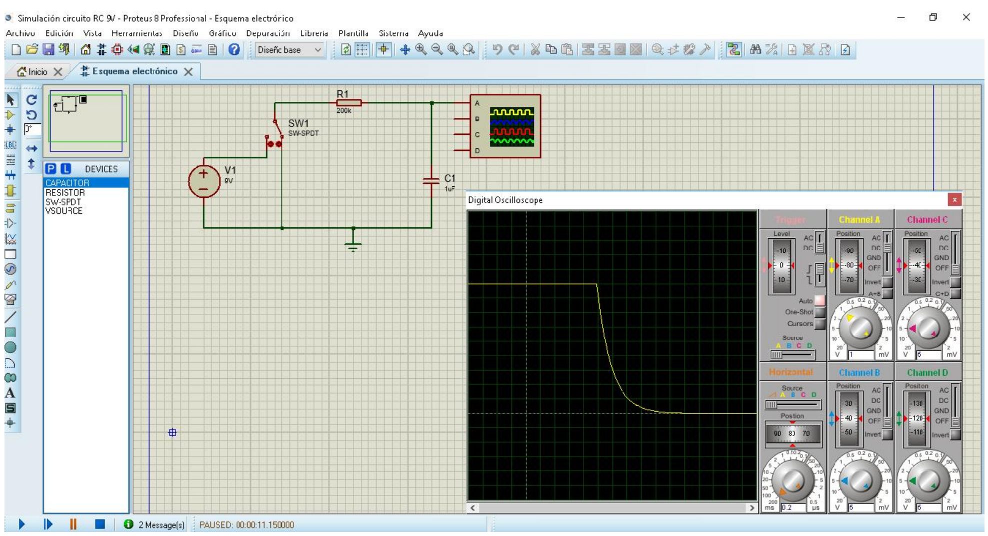


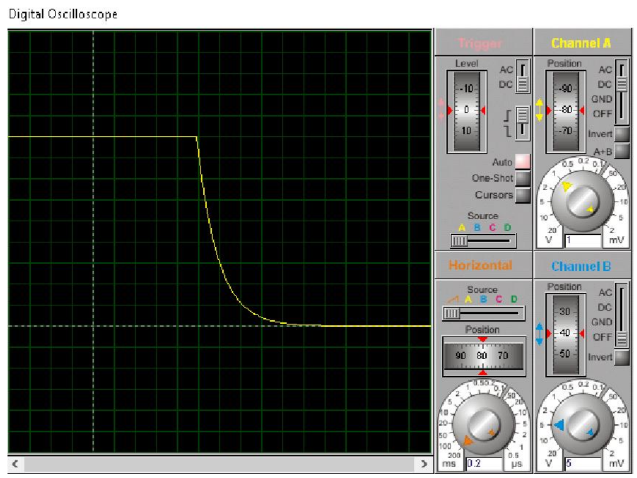
figura 8. Simulación Descarga de un condensador electrolítico con Proteus 8.5

3.5.2. Decaimiento de voltaje con GeoGebra y Excel

La obtención del modelo matemático como reto para interpretar y escoger el tipo de función que representa el decaimiento de voltaje en el circuito RC propició una experiencia en la que se tuvo en cuenta la escala de medida usada en el osciloscopio para el voltaje (**V**) y para el tiempo en segundos (**s**).

Se espera que el estudiante pueda tabular la gráfica en Excel o GeoGebra y haciendo el análisis de regresión de dos variables, obtener el modelo más apropiado (dentro de los que ofrece cada recurso), que se ajuste de forma adecuada al conjunto de puntos y que permita construir argumentos y reflexiones en torno al fenómeno estudiado.

figura 9. Decaimiento voltaje – Simulación en Proteus 8.5



A partir de la gráfica que provee la pantalla del osciloscopio, el estudiante puede tabular los puntos del plano coordenado en una hoja de cálculo. Por ejemplo, para el caso de la figura 9, la escala del eje vertical está de 1voltio por cuadro y el eje horizontal de 0.2 segundos por cuadro.

Tabulando los datos del voltaje cada 0.1 segundos, se construye la tabla 3, así:

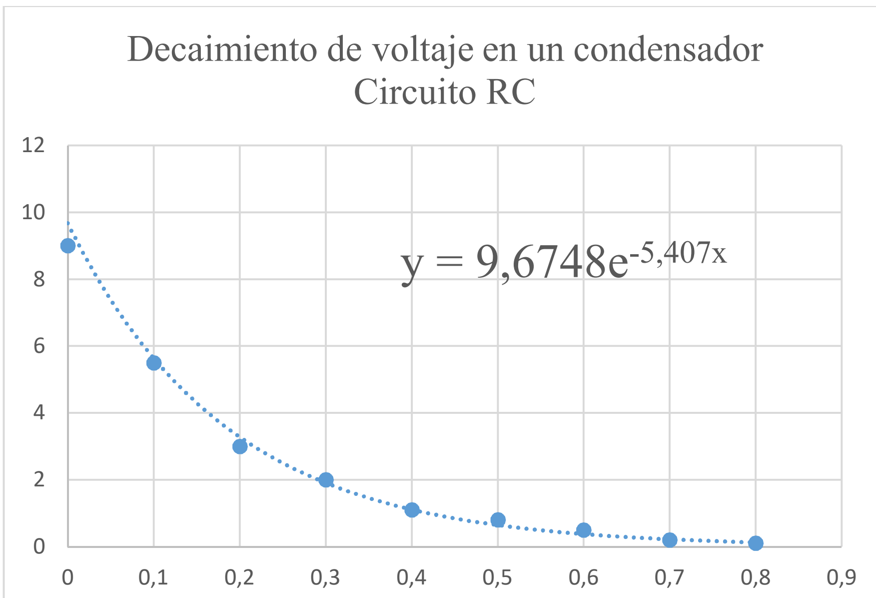
Tabla 3. Lista de puntos obtenidas para el decaimiento de voltaje en un condensador.

Tiempo (s)	Voltaje (V)
0	9
0,1	5,5
0,2	3
0,3	2
0,4	1,1
0,5	0,8
0,6	0,5
0,7	0,2
0,8	0,1

Los datos representados en la tabla 3 son estimaciones tomadas de forma visual, lo cual puede generar algún tipo de error y causar falta de precisión del modelo. Pero eso también es tenido en cuenta en la experiencia de aprendizaje con los estudiantes.

Luego de realizar el análisis de regresión lineal, se puede obtener un modelo matemático que se adecúe al conjunto de puntos tabulados:

figura 10. Decaimiento exponencial de voltaje en un condensador



Si comparamos el modelo matemático $y = 9{,}6748e^{-5{,}407x}$ con el modelo teórico: $y = 9e^{-5x}$, con R= 200k y C= 1μF, se da cuenta que no es el modelo matemático preciso, pero es un modelo aproximado. Este aspecto hace parte del proceso de modelación y para la reformulación se debe identificar el origen de los errores o detalles pasados por alto (necesidad de incluir más puntos en la tabulación, precisión en la determinación de coordenadas, etc.). En este caso la precisión en la selección de los puntos juega un papel fundamental, además, si en vez de seleccionar 9 puntos en el plano el estudiante selecciona un número mayor de puntos, él puede reducir dicho error en las cifras del coeficiente de la base y el exponente.

