UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

MOVILIZACIÓN DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA, A PARTIR DE LA TENSIÓN ENTRE CONCEPTOS COTIDIANOS Y CONCEPTOS CIENTÍFICOS ACERCA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Julián Darío Ramírez Castro

Manuela Restrepo Puerta

Santiago Cardona Arenas

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2019

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales

Trabajo presentado para optar al título de Licenciados en Matemáticas y Física

JULIÁN DARÍO RAMÍREZ CASTRO

MANUELA RESTREPO PUERTA

SANTIAGO CARDONA ARENAS

Estudiantes

Mg. MÓNICA MARCELA PARRA-ZAPATA

Asesora

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

MATHEMA-FIEM

MEDELLÍN

2019

Agradecimientos

Agradecemos a todas las personas e instituciones que, durante nuestro proceso investigativo, hicieron aportes y nos fortalecieron para no desistir del mismo.

A nuestras *familias y amigos* por el apoyo incondicional que nos brindaron durante este proceso y por entender nuestras ausencias.

A nuestra asesora *Mónica Marcela Parra-Zapata* por sus valiosos aportes a la construcción de esta investigación y a nuestro proceso de formación como maestros en los momentos indicados.

A los *estudiantes* que hicieron parte del proyecto PROFE por sus aportes indispensables a nuestro proyecto de investigación y por su disposición en las sesiones de clase.

A los integrantes del grupo de investigación MATHEMA-FIEM por permitirnos espacios de diálogo y encuentros con miras a la mejora de nuestro proceso investigativo.

A la Fundación Argos por permitirnos hacer parte del Proyecto PROFE.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Resumen

En este documento presentamos el informe de una investigación que tuvo como objetivo analizar la manera cómo se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales. La investigación se realizó con algunos estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen, la Institución Educativa Rural el Prodigio y la Institución Educativa Rural Altavista, ubicadas en el departamento de Antioquia-Colombia, y tuvo como referente conceptual para los análisis la Actividad Matemática a partir de la perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática y la caracterización de las prácticas matemáticas, específicamente los *conceptos cotidianos y científicos* acerca de un objeto de conocimiento matemático particular (los Números Racionales) y los *instrumentos y procedimientos*. Los estudiantes participaron en un Ambiente de Aprendizaje, el cual se materializó en una microsociedad al interior del aula, que nos permitió analizar elementos fundamentales de la *actividad*, tales como la *interacción* y las *acciones que movilizan las prácticas matemáticas* de los estudiantes. La investigación estuvo enmarcada bajo un enfoque cualitativo de investigación y utilizó la observación participante, los documentos y la entrevista abierta como técnicas para la recolección de los datos provenientes de la literatura, los estudiantes y los investigadores. Los análisis nos permitieron concluir que la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales, se presenta por el *encuentro* individuo-sociedad y está mediada por instrumentos presentes en aspectos concretos del Ambiente de Aprendizaje.

Palabras clave: Educación Matemática, Actividad Matemática, Prácticas Matemáticas, interacción, instrumentos y procedimientos, conceptos cotidianos, conceptos científicos, Números Racionales.

Abstract

In this document we introduce the report of a research that analyze the way in which the mathematical practices of middle school students are mobilized from the tension between everyday concepts and scientific concepts about Rational Numbers. The research was made with some students of the Educational Institution of Our Lady of Carmen, the Rural Educational Institution El Prodigio and the Rural Educational Institution Altavista, located in the department of Antioquia-Colombia, and the research had the Mathematical Activity as a conceptual reference for the analyzes starting from the historical-cultural perspective of Mathematics Education and the characterization of mathematical practices, specifically the everyday concepts and scientific concepts about a particular mathematical knowledge object (the Rational Numbers) and the instruments and procedures. The students participated in a Learning Environment, which materialized in a microsociety inside the classroom, which let us analyze fundamental elements of the activity, such as the interaction and actions that mobilize students' mathematical practices. The research was framed under a qualitative research approach and used participant observation, documents and open interview as techniques for the collection of data from the literature, students and researchers. The analysis let us know that the mobilization of mathematical practices of middle school students from the tension between everyday concepts and scientific about the Rational Numbers, is presented by the individual-society encounter and is mediated by instruments present in aspects concrete aspects of the Learning Environment.

Keywords: Mathematical Education, Mathematical Activity, Mathematical Practices, interaction, instruments and procedures, everyday concepts, scientific concepts, Rational Numbers.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

Este documento reporta un proceso de investigación que se desarrolló en el marco de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En esta investigación analizamos la movilización de las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media, en tres instituciones educativas públicas de Antioquia - Colombia, a partir de la *tensión* entre los *conceptos científicos* y los *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales.

El trabajo lo presentamos en un formato multi-paper, el cual es un formato alternativo que nos da la posibilidad de presentar los resultados de la investigación por medio de artículos publicables en revistas académicas. Según Parra-Zapata (2015) el formato multi-paper tiene varias ventajas con respecto al formato tradicional de los trabajos de grado, entre ellas se encuentra la formación de investigadores en prácticas propias de la comunidad científica, además, ofrece una mayor visibilidad de los resultados, pues el público que tiene acceso a los artículos es más amplio que el público que tiene acceso a las tesis de pregrado. Los trabajos en formato multi-paper pueden realizarse a través de varias estructuras. Según Barbosa (2015), una de las posibles estructuras es la que presenta esta investigación, es decir, cuatro capítulos con la siguiente composición: Capítulo I, donde se presentan los fundamento teóricos, metodológicos y el problema de investigación a abordar; Capítulo II, donde se presentan los artículos que muestran los resultados de la investigación, Capítulo III, donde se presentan las consideraciones finales, conclusiones y alcances de la investigación; y por último, el Capítulo IV, donde se presentan los anexos de la investigación. Al final de cada capítulo se presentan las referencias bibliográficas respectivas.

De acuerdo con lo anterior, en el primer capítulo, presentamos aspectos introductorios al proceso de investigación, empezamos por presentar el proyecto PROFE, el cual fue el marco para la realización de nuestras prácticas pedagógicas durante los dos semestres del año 2018. Seguido a esto, presentamos una revisión general de la literatura en el campo de la perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática (Radford, 2014 y Kozulin, 2000), donde exponemos un diálogo con otras investigaciones, que nos permiten darle un sustento teórico a nuestro problema de investigación, relacionadas con la Actividad Matemática (Obando, 2015 y Obando, Arboleda y Vasco, 2014), el estudio de las prácticas matemáticas, los conceptos cotidianos y científicos (Kozulin, 1994, 2000) y los Números Racionales (Acevedo y Arango, 2011; Obando, Vanegas y Vásquez, 2006 y Gairín, 1998). Después, desarrollamos las aproximaciones a una enseñanza de las matemáticas, donde reflexionamos acerca de nuestra experiencia en los contextos educativos en los cuales nos desenvolvimos y donde analizamos las prácticas matemáticas de los estudiantes que nos llevaron a formular, en consonancia con los elementos teóricos y empíricos la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales?

En el apartado 2 presentamos los sustentos teóricos que nos permitieron darle respuesta a esta pregunta por medio de las categorías de análisis: *acciones movilizadoras de prácticas matemáticas*, *interacción*, *instrumentos y procedimientos*, *conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales.*

Luego, en el apartado 3, exponemos los fundamentos metodológicos, a saber: el enfoque de investigación cualitativo, las técnicas e instrumentos que permitieron la recolección y producción conjunta de registros y datos, tales como la observación participante, los documentos (fichas) y entrevistas abiertas. Además, presentamos a los protagonistas de la investigación, es decir, los estudiantes de la Institución Educativa Rural El Prodigio (San Luis - Antioquia), la Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen (Girardota - Antioquia) y la Institución Educativa Rural Altavista (San Luis - Antioquia). El trabajo de campo se materializó en un Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015) propuesto para el segundo semestre de nuestra práctica pedagógica, el cual consistió en la creación de una microsociedad al interior del aula de matemáticas. Y, por último, presentamos los métodos con los cuales realizamos los análisis en la investigación (análisis paralelo y análisis detallado) y los aspectos éticos con relación a la misma.

En el segundo capítulo, presentamos los resultados de esta investigación por medio de una serie de dos artículos. En el primer artículo analizamos las *acciones que movilizan las prácticas matemáticas*, emergentes de la Actividad Matemática de los estudiantes en un Ambiente de Aprendizaje, que propició el *encuentro* (Radford, 2018) con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales, a partir de la *interacción* y el uso de *instrumentos y procedimientos* matemáticos. Los resultados ofrecen una comprensión del aprendizaje como transformación de prácticas a partir del *encuentro* individuo-sociedad.

En el segundo artículo analizamos la movilización de las prácticas matemáticas a partir de la *tensión,* entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* acerca de los Números Racionales, mediada por *instrumentos* presentes en los Billetes Racionales (papel moneda construido por los investigadores para el desarrollo de las acciones al interior de la microsociedad) y en las fichas donde los estudiantes registraron, en cada sesión de clase, las acciones al interior del Ambiente de Aprendizaje. Los resultados ofrecen una compresión del aprendizaje como transformación de prácticas matemáticas propiciadas por la *tensión*.

Los dos artículos están estructurados de la siguiente manera: título y filiaciones, resumen, introducción, referente conceptual, aspectos metodológicos, análisis, consideraciones finales y referencias bibliográficas, pese a que en su titulación al interior del artículo reciben otros nombres. Esta estructura se encuentra acorde a los estándares de publicación de revistas académicas en el área. Por la estructura que presentan los artículos, y al ser derivados ambos de la misma investigación, es inevitable que se presenten repeticiones en el presente documento con relación a los referentes conceptuales y la metodología de trabajo.

En el tercer capítulo presentamos, en primer lugar, las conclusiones derivadas de los análisis realizados en los Artículos 1 y 2 de la presente investigación, orientados a responder la pregunta de investigación. En segundo lugar, los aportes teóricos y metodológicos que hace nuestro trabajo investigativo y los alcances del mismo. Y, por último, presentamos reflexiones y discusiones acerca de la enseñanza de las matemáticas y de los aportes que nos generó a nuestra formación como maestros.

En el cuarto capítulo presentamos los anexos que nos permiten clarificar algunos aspectos referidos a la implementación del trabajo de investigación y a la ética de la investigación. Además, un artículo presentado para la primera edición de la revista Wiphala.

CAPÍTULO I

En este capítulo presentamos cuatro apartados, a saber: el Problema de investigación, el Referente conceptual, los Fundamentos metodológicos y la Síntesis de resultados de la investigación.

En el primer apartado, presentamos la construcción del problema de investigación, el cual surge de nuestra experiencia en el primer semestre de práctica pedagógica, en el marco de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. La ejecución de las tareas durante este semestre, permitieron la revisión de investigaciones a nivel local, nacional e internacional que consolidaron, en nuestra investigación, antecedentes conceptuales, así como una perspectiva de trabajo en la Educación Matemática. Finalmente, el análisis de estas tareas dio pie para generar un problema de investigación que involucró el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes en el marco de los Números Racionales como objeto de conocimiento matemático y permitió la construcción de una pregunta y objetivo que orientaron esta investigación.

En el segundo apartado, presentamos los referentes conceptuales que permitieron entender y darle sentido a nuestro problema de investigación. La perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática nos permitió entender el aprendizaje como un *encuentro* individuo-sociedad. Además, generamos un diálogo entre la Teoría de la Actividad Matemática y los conceptos científicos y cotidianos acerca de los Números Racionales como objeto de conocimiento matemático.

En el tercer apartado, presentamos los fundamentos metodológicos que orientaron nuestra investigación. En primer lugar, presentamos el enfoque cualitativo como enfoque de investigación y, además, unas técnicas e instrumentos de recolección de datos coherentes con el mismo. Luego, presentamos las instituciones educativas en las cuales se implementó el Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015) propuesto para el segundo semestre de nuestra práctica pedagógica, el cual consistió en la creación de una microsociedad al interior del aula de matemáticas. Y, por último, presentamos los métodos con los cuales realizamos los análisis en la investigación (análisis paralelo y análisis detallado) y los aspectos éticos con relación a la misma.

Finalmente, presentamos la síntesis de resultados de la investigación, que, según el formato de presentación de este trabajo de grado, son presentados a profundidad en el Capítulo II.

1. El problema de investigación

En este apartado presentamos la construcción de nuestro problema de investigación. Empezamos por hacer referencia al Proyecto PROFE, el cual fue el marco para la realización de nuestras prácticas pedagógicas, en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Seguido a esto presentamos los antecedentes, donde hacemos un diálogo con otras investigaciones que nos permiten darle un sustento teórico a nuestro problema de investigación, allí exponemos literatura referida a la perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática, la Teoría de la Actividad, el estudio de las prácticas matemáticas, los conceptos cotidianos y científicos y los Números Racionales.

Continuamos con la presentación de nuestra experiencia en el primer semestre de práctica pedagógica y los análisis respectivos de las tareas iniciales. Estas tareas son, en mayor medida el sustento de nuestra investigación, pues podemos decir que fue la práctica, el encuentro directo con la enseñanza de las matemáticas, lo que le dio forma a nuestra investigación. Por las condiciones del proyecto en el que estuvimos inmersos, la experiencia en el aula fue primero para nosotros que la búsqueda teórica de sustentos y problemáticas. Aun así, presentamos el apartado *Aproximación a una enseñanza de las matemáticas* posterior al apartado los *Antecedentes del problema: una mirada a otras investigaciones*, porque consideramos que lo que surgió de la práctica se encontraba ya permeado por una visión de la Educación Matemática, por lo tanto, no fue posible hablar de unos análisis empíricos sin haber presentado primero las bases teóricas que nos permiten abordarlos.

Por último, hacemos una caracterización del problema de investigación, donde presentamos una síntesis general de las tareas iniciales realizadas en nuestro primer semestre de práctica, el porqué del tema de investigación elegido y cómo nos llevó a formularnos una pregunta de investigación que luego se convirtió en un objetivo de investigación, el cual le da sentido a este trabajo.

1.1 El contexto de la investigación

Nuestra experiencia de práctica pedagógica la realizamos en diferentes Instituciones Educativas vinculadas al proyecto PROFE (Programa de Fortalecimiento Educativo), el cual surge de un convenio entre la Fundación Argos y la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, que involucra a estudiantes de práctica pedagógica de los programas Licenciatura en Matemáticas y Física y Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Humanidades, Lengua Castellana.

La Fundación Argos es una entidad sin ánimo de lucro que se encarga de materializar parte de la política y estrategia de sostenibilidad de Cementos Argos S. A. Entre uno de sus pilares de trabajo se encuentra el plan de calidad educativa, el cual consiste en incidir, tanto en infraestructura como con proyectos educativos, en algunas instituciones que hacen parte de la zona de influencia de la compañía, a partir de alianzas con organizaciones públicas y privadas. Es en este marco es que se encuentra el proyecto PROFE, el cual tiene como objetivo brindar espacios pedagógicos para estudiantes de educación media (en su mayoría) que les permita fortalecer las competencias básicas en las áreas de matemáticas y lenguaje, con miras, además, a la presentación de pruebas externas (Pruebas Saber y exámenes de admisión a universidades públicas), en el contexto de jornada complementaria.

Para el año 2018, el proyecto estuvo vinculado a nueve Instituciones Educativas del departamento de Antioquia ubicadas en diferentes municipios, a saber: Girardota, San Luis, Sonsón, Marinilla y Medellín (ver *Figura 1*).

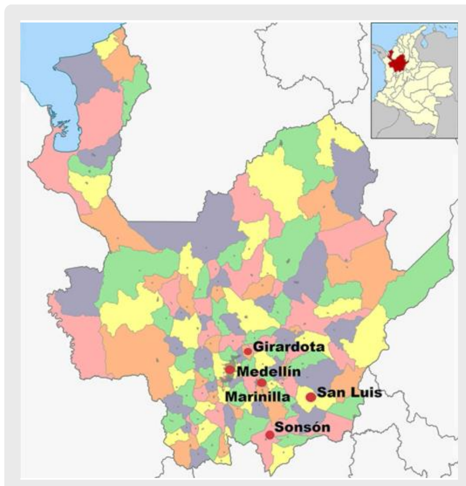


Figura 1 Municipios del departamento de Antioquia donde se implementó el Proyecto. Adaptado de "Archivo: Colombia Antioquia location map (adm colored) .svg" en https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Colombia_Antioquia_location_map_(adm_colored).svg

En el desarrollo de este proyecto, en el contexto de la práctica pedagógica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, es donde desarrollamos la implementación de nuestro trabajo de investigación. Al respecto, el artículo 8 del reglamento de la práctica pedagógica en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (2005) nos presenta:

> La Práctica Pedagógica tiene como componente fundamental la Investigación, definida como el proceso que busca resignificar la experiencia sobre la Práctica Pedagógica para construir intencionalmente saber pedagógico y didáctico, diseñar y sistematizar experiencias innovadoras en educación, aplicar teorías y generar nuevos campos para la diversidad metodológica y didáctica. En este contexto, se desarrollan las competencias pedagógicas, actitudinales, comunicativas y cognoscitivas, necesarias para conocer y analizar la realidad, identificar y aplicar estrategias de indagación sistemática y trabajar colaborativa y solidariamente, cuyo objeto es la formación en investigación de los maestros(as) en formación (p. 9).

La implementación la realizamos en tres instituciones educativas, ubicadas en los municipios de San Luis y Girardota, entre los meses de marzo y noviembre del año 2018, donde llevamos a cabo la investigación en Educación Matemática que abordamos en este trabajo. Empezamos con un proceso de observación y búsqueda de problemas en nuestros espacios de enseñanza de las matemáticas en el primer semestre del año, lo cual nos llevó a una pregunta de investigación (que en el apartado 1.4 abordaremos con detalle) y terminamos con la implementación de una propuesta educativa en la que confluyeron aspectos teóricos y empíricos, para la solución de dicha pregunta de investigación en el segundo semestre del año. Las instituciones que escogimos para esta implementación fueron: la Institución Educativa Rural El Prodigio (San Luis - Antioquia), la Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen (Girardota - Antioquia) y la Institución Educativa Rural Altavista (San Luis - Antioquia), en las que hicimos presencia los investigadores de manera separada. En el apartado 3.3 presentaremos las instituciones con más detalle.

1.2 Antecedentes del problema: una mirada a otras investigaciones

Durante el proceso de revisión y análisis de la literatura encontramos algunas investigaciones a nivel local, nacional e internacional relacionadas con lo que se plantea en la presente investigación. A continuación, presentamos sus aportes a nuestro trabajo. Enunciamos, en primer momento, aquellas que asumimos como el fundamento teórico de nuestra investigación, luego presentamos la literatura más específica para nuestro problema de investigación, la cual abordamos detenidamente en el Referente Conceptual, es decir, aquella relacionada con la Actividad Matemática, los conceptos cotidianos y científicos, y los Números Racionales. Estas investigaciones se presentan como punto de partida para nuestra investigación.

Es la perspectiva histórico-cultural (o socio-cultural) de la Educación Matemática la que engloba nuestro accionar investigativo, por ello consideramos necesario caracterizarla. En este sentido, Radford (2014) nos presenta aportes para entender el surgimiento y las raíces de esta perspectiva, pues nos plantea que esta viene posicionándose desde finales de siglo pasado como una alternativa a la manera individualista generalizada de entender el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Es el esfuerzo de diferentes investigadores por rescatar los aportes de la psicología histórico-cultural de Lev Vygotsky (junto a la tradición intelectual soviética de principios del XX) y actualizarlos y adaptarlos al entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Al respecto plantea:

> Estos investigadores estaban interesados en entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje del alumno—un problema que todavía estamos luchando por entender y que está lejos de haber sido respondido de manera clara y definitiva (Radford, 2014, p. 133).

Podemos decir entonces, que la perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática es relativamente joven, donde queda mucho camino por construir y donde queremos aportar a ello a partir de los resultados de nuestros análisis investigativos en torno a las prácticas matemáticas de estudiantes en diferentes espacios institucionales.

Esta perspectiva se preocupa por entender la Educación Matemática como un fenómeno social, cultural e histórico, donde el conocimiento matemático es el resultado de la acción humana en un contexto de prácticas particulares con unas delimitaciones institucionales de acuerdo con una comunidad académica específica. Es decir, no se trata de que los estudiantes se apropien exactamente de los saberes construidos anteriormente, se trata de que sean hábiles con unas formas de hacer y pensar en matemáticas a la vez que crean y aportan a ellas, pues, según Jaramillo, Obando y Beltrán (2009), el conocimiento en la perspectiva socio-cultural deja de ser un producto externo del cual el individuo se apropia y pasa a ser una interpretación que los sujetos hacen del mundo a partir de una relación dialéctica con su entorno social, cultural, histórico y político. Es por esto que nuestras prácticas pedagógicas y nuestra investigación se enriquecieron por esta perspectiva, pues ella genera diversas miradas y experiencias en los diferentes contextos en los que nos desenvolvemos, además, nos permite reconocer saberes previos de los estudiantes y ponerlos a discutir, por medio de prácticas, con los saberes culturales.

Encontramos también importante los aportes de Kozulin (2000), el cual nos presenta elementos importantes para el devenir histórico de la perspectiva socio-cultural de la educación, pues nos aproxima, de manera directa, a los aportes de Vygotsky acerca de los estudios socioculturales, a su interés por la relación entre el lenguaje humano y la conciencia, al desarrollo de los procesos mentales superiores (pensamiento verbal, memoria lógica, atención selectiva) los cuales se originan mediante la *actividad* cultural humana, es decir, de la acción al pensamiento. Este desarrollo de la idea de *actividad* en Vygotsky (1995), como proceso colectivo y orientado, para la construcción de sentidos y significados, que tiene sus bases en Hegel y el materialismo dialéctico, es lo que nos da luces para nuestra investigación, además nos acerca a otras teorías actuales que tienen su fundamento allí, pero que lo han materializado y actualizado para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal es el caso de los aportes de Obando (2015) y Obando, Arboleda y Vasco (2014), para una teoría acerca de la Actividad Matemática.

Obando, Arboleda y Vasco (2014) entienden la Actividad Matemática como un conjunto de acciones socialmente dirigidas con el objetivo de alcanzar un fin (objeto/motivo), pero además como un proceso colectivo en el cual la interacción y la reflexión son fundamentales para la transformación de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un Sistema de Prácticas institucionalizado, histórico y cultural. Dichas prácticas matemáticas se caracterizan por unas formas de discursividad (lenguaje), unos instrumentos y procedimientos y unos problemas por resolver donde se refleja una relación entre objetos y conceptos matemáticos, además, todo esto en el marco de una configuración epistémica que, según Obando (2015), "permite la toma de decisiones sobre el hacer (cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológica)" (p. 56). Estas características permiten mostrar, no solo la manera cómo las personas desarrollan en el presente su Actividad Matemática, sino también, cómo sus transformaciones dejan ver la constitución de nuevos conocimientos matemáticos.

La tesis de pregrado de la Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia, realizada por Jiménez, Zapata y Cautiva (2017) nos aporta elementos a esto, pues la investigación tuvo como objetivo caracterizar las prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes cuando desarrollaron un conjunto de tareas con manipulativos que se denominan *billetes decimales* propuestos por Villa-Ochoa y Botero (2011).

En este trabajo, la implementación les permitió comprobar que cada una de las categorías de las prácticas matemáticas no se movilizan de manera aislada, sino que, durante la Actividad Matemática, trabajan de manera conjunta y posibilitan, por ejemplo, que las técnicas y estrategias permitan la constitución de sentidos y significados, la discursividad en los problemas por resolver permitan pensar los objetos y conceptos matemáticas y movilizar, por tanto, diferentes maneras de acción, entre otros. Por otro lado, identificaron que algunas maneras de pensar y de actuar de los estudiantes no son aisladas de las prácticas matemáticas históricas, es decir, las maneras de contar y expresarse se asociaron a prácticas matemáticas que se sitúan en el marco de significados históricos, sociales y culturales.

El material manipulativo utilizado como implementación pedagógica por Jiménez, Zapata y Cautiva (2017), les permitió comprender que a través de los *billetes decimales* es posible que los estudiantes generen nuevas estrategias o técnicas para realizar y reconocer relaciones de proporcionalidad. Además, reconocieron también, que el material manipulativo generó en los estudiantes unos acercamientos a procesos multiplicativos y al establecimiento de relaciones entre medidas y, en general, permitió que los estudiantes se acercaran de manera agradable a un objeto de conocimiento matemático.

En este sentido, retomamos de Jiménez, Zapata y Cautiva (2017), las conclusiones que hacen acerca de los elementos característicos de las prácticas matemáticas, donde dicen que estas no se movilizan de manera independiente, sino que la alteración de uno de ellos repercute en los demás. Así, entendemos que el estudio de las transformaciones de una de las características de las prácticas matemáticas, nos permite visualizar la movilización de las mismas en su totalidad. Además, retomamos la importancia de usar material manipulativo como mediador entre conocimientos culturales e individuos.

Por otra parte, el trabajo de grado de Marín y Valencia (2018), desarrollado en dos municipios de Antioquia, tiene como objetivo "describir las características que tienen las prácticas matemáticas que llevan a cabo los estudiantes de grado cuarto con relación a procesos de cálculo matemático" (p. 13). Allí se usa la teoría de la Actividad, a partir del enfoque histórico-cultural, como referente conceptual para el análisis. Usan algunas características de las prácticas matemáticas, a partir de Obando (2015), como categorías de análisis de resultados, a saber: *Objetos y Conceptos*, *formas de discursividad* e *Instrumentos y Procedimientos*.

Las Formas de discursividad les permitió a los autores evidenciar la manera cómo sus estudiantes daban explicaciones de sus ideas y las hacían comprender, además, daban cuenta de cómo ellos discutían y llegaban a acuerdos conjuntos. Así, los estudiantes mejoraron la comunicación matemática y evidenciaron la apropiación de significados y la construcción de *conceptos* acerca de un *objeto* matemático. Para ello, los estudiantes usaron, además, *instrumentos y procedimientos* tales como: los dedos, las calculadoras y el cálculo mental.

La cercanía de este trabajo con nuestra línea de investigación nos permite hacerlo un referente importante a la hora de definir nuestras categorías de análisis. Además, sus experiencias prácticas nos permiten un mejor entendimiento de la teoría de la Actividad Matemática y el estudio de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Al interior de las prácticas matemáticas, encontramos dos elementos cruciales para el desarrollo del conocimiento matemático, en los cuales nuestro trabajo pretende generar aportes:

los *instrumentos y procedimientos* y los *conceptos matemáticos.* Los primeros los entendemos en correspondencia con Obando, Arboleda y Vasco (2014) como aquellos signos, símbolos, textos, fórmulas, gráficas, entre otros, que poseen en sí unas maneras específicas de leer el mundo y que son la cristalización de construcciones históricas. Los segundos los entendemos, de acuerdo con el mismo referente, como aquello que pueda decirse de los objetos matemáticos y que son el resultado de la elaboración de significados y operaciones mentales de las personas.

Con el fin de ampliar esta categoría de *conceptos*, retomamos, en la misma línea histórico-cultural, la idea d*e conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* de Vigotsky, ampliados por Kozulin (1994, 2000). Los *conceptos cotidianos y científicos* se presentan como una dualidad dialéctica donde se complementan y generan *tensiones* fundamentales para el devenir de la *actividad* y, por tanto, para el aprendizaje. Los *conceptos cotidianos* son aquellos que surgen de las prácticas espontáneas de los estudiantes, las cuales pueden presentarse en lugares como el hogar, la calle o el mismo espacio académico. Se diferencian de los *conceptos científicos* en tanto carecen de una sistematicidad y rigurosidad. Estos últimos, por su jerarquización y estructura organizada, son la codificación cultural que se mantiene descontextualizada en el tiempo. La interrelación entre ellos, c*onceptos cotidianos y los científicos*, permiten la formación de una estructura conceptual sólida con relación a un objeto de conocimiento que puede ser cambiante de acuerdo a las acciones de los sujetos. Esto lo ampliamos en el apartado 2 del presente capítulo.

En relación con los Números Racionales, como objeto matemático alrededor del cual se construyó un Ambiente de Aprendizaje (el cual definiremos y ampliaremos en el apartado 3.4), encontramos cuatro documentos importantes para nuestra investigación, presentados a continuación.

En primer lugar, el documento de Acevedo y Arango (2011) nos permite hacer explícita la relación entre los Números Racionales y las fracciones, la cual se encuentra presente de manera implícita en la literatura encontrada. Allí encontramos que la definición planteada acerca de los Números Racionales, producto de un caso específico de las fracciones, surge de un problema histórico con Números Enteros, por lo que partimos de decir que tal definición es una construcción histórica y producto de una codificación cultural.

De acuerdo con esto, referimos a Obando, Vanegas y Vásquez (2006) donde presentan algunos problemas en la enseñanza de los Números Racionales y retomamos algunas de sus propuestas, las cuales realizan a partir de un nuevo énfasis, con las debidas implicaciones pedagógicas para su enseñanza. Los autores consideran que para la enseñanza de los Números Racionales se debe tener en cuenta "El tipo de unidad y magnitud, la fracción como relación parte-todo, la fracción como composición multiplicativa, y la medición como fuente fenomenológica para conceptualizar los Números Racionales" (p. 60).

Como complemento a este último referente, abordamos el trabajo de Gairín (1998), el cual es también producto de una preocupación por las maneras de entender las matemáticas por parte de los docentes (de Educación Primaria principalmente), lo que repercute en unas maneras de enseñanza que no tienen en cuenta aspectos esenciales de los Números Racionales, por ejemplo, "la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados" (p. 3) y la profundización acerca de "las relaciones que se presentan entre los distintos sistemas de representación considerados" (p. 3).

El autor resalta la importancia de abordar diferentes sistemas de representación en la enseñanza de los Números Racionales, pues, cada representación encarna unos aspectos esenciales de los Números Racionales, o dicho en términos de las prácticas matemáticas, cada representación trae consigo unas maneras de entender el objeto de conocimiento, es decir, unos *conceptos matemáticos* asociados a este.

De los dos textos mencionados en los párrafos anteriores, resaltamos la importancia de entender los Números Racionales a partir de las diferentes maneras de representar las fracciones, además, nos aportan ideas para la construcción de acciones matemáticas donde se involucren diferentes sistemas de representación, donde los estudiantes puedan conocer características de cada una de ellas y relacionarlas. Tales maneras de representar las fracciones que recogimos en esta investigación son: *la fracción como relación parte-todo*, *la fracción como una relación multiplicativa*, *la fracción decimal* y *la fracción como cociente indicado.*

Por su parte, en los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia- MEN (2006), se presentan algunos estándares básicos de competencias en la columna de *Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos* de los grados sexto a séptimo relacionados con el uso de distintas expresiones de los Números Racionales (fracciones, razones, decimales o porcentajes) en la resolución de problemas en contextos de medida, además de otros relacionados con la representación decimal de los Racionales y con la resolución y formulación de problemas en contextos de medidas, siendo este último elemento sumamente importante en la conceptualización de los Números Racionales. Aunque en los Estándares se propone los Números Racionales en grado sexto y séptimo, en este trabajo de investigación retomamos este objeto matemático en grados décimo y once, ya que es un objeto de conocimiento matemático, que por su amplitud, no logra abarcarse a cabalidad en los primeros grados de básica secundaria, lo que se refleja en la poca apropiación de los estudiantes con respecto a ellos (como lo observamos en nuestra práctica pedagógica), por lo tanto, su estudio se extiende a lo largo de la educación básica y media. Además, en concordancia con Obando (2003), reconocemos la importancia de los Números Racionales porque permiten analizar y darle significado a grandes volúmenes de información cuantificada en términos de porcentaje, probabilidad, razones, fracciones, entre otros. De igual manera, son de gran importancia en los procesos escolares, pues se constituyen como una base fundamental para la formación en otras disciplinas de la ciencia.

Por último, retomamos la investigación de López (2013) la cual tuvo como objetivo analizar el proceso de aprendizaje del concepto de fracción en seis estudiantes de cuarto grado de básica primaria de una institución educativa ubicada en el municipio de Caucasia-Antioquia. Para esto, el autor se apoyó en la perspectiva histórico-cultural como eje de trabajo, pues esta plantea estudiar lo histórico del objeto y su correlación con la cultura y las necesidades de los estudiantes. El camino recorrido en esta investigación permitió que los estudiantes se aproximaran paulatinamente al objeto matemático, a partir de la reflexión y las interacciones con los compañeros e investigadores, estas se constituyeron

> (...) en elementos importantes para entender que las enunciaciones individuales no estaban desligadas de las complejidades de unas realidades situadas desde las voces de los otros. En ese movimiento de lo social a lo individual, se dio el aprendizaje, mediado culturalmente, de conceptos y significaciones sobre la fracción (López, 2013, p. 206).

En este sentido, la interacción permanente con otros permite entender cómo las diversas aproximaciones y reflexiones a partir de las subjetividades y las apropiaciones de los objetos matemáticos hechas por ellos, posibilitan expresar el movimiento conceptual de los mismos, y cómo finalmente se constituye en aprendizaje.

Esta tesis influye en nuestro proceso investigativo al ilustrar que el aprendizaje puede ocurrir cuando participamos creativamente en la *actividad*. Para Obando (2015), la "actividad práctica", "práctica actuada" o simplemente "práctica" (cuando no se preste a confusión) puede entenderse como la actividad humana que se da dentro de un conjunto de condiciones sociales e individuales y hacen posible que el individuo oriente objetivamente la acción y se posicionamiento frente a ella. Esta participación creativa es un proceso en el cual los sujetos toman conciencia progresiva de las nociones de aquellos conceptos relativos a un objeto de conocimiento al *hacer* en la realidad, de forma mediada por instrumentos y signos producidos cultural e históricamente.

1.3 Aproximación a una enseñanza de las matemáticas

Durante el primer semestre de nuestra práctica pedagógica construimos e implementamos planeaciones de clase basadas en los cinco (5) pensamientos matemáticos propuesto por el MEN en los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* (1998), los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (*2006) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas-Versión 2* (2016), y en las Pruebas Saber 11 (examen de Estado) y los exámenes de admisión a las universidades públicas de Medellín (Universidad de Antioquia y Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín). Esto dadas las condiciones del proyecto, el cual tenía como objetivo el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia y aportar elementos formativos que permitan a los estudiantes de educación media acceder a la educación superior en nuestro país.

Esta primera etapa de nuestro trabajo de investigación la desarrollamos en tres ciclos (ver figura 2): i) Ciclo 1.Presentación e introducción al proyecto, ii) Ciclo 2.Profundización en pensamiento numérico, variacional, métrico y espacial[1] y iii) Ciclo 3. Apoyo para presentación de pruebas externas.

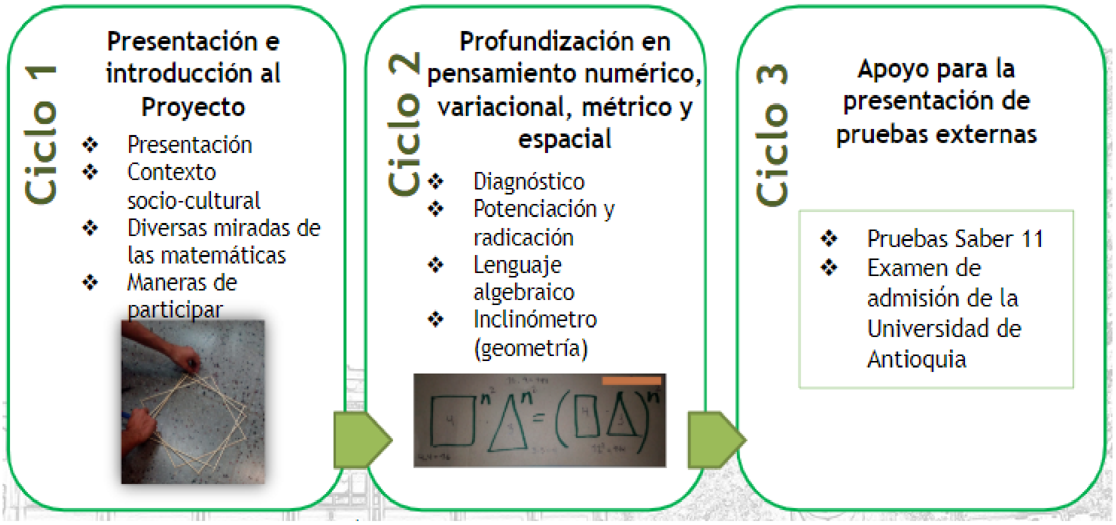


Figura 2. Ciclos iniciales del primer semestre de práctica pedagógica. Figura propia, noviembre 2018.

Estas planeaciones nos permitieron darle un sustento empírico a nuestro problema de investigación, a la vez que nos acercó a una teoría que nos permitiera sustentarlo teóricamente, es decir, al mismo tiempo que desarrollábamos nuestras sesiones de clase y observábamos lo que sucedía en ellas, lo articulábamos a una manera de entender la Educación Matemática. A continuación, presentamos los aspectos que se abordaron en cada uno de los ciclos, con un especial énfasis en las tareas que nos aportaron elementos para nuestra investigación; esto es, aquellas que nos permitieron observar elementos esenciales en las prácticas matemáticas de los estudiantes en el aula.

Ciclo 1: Presentación e introducción al proyecto

[1] El pensamiento aleatorio también hace parte de los cinco pensamientos propuestos por el MEN, pero no fue posible trabajarlo por falta de tiempo.

Este ciclo pretendió, por medio de tres clases de dos horas cada una, realizar la presentación, tanto del proyecto PROFE como de sus participantes, presentar y construir diversas miradas de las matemáticas (a través de juegos lógicos y retos matemáticos) y realizar una serie de acciones encaminadas a reconocer el contexto socio-cultural (ver Figura 3) de cada Institución Educativa (por medio de un ejercicio de cartografía social en el que los estudiantes construyeron un mapa donde mostraban el recorrido que cada estudiante hace desde su casa hasta la Institución Educativa) y explorar las expectativas que se generaron alrededor del inicio del proyecto por parte de los estudiantes, además de la concertación de algunos acuerdos iniciales para cumplir con los objetivos propuestos en las planeaciones de cada sesión de clase.

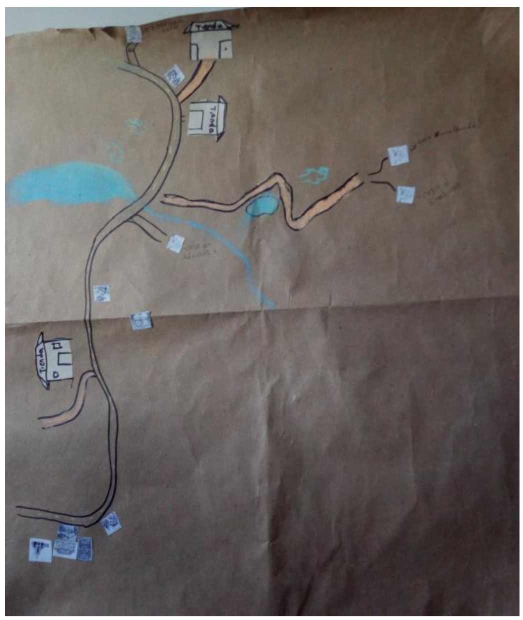


Figura 3. Mapa elaborado por estudiantes. Figura propia, marzo de 2018.