Se escogieron tres unidades de análisis derivadas del marco teórico, la primera unidad de análisis fue encontrarle sentido a todas aquellas cantidades que cambian en el marco de la descarga de un condensador, el ¿Cómo cambian? ¿Dónde cambian? ¿Cuándo cambian?; la segunda unidad se deriva de los elementos que los estudiantes fueron conceptualizando como producto de la experiencia de aprendizaje con tecnologías digitales en el proceso de modelación matemática. Finalmente se hizo un proceso de triangulación con los datos recolectados (3 videos, material escrito producto de las respuestas de los estudiantes, comentarios de los estudiantes grabados en audio), los cuales fueron clasificados para identificar aspectos que evidenciaran las habilidades conceptuales de los estudiantes que los ubicasen en alguno de los niveles asociados en el marco conceptual para el razonamiento covariacional descrito en la tabla 4, con el objetivo de identificar cómo aporta la modelación con tecnologías digitales al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de educación media de la institución educativa Fe y Alegría Luis Amigó.

4. Análisis y resultados

Acciones de los estudiantes en la modelación de la caída de voltaje en un condensador.

Las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes son importantes para interpretar y representar información gráfica de funciones (Carlson et al., 2003). Un acercamiento al razonamiento covariacional en estudiantes de décimo grado de la I.E. Fe y

Alegría Luis Amigó, en el contexto de una gráfica obtenida desde la interfaz del osciloscopio en Proteus 8.5, se refleja en las evidencias obtenidas en la experiencia de aula, durante el análisis del decaimiento de voltaje en un condensador.

Esta investigación centró la atención en el comportamiento, respuestas y diálogos de tres estudiantes de décimo grado, quienes mostraron particularidades, dificultades y aciertos durante las sesiones de clase en el contexto de la modelación matemática a través de tecnologías digitales de la caída de voltaje en un condensador. Por cuestiones de privacidad los estudiantes decidieron llamarse Michell, David y Yorman, quienes dieron su autorización previa para registrar entrevistas a través de medios audiovisuales y escritos, y para efectos prácticos serán llamados caso M, caso D y caso Y respectivamente.

Este apartado describe comportamientos comunes de razonamiento covariacional que han sido expresados por estudiantes cuando responden a una experiencia de modelación matemática de un Circuito RC integrando tecnologías digitales, especialmente en el momento de interpretación de la gráfica obtenida, y las acciones mentales sustentadas por cada imagen de covariación, son seguidas por una descripción de los comportamientos específicos que han sido observados en los estudiantes y sus clasificaciones correspondientes. Se adaptó el marco conceptual de Carlson et al. (2003) a la experiencia de modelación matemática del circuito RC y se usó como herramienta analítica, "la cual proporciona estructura y un lenguaje, para evaluar el pensamiento covariacional en los estudiantes en el contexto de la respuesta de un estudiante a un problema específico, y para describir las habilidades generales de razonamiento covariacional de un estudiante" (p. 131.).

Tabla 4. Marco conceptual para los niveles de covariación en el decaimiento de voltaje en un condensador.

El *Nivel de coordinación* (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio del voltaje respecto al cambio en el tiempo (AM1). Se identifica la AM1 cuando se observa a los estudiantes designar los ejes y al escucharlos expresar que a medida que cambia el tiempo cambia el voltaje almacenado en el condensador, "Estos estudiantes no necesariamente atienden a la dirección, la cantidad o la razón de cambio". (Carlson et al., 2003)
El *Nivel de dirección* (N2) sustenta la AM1 como la acción de coordinar la dirección (decaimiento – disminución) del cambio del voltaje con la cantidad de cambio del tiempo (AM2). Se ha identificado AM2 al observar a los estudiantes construir una línea decreciente o al escucharlos verbalizar que a medida que pasa el tiempo el voltaje en el condensador disminuye.
El *Nivel de coordinación cuantitativa* (N3) sustenta la AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad del cambio del voltaje con la cantidad de cambio en el tiempo, mientras se imaginan cambios en el tiempo (AM3). Se identifica la AM3 cuando se observa a los estudiantes contar los cuadros del osciloscopio o manipular la escala de los ejes coordenados para determinar el valor del voltaje en ese instante. También se identifica AM3 cuando los estudiantes empiezan a marcar puntos en la gráfica, o cuando la tabulan en Excel o GeoGebra de manera detallada para obtener el modelo matemático y al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre cómo cambia el voltaje mientras consideran incrementos en la cantidad del tiempo.
El *nivel de razón promedio* (N4) sustenta la AM1, AM2, AM3 y la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio del voltaje respecto al tiempo transcurrido (AM4). Se identifica AM4 en estudiantes cuando se observa la construcción de segmentos de recta contiguos en la gráfica, para cada uno de los cuales se ajusta la pendiente con el finde ajustar la razón (relativa) para el periodo de carga o descarga.
El *nivel de razón instantánea* (N5) sustenta la AM1 hasta la AM4 y la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea del voltaje (respecto al tiempo) con cambios en el tiempo (AM5). Se ha identificado AM5 en los estudiantes, al observarlos construir una curva suave creciente cóncava hacia arriba (proceso de carga), luego una línea recta horizontal que denota la carga máxima del condensador (constante en 9V), luego una curva suave decreciente y cóncava hacia arriba (para describir el momento de descarga); y al escucharles comentarios que sugieren una comprensión de que la curva suave resultó de considerar la naturaleza cambiante de la razón a la que aumenta o disminuye el voltaje en el condensador mientras imaginaban el cambio continuo en el tiempo. Cabe mencionar que se clasifica a un estudiante en el nivel de razón instantánea sólo si

demuestra comprender que la razón instantánea resultó de considerar cantidades de tiempo más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4).

La covariación en el *nivel 1* (N1) la podemos analizar de esta manera: los casos Y y D muestran cómo se identifican las variables, asignan rótulos a los ejes (AM1) y describen el comportamiento de la gráfica en las figuras 11 y 12 respectivamente.

figura 12. Caída de voltaje. Caso D

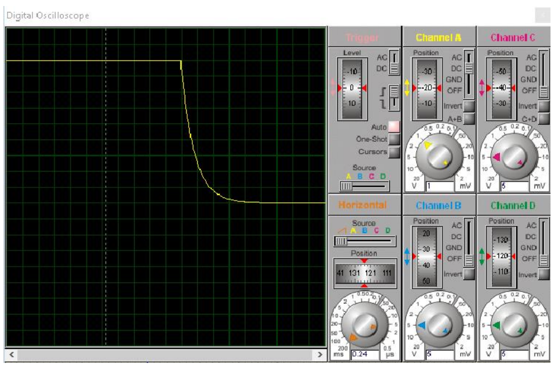
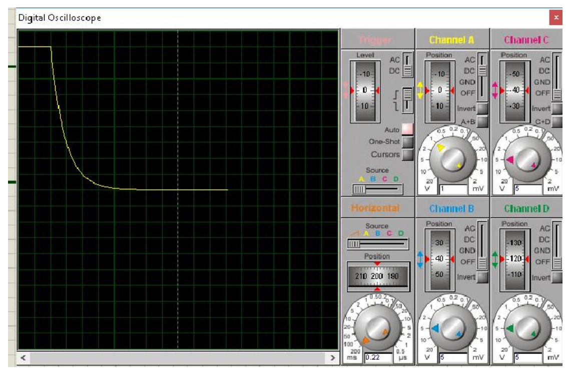


figura 11. Caída de voltaje. Caso Y



En las imágenes 13 y 14 se aprecia cómo se designa el eje $\boldsymbol{x}$ para el tiempo y el eje $\boldsymbol{y}$ para el voltaje (AM1), el caso Y aclara que el dominio de la gráfica "son los posibles valores que puede tomar el tiempo". Es decir, identifica el cambio en el tiempo, para describir cambios en el voltaje. Luego, el caso D mostró en sus cuestionamientos

figura 14. Definición de las variables AM1, Caso Y.

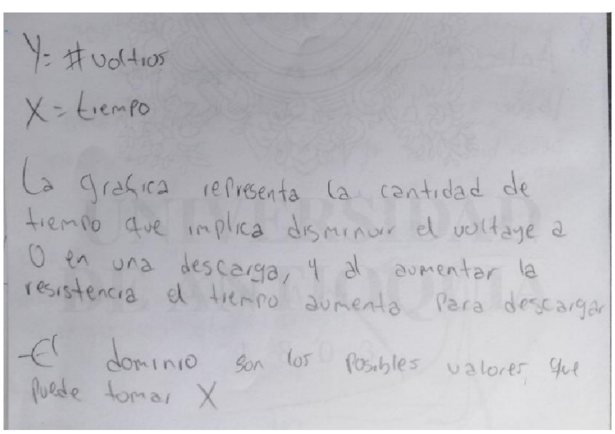
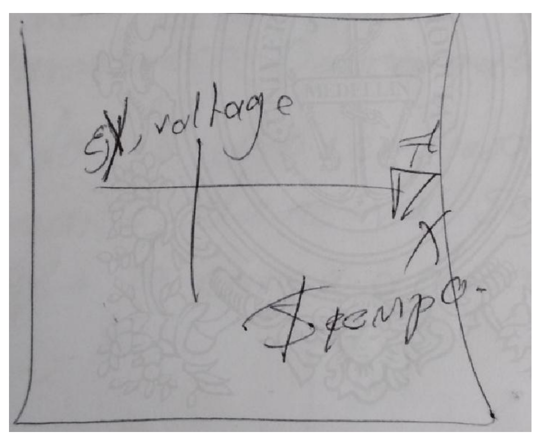


figura 13. AM1 Caso D



posteriores a la pregunta ***a.***, inconvenientes para identificar el dominio de la gráfica de la función de la caída de voltaje respecto al tiempo:

Caso D: ¿Cómo así que el dominio de la función? ¿Qué es eso?

Docente: Son los posibles valores que puede tomar la variable independiente. ¿En este caso cual es nuestra variable independiente?

Caso D: ¿Variable independiente? (Mientras dice que no con la cabeza). ¿Y cómo sabemos cuál es la variable independiente?

Docente: eso, esa es la pregunta.

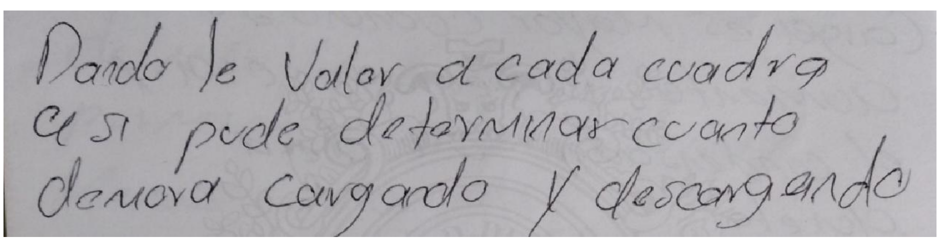
Caso D: Variable independiente… (Mirando la gráfica de la imagen 12). Independiente es que no necesita de nada, pues, que es una…

Docente: ¿Cuál es esa variable que no necesita de nada para estar ahí?

Caso D: El tiempo, jaja, ¿sí?... (dudando mientras piensa). Sí, porque el tiempo no necesita de nada para seguir…Además el voltaje que se iba almacenando dependía del tiempo que dejáramos conectada la pila. (AM1).

En consecuencia, y respondiendo a la manera en la que puede identificar el dominio de la función, el caso D escribe:

figura 15. Argumento AM1 caso D



Luego, D complementa, a través del diálogo con el docente, mientras manipula la gráfica de la descarga del condensador:

Docente: ¿Qué posibles valores puede tomar la variable independiente?

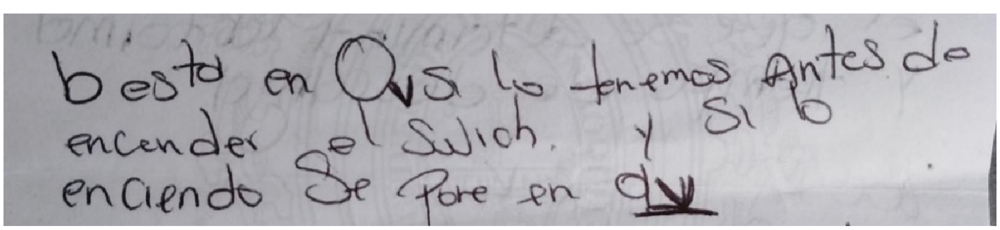
D: yo creo que está relacionado con el valor que le di a cada cuadrito. Si cada cuadrito equivale a 0,24 segundos […] Entonces 1,28 segundos.

El caso D tiene en cuenta la escala de medida que dio previamente para el eje horizontal que representa el paso del tiempo a medida que transcurre, evidenciando que tiene en cuenta el cambio en el tiempo para determinar el cambio en el voltaje.

Los comportamientos expresados sugieren hasta ahora una habilidad de razonamiento covariacional N1 de coordinación entre el cambio en el voltaje respecto al tiempo. Ahora bien, al analizar el *nivel 2* para la covariación, en el caso Y, como se observa en la imagen 13, describe la gráfica como una representación de “la cantidad de tiempo que implica disminuir el voltaje a cero en una descarga” (AM2).

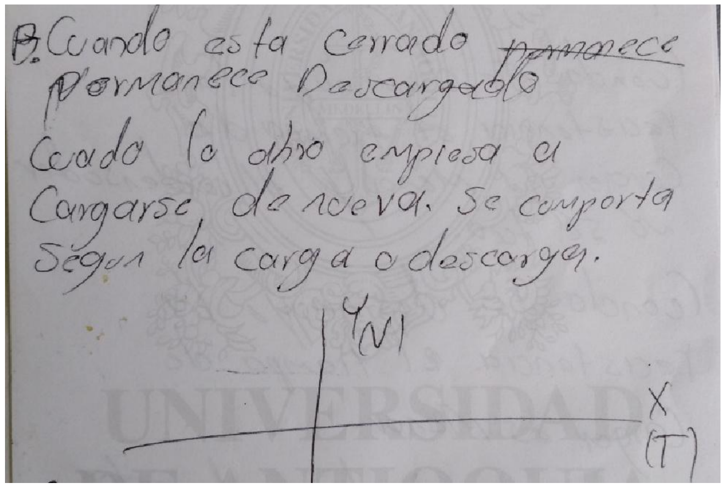
En los casos D y M se identifica AM2 cuando empiezan a variar los valores de la resistencia y del condensador, debido a que en el momento en el que se empieza a transformar la gráfica, los estudiantes empiezan a identificar sin problemas la dirección del cambio del voltaje con la cantidad de cambio en el tiempo. Respondiendo al literal **b. ¿Cuál es el comportamiento del voltaje en el condensador antes y después de abrir el swich? Argumenta tu respuesta.** Los estudiantes escribieron, por ejemplo:

figura 16.Caso M – respuesta escrita al numeral b.