Una de las tareas que nos permitió explorar diversas miradas de las matemáticas fue la que llamamos *Carrera de obstáculos lógicos*, en la cual los estudiantes solucionaron cuatro ejercicios lógicos con la ayuda de palos de madera (ver figura 4). La tarea implicó la *interacción*[2] permanente de los estudiantes, entre ellos y con materiales poco convencionales en el aula de matemáticas, lo cual fomentó el trabajo en equipo, la interacción y se impulsó la creatividad a través del juego.

Figura 4. Juego lógico con palillos. Figura propia, abril 2018.

Esta tarea nos permitió observar algunas relaciones que los estudiantes hacían con su contexto y sus ocupaciones cotidianas a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas. Un ejemplo de ello lo pudimos observar cuando uno de los estudiantes, el cual trabaja a diario en un restaurante con su madre, resolvió de manera rápida un problema que implicaba el movimiento de figuras; al resolverlo, explícitamente argumentó que "*lo he logrado fácilmente debido a que acomodo todos los días las mesas del restaurante de mi mamá y juego con las figuras que se forman al montar una mesa sobre otra*" (Estudiante 1, entrevista abierta, 23 de marzo de 2018).

[2] En la teoría de la Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) la interacción es fundamental en el proceso de objetivación, el cual implica "Ser con otros" (p. 77). En el Referente Conceptual lo abordaremos con detenimiento.

Este hecho nos permitió reconocer cómo los estudiantes tejen relaciones dialécticas entre su contexto y los conceptos matemáticos, habilidades o pensamientos. Resaltamos cómo los conceptos cotidianos, que son producto de la práctica espontánea de las personas en su vida diaria, son insumos importantes para el devenir de la Actividad Matemática en el aula, y por tanto, para la creación de condiciones necesarias para el aprendizaje. Este es un aspecto que profundizaremos en el desarrollo de las siguientes tareas.

A modo general, las tareas en este ciclo fomentaron la motivación de los estudiantes por nuestras clases, propiciaron el trabajo en equipo a través de la interacción e impulsaron la creatividad. Al mismo tiempo, nos permitieron reconocer algunas relaciones, como el suceso con el estudiante mencionado con antelación, que hacen entre su contexto y sus vivencias con conceptos matemáticos para solucionar situaciones al interior del aula de matemáticas.

Ciclo 2: Profundización en pensamiento numérico, variacional, métrico y espacial

Debido a que en los documentos orientadores del currículo del área de matemáticas en Colombia (*Lineamientos curriculares de Matemáticas*, 1998; *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006* y los *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas-Versión 2, 2016)*) se plantea que el pensamiento matemático se subdivide en cinco tipos de pensamiento, a saber, el pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; desarrollamos clases, de dos horas cada una, en las que profundizamos en los pensamientos numérico, variacional, métrico y espacial[3].

La primera tarea que se realizó en este ciclo fue un taller escrito para los pensamientos numérico y variacional, donde pudimos observar, en interacción permanente con los estudiantes, sus habilidades y acercamiento al saber matemático. El taller estaba compuesto por once preguntas de selección múltiple extraídas de simulacros de Pruebas Saber 11 y exámenes de admisión a la Universidad de Antioquia de años pasados en donde se abordaban problemas referentes a los Números Racionales (pensamiento numérico) y las ecuaciones (pensamiento variacional). Escogimos estos temas porque son esenciales para la presentación de pruebas externas, además, porque nos aportaban información para la implementación proyectada para el segundo semestre de nuestra práctica. Esta tarea permitió evidenciar varios aspectos problemáticos en las prácticas matemáticas de los estudiantes y en nuestras prácticas como maestros de matemáticas.

Con respecto a las prácticas matemáticas de los estudiantes, pudimos observar dos situaciones reiterativas: i) no hay una conexión entre los contextos de las preguntas, los conceptos y los algoritmos asociados a estos a partir de los cuales se puede abordar su solución; es decir, en algunas preguntas se evidencia (de manera oral o por medio de un gráfico) una comprensión de lo planteado, pero no se presenta asociación con un determinado concepto matemático para solucionarla (ver figura 5). ii) Los estudiantes utilizan diversas representaciones, símbolos y expresiones para expresarse acerca de un mismo problema matemático y para llegar a su solución (ver figura 6).

[3] El pensamiento aleatorio también hace parte de los cinco pensamientos propuestos por el MEN, pero no fue posible trabajarlo por falta de tiempo.

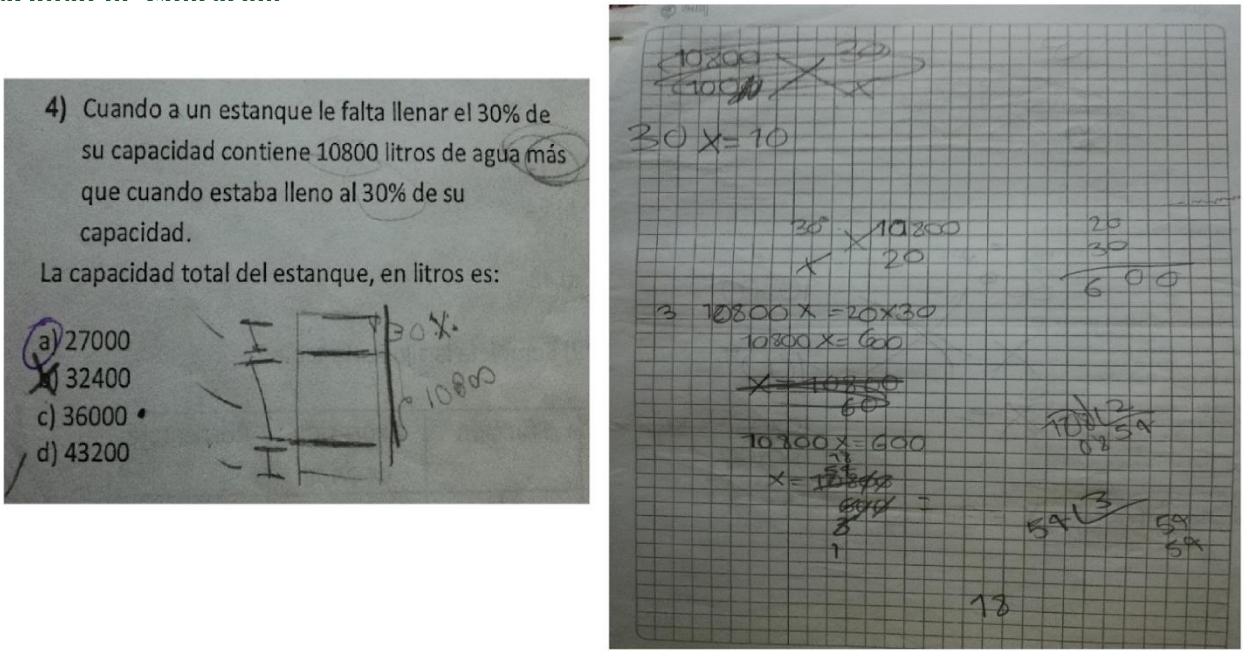


Figura 5. Solución de un estudiante al problema del estanque. Figura propia, abril de 2018.

En la figura se observa, en la parte izquierda, que el estudiante logra realizar un diagrama que ilustre lo que el problema le plantea, es decir, en términos de Obando, Arboleda y Vasco (2014), puede presentar un *instrumento* asociado al *concepto* matemático, lo que muestra una apropiación de construcciones sociales, pero a su vez, deja ver (en la parte derecha) que no consigue hacer uso de unas maneras de proceder en el área de matemáticas que le ayuden a darle solución a la situación que expone el problema. Esto deja ver la desconexión entre un *instrumento* para la acción matemática y otro, o bien, que hay algunos *conceptos* construidos (lo que puede decirse del objeto) pero desconectados de unas técnicas e *instrumentos* que permitan materializarlos (la información acerca de *instrumentos* y *conceptos* la ampliamos en el *Referente Conceptual* del presente capítulo).

En el siguiente caso, observamos que, al proponer a los estudiantes el mismo problema presentado en la figura 5, representan de diferentes maneras la situación; es decir, utilizan distintos *instrumentos y procedimientos* (Obando, Vanegas y Vásquez, 2014) para plantear una posible solución.

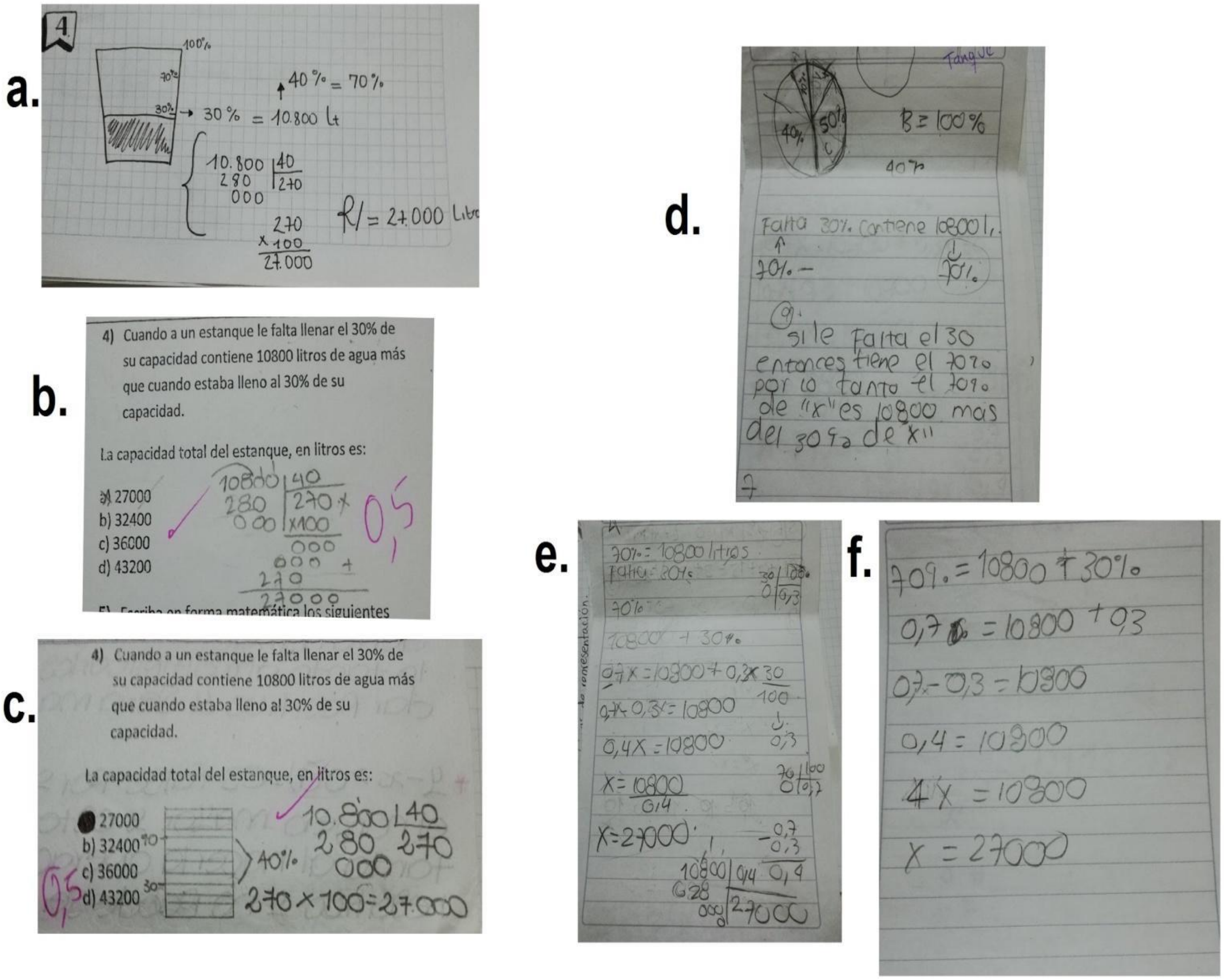


Figura 6: Distintas maneras de solucionar el problema del estanque, por parte de varios estudiantes. Figura propia, abril de 2018.

Así, en la figura 6.a y 6.c se presentan dos ilustraciones que intentan representar un estanque dividido en diferentes porciones a las cuales se les asigna un porcentaje determinado del que surge un procedimiento algebraico que soluciona la situación, en particular en la figura 6.c observamos una representación de la fracción como relación parte-todo. Al mismo tiempo, en la figura 6.d, e y f, podemos observar una representación que no intenta mostrar exactamente el estanque, sino que genera una relación de los porcentajes con respecto a un todo, donde se asocia además unos procedimientos pertinentes. En la 6.b los estudiantes representan la situación por medio del algoritmo de la división, sin necesidad de hacer una ilustración. En general, podemos decir que cada estudiante, de acuerdo con su acercamiento a unas maneras matemáticas de ver el mundo, se relaciona de un modo diferente con el saber, con los *instrumentos y procedimientos* matemáticos. Esto muestra unas maneras diferentes de entender el objeto de conocimiento.

La siguiente tarea que desarrollamos en este ciclo surgió a partir de la pregunta *¿cuántas veces debemos doblar una hoja de papel de 0.1 milímetros de grosor por la mitad para alcanzar la distancia de la Tierra a la Luna?* Se inició con la construcción colectiva (estudiantes-docente) de una tabla que tenía tres columnas (número de dobleces, número particiones y grosor), tal como se ilustra en la tabla 1.

Tabla 1. Doblado hoja de papel. Elaboración propia, mayo de 2018.

Número de dobleces	Número de particiones	Grosor resultante
0	1	0.1
1	2	0.2
2	4	0.4
3	8	0.8
4	16	1.6
. . .	. . .	. . .

Esta tarea permitió hacer una relación entre el número de dobleces y de particiones a través de la potenciación, esto a medida que se dobla una hoja de papel por la mitad. Por medio de preguntas se les propuso a los estudiantes, además, relacionar el número de particiones de la hoja con fracciones, su conversión a porcentaje y a números decimales, como una manera de continuar con el acercamiento a los Números Racionales que inició en la tarea anterior. Cuando se llenó la tabla hasta el doblez número 9 aproximadamente, planteamos a los estudiantes la pregunta de la que surgió la tarea y los invitamos a responderla.

Esta tarea permitió evidenciar que, a pesar de que se construyeron saberes acerca de la potenciación durante la clase para responder la pregunta final, los estudiantes no asocian lo presentado en la tabla con la búsqueda de la respuesta. Además, al igual que en la tarea pasada, fue posible evidenciar que no hay una apropiación de los *conceptos* y *procedimientos* (Obando, Arboleda y Vasco, 2014), más allá de lo reproductivo, es decir, no se logra relacionar la potenciación con el contexto de la tarea.

La siguiente tarea continuó con el tema de potenciación, la radicación y sus propiedades. Consistió, en un primer momento, en presentar a los estudiantes las propiedades de la potenciación y la radicación escritas con un sistema de símbolos poco convencional en el caso de las matemáticas (ver figura 7), y pedirles que, por medio de la búsqueda de valores numéricos otorgados a los símbolos presentados y del tanteo, determinaran la validez de las mismas y las excepciones que puedan tener. En un segundo momento, se les propuso a los estudiantes resolver dos problemas relacionados con las propiedades trabajadas.

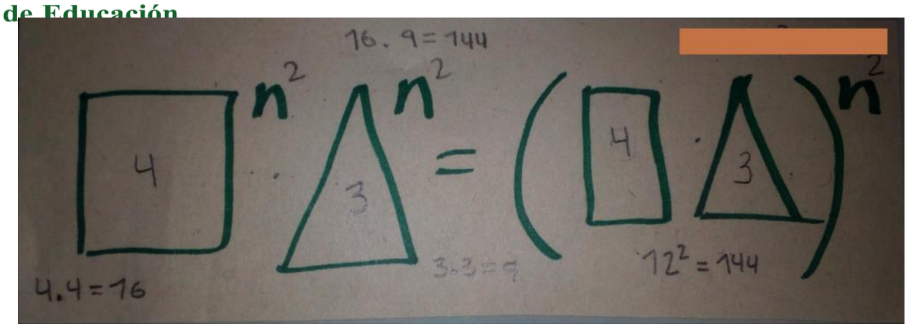


Figura 7. Solución de tarea de propiedades de la potenciación, por parte de un estudiante. Figura propia, mayo de 2018.

En esta tarea pudimos evidenciar la importancia de realizar acciones en el aula donde se puedan establecer relaciones entre los conocimientos previos de los estudiantes (o c*onceptos cotidianos*) y los saberes propios y sistemáticos del área (o *conceptos científicos*), pues ambos se complementan dialécticamente para construir una estructura conceptual clara y cambiante (Kozulin, 2000). Las propiedades de la potenciación y la radicación presentadas comúnmente como algo acabado, que hay que aprenderse de manera exacta, se convirtieron aquí en una construcción que los estudiantes hicieron a partir del análisis de algunos casos, observando características, excepciones y realizando generalizaciones de atributos que sintetizaron en unos *instrumentos* (Obando, Arboleda y Vasco, 2014).

Sin embargo, en el segundo momento de la tarea, cuando les propusimos problemas donde se utilizan estas propiedades construidas en el aula, no pudo evidenciarse una apropiación de estas como *instrumentos* que permiten la acción matemática, aun así, consideramos que la primera parte fue un aporte valioso para esto y que lo que habría que hacer es generar más tareas que permitan que esos *instrumentos* construidos cristalicen su experiencia con los *objetos de conocimiento,* a la vez, que se conviertan en mediadores para el uso de los constructos sociales previos a la hora de enfrentar un *problema.*

A manera de síntesis, lo anterior es una muestra de que en algunas ocasiones las tareas trabajadas en clase se entienden de manera aislada, no se logran construir relaciones fuertes entre los componentes de un objeto matemático en cuestión, con miras a la solución de tareas propuestas en la clase de matemáticas.

La última tarea dentro de este ciclo para abordar el pensamiento métrico y espacial, la denominamos *El Inclinómetro* y la desarrollamos en dos sesiones. En la primera sesión, los estudiantes realizaron la medición de una estructura, lo suficientemente alta (que requiriera más que uno o dos metros para medirla), por medio de herramientas no convencionales de medición (como palos de escobas, hilos, zapatos, cordones, entre otros) encontrados en el aula o la institución. Esta sesión nos permitió reconocer los saberes de los estudiantes, ver y escuchar las ideas que tenían para darle solución a la situación y cómo entendían la medición relacionada con otros conceptos matemáticos como la multiplicación. El siguiente fragmento de video nos permitió evidenciar una de las conversaciones que surgieron en esta sesión:

Entrevista personal: *La medición de una altura tomado el día 31/05/2018*

> *Estudiante 1: de acá hasta arriba tiene treinta y siete adobes, ¿cierto?* (señala el muro, figura 8) *¿Qué pasa? que cada adobe mide diecinueve centímetros… lo que hicimos fue que multiplicamos los diecinueve centímetros por los treinta y siete adobes y entonces eso dio un resultado de setecientos veintiséis centímetros.*
>
> *Estudiante 2: pero es contando también el separador que es de cemento, que mide tres centímetros.*
>
> *Profesor: ¿y por qué multiplicaron?*
>
> *Estudiante 3: porque no daba dividiendo ni sumando….*
>
> *Profesor: ¿Qué es una multiplicación?*
>
> *Estudiante 4: se dobla el resultado.*
>
> *Estudiante 2: una multiplicación es* (piensa un momento), *cuando se cuenta de números en números, entonces, por ejemplo, dos por dos entonces se multiplica dos veces el*

dos... cuando está el dos y lo multiplica por el dos, entonces dos veces el dos le da cuatro, es eso, eso es una multiplicación….

Figura 8. Medición de la altura de una estructura por estudiantes de la I.E.R. Nuestra Señora del Carmen. Figura propia, mayo de 2018.

La indagación por comprender la solución que abordaron los estudiantes frente a esta tarea nos permite concluir que los estudiantes hicieron propios algunos *conceptos* e *instrumentos* matemáticos, relacionados con la medición y la multiplicación, y los utilizaron para facilitar un conteo inicialmente tedioso.

En la segunda sesión los estudiantes realizaron la medición de la misma estructura, pero ahora con una herramienta de medición denominada *inclinómetro*. Esta herramienta fue construida conjuntamente en el aula con la ayuda de materiales de fácil acceso como transportador impreso, pitillos, hilo y cinta (ver Figura 9). El desarrollo de esta tarea permitió observar la manera como se movilizan las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que ponen en tensión sus conocimientos cotidianos con unos conocimientos científicos propios del área. En este caso, la medición como un proceso propio de la cotidianidad, pero también como un proceso exacto, sistemático y cultural, permite el encuentro individuo-sociedad y pone en movimiento la Actividad Matemática.

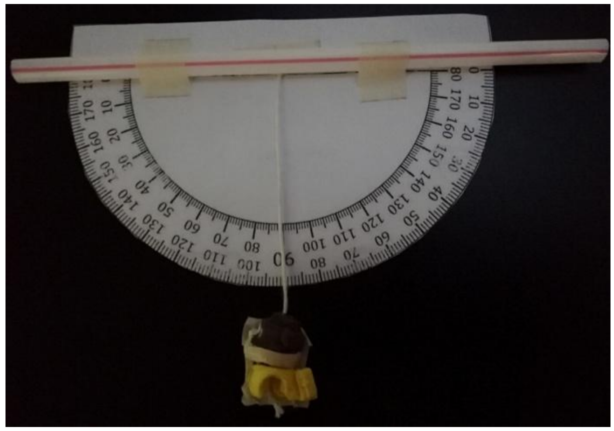


Figura 9. Inclinómetro. Figura propia, mayo de 2018.

El uso del *inclinómetro*, al ser un instrumento que trae consigo saberes matemáticos propios del pensamiento espacial y los sistemas geométricos (MEN, 1998) propicia que los estudiantes se acerquen a ellos de una manera horizontal, es decir, no miran el conocimiento hacia arriba como algo que se debe alcanzar, sino como algo que se construye por medio de la *interacción*, con el *instrumento*, con sus pares y con el medio.

Ciclo 3: Apoyo para la presentación de pruebas externas

En este ciclo desarrollamos unas pocas sesiones de clase orientadas a la preparación de los estudiantes para la presentación de pruebas externas: Prueba Saber 11 (Requisito para la culminación de educación media en Colombia) y examen de admisión a la Universidad de Antioquia.

Este ciclo fue necesario en nuestra práctica pedagógica, pues por un lado posibilitó que los estudiantes se familiarizaran con la presentación de pruebas externas, y por otro lado respondió a las dinámicas y propósitos del proyecto PROFE, el cual surgió con la intención de aportar elementos formativos que permitan a los estudiantes de educación media acceder a la educación superior en nuestro país.

1.4. Caracterización del problema de investigación

Después del análisis a cada una de las tareas implementadas en el primer semestre de nuestra práctica, que se presentó en el apartado anterior, a manera de síntesis, observamos que las primeras sesiones fueron un detonante (hecho que desencadenó acciones) para el desarrollo del proyecto, pues permitieron generar motivación, cuestionamientos y miradas diferentes de las matemáticas (entendiéndolas como algo más que procedimientos ahistóricos e inmóviles). Las sesiones siguientes, pertenecientes al segundo ciclo, nos permitieron caracterizar nuestro problema de investigación gracias a los análisis que de allí surgieron. Enunciamos a continuación siete (7) elementos centrales de dicho análisis:

En primer lugar, evidenciamos una falta de conexión, en las prácticas matemáticas de los estudiantes, entre los *conceptos* y los *procedimientos*. En segundo lugar, observamos que los estudiantes hacen uso de diversas representaciones para referirse a un concepto matemático. En tercer lugar, notamos la presencia de una dificultad para relacionar los conceptos matemáticos con la cotidianidad. En cuarto lugar, el hecho de poner en juego los conceptos cotidianos de los estudiantes con los conceptos científicos del área por medio de una tarea, genera un detonante importante para el aprendizaje. En quinto lugar, las tareas se entendieron de manera aislada, no se logra ver un hilo conductor. En sexto lugar, el enfrentamiento a problemas de la vida cotidiana como la medición es un gran movilizador de la Actividad Matemática, donde la interacción juega un papel fundamental. Por último, el uso de instrumentos como el *inclinómetro* permitió develar conceptos matemáticos implícitos en él.

Nuestro objeto de estudio lo encontramos entonces en las prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) de los estudiantes, más específicamente en las relaciones entre los conceptos matemáticos, los instrumentos y procedimientos, y sus saberes cotidianos.

Escogimos para nuestra investigación los Números Racionales como objeto de conocimiento matemático, pues estuvo presente en muchas de las tareas implementadas en el primer semestre de práctica pedagógica. Así, cuando los estudiantes se relacionaron con los Números Racionales, dejaron ver múltiples conceptos que tenían acerca de ellos. Los conceptos eran propios de su experiencia vivencial, a veces cercanos a los saberes codificados culturalmente (o científicos) y otras veces alejados, pero eso sí, tenían siempre muchas cosas que decir acerca de ellos, podían representarlos de diferentes maneras, vale decir, presentaban diversas construcciones conceptuales con respecto a este objeto de conocimiento. Aun así, consideramos importante abordarlos con más detalle en la segunda parte de nuestra investigación con unas tareas propuestas que permitan profundizar su construcción conceptual.

Por otra parte, los Números Racionales son de gran importancia para el constructo teórico de las matemáticas, pero también para las acciones cotidianas de las personas. Compartimos la apreciación de Obando (2003) cuando dice que los Números Racionales:

> (...) constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana. La importancia de los números racionales en nuestra cultura es indudable: cada día los medios de comunicación nos entregan grandes volúmenes de información, que es cuantificada en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, etc., y una buena comprensión de los números racionales es fundamental para analizarla e interpretarla (p. 158).

En síntesis, nuestro problema de investigación involucró el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, de manera más precisa, de los conceptos cotidianos y científicos que se pusieron en juego en dichas prácticas y de los instrumentos y procedimientos que usaron. Todo esto, en el marco de los Números Racionales como objeto de conocimiento matemático.

En consonancia con los elementos teóricos y empíricos que hemos presentado hasta aquí, la pregunta que orientó esta investigación fue:

¿De qué manera se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales?

Para responder la pregunta de investigación, nos propusimos desarrollar el siguiente objetivo general de investigación:

Analizar la manera cómo se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales.

El objetivo se alcanzó a la par de dos objetivos específicos:

- Identificar los conceptos, instrumentos y procedimientos de las prácticas matemáticas de los estudiantes que se movilizan en un Ambiente de Aprendizaje
- Describir las acciones que movilizan las prácticas matemáticas de los estudiantes a partir de la interacción con otros y del *encuentro* con los Números Racionales.

2. Referente conceptual

En este apartado presentamos los referentes conceptuales que nos permitieron entender y darle sentido a nuestro problema de investigación. Nuestra base teórica la encontramos en la perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática y generamos un diálogo entre la Teoría de la Actividad Matemática, las prácticas matemáticas que de ella surgen, los conceptos cotidianos y científicos emergentes en estas prácticas y el objeto de conocimiento matemático (los Números Racionales).

2.1 Actividad Matemática

La teoría de Actividad Matemática es un camino en construcción, el cual se ha consolidado como una alternativa a los senderos individualistas y *tradicionales* de entender la Educación Matemática. Es el resultado de la apropiación que han hecho profesores e investigadores, desde finales del siglo XX, de la *Teoría de la Actividad*, propuesta por Vigotsky en sus estudios socioculturales en el campo de la psicología soviética, al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esta *actividad* es generadora de conciencia y se encuentra enmarcada en un proceso histórico y cultural, es decir, la emergencia del conocimiento (matemático) no es producto de la pasividad del sujeto que recibe, es el resultado de una herencia no biológica y de las *interacciones* que el sujeto hace con los demás (Kozulin, 2000). Por una parte, la herencia no biológica se encuentra representada en los instrumentos utilizados en la *actividad*, instrumentos que fueron construcciones históricas, es decir, "el individuo no vive tanto en el mundo de su experiencia como en un mundo encaramado en la cima de toda la historia anterior" (Kozulin, 2000, p. 25).Por otra parte, se encuentran las *interacciones* que el sujeto hace con las demás personas en un contexto matemático institucional, pues, el sujeto sólo es consciente de sí mismo en la medida que se reconoce en y a través de los otros.

Decimos entonces que esta *actividad*, entendida a partir de la perspectiva vigotskyana, es un "principio explicativo que permite comprender cómo la cultura permea el proceso de constitución de la conciencia humana" (Obando, Arboleda y Vasco, 2014, p. 78). La cultura juega un papel mediador en los procesos de aprendizaje, a la vez que el individuo hace suyas unas maneras de actuar y entender las matemáticas construidas históricamente, aporta a su resignificación y continua transformación. No se trata entonces de apropiarse de manera exacta de unos saberes ya acabados, sino de establecer unas relaciones subjetivas y dialécticas con ellos. Al respecto, Jaramillo, Obando y Beltrán (2009) nos aportan:

> En una perspectiva sociocultural de la educación, el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser apropiado por los individuos, pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo, en una dialéctica continua con su entorno social, cultural, histórico y político (p. 7).

Es precisamente el resultado de esta apropiación de los aportes de Vigotsky y de los intelectuales rusos de principios de siglo XX para el campo de la educación, lo que se conoce como la perspectiva histórico-cultural o socio-cultural de la educación, la cual es la base filosófica en la que sustentamos esta investigación. Esta perspectiva busca una comprensión del desarrollo humano como una relación permanente entre las acciones del individuo y el entorno social e histórico en el que se sitúa.

En este marco socio-cultural, y a partir de los aportes de Obando, Arboleda y Vasco (2014), entendemos el aprendizaje de las matemáticas como un *encuentro* entre lo social (saber institucional, codificado culturalmente) y lo individual (sujetos que aprenden), los cuales se relacionan dialécticamente por medio de la *Actividad Matemática*. Este *encuentro* lo entendemos a partir de Radford (2018) cuando dice que:

> Partiendo de la idea de que lo que se aprende existe de algún modo ya en la cultura (por ejemplo, el concepto de número o el concepto de función o el de figura), lo que había que hacer quizás era plantear el aprendizaje como un "encuentro", y no como algo que me apropio y al apropiármelo lo hago mío. Queríamos salir de la lógica de la posesión y del propietario privado de las aproximaciones individualistas (p. 66).

Este *encuentro*, además, genera unas estructuras dinámicas objetivas que "permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos" (Radford, 2018, p. 74).

No podríamos hablar de *actividad* sin que se encuentren presentes sus elementos constitutivos, a saber, el objeto/motivo, las acciones y las operaciones (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). El objeto/motivo es un fin que permite orientar las acciones humanas, en nuestro caso lo definimos (con referencia a D´Amore y Radford, 2017) como el *encuentro* de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales. Es este el norte que posibilita la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, es decir, las prácticas se transforman a medida que se actúa hacia él, es un movimiento intencionado.

Las acciones son orientadas por el objeto/motivo. Finalidad y acciones constituyen una unidad dialéctica, esto es, la intencionalidad determina las acciones de los sujetos, a la vez que las acciones se transforman de acuerdo con un horizonte a alcanzar. Las operaciones de la *actividad* pueden entenderse como el conjunto de procesos que permiten que dichas acciones sean concretas, son las posibilidades reales que tienen los sujetos de llevar a cabo las acciones dirigidas a un fin, de acuerdo con el condicionamiento que le genera el momento histórico, el campo institucional, el lugar donde está situado y los recursos que tiene a su disposición, son las condiciones reales para la acción.

Estos tres elementos fundamentales que caracterizan la *actividad*: objeto/motivo, acciones y operaciones, van a ser para nuestra investigación un primer insumo teórico general para el análisis investigativo y los analizaremos como un conjunto, que integramos en nuestra primera categoría de análisis: *acciones movilizadoras de prácticas matemáticas* (la cual presentamos en el Capítulo II-Artículo 1).

A partir de Obando, Arboleda y Vasco (2014) abordamos con detalle las características de esta Actividad Matemática que venimos mencionando, la cual entendemos como el encuentro entre lo social y lo individual. Dicho encuentro lo visualizamos como se presenta en la Figura 10 y lo caracterizamos a continuación.

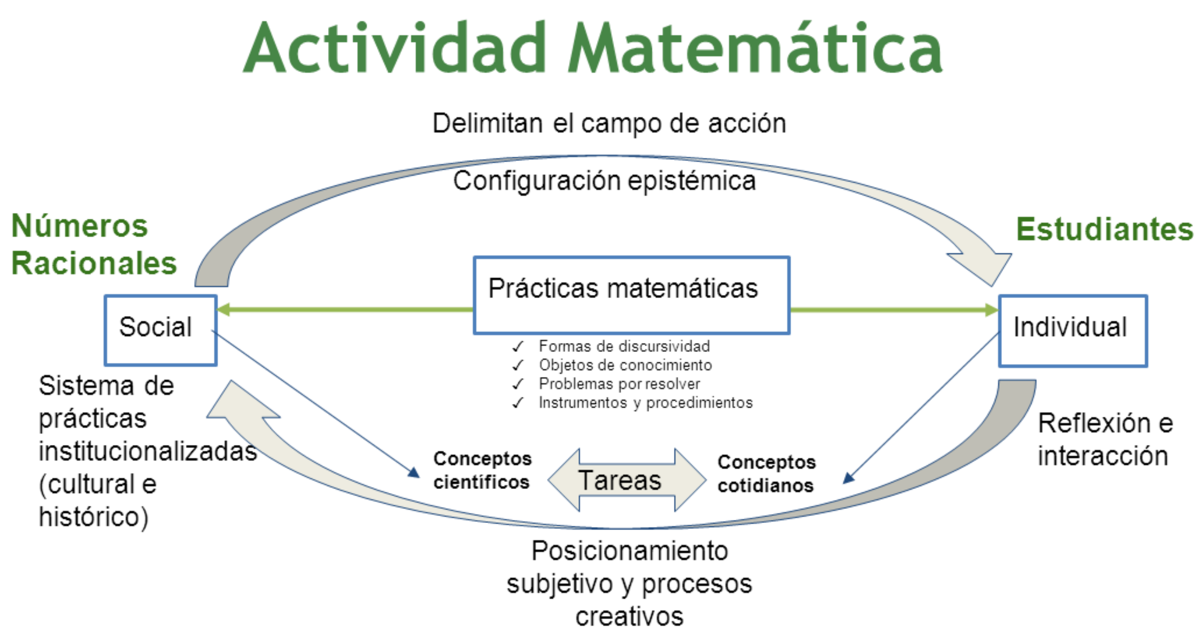


Figura 10.Actividad matemática. Figura propia, noviembre 2018

Entendemos el aspecto social como un Sistema de Prácticas institucionalizadas, propio de un momento histórico y una construcción cultural. El plano social influye en el estudiante proporcionándole y delimitándole un campo de acción, es decir "reglan las formas de acción de los individuos —acción orientada a una finalidad, acción con otros—" (Obando, Arboleda y Vasco, 2014, p. 74), con unos valores y visiones específicos de las matemáticas de acuerdo a una comunidad académica (configuración epistémica). Estas condiciones sociales son las que el individuo, por el momento histórico en que se encuentra, comparte con otros (aunque no los conozca). A su vez, el individuo, en *interacción* con los demás y en permanente reflexión de sus acciones y del conjunto de *instrumentos* que la cultura pone a su disposición, se posiciona frente al saber y genera procesos de creación en el marco de las condiciones del campo de prácticas (posicionamiento subjetivo). Como síntesis de esto, podemos decir que "Lo institucional dispone al individuo en un conjunto de formas de acción socialmente constituidas, que le permiten ser en y desde la cultura a través de su acción" (p. 74). El individuo se encuentra condicionado (más no determinado) por unas maneras de entender el conocimiento socialmente, en sus formas de actuar se pone en juego lo que ha venido siendo (con los otros) y lo que la cultura pone a su disposición.

La *interacción* juega un papel principal en el devenir de la actividad matemática, pues es fundamental para la construcción de sentidos y significados, es el contacto permanente con los demás y con el medio, es lo que lo puede llevar a edificar una conciencia y unos constructos teóricos frente a un saber. "Esta interacción implica entonces sujetos que inter-actúan en constante oposición unos a otros: la acción de cada sujeto siempre constituye una réplica a las acciones de los otros" (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009, p. 9). Es de esta manera como los sujetos se apropian de la cultura a la vez que generan procesos de transformación.

Para Radford (2018), la *interacción* humana es uno de los dos ejes principales de la *actividad*, el otro es la producción. Ambos van siempre de la mano, pues las diferentes maneras como los estudiantes pueden interactuar entre sí y con el saber van condicionadas por unos modos de entender la producción. Para el caso de la educación, la *actividad* tiene como fin la producción de saberes, ligada a una manera también de entenderlos. La *actividad* no se trata solo de hacer cosas juntos, sino de hacia dónde se dirigen las prácticas y los caminos que hay que tomar para llegar al fin, pero, sobre todo, se trata de la manera como los sujetos interaccionan para llegar al resultado.

La *interacción* puede ocurrir de diversas maneras, esto depende de cómo se entienda el proceso de producción de saber, puede ser vertical y pasiva o puede ser horizontal y colaborativa. En una perspectiva educativa donde el estudiante solo es receptor de saberes y no hay cabida a la reflexión de los mismos, la *interacción* entre los sujetos es vertical y pasiva; de otra manera, en una perspectiva educativa donde la cultura y el individuo tienen una relación dialéctica, la *interacción* entre los sujetos es horizontal y colaborativa.

Analizamos entonces, en esta investigación, las *interacciones* que se presentan en las prácticas matemáticas de los estudiantes, la manera cómo estas les permiten encaminar su actividad al objeto/motivo, sus características y el tipo de interacción que se generó en el ambiente de aprendizaje que permitió el acercamiento de los estudiantes a formas culturalmente codificadas de entender los Números Racionales. La *interacción*, por su importancia para la Actividad Matemática y las prácticas matemáticas, representa pues, nuestra segunda categoría de análisis (la cual abordamos con profundidad en el Capítulo II-Artículo 1).

2.2 Prácticas Matemáticas

En el apartado anterior nos acercamos a la noción de Actividad Matemática, esta Actividad está enmarcada dentro de una categoría filosófica que refleja la relación entre el sujeto como ser social y su realidad, además, se refiere a un conjunto de acciones desarrolladas por los sujetos que son socialmente orientadas a un fin intencional y se regulan por un Sistema de Prácticas en su campo de experiencia.

Un Sistema de Prácticas, según Obando (2015), se refiere a un conjunto de condiciones sociales que orienta objetivamente la acción del individuo (orienta, delimita y condiciona las maneras de hacer y pensar) en la medida en que estos se adscriben a una institución específica o a un espacio simbólico de prácticas compartidas por un colectivo, en donde el individuo puede ser en y a partir de la cultura a través de su acción en este campo de experiencias, y por tanto, al participar con otros no se hace una repetición mecánica o una imitación ciega de las prácticas humanas que tiene cabida en dicho espacio. En esta medida, el sistema permite un mínimo de acuerdo entre lo social y lo individual y genera una disposición y unas formas de sensibilidad para la orientación objetiva de la acción.

En el caso de las Matemáticas, una de las matrices de condiciones sociales que hacen posible la Actividad Matemática según Obando (2015), puede ser los constructos teóricos que se encuentran en las demostraciones de los objetos de conocimiento matemático, pues en ellas aparecen proposiciones que se deducen de un sistema axiomático y que cristalizan, a la vez, las maneras en las cuales los sujetos orientaban objetivamente su acción a razón de este fin. En este sentido:

> (…) los objetos de conocimiento matemático están en los signos que los representa, en los enunciados que describen sus propiedades y que los ponen en relación con otros objetos de conocimiento, en los discursos que las personas hacen sobre ellos, en sí, en los sistemas de prácticas matemáticas desde los cuales emergen (Obando, 2015, p. 54).

El Sistema de Prácticas tiene unas fronteras las cuales descansan en los valores y visiones de una comunidad en un momento histórico particular, de allí que las prácticas se organicen de una u otra forma, se utilicen diferentes técnicas, se considere un problema como relevante, entre otros. La apropiación de estos contenidos es dinámica, es decir, constantemente se someten a pruebas, se llevan a la acción y se transforman, de esta manera permite determinada manera de vivir un saber en relación con la subjetividad del sujeto, esto es lo que se conoce como *configuración epistémica*, la cual deja ver y comprender las Prácticas Matemáticas en un momento histórico determinado.

Finalmente, entendemos las Prácticas Matemáticas como las acciones del individuo que emergen del *encuentro* entre lo individual y lo social, a partir de la configuración epistémica y que finalmente, les permite tomar decisiones (del pensar y del hacer) y se pueden caracterizar, como sigue:

> *(…) los objetos de conocimiento* con, y sobre los cuales se actúa, *los conceptos* que se enuncian sobre tales objetos, *los instrumentos* para la acción, *los procedimientos* que permiten tales *instrumentos*, *los problemas* que orientan objetivamente la acción de los individuos, *las formas de discursividad* que permiten poner el hacer en el lenguaje (formas de decir, de escribir, de comunicar), y finalmente, a partir de la *configuración epistémica* que permiten la toma de decisiones sobre el hacer (Obando, 2015, p. 56).

La transformación continua de estas prácticas matemáticas, es decir, su movilización, es lo que constituye nuevo conocimiento matemático, pues el individuo se apropia de unos saberes matemáticos dados (institucionales y construidos socialmente) a la vez que los hace suyos, se posiciona y crea con ellos. Además, estas características, de acuerdo con Jiménez, Zapata y Cautiva (2017), no se movilizan de manera aislada, así, los cambios generados en una de ellas, repercuten, como una especie de *efecto dominó*, en las demás.

En este proceso investigativo retomamos como insumo teórico para el análisis algunos elementos que categorizan la práctica matemática, a saber, *los conceptos* e *instrumentos y procedimientos.* A continuación, presentamos cómo entendemos características, en diálogo con el autor.

Entendemos los conceptos como todo lo que pueda decirse acerca de los objetos de conocimiento. Son constructos simbólicos que traen consigo unas operaciones mentales y que son el producto de un proceso de generalización de atributos, pero también, y, sobre todo, un proceso de síntesis de dichos atributos que lo hacen situarse en relación con otros conceptos en una red sistemática. Entendemos, además, a partir de lo expuesto por Kozulin (2000) que dichos conceptos antes de pasar a ser parte de esa red sistemática, fueron vivenciados (de manera física o en el papel) por personas en momentos históricos dados, esto es, los conceptos fueron primero cotidianos antes de científicos, pero así mismo, los conceptos científicos y sistemáticos generan en las personas unas maneras propias de entender algunas acciones, lo que hace que el concepto pase a ser cotidiano. Es esta la tensión, entre lo cotidiano y lo científico, lo que analizamos en esta investigación y que en el apartado siguiente abordaremos (teóricamente) con detalle.

Estar en continuo contacto con el mundo material implica que se generen diferentes actividades prácticas con el fin de que los individuos puedan apropiarse de los saberes y de la actividad cognitiva (construida históricamente) que descansa en cada objeto material propio de su contexto. Los *instrumentos* son entonces, un mediador entre las construcciones sociales y la apropiación de dichos constructos, por tanto, no son solo signos, símbolos, textos, fórmulas, gráficas, entre otros, pues de ser así “el lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos” (Radford, 2006, p. 113) y, por tanto, son también, las maneras de “leer el mundo” que se encuentran encarnadas en los objetos materiales y simbólicos que cristalizan la inteligencia de la que es portadora tal lenguaje. *Instrumentos y procedimientos*, como característica de las prácticas matemáticas, es la que asumimos como nuestra tercera categoría de análisis en esta investigación (la cual presentamos en el Capítulo II-Artículo 1). Ella nos permite caracterizar las prácticas matemáticas de los estudiantes a partir de los símbolos utilizados en las clases de matemáticas con relación al objeto de conocimiento.

2.3 Conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales

Nuestro punto de interés se sitúa en los *conceptos,* que de acuerdo con Vigotsky (1995), pueden ser científicos o cotidianos. Los *conceptos cotidianos* son los que se encuentran ligados directamente con la experiencia de los estudiantes, a los contextos concretos de la vida diaria, son conceptos espontáneos que surgen de las propias reflexiones de las personas en su vida cotidiana y de las generalizaciones que hagan de ellas. Son conceptos que no aparecen comúnmente en el programa escolar, pero que, aun así, generan herramientas importantes para el entendimiento del mundo. Sin embargo, los conceptos cotidianos son limitados (por su dependencia al contexto pueden ser pertinentes para unos cuantos casos, mas no para una generalidad), pues carecen de sistematicidad y conciencia, por lo que es importante la interrelación, con unos conceptos científicos (avalados por una comunidad académica, con estructuras organizadas y jerárquicas), para generar tensiones que movilicen las prácticas matemáticas. Cuando nos referimos a conceptos científicos no hablamos solamente de aquellos que surgen directamente de una ciencia en específico, sino a aquellos que se caracterizan por poseer una estructura formal, lógica y descontextualizada (Kozulin, 2000). Son aquellas codificaciones culturales que se mantienen en el tiempo y que son el producto de una construcción histórica.

La interrelación entre los *conceptos cotidianos y científicos* es lo que consideramos importante analizar, pues entendemos que la construcción de conceptos en las personas no es un proceso lineal, es un proceso que se da por las diferentes disputas entre lo que saben, conocen y han experimentado, y lo que la cultura les pone *ante sus ojos*. Esta interacción genera una *tensión* permanente entre ellos, la cual permite generar procesos de síntesis hacia la construcción de nuevos conocimientos. Nos referimos por *tensión* a aquella relación conflictiva entre dos partes, de oposición y complemento, que en unos casos se alejan y en otros se acercan, pero que terminan por producir una síntesis (en términos dialécticos).

Es Kozulin (2000) el que rescata estas posturas del trabajo de Vigotsky, profundiza en la idea de los conceptos cotidianos y científicos, explicándolos con detalle. En su texto retoma la analogía que Vigotsky hace acerca de los conceptos cotidianos y científicos como una dualidad inseparable e indispensable para la construcción de una estructura. La estructura representa el constructo teórico producto de la tensión dialéctica entre los opuestos (cotidiano y científico), la cual, crea una síntesis como resultado del conflicto. Al respecto plantea:

> Mientras ascienden lentamente hacia arriba, los conceptos cotidianos allanan el camino para los conceptos científicos que descienden hacia abajo. Crean una especie de estructuras necesarias para la evolución de los aspectos más primitivos y elementales de un concepto, que le dan cuerpo y vitalidad. A su vez, los conceptos científicos ofrecen estructuras para que los conceptos espontáneos […] se desarrollen hacía arriba, hacia la conciencia y empleo deliberado (Kozulin, 2000. p. 65).

Sin embargo, esta estructura no es algo acabado, es por tanto, cambiante en el tiempo. La tensión entre *conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* genera una movilización en las prácticas de las personas que las hace oscilar de un lado (cotidiano) a otro (científico) independiente del punto de partida. La figura 11 es una representación gráfica de esto.

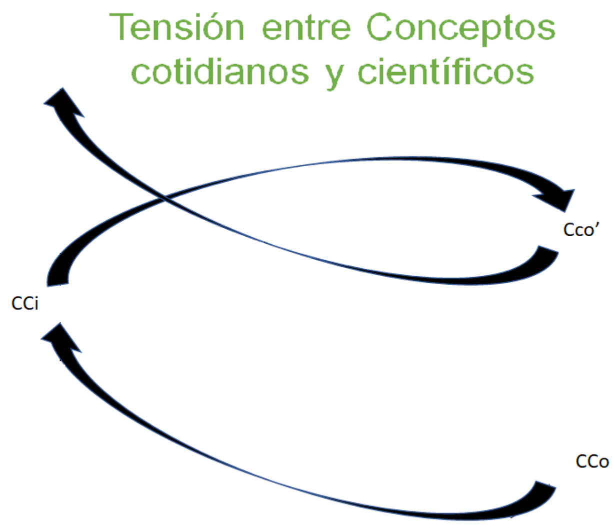


Figura 11. Tensión entre conceptos cotidianos y científicos. Elaboración propia con base en (D´Amore, y Radford, 2017).

Aquí observamos que la movilización de los conceptos ocurre en forma de espiral, lo que quiere decir, que la interrelación *conceptos cotidianos-conceptos científicos* es cambiante y producto de disputas y complementos (*tensión*), es decir, dialéctica.

En el caso de los Números Racionales, decimos que estos albergan en sí unos *conceptos científicos* (sistemáticos e institucionales) que generan dualidad dialéctica con los *conceptos cotidianos* de los estudiantes acerca de dichos números. Ambos *conceptos*, científicos y cotidianos, se complementan dialécticamente por medio de las tareas propuestas, que para nuestro caso, son momentos de un Ambiente de Aprendizaje en el aula de matemáticas. En el apartado siguiente mostramos nuestra comprensión acerca de los Números Racionales y cómo pueden aparecer las tensiones entre *conceptos cotidianos y científicos*. Esto, constituye nuestra cuarta categoría de análisis: *Conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales* (la cual presentamos en el Capítulo II-Artículo 2).

2.4 Números Racionales: ¿cómo entendemos los Números Racionales en nuestra investigación?

Los Números Racionales son el objeto matemático que permitió movilizar el Ambiente de Aprendizaje propuesto en la presente investigación. En nuestra búsqueda en la literatura acerca de ellos encontramos los trabajos de Gairín (1998) y Obando, Vanegas y Vásquez (2006), entre otros, en los cuales no se evidencia de manera explícita la conexión entre Números Racionales y fracción. Es por eso que consideramos necesario explicitar esta conexión con el fin de relacionar nuestra investigación con los significados dados a las fracciones dentro de los Números Racionales.

La conexión mencionada se puede explicitar a partir de la construcción formal propuesta por Acevedo y Arango (2011), la cual establece que:

$$Q := \{\frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0 \ y \ m.c.d.(m,n) \ = 1\}$$

Es decir, un número racional es aquel que se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$, donde *m* es cualquier número entero y *n* es un número entero diferente de cero. Además, el máximo común divisor entre *m* y *n* es uno (1), lo que quiere decir que un número fraccionario solo es racional si está simplificado en su mínima expresión, en caso contrario es una fracción que no puede llamarse número racional.

Esta construcción formal nos permite entender la conexión que existe entre el número fraccionario y los Números Racionales. Podemos decir entonces que todo Número Racional es un fraccionario (aunque no se cumpla de manera inversa), lo que nos da pie a analizarlo a partir de su forma de notación fraccionaria, y por ende, de los significados de las fracciones encontrados en la literatura. Entendemos que la medición es un proceso muy importante a tener en cuenta en los procesos de conceptualización acerca de los Números Racionales pues hace parte de su construcción histórica, pero, para efectos de nuestra investigación, este no fue el centro de estudio (aunque se aborde de manera implícita), debido a que nuestro objetivo no abarca el proceso de conceptualización, sino que se centra en la interacción de los estudiantes a partir de los conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales, como una manera de movilizar sus prácticas matemáticas hacia el acercamiento a dicho objeto matemático.

Cabe mencionar que esta definición no es un resultado aislado y acabado del concepto de Número Racional, pues es precisamente una codificación cultural, hecha por un grupo de personas, que surge de los aportes de distintas culturas (como los egipcios, los babilonios, los griegos, entre otras), las cuales usaron las fracciones con distintos significados y en diversos contextos (Gairín, 1998); además, surge también porque "en el sistema de los Números Enteros se presenta la dificultad de no existir los inversos multiplicativos" (Acevedo y Arango, 2011, p. 211). Podemos decir que es entonces, coherente con lo que hemos abordado en términos teóricos, un saber institucionalizado codificado culturalmente.

De esta manera, hablamos de conceptos acerca de los Números Racionales cuando abordamos las diferentes maneras de representar las fracciones. Cada sistema de representación es un modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante diversos instrumentos (Gairín, 1998). Si el estudiante conoce los diferentes sistemas de representación, entiende sus propiedades y logra hacer una relación entre ellos, puede lograr una comprensión del objeto matemático, o por lo menos construir diversos conceptos acerca de este. Así,

> Puesto que la complejidad de cada concepto matemático no se agota en uno sólo de los sistemas de representación, interesa conocer qué propiedades se ponen de manifiesto con uno

> determinado de esos sistemas, así como qué propiedades se oscurecen o se dificultan con dicho sistema. El uso coordinado de dos a más sistemas de representación facilitará al alumno la plena comprensión de las ideas matemáticas (Gairín, 1998, p. 23).

Es por todo lo anterior, que nuestro foco de atención en los Números Racionales se centra en las diferentes representaciones o diferentes significados que se encuentran en las fracciones, pero, sobre todo, las relaciones que se establecen entre ellas, como una manera de acercarse al objeto matemático desde diversas perspectivas, o mejor, a partir de diferentes conceptos (cotidianos y científicos) que aporten a su comprensión. Retomamos para ello lo planteado en Obando, Vanegas y Vásquez (2006) y Gairín (1998) y lo presentamos a continuación.

-*La fracción como relación parte-todo:* según Gairín (1998) esta interpretación surge cuando “un ‘todo’ (continuo o discreto) se divide en partes congruentes (...) La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (...) El todo recibe el nombre de unidad” (p. 55-56). Además, Obando, Vanegas y Vásquez (2006), también hacen la salvedad de que esta relación implica “la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y el todo” (p. 61).

-*La fracción como una relación multiplicativa:* mencionada por Gairín (1998) como *la fracción como operador.* Se refiere a considerar la fracción como una “función de cambio”, la cual, mediante tratamientos operativos, transforma un número o representación gráfica dada en un segundo número o representación gráfica (Gairín, 1998, p. 52). Para Obando, Vanegas y Vásquez (2006) entender la fracción como una relación multiplicativa se deriva de un proceso de medición y se relaciona con la consideración de la fracción como relación parte - todo en el sentido que "la relación multiplicativa "n veces…", define la relación inversa "n-ésima parte de…" y viceversa" (p. 61).

-*La fracción decimal:* existen varias disertaciones acerca de lo que es una fracción decimal, en primer lugar, se puede entender como una fracción que tenga como denominador una potencia de 10. En segundo lugar, se puede entender como "un caso particular de la relación Parte-Todo, cuando la unidad es dividida en 10, 100, 1000, etc. partes." (Obando, Vanegas y Vásquez, p. 65). En tercer lugar, se puede entender como el resultado de efectuar el cociente indicado que también denotan las fracciones. Y, por último, se pueden entender como "otra forma de representación simbólica de las fracciones en las cuales el denominador es un múltiplo de 10" (p. 65). Así, para Obando, Vanegas y Vásquez (2006), las fracciones decimales son todo lo anteriormente descrito, pero, ante todo, son un "sistema notacional con reglas y lógica propia" (p. 66).

- *La fracción como cociente indicado*: mencionada por Gairín (1998) como *la fracción como cociente.* Se refiere ainterpretar las fracciones como "como el reparto igualitario de *a* unidades en *b* partes (con $a<b$)" (Gairín, 1998, p. 47) en el cual se quiere conocer el tamaño de cada parte que resulta de distribuir *a* unidades en *b* partes iguales en el caso de que la fracción sea $\frac{a}{b}$, es decir, conocer el cociente de esta situación de reparto.

En la escuela, generalmente el acercamiento de los estudiantes a los Números Racionales se da a partir de las fracciones. Así, los ejemplos que suelen darse al abordar inicialmente este objeto dan a entender que las fracciones, más que ser una relación cuantitativa entre magnitudes, es la separación de dos números naturales separados por una rayita (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006). Así, los conceptos cotidianos que se construyen a partir de situaciones como partir una torta, se sienten alejados de los sistemas formales (conceptos científicos) presentados a un nivel escolar más avanzado. Los estudiantes sienten confusión al realizar operaciones algorítmicas (suma o resta de fracciones, por ejemplo), pues no comprenden por qué se hace de esa forma y no simplemente como una operación entre Números Naturales.

En este sentido, la comprensión y diferenciación de los Números Racionales como un sistema con unos *instrumentos y procedimientos* propios puede abordarse a partir de situaciones que generen en los estudiantes el surgimiento de *conceptos cotidianos* de sus diferentes representaciones y significados (presentados antes), es decir, aquellas nociones que toman sentido a partir de la actividad práctica, del contacto con otros y con lo material. Esto, puesto en *tensión* con los *conceptos científicos* presentados a los estudiantes en forma de signos (*instrumentos)* y de unos problemas por resolver permite la conformación de la unidad dialéctica necesaria para el acercamiento a las particularidades del objeto matemático. Así, es posible entender la *fracción como relación parte-todo, como relación multiplicativa, como fracción decimal y como cociente indicado*, si las tareas propuestas para el aprendizaje permiten comprender sus características particulares, relacionarlas entre sí y propiciar acciones espontáneas en complemento con saberes institucionalizados.

Para finalizar, en coherencia con Obando, Vanegas y Vásquez (2006), en el momento de trabajar con sistemas numéricos diferentes al de los Números Naturales, cobra suma importancia proponer

> (...) situaciones que permitan la construcción de los múltiples sentidos y significados de cada uno de ellos. Así por ejemplo, el estudio de los números racionales debe permitir la construcción

> de los sentidos y significados relativos a la medida, fracciones, razones, proporciones, porcentajes, y campo de cocientes (p. 56).

En nuestro caso particular, la importancia mencionada radica, en primer lugar, en el hecho de entender el sistema de los Números Racionales como un sistema complejo del cual surgen varios *conceptos cotidianos* o *científicos* acerca del objeto matemático en cuestión. Y, en segundo lugar, en el hecho de que entre los *conceptos* mencionados se establecen distintas relaciones, las cuales es necesario hacerlas explícitas y fortalecerlas con el fin de evitar que esos *conceptos*, los cuales componen el sistema numérico, se perciban de manera aislada.

3. Fundamentos metodológicos

En este apartado presentamos los fundamentos metodológicos. Empezamos por caracterizar el enfoque cualitativo que orienta esta investigación, seguido de unas técnicas e instrumentos de recolección de datos coherentes con el mismo.

Presentamos, además, las Instituciones Educativas en las cuales se desarrolló un trabajo de campo basado en un Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015), el cual consistió en la creación de una microsociedad en donde las acciones de los estudiantes están en función del encuentro con maneras culturalmente codificadas de pensar en matemáticas.

Por último, presentamos los métodos con los cuales se realizaron los análisis en la investigación, el análisis paralelo y el análisis detallado. Y finalmente, presentamos los aspectos éticos de nuestra investigación, los cuales le permiten al lector hacer una lectura confiable, pues sus análisis son basados en hechos verídicos soportados en evidencias tanto físicas como virtuales.

3.1 Enfoque de investigación

Asumimos nuestra investigación bajo un Enfoque Cualitativo de investigación ya que, basados en los planteamientos de Martínez (2011), en nuestra investigación nos preocupamos por unas personas (estudiantes) situadas en un contexto histórico-cultural particular, quienes, en interacción con todos los elementos que componen nuestro Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015) y en permanente reflexión de sus acciones, se posicionan y generan procesos de creación acerca de un objeto de conocimiento (los Números Racionales en este caso). Además, como investigadores interactuamos con los estudiantes de manera dialógica, comunicativa y empática, para explorar, describir y comprender cómo la *tensión* entre los *conceptos científicos y cotidianos* moviliza prácticas matemáticas en nuestro Ambiente de Aprendizaje. Lo anterior se hizo necesario porque, en coherencia con Obando (2015) (apoyado en los planteamientos de Bourdieu, 2007), “el investigador no es un observador pasivo de las prácticas educativas, es participante de ellas para poder comprenderlas, e incluso, para transformarlas” (p. 72).

De manera detallada, basados en los planteamientos de Hernández, Fernández y Baptista (2010), podemos caracterizar nuestra investigación con un Enfoque Cualitativo porque, en primer lugar, seguimos un proceso inductivo para definir nuestro problema de investigación, es decir, exploramos, describimos y analizamos lo observado en las tareas iniciales de nuestra práctica, permeados por posturas sociales de la Educación Matemática, a medida que nos relacionamos con perspectivas teóricas coherentes con nuestras observaciones y afinidades (Actividad Matemática en nuestro caso), las cuales nos aportaron, también, elementos importantes para la consolidación de nuestro problema de investigación. En este sentido, nuestra pregunta de investigación surgió de la construcción del problema de investigación como un proceso de constante análisis.

En segundo lugar, los instrumentos que usamos para recolectar los datos fueron definidos con el objetivo de “obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes” de la investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 9), en este sentido, por medio de ellos (los instrumentos), indagamos por los significados construidos, reflexiones y posicionamientos acerca de los Números Racionales mediante observaciones, fotografías, diálogos y registros escritos.

En tercer lugar, en la investigación con enfoque cualitativo “resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 9), aspecto fundamental en nuestros análisis de datos recolectados, pues es mediante la interacción con los otros y con el medio que se movilizan las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Por último, como investigadores tuvimos un papel activo en todas las tareas que propusimos a nuestros estudiantes, así, por ejemplo, asumimos las funciones del Banco Racional en el Ambiente de Aprendizaje propuesto. En este sentido Hernández, Fernández y Baptista (2010), plantean que "el investigador se introduce en las experiencias de los participantes y construye el conocimiento, siempre consciente de que es parte del fenómeno estudiado" (p. 10).

3.2 Producción conjunta de registros y datos

Los datos recolectados en nuestra investigación provinieron de tres fuentes principales: los estudiantes, la literatura y nuestras observaciones como investigadores. La recolección de los datos la realizamos mediante las técnicas definidas como documento, entrevista abierta y observación participante, y los instrumentos definidos respectivamente para cada técnica como fichas, notas de campo y material audiovisual. En el caso de los investigadores, utilizamos la técnica de observación participante acompañada de los instrumentos notas de campo y material audiovisual. En el caso de los estudiantes utilizamos las técnicas documentos y entrevista abierta, y las fichas y material audiovisual como instrumentos. En el caso de la literatura, usamos el documento como técnica y la ficha bibliográfica como instrumento. En la figura 12 se observan todas las técnicas e instrumentos usados en nuestra investigación.

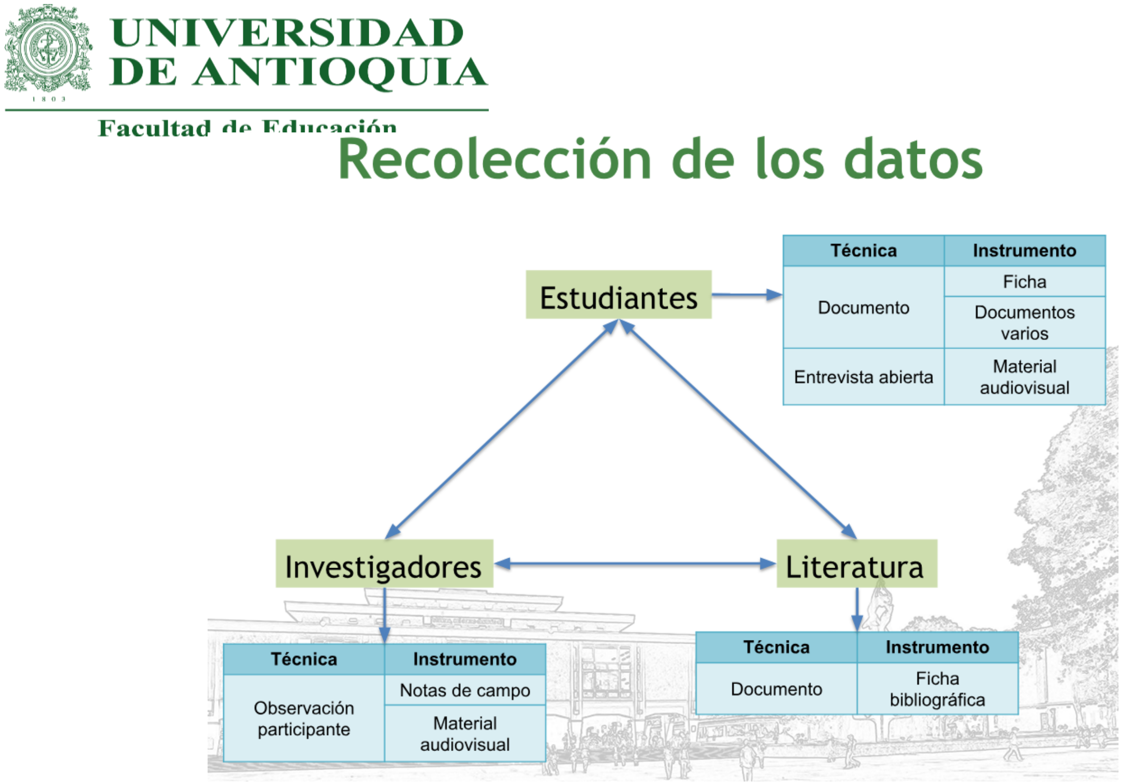


Figura 12. Técnicas e instrumentos usados para recolectar los datos en nuestra investigación. Figura propia, noviembre de 2018.

A continuación, definimos las técnicas usadas en nuestra investigación.

- **Documento:**

Lo entendemos, a partir de Alves-Mazzotti y Gewandsznajder (1998), como cualquier tipo de registro escrito que sea fuente de información para comprender un proceso en curso o para reconstruir una situación pasada. En este sentido, consideramos como documentos para esta investigación los siguientes: las fichas realizadas por los estudiantes en las sesiones de clase, las fichas utilizadas por los investigadores para organizar la información proveniente de la literatura y los documentos varios no planeados surgidos en las sesiones clase.

- **Observación participante:**

Según Hernández, Fernández y Baptista (2010) la observación, en un enfoque cualitativo, puede tener diferentes niveles de participación, a saber: no participación, participación pasiva, participación moderada, participación activa y participación completa. Las dos últimas son las más deseables para la observación en una investigación con enfoque cualitativo.

En nuestro caso, hicimos uso de la participación activa, donde, según los mismos autores, el investigador "participa en la mayoría de las actividades; sin embargo, no se mezcla completamente con los participantes, sigue siendo ante todo un observador" (p. 417). Esta observación participativa requiere de escuchar a los estudiantes, de utilizar todos los sentidos y de poner atención a los detalles. Además, requiere disciplina para plasmar en unos instrumentos las observaciones realizadas. Tales instrumentos son para nuestro caso: las notas de campo y el material audiovisual

- **Entrevista abierta:**

En general, la entrevista la entendemos, a partir de Hernández, Fernández y Baptista (2010), como "una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)" (p. 418) y la consideramos abierta porque los investigadores somos quienes manejamos su contenido de una manera flexible, bajo un esquema general de contenidos.

De acuerdo con las técnicas presentadas, definimos a continuación los instrumentos pertinentes a ellas para la recolección de registros y datos en la implementación de nuestra investigación

- **Fichas:**

De acuerdo con lo presentado antes, las fichas son documentos escritos que nos permiten reconstruir una situación del pasado. En nuestro caso utilizamos dos tipos de fichas; unas que diligenciaron los estudiantes en algunos momentos del Ambiente de Aprendizaje (y otras que denominamos fichas bibliográficas, usadas para recopilar, organizar y detallar la información relevante, proveniente de la literatura.

Las fichas que diligenciaron los estudiantes tuvieron la estructura que se observa en la Figura 13 y las diseñamos con el fin de que los estudiantes organizaran el registro, de manera detallada, de las transacciones diarias de las empresas a las que pertenecían en la microsociedad. Además, nos permitieron observar los *procedimientos* matemáticos que los estudiantes hicieron, para analizarlos a la luz de nuestra teoría.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ser Maestro
Nuestra esencia

REPORTE DIARIO DE MOVIMIENTOS - PROYECTO PROFE

Institución Educativa:	
Grado:	
Nombre de la empresa:	
Fecha:	

Describe detalladamente la manera cómo se realizaron las transacciones (ventas, alquiler de herramientas, compras) de tu empresa hoy. Escribe la siguiente lista por cada transacción hecha.

- **Tipo de transacción:**
- **Denominaciones de los billetes intercambiados:**

- **Descripción:**

Escoge dos de las transacciones realizadas hoy y escribe una forma alternativa para hacerla.

Figura 13. Fichas que diligenciaron los estudiantes al interior de la microsociedad. Figura propia, agosto de 2018.

- **Notas de campo:**

Los investigadores realizamos unas Notas de Campo, Entendidas a partir de Hernández, Fernández y Baptista (2010) como aquellos registros escritos que “señalan lo importante, contienen las impresiones iniciales y las que tenemos durante la estancia en el campo, documentan la descripción del ambiente, las interacciones y experiencias” (p. 380). En este sentido, diseñamos la ficha presentada en la figura 14 para registrar nuestras vivencias al interior de la microsociedad.

NOTAS DE CAMPO* – MATEMÁTICAS – PROYECTO PROFE			
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA	INSTITUCIÓN EDUCATIVA:	MAESTRO:	Ser Maestro Nuestra esencia
	GRADO: NÚMERO ASISTENTES:	FECHA:	
	Hora inicio:________ Hora final: _________	CÓDIGO: (Inicial nombre/número de planeación)	
¿Qué se hizo?		Observaciones generales	
Sensaciones e interpretaciones del investigador		¿Qué aportan a nuestra investigación?	
¿Qué problemas o situaciones inesperadas de presentaron?		¿Qué preguntas me generan?	
Material recolectado (fotografías, videos, audio, talleres…)		Acercamientos teóricos	

Figura 14. Ficha usada para recolectar las notas de campo. Figura propia, agosto de 2018.

En esta ficha, los investigadores registramos cada sesión de clase aspectos relacionados con las observaciones generales del día, las sensaciones que nos generaron, los aportes que esto tiene a nuestra investigación, los problemas o situaciones inesperadas que se presentaron, las preguntas que quedan por resolver y los posibles acercamientos teóricos.

- **Material audiovisual:**

Las fotografías, vídeos y audios (provenientes de las entrevistas abiertas), las agrupamos todas como un mismo instrumento para recolectar datos al interior de la investigación, el cual denominamos como material audiovisual. Este instrumento lo entendemos a partir de Hernández, Fernández y Baptista (2010) como “imágenes (fotografías, dibujos, tatuajes, pinturas y otros), así como cintas de audio o video generadas por un individuo con un propósito definido.” (p. 433). Estas nos permitieron evidenciar diversas situaciones que se presentaron en el aula de clase y que son relevantes para nuestra investigación.

3.3 Población y contexto

El proceso de investigación se llevó a cabo en tres Instituciones Educativas Rurales, con estudiantes de educación media (grados décimo y undécimo), ubicadas en los municipios de San Luis y Girardota del departamento de Antioquia. A continuación, presentamos las instituciones y los grupos de estudiantes con detalle.

3.3.1 Contexto

Institución Educativa Rural El Prodigio

El corregimiento El Prodigio del municipio de San Luis, se encuentra ubicado en el oriente de Antioquia y cuenta con alrededor de mil habitantes entre su zona urbana y rural. Su población se dedica en su gran mayoría a la ganadería, el turismo o el trabajo en minas de mármol. Es una zona montañosa, con clima cálido y con hermosos paisajes. Una población fuertemente golpeada por la violencia a principios de siglo, donde se presentaron tomas de grupos armados y desplazamientos masivos.

Figura 15. Institución Educativa Rural El Prodigio. Figura propia, octubre 2018.

La institución educativa es de carácter oficial y mixto, cuenta con los grados de preescolar a undécimo, con el modelo Escuela Nueva. Sus instalaciones fueron remodeladas en el año 2015 con la ayuda del Grupo Argos. La implementación se llevó a cabo con un grupo de 16 estudiantes, pertenecientes a décimo y undécimo grado (15 a 18 años), al interior de su jornada escolar, con el permiso y colaboración logística de los docentes de la institución. Los estudiantes, protagonistas de la investigación en esta institución, estuvieron siempre muy conectados y participativos en las sesiones de clase, en medio de las dificultades que presentó el contexto, altas temperaturas y apagones, se pudieron realizar agradables espacios de aprendizaje. En la Figura 15 se observa una fotografía de la Institución.

Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen

La Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen está ubicada en la vereda Encenillos del municipio de Girardota. Esta vereda se localiza en lo alto de una de las hermosas montañas del valle de Aburrá y se caracteriza por su biodiversidad vegetal, en la que se encuentran cultivos como el café, el plátano, la caña de azúcar, varios tipos de cítricos, entre otros, que le dan vida al paisaje y generan un sustento alimenticio y económico para muchas de las personas que allí habitan. En la Figura 16 podemos observar una fotografía de la Institución.

Figura 16. Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen. Tomada de http://www.iensdelcarmen.edu.co/index.php

La institución educativa es de carácter oficial y mixto, cuenta con los grados de preescolar a undécimo. Nuestra implementación se desarrolló con 20 estudiantes del grado décimo, con los cuales se trabajó dos horas semanales. Los estudiantes de esta institución se mostraron siempre interesados por construir espacios al interior del aula en cada una de las sesiones, en los que fuera posible compartir ideas y construir nuevos conocimientos con sus compañeros.

Institución Educativa Rural Altavista

La Institución Educativa Altavista, está ubicada en la vereda Altavista del municipio de San Luis, Antioquia; la cual hace parte de un contexto rural donde las principales fuentes de empleo provienen de las empresas de extracción de recursos naturales (como cal o cemento), del turismo propiciado por la riqueza hídrica presente en la región y de empleos informales (como lavaderos de carros y mototaxis).

Figura 17. Institución Educativa Rural Altavista. Figura propia, octubre 2018.

La Institución es de carácter oficial y mixto, y en su sede principal confluyen estudiantes de la misma vereda y otras veredas del municipio. Esta cuenta con todos los grados pertenecientes a los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media. Nuestra implementación se desarrolló con 22 estudiantes del grado décimo y 14 estudiantes del grado undécimo, con los cuales se trabajó de manera conjunta durante dos horas a la semana en la jornada contraria a la jornada escolar de la Institución. En la Figura 17 podemos observar una fotografía de la Institución.

3.3.2 Población

La implementación se llevó a cabo con estudiantes pertenecientes a décimo y undécimo grado (15 a 18 años), al interior de su jornada escolar (en el caso de la I.E.R. El prodigio) o en jornada contraria (en el caso de la I.E.R. Nuestra Señora del Carmen y la I.E.R. Altavista), con el permiso y colaboración logística de los docentes de las instituciones.

Los estudiantes, protagonistas de la investigación, se mostraron siempre muy participativos, con deseo de aprender y de construir en el encuentro con sus compañeros y con el medio. Reconocieron que las clases les ayudaban a fortalecer su formación en matemáticas y se tornaban divertidas y amenas. Además, en medio de las dificultades que presentaron los contextos, se pudieron realizar agradables espacios de aprendizaje.

3.4 Trabajo de campo

Para el desarrollo de nuestra investigación, implementamos un Ambiente de Aprendizaje, entendido como un espacio en la clase de matemáticas en el que se promueve la participación, la interacción y la reflexión para la construcción del conocimiento matemático (Parra-Zapata, 2015), el cual consistió en la creación de una microsociedad al interior del aula que fomentó la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, a partir del *encuentro* (Radford, 2018) con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006).

Nos referimos como microsociedad, al espacio simbólico que se generó en el aula y que reprodujo, a pequeñas proporciones, algunas relaciones (económicas, sociales, políticas, entre otras) y algunas maneras de actuar en la sociedad; con el fin de traer elementos de lo cotidiano al aula de matemáticas. Para este caso se trató de relaciones económicas mediadas por un papel moneda y donde cada persona cumplió con unas funciones determinadas.

El papel moneda, construido por los investigadores (Billetes Racionales, figura 18), presentó diferentes denominaciones establecidas a partir de las notaciones que surgen de las diferentes representaciones de los Número Racionales. Las denominaciones de los Billetes Racionales, en *MatePesos,* son: 1/20 (0.05), 1/10 (0.1), 1/5 (0.2), 1/2 (0.5), 1 (2/2), 1.5 ($1\frac{1}{2}$) y 2 (18/9).