En este caso, la estudiante hace énfasis en el cambio que tiene la variable dependiente en términos de los valores máximo (9V) y mínimo (0V), sin tener en cuenta el tiempo como variable independiente. Por el contrario, en los casos Y y D se dio explicaciones en las que se tiene en cuenta el tiempo como variable independiente, en la imagen 17, el caso D menciona:

figura 17. Respuesta literal b. caso D



Adicional a la respuesta escrita, el estudiante justificó diciendo: "el dominio sería el tiempo, el tiempo que demora en descargarse. Entonces, ¿de dónde a dónde puedo evaluar ese tiempo?... sería 1,28 segundos" (AM2). A esto se añade:

D: No presenta ningún cambio cuando está cerrado (en off), permanece descargado. Pero… obviamente, cuando está abierto (on) se empieza a cargar.

Docente: ¿Qué tipo de gráfica es? En sus palabras.

D: no sé. Pues, carga y se mantiene hasta cierto punto de voltaje, ¿cierto? <u>no sigue aumentando el voltaje</u>, sino que se mantiene con ese mismo valor del voltaje, es constante.

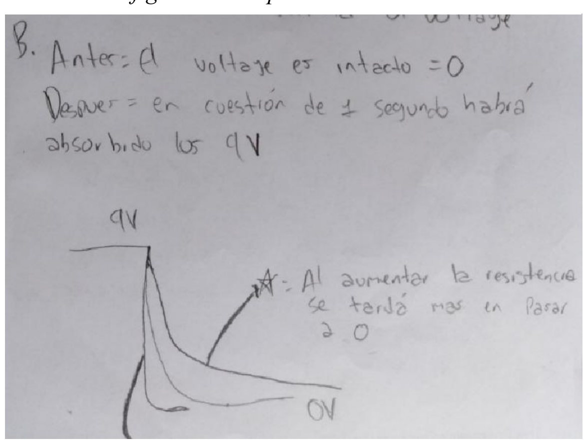
Docente: y cuando se descarga, ¿Qué pasa?

D: lo apagamos… de una se empieza a descargar de forma continua. Se descarga muy rápido. Porque se mantiene en una línea de tiempo cargándose y ya al momento de apagarse se declina a descargarse (haciendo un gesto con la mano derecha que describe una curva suave decreciente. (indicio AM3).

En la respuesta escrita al numeral **c.** el estudiante D dijo: “el tiempo de carga es mayor cuando se aumenta la resistencia y el condensador se deja quieto”, “cuando se disminuye la resistencia el tiempo de carga es menor y el condensador no se toca” y “cuando el valor del condensador aumenta y la resistencia permanece <u>inerte</u> demora más en cargar” (AM3). (refiriéndose al hecho de manipular solo el parámetro C). Con todo y lo anterior, el caso D mostró ubicar sus respuestas y habilidades de razonamiento covariacional N3.

El caso Y, por su parte escribe [Imagen 18]: “al aumentar la resistencia se tarda más en pasar a 0”(señalando la gráfica de una curva suave y decreciente que dibujó para describir el fenómeno de la caída de voltaje (AM3)), muestra que adicional a coordinar la dirección

figura 18. Respuesta literal b. Caso Y.



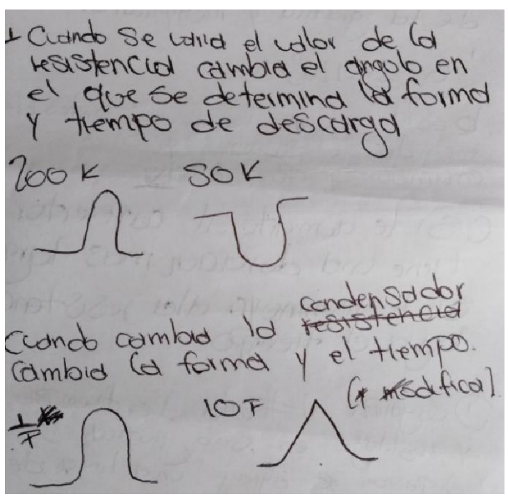
del cambio del voltaje respecto al cambio en el tiempo, construye una gráfica que sustenta la acción de coordinar la cantidad de cambio del voltaje respecto a los cambios en el tiempo, imaginando cambios en el tiempo; al verbalizar que “a mayor resistencia tarda más tiempo en descargarse” para justificar la diferencia de amplitudes en la gráfica.

Los comportamientos expresados sugieren una habilidad de razonamiento covariacional (N3) de coordinación cuantitativa para esta tarea.

Lo descrito en el anterior párrafo, se enlaza directamente con la intencionalidad del literal **c.** en el que se pidió hacer un bosquejo de la gráfica del voltaje en función del tiempo que describiese lo que sucede al variar el valor de los parámetros R y C dentro del circuito. Y lo cual permitió que el estudiante sustentase la AM3 antes descrita en el marco conceptual de la tabla 4.

Por el contrario, el caso M construye los bosquejos de la imagen 19, para describir el comportamiento del voltaje a medida que varía el valor de R y C. Dejó de lado los cambios

figura 19. Bosquejos de las gráficas hechas por el caso M



relativos entre el voltaje y el tiempo para la caída del voltaje, se notó la falta de significado de la gráfica, pareció enfocarse en información incorrecta para describir porqué construyó gráficas en forma de campana para representar el cambio del voltaje respecto a los cambios en el tiempo, mientras imagina cambios en el tiempo.

Posteriormente el caso M responde a la actividad propuesta en el numeral **c.** diciendo: "si le aumento al capacitor tiene una duración más larga" y "si le disminuyo a la resistencia baja el tiempo" (indicio AM3) (refiriéndose al decaimiento de voltaje), esta es una respuesta que surge posterior a la actividad mediadora del docente, la cual fue fundamental para que el caso M trascendiera en el proceso de obtención del modelo matemático. Sin embargo, la estudiante no expresa de manera verbal la solución gráfica desarrollada en el numeral **c.** de la actividad propuesta en el aula de clases, en consecuencia, los comportamientos exhibidos por esta estudiante cuando respondió a esta tarea fueron indicios de una habilidad de razonamiento covariacional N2.