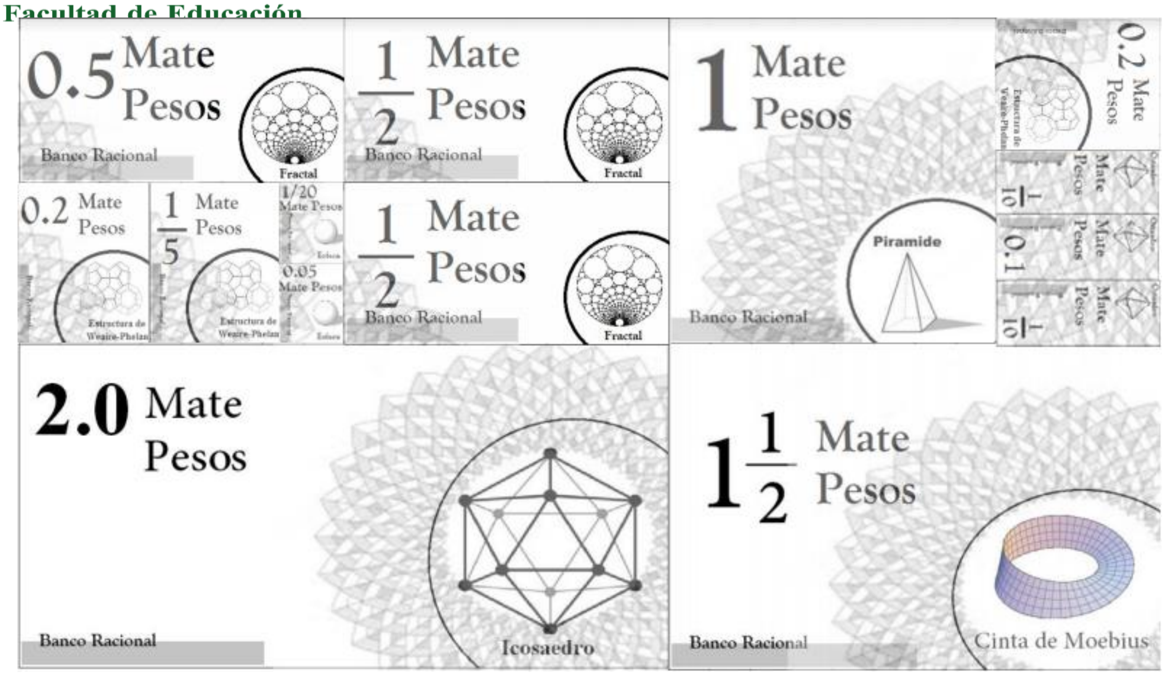


Figura 18. Billetes Racionales. Figura propia, octubre de 2018.

Además, como se observa en la figura anterior, el área que ocupa cada Billete Racional es proporcional a su denominación; por ejemplo, el área del billete de *1 MatePesos* es igual a cinco veces el área del billete de *0.2 MatePesos.*

Así mismo, la microsociedad estuvo conformada por grupos de trabajo que constituyeron empresas, las cuales tuvieron diferentes funciones que giraron en torno a la construcción de cinco diseños con palos de paleta (ver figura 19) y fueron definidas por los investigadores, a saber: *Depósito, Carpintería y ferretería, Empresa de ejercicios, Empresa de patentes* y *Banco Racional*. Los estudiantes asumieron las funciones según la empresa a la que pertenecían y el *Banco Racional*, estuvo a cargo de nosotros como profesores orientadores de las tareas.

Figura 19. Diseños con palos de paleta elaborados por los estudiantes. Figura propia, octubre de 2018.

A continuación, presentamos las funciones que tuvieron las empresas:

- **Empresa de ejercicios:** Esta empresa se encargó de comercializar ejercicios de matemáticas, propuestos por los investigadores, para que los estudiantes los resolvieran y obtuvieran dinero (*MatePesos*) como forma de pago. Los ejercicios tuvieron precios diferentes, según el nivel de dificultad con los que se catalogaron.

Las ganancias para la empresa fueron del 25% por cada ejercicio resuelto, el 75% restante fue el pago para el estudiante que lo realizó. El *Banco Racional* se encargó de proveer el dinero del pago por cada ejercicio resuelto.

- **Carpintería y ferretería:** Esta empresa se encargó de vender los cables, diodos LED, interruptores y tornillos, usados en las construcciones de los diseños con palos de paleta, además, alquiló las herramientas que fueron necesarias para realizar cada uno de estos. En los casos en que algún estudiante necesitó alguna herramienta, la empresa prestó el servicio de carpintería, es decir, cortó y/o perforó los palitos, y cobró un precio diferente (definido por los miembros de la empresa) por esto.

- **Depósito:** Esta empresa se encargó de vender palos de paleta, pinturas, pegamento, silicona líquida, cartón y los cauchos gruesos, usados en las construcciones de los diseños con palos de paleta.

- **Empresa de patentes:** Esta empresa vendió las patentes (ver: Anexo A) de los diseños de las manualidades con palos de paleta que los estudiantes construyeron, además, diseñó y propuso nuevas patentes, con la condición de que involucraran los mismos materiales usados en las patentes establecidas.

Al interior de la microsociedad, establecimos un conjunto de *reglas generales* que permitieron que el Ambiente de Aprendizaje se desarrollara de una manera adecuada. A continuación, las presentamos.

- **Reglas generales:** 1) Los miembros de las empresas deben asumir diferentes roles, definidos por ellos mismos. Con esto se garantiza que se cumpla con las funciones establecidas en las clases (registrar de manera escrita los pagos, devolver dinero, trabajar en la construcción del diseño, entre otras). 2) Las ganancias de las empresas se dividen según como lo estipulen sus miembros. 3) La Empresa de ejercicios paga de manera individual a quien solicite hacer un ejercicio y lo resuelva de manera correcta. 4) El *Banco Racional* define que cada empresa deberá pagar un impuesto del 10% por las ganancias recibidas al día. 5) Todas las transacciones que se realicen en el día deben quedar escritas en el instrumento de recolección de datos definido para los estudiantes.

El Ambiente de Aprendizaje expuesto se dinamizó por medio de siete sesiones de clase, como se muestra en la figura 20.

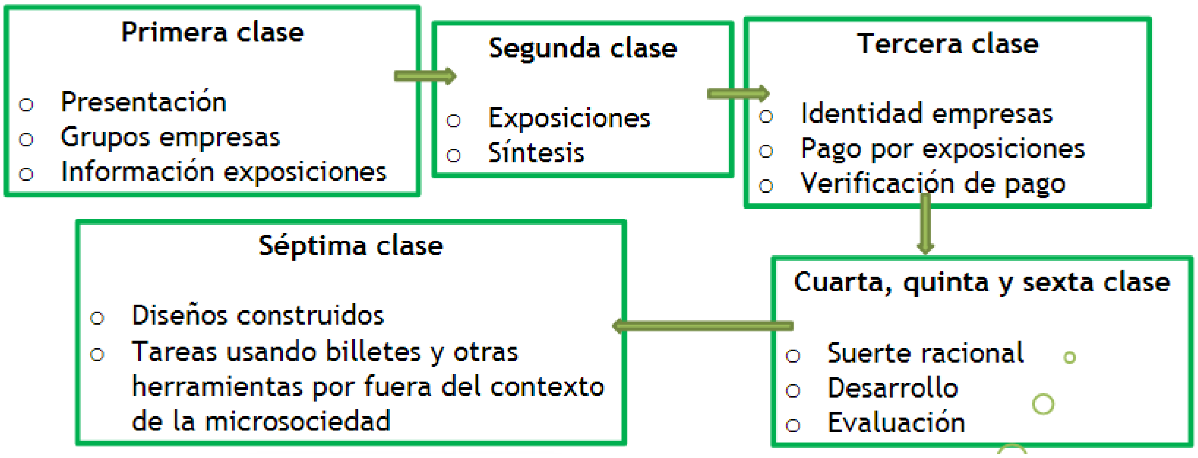


Figura 20. Momentos del Ambiente de Aprendizaje. Figura propia, noviembre de 2018.

Primera clase

1. Presentar el Ambiente de Aprendizaje propuesto.

2. Definir los grupos que conformarán las empresas.

3. Repartir información para realizar exposiciones en la segunda clase, acerca de los *procedimientos* con algunas representaciones de los Números Racionales (fracciones, porcentajes, números mixtos, decimales y razones). Esto, con el fin de que los estudiantes adquieran herramientas para que se propicie un buen Ambiente de Aprendizaje.

Segunda clase:

1. Presentación de exposiciones

2. Síntesis de los aspectos más importantes abordados en las exposiciones, con énfasis en las operaciones con las distintas representaciones.

Tercera clase:

1. Cada equipo crea la identidad de su empresa: nombre, logo, slogan y define la distribución de labores.

2. El *Banco Racional* paga por el trabajo de las exposiciones a cada empresa (3 *MatePesos* por cada estudiante).

3. Cada empresa debe verificar por escrito si el pago efectuado por el *Banco Racional*

fue correcto. Se deben hacer los procedimientos correspondientes para saber cuánto dinero le corresponde a cada integrante en caso de que quisieran repartirlo igualitariamente o según los criterios que establezca la empresa. Esto se sustenta al final de la clase.

4. Se les invita a que empiecen a construir el diseño que quieran.

Cuarta, quinta y sexta clase:

Estas sesiones de clase se desarrollarán con la estructura que se presenta a continuación, teniendo en cuenta, claramente, las diferencias por los avances respectivos.

1. Suerte Racional: consiste en unas tarjetas de la suerte donde se incluyen impuestos, ganancias o situaciones extraordinarias al interior de la microsociedad (Ver: Anexo B).

2. Desarrollo: construcciones, intercambios, pagos, entre otros.

3. Pausa activa: se desarrollarán juegos matemáticos no necesariamente relacionados con los Números Racionales, como manera de esparcimiento y desarrollo del pensamiento lógico matemático de una manera alegre y dinámica.

4. Desarrollo: Construcciones, intercambios, pagos, entre otros.

5. Evaluación: Revisión de documento escrito donde los estudiantes consignan las transacciones diarias de sus empresas. Entrevista abierta donde se evidencie las maneras en que los estudiantes construyen conceptos acerca de los Números Racionales

Séptima clase:

En esta clase realizamos algunas tareas de cierre, con las cuales se pretendió que los estudiantes se relacionaran con los Números Racionales al margen del contexto de la microsociedad.

3.5 Métodos de análisis e interpretación de los datos

En la presente investigación realizamos una triangulación de los datos provenientes de diferentes fuentes, como método de validación de los datos; esto debido a que consideramos, en coherencia con Alves-Mazzotti y Gewandsznajder (1998), era necesario tener distintas maneras de obtener información relacionada con nuestro objeto de estudio a nivel investigativo para dar confiabilidad y riqueza a los análisis surgidos de nuestra investigación. En nuestro caso, las fuentes de los datos provienen de la literatura, los estudiantes y nuestra observación como investigadores.

Para realizar el análisis de los datos recurrimos a dos estrategias, el análisis paralelo y el análisis detallado. El análisis paralelo de los datos lo entendemos a partir de Parra-Zapata (2015) como "una fase inicial de exploración de los datos recogidos que (...) [permite] identificar temas y relaciones, construir interpretaciones y generar nuevas cuestiones." (p. 65). En nuestro caso, realizamos un análisis paralelo a todas las tareas propuestas a los estudiantes, participantes de esta investigación, y fue particularmente aportante para la construcción de nuestro problema de investigación. También realizamos análisis paralelo durante la implementación de las tareas propuestas en el Ambiente de Aprendizaje. Esto es, después de cada implementación de las tareas que propusimos, compartíamos los aspectos que posibilitaron las tareas y aspectos a tener en cuenta para las tareas restantes en diálogo permanente con nuestro referente conceptual.

El análisis detallado de los datos lo entendemos a partir de Parra-Zapata (2015) (basada en los planteamientos de Coffey y Atkinson, 2005) como "un proceso iterativo de producción, preparación, de revisión y organización de los datos, de determinación de unidades de análisis, de categorización y codificación de las unidades, y de generación de explicaciones, interpretaciones y teorías" (p.p 66-67). En nuestro caso realizamos un análisis detallado de los datos después de llevar a cabo todo el proceso de producción conjunta de registros y datos. Así, cuando recolectamos los datos provenientes de las fuentes mencionadas previamente, los organizamos, con los códigos que se presentan en la tabla 2, los cuales nos permitieron acceder a la información recopilada de manera rápida, efectiva y certera.

Tabla 2.Códigos usados para organizar los datos recolectados en nuestra investigación

Fuente de datos	**Instrumento**	**Código**
Estudiantes (E)	Ficha (F)	EF_&#_@
	Documentos varios (D)	ED_&#_*
	Entrevista abierta (E)	EE_&#_*
Literatura (L)	Ficha bibliográfica (F)	LF_?
Investigadores (I)	Notas de campo (N)	IN_&#
	Material audiovisual: fotografías (F)	IF_&#
	Material audiovisual: vídeos (V)	IV_&#

Los símbolos usados en los códigos presentados en la tabla 2 representan lo siguiente: *&*, inicial del nombre del investigador; *#*, número de sesión de clase; *@*, inicial de empresa de dónde provino la ficha (*P* para la *empresa de patentes*, *D* para el *depósito*, *C* para la *carpintería y ferretería* y *E* para la *empresa de ejercicios); **, nombre del estudiante de quien provino la información; y *?*, autor del documento: (apellido, año). Así, por ejemplo, la información rotulada con el código **IV_J7** corresponde a un vídeo tomado por el Investigador *Julián* en la sesión 7 del Ambiente de Aprendizaje.

Después de codificar los datos recolectados, generamos las siguientes categorías de análisis: *acciones movilizadoras de prácticas matemáticas*, *interacción*, *instrumentos y procedimientos* y *conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales,* con miras a dar respuesta a la pregunta y a los objetivos de investigación que nos planteamos. Estas categorías surgieron del diálogo con la literatura y de una revisión inicial de los datos, "lectura y observación", en términos de Hernández, Fernández y Baptista (2010). En la tabla 3 presentamos una descripción de las categorías de investigación, las cuales se abordan con detalle en el Capítulo II.

Tabla 3. Categorías de análisis de la presente investigación

Categoría	**Descripción**
Acciones movilizadoras de las prácticas matemáticas	Recoge tres aspectos fundamentales de la *actividad*: objeto/motivo, acciones y operaciones.
Interacción	Eje principal de la *actividad.* Se trata de realizar acciones con otros y con el medio orientados hacia la consecución de un fin.
Instrumentos y procedimientos	Los *instrumentos* son un mediador entre las construcciones sociales y la apropiación que los individuos tengan de ellas, los *procedimientos* son los que permiten tales *instrumentos.*
Conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales	Conceptos cotidianos que emergen de las acciones cotidianas al interior de la microsociedad y están relacionados con los Números Racionales. Conceptos científicos acerca de los Números Racionales presentes a interior de la microsociedad.

Finalmente, después de definir las categorías mencionadas (descritas con detalle en el *Referente conceptual* de la presente investigación), revisamos todos los datos recolectados y definimos unos episodios, surgidos al interior del Ambiente de Aprendizaje, los cuales nos permitieron generar unos análisis pertinentes, en coherencia con lo planteado en nuestra investigación (los análisis los presentamos en el Capítulo II-Artículos 1 y 2 de la presente investigación).

3.6 Ética de la investigación

En la presente investigación utilizamos fuentes bibliográficas e imágenes de libre acceso, donde verificamos que la licencia Creative Commons permitiera su divulgación y adaptación (en las que aplique). Además, hicimos una adecuada citación y referencia de las mismas, basados en la sexta edición de las Normas APA (2017).

El desarrollo de la investigación se hizo bajo autorización, mediante un consentimiento informado de los estudiantes participantes en ella y sus respectivos acudientes (ver Anexo C, D y E). En el consentimiento informado se dio a conocer el motivo de la investigación, los procedimientos llevados a cabo en la misma, el uso que se iba a dar a los datos recolectados y los derechos de cada uno de los participantes de ella.

La información recolectada en la presente investigación fue utilizada exclusivamente con fines académicos, pedagógicos y didácticos. En la presentación del informe final usamos seudónimos (como Estudiante 1, Estudiante 2, y así sucesivamente) y herramientas (en el caso de las fotografías) que nos permitieran mantener la identidad de los participantes de manera confidencial.

Los datos utilizados en los análisis son absolutamente verídicos y están soportados con evidencias físicas o virtuales, las cuales pueden ser solicitadas a los investigadores en caso de ser necesario.

El proceso y las conclusiones derivadas de la presente investigación se encuentran bajo la licencia Creative Commons mostrada en la figura 21, la cual expresa que será un documento que permite adaptaciones y que no se permitirán usos comerciales de la misma.

Figura 21. Licencia Creative Commons. Imagen tomada de www.creativecommons.org

4. Síntesis de resultados de la investigación

En este apartado presentamos una síntesis de los análisis de la investigación, los cuales estuvieron orientados por cuatro categorías, a saber, *acciones movilizadoras de las prácticas matemáticas, interacción,instrumentos y procedimientos* y *conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales.* Según el formato multi-paper elegido para la presentación de este trabajo, los análisis serán presentados a profundidad en los dos artículos que conforman el Capítulo II de esta investigación.

En los dos artículos evidenciamos las reflexiones de varios episodios de la implementación del Ambiente de Aprendizaje, los cuales abordaremos en este apartado a partir de ocho (8) sub-apartados, los cuales presentan una secuencia temporal de acuerdo con lo expuesto en el apartado 3.4 (Trabajo de campo).

4.1 Tareas iniciales: Laberinto decimal

Una de las tareas iniciales consistió en un laberinto decimal (Valencia y Ávila, 2015), donde se abordaron *instrumentos* (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) reflejados en *procedimientos* básicos elementales con números decimales (provenientes de entender la fracción como *fracción decimal*): suma, resta, multiplicación y división.

La tarea propició un acercamiento a las propiedades que los *procedimientos con* fracciones decimales tienen y de esta manera los estudiantes comprendieron que los *instrumentos* usados en esta son especiales pues “la fracción decimal es un sistema notacional con reglas y lógica propia” (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006, p. 66). Además, se convirtió en una *acción que movilizó prácticas matemáticas de los estudiantes*, pues, elementos característicos como los *instrumentos y procedimientos* se transformaron de acuerdo con las reflexiones que la tarea suscitó. Esto ocasionó a su vez, como un *efecto dominó*, que los demás elementos constituyentes de ella (conceptos, formas de discursividad y problemas por resolver) se vieran alterados (Jiménez, Zapata y Cautiva, 2017). Es esto lo que llamamos movilizar las prácticas matemáticas, es decir, generar aprendizaje. Estas acciones, además, constituyen la Actividad Matemática generadora de conciencia que venimos mencionando, pues se encuentran orientadas por el objeto/motivo y enmarcadas en unas condiciones (operaciones de la *Actividad*) propias de cada uno de los escenarios donde se realizaron.

4.2 Conformación Empresas

Al analizar las *interacciones* de los estudiantes en la conformación de los grupos de trabajo que se denominaron *empresas*, concluimos, en primer lugar, que las interacciones presentadas en el Ambiente de Aprendizaje, en busca del cumplimiento de todas las funciones de cada empresa, fueron horizontales y colaborativas; en segundo lugar, que las *interacciones* entre los mismos estudiantes y con el papel moneda propuesto, estuvieron orientadas por el objeto/motivo (educativo) de la *actividad*, pues les permitió comprender que no se trata solo de hacer los diseños con palos de paleta, sino que esto genera en ellos un *encuentro* (Radford, 2018) con los Números Racionales. Finalmente, observamos que se presentaron *interacciones* en constante oposición entre los mismos estudiantes (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009), lo que generó una apropiación del conocimiento matemático puesto en discusión.

4.3 Billetes Racionales

El proceso de construcción de los Billetes Racionales permitió ver la base conceptual que estos poseen y la intencionalidad clara con la que los pensamos. Así, se puede establecer una relación entre el área que ocupa cada Billete Racional con el billete de 1 *MatePesos,* pues su construcción se pensó a partir de la *fracción como relación parte-todo*, donde, en este caso, el todo (o la unidad en términos de Gairín, 1998) es el billete de 1 *MatePesos* y su denominación equivalente (2/2 *MatePesos)*, y las partes son los billetes de las demás denominaciones; así, por ejemplo, un billete de 0.1 *MatePesos* ocupa $\frac{1}{10}$del área del billete de 1 *MatePesos.*

En nuestra investigación, los Billetes Racionales, se convirtieron en un mediador entre las construcciones sociales acerca de los Números Racionales y la apropiación que los estudiantes construyeron acerca de ellos. Lo anterior lo evidenciamos a partir de los episodios que se mencionan a continuación.

4.4 Solución de ejercicio por parte de un estudiante

La manipulación de los Billetes Racionales por parte de los estudiantes, como una manera en que estos sirven de *instrumentos* para la manifestación de la *tensión* entre *conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* (Kozulin, 2000) acerca de los Números Racionales la evidenciamos en un episodio ocurrido en la I.E.R. El prodigio, cuando un estudiante decide resolver uno de los ejercicios que comercializa la *Empresa de ejercicios* para obtener *MatePesos* adicionales.

La manipulación de los Billetes Racionales, en medio de las dinámicas que propició el Ambiente de Aprendizaje, permitió la emergencia de unos *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales en el estudiante, es decir, las acciones espontáneas como vender, comprar y repartir billetes, permitieron que el estudiante adquiriera elementos importantes para comprender los *procedimientos* con algunas representaciones de los Números Racionales (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006 y Gairín, 1998), pero, sobre todo, las relaciones entre dichas representaciones. Así, cuando el enunciado le propuso escribir una manera para hacer una conversión particular de un número en notación derivada de la *fracción decimal* a otra notación derivada de otras formas de entender las fracciones, generó en él una *tensión* entre algo sistematizado (conversiones decimales-fracción) y los *conceptos cotidianos* construidos en su experiencia al interior del Ambiente de Aprendizaje.

4.5 Lista de igualdades

En este episodio analizamos una lista de igualdades elaborada por estudiantes de la I.E.R. Altavista que conformaron la *Empresa de patentes* en donde escriben la relación entre las denominaciones presentes en los Billetes Racionales de la microsociedad. La lista fue producto de la búsqueda de los estudiantes para facilitar los procesos al interior de la empresa, en la que debían comprar o vender productos o servicios.

Aquí, los estudiantes partieron de unos *conceptos científicos*, provenientes de la sistematización histórica que han tenido los Números Racionales y que heredaron a lo largo de su vida escolar, reflejados en la escritura de símbolos matemáticos donde está presente la igualdad (Radford, 2006). Y, en el *encuentro* con acciones concretas, como comprar y vender al interior de la microsociedad, surgió una *tensión* que permitió a los estudiantes resignificar esos *conceptos científicos* a partir de su contacto con la experiencia en la microsociedad. Por lo tanto, está *tensión* es dialéctica, lo que quiere decir que cambia permanente con el tiempo.

4.6 Pesos colombianos y MatePesos

Al interior de una de las *empresas* ocurrió un caso donde un estudiante asignado para contar los *MatePesos,* observó una relación entre la moneda que utiliza a diario en su contexto social (los Pesos Colombianos) y el papel moneda utilizado en esta microsociedad (los *MatePesos*). Logró predecir a partir de la suma con los Pesos Colombianos, la suma de los *MatePesos.*

Su aporte es valioso en nuestra investigación pues, refleja la apropiación del estudiante de unos *instrumentos* propios de sus experiencias en el contexto en el cual se desenvuelve, que se constituyen en un medio para comprender una particularidad de una tarea propia de la microsociedad. Sin embargo, estas relaciones que el estudiante hizo a partir de sus experiencias, no le permiten un acercamiento a los Números Racionales presentes en las denominaciones de los Billetes Racionales.

En el episodio, notamos una relación entre *conceptos cotidianos,* que el estudiante ha construido a partir de sus prácticas cotidianas, y unos *conceptos científicos* presentes al interior de la microsociedad en los Billetes Racionales; dicha relación no es la *tensión* que aquí estamos analizamos, pues esta debe involucrar necesariamente *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales. Este hecho nos permitió clarificar lo que esta investigación entiende por *conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* para el análisis (Kozulin, 2000).

4.7 Fichas

En las fichas recibidas, donde los estudiantes registraron en cada sesión de clase las transacciones realizadas por su *empresa*, pudimos observar que estas se convirtieron en un elemento importante para el registro de las labores cotidianas de cada empresa (como comprar, vender materiales, entre otras), mediante el uso de *instrumentos* característicos de los *conceptos científicos* acerca de los Números Racionales. Esto es, en algunas ocasiones esas labores cotidianas de la microsociedad, que constituían *conceptos cotidianos* acerca de este objeto de conocimiento, se sintetizaron en algo visible (*instrumentos*) y propiciaron un acercamiento a los *conceptos científicos* inmersos en los *instrumentos.* En este sentido, podemos observar una *tensión* mediada por las fichas, entre los aspectos *cotidianos* de la microsociedad y los *conceptos científicos* presentes en la misma.

4.8 Tareas finales

Una de las tareas finales, que le dieron cierre al Ambiente de Aprendizaje, tuvo como objetivo el uso de los Billetes Racionales en otros contextos. Allí los estudiantes relacionaron los billetes con medidas de áreas, con las razones y los porcentajes. Esta tarea dejó ver que el uso de Billetes Racionales fue significativo, pues se convirtieron en *instrumentos* mediadores que permitieron la comprensión y el apropiamiento de saberes culturales institucionales acerca de los Números Racionales, a través de la movilización de sus prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). Estos *instrumentos* fortalecieron y modificaron otros aspectos de las prácticas matemáticas de los estudiantes como los *conceptos* acerca de los Números Racionales.

Estos resultados, como mencionamos anteriormente, son presentados con mayor profundidad en los artículos que componen el capítulo siguiente. Además, en el Capítulo 3 (consideraciones finales) del presente documento, damos respuesta a nuestra pregunta de investigación, a partir de los análisis expuestos.

Referencias bibliográficas

Acevedo, D. y Arango, J. (2011). *Lógica y teoría de conjuntos*. Medellín: Reimpresos, duplicación de textos académicos de la Universidad de Antioquia.

Alves-Mazzotti, A. y Gewandsznajder, F. (1998). *O Método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

Barbosa, J. (2015). Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. En B. D'Ambrósio, C. Lopes. (Org.), Insubordinação criativa na produção científica em Educação Matemática. Campinas: Mercado das Letras.

D´Amore, B.y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Facultad de Educación. (2005). Reglamento Interno y de funcionamiento de la Práctica Pedagógica en los programas de Pregrado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia en las modalidades presencial y semipresencial. Medellín: Universidad de Antioquia.

Gairín, J. (1998). Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación. Tesis de Doctorado, Universidad de Zaragoza. España.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación. Quinta edición*.México DF: Mcgraw-hill.

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (2009). El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase. Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Jiménez, A. M., Zapata, C. S. y Cautiva, F. L. (2017). Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales.Tesis de Pregrado, Universidad de Antioquia. Medelín, Colombia.

Kozulin, A. (1994). *La psicología de Vigotsky*. Madrid: Alianza Editorial.

Kozulin, A. (2000*). Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Lopez, A. (2013). El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia. Caucasia, Colombia.

Marin, V. y Valencia, E. (2018). Prácticas matemáticas de estudiantes de grado cuarto con relación a procesos de cálculo. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia. Carmen de Viboral, Colombia.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismo,8 (1),* 1-43.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de aprendizaje V2 en Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Normas, A. P. A. (2017). 6ta (sexta) edición. Recuperado de: http://normasapa.net/2017-edicion-6.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema, 8(2)*, 157-182.

Obando, G. (2015). Sistemas de prácticas matemáticas en relación con la Razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. Tesis de Doctorado, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica, 3(20)*, 72-90.

Obando, G., Vanegas, M., y Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Módulo I*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Parra-Zapata, M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9(Extraordinario 1)*, 103-129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132- 150.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61-80.

Valencia, E. y Ávila, A. (2015). Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el Laberinto de decimales. *Educación Matemática, 27(3)*, 81-110.

Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje. Nueva edición a cargo de Alex Kozulin*. España: Paidós.

Villa-Ochoa, J. y Botero, O. (2011). Estrategias y reflexiones matemáticas de maestr@s para maestr@s. Propuestas para la Educación Básica Primaria. Medellín, Colombia: Escuela del Maestro.

CAPÍTULO II

En esta investigación analizamos la *tensión* entre los *conceptos cotidianos y científicos* acerca de los Números Racionales en un Ambiente de Aprendizaje y la movilización de las prácticas matemáticas a partir de la *interacción* entre los estudiantes. En este capítulo presentamos los resultados de la investigación en una serie de dos artículos que serán presentados para publicación en revistas académicas, posterior a la sustentación del trabajo de grado.

En el primer artículo analizamos las *acciones que movilizan las prácticas matemáticas*, emergentes de la Actividad Matemática de los estudiantes en un Ambiente de Aprendizaje, a partir de la *interacción* y el uso de *instrumentos y procedimientos* matemáticos. Los resultados ofrecen una comprensión del aprendizaje como transformación de prácticas a partir del *encuentro* individuo-sociedad.

En el segundo artículo analizamos la movilización de las prácticas matemáticas a partir de la *tensión,* entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* acerca de los Números Racionales, mediada por *instrumentos* presentes en los Billetes Racionales y en las fichas donde los estudiantes registraron, en cada sesión de clase, las acciones al interior del Ambiente de Aprendizaje. Los resultados ofrecen una compresión del aprendizaje como transformación de prácticas matemáticas propiciadas por la *tensión*.

Artículo 1. Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de un Ambiente Aprendizaje con Números Racionales.

Julián Ramírez

Manuela Restrepo-Puerta

Santiago Cardona

Resumen:

Este artículo hace parte de una serie de dos artículos, los cuales son producto del análisis realizado a nuestro trabajo de investigación, en el marco de las prácticas pedagógicas de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En la investigación diseñamos un Ambiente de Aprendizaje, en función del *encuentro* de los estudiantes (de educación media) con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales. Analizamos las *acciones que movilizan las prácticas matemáticas*, emergentes de la Actividad Matemática de los estudiantes, a partir de la *interacción* y el uso de *instrumentos y procedimientos* matemáticos. Los resultados ofrecen una comprensión del aprendizaje como transformación de prácticas a partir del encuentro individuo-sociedad.

Palabras Clave: Actividad Matemática, Prácticas matemáticas, Interacción, Instrumentos y Procedimientos, Números Racionales.

1. Introducción

Durante el año 2018 realizamos nuestra Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, en el marco del Proyecto PROFE[4]. Este proyecto nos planteó grandes retos a nivel personal y formativo, pues nos permitió acercarnos al ejercicio docente en diferentes lugares de Antioquia, a la vez que fue el espacio donde dimos inicio a nuestro trabajo de investigación. Allí analizamos nuestras propias sesiones de clase y a partir de esto escudriñamos en problemáticas en Educación Matemática que abrieran camino a nuevas investigaciones.

El trabajo realizado en el primer semestre del año con los estudiantes de diferentes instituciones educativas públicas en los municipios de San Luis y Girardota del departamento de Antioquia, Colombia, nos llevó a repensarnos la manera cómo se enseña y se aprende matemáticas, a la vez que nos acercamos a perspectivas teóricas en Educación Matemática donde las acciones de los estudiantes y los contextos sociales e históricos son importantes para la construcción de conocimiento. Entendimos que, a partir de estas perspectivas teóricas, en este proceso los estudiantes no deben ser solo receptores, sino que debe ser la reflexión de sus prácticas, y la *interacción* con otros y con el medio lo que permite que se generen significados colectivos a partir de lo que la cultura les pone a su disposición, es decir, que se debe poner en movimiento su Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). En este sentido, para el segundo semestre del año, desarrollamos un Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015) que posibilitó la movilización de las *prácticas matemáticas* (Obando, Arboleda y Vasco, 2014)

---

[4] PROFE: Programa de Fortalecimiento Educativo, para el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia. Convenio Universidad de Antioquia y Fundación Argos (Entidad privada sin ánimo de lucro).

de los estudiantes en el encuentro con los Números Racionales (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006).

Este artículo es el producto de ese trabajo de investigación y presenta reflexiones a partir de tres categorías de análisis: *acciones movilizadoras de las prácticas matemáticas, interacción* e *instrumentos y procedimientos* (en el marco de las prácticas matemáticas). Para dar cuenta de los análisis, de los alcances y desafíos que presentó el Ambiente de Aprendizaje presentamos este artículo en cuatro apartados. En el primero abordamos los referentes teóricos que nos permiten hablar de Actividad Matemática, prácticas matemáticas y Números Racionales. En el segundo hacemos una presentación general del Ambiente de Aprendizaje. En el tercero presentamos reflexiones acerca del desarrollo del Ambiente de Aprendizaje con los estudiantes, bajo las tres categorías mencionadas anteriormente. Por último, presentamos unas consideraciones finales donde concluimos los análisis, hacemos las últimas reflexiones y dejamos el camino abierto a nuevas investigaciones.

2. Actividad Matemática, prácticas matemáticas y Números Racionales

Desde fines del siglo pasado viene posicionándose una alternativa a la manera individualista generalizada de entender el proceso de aprendizaje de las matemáticas: la perspectiva histórico-cultural o socio-cultural de la Educación Matemática. Es el esfuerzo de diferentes investigadores por rescatar los aportes de la psicología histórico-cultural de Lev Vygotsky (junto a los intelectuales soviéticos de principios del siglo XX) y actualizarlos y adaptarlos al entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas (Radford, 2014). Esta perspectiva se preocupa por entender la Educación Matemática como un fenómeno social, cultural e histórico, donde el conocimiento matemático es el resultado de la acción humana en un contexto de prácticas particulares con unas delimitaciones institucionales de acuerdo con una comunidad académica específica. Es la búsqueda de una comprensión del desarrollo humano como una relación permanente entre las acciones del individuo y el entorno social e histórico en el que se sitúa.

En el marco de esta perspectiva, encontramos los aportes de Obando, Arboleda y Vasco (2014) para una teoría de la Actividad Matemática, como un insumo de investigación importante para nuestro trabajo. La *actividad*, entendida a partir de la perspectiva Vygotskiana, es un conjunto de acciones socialmente dirigidas con el objetivo de alcanzar un fin (objeto/motivo), pero además como un proceso colectivo en el cual la *interacción* y la reflexión son fundamentales para la transformación de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un Sistema de Prácticas institucionalizado, histórico y cultural.

La Figura 1 representa el devenir de la Actividad Matemática, allí puede observarse que es el *encuentro* individuo/sociedad a través de las prácticas matemáticas, orientado por un objeto/motivo, lo que abre el camino al aprendizaje, pues

> Partiendo de la idea de que lo que se aprende existe de algún modo ya en la cultura (por ejemplo, el concepto de número o el concepto de función o el de figura), lo que había que hacer quizás era plantear el aprendizaje como un "encuentro", y no como algo que me apropio y al apropiármelo lo hago mío. Queríamos salir de la lógica de la posesión y del propietario privado de las aproximaciones individualistas (Radford, 2018, p. 66).

Así, el estudiante abandona el papel de receptor sólo para sí mismo, reflexiona acerca de sus prácticas e interactúa con otros para generar nuevos conocimientos en los marcos institucionales.

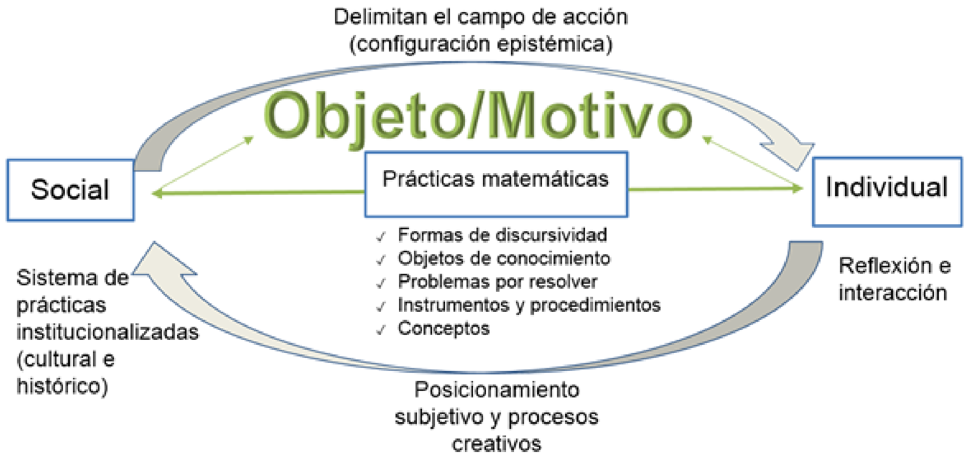


Figura 1. Actividad Matemática. Figura propia.

Las prácticas matemáticas son caracterizadas por unas formas de discursividad (lenguaje), unos *instrumentos y procedimientos* y unos problemas por resolver donde se refleja una relación entre objetos y conceptos matemáticos, además, todo esto en el marco de una configuración epistémica que "permite la toma de decisiones sobre el hacer (cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológica)" (Obando, Arboleda y Vasco, 2014, p. 83). Estas características permiten mostrar, no solo la manera cómo las personas desarrollan en el presente su Actividad Matemática, sino también, cómo las transformaciones de las prácticas inmersas en ella, dejan ver la constitución de nuevos conocimientos matemáticos. En otras palabras, la movilización de las prácticas matemáticas es la que da lugar al aprendizaje. Además, estas características, de acuerdo con Jiménez, Zapata y Cautiva (2017), no se movilizan de manera aislada, así, los cambios generados en una de ellas, repercuten, como una especie de *efecto dominó,* en las demás.

En esta investigación centramos la atención en los *instrumentos y procedimientos* generados en el *encuentro* con los Números Racionales, como una de las maneras de analizar la transformación (movilización) de las prácticas matemáticas. Los *instrumentos* son un mediador entre las construcciones sociales y la apropiación que los individuos tengan de ellas, por tanto, no son solo signos, símbolos, textos, fórmulas, gráficas, entre otros, pues de ser así “el lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos” (Radford, 2006, p. 113) y, por tanto, son también, las maneras de *leer el mundo* que se encuentran encarnadas en los objetos materiales y simbólicos que cristalizan la inteligencia de la que es portadora tal lenguaje.

Este *encuentro* genera unas estructuras dinámicas objetivas que “permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos” (Obando, Arboleda y Vasco, 2014, p. 74). Además, no puede hablarse de *actividad* sin el objeto/motivo que la oriente, pero tampoco en la pasividad, son precisamente las acciones orientadas al fin (acciones y fin como unidad inseparable), con unas operaciones que las condicionan, las que dan lugar a la Actividad Matemática.

El objeto/motivo es un fin que permite orientar las acciones humanas, en nuestro caso lo definimos, con base en D´Amore y Radford (2017), como el *encuentro* de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales. Es este el norte que posibilita la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, es decir, las prácticas se van transformando a medida que se actúa hacia él, es un movimiento intencionado, esto es, las acciones son orientadas por el objeto/motivo[5]. Las operaciones de la *actividad* pueden entenderse como el conjunto de procesos que permiten que dichas acciones sean concretas, son las posibilidades reales que tienen los sujetos de llevar a cabo las acciones dirigidas a un fin, de acuerdo al condicionamiento que le genera el momento

[5] Este es el objeto/motivo educativo, inicialmente solo claro para el docente. El objeto/motivo (diferente al primero) explícito para las tareas propuestas a los estudiantes debe servir para que estos hagan consciente el objeto/motivo educativo (Roth y Radford, 2011).

histórico, el campo institucional, el lugar donde está situado y los recursos que tiene a su disposición, son las condiciones reales para la acción.

La *interacción* juega un papel principal en el devenir de la Actividad Matemática, es fundamental para la construcción de sentidos y significados. Es el contacto permanente con los demás y con el medio, es lo que puede llevar al individuo a edificar una conciencia y unos constructos teóricos frente a un saber. "Esta interacción implica entonces sujetos que inter-actúan en constante oposición unos a otros: la acción de cada sujeto siempre constituye una réplica a las acciones de los otros" (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009, p. 9). Es de esta manera como los sujetos se apropian de la cultura a la vez que generan procesos de transformación (movilización) de sus prácticas.

Para Radford (2018), la *interacción* humana es uno de los dos ejes principales de la *actividad*, el otro es la producción. Ambos van siempre de la mano, pues las diferentes maneras como los estudiantes pueden interactuar entre sí y con el saber van condicionadas por unos modos de entender la producción. Para el caso de la educación, la *actividad* tiene como fin la producción de saberes, ligada a una manera también de entenderlos. La *actividad* no se trata solo de hacer cosas juntos, sino de hacia dónde se dirigen las prácticas y los caminos que hay que tomar para llegar al fin, pero, sobre todo, se trata, de la manera como los sujetos interaccionan para llegar al resultado. La *interacción* puede ocurrir de diversas maneras, dependiendo de cómo se entienda el proceso de producción de saber puede ser vertical y pasiva o puede ser horizontal y colaborativa. En una perspectiva educativa donde el estudiante sólo es receptor de saberes y no hay cabida a la reflexión de los mismos, la *interacción* entre los sujetos es vertical y pasiva; de otra manera, en una perspectiva educativa donde la cultura y el individuo tienen una relación dialéctica, la *interacción* entre los sujetos es horizontal y colaborativa.

Por otro lado, el objeto matemático presente en nuestra investigación fueron los Números Racionales, los cuales entendemos a partir de la construcción formal (codificada culturalmente) tomada de Acevedo y Arango (2011), la cual establece que:

$$Q := \{\frac{m}{n} : m, n \epsilon Z, n \neq 0 \; y \; m.c.d.(m, n) \; = 1\}$$

Es decir, un Número Racional es aquel que se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$, donde *m* es cualquier número entero y *n* es un número entero diferente de cero. Además, el máximo común divisor entre *m* y *n* es uno (1), lo que quiere decir que un número fraccionario solo es Racional si está simplificado en su mínima expresión.

Hablamos entonces de *conceptos* acerca de los Números Racionales cuando abordamos las diferentes maneras de representar las fracciones. Cada sistema de representación es un modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante diversos instrumentos (Gairín, 1998). Si el estudiante conoce los diferentes sistemas de representación, entiende sus propiedades y logra hacer una relación entre ellos, puede lograr una comprensión del objeto matemático, o por lo menos construir diversos conceptos acerca de este. Para esta investigación retomamos algunas representaciones de Obando, Vanegas y Vásquez (2006), a saber, la *fracción decimal,* la *fracción* como *relación parte-todo,* como *relación multiplicativa,* y como *cociente indicado.* Las notaciones de los Números Racionales que abordamos en esta investigación surgen de estas representaciones, pero pueden ser el producto de más de una de ellas, es decir, la fracción $\frac{a}{b}$ puede ser la notación de una *fracción como relación parte-todo, como cociente indicado* o *como relación multiplicativa,* por ejemplo. Los análisis y reflexiones acerca de este objeto matemático en la investigación, los presentamos de manera detallada en el Artículo 2 de este trabajo.

Para sintetizar podemos decir que: la Actividad Matemática en esta investigación se entiende como el conjunto de acciones socialmente dirigidas al objeto/motivo que permite el *encuentro* de los estudiantes con diferentes representaciones (o *conceptos*) de los Números Racionales. En esta *actividad,* la interacción de los estudiantes con otros y con el medio es indispensable, además que debe ser coherente con la manera de entender la construcción del conocimiento en esta perspectiva socio-cultural. El *encuentro* está mediado por unas prácticas matemáticas caracterizadas, entre otras cosas, por unos *instrumentos y procedimientos* que albergan en sí unas construcciones sociales históricas. La movilización (transformación) de estas prácticas matemáticas es lo que genera el aprendizaje en el aula de matemáticas.

3. Ambiente de Aprendizaje: *encuentro* con Números Racionales

Para el desarrollo de nuestra investigación, implementamos un Ambiente de Aprendizaje, entendido como un espacio en la clase de matemáticas en el que se promueve la participación, la interacción y la reflexión para la construcción del conocimiento matemático (Parra-Zapata, 2015), el cual consistió en la creación de una microsociedad al interior del aula que fomentó la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, a partir del encuentro (Radford, 2018) con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006).

Nos referimos como microsociedad, al espacio simbólico generado en el aula que intenta reproducir, a pequeñas proporciones, algunas relaciones (como económicas, sociales, políticas, entre otras) y maneras de actuar en la sociedad, con el fin de traer elementos de lo cotidiano al aula de matemáticas. Para este caso se trata de relaciones económicas mediadas por un papel moneda y donde cada persona cumple con unas funciones determinadas.

El papel moneda, construido por los investigadores (Billetes Racionales, figura 17), presentó diferentes denominaciones establecidas a partir de las notaciones que surgen de las diferentes representaciones de los Número Racionales. Las denominaciones de los Billetes Racionales, en MatePesos, son: 1/20 (0.05), 1/10 (0.1), 1/5 (0.2), 1/2 (0.5), 1 (2/2), 1.5 ($1\frac{1}{2}$) y 2 (18/9).

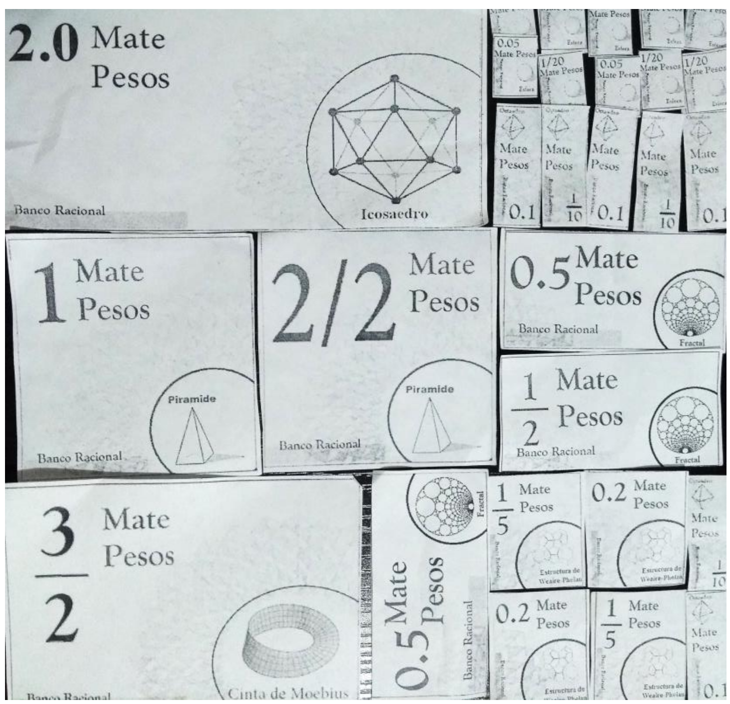


Figura 2. Billetes Racionales. Figura propia.

Además, como se observa en la figura anterior, el área que ocupa cada Billete Racional es proporcional a su denominación; por ejemplo, el área del billete de *1 MatePesos* es igual a cinco veces el área del billete de *0.2 MatePesos.*

Así mismo, la microsociedad estuvo conformada por grupos de trabajo que se constituyeron en empresas, a saber: *Depósito, Carpintería y ferretería, Empresa de ejercicios, Empresa de patentes y Banco Racional*. Las empresas tuvieron diferentes funciones (presentadas en la figura 3) que giraron en torno al objetivo[6] de construir diseños con palos de paleta (ver figura 9 en el apartado 4), los estudiantes asumieron las funciones según la empresa a la que pertenecían y el *Banco Racional* estuvo a cargo de nosotros como profesores orientadores de las tareas.

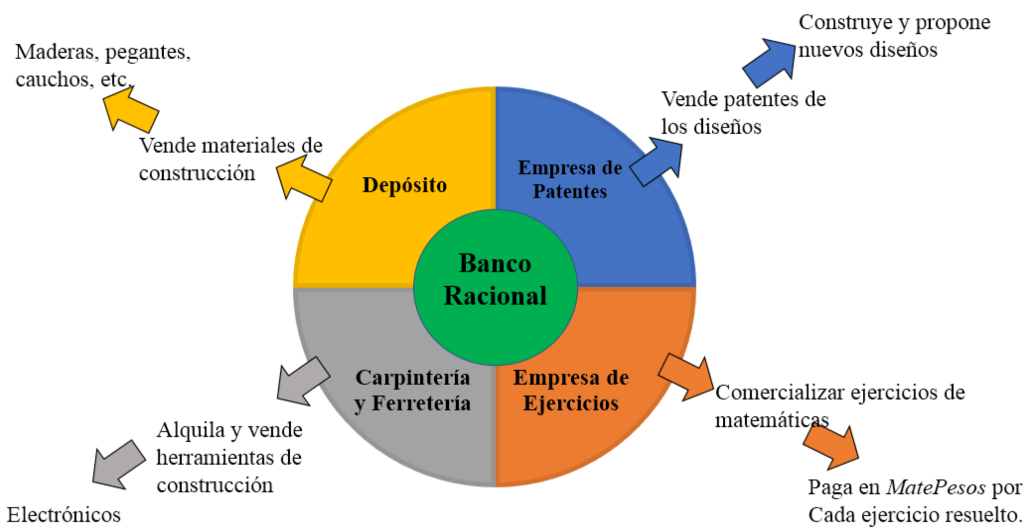


Figura 3*:* Empresas al interior de la microsociedad. Figura propia.

La implementación de este ambiente de aprendizaje fue llevada a cabo en el segundo semestre del año 2018 con estudiantes de educación media (entre 15 y 18 años), en tres instituciones educativas: la Institución Educativa Rural El Prodigio (San Luis - Antioquia), la Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen (Girardota - Antioquia) y la Institución

[6] Este podemos decir que es el objeto/motivo explícito de las tareas constituyentes del Ambiente de Aprendizaje. Sin embargo, lo llamamos solo objetivo para no confundirlo con el objeto/motivo educativo (o de la *Actividad*), el cual los estudiantes deben hacer consciente en el transcurso del Ambiente de Aprendizaje.

Educativa Rural Altavista (San Luis - Antioquia), en las que hicimos presencia los investigadores de manera separada. Para ello, desarrollamos siete sesiones de clase que exponemos en la figura 4.

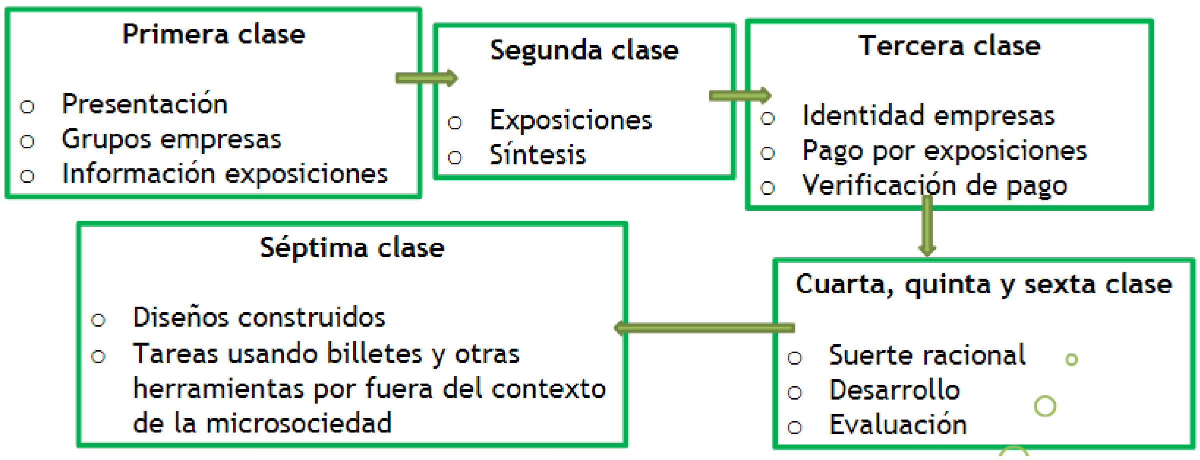


Figura 4: Sesiones de clase del ambiente de aprendizaje. Figura propia.

La investigación tuvo un enfoque cualitativo (Martínez, 2011, Hernández, Fernández, y Baptista, 2010) pues la preocupación se encuentra en las acciones de los estudiantes, sus significados y sus *interacciones* en un momento histórico-cultural particular. Nuestra interacción con ellos ocurrió de manera dialógica, comunicativa y empática para explorar, describir y comprender el aprendizaje de los estudiantes a partir de la movilización de sus prácticas.

La recolección de los datos la realizamos en tres partes: en el caso de los investigadores, mediante la técnica de Observación Participante donde las notas de campo, fotografías y vídeos constituyen sus instrumentos. En el caso de los estudiantes mediante dos técnicas: el documento (fichas) y las entrevistas abiertas. Para la literatura usamos fichas bibliográficas para recolectar detallada y estructuralmente la información.

4. Reflexiones acerca del desarrollo del Ambiente de Aprendizaje con los estudiantes: discusiones y análisis

A continuación, presentamos, con una secuencia temporal (figura 4), cuatro episodios acontecidos en las tres Instituciones Educativas que nos permiten analizar las acciones de los estudiantes a partir de las categorías de análisis presentadas en el apartado 2. Empezamos por la reflexión suscitada por una de las tareas de la primera y segunda sesión de clase (laberinto decimal) en lo que llamamos *exposiciones.* Seguido a esto, como segundo episodio, examinamos las *interacciones* que se presentaron al interior de los grupos de trabajo (*empresas*) al repartir funciones, manejar el papel moneda y registrar de manera escrita las transacciones diarias de cada *empresa*. El tercer episodio es la solución de un estudiante a un enunciado de la *empresa de ejercicios*, donde hace uso de *instrumentos* presentes en los Billetes Racionales. Por último, y como cuarto episodio, presentamos el análisis de una de las tareas propuestas en el cierre del Ambiente de Aprendizaje.

En la primera y segunda sesión de clase presentamos el Ambiente de Aprendizaje y se organizaron cuatro grupos de trabajo, los cuales conformaron posteriormente las diferentes empresas. A cada grupo se le asignó una información diferente acerca de los Números Racionales con la intención de compartir con los demás compañeros, por medio de exposiciones, el resultado del diálogo entre sus saberes previos y lo que dicha información podía aportarles.

Esto se convirtió en una primera acción que permitió el *encuentro* de los estudiantes con los Números Racionales. Además, propició un diálogo donde los saberes previos de los estudiantes tomaron un papel esencial, a la vez que estos se contrastaban con los institucionales, se generaban unos acuerdos que ayudaron a la construcción de un lenguaje común; en otros términos, son acciones que “permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos” (Obando, Arboleda y Vasco, 2014, p. 74).

Una de las exposiciones mencionadas previamente consistió en la aproximación a algunos *procedimientos* con números decimales[7], la tarea realizada fue un laberinto decimal, tomado de (Valencia y Ávila, 2015), donde se abordaron *instrumentos* reflejados en *procedimientos* básicos: suma, resta, multiplicación y división, (ver figura 5).

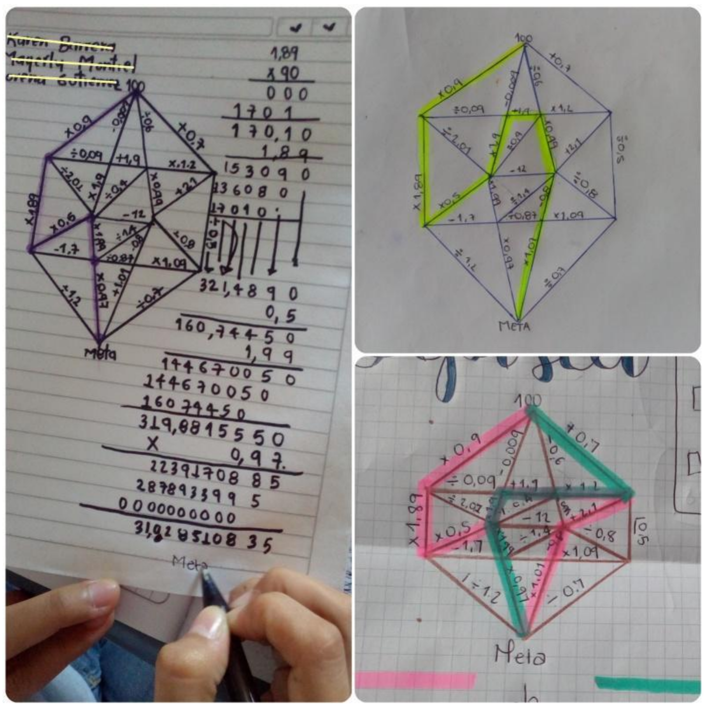


Figura 5. Laberinto decimal elaborado por estudiantes de la I.E.R. Altavista. Figura propia, septiembre de 2018.

El laberinto consiste en llegar a la meta con el mayor número de puntos posibles, el cual inicia en la parte superior con un valor de 100, sin pasar dos veces por el mismo segmento o punto. En los segmentos que representan los caminos se encuentran expresiones como: x (0.9),

[7] En este artículo llamamos números decimales a aquellos que surgen de entender la fracción como *fracción decimal*.

÷ (0.6), x (0.99), + (0.7), x (1.99), entre otros. En la figura 5 es posible observar que los caminos que tomaron los estudiantes fueron aquellos donde predomina la multiplicación y la suma.

El análisis de esta tarea fue un proceso colectivo estudiantes-docente. Comparamos los resultados y exploramos las posibilidades que generaban la multiplicación y la división con números decimales. Se propició un acercamiento a las propiedades que estos tienen, los estudiantes se dieron cuenta que no siempre multiplicar un número lo hace más grande en cantidad y que no siempre dividir un número lo hace más pequeño en cantidad, como sí ocurre con los números enteros. Entendieron que si bien se usan los mismos *instrumentos* para los *procedimientos* (ver figura 5, parte izquierda), dichos *instrumentos* deben pensarse de otras maneras, pues cada uno de ellos trae consigo una carga teórica propia de una construcción social y simbólica, para este caso, aquella que conforma el constructo teórico de los Números Racionales, o en palabras de Obando, Vanegas y Vásquez 2006) “la fracción decimal es un sistema notacional con reglas y lógica propia” (p. 66).

Esta tarea, donde el objeto/motivo de la *actividad* educativa se hace consciente para los estudiantes, pues permite su *encuentro* con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales, se convierte en una *acción que moviliza prácticas matemáticas de los estudiantes*, pues, elementos característicos como los *instrumentos y procedimientos*, se transforman, lo que ocasiona a su vez, como un *efecto dominó*, que los demás elementos constituyentes de ella (conceptos, formas de discursividad y problemas por resolver) se vean alterados (Jiménez, Zapata y Cautiva, 2017). Es esto lo que llamamos movilizar las prácticas matemáticas, es decir, generar aprendizaje. Estas acciones, además, constituyen la Actividad Matemática generadora de conciencia que venimos mencionando, pues se encuentran orientadas por el objeto/motivo y enmarcadas en unas condiciones (operaciones de la *actividad*) propias de cada uno de los escenarios donde se realizaron.

En la tercera sesión de clase, los grupos de estudiantes que realizaron las exposiciones en clases anteriores definieron la identidad de la empresa (nombre, logo y eslogan) de la cual hacían parte (ver Figura 6) y se dividieron las funciones que debían cumplir dentro de la misma.

Figura 6. Nombres, logos y eslogan construidos por algunos equipos de estudiantes de las I.E.R El Prodigio, I.E. R. Altavista e I.E.R. Nuestra Señora del Carmen. Figura propia, agosto 2018.

Durante esta tercera sesión pudimos observar cómo los estudiantes se relacionaron en sus equipos de trabajo para conseguir lo que les propusimos hacer. Al momento de dividir las funciones de cada empresa notamos una *interacción* horizontal y colaborativa, en la cual, los estudiantes, a medida que pensaban en lo que debía hacer cada empresa durante las clases: construir sus propios diseños, vender materiales o servicios (en el caso de la empresa de ejercicios) y registrar en las fichas de cada clase las transacciones de la empresa, se dieron cuenta que, si no se asignaban diferentes funciones, no podrían cumplir con todo. Las funciones de los miembros de los equipos fueron asignadas por los mismos estudiantes, en algunos casos, conscientes de las fortalezas y aptitudes que cada uno tenía para aportar al equipo, y en otros, con la intención de que todos pudieran realizar una función durante al menos una vez en las sesiones de clase siguientes. Las relaciones entre ellos, guiadas por el objetivo del Ambiente de Aprendizaje empezaron a ser participativas y propositivas, lo cual es un primer paso importante para hablar de *interacción* en esta perspectiva educativa.

Durante el trabajo al interior de las empresas, también hubo una *interacción* con el papel moneda construido por los investigadores, por medio de la cual, el trabajo en las empresas, no solo estaba en pro de la construcción de los diseños con palos de paleta (objetivo explícito de las tareas), sino que también estaba orientado por el objeto/motivo de la actividad, a saber, el encuentro de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales. Así, el objetivo explícito de las tareas del Ambiente de Aprendizaje converge cada vez más, en la consciencia de los estudiantes, con este objeto/motivo de la Actividad. En esta investigación, el uso colectivo de los Billetes Racionales por parte de las empresas fue el complemento necesario para hablar de *interacción* en Actividad Matemática, pues, en coherencia con Radford (2018), en la *actividad* no sólo se trata de hacer cosas juntos, sino de hacia dónde se dirigen las prácticas y los caminos para llegar al fin. Con los Billetes, la *interacción* se empieza a dar en el marco del *encuentro* con los Números Racionales.

Las interacciones, al interior de las empresas, se dieron en una constante oposición entre los integrantes (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009), es decir, se presentaron acuerdos y desacuerdos acerca de los *instrumentos* y *procedimientos* que se debían utilizar para realizar alguna transacción de las empresas: entregar cambio en las compras, comprar a otras empresas, registrar las ganancias del día, entre otras. Este es el caso de uno de los equipos que conformó la *empresa de ejercicios* en el cual se distribuían las funciones de manera diferente en cada clase; así, en una de las clases, dos estudiantes registraron algunos movimientos de la empresa en la ficha mediante *procedimientos* escritos y en otra de las clases, otros estudiantes registraron los movimientos en la ficha sin realizar ningún *procedimiento* escrito[8] (ver figura 7). Los primeros estudiantes no confiaban en lo escrito por los segundos, argumentaron que necesariamente se debían realizar los *procedimientos* de manera escrita para verificar que estuvieran correctas. Por su parte, los segundos estudiantes argumentaron de manera oral cómo llegaban a los resultados registrados en la ficha, el diálogo fue el siguiente:

Profesora: ¿cómo hicieron la suma?, ¿cómo sumaron todos los billetes?

Estudiante 1: pasamos todo a decimal

Profesora: ¿lo pasaron haciendo todas las operaciones[9]*? o ¿de qué manera?*

Estudiante 1: en la mente; por decir un medio, uno sabe que da cero punto cinco.

Profesora: ¿por qué sabes eso?

Estudiante 1: porque se divide uno entre dos, entonces da cero punto cinco.

Profesora: ¿por qué más lo podrías saber?

Estudiante 1: por la suma de cero punto cinco dos veces, da uno.

Profesora: ¿las operaciones las hicieron sin hacer el cálculo en una hoja?

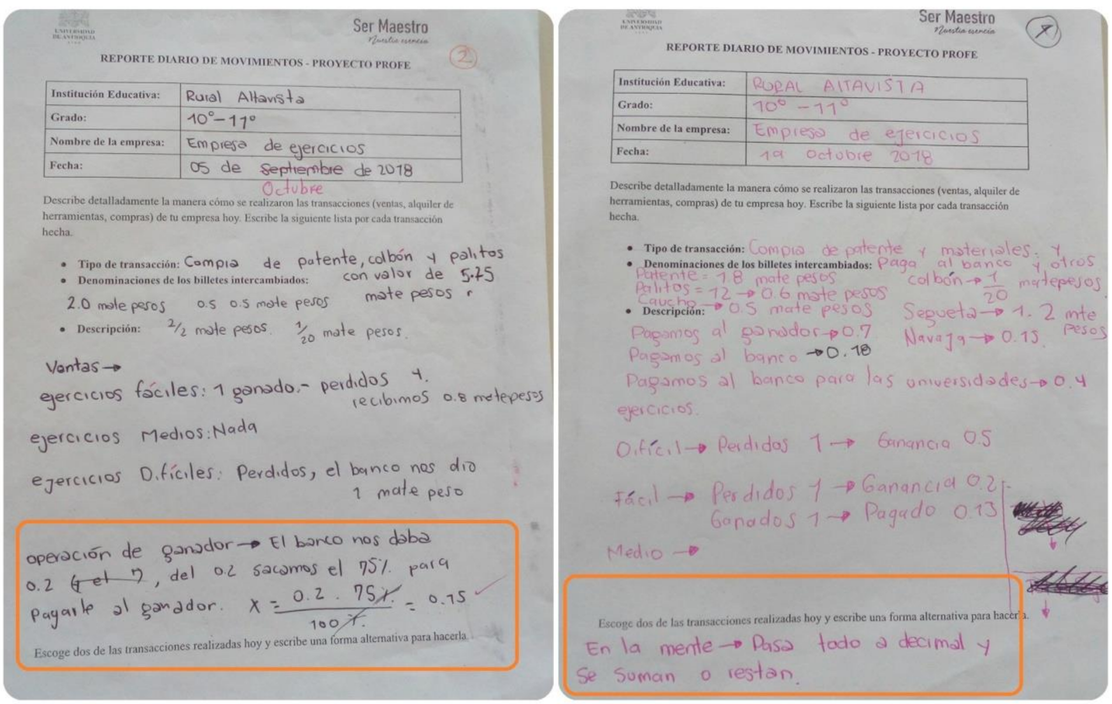
[8] Entendemos que si hubo una escritura de su forma de proceder, pero aun así consideramos que esta escritura no nos permite analizar *instrumentos* propios que propicien el *encuentro* con los Números Racionales.
[9] Aquí las operaciones se refieren a las *procedimientos* que venimos analizando.

Estudiante 1: sí.

Profesora: ¿cómo se dieron cuenta que lo podían hacer sin hacer los cálculos escritos, sabiendo que tienen billetes con denominaciones en decimales y en fracciones?

Estudiante 2: porque, por ejemplo aquí (señalando los billetes de denominación 1/20 MatePesos, ver figura 1) *sabemos que esto da cero punto cero cinco, además porque tiene el mismo logo, entonces sabemos que da eso (*Estudiante 1 y 2, entrevista abierta, octubre de 2018).

.



Ser Maestro
Nuestra esencia

REPORTE DIARIO DE MOVIMIENTOS - PROYECTO PROFE

Institución Educativa:	Rural Altavista
Grado:	10°–11°
Nombre de la empresa:	Empresa de ejercicios
Fecha:	05 de ~~septiembre~~ Octubre de 2018

Describe detalladamente la manera cómo se realizaron las transacciones (ventas, alquiler de herramientas, compras) de tu empresa hoy. Escribe la siguiente lista por cada transacción hecha.

- Tipo de transacción: Compra de patente, colbón y palitos con valor de 5.75 mate pesos
- Denominaciones de los billetes intercambiados: 2.0 mate pesos 0.5 0.5 mate pesos
- Descripción: 2/2 mate pesos. 1/20 mate pesos.

Ventas →
ejercicios fáciles: 1 ganado.- perdidos 4. recibimos 0.8 matepesos
ejercicios Medios: Nada
ejercicios D.fíciles: Perdidos, el banco nos dio 1 mate peso

operación de ganador → El banco nos daba 0.2 ~~(el 7)~~, del 0.2 sacamos el 75% para pagarle al ganador. $x = \frac{0.2 \cdot 75\%}{100\%} = 0.15$

Escoge dos de las transacciones realizadas hoy y escribe una forma alternativa para hacerla.

Ser Maestro
Nuestra esencia

REPORTE DIARIO DE MOVIMIENTOS - PROYECTO PROFE

Institución Educativa:	RURAL ALTAVISTA
Grado:	10° – 11°
Nombre de la empresa:	Empresa de ejercicios
Fecha:	19 octubre 2018

Describe detalladamente la manera cómo se realizaron las transacciones (ventas, alquiler de herramientas, compras) de tu empresa hoy. Escribe la siguiente lista por cada transacción hecha.

- Tipo de transacción: Compra de patente y materiales. Y
- Denominaciones de los billetes intercambiados: Paga al banco y otros
Patente = 1.8 mate pesos
Palitos = 12 → 0.6 mate pesos
Caucho → 0.5 mate pesos
colbón → $\frac{1}{20}$ matepesos
Segueta → 1.2 mte pesos
Navaja → 0.15
- Descripción:
Pagamos al ganador → 0.7
Pagamos al banco → 0.18
Pagamos al banco para las universidades → 0.4 ejercicios.

D.fícil → Perdidas 1 → Ganancia 0.5
Fácil → Perdidos 1 → Ganancia 0.2
Ganados 1 → Pagado 0.13
Medio →

Escoge dos de las transacciones realizadas hoy y escribe una forma alternativa para hacerla.

En la mente → Pasa todo a decimal y se suman o restan.

Figura 7. Fichas: Reporte diario de movimientos, empresa de ejercicios I.E.R. Altavista. Figura propia, octubre de 2018.

La figura 7 sirve como complemento a este diálogo, aquí se observan las dos maneras de *procedimientos* frente a las transacciones de las empresas que mencionamos anteriormente. El argumento escrito al final de la ficha de la derecha acerca de cómo realizaron los *procedimientos* fue el mismo expresado en la entrevista, a saber: "(los procedimientos los realizaron) en la mente, pasa todo a decimal y se suman o se restan" (Estudiante 1 y 2, comunicación personal, 28 de septiembre de 2018), consideraron, también, los tamaños de los billetes e intentaron completar con varios billetes del mismo tamaño una unidad, y extraer la porción de unidad necesitada en alguna transacción.

Esta situación nos permite entender que las interacciones entre los estudiantes también pueden ser de oposición, que las discusiones que se generan acerca de cómo movilizar sus prácticas matemáticas, en este caso a través de los *instrumentos y procedimientos,* son importantes para el aprendizaje. Cada persona puede tener distintas maneras de proceder matemáticamente y ponerlo en discusión enriquece las prácticas y el *encuentro.*

Al analizar las *interacciones* de los estudiantes, podemos concluir, en primer lugar, que las interacciones presentadas en el Ambiente de Aprendizaje, en busca del buen funcionamiento de las empresas, fueron horizontales y colaborativas; en segundo lugar, que las *interacciones* entre los mismos estudiantes y con el papel moneda propuesto, estuvieron orientadas por el objeto/motivo (educativo) de la *actividad*, pues les permitió comprender que no se trata solo de hacer los diseños con palos de paleta, sino que esto genera en ellos un *encuentro* con los Números Racionales. Finalmente, observamos que se presentaron *interacciones* en constante oposición entre los mismos estudiantes, lo que generó una apropiación del conocimiento matemático puesto en discusión.

En este segundo episodio reflexionamos, además, acerca de los *instrumentos y procedimientos* utilizados por los estudiantes con el manejo de los Billetes Racionales. En el diálogo presentado anteriormente vemos que algunos estudiantes pudieron familiarizarse rápidamente con los billetes, estos se convirtieron en un *instrumento* para ellos con los cuales los *procedimientos* se facilitaron. Los estudiantes llegaron incluso al caso de no tener la necesidad de utilizar los *instrumentos y procedimientos* convencionales escritos para hacer cuentas rápidas con Números Racionales. Aun así, como se observa en la parte izquierda resaltada de la figura 7, los estudiantes no dejaron de lado dichos *procedimientos* escritos, por el contrario, el uso de los billetes y la mentalización de los *procedimientos* permitió un mejor entendimiento y refinamiento de aquellos que usaban en otros contextos académicos.

Lo anterior se evidencia mucho mejor en el tercer episodio ocurrido en la I.E.R. El Prodigio, cuando el *Estudiante 3* decide resolver uno de los ejercicios que comercializa la *Empresa de ejercicios* para obtener *MatePesos* adicionales. En el ejercicio se plantea el siguiente enunciado: *Escribe 1.4 en forma de fracción.* En la figura 8 podemos observar el *procedimiento* utilizado para darle solución.

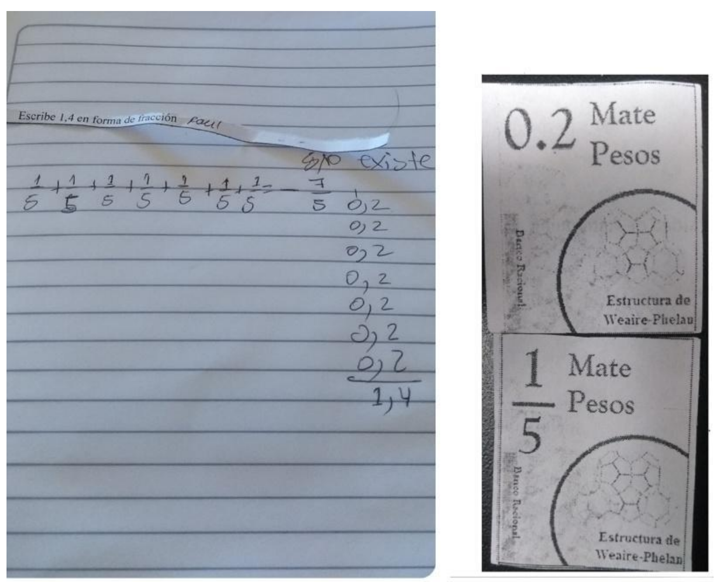


Figura 8: Solución ejercicio de la empresa de ejercicios por estudiante de la I.E.R. El Prodigio. Figura propia, octubre de 2018.

El estudiante no recordó el algoritmo que repasamos en las primeras sesiones de clase que permite hacer este tipo de conversiones (y no tenía porqué hacerlo), por lo que pensó su propio *procedimiento*. Como se encontraba ya familiarizado con los Billetes Racionales, decidió hacer la siguiente relación: sabía, por su experiencia con los Billetes Racionales, que 0.2 *MatePesos* era exactamente el mismo valor que 1/5 *MatePesos*, por lo que procedió a sumar tantas veces 0.2 hasta que el resultado fuera 1.4. Así, la solución se redujo a sumar 1/5 exactamente el número de veces que había sumado 0.2 para llegar a 1.4, lo que dio como resultado 7/5.

Interpretamos de aquí que los *instrumentos y procedimientos* cambiaron, que el estudiante pudo lograr una mejor comprensión del objeto matemático (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) que pudo decir varias cosas acerca de este (*conceptos*), que los Números Racionales pasaron de solo estar escritos en un papel a ser una representación (de una parte de los Números Racionales) en su cabeza. La transformación (movilización) de las prácticas matemáticas por medio de los *instrumentos* utilizados en ellas generó en el estudiante un aprendizaje. De acuerdo con la situación anterior, los Billetes Racionales y los *instrumentos* presentes en ellos, fueron esenciales para la apropiación de los individuos de unas construcciones sociales.

Para finalizar, en la séptima sesión de clase, desarrollamos un cierre del Ambiente de Aprendizaje. En una primera parte, los estudiantes presentaron sus diseños con palos de paleta terminados (ver figura 9), donde pudimos observar el fruto de su trabajo colectivo representado en algo tangible. Esta fue la consecución del objeto/motivo (nombrado simplemente como objetivo) explícito del Ambiente de Aprendizaje. Seguido a esto, desarrollamos una acción con los estudiantes tipo carrusel, la cual consistió en cuatro estaciones por donde los grupos de trabajo (empresas) pasaban cada cierto periodo de tiempo por cada una de estas. Cada estación tenía una tarea representada en un reto o juego relacionado con Números Racionales, una de ellas la analizamos a continuación. Este cierre pretendió evidenciar qué tan consciente fue para los estudiantes el objeto/motivo educativo de la *actividad*.

Figura 9. Diseños terminados con palos de paleta por los estudiantes. Figura propia, noviembre de 2018.

Una de las tareas que hizo parte de una de las estaciones del carrusel, tuvo como objetivo el uso de los Billetes Racionales en otros contextos. La intención fue que, con la ayuda de los *instrumentos* presentes en estos Billetes, los estudiantes construyeran diferentes conceptos acerca de los Números Racionales. Se les presentó una hoja donde estaba dibujado un rectángulo (Ver figura 10), con las siguientes indicaciones: i) ¿Cuál es el área del Rectángulo?, ii) ¿Cuál es la razón del billete de 1½ (3/2) con respecto al total?, iii) ¿Cuántos MatePesos hay? y iv) ¿Qué porcentaje representa los billetes de 1/10 con respecto al total?

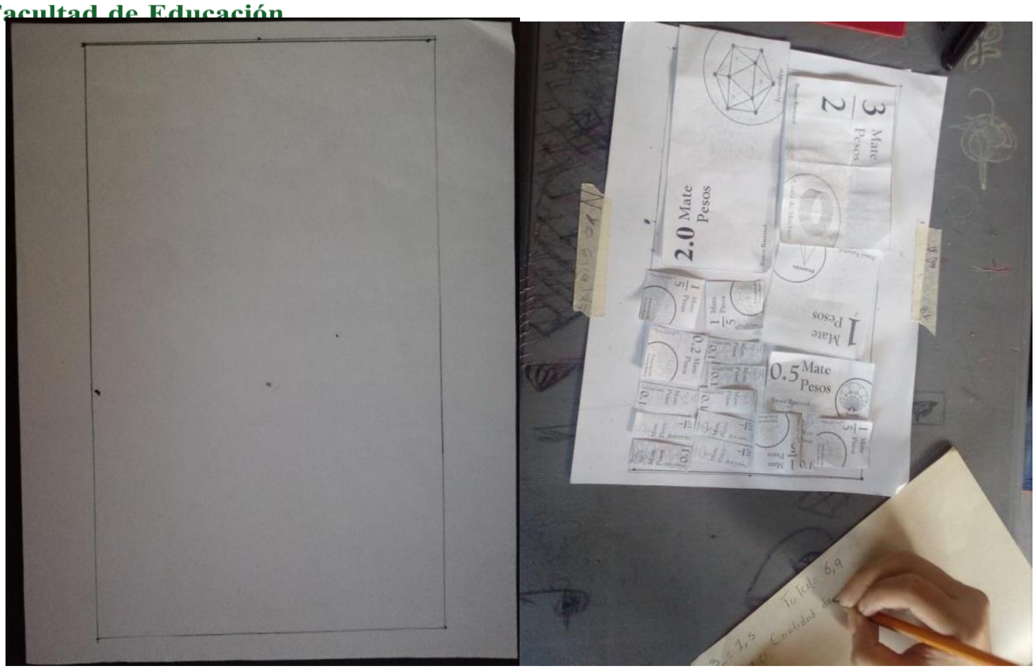


Figura 10. Áreas, razones y porcentajes con Billetes Racionales, I.E.R. Altavista. Figura propia, noviembre de 2018.