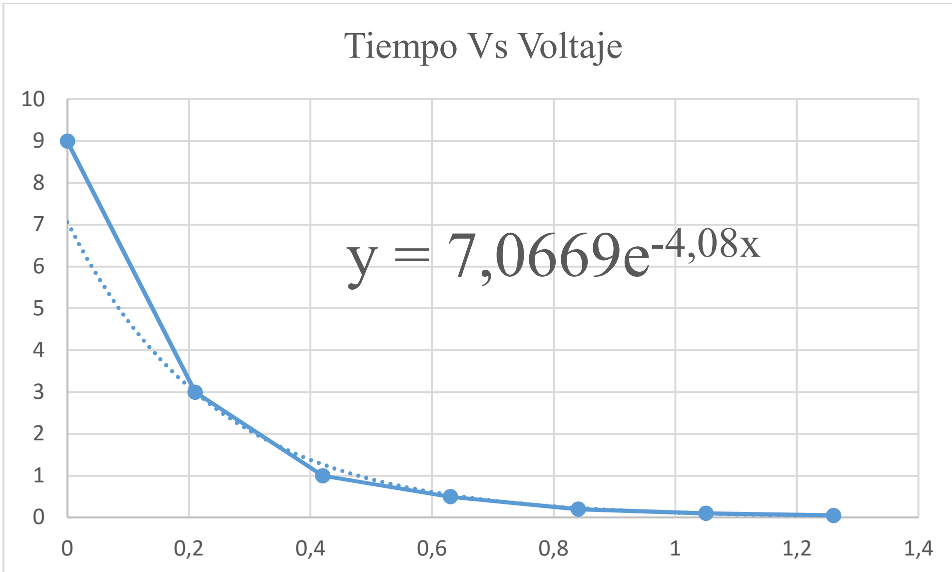
En la parte final del proceso de modelación, es decir en la obtención del modelo matemático para la gráfica de la caída de voltaje en el condensador electrolítico, los casos D y M utilizaron Microsoft Excel como recurso para tabular la lista de valores que surgió de interpretar la pantalla del osciloscopio como un plano coordenado y con valores definidos para la escala del eje x (tiempo) e y (voltaje). Se les sugirió que tomaran un pantallazo de la gráfica que tomaron como referencia para el análisis.

Tabla 5. Datos tabulados Caso M

Tiempo	Voltaje
0	9
0,21	3
0,42	1
0,63	0,5
0,84	0,2
1,05	0,1
1,26	0,05

Con base en la tabla 5; el caso M construyó una gráfica aproximada a la que le suministró el osciloscopio; al principio hizo la regresión lineal a partir del diagrama de dispersión que brindó el software y al definir una línea de tendencia que describiese el fenómeno, la estudiante obtuvo la siguiente gráfica:

figura 20. Representación gráfica para la caída del voltaje en un condensador. Caso M



Cuando se le pidió al caso M una explicación de la elección del tipo de línea de tendencia y la representación a través del modelo matemático $y = 7{,}0669e^{-4{,}08x}$, respondió: "escogí la exponencial, la cual para mi es la más indicada, ya que se adecúa a la gráfica casi correctamente". La anterior afirmación, responde al momento de formulación del modelo matemático, que describe el pensamiento variacional de los estudiantes en actividades de modelación matemática. El caso D, parte de la imagen 12. Para construir la tabla 6:

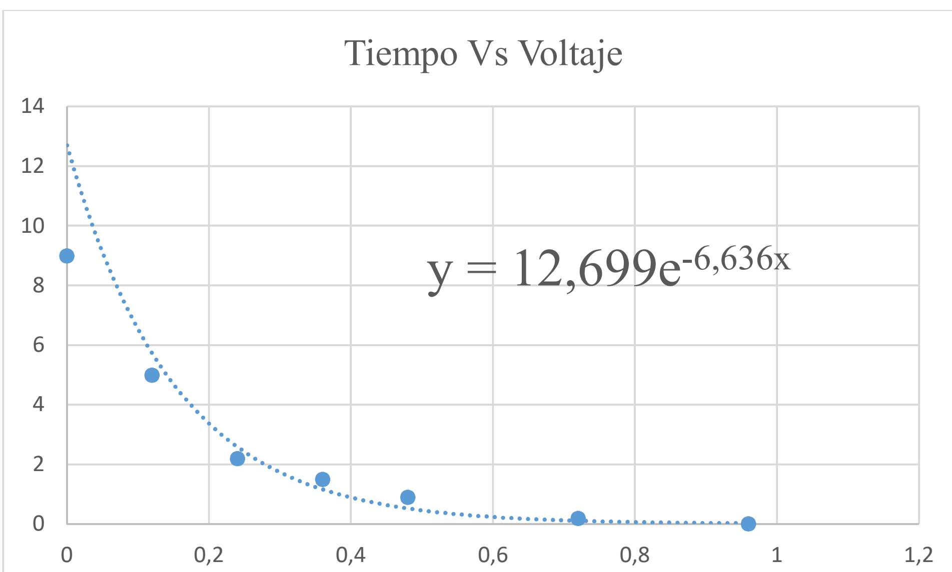
Tabla 6. Datos tabulados Caso D

t(s)x	Vy
0	9
0,12	5
0,24	2,2
0,36	1,5
0,48	0,9
0,72	0,2
0,96	0,01

Con base en la tabla 6, el estudiante realiza la regresión lineal de dos variables y obtiene la gráfica para la caída de voltaje y de allí el modelo matemático que según él fue la mas apropiada para representar el fenómeno.

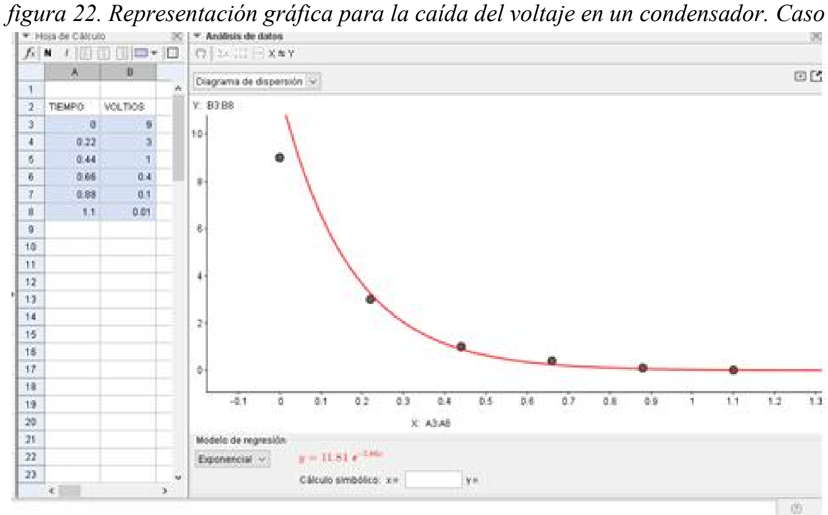
Cuando se le pide al caso D que explique el origen del argumento que lo lleva a elegir este modelo matemático como el más indicado para representar el fenómeno, expresa de manera escrita: "porque es la que más se amolda al gráfico y a los datos. Las demás no se adecuan. Porque me muestra la caída del voltaje de forma fácil de entender. Además, entre las opciones que me ofrece el programa ese fue el que me pareció más adecuado".

figura 21. Representación gráfica para la caída del voltaje en un condensador. Caso D



El caso Y no quiso trabajar en la obtención del modelo matemático con Microsoft Excel, él escoge GeoGebra para realizar la regresión lineal de dos variables con la hoja de cálculo integrada a la interfaz dinámica de este recurso. Basándose en la imagen 11. el estudiante ingresa la lista de datos que adquiere de forma visual a través de la concepción de la pantalla del osciloscopio como un plano cartesiano en el que la escala del eje horizontal equivale a 0,22 segundos por cuadro y del eje vertical a 1 Voltio por cada cuadro.

figura 22. Representación gráfica para la caída del voltaje en un condensador. Caso Y



El estudiante justifica la obtención del modelo matemático $y = 11{,}8e^{-5{,}86x}$, al decir: “se escogió este modelo porque su gráfica de regresión concordaba con los datos de la gráfica y los otros no se acoplaban bien”. Posteriormente, él visualiza el panel de entrada de valores para la variable independiente que ofrece GeoGebra debajo de la sección en donde aparece la expresión matemática que arroja el software; y empieza a calcular para valores entre t = 0s y t = 1s.