En la figura 10 observamos que los estudiantes procedieron a cubrir completamente el rectángulo dibujado en la hoja con los Billetes Racionales. De esta manera lograban obtener algunas de las respuestas presentadas en la figura 11. Contar los *MatePesos* que allí se encontraban no les generaba dificultad, pues ya estaban familiarizados con los billetes. Las respuestas con respecto al total de *MatePesos* oscilaron entre 6.9 y 7.1 *MatePesos*, esto tal vez por los márgenes de error que podían presentarse con el recorte de los billetes. Encontrar la razón y el porcentaje tampoco generó dificultad en los estudiantes, pues entendieron que había un total que habían calculado y que cada Billete, tal como lo hicieron en las acciones con las empresas, era una pequeña porción de ese total (ver figura 11).

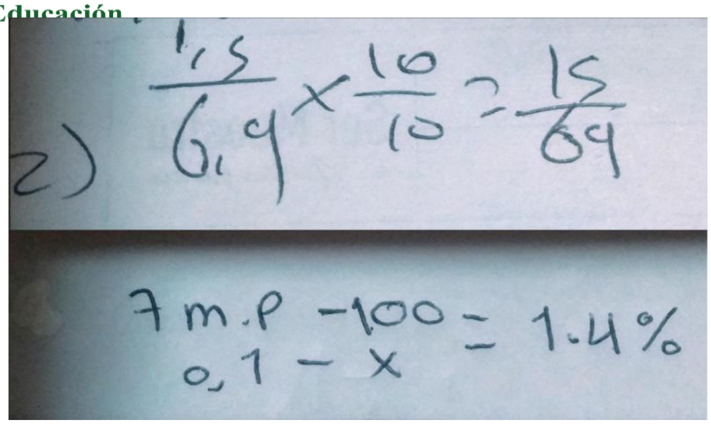


Figura 11. Solución razón y porcentaje al usar Billetes Racionales, diferentes grupos de trabajo, I.E.R. El Prodigio. Figura propia, noviembre de 2018.

En la figura 11 presentamos los *procedimientos* usados por dos grupos diferentes para darle respuestas a las preguntas (ii) y (iv) antes mencionadas. En la parte de arriba se observa que usaron la notación fraccionaria que permite hacer una relación entre una parte y un todo (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006), y usó además la fracción como relación multiplicativa para que esta relación se hiciera entre dos Números Enteros, aunque faltó escribirla en su expresión mínima para llamarlo formalmente Número Racional (Acevedo y Arango, 2011). En la parte de abajo de la figura 11 se observa también dicha relación con respecto a un total, donde establece el 100 como un todo (porcentajes).

Esta tarea deja ver que el uso de Billetes Racionales fue significativo, pues sus elementos se convirtieron en *instrumentos* mediadores que permitieron la comprensión y la apropiación de saberes culturales institucionales acerca de los Números Racionales, a través de la movilización de sus prácticas matemáticas. Estos *instrumentos* fortalecieron y modificaron otros aspectos de las prácticas matemáticas de los estudiantes como los *conceptos* acerca de los Números Racionales, este asunto lo analizamos con más detalle en el artículo 2 de esta investigación.

5. Consideraciones finales

En el Ambiente de Aprendizaje propuesto se propició el desarrollo de la Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014), pues estuvo conformado por unas *acciones* orientadas por el objeto/motivo educativo de la *actividad* definido como el *encuentro* (Radford, 2018) de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca los Números Racionales. Las primeras *acciones* permitieron generar unos acuerdos mínimos para el curso de la *actividad* a partir del primer *encuentro* entre los estudiantes (con sus saberes previos) y lo que la cultura pone a su disposición acerca de los Números Racionales. Los elementos presentes en los Billetes Racionales, usados en el transcurso de la implementación, a partir de la *interacción* en los grupos de trabajo, se convirtieron en *instrumentos* mediadores entre los saberes institucionales y los individuos, además que incentivaron la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, lo que propició la creación de nuevos conocimientos matemáticos en los estudiantes.

Las *interacciones*, entre estudiantes, el docente y el medio fueron horizontales y colaborativas, por lo que son coherentes con una manera de producción de saber en esta perspectiva educativa y, además, estuvieron orientadas por el objeto/motivo de la *actividad*, por lo que se constituyen como uno de los ejes principales de la *actividad* (Radford, 2018). Además, fueron *interacciones* que presentaron oposiciones y complementos entre los estudiantes, lo que fortaleció la apropiación del conocimiento matemático puesto en discusión (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009).

Los *procedimientos* utilizados por los estudiantes a la hora de enfrentarse a problemas con Números Racionales, los cuales presentamos y discutimos en el apartado 4, fueron modificándose a partir de la familiarización con los elementos presentes en los Billetes Racionales que funcionaron como *instrumentos* mediadores de la cultura (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). Esto propició, además, que muchas características de las prácticas matemáticas se movilizaran, y en ese sentido se transformaran. Estas movilizaciones de las prácticas matemáticas las analizamos aquí a profundidad solo a partir de una de las características de las prácticas matemáticas: *instrumentos y procedimientos,* sin embargo, somos conscientes que este Ambiente de Aprendizaje permite enfocarse en otras de las características o en todas como conjunto (pues están interconectadas). En el artículo 2 de esta investigación abordamos análisis referentes a los *conceptos* matemáticos puestos en juego en este Ambiente de Aprendizaje.

El aprendizaje como *encuentro* que genera *actividad*, es decir, como movilización de las prácticas, propicia transgredir el papel de los estudiantes como solo receptores del saber, los involucra activamente en su proceso de aprendizaje y los pone a dialogar con la cultura. Es esta la importancia de rescatar aquellas perspectivas educativas que se alejen del individualismo y la sumisión en Educación Matemática, donde pareciera que todo está acabado y la función del estudiante sea repetir al pie de la letra lo que el profesor sabe (así esté errado) sin posibilidad de reflexionar, refutar y discernir. Esto lo rescatamos en este trabajo y fue uno de los comentarios más recurrentes entre los estudiantes con los que se realizó la investigación. La mayoría de ellos resaltaron la importancia de buscar estrategias para que sea la *Actividad* el motor del aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Acevedo, D. y Arango, J. (2011). *Lógica y teoría de conjuntos*. Medellín: Reimpresos, duplicación de textos académicos de la Universidad de Antioquia.

D´Amore, B.y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Gairín, J. (1998). Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación. Tesis de Doctorado, Universidad de Zaragoza. España.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación. Quinta edición*.México DF: Mcgraw-hill.

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (2009). El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase. Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Jiménez, A. M., Zapata, C. S. y Cautiva, F. L. (2017). Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales. Tesis de Pregrado, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismo,8 (1)*, 1-43.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica, 3(20)*, 72-90.

Obando, G., Vanegas, M., y Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Módulo I*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Parra-Zapata, M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9(Extraordinario 1)*, 103-129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132- 150.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61-80.

Valencia, E. y Ávila, A. (2015). Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el Laberinto de decimales. *Educación Matemática, 27(3)*, 81-110.

Artículo 2: Movilización de prácticas matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales

Julián Ramírez

Manuela Restrepo-Puerta

Santiago Cardona

Resumen

Este artículo es el segundo de una serie de dos artículos, los cuales son producto del análisis realizado a nuestro trabajo de investigación, en el marco de las prácticas pedagógicas de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En esta investigación, diseñamos un Ambiente de Aprendizaje, materializado en una microsociedad al interior del aula de matemáticas, donde los estudiantes se relacionaron con representaciones y *conceptos* de los Números Racionales. Analizamos la movilización de las prácticas matemáticas a partir de la *tensión*, entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* acerca de los Números Racionales, mediada por *instrumentos* presentes en los Billetes Racionales y en las fichas donde los estudiantes registraron, en cada sesión de clase, las acciones al interior del Ambiente de Aprendizaje. Los resultados ofrecen una compresión del aprendizaje como transformación de prácticas matemáticas propiciadas por la *tensión*.

Palabras Clave: Actividad Matemática, Prácticas matemáticas, Instrumentos, Números Racionales, Conceptos cotidianos, Conceptos científicos, Tensión

Introducción

Durante los dos semestres del año 2018 desarrollamos nuestra Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, a través del Proyecto PROFE (Programa de Fortalecimiento Educativo), el cual surgió de un convenio entre la Fundación Argos[10] y la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. La participación en este proyecto nos permitió valiosas reflexiones a nivel personal y profesional, pues mediante él nos acercamos al ejercicio docente en distintas Instituciones Educativas de Antioquia-Colombia.

Este fue el espacio donde iniciamos nuestro trabajo de investigación; allí, pudimos reflexionar acerca de nuestras propias sesiones de clase y discutir problemáticas en torno al aprendizaje de las matemáticas. A la vez, nos acercamos a perspectivas teóricas que reconocen a los estudiantes como sujetos activos en su proceso de aprendizaje, los cuales hacen parte de contextos sociales e históricos determinados. En este sentido, durante el segundo semestre de nuestra práctica pedagógica, desarrollamos un Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015) que posibilitó la movilización de las *prácticas matemáticas* (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) de los estudiantes en el *encuentro* con los *conceptos cotidianos y científicos* acerca de los Números Racionales (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006).

El presente artículo muestra una reflexión a partir de la categoría de análisis: *conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales.* Para dar cuenta de los análisis, de los alcances y desafíos que emergieron en el Ambiente de Aprendizaje, presentamos este artículo en cuatro apartados. En el primer apartado abordamos los referentes teóricos que nos

[10] Entidad privada sin ánimo de lucro

permiten hablar de Actividad Matemática, prácticas matemáticas y *conceptos cotidianos y científicos* acerca de los Números Racionales. En el segundo apartado hacemos una presentación general del Ambiente de Aprendizaje. En el tercer apartado presentamos reflexiones acerca del desarrollo del Ambiente de Aprendizaje con los estudiantes, a la luz de la categoría mencionada anteriormente. Por último, presentamos unas consideraciones finales donde concluimos los análisis, hacemos las últimas reflexiones y dejamos el camino abierto a nuevas investigaciones.

Referente Conceptual

La perspectiva histórico-cultural o socio-cultural de la Educación Matemática, se ha posicionado como una alternativa a la manera individualista de entender el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Esta perspectiva es producto del trabajo de varios investigadores por rescatar los aportes de la psicología histórico-cultural de Lev Vygotsky (junto a los intelectuales soviéticos de principios del XX) y adaptarlos y actualizarlos al entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas (Radford, 2014). Esta perspectiva entiende la Educación Matemática como un fenómeno histórico, social y cultural, donde el conocimiento matemático es el resultado de acciones humanas en un espacio simbólico de prácticas compartidas y un contexto particular. En este sentido, el desarrollo humano no es más que una relación constante entre las acciones del individuo y el entorno social e histórico en el que se sitúa.

Al interior de esta perspectiva, encontramos los aportes de Obando, Arboleda y Vasco (2014) para una teoría de la Actividad Matemática, complementados por los aportes de Kozulin (2000) acerca de los *conceptos cotidianos y científicos*, como insumos de investigación importantes para nuestro trabajo. A partir de la perspectiva Vygotskiana se entiende la *actividad* como un proceso colectivo en el cual la *interacción* y la reflexión son fundamentales para la transformación de las prácticas matemáticas y la manera de posicionarse acerca de un sistema de prácticas institucionalizado, histórico y cultural; y como un conjunto de acciones socialmente dirigidas con el objetivo de alcanzar un fin (objeto/motivo). La Figura 1 es una representación del devenir de la Actividad Matemática, en párrafos posteriores ampliamos las ideas que surgen a partir de ella.

Figura 1. Actividad Matemática. Figura propia.

En términos de Obando, Arboleda y Vasco (2014), Las prácticas matemáticas se caracterizan por unas formas de discursividad (lenguaje), unos *instrumentos* y procedimientos y unos problemas por resolver donde se refleja una relación entre objetos y *conceptos* matemáticos, además, todo esto en el marco de una configuración epistémica que “permite la toma de decisiones sobre el hacer (cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológicas)” (p. 83). Estas características muestran, no solo la manera cómo las personas desarrollan en el presente su Actividad Matemática, sino también, cómo las transformaciones de las prácticas matemáticas inmersas en ella dejan ver la constitución de nuevos conocimientos matemáticos. En otras palabras, la movilización de las prácticas matemáticas es el aprendizaje.

En este artículo centramos el análisis en los *conceptos* e *instrumentos* característicos de las prácticas matemáticas. Los *instrumentos* son mediadores que permiten la apropiación en los individuos de construcciones sociales previas a ellos, además son unas maneras de *leer el mundo* a partir de una perspectiva teórica manifestada en los símbolos (Radford, 2006).

Entendemos los *conceptos* como todo lo que pueda decirse acerca de los objetos de conocimiento (Obando, Arboleda y Vasco, 2014), son constructos simbólicos que traen consigo unas operaciones mentales y que son el producto de un proceso de generalización de atributos, pero también, y, sobre todo, un proceso de síntesis de dichos atributos que lo hacen situarse en relación con otros *conceptos* en una red sistemática. Entendemos, además, a partir de lo expuesto por Kozulin (2000) que dichos *conceptos* antes de pasar a ser parte de esa red sistemática, fueron vivenciados (de manera física o en el papel) por personas en momentos históricos dados, esto es, los *conceptos* fueron primero *cotidianos* antes de *científicos*, pero así mismo, los *conceptos científicos* y sistemáticos generan en las personas unas maneras propias de entender algunas acciones, lo que hace que el *concepto* pase a ser cotidiano. Es esta la *tensión*, entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* acerca de un objeto matemático, en este caso los Números Racionales, lo que analizamos en esta investigación.

Kozulin (2000) rescata estas posturas del trabajo de Vigotsky, profundiza en la idea de los *conceptos cotidianos y científicos*, explicándolos con detalle. En su texto retoma la analogía que Vigotsky hace acerca de los conceptos cotidianos y científicos como una unidad dialéctica para la construcción de una estructura. La estructura representa el constructo teórico producto de la tensión dialéctica entre los opuestos (cotidiano y científico), la cual, crea una síntesis como resultado del conflicto. Al respecto plantea:

> Mientras ascienden lentamente hacia arriba, los conceptos cotidianos allanan el camino para los conceptos científicos que descienden hacia abajo. Crean una especie de estructuras necesarias para la evolución de los aspectos más primitivos y elementales de un concepto, que le dan cuerpo y vitalidad. A su vez, los conceptos científicos ofrecen estructuras para que los conceptos espontáneos […] se desarrollen hacía arriba, hacia la conciencia y empleo deliberado (Kozulin, 2000. p. 65).

Los c*onceptos cotidianos* son los que se encuentran ligados directamente con la experiencia de los estudiantes en los contextos concretos de su vida diaria (incluida su vida académica), son conceptos espontáneos que surgen de las reflexiones que las personas hacen de sus prácticas cotidianas y de las generalizaciones producto de dichas reflexiones. Son *conceptos* que no aparecen comúnmente en el programa escolar, pero que, aun así, generan herramientas importantes para el entendimiento del mundo. Sin embargo, los *conceptos cotidianos* son limitados (por su dependencia al contexto, pueden ser pertinentes para unos cuantos casos mas no para una generalidad) pues carecen de sistematicidad y conciencia, por lo que es importante la interrelación, a través de las prácticas matemáticas, con *conceptos científicos*, los cuales son avalados por una comunidad académica y presentan estructuras organizadas y jerárquicas. Cuando nos referimos a *conceptos científicos* no hablamos solamente de aquellos que surgen directamente de una ciencia en específico, sino de aquellos que se caracterizan por poseer una estructura formal, lógica y descontextualizada (Kozulin, 2000). Son aquellas codificaciones culturales que se mantienen en el tiempo y que son el producto de una construcción histórica, pero, a su vez también son cambiantes.

La interrelación entre los *conceptos cotidianos y científicos* es lo que consideramos importante analizar, pues entendemos que la construcción de conceptos con respecto a un objeto de conocimiento en las personas no es un proceso lineal, es un proceso que se da por las diferentes disputas entre lo que saben, conocen y han experimentado, y lo que la cultura les pone ante sus ojos. Este ir y venir de los estudiantes entre los *conceptos científicos y cotidianos*, se presenta en forma de espiral (figura 2) a lo largo de la *actividad*, pues a partir de la reflexión los *conceptos cotidianos* se hacen c*ientíficos*, y a la vez los *conceptos científicos* con su empleo deliberado se hacen *cotidianos*. Esta interacción genera una *tensión* permanente entre ellos, la cual permite generar procesos de síntesis hacia la construcción de nuevos conocimientos. La figura 2 es una representación de la *tensión* entre los *conceptos cotidianos* (CCo) y los *conceptos científicos* (CCi)

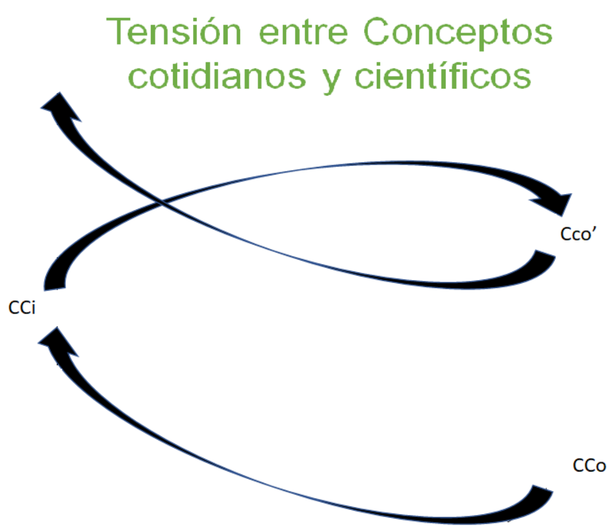


Figura 2. Tensión entre conceptos cotidianos y científicos. Elaboración propia con base en (D´Amore, y Radford, 2017)

Por lo tanto, esa *estructura*, antes mencionada, constituida a partir de la interrelación de los *conceptos cotidianos* y *los científicos*, no hace referencia a algo estático y acabado, al contrario, es solo la base para otros *encuentros* activos. Así, a partir de la figura 2, precisamos en la idea de que la relación *conceptos cotidianos-conceptos científicos*, es dialéctica, es decir, cambiante, producto de disputas y complementos. Es esto lo que llamamos *tensión*. La *tensión*, producto de las diferentes disputas entre lo que los estudiantes saben, conocen y han experimentado, y lo que la cultura les pone ante sus ojos, permite generar procesos de síntesis hacia la construcción de nuevos conocimientos por medio de la movilización de sus prácticas.

Por otro lado, los Números Racionales, albergan en sí unos *conceptos científicos* (sistemáticos e institucionales) que entran en disputa con los *conceptos cotidianos* de los estudiantes acerca dichos números. Ambos *conceptos*, *científicos* y *cotidianos*, se complementan dialécticamente por medio de las tareas propuestas, que para nuestro caso, son momentos de un Ambiente de Aprendizaje en el aula de matemáticas (presentados en el apartado *Descripción general del Ambiente de Aprendizaje* del presente artículo).

Los Números Racionales los entendemos a partir de la construcción formal (codificada culturalmente) tomada de Acevedo y Arango (2011), la cual establece que:

$$Q := \{\frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0 \; y \; m.c.d.(m,n) \; = 1\}$$

Es decir, un Número Racional es aquel que se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$, donde *m* es cualquier número entero y *n* es un número entero diferente de cero. Además, el máximo común divisor entre *m* y *n* es uno (1), lo que quiere decir que un número fraccionario solo es racional si está simplificado a su mínima expresión.

Esta construcción formal de los Números Racionales nos permite entender la conexión que existe entre el número fraccionario y los Números Racionales. Podemos decir entonces, que todo Número Racional es un fraccionario (aunque no se cumpla de manera inversa), lo que nos da pie a analizarlo a partir de los diferentes significados de las fracciones encontrados en la literatura (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006; y Gairín, 1998). Entendemos que la medición es un proceso muy importante a tener en cuenta en los procesos de conceptualización acerca de los Números Racionales pues hace parte de su construcción histórica, sin embargo, en nuestra investigación, este no fue el objeto de estudio (aunque se aborde de manera implícita).En este trabajo, el objetivo no es abarcar el proceso de conceptualización, sino que se centra en la interacción de los estudiantes a partir de los *conceptos cotidianos y científicos* acerca de los Números Racionales, como una manera de movilizar sus prácticas matemáticas hacia el acercamiento a dicho objeto matemático.

Cabe mencionar que la definición anterior no es un resultado aislado y acabado del concepto de Número Racional, pues es precisamente una codificación cultural e histórica, que surge de los aportes de distintas culturas (como los egipcios, los babilonios, los griegos, entre otras), las cuales usaron las fracciones con distintos significados y en diversos contextos (Gairín, 1998); además, surge también porque "en el sistema de los Números Enteros se presenta la dificultad de no existir los inversos multiplicativos" (Acevedo y Arango, 2011, p. 211). Podemos decir que es entonces, coherente con lo que hemos abordado teóricamente, un saber institucionalizado codificado culturalmente.

De esta manera, hablamos de conceptos acerca de los Números Racionales cuando abordamos las diferentes maneras de representar las fracciones. Cada sistema de representación es un modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante diversos *instrumentos* (Gairín, 1998). Si el estudiante conoce los diferentes sistemas de representación, entiende sus propiedades y logra hacer una relación entre ellos, puede lograr una comprensión del objeto matemático, o por lo menos construir diversos conceptos acerca de este. Así,

> Puesto que la complejidad de cada concepto matemático no se agota en uno sólo de los sistemas de representación, interesa conocer qué propiedades se ponen de manifiesto

con uno determinado de esos sistemas, así como qué propiedades se oscurecen o se dificultan con dicho sistema. El uso coordinado de dos a más sistemas de representación facilitará al alumno la plena comprensión de las ideas matemáticas (Gairín, 1998, p. 23).

Es por todo lo anterior que nuestro foco de atención en los Números Racionales se centró en las diferentes representaciones o diferentes significados que se encuentran en las fracciones, pero ante todo, las relaciones que se establecen entre ellas, como una manera de acercarse al objeto matemático a partir de diversas perspectivas, o mejor, a partir de diferentes conceptos (cotidianos y científicos) que aporten a su comprensión. Para ello, retomamos lo planteado en Obando, Vanegas y Vásquez (2006) y Gairín (1998) y lo presentamos a continuación.

-La fracción como relación parte-todo: según Gairín (1998) esta interpretación surge cuando "un 'todo' (continuo o discreto) se divide en partes congruentes (...) La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (...) El todo recibe el nombre de unidad" (p. 55-56). Además, Obando, Vanegas y Vásquez (2006), también hacen la salvedad de que esta relación implica "la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y el todo" (p. 61).

-La fracción como una relación multiplicativa: mencionada por Gairín (1998) como *la fracción como operador.* Se refiere a considerar la fracción como una 'función de cambio', la cual, mediante tratamientos operativos, transforma un número o representación gráfica dada en un segundo número o representación gráfica (Gairín, 1998, p. 52). Para Obando, Vanegas y Vásquez (2006) entender la fracción como una relación multiplicativa se deriva de un proceso de medición en el que interviene una relación de multiplicidad (la cual da lugar a una relación de divisibilidad), así, "la relación multiplicativa 'n veces…', define la relación inversa 'n-ésima

parte de…' y viceversa" (p. 61). En este sentido, "la relación $X = n \cdot Y$es equivalente a la relación $Y = X \cdot \frac{1}{n}$" (p. 61).

-*La fracción decimal:* existen varias disertaciones acerca de lo que es una fracción decimal, en primer lugar, se puede entender como una fracción que tenga como denominador una potencia de 10. En segundo lugar, se puede entender como "un caso particular de la relación Parte-Todo, cuando la unidad es dividida en 10, 100, 1000, etc. partes." (Obando, Vanegas y Vásquez, p. 65). En tercer lugar, se puede entender como el resultado de efectuar el cociente indicado que también denotan las fracciones. Y, por último, se pueden entender como "otra forma de representación simbólica de las fracciones en las cuales el denominador es un múltiplo de 10" (p. 65). Así, para Obando, Vanegas y Vásquez (2006), las fracciones decimales son todo lo anteriormente descrito, pero, ante todo, son un "sistema notacional con reglas y lógica propia" (p. 66).

- *La fracción como cociente indicado*: mencionada por Gairín (1998) como *la fracción como cociente.* Se refiere a interpretar las fracciones como "el reparto igualitario de *a* unidades en *b* partes (con *a*<*b*)" (Gairín, 1998, p. 47) en el cual se quiere conocer el tamaño de cada parte que resulta de distribuir a unidades en b partes iguales en el caso de que la fracción sea $\frac{a}{b}$, es decir, conocer el cociente de esta situación de reparto.

La comprensión de los Números Racionales como un sistema con unos *instrumentos y procedimientos* propios, puede abordarse a partir de tareas que posibiliten la emergencia de *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales, que, puestos en *tensión* con los *conceptos científicos,* permiten la conformación de la unidad dialéctica necesaria para el acercamiento a las particularidades de este objeto de conocimiento matemático.

Así, entender la *fracción como relación parte-todo*, como *relación multiplicativa*, como *fracción decimal y* como *cociente indicado*, permite comprender las características particulares de los Números Racionales, relacionarlas entre sí y propiciar acciones espontáneas en complemento con saberes institucionalizados.

Para finalizar, en coherencia con Obando, Vanegas y Vásquez (2006), en el momento de trabajar con sistemas numéricos diferentes al de los Números Naturales, cobra vital importancia proponer

> (...) situaciones que permitan la construcción de los múltiples sentidos y significados de cada uno de ellos. Así por ejemplo, el estudio de los números racionales debe permitir la construcción de los sentidos y significados relativos a la medida, fracciones, razones, proporciones, porcentajes, y campo de cocientes (p. 56).

En nuestro caso particular, la importancia mencionada radica, en primer lugar, en el hecho de entender el sistema de los Números Racionales como un sistema complejo del cual surgen varios *conceptos cotidianos o científicos* acerca del objeto matemático en cuestión. Y, en segundo lugar, en el hecho de que entre los conceptos mencionados se establecen distintas relaciones, las cuales es necesario hacerlas explícitas y fortalecerlas con el fin de evitar que esos *conceptos* que componen el sistema numérico se perciban de manera aislada.

Descripción general del Ambiente de Aprendizaje

Para el desarrollo de nuestra investigación implementamos un Ambiente de Aprendizaje, entendido como un espacio en la clase de matemáticas en el que se promueve la participación, la interacción y la reflexión para la construcción del conocimiento matemático

(Parra-Zapata, 2015) conformado por un conjunto de tareas en función del *encuentro* de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los Números Racionales.

Este Ambiente de Aprendizaje consistió en la construcción de una microsociedad al interior de aula, es decir, la construcción de un espacio en donde se reproducen unas relaciones económicas, sociales, entre otras, y unas maneras de actuar en la sociedad, con el fin de traer elementos de lo cotidiano al aula de matemáticas. En el Ambiente de Aprendizaje las relaciones económicas fueron mediadas por un papel moneda, construido por los investigadores, el cual analizamos con detalle en el siguiente apartado. Además, cada estudiante cumplió unas funciones determinadas.

Así mismo, la microsociedad estuvo conformada por grupos de trabajo que se constituyeron en empresas, a saber: *Depósito, Carpintería y ferretería, Empresa de ejercicios, Empresa de patentes y Banco Racional.* Las empresas al interior de esta microsociedad tuvieron diferentes funciones (presentadas en la Figura 3) que giraron en torno al objetivo de construir diseños con palos de paleta, del mismo modo, los estudiantes asumieron funciones según la empresa a la que pertenecían y el *Banco Racional* estuvo a cargo de nosotros como profesores orientadores de las tareas.

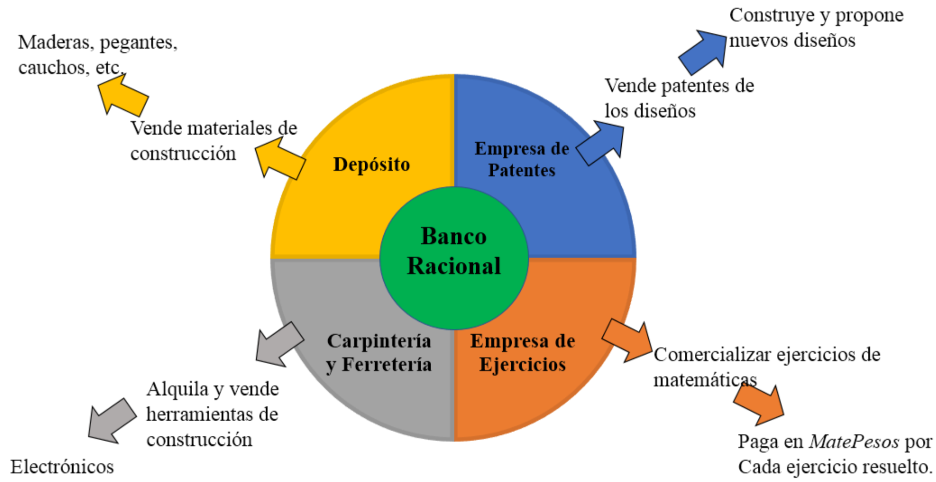


Figura 3: Empresas al interior de la microsociedad. Figura tomada del Artículo 1 de la presente investigación.

La implementación de este Ambiente de Aprendizaje se desarrolló en el segundo semestre del año 2018 con estudiantes de educación media (entre 15 y 18 años), en tres instituciones educativas: la Institución Educativa Rural El Prodigio (San Luis - Antioquia), la Institución Educativa Rural Nuestra Señora del Carmen (Girardota - Antioquia) y la Institución Educativa Rural Altavista (San Luis - Antioquia). En este proceso investigativo, cada investigador hizo presencia de manera separada en las Instituciones y desarrolló el Ambiente de Aprendizaje en siete sesiones, como se muestra en la Figura 4.

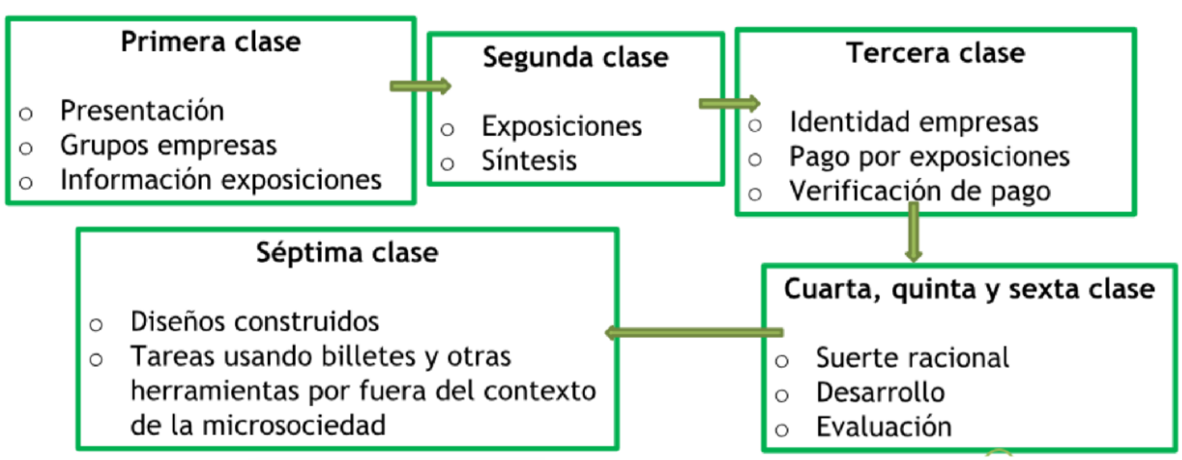


Figura 4: Sesiones de clase del ambiente de aprendizaje. Figura tomada del Artículo 1 de la presente investigación.

Las tareas en este Ambiente de Aprendizaje propiciaron la emergencia de *conceptos cotidianos* en los estudiantes acerca de los Números Racionales a partir de la *interacción* con sus pares y con el medio, a la vez que propiciaron el *encuentro* con un saber culturalmente codificado presente en los Billetes Racionales, las exposiciones iniciales y en general, en todos los *instrumentos* y tareas que transversalizan el Ambiente de Aprendizaje. Esto da lugar a una *tensión* entre los *conceptos cotidianos y científicos* acerca de los Números Racionales.

La investigación tuvo un enfoque cualitativo (Martínez, 2011; Hernández, Fernández, y Baptista, 2010) pues la preocupación se encontraba en las acciones de los estudiantes, sus significados y sus *interacciones* en un momento histórico-cultural particular. Nuestra interacción con los estudiantes ocurrió de manera dialógica, comunicativa y empática para explorar, describir y comprender el aprendizaje de los estudiantes a partir de la movilización de sus prácticas.

La recolección de los datos la realizamos en tres partes: en el caso de los investigadores, mediante la técnica (Alves-Mazzoti y Gewandsznajder, 1998) de Observación Participante donde las notas de campo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), fotografías y vídeos constituyen sus instrumentos. En el caso de los estudiantes mediante dos técnicas: el documento (fichas) y las entrevistas abiertas. Para la literatura usamos fichas bibliográficas, como instrumento, para recolectar detallada y estructuralmente la información teórica.

Análisis de resultados

En este apartado, analizamos las diferentes maneras en que los estudiantes de educación media de la Instituciones Educativas mencionadas previamente, se acercaron a los Números Racionales a través del Ambiente de Aprendizaje propuesto. Empezamos por hacer reflexiones acerca de la manipulación de los Billetes Racionales como *instrumentos* mediadores entre la cultura y el individuo para la interrelación entre *conceptos cotidianos y científicos*. Continuamos con tres episodios (cada uno en una Institución Educativa diferente), donde se puede analizar la *tensión* entre c*onceptos cotidianos y conceptos científicos* a partir de diferentes perspectivas, a saber, de lo cotidiano a lo científico, de lo científico a lo cotidiano y situaciones que desbordan este análisis. Seguido a esto, analizamos lo expuesto por los estudiantes en las fichas donde registraron clase a clase las transacciones de las empresas con los Billetes Racionales y por último, presentamos una de las tareas de la sesión de cierre del Ambiente de Aprendizaje.

Los Billetes Racionales (figura 5) utilizados en el Ambiente de Aprendizaje son un mediador que permite su manipulación con una base conceptual sólida basada en saberes institucionalizados acerca de los Números Racionales, producto de una construcción histórica y cultural (*conceptos científicos*).

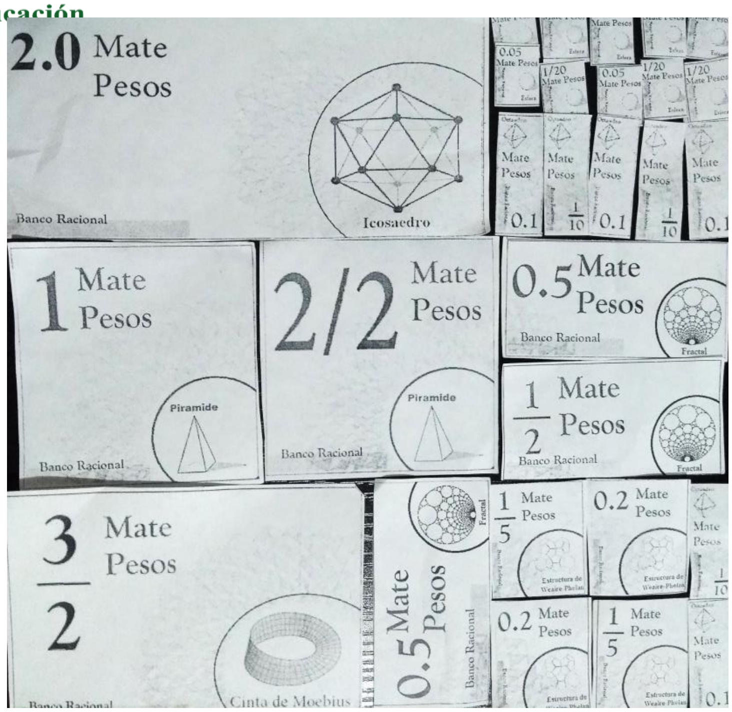


Figura 5: Billetes Racionales. Figuratomada del Artículo 1 de la presente investigación.

El proceso de construcción de los Billetes Racionales permitió ver la base conceptual que estos poseen y la intencionalidad clara con la que los pensamos. Así, se puede establecer una relación entre el área que ocupa cada Billete Racional con el billete de 1 *MatePesos,* pues su construcción fue pensada a partir de la *fracción como relación parte-todo,* donde, en este caso, el todo (o la unidad en términos de Gairín, 1998) es el billete de 1 *MatePesos* y su denominación equivalente (2/2 *MatePesos),* y las partes son los billetes de las demás denominaciones; así, por ejemplo, un billete de 0.1 *MatePesos* ocupa $\frac{1}{10}$del área del billete de 1 *MatePesos.* Para los billetes mayores a la unidad, podríamos también considerar que mediante estos se deja ver la *fracción como una relación multiplicativa* hacia el billete de 1 *MatePesos;* es decir, el billete de 18/9 *MatePesos* posee dos veces el área del billete de 1 *MatePesos.* Las relaciones entre las áreas mencionadas, se pueden observar en la Figura 5.

Otro aspecto que es necesario considerar, en la base conceptual que poseen los Billetes, es las denominaciones presentes en ellos, a saber (en *MatePesos)*: 1/20 (0.05), 1/10 (0.1), 1/5 (0.2), ½ (0.5), 1 (2/2), 1.5 ($1\frac{1}{2}$) y 2 (18/9). Así, podemos observar que las denominaciones fueron establecidas a partir de las notaciones surgidas de las distintas representaciones (*conceptos*) de los Números Racionales (presentadas en el apartado *Referente conceptual* del presente artículo). Se hizo necesario aclarar que las notaciones mencionadas pueden ser producto de más de una representación acerca de los Números Racionales, es decir, la fracción $\frac{a}{b}$ puede ser la notación de una *fracción como relación parte-todo, como cociente indicado* o *como relación multiplicativa,* por ejemplo.

En nuestra investigación, los Billetes Racionales se convirtieron en un mediador entre las construcciones sociales acerca de los Números Racionales y la apropiación que los estudiantes construyeron acerca de ellos. Lo anterior se evidencia en los episodios que mencionamos a continuación.

La manipulación de los Billetes Racionales por parte de los estudiantes, como una manera en que estos sirven de mediadores (a partir de los *instrumentos* presentes en ellos) para la manifestación de la *tensión* entre *conceptos cotidianos* y *concepto*s *científicos* acerca de los Números Racionales, puede evidenciarse en un episodio ocurrido en la I.E.R. El Prodigio, cuando el *Estudiante 1* decide resolver uno de los ejercicios que comercializa la *Empresa de ejercicios* para obtener *MatePesos* adicionales. En el ejercicio se plantea el siguiente enunciado: *Escribe 1.4 en forma de fracción.* En la figura 7 observamos que los *procedimientos* que el Estudiante 1 usó para darle solución no son los que se utilizan convencionalmente, pues no los recordaba. En los siguientes párrafos se explican los *procedimientos* que el Estudiante realizó.