Como resultado de este proceso de modelación, el estudiante dice: “los valores que arroja GeoGebra son diferentes a lo que tengo en la gráfica que me dio Proteus, por ejemplo, si t = 0,1 s GeoGebra me arroja y = 6,5724, pero viendo mi gráfica es claro que cuando t es 0,1 el valor del voltaje es aproximadamente 5,2 voltios (indicio de AM4). Creo que algo no está bien. Creo que hay que agregar más puntos para que el modelo sea más preciso" (AM4). Esto obedece a los momentos definidos para el proceso de modelación con tecnología, en el que se empezó con el momento de formulación simbólica, luego con el momento de calcular con esa información, el momento de comparar los resultados con el proceso modelado y finalmente alude a la reformulación del modelo $y = 11{,}8e^{-5{,}86x}$ por uno que se aproxime a una representación más aproximada de la realidad del fenómeno estudiado. Por el contrario, los casos D y M no mostraron evidencia que invitase a la reformulación del modelo, sus respuestas no permitieron identificar comportamientos que demostraran habilidades conceptuales relacionadas con la tasa de cambio, o el cambio de la tasa de cambio correspondientes al N4 o N5 en el proceso de modelación, a ellos les bastó con obtener el modelo matemático para representar aproximadamente la realidad del fenómeno.

En el caso de la caída de voltaje en un condensador inscrito en un circuito RC, se identificó que la modelación con tecnologías al desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de educación media estuvo enmarcado entre el N1 y el N3, es decir, la actividad propuesta en el aula posibilitó descubrir las formas y maneras en las que estudiantes interpretaron y abordaron la conceptualización del decaimiento de voltaje a través de la modelación matemática, iniciaron el análisis de la descarga del condensador de manera dinámica con ayuda del osciloscopio de Proteus 8.5, identificando el tipo y la categoría de las variables, coordinando la dirección y la cantidad del cambio del voltaje respecto a la cantidad de cambio en el tiempo.

Conclusiones

La modelación Matemática con tecnologías jugó un papel fundamental en términos del aprendizaje y comprensión del fenómeno de descarga de un condensador, el funcionamiento de un circuito y la apropiación de instrumentos como el osciloscopio, a través de la aplicación de los conceptos adquiridos en clase, los estudiantes (casos) evidenciaron características y patrones que dan cuenta de los procesos de covariación hasta el nivel 3; solo un estudiante (Caso Y) tuvo indicios de AM4.

La modelación matemática con tecnologías fue el camino para disminuir la carga operativa, dedicando mas tiempo para la reflexión y el análisis de la situación. Además, los casos estudiados (a pesar de la diferencia de estilos de pensamiento matemático) presentaron variaciones en la habilidad para aplicar razonamiento covariacional al analizar la caída de voltaje en condensador.

La modelación matemática con tecnologías aportó al desarrollo del razonamiento covariacional en los estudiantes hasta N3, sin embargo, para futuras investigaciones se puede replantear, por parte del docente, el marco conceptual y la orientación de la experiencia de aprendizaje para estudiar y analizar los procesos de covariación de los estudiantes en situaciones complejas.

Estudiar sistemas electrónicos a través de la modelación matemática con tecnología aportó en el desarrollo del razonamiento covariacional de los estudiantes, en términos del pensamiento variacional desde el momento en el que se identifican las variables para la formulación del modelo matemático. Ninguno de los casos evidenció encontrarse en el nivel 4 para el razonamiento covariacional, la falta de precisión en el modelo matemático seleccionado por cada estudiante se origina debido a errores humanos en la toma de datos, solo uno de los estudiantes propuso refinar y reformular su modelo tomando intervalos de tiempo cada vez mas pequeños para generar una regresión lineal de dos variables en la que el conjunto de pares coordenados posibilite la construcción de una linea de tendencia asociada a un modelo matemático refinado.

Al desarrollar la obtención del modelo matemático para el decaimiento de voltaje en el condensador se encontró que la interfaz de GeoGebra es mas adecuada que la de Microsoft Excel en lo que respecta al momento de reformulación del modelo, ya que el primero permite hacer el análisis inmediato de la gráfica generada por la lista de pares ordenados hecha por los estudiantes, mediante el panel de cálculo simbólico, con la finalidad de comparar con la gráfica dada por el osciloscopio y así propiciar un escenario para la toma de decisiones en cuanto al refinamiento de la expresión matemática que surge de la interpretación del fenómeno.

Para futuras investigaciones se puede utilizar el GeoGebra para que los estudiantes, al momento de hacer la regresión lineal de dos variables, tomen pares ordenados y valores cada vez más pequeños entre t= 0s y t=1,2s a medida que reformulen y refinen el modelo (AM4), complementando con la orientación docente la etapa de reflexión, interpretación y validación de dicho modelo. A esto se añade la necesidad de comparar el modelo obtenido por los estudiantes con el modelo teórico desarrollado en el anexo 1 para el voltaje en un condensador, con la finalidad de posibilitar la identificación del origen de errores en la reformulación del modelo matemático obtenido al aplicar razonamiento covariacional al analizar un evento dinámico.

Los estudiantes pueden alcanzar el nivel cuatro y cinco del marco conceptual [tabla 4] a través de la reformulación del modelo matemático, es decir, se debe orientar al grupo de estudiantes a tomar un conjunto grande de puntos en el plano del tiempo vs voltaje para posibilitar mayor precisión en la obtención del modelo matemático, y posibilitar la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea del voltaje (respecto al tiempo) con cambios en el tiempo, a medida que se toman valores cada vez mas pequeños entre un punto y otro.

Para corroborar si el comportamiento de la caída de voltaje se puede representar como una función exponencial, es menester que los estudiantes con el docente verifiquen si el conjunto de puntos seleccionados permite comprobar la expresión: $\frac{(\frac{dy}{dx})}{y} = \mu$

Los estudiantes deben reformular los modelos matemáticos obtenidos para fortalecer los conceptos adquiridos en el aula de clase, con la finalidad de refinar los argumentos que le dirigen a la escogencia del modelo matemático que le ofrece el software de acuerdo con el conjunto de pares ordenados insertados en las hojas de calculo y la regresión lineal de dos variables.

Bibliografía

Baldonado, C. B. (2012). Estudio de funciones con GeoGebra. Tomado de: https://acgeogebra.cat/5jornades/clara_benedicto.pdf

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Bray, A., & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, *114*, 255–273. doi:10.1016/j.compedu.2017.07.004

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de ventos dinámicos. *Revista EMA*, *8*(2), 121–156.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Dennis, D., & Confrey, J. (2000). La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *3*(1), 5–31.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. doi:10.1007/978-3-319-33666-4_1

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181. doi:10.1080/10986065.2016.1183090

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2017). Multiplicar sumando: Una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(2), 137–166. doi:10.12802/relime.17.2021

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. (Ediciones Morata, Ed.) (2a ed.). Madrid: 2007.