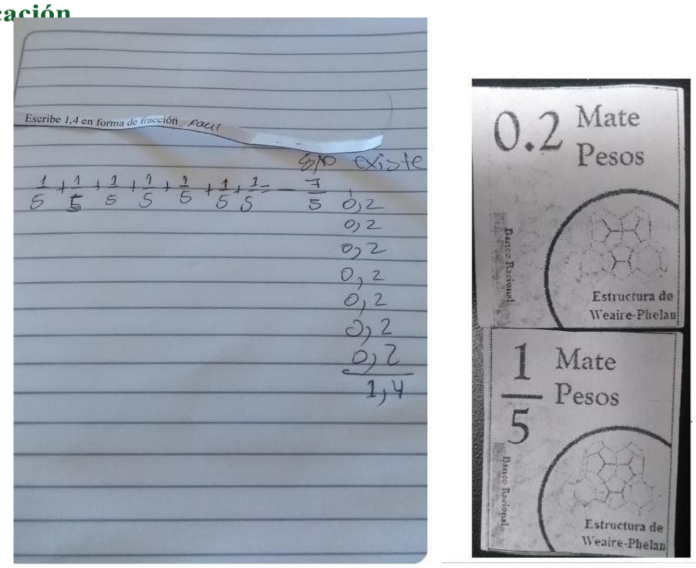


Figura 7: Solución ejercicio de la empresa de ejercicios por estudiante de la I.E.R. El Prodigio. Imagen propia, octubre de 2018.

De acuerdo a la solución que el *Estudiante 1* propuso para el enunciado expuesto, observamos que se manifiesta la *tensión* entre *conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* que venimos mencionando, pues la manipulación de los Billetes Racionales, en medio de las dinámicas que propició el Ambiente de Aprendizaje, hizo brotar en el estudiante unos *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales, es decir, las acciones espontáneas como vender, comprar y repartir Billetes, permitieron que el estudiante adquiriera elementos importantes para comprender los *procedimientos* con algunas representaciones de los Números Racionales, pero ante todo, las relaciones entre dichas representaciones. Así, cuando el enunciado le propuso escribir una manera para hacer una conversión particular de un número en notación derivada de la *fracción decimal* a otra notación derivada de otras maneras de entender las fracciones, se generó una *tensión*, entre algo sistematizado (conversiones decimales-fracción) y los *conceptos cotidianos* construidos en su experiencia al interior del Ambiente de Aprendizaje.

Los Billetes Racionales de denominación 1/5 *MatePesos* y 0.2 *MatePesos* le permitieron al *Estudiante 1* hacer una relación de igualdad entre estas cantidades, es decir, comprendió que 1/5 y 0.2 son el mismo Número Racional expresado con notaciones diferentes, además, entendía la manera de sumarlos (algo que ya había realizado antes en sus funciones en la empresa), por ello, como se ve en la parte izquierda de la Figura 7, sumó 0.2 tantas veces hasta obtener el resultado 1.4 y prosiguió a hacer lo mismo con 1/5, esto es, sumó las mismas veces dicho número hasta que obtuvo la respuesta de 7/5.

Este episodio deja ver la manera cómo se manifiesta la *tensión* con los *conceptos cotidianos,* acerca de un objeto de conocimiento matemático, como punto de partida. Aun así, para la manifestación de esta *tensión* se presentan situaciones en las cuales los *conceptos científicos* son el primer paso. En el episodio siguiente lo analizamos en detalle.

En la Figura 8, se observa una lista de igualdades elaborada por estudiantes de la I.E.R. Altavista que conformaron la *Empresa de patentes* en donde se escribe la relación entre las denominaciones presentes en los Billetes Racionales de la microsociedad. La lista expuesta fue producto de la búsqueda de los estudiantes para facilitar los procesos al interior de la empresa, en la que debían comprar o vender productos o servicios; así, por ejemplo, cada vez que debían comprar una cantidad de materiales y su valor se mostraba en una de las denominaciones presentadas en los Billetes, ellos utilizaban la tabla para tener la certeza del valor a pagar y cuáles Billetes necesitaban para comprar dicha cantidad de materiales.

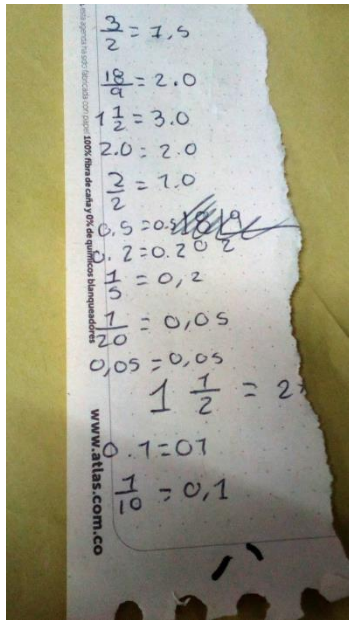


Figura 8. Lista de igualdades hechas por los estudiantes. Figura propia, septiembre de 2018.

La manera en la que esta empresa se desenvolvió al interior de la microsociedad con relación al uso de los Billetes Racionales, generó una *tensión* entre los *conceptos cotidianos y científicos* acerca de los Números Racionales. En este caso podemos observar que la *tensión* surge de la apropiación de esos *conceptos científicos*, cristalizados culturalmente en las notaciones, provenientes de las distintas representaciones de los Números Racionales, presentes en los Billetes, y el uso reiterativo de ellos en acciones espontáneas al interior de la microsociedad.

Así, los estudiantes partieron de unos *conceptos científicos*, provenientes de la sistematización histórica que han tenido los Números Racionales y que heredaron a lo largo de su vida escolar, reflejados en la escritura de símbolos matemáticos donde está presente la igualdad. Y, en el *encuentro* con acciones concretas, como comprar y vender al interior de la microsociedad, surgió una *tensión* que permitió a los estudiantes resignificar esos *conceptos científicos* a partir de su contacto con la experiencia en la microsociedad. Esto da pie a la relación dialéctica cambiante, entre *conceptos cotidianos y científicos,* que representamos en forma de espiral en el referente conceptual.

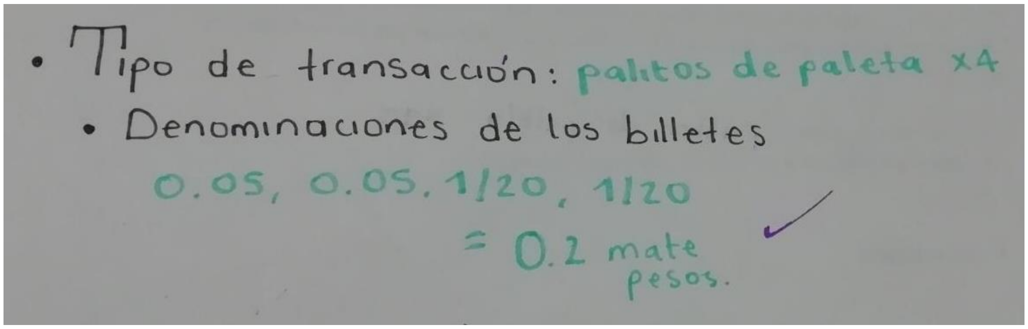


Figura 9. Fragmento de ficha realizada por la Empresa de Patentes. Figura propia, octubre de 2018.

La figura 9 es el fragmento de una ficha realizada por el mismo equipo, posterior al contacto con las experiencias del Ambiente de Aprendizaje, donde se logra observar cómo lo escrito en la lista de igualdades (figura 8), toma otros sentidos y significados. Así, la transacción, que involucró las relaciones entre las notaciones referentes a los billetes de 1/20 y 0.05 *MatePesos*, permitió a los estudiantes sintetizar lo que habían establecido en la lista de igualdades con acciones concretas cómo comprar palos de paleta con Billetes Racionales. Esto es lo que nos permite hablar de la movilización de las prácticas matemáticas generada por la *tensión* entre los *conceptos científicos y cotidianos,* lo que dio lugar al aprendizaje.

Durante las prácticas matemáticas al interior de la microsociedad, también se ha de esperar que alguno(os) de los estudiantes que participan de ella, no se acoja totalmente al conjunto de condiciones sociales de este sistema de prácticas o espacio simbólico de prácticas compartidas por el colectivo (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). Un caso que exponemos para mostrar lo anterior, se presentó en la revisión de una de las tareas en el Ambiente de Aprendizaje de la sesión número tres en I.E.R. Nuestra señora del Carmen, que consistió en contar los *MatePesos* proporcionados por el Banco Racional a cada empresa. En el *Depósito*, el estudiante que fue asignado para contar los *MatePesos*, observó una relación entre la moneda que utiliza diariamente en su contexto social (los Pesos Colombianos) y el papel moneda utilizado en esta microsociedad (los *MatePesos*), al lograr predecir a partir de la suma con los Pesos Colombianos, la suma de los *MatePesos*. El acontecimiento de esta relación fue la base del estudiante para realizar, en adelante, cualquier intercambio (compra o venta) de materiales o servicios al interior de la microsociedad. El diálogo con el estudiante acerca de lo mencionado sucedió como sigue:

> *Profesor: ¿cómo hicieron la suma?*
>
> *Estudiante 1: mire profe, yo me di cuenta de que esta pequeña* (señalando el billete con denominación de 1/20 MatePesos) *puede ser como una de cincuenta pesos, y cincuenta más cincuenta es cien pesos, o sea, cero punto un MatePesos. Por ejemplo, cuatrocientos Pesos son cero punto cuatro, o sea, cuatro de estos de cero punto uno* (señalando un billete con denominación de cero punto un MatePesos). *(*Estudiante 1, entrevista abierta, septiembre de 2018)

Su aporte es valioso en nuestra investigación pues, refleja la apropiación del estudiante de unos *instrumentos* propios de sus experiencias en el contexto en el cual se desenvuelve, que se constituyen en un medio para comprender una particularidad de una tarea propia de la microsociedad. Sin embargo, estas relaciones que el estudiante hace a partir de sus experiencias, no le permiten un acercamiento a los Números Racionales presentes en las denominaciones de los Billetes Racionales porque en esta manera de proceder, por ejemplo, sólo se puede comprender la suma y resta del papel moneda (*MatePesos)* en términos de la fracción como *fracción decimal* y las demás representaciones quedarían relegadas a un segundo plano.

Así, pese a que en este caso se presentó una relación entre *conceptos cotidianos*, que el estudiante ha construido a partir de sus prácticas cotidianas, y unos *conceptos científicos* presentes al interior de la microsociedad en los Billetes Racionales; dicha relación no es la *tensión* que aquí estamos analizando, pues esta debe involucrar necesariamente *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales. Este hecho nos permite clarificar lo que entendemos en esta investigación por *conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* para el análisis.

Un elemento que también estuvo presente (además de los Billetes) en la cuarta, quinta y sexta clase, desarrollada al interior del Ambiente de Aprendizaje, fue las fichas que construimos como uno de los instrumentos para recolectar los datos provenientes de los estudiantes. Estas fichas tuvieron la estructura que se observa en la Figura 10 y los estudiantes las debían diligenciar durante cada sesión de clase en los grupos que conformaron las empresas (una ficha por grupo).

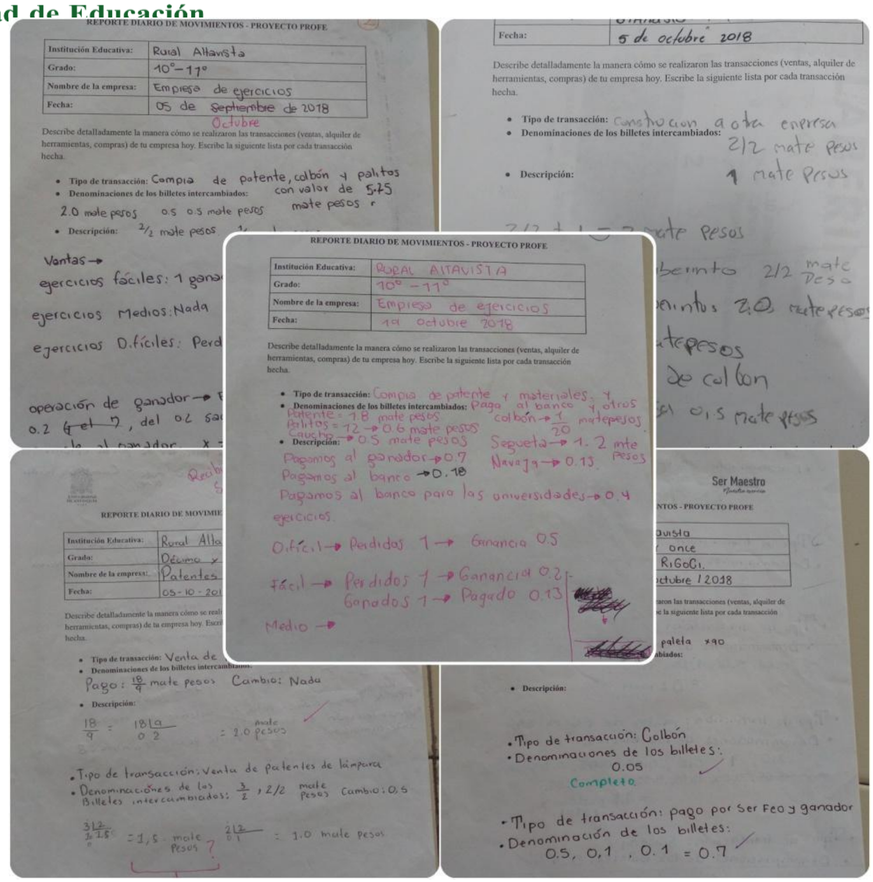


Figura 10. Fichas varias utilizadas por los estudiantes para registrar las transacciones de cada empresa. Figura propia, agosto de 2018.

En las fichas recibidas durante cada sesión de clase, pudimos observar que estas se convirtieron en un elemento importante para el registro de las labores cotidianas de cada empresa (como comprar, vender materiales, entre otras), mediante el uso de *instrumentos* característicos de los *conceptos científicos* acerca de los Números Racionales. Esto es, en algunas ocasiones esas labores cotidianas de la microsociedad, que constituían *conceptos cotidianos* acerca de este objeto de conocimiento matemático, se sintetizaron en algo visible (*instrumentos*), lo que propició un acercamiento a los *conceptos científicos* inmersos en los *instrumentos.* En este sentido, se puede observar una *tensión* mediada por las fichas, entre los aspectos *cotidianos* de la microsociedad y los *conceptos científicos* presentes en la misma.

Estos *conceptos científicos* se presentaron, sobre todo, en las relaciones que se hicieron entre las notaciones que se derivan de las representaciones de los Números Racionales presentadas en el *Referente Conceptual* del presente artículo.

A pesar de que las fichas fueron un elemento común a todas las labores de la microsociedad, al igual que los Billetes Racionales, en ellas no se presentaron los suficientes elementos que pretendíamos analizar con ellas, es decir, los estudiantes no se apropiaron de las fichas como sí lo hicieron con los Billetes (como se observa en los episodios presentados previamente y en el Artículo 1 de esta investigación). Esta falta de apropiación se debió, posiblemente, a que nosotros, como profesores orientadores de las tareas, no enfatizamos en la necesidad de diligenciarlas rigurosamente. Esto nos queda como experiencia y aprendizaje acerca de aspectos a tener en cuenta en próximas investigaciones

Por último, en la séptima sesión de clase de nuestro Ambiente de Aprendizaje trabajamos con los estudiantes un carrusel con distintos juegos o situaciones relacionados con las representaciones de los Números Racionales mencionadas previamente, sin embargo, fue algo que no analizamos con detalle en este artículo ya que el corto tiempo que estipulamos para su desarrollo (aproximadamente 20 minutos por cada equipo) no nos permitió profundizar en ellos.

Uno de los juegos que hubiera presentado elementos valiosos para analizar es el que denominamos *Dominó Racional* (Figura 11), el cual consistió en un dominó (como lo conocemos tradicionalmente) que tenía en sus fichas algunas notaciones o representaciones gráficas derivadas de las distintas representaciones de los Números Racionales (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006), a saber, escritura como decimal, porcentajes y fracciones. Consideramos que el *Dominó Racional* es un juego que presenta elementos valiosos con relación a las distintas relaciones que se pueden establecer entre las representaciones de los Números Racionales, pero no tenemos los elementos suficientes para analizarlo. Queda como un elemento importante a considerar en futuras investigaciones.

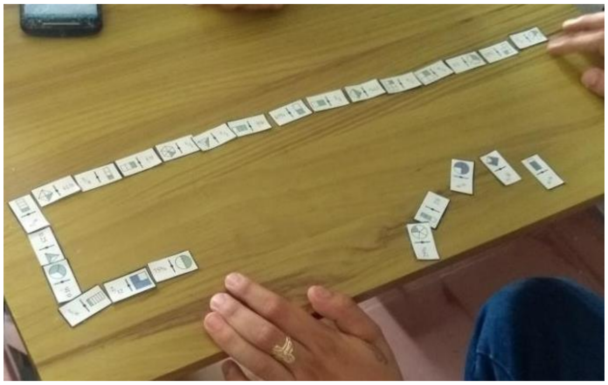


Figura 11. Dominó Racional. Figura propia, noviembre de 2018

Consideraciones finales

Al interior de la microsociedad analizamos acciones concretas que dieron cuenta de la *tensión* entre los *conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales*, las cuales propiciaron una movilización de las prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) de los estudiantes. Esta *tensión* puede presentarse en dos sentidos: cuando tienen como punto de partida los *conceptos cotidianos* o los *conceptos científicos*, aun así, por ser una relación dialéctica, independientemente del punto de partida, puede representarse en forma de espiral inacabada y en constante cambio.

Los Billetes Racionales construidos para la microsociedad y las fichas donde los estudiantes registraron las transacciones de su empresa en cada sesión de clase, se convirtieron en mediadores entre las construcciones sociales acerca de los Números Racionales y la apropiación que los estudiantes construyeron acerca de ellos, pues propiciaron la *tensión* entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* (Kozulin, 2000) emergentes en el Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015).

Este Ambiente de Aprendizaje que diseñamos para el acercamiento de los estudiantes a los Números Racionales, en medio de sus aciertos y desaciertos, nos permitió explorar acerca de los elementos constitutivos de las prácticas matemáticas de los estudiantes y cómo estas pueden movilizarse cuando se encuentran los saberes producto de la experiencia y la espontaneidad y los saberes producto de una sistematización cultural. En este sentido, consideramos que la noción de *concepto cotidiano* y *concepto científico* de la que hablaba Vigotsky a principios del siglo pasado, la cual rescatamos, actualizamos y profundizamos a partir de Kozulin (2000), puede servir como aporte a una mejor comprensión de los conceptos que las personas enuncian acerca de un objeto de conocimiento matemático, en el marco de las prácticas matemáticas y la Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014).

Referencias bibliográficas

Acevedo, D. y Arango, J. (2011). *Lógica y teoría de conjuntos*. Medellín: Reimpresos, duplicación de textos académicos de la Universidad de Antioquia.

Alves-Mazzotti, A. y Gewandsznajder, F. (1998). *O Método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

D´Amore, B.y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Gairín, J. (1998). Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación. Tesis de Doctorado, Universidad de Zaragoza. España.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación. Quinta edición*.México DF: Mcgraw-hill.

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (2009). El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase. Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Kozulin, A. (2000*). Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismo, 8 (1),* 1-43.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica, 3(20)*, 72-90.

Obando, G., Vanegas, M., y Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Módulo I*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Parra-Zapata, M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática. Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9(Extraordinario 1)*, 103-129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132- 150.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61-80.

CAPÍTULO III

Consideraciones finales

En este capítulo presentamos, en primer lugar, las conclusiones derivadas de los análisis realizados en los Artículos 1 y 2 de la presente investigación, orientados a responder la pregunta de investigación. En segundo lugar, los aportes teóricos que hace nuestro trabajo investigativo y los alcances del mismo. Y, por último, presentamos reflexiones y discusiones acerca de la enseñanza de las matemáticas y de los aportes que nos generó a nuestra formación como maestros.

Los resultados presentados en el Capítulo II (Artículos 1 y 2) de esta investigación, son elementos que nos permiten dar respuesta a la pregunta de investigación *¿de qué manera se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales?*, la cual es producto de las reflexiones y análisis suscitados de las tareas propuestas a los estudiantes durante el primer semestre de nuestra práctica pedagógica y del acercamiento a posturas teóricas en Educación Matemática situadas en una perspectiva histórico-cultural. Lo anterior da lugar al objetivo de investigación: *Analizar la manera cómo se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales.*

El Artículo 1 estuvo guiado por los análisis acerca de las categorías *acciones que movilizan las prácticas matemáticas de los estudiantes*, *instrumentos y procedimiento* e *interacción*, y nos permitió concluir que el Ambiente de Aprendizaje propuesto propició el desarrollo de la Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014), pues estuvo conformado por unas *acciones* orientadas por el objeto/motivo educativo de la *actividad* definido como el *encuentro* (Radford, 2018) de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca los Números Racionales. Las primeras *acciones* del ambiente de aprendizaje permitieron generar unos acuerdos mínimos para el curso de la *actividad* a partir del primer *encuentro* entre los estudiantes (con sus saberes previos) y lo que la cultura pone a su disposición acerca de los Números Racionales. Los Billetes Racionales, usados en el transcurso de la implementación, a partir de la *interacción* en los grupos de trabajo, se convirtieron en mediadores entre los saberes institucionales y los individuos, además que incentivaron la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, lo que propició la creación de nuevos conocimientos matemáticos en los estudiantes.

Las *interacciones,* entre estudiantes, el docente y el medio fueron horizontales y colaborativas, por lo que son coherentes con una manera de producción de saber en esta perspectiva educativa y, además, estuvieron orientadas por el objeto/motivo de la *actividad,* por lo que se constituyen como uno de los ejes principales de la *actividad* (Radford, 2018). Además, fueron *interacciones* que presentaron oposiciones y complementos entre los estudiantes, lo que fortaleció la apropiación del conocimiento matemático puesto en discusión (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009).

Los *procedimientos* utilizados por los estudiantes a la hora de enfrentarse a problemas con Números Racionales, fueron modificándose a partir de la familiarización con los Billetes Racionales que funcionaron como mediadores de la cultura (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). Esto propició, además, que muchas características de las prácticas matemáticas se movilizaran, y en ese sentido se transformaran.

En el Artículo 2 analizamos acciones concretas que dan cuenta de la *tensión* entre los *conceptos cotidianos y científicos acerca de los Números Racionales*, las cuales propiciaron una movilización de las prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) de los estudiantes. Esta *tensión* puede presentarse en dos sentidos: cuando se tiene como punto de partida los *conceptos cotidianos* o los *conceptos científicos*, aun así, por ser una relación dialéctica, independientemente del punto de partida, puede representarse en forma de espiral inacabada y en constante cambio.

Los Billetes Racionales construidos para la microsociedad y las fichas donde los estudiantes registraron las transacciones de su empresa en cada sesión de clase, se convirtieron en mediadores entre las construcciones sociales acerca de los Números Racionales y la apropiación que los estudiantes construyeron acerca de ellos, pues propiciaron la *tensión* entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* (Kozulin, 2000) emergentes en el Ambiente de Aprendizaje (Parra-Zapata, 2015).

En conclusión, de acuerdo a los análisis presentados en los Artículos 1 y 2 para dar respuesta a la pregunta de investigación, podemos decir que las prácticas matemáticas de los estudiantes de educación media a partir de la tensión entre *conceptos cotidianos* y *conceptos científicos* acerca de los Números Racionales, se movilizan:

i) a partir del *encuentro* individuo-sociedad, que puede presentarse en dos sentidos; por una parte, de los saberes producto de la experiencia práctica a los saberes culturalmente codificados, esto es, en un proceso donde la persona tiene como punto de partida sus experiencias cotidianas y se encuentra con un objeto de conocimiento producto de unas prácticas académicas y sistemáticas que le permite reflexionar acerca de tales experiencias y resignificarlas. Y, por otra parte, de los saberes culturalmente codificados a los saberes producto de sus experiencias cotidianas, esto es, el proceso contrario al anterior, donde la persona, a partir de un concepto abstracto y descontextualizado (*concepto científico*), se encuentra con unas prácticas que le permiten materializar este saber y, por lo tanto, resignificarlo en términos de su experiencia propia. Es decir, la *tensión* entre *conceptos cotidianos y científicos* puede presentarse cuando se tiene como punto de partida cualquiera de ellos, pero, además, es una relación dialéctica que no es lineal, por lo que podría representarse como una espiral inacabada y en constante cambio.

ii) mediadas por *instrumentos*, que para el caso de esta investigación, se encontraron presentes en los Billetes Racionales y en las fichas usadas por los estudiantes para registrar las transacciones diarias de las empresas. Los Billetes Racionales por su base conceptual acerca de las representaciones de los Números Racionales, se convirtieron en mediadores de material concreto para la *tensión*, entre los *conceptos científicos* presentes en ellos y los *conceptos cotidianos* producto de la manipulación por parte de los estudiantes en la experiencia del Ambiente de Aprendizaje. Por otra parte, las fichas diligenciadas por los estudiantes en cada sesión de clase se convirtieron en un elemento importante para sintetizar en algo visible las labores cotidianas de los estudiantes en la microsociedad. Estas labores constituyeron *conceptos cotidianos* acerca de los Números Racionales, y, al ser presentadas en las fichas, a través de *instrumentos* emergentes de los *conceptos científicos*, posibilitaron la *tensión* que moviliza las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Con respecto a los aportes teóricos y alcances de nuestra investigación planteamos, en primer lugar, que el Ambiente de Aprendizaje que diseñamos para el acercamiento de los estudiantes a los Números Racionales, en medio de sus aciertos y desaciertos, nos permitió explorar acerca de los elementos constitutivos de las prácticas matemáticas de los estudiantes y cómo estas pueden movilizarse cuando se encuentran los saberes producto de la experiencia y la espontaneidad y los saberes producto de una sistematización cultural. En este sentido, consideramos que la noción de *concepto cotidiano* y *concepto científico* de la que hablaba Vigotsky a principios del siglo pasado, la cual rescatamos, actualizamos y profundizamos a partir de Kozulin (2000), puede servir como aporte a una mejor comprensión de los conceptos que las personas enuncian acerca de un objeto de conocimiento matemático, en el marco de las prácticas matemáticas y la Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014).

Y, en segundo lugar, el aprendizaje como *encuentro* que genera *actividad*, es decir, como movilización de las prácticas, propicia transgredir el papel de los estudiantes como solo receptores del saber, los involucra activamente en su proceso de aprendizaje y los pone a dialogar con la cultura. Es esta la importancia de rescatar aquellas perspectivas educativas que se alejen del individualismo y la sumisión en Educación Matemática, donde pareciera que todo está acabado y la función del estudiante sea repetir al pie de la letra lo que el profesor sabe (así esté errado) sin posibilidad de reflexionar, refutar y discernir. Esto lo rescatamos en este trabajo y fue uno de los comentarios más recurrentes entre los estudiantes con los que se realizó la investigación. La mayoría de ellos resaltaron la importancia de buscar estrategias para que sea la *actividad* el motor del aprendizaje.

Dejamos el camino abierto para nuevas investigaciones que deseen replicar o tomar elementos de lo que presentamos en este trabajo, consideramos que el Ambiente de Aprendizaje propuesto es muy potente para realizar análisis de varios aspectos relativos a las prácticas matemáticas de los estudiantes, pero también de los maestros. El Ambiente de Aprendizaje, con unos instrumentos y técnicas adecuadas de registros de datos, permitiría reflexionar también acerca de aspectos como las formas de discursividad que se presentan en el aula de matemáticas. Además, queda pendiente un análisis centrado en los aspectos fenomenológicos que dieron origen a los Números Racionales y sus implicaciones en la enseñanza de los mismos.

Reflexiones finales en torno a nuestra formación como maestros

Para finalizar el presente documento, el cual trajo para nosotros un trabajo inagotable pero satisfactorio, queremos plantear algunas reflexiones personales en torno a nuestra práctica pedagógica y a nuestra formación profesional.

Nuestras prácticas pedagógicas, como lo hemos mencionado a lo largo del documento, las realizamos en contextos alejados de nuestros hogares, en lugares con unas dinámicas muy diferentes a las acostumbradas en nuestra cotidianidad. Esto, consideramos, fue un elemento importante para nuestra formación como maestros, pues nos generó diversas miradas acerca del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en diferentes contextos, además nos permitió entender que ser maestro de matemáticas es más que transmitir axiomas, definiciones o propiedades, es una responsabilidad asumida con las personas a las que nos dirigimos, aquellas que le dan sentido a nuestra profesión y que son la razón de cualquier proyecto educativo.

La perspectiva que asumimos, además, expandió mucho más el panorama, pues nos exigió reconocer las diferentes construcciones conceptuales que las personas hacen acerca de un objeto de conocimiento, reconocerlas como válidas y ponerlas en un diálogo horizontal con aquellos saberes que considerábamos estáticos, acabados o verdaderos. Entendimos, a partir de la experiencia, como lo leíamos en la perspectiva sociocultural, que somos nosotros mismos los que construimos esos saberes, los que le damos significado y los actualizamos de acuerdo con nuestros gustos y necesidades, y que en este proceso necesitamos a los demás, necesitamos de ellos, así como ellos necesitan de nosotros para dotar de significado nuestra historia y nuestras vidas.

El hecho de poder reflexionar constantemente acerca de nuestras prácticas pedagógicas, donde no tuvimos nunca un libreto que nos dijera qué hacer, nos permitió, en medio de tropiezos y frustraciones, grandes aprendizajes. Aprendimos que el camino está por hacer, que construirlo no es una tarea fácil, pero que si lo hacemos con amor, entrega y dedicación podemos generar procesos educativos donde las personas participantes sean valiosas, donde cada uno tenga la posibilidad de opinar, de disentir y proponer, pero sobre todo, donde se puedan movilizar prácticas sociales basadas en el respeto, la educación y la solidaridad, para la transformación de las realidades de los sujetos.

CAPÍTULO IV

Anexos

En este capítulo presentamos los anexos que apoyaron el desarrollo de la presente investigación.

Anexo A. Diseños de Patentes

En este Anexo se presenta el esquema utilizado para cada uno de los diseños de patentes en el Ambiente de Aprendizaje.

Las imágenes utilizadas para la construcción de esta patente se adaptaron de: https://www.youtube.com/watch?v=GtNw_XXLVfc.

Anexo B. Tarjetas de la suerte

¡Tarjeta de la suerte!

El Banco se está quedando sin fondos, cobrará 1/50 matepesos a todos por cada 5 palos de madera que tenga en su poder.

¡Tarjeta de la suerte!

En el colegio hicieron un concurso de feos y usted fue el ganador, cada empresa debe pagarle 0.7 matepesos.

¡Tarjeta de la suerte!

Para suplir el déficit presupuestal de las universidades públicas, cada empresa pagará ½ - 1/10 matepesos al Banco.

¡Tarjeta de la suerte!

El Banco ha tenido muy buenas ganancias, le dará 2,5 matepesos al primer equipo que ponga 3½ pares de zapatos en medio del salón.

¡Tarjeta de la suerte!

Cada empresa aporta 1,3 matepesos para una apuesta. Jugarán piedra, papel o tijera para ver quién se la gana.

¡Tarjeta de la suerte!

Su empresa debe pagar una contribución de ⅛ matepesos para financiar el Programa de Alimentación Escolar del municipio.

¡Tarjeta de la suerte!

¡Sus presentaciones no son gratis! Cobre 0.1 matepeso a cada participante para pagar el lugar de sus presentaciones de comedia (cuente un chiste después de recibir el pago).

¡Tarjeta de la suerte!

Los estudiantes de sexto también quieren construir lámparas, done ½ matepesos de su dinero para iluminar sus caminos como constructores.

¡Tarjeta de la suerte!

¡La carpintería - ferretería fue robada!, el Banco contribuirá con 1.8 matepesos para su indemnización si resuelve la siguiente operación:

$5\frac{1}{4} - 0.09 =$

¡Tarjeta de la suerte!

Pague al Banco 0.7 matepesos por cada empleado de su empresa por concepto de prestaciones sociales (salud, pensión y cesantías).

¡Tarjeta de la suerte!

Usted ha vencido el récord del constructor más rápido, cobre a cada empresa 0.5 matepesos (incluyendo la suya) como reconocimiento.

¡Tarjeta de la suerte!

¡La empresa de ejercicios está celebrando su aniversario!, sólo por hoy pagará el 200% por cada ejercicio realizado.

¡Tarjeta de la suerte!

¡El depósito está celebrando sus 7 años de aniversario!, sólo por hoy tendrá un 7% a los 7 primeros compradores.

¡Tarjeta de la suerte!

¡La carpintería - ferretería está celebrando su aniversario!, reclama un bono de $1\frac{1}{4}$ en el banco para que compres lo que quieras en esa empresa.

Anexo C. Consentimiento informado de los Padres de Familia para publicación de registros

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FUNDACIÓN ARGOS
PROYECTO PROFE

ARGOS

Permiso de padres, madres y/o acudientes para la participación de su hijo o hija en investigación académica para el Proyecto de Práctica Pedagógica vinculado al Proyecto PROFE –Convenio Fundación Argos y Universidad de Antioquia

Por este medio deseamos solicitarles su permiso para que su hijo o hija haga parte de una investigación académica para el Proyecto de Investigación que se viene adelantando en conjunto en el marco del proyecto de Práctica Pedagógica vinculado al Proyecto PROFE –Convenio Fundación Argos y Universidad de Antioquia

¿Por qué se está llevando a cabo esta Investigación?

Esta investigación se realiza en el marco de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia y entre uno de sus objetivos pretende propiciar espacios de interacción en los que los estudiantes participantes puedan relacionar las matemáticas con sus vivencias y su entorno a partir de la creatividad, el desarrollo del espíritu investigativo, la cooperación, la participación y el fomento por el respeto. La investigación responde a la necesidad de involucrar a los estudiantes en ambientes de aprendizaje diferentes, en los que el estudiante sea protagonista de su propio proceso de aprendizaje; que se parta de la motivación y el interés personal, para promover la participación. Se trata de constituir un espacio que les permita a los niños de la institución indagar, experimentar, reflexionar y discernir de temas de trascendencia relacionados con las matemáticas y con la vida misma.

¿Qué procedimientos están implicados?

La Investigación trae consigo varios procedimientos, en particular sus hijos harán parte de encuentros presenciales semanales durante el año lectivo 2018. En este proceso participarán en clases previamente avaladas por la Asesora Pedagógica.

¿Existen probables riesgos y/o incomodidades para su hijo o hija?

Los riesgos a los estudiantes en esta Investigación son bajos. Se realizarán entrevistas enfocadas a sus percepciones y sentires, se tomarán fotos y se realizarán grabaciones de audio y video.

Si los estudiantes no desean participar en alguna de las actividades que se propongan estará en libertad de hacerlo. Si los estudiantes se sienten incómodos con alguna pregunta durante la entrevista de grupo, no tienen que contestarla. También, no tienen que preocuparse de decir algo "equivocado". Además, el proceso del grupo será administrado por los investigadores que se entrenan para ayudar a estudiantes a escuchar respetuosamente cada una de las opiniones. Los investigadores escucharán cuidadosamente y se cerciorarán de que su hijo o hija se sienta cómodo. Se invitará a los participantes también que hablen con los entrevistadores en privado si desean discutir las experiencias que no desean compartir delante de otros estudiantes.

¿Qué pasará con la privacidad de su hijo o hija?

No se divulgará ninguna información de su hijo o hija a cualquier persona fuera del proceso de la investigación. Los nombres de los estudiantes serán reemplazados por seudónimos. El personal de investigación mantendrá la información de su hijo o hija confidencial y no se revelará su nombre en cualquier material o documento. Por ejemplo, cuando los resultados de la investigación se publiquen o se discutan en conferencias, no hay información incluida que puede revelar la identidad de su hijo o hija de cualquier manera. Cualquier transcripción de trabajos, audio o video serán tomados con absoluta confidencialidad.

¿Puede su hijo o hija retirarse del estudio?

Usted y su hijo o hija pueden elegir estar en esta Investigación o no. Si su hijo o hija se ofrece voluntariamente a estar en esta investigación, él o ella pueden retirarse en cualquier momento sin consecuencia alguna. Su hijo o hija puede también rechazar contestar cualquier pregunta que él o ella no desee contestar y todavía permanecer en la Investigación. El retiro de su hijo o hija será dejado en evidencia en un acta.

¿A quién preguntar si tiene alguna duda?

Si usted o su hijo o hija tienen preguntas que no sean tratadas por esta forma del consentimiento, se puede comunicar con el profesor del proyecto Argos quien estará en total disposición de atenderle o con la Asesora Pedagógica Mónica Marcela Parra Zapata integrante del grupo de Investigación Mathema-Fiem de la Universidad de Antioquia; a través del correo electrónico: monica.parra@udea.edu.co

Los Investigadores y la Asesora estarán disponibles para discutir cualquier pregunta que usted desee plantear.

¿Cuáles son sus derechos en la Investigación?

Si usted o su hijo o hija tienen cualquier pregunta con relación a los derechos de ser un participante de la investigación, usted puede comunicarse al correo electrónico mathema.fiem@gmail.com.

¿Desea su hijo o hija participar de la Investigación?

En días anteriores se dio a conocer a su hijo o hija toda la información correspondiente a la participación en la investigación, a lo cual su hijo o hija ha manifestado de manera voluntaria querer participar.

Permiso para que su hijo o hija participe de la Investigación

Si usted acuerda permitir que su hijo o hija participe en esta Investigación, por favor firme y escriba en letra legible su nombre en la línea proporcionada para el "padre o Acudiente".

FIRMA DEL PADRE O TUTOR: Acuerdo permitir que mi hijo o hija participe en esta Investigación.

Entiendo que mi hijo o hija puede elegir el no participar en la Investigación incluso después de que haya concedido este permiso.

______________________________	____________________________________
Nombre del padre o del tutor	Firma del padre o del tutor

C.C: ________________________

Teléfono de contacto: ____________________

Fecha: _____________________________

Anexo D. Autorización uso de fotografías y videos con fines pedagógicos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

AUTORIZACIÓN USO DE FOTOGRAFÍAS Y VIDEOS CON FINES PEDAGÓGICOS

Ser Maestro

Yo __________________________ autorizo al proyecto "PROFE", para la captura de fotografías y tomas de video del estudiante ____________________________________ del grado ________, de la Institución Educativa _______________________________. Permitiendo así el uso de estas, en publicaciones relacionadas con dicho proyecto.