García, L. (2004). *La modelación Matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial*. Universidad Autónoma de Nuevo León.

García Mesa, J. J. (2016). *Desarrollo del razonamieno covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo (tesis de maestria).* Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. S. (1999). Fisica Vol. 2. Mexico: Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. México.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la invetigación*. (MC Graw Hill, Ed.) (6a ed.). México D.F.

James, S. M., & Singer, S. R. (2016). From the NSF: The national science foundation's investments in broadening participation in science, technology, engineering, and mathematics education through research and capacity building. *CBE Life Sciences Education*, *15*(3), 1–8. https://doi.org/10.1187/cbe.16-01-0059

Martinez-Gómez, J. N. (2013). "Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra". *Tesis - UNAL de Colombia*.

Medina, A. (2012). *Modelado de funciones: una propuesta didáctica mediada por diversos contextos de las ciencias naturales (tesis de maestria)*. Bogota, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Orobio Ocoro, H., & Ortiz Legarda, M. (1997). *Educación Matemática y desarrollo del sujeto. Una Experiencia de investigación en el aula.* (E. Magisterio, Ed.) (primera). Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Piaget, J. (1972). Le langage et les opérations intellectuelles. *Fondation Jean Piaget Étude*.

Rizzo, K. A. (2014). El desafío de enseñar Funciones Exponenciales y Logarítmicas con tecnología . El desafío de enseñar Funciones Exponenciales y Logarítmicas con tecnología . *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 1–16.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education – North America*, (June).

Stake, E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. (E. M. S. L, Ed.) (2a ed.). Madrid: 2010.

Sureda, D. P. (2012). Enseñanza de las funciones exponenciales en la escuela secundaria. aspectos didácticos y cognitivos, *3*, 321–326.

Sureda, D. P., Otero, M. R., & Donvito, A. (2017). *Secuencia Didáctica para enseñar las Funciones Exponenciales en la escuela Secundaria . Una*.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2016). Variation, Covariation and Functions: Foundational Ways of Mathematical Thinking. *Compendium for Research in Mathematics Education*, (January), 421–456.

Vasco, C. E. (2006). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *Tecno Lógicas*, *19*, 63–85.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (31), 9–25.

Villa-Ochoa, J. A., Gonzalez-Gómez, D., & Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en matemáticas. *Formación Universitaria*, *11*(2).

ANEXO 1: Obtención Del Modelo Matemático Para La Caída De Voltaje En Un Circuito RC.

Con el condensador previamente cargado con una carga q , es decir, En $t = 0$, $q = q_o$.

Por tanto, con el suiche abierto (sin fuente de alimentación), la diferencia de potencial en cada componente del circuito se puede expresar como:

En la resistencia: $\boldsymbol{V_{AB}(t) = i \cdot R}$ Ley de Ohm (1)

En el condensador: $\boldsymbol{V_{BC}(t) = \frac{q}{C}}$ para el condensador (2)

Todo lo cual conduce a $\boldsymbol{V_{AB}(t) + V_{BC}(t) = 0}$ (fuente Off) (3)

Reescribiendo (13) con base en (11) y (12): $\boldsymbol{i \cdot R + \frac{q}{C} = 0}$ (4)

Y como $\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt}}$ se tiene que: $\boldsymbol{\frac{dq}{dt} \cdot R + \frac{q}{C} = 0}$ (5)

Solucionando (5) de acuerdo a las condiciones iniciales se obtiene una expresión para la descarga respecto al tiempo: $q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ (6)

De (6) se aprecia que la carga decrece exponencialmente respecto al tiempo, teniendo en cuenta lo dicho en el caso descrito en la figura 3. Se define el producto $RC = \tau$, ***tau*** una constante capacitiva de tiempo del circuito, así que el producto entre Ohmios y Faradios es igual a segundos. Vemos que en el tiempo $t = \tau$, la carga del condensador se reduce a $q(\tau) = q_0 \cdot e^{-1}$ de tal manera que $q(\tau) = 0{,}37q_0$, lo cual es alrededor del 37% de la carga inicial.

Al derivar (6): $\frac{dq}{dt} = \frac{-q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = i$ (7)

El signo negativo demuestra que la corriente fluye en dirección opuesta a la de la fuente, teniendo en cuenta que en este momento se está descargando en vez de cargarse, puesto que $q_0 = C\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$es la fuerza electromotríz), podemos escribir: $i = \frac{-\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ (8)

Después de que el condensador está totalmente cargado y ponemos el suiche SW en off se determina un nuevo $t = 0$. La diferencia de potencial en el condensador disminuye exponencialmente hasta cero cuando el condensador s descarga. El voltaje en el condensador se define mediante la relación: $V_c = \frac{q}{C}$.

Cuando el capacitor se descarga, la magnitud de la corriente disminuye exponencialmente a cero, y la caída de potencial en la resistencia tiende también a acero.

La corriente inicial, determinada por $t = 0$ es $i = -\frac{\mathcal{E}}{R}$. Esto es razonable porque la diferencia de potencial inicial en la resistencia es de $\mathcal{E}$. Las diferencias de potencial en R y C, las cuales son proporcionales a i y q respectivamente.

$V_c = \frac{q}{C}$ cae exponencialmente desde su valor máximo, el cual se presenta en $t = 0$. $V_R = iR$ es negativo y se eleva exponencialmente a cero.

Para determinar la ecuación de la caída de potencial en el capacitor se tiene que:

$$\boldsymbol{V_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (9)$$

Si el voltaje inicial $V_0 = \frac{q_0}{C}$, entonces la expresión para representar la diferencia de potencial en el condensador es:

$$\boldsymbol{V_c = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (10)$$

Por tanto, en el instante $t = \tau = RC$, $\boldsymbol{V_c}(\tau) = \boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{e}^{-\frac{\tau}{\tau}} = \boldsymbol{V}_0 e^{-1} = 0{,}37\boldsymbol{V}_0$

En este caso la constante de tiempo τ representa en el circuito, el tiempo que tarda el condensador en reducir su diferencia de potencial (o su carga) al 37% de su valor inicial.

ANEXO 2: Modelación de un Circuito RC

Objetivo: Identificar las características y representación gráfica del modelo de descarga de un condensador con Proteus.

Materiales: Fuente DC 9V, resistencias, condensador, multímetro, protoboard.

De acuerdo con el siguiente esquemático:

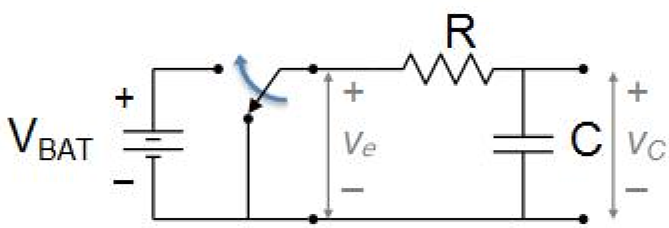


figura 1. Diagrama Circuito RC

En Proteus, diseña el montaje propuesto en la figura 1. Con ayuda del osciloscopio describe el tipo de gráfica que se muestra y como cambia al variar el valor de la resistencia y del condensador.

a. ¿Cuál es el dominio de la función representada en la gráfica? ¿Cómo puedes identificarlo? Argumenta tu respuesta.

b. ¿Cuál es el comportamiento del voltaje en el condensador antes y después de abrir el swich? Argumenta tu respuesta

c. Haga un bosquejo de la gráfica del voltaje en función del tiempo que describa lo que sucede cuando se varía el valor de la resistencia y la capacitancia permanece constante, de la misma forma, describe lo que pasa al variar el valor del capacitor mientras el valor de la resistencia permanece constante.

d. Construye un modelo matemático que represente la caída de voltaje en el condensador. Explica cómo se obtuvo y porqué es el más indicado para representar el fenómeno.

ANEXO 3 Consentimiento Informado

Todos los estudiantes y acudientes de la institución, al momento de matricular y crear un vínculo con la Institución educativa Fe y Alegría Luis Amigó, deben diligenciar el consentimiento informado de uso de imagen y de salidas pedagógicas institucionales, por lo que se garantiza que los estudiantes participantes en esta investigación estuvieron de acuerdo con el desarrollo de la experiencia de aprendizaje.

MUNICIPIO DE MEDELLIN
INSTITUCION EDUCATIVA FE Y ALEGRIA "LUIS AMIGÓ"
RESOLUCIONES 033 de Abril 21/2003, 0715 de Noviembre 22/2004
Y 11112 de Diciembre 3/2009

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE USO DE IMAGEN Y DE SALIDAS PEDAGOGICAS INSTITUCIONALES

Actuando en nombre y representación del menor______________________________, por medio del presente documento, manifiesto de conformidad con la normatividad colombiana de protección a los niños, niñas y adolescentes que autorizo a la Institución educativa Fe y Alegría Luis Amigó de carácter Oficial y propietaria de las páginas web www.feyalegrialuisamigo.edu.co, @feyalegriala, del periódico Notiescolar, entre otros medio de difusión de la información , a tomar fotografías y/o imágenes, videos y entrevistar al menor cualquier día del año escolar 2019, para su uso Institucional (Libros anuarios, libro de seguimiento de convivencia , cuadro de honor, libros de matrícula, impresos, audiovisuales, on-line y sus redes sociales). Y siendo conocedor del poco espacio físico con que cuenta la I.E y consiente de las necesidad de ofrecer a los educandos diversos ambientes de aprendizaje autorizo a llevar al menor en mención bajo la protección de un adulto responsable a los ambientes propicios como: Centro de Desarrollo Cultural, Canchas y placas deportivas, El morro, Centros de salud de Moravia, y todos los espacios comprendidos entre la avenida Regional y la Avenida Carabobo de occidente a oriente, la calle 77 y la calle 93 e de sur a norte que enmarcan todo el sector de Moravia, El bosque, El Oasis sin atravesar ninguna de las avenidas y calles mencionadas. **Para cualquier otra salida pedagógica que implique salir del radio de acción aquí descrito, se me deberá pedir autorización expresa con antelación.**
Conforme a lo anterior autorizo el uso de la imagen del menor y a éste a participar de todas las actividades con fines educativos e institucionales que se programen en la Institución Educativa.

Nota: Manifiesto que conozco que el otro padre o cualquier otra persona que legalmente sea responsable del menor, no presenta objeto ni inconveniente alguno con la autorización que por este medio estoy otorgando.

Para su constancia firman:

Firma de Acudiente o Padre de Familia______________________________
Nombre de quien autoriza: ______________________________
Nº C.C: ____________________
Nº teléfono: ________________
Fecha de Autorización__________

Firma de Acudiente o Padre de Familia______________________________
Nombre de quien autoriza: ______________________________
Nº C.C: ____________________
Nº teléfono: ________________
Fecha de Autorización__________

Nombre del menor: ______________________________
Nº T.I: ____________________

MUNICIPIO DE MEDELLIN
INSTITUCION EDUCATIVA FE Y ALEGRIA "LUIS AMIGÓ"
RESOLUCIONES 033 de Abril 21/2003, 0715 de Noviembre 22/2004
Y 11112 de Diciembre 3/2009

FICHO MATRICULA ESTUDIANTES ANTIGUOS BASICA PRIMARIA Y/O SECUNDARIA 2019
GRADO QUE ASPIRA _________ CÓDIGO MATRÍCULA: ______________

NOMBRES Y APELLIDOS DEL ESTUDIANTE:			
DOCUMENTO ACTUAL	Nro.	EXPEDIDO EN:	
NACIMIENTO:	CIUDAD:	DIA:	MES:
¿ES PERSONA CON DISCAPACIDAD? SI____ NO____ ¿CÚAL?		¿TIENE ALGUNA SITUACIÓN ESPECIAL DE SALUD?	
AFROCOLOMBIANO SI ( ) NO ( ) PERTENECE A UN GRUPO ETNICO SI ( ) NO ( ) PERTENECE A ALGUN GRUPO LGBTI SI( ) NO( ) OTRO______ ¿CUAL?	VICTIMA DE CONFLICTO ARMADO SI_________ NO__________ DESPLAZADO: SI ____ NO ____ DEL MUNICIPIO_______________ O BARRIO___________ O SECTOR__________________		
DIRECCIÓN ACTUAL DEL ESTUDIANTE:			
BARRIO:	TELEFONO CELULAR:	TELÉFONO FIJO:	ESTRATO:
PUNTAJE DEL SISBÉN:	EPS:	TIPO DE SANGRE:	
CREDO RELIGIOSO:	OTRO TELEFONO DE CONTACTO:		
NOMBRE COMPLETO DEL PADRE:			AUSENTE SI_____ NO____
Nº CÉDULA	EXPEDIDA EN	TELEFONO CASA	
OTRO TELEFONO DE CONTACTO:		Nº TELÉFONO CELULAR:	
LUGAR DE TRABAJO		CARGO	
NOMBRE COMPLETO DE LA MADRE:			AUSENTE SI_____ NO____
Nº CÉDULA	EXPEDIDA EN	TELEFONO CASA	
OTRO TELEFONO DE CONTACTO:		Nº TELÉFONO CELULAR:	
LUGAR DE TRABAJO		CARGO	
ACUDIENTE **(Persona que realiza la matrícula y acompaña en su proceso académico al Estudiante durante el año lectivo actual)**			**PADRE____ MADRE____ OTRO____**
Nº CÉDULA	EXPEDIDO EN	TELEFONO FIJO	
DIRECCIÓN	TELEFONO CELULAR	PROFESION:	
CARGO	AFINIDAD CON EL ALUMNO:	TELÉFONO TRABAJO:	

NOTA 1: El único responsable de la matrícula de un Estudiante es el Padre de Familia. En caso de no poder asistir, debe enviar una carta autorizando a una persona mayor de edad para que firme y ejerza como Acudiente.
NOTA 2: El formulario de inscripción debe estar diligenciado en su totalidad, con datos verídicos y actualizados.

- Certificamos que conocemos y aceptamos el **Manual de Convivencia y el SIEE** Sistema Institucional de los Estudiantes de la Institución Educativa Fe y Alegría Luis Amigó y nos comprometemos a apoyar la labor de esta Institución, y a ser en términos generales los primeros formadores de la educación del estudiante mencionado y a cumplir a cabalidad todos los artículos para mantener un comportamiento de acuerdo a las normas establecidas por la Institución. (Publicado en la página oficial del colegio: www.feyalegrialuisamigo.edu.co)