Firma acudiente: ____
CC: _________________
Fecha:______________

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

AUTORIZACIÓN USO DE FOTOGRAFÍAS Y VIDEOS CON FINES PEDAGÓGICOS

Ser Maestro

Yo __________________________ autorizo al proyecto "PROFE", para la captura de fotografías y tomas de video del estudiante ____________________________________ del grado ________, de la Institución Educativa _______________________________. Permitiendo así el uso de estas, en publicaciones relacionadas con dicho proyecto.

Firma acudiente: ____
CC: _________________
Fecha:______________

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

AUTORIZACIÓN USO DE FOTOGRAFÍAS Y VIDEOS CON FINES PEDAGÓGICOS

Ser Maestro

Yo __________________________ autorizo al proyecto "PROFE", para la captura de fotografías y tomas de video del estudiante ____________________________________ del grado ________, de la Institución Educativa _______________________________. Permitiendo así el uso de estas, en publicaciones relacionadas con dicho proyecto.

Firma acudiente: ____
CC: _________________
Fecha:______________

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

AUTORIZACIÓN USO DE FOTOGRAFÍAS Y VIDEOS CON FINES PEDAGÓGICOS

Ser Maestro

Yo __________________________ autorizo al proyecto "PROFE", para la captura de fotografías y tomas de video del estudiante ____________________________________ del grado ________, de la Institución Educativa _______________________________. Permitiendo así el uso de estas, en publicaciones relacionadas con dicho proyecto.

Firma acudiente: ____
CC: _________________
Fecha:______________

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Anexo E. Artículo enviado a la primera edición de la revista Wiphala

Prácticas Matemáticas de estudiantes de Educación media: construcción de un problema de investigación

Mathematical Practices of Middle School students: construction of a research problem

Santiago, Cardona [1]

Julián, Ramírez [2]

Manuela, Restrepo-Puerta [3]

Mónica Marcela, Parra-Zapata [4]

[1]Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas y Física: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. santiago.cardona@udea.edu.co

[2]Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas y Física: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. jdario.ramirez@udea.edu.co

[3]Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas y Física: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. manuela.restrepop@udea.edu.co

[4]Profesora de cátedra: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. monica.parra@udea.edu.co

Resumen:

Este artículo da cuenta de las reflexiones suscitadas en el primero de los dos semestres de nuestra práctica pedagógica, en el marco de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Presentamos una serie de tareas, las cuales analizamos a la luz de la teoría de la Actividad Matemática, con el fin de aportar elementos para la construcción del problema de investigación desarrollado durante el segundo semestre de esta práctica pedagógica. Los resultados de estos análisis dan cuenta de la importancia de proponer tareas a los estudiantes que movilicen sus prácticas matemáticas a partir de la interacción con otros y con el medio, con la intención de promover espacios en el aula en los que los estudiantes además de receptores sean partícipes de su proceso de aprendizaje.

Palabras clave: Actividad Matemática, Prácticas matemáticas, Instrumentos, Conceptos cotidianos, Conceptos científicos.

Abstract:

This paper gives an account of the reflections raised in the first of the two semesters of our pedagogical practice, within the framework of the Bachelor Degree in Mathematics and Physics of the Faculty of Education of the University of Antioquia. We present a series of tasks, which we analyze in light of the theory of Mathematical Activity, in order to provide elements for the construction of the research problem developed during the second semester of this pedagogical practice. The results of these analyzes show the importance of proposing tasks to the students that mobilize their mathematical practices from the interaction with others and with the environment, with the intention of proposing educational processes where the student is not only a receiver but has an active role in your learning process.

Key words: Mathematical activity, Mathematical practices, Instruments, Everyday concepts, Scientific concepts.

Resumo:

Este artigo apresenta um relato das reflexões levantadas no primeiro dos dois semestres de nossa prática pedagógica, no âmbito do Curso de Licenciatura em Matemática e Física da Faculdade de Educação da Universidade de Antioquia. Apresentamos uma série de tarefas, que analisamos à luz da teoria da Atividade Matemática, a fim de fornecer elementos para a construção do problema de pesquisa desenvolvido durante o segundo semestre desta prática pedagógica. Os resultados dessas análises mostram a importância de propor tarefas aos alunos que mobilizem suas práticas matemáticas a partir da interação com os outros e com o ambiente, com a intenção de propor processos educativos em que o aluno não seja apenas um receptor, mas tenha um papel ativo em seu processo de aprendizagem.

Palavras chave: Atividade matemática, Práticas matemáticas, Instrumentos, Conceitos cotidianos, Conceitos científicos.

Recibido en día/mes/año (lo asigna la revista)

Aceptado en día/mes/año (lo asigna la revista)

1. Introducción

El presente artículo es producto del proceso de práctica pedagógica realizado en diferentes instituciones educativas del departamento de Antioquia-Colombia mediante el Proyecto PROFE[11] desarrollado en el transcurso de los dos semestres del año 2018. El Proyecto nos planteó grandes retos a nivel personal y formativo, pues nos permitió acercarnos al ejercicio docente en diferentes lugares de nuestro país, permitiéndonos analizar las diversas maneras en que los estudiantes aprenden matemáticas en cada uno de los lugares a los que asistimos.

Presentamos las diferentes reflexiones que nos suscitó nuestro primer semestre de práctica pedagógica en las implementaciones que realizamos, en tres Instituciones Educativas diferentes ubicadas en los municipios de Girardota-Antioquia y San Luis-Antioquia.

Las reflexiones se generaron en diálogo con referentes conceptuales de la literatura tales como Obando, Arboleda y Vasco (2014), con sus aportes a la teoría de la Actividad Matemática y su caracterización de las prácticas matemáticas, Radford (2006, 2014, 2018) en sus aportes a la comprensión del devenir de la perspectiva histórico-cultural en Matemáticas y para el entendimiento de la *interacción* en la *actividad*, esto junto a Jaramillo, Obando y Beltrán (2009). Por último, retomamos los aportes de Kozulin (2000) acerca de los conceptos cotidianos y científicos presentes en las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Este artículo presenta las reflexiones de la primera parte de nuestro proceso de investigación, a partir de las cuales surge el sustento empírico para proponer una estrategia de intervención, implementada en el segundo semestre del año.

Para dar cuenta de los análisis, de los alcances y desafíos que presentó nuestro primer semestre de práctica pedagógica presentamos este artículo en cuatro apartados. En el primero, abordamos los referentes conceptuales que nos permiten hablar de la Actividad Matemática y de las prácticas matemáticas. En el segundo, hacemos una presentación general de las tareas iniciales propuestas a los estudiantes. En el tercero, presentamos reflexiones acerca del desarrollo de las tareas con los estudiantes. Por último, presentamos unas consideraciones finales donde concluimos los análisis, hacemos las últimas reflexiones y dejamos el camino abierto a nuevas investigaciones.

2. Referente conceptual

2.1 Perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática

[11] PROFE: Programa de Fortalecimiento Educativo, para el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia. Convenio Universidad de Antioquia y Fundación Argos (Entidad privada sin ánimo de lucro).

La perspectiva histórico-cultural (o socio-cultural) de la Educación Matemática engloba nuestro accionar investigativo, pues entendemos que el conocimiento matemático es una construcción de las personas a lo largo de la historia. Radford (2014) nos presenta aportes para comprender el surgimiento de esta perspectiva. Esta perspectiva viene posicionándose, desde finales de siglo pasado, como una alternativa a la manera individualista generalizada de entender el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Es el esfuerzo de diferentes investigadores por rescatar los aportes de la psicología histórico-cultural de Lev Vygotsky (junto a los intelectuales soviéticos de principios del XX) y actualizarlos y adaptarlos al entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Al respecto plantea:

> Estos investigadores estaban interesados en entender el problema del papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje del alumno—un problema que todavía estamos luchando por entender y que está lejos de haber sido respondido de manera clara y definitiva (Radford, 2014, p. 133).

Podemos decir que es una perspectiva relativamente joven en Educación Matemática en la cual se han hecho muchos aportes a nivel investigativo, pero aún queda mucho camino por construir; por lo que esperamos que esta investigación pueda generar aportes a ella.

Esta perspectiva se preocupa por entender la Educación Matemática como un fenómeno social, cultural e histórico, donde el conocimiento matemático es el resultado de la acción humana en un contexto de prácticas particulares con unas delimitaciones institucionales de acuerdo a una comunidad académica específica. Es decir, no se trata de que los estudiantes sean solo receptores ni que se apropien exactamente de los saberes construidos anteriormente, se trata de que sean hábiles con unas maneras de hacer y pensar en matemáticas a la vez que crean y aportan a ellas. Es por esto que nuestras prácticas pedagógicas y nuestra investigación se enriquecieron por esta perspectiva, pues ella generó diversas miradas y experiencias en los diferentes contextos en los que nos desenvolvimos y nos permitió reconocer saberes previos de los estudiantes poniéndolos en discusión, por medio de prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014), con saberes culturales.

Por otra parte, Kozulin (2000) nos presenta elementos importantes para el devenir histórico de la perspectiva socio-cultural de la educación, nos aproxima a los aportes de Vygotsky acerca de los estudios socioculturales, a su interés por la relación entre el lenguaje humano y la conciencia y al desarrollo de los procesos mentales superiores (pensamiento verbal, memoria lógica, atención selectiva), los cuales se originan mediante la *actividad* cultural humana, es decir, de la acción al pensamiento. Este desarrollo de la idea de *actividad* en Vygotsky (y posteriores como Leontiev), como proceso colectivo y orientado, para la construcción de sentidos y significados es retomado por diversos autores en la actualidad para buscar comprender el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Entre ellos encontramos a Obando, Arboleda y Vasco (2014), quienes hacen valiosos aportes para una teoría de la Actividad Matemática.

2.2 Actividad Matemática y Prácticas Matemáticas

Encontramos entonces, los aportes de Obando, Arboleda y Vasco (2014) a una teoría de la Actividad Matemática como un sustento importante para nuestro proceso de investigación (ver Figura I). Allí, la *actividad* se entiende como un conjunto de acciones socialmente dirigidas con el objetivo de alcanzar un fin (objeto/motivo), pero además como un proceso colectivo en el cual la *interacción* con otros y con el medio y la reflexión de las propias prácticas, son fundamentales para la transformación de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un sistema de prácticas institucionalizado, histórico y cultural.

El hacer con otros, orientado hacia un fin, es lo que permite la construcción de sentidos y significados, "la acción de cada sujeto siempre constituye una réplica a las acciones de los otros" (Jaramillo, Obando y Beltrán, 2009, p. 9), es el proceso por el cual los sujetos se inscriben a la cultura a través de la *interacción* (Radford, 2018).

Figura I: Actividad Matemática. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona, (2019, en prensa)

Las prácticas matemáticas que permiten evidenciar la manera como los sujetos se inscriben a la cultura se pueden caracterizar, en correspondencia con Obando, Arboleda y Vasco (2014), por

> los *objetos de conocimientos* con —y sobre los cuales se actúa— los *conceptos* que se enuncian sobre los mismos, los *instrumentos* para la acción, las técnicas que permiten tales instrumentos, los *problemas*, en tanto metas que orientan la acción, las *formas de discursividad* que permiten poner el hacer en el lenguaje —formas de decir, de escribir, de comunicar—, y finalmente el conjunto de visiones metamatemáticas [configuración epistémica] que permiten la toma de decisiones sobre el hacer —cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológicas— (p. 83)

Estas características permiten mostrar, no solo la manera cómo las personas desarrollan en el presente su Actividad Matemática, sino también, cómo sus transformaciones dejan ver la constitución de nuevos conocimientos matemáticos. Es decir, la movilización (transformación) de las prácticas matemáticas es el aprendizaje.

En este artículo, nos centramos en analizar los *instrumentos* y los *conceptos* en el marco de la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes. Los *instrumentos* son un mediador entre las construcciones sociales y la apropiación que los individuos tengan de ellas, es decir, no son solo signos, símbolos, textos, fórmulas, gráficas, entre otros, pues de ser así "el lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos" (Radford, 2006, p. 113) y, por tanto, son también, las *maneras de leer el mundo* que se encuentran encarnadas en los objetos materiales y simbólicos.

Los *conceptos*, por su parte, son constructos simbólicos que traen consigo unas operaciones mentales y que son el producto de un proceso de generalización de atributos, pero también, y sobre todo, un proceso de síntesis de dichos atributos que lo hacen situarse en relación con otros conceptos en una red sistemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014). Los *instrumentos* y los *conceptos* reflejados en las prácticas matemáticas de los estudiantes, permiten evidenciar sus maneras de acercarse a los *objetos de conocimiento matemático*. Sus cambios repercuten en la movilización de los demás elementos constitutivos de las prácticas matemáticas, es decir, generan aprendizaje. Estos *conceptos* según Kozulin (2000) pueden ser *cotidianos* o *científicos.*

2.3 Conceptos cotidianos y científicos

Los *conceptos cotidianos* (Kozulin, 2000) se encuentran ligados directamente con la experiencia de las personas en sus prácticas diarias (incluidas las prácticas académicas), son conceptos espontáneos que surgen de las reflexiones que los individuos hacen de sus prácticas cotidianas y de las generalizaciones producto de dichas reflexiones. Estos no aparecen comúnmente en el programa escolar pero generan herramientas importantes para el entendimiento del mundo. Sin embargo, los conceptos cotidianos son limitados y carecen de sistematicidad, por lo que es importante la interrelación, a través de las prácticas matemáticas, con *conceptos científicos*, los cuales son avalados por una comunidad académica y presentan estructuras organizadas y jerárquicas. Estos son codificaciones culturales y construcciones históricas[12]. La interrelación entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* genera una *tensión*, pues es un proceso de disputa y complemento que propicia cambios en el tiempo a partir de las síntesis producto de la *tensión* entre ellos.

3. Camino metodológico y tareas propuestas

[12] Cuando nos referimos a conceptos científicos no hablamos solamente de aquellos que surgen directamente de una ciencia en específico, sino de aquellos que se caracterizan por poseer una estructura formal, lógica y descontextualizada.

La práctica pedagógica que realizamos se desarrolló en tres semestres académicos, en este artículo reportaremos el proceso vivido durante el primer semestre. El primer semestre de nuestra práctica pedagógica fue el momento donde dimos inicio al trabajo de investigación. Allí, basados en un enfoque cualitativo, observamos, a través de relaciones dialógicas y comunicativas con los estudiantes, diferentes elementos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son problemáticos en términos investigativos, coherentes con la perspectiva educativa que asumimos y expusimos en el apartado anterior.

El trabajo de investigación fue llevado a cabo en el transcurso del año 2018 con estudiantes de educación media (entre 15 y 18 años), en en tres Instituciones Educativas diferentes ubicadas en dos municipios del departamento de Antioquia-Colombia, a saber: los municipios de Girardota-Antioquia y San Luis-Antioquia, en las que hicimos presencia los investigadores de manera separada,pero realizamos las mismas planeaciones para nuestras clases.

En este semestre construimos y ejecutamos planeaciones de clase que buscaron fortalecer en los estudiantes algunas competencias y pensamientos matemáticos propuestos por el MEN[13] en los *Lineamientos curriculares de Matemáticas* (1998), los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (2006) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas-Versión 2* (2016), a la vez que aportaron herramientas a los estudiantes para la presentación de las Pruebas Saber 11 (examen de Estado) y los exámenes de admisión a las universidades públicas de Medellín, Colombia (Universidad de Antioquia y Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín). Esto, dadas las condiciones del proyecto, el cual tenía como objetivos el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia y aportar elementos formativos que permitan a los estudiantes de educación media acceder a la educación superior en nuestro país.

Esta primera etapa de nuestro trabajo de investigación la desarrollamos en tres ciclos como se muestra en la Figura II:

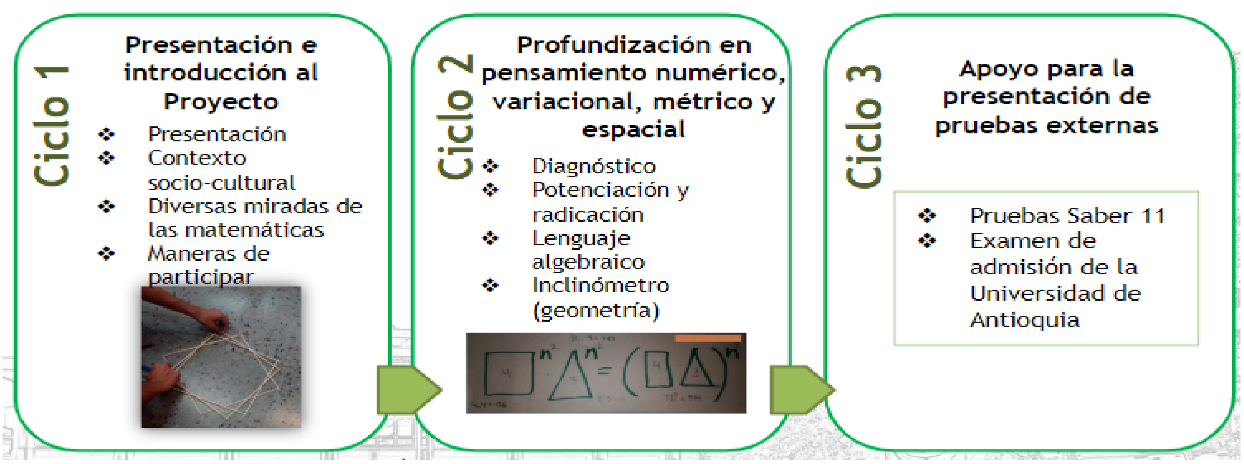


Figura II: Ciclos iniciales del primer semestre de práctica pedagógica. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

13 Ministerio de Educación Nacional de Colombia

Los ciclos presentados en la Figura II, se desarrollaron de la siguiente manera:

1) Presentación e introducción al proyecto: dividido en tres sesiones de clase de dos horas cada una, en el cual presentamos el proyecto a los estudiantes participantes y propusimos tareas encaminadas a reconocer el contexto socio-cultural de los estudiantes, impulsar la creatividad a través del juego y ahondar en las diferentes maneras de argumentar;
2) Profundización en pensamiento numérico, variacional, métrico y espacial[14]: dividido en varias sesiones de clase de dos horas cada una, en el cual profundizamos en los pensamientos numérico, variacional, métrico y espacial con base en los documentos orientadores del currículo del área de matemáticas en Colombia; y, finalmente,
3) Presentación de pruebas externas: en el cual, apoyados en los ciclos anteriores, aportamos herramientas para la presentación de las Pruebas Saber 11 y los exámenes de admisión a las universidades públicas de Medellín (Universidad de Antioquia y Universidad Nacional de Colombia)[15].

A continuación presentamos algunos aspectos que se abordaron en cada uno de los ciclos, con un especial énfasis en las tareas que nos permitieron observar elementos esenciales en las prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) de los estudiantes en el aula.

4. Análisis de las experiencias. Reflexiones y discusiones[16]

En este apartado presentamos cuatro episodios sucedidos en las tres instituciones educativas presentadas anteriormente, el análisis a los episodios nos permitió reflexionar acerca del devenir de la Actividad Matemática, las prácticas matemáticas de los estudiantes y de la presencia de los conceptos (cotidianos y científicos) y los *instrumentos* en algunas tareas propuestas. Iniciamos con una de las tareas del primer ciclo, donde los estudiantes resolvieron acertijos lógicos al usar palillos de madera. Continuamos con la primera tarea del segundo ciclo que consistió en problemas escritos con Números Racionales y ecuaciones lineales. Seguido a esto, presentamos una tarea del segundo ciclo donde se relacionan los conceptos cotidianos y los conceptos científicos para la construcción de *instrumentos* matemáticos. Por último, mostramos cómo la construcción de un instrumento de medida permitió poner en movimiento la Actividad Matemática, logrando el aprendizaje.

En el primer ciclo desarrollamos una tarea que permitió explorar diversas miradas de las matemáticas, la cual llamamos *Carrera de obstáculos lógicos*. Esta tarea consistió en cuatro acertijos lógicos que los estudiantes debían resolver con la ayuda de palillos de madera (ver figura III). La tarea implicaba la *interacción* permanente de los estudiantes, entre ellos y con

[14] El pensamiento aleatorio también hace parte de los cinco pensamientos propuestos por el MEN (1998), pero no fue posible trabajarlo por falta de tiempo.

[15] Este ciclo no fue objeto de estudio en nuestra investigación, por lo que omitiremos los detalles para efectos del presente artículo.

[16] Los análisis presentados en este apartado son similares (y están relacionados) a los presentados en Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa), debido a que estos fueron los análisis que permitieron la construcción del problema de investigación en nuestro Trabajo de Grado (relacionado con nuestra Práctica Pedagógica) para optar al título de Licenciados en Matemáticas y Física.

materiales poco convencionales, en el aula de matemáticas. Las *interacciones* entre ellos se realizaron de manera colaborativa y orientadas a la solución del problema presentado, es decir, los estudiantes no solo hicieron cosas juntos, sino que fueron capaz de orientar su trabajo en equipo a la consecución de un objetivo. Es esto lo que Radford (2018) llama una *interacción* humana orientada por la *actividad* que permite un “proceso de inscripción del sujeto en la cultura” (p. 72).

Figura III: Juego lógico con palillos. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

Esta tarea permitió que se desarrollara una sesión de clase dinámica y participativa, en la cual se fomentó el trabajo en equipo, la *interacción* y se impulsó la creatividad a través del juego.

Además, esta tarea, nos permitió observar algunas relaciones que los estudiantes hicieron con su contexto y sus ocupaciones cotidianas a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas. Un ejemplo de ello, lo pudimos observar cuando uno de los estudiantes de la I.E.R. Altavista, el cual trabaja a diario en un restaurante con su madre, resolvió de manera rápida un problema que implicaba el movimiento de figuras; al resolverlo argumentó que “lo he logrado fácilmente debido a que acomodo todos los días las mesas del restaurante de mi mamá y juego con las figuras que se forman al montar una mesa sobre otra”[17].

Este hecho nos permitió reflexionar acerca de cómo los estudiantes tejen relaciones dialécticas entre su contexto y los conceptos matemáticos, habilidades o pensamientos. Resaltamos que los *conceptos cotidianos*, que son producto de la práctica espontánea de las personas en su vida diaria, se constituyen insumos para el devenir de la Actividad Matemática en el aula, y por tanto, para la creación de condiciones necesarias para el aprendizaje. Este es un aspecto que profundizaremos en el desarrollo de las siguientes tareas.

[17] Estudiante 1, entrevista, 23 de marzo de 2018.

Para el segundo ciclo, decidimos empezar con una tarea escrita donde abordamos ejercicios referentes a los pensamientos numérico y variacional (MEN, 1998), con la intención de explorar los diferentes *instrumentos* y *conceptos* que los estudiantes manifestaban acerca de estos dos pensamientos matemáticos. Los *objetos de conocimientos matemático* que se abordaron en esta tarea fueron los Números Racionales y las ecuaciones lineales a partir de diversos *problemas* planteados. Esta tarea permitió evidenciar varios aspectos problemáticos en las prácticas matemáticas de los estudiantes que pueden posibilitar múltiples investigaciones en Educación Matemática.

Con respecto a las prácticas matemáticas de los estudiantes, pudimos observar dos situaciones reiterativas:

- No hay una conexión entre los contextos de las preguntas, los *conceptos* y los *instrumentos* asociados a estos a partir de los cuales se puede abordar la solución de las preguntas; es decir, en algunas preguntas se evidencia (de manera oral o por medio de un gráfico) una comprensión de lo planteado, lo que quiere decir, en correspondencia con Obando, Arboleda y Vasco (2014), que se presentan unos *conceptos* construidos acerca del *objeto de conocimiento matemático*, pero no se presenta asociación con un determinado *instrumento* para encontrar su solución (ver figura IV).

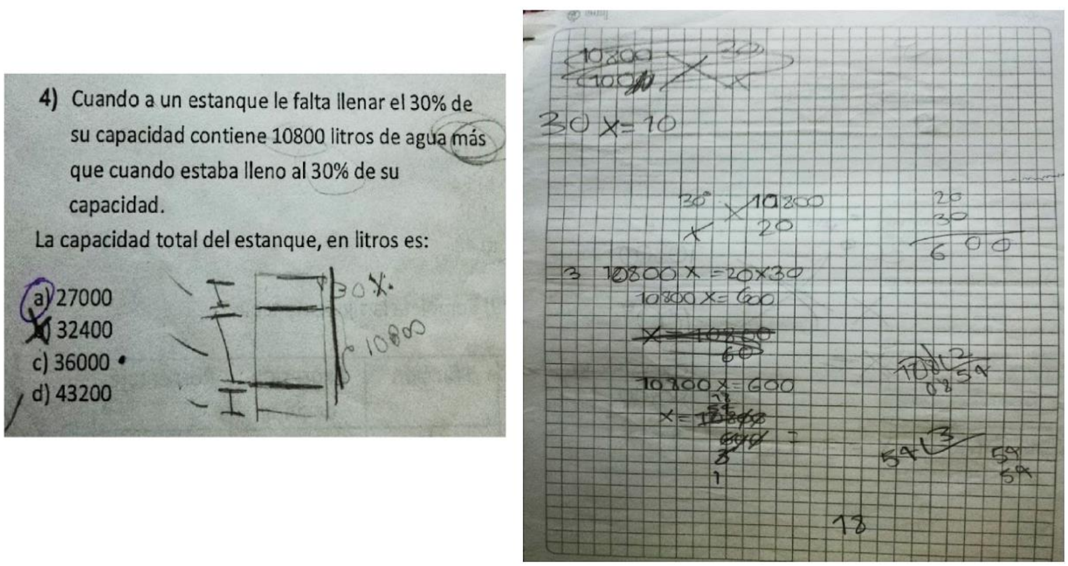


Figura IV: Solución problema estanque en la I.E.R. El Prodigio. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

En la Figura IV observamos, en la parte izquierda, que el estudiante logra realizar un diagrama que ilustra lo que el enunciado le plantea, es decir, puede presentar un *instrumento* asociado al *concepto* matemático donde se muestra una apropiación de construcciones sociales, pero a su vez, deja ver (en la parte derecha de la Figura IV) que no consigue hacer uso de unas maneras culturalmente codificadas de proceder en el área de matemáticas que le ayuden a darle solución a la situación que expone el enunciado. Esto deja ver la desconexión entre un *instrumento* para la acción en matemáticas y otro, o bien, que hay algunos *conceptos* construidos (lo que puede decirse del objeto) pero desconectados de unas técnicas e *instrumentos* que permitan materializarlos.

- Los estudiantes utilizan diversas representaciones, símbolos y expresiones (*instrumentos)* para expresarse acerca de un mismo problema matemático y para llegar a su solución (ver Figura V).

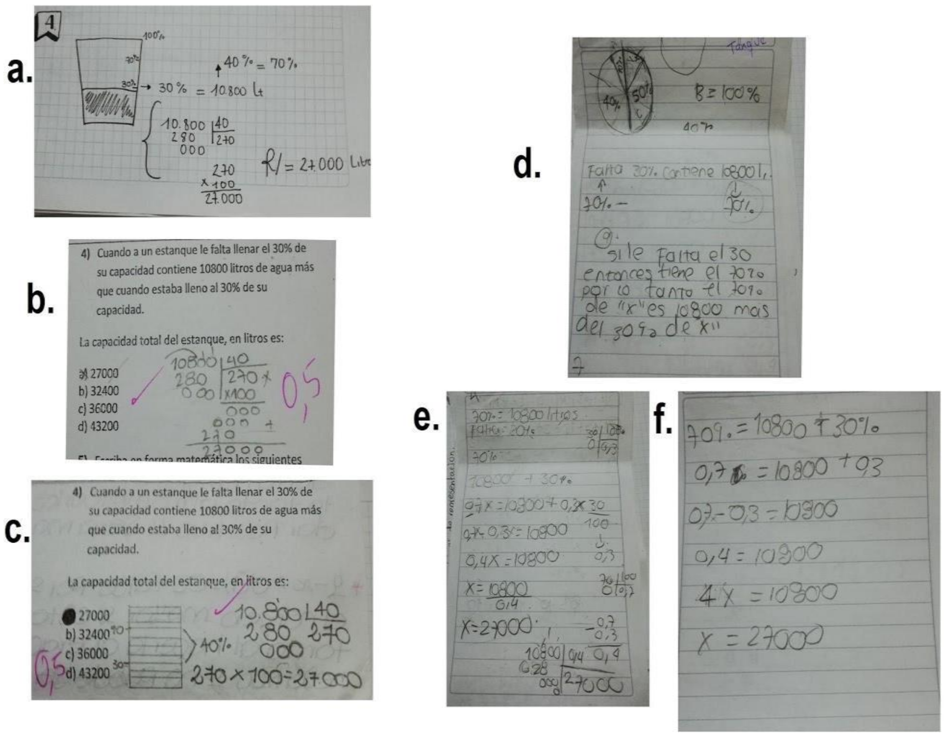


Figura V: Distintas maneras de solucionar problema estanque en la I.E.R. El Prodigio. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

En este caso, observamos que al proponer a los estudiantes el mismo enunciado presentado en la Figura IV, representan de diferentes maneras la situación; es decir, utilizan distintos *instrumentos* (Obando, Vanegas y Vasquez, 2014) para plantear una posible solución. Así, en las Figuras V.a y V.c se presentan dos ilustraciones que intentan representar un estanque dividido en diferentes porciones a las cuales se les asigna un porcentaje determinado del que surge unas técnicas algebraicas, asociadas a *instrumentos,* que soluciona la situación, en particular en la Figura V.c observamos una representación de la fracción como relación parte-todo. Al mismo tiempo, en las Figuras V.d, V.e y V.f, podemos observar una representación que no intenta mostrar exactamente el estanque sino que genera una relación de los porcentajes con respecto a un todo, donde se asocia además unas técnicas (asociadas a *instrumentos*) pertinentes. En la Figura V.b. los estudiantes representan la situación por medio del algoritmo de la división, sin necesidad de hacer una ilustración. En general, podemos decir que cada estudiante, de acuerdo a su acercamiento a unas maneras matemáticas de ver el mundo, se relaciona de un modo diferente con el saber, es decir, con los *objetos de conocimiento* *matemático*, lo que refleja los diferentes *conceptos* que los estudiantes han construido acerca de este.

Otra de las tareas trabajadas en el segundo ciclo tuvo que ver con dos objetos de conocimiento matemático, a saber, potenciación y radicación. Consistió, en un primer momento, en presentar a los estudiantes las propiedades de la potenciación y la radicación (saberes institucionales codificados culturalmente) escritas con un sistema de símbolos poco convencional en el caso de las matemáticas (ver Figura VI), y pedirles que, por medio de la búsqueda de valores numéricos otorgados a los símbolos presentados y del tanteo, determinaran la validez de las mismas y las excepciones que puedan tener. En un segundo momento, se les propuso a los estudiantes resolver dos ejercicios relacionados con las propiedades trabajadas.

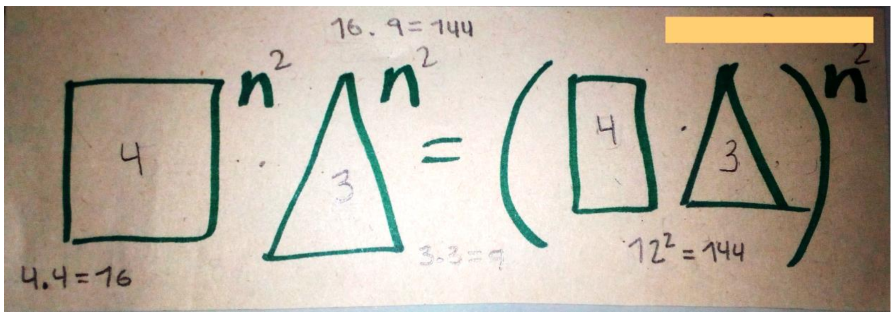


Figura VI: Tarea al usar propiedades de la potenciación en la I.E.R. El Prodigio. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

Resaltamos, a partir de esta tarea, la importancia de realizar acciones en el aula donde se puedan establecer relaciones entre los conocimientos previos de los estudiantes (o *conceptos cotidianos*) y los saberes propios y sistemáticos del área (o *conceptos científicos*), pues ambos se complementan dialécticamente para construir una estructura conceptual clara y cambiante (Kozulin, 2000). Las propiedades de la potenciación y la radicación presentadas comúnmente como algo acabado que debe aprenderse de manera exacta, se convirtieron aquí en una construcción que los estudiantes hicieron al observar las características, excepciones y realizar generalizaciones de atributos que se sintetizaron en unos *instrumentos* (Obando, Arboleda y Vasco, 2014).

Sin embargo, en el segundo momento de la tarea, cuando les propusimos ejercicios donde se utilizan estas propiedades construidas en el aula, no pudo evidenciarse una apropiación de estas propiedades como *instrumentos* que permiten la acción matemática, aun así, consideramos que la primera parte fue un aporte valioso para esto y que lo que habría que hacer es generar más tareas que permitan que esos *instrumentos* construidos cristalicen su experiencia con los *objetos de conocimiento* a la vez que que se conviertan en mediadores para el uso de los constructos sociales previos a la hora de enfrentar un *problema.*

La última tarea dentro de este ciclo para abordar el pensamiento métrico y espacial, se denominó *El Inclinómetro* y se desarrolló en dos sesiones de clase. En la primera, se realizó la medición de una estructura, lo suficientemente alta (que requiriera más que uno o dos metros para medirla), por medio de herramientas no convencionales de medición como palos de escobas, hilos, zapatos, cordones, entre otros, encontrados en el aula o en la Institución. Esta sesión permitió reconocer los saberes de los estudiantes, ver y escuchar las ideas que tenían para darle solución a la situación y cómo entendían la medición relacionada con otros *objetos de conocimiento matemático* como la multiplicación. El siguiente fragmento de entrevista nos permitió evidenciar estas ideas en una de las conversaciones que surgieron en esta sesión:

Entrevista personal: *La medición de una altura tomado el día 31/05/2018*

Estudiante 1: de acá hasta arriba tiene treinta y siete adobes, ¿cierto? (señala el muro, Figura VII) *¿Qué pasa? que cada adobe mide diecinueve centímetros… lo que hicimos fue que multiplicamos los diecinueve centímetros por los treinta y siete adobes y entonces eso dio un resultado de setecientos veintiséis centímetros.*

Estudiante 2: pero es contando también el separador que es de cemento, que mide tres centímetros.

Profesor: ¿y por qué multiplicaron?

Estudiante 3: porque no daba dividiendo ni sumando….

Profesor: ¿Qué es una multiplicación?

Estudiante 4: se dobla el resultado.

Estudiante 2: una multiplicación es (piensa un momento), *cuando se cuenta de números en números, entonces, por ejemplo, dos por dos entonces se multiplica dos veces el dos.. cuando está el dos y lo multiplica por el dos, entonces dos veces el dos le da cuatro, es eso, eso es una multiplicación…*

Figura VII: Medición de la altura de una estructura por estudiantes de la I.E.R. Nuestra Señora del Carmen. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

En la figura VII, se observan dos de las estudiantes que se encontraban explicando cuál había sido el proceso para la medición de uno de los muros de la Institución. Previo a esto, las estudiantes habían discutido cuáles herramientas tenían a su alcance y cuáles estructuras podían medir con estas, y por tal motivo, decidieron elegir el muro. En el fragmento escrito con anterioridad, indagamos para comprender la solución que abordaron las estudiantes frente a esta situación y, se infiere de sus respuestas, que las estudiantes hicieron propios algunos *conceptos* e *instrumentos* matemáticos y los utilizaron en la tarea para facilitar una medición inicialmente tediosa.

En la sesión siguiente, al continuar con la tarea, los estudiantes realizaron la medición de la misma estructura pero ahora con una herramienta de medición denominada *inclinómetro*. Esta herramienta fue construida conjuntamente en el aula con la ayuda de materiales de fácil acceso como transportador impreso, pitillos, hilo y cinta (ver Figura VIII). El desarrollo de esta tarea permitió observar la manera cómo se movilizaron las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que ponen en *tensión* sus *conceptos cotidiano*s con unos *conceptos científicos* propios del área. En este caso, la medición como un proceso propio de la cotidianidad, pero también como un proceso exacto, sistemático y cultural, permite el encuentro individuo-sociedad y pone en movimiento la Actividad Matemática (Obando, Arboleda y Vasco, 2014).

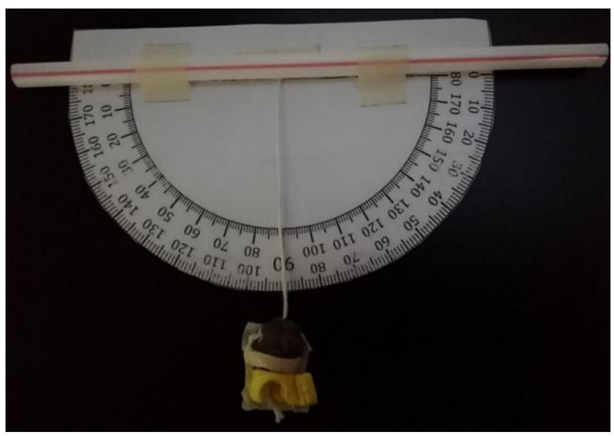


Figura VIII: Inclinómetro. Tomado de Ramírez, Restrepo-Puerta y Cardona (2019, en prensa)

El uso del *inclinómetro*, al ser un *instrumento* que trae consigo saberes matemáticos propios del pensamiento espacial y los sistemas geométricos (MEN, 1998) propicia que los estudiantes se acerquen a ellos de una manera horizontal, es decir, no miran el conocimiento hacia arriba como algo que se debe alcanzar, sino como algo que se construye por medio de la *interacción*, con el *instrumento*, con sus pares y con el medio (Radford, 2018).

5. Consideraciones finales

Estas tareas iniciales, que le abrieron el camino a nuestro proceso de investigación, generaron reflexiones interesantes acerca del tipo de tareas que se pueden trabajar en el aula de matemáticas, dirigidas a la movilización de las prácticas matemáticas (Obando, Arboleda y Vasco, 2014) de los estudiantes y por ende al desarrollo de la Actividad Matemática, orientada a un objeto/motivo educativo que pueda permitir el acercamiento de los estudiantes a maneras culturalmente codificadas (o *conceptos científicos*) de pensar en matemáticas (Kozulin, 2000). Todo esto a partir, también, de los *conceptos cotidianos* que los estudiantes han construido en sus reflexiones vivenciales diarias, sean estas en la calle, la casa o la escuela.

La *interacción* juega un papel principal en el devenir de la Actividad Matemática, pues es fundamental para la construcción de sentidos y significado, es el contacto permanente con los demás y con el medio y según Obando, Arboleda y Vasco (2014) son fundamentales para la movilización (transformación) de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un sistema de prácticas institucionalizado, histórico y cultural. Es por este motivo, que las tareas que se proponen a los estudiantes no deben ser aquellas en donde ellos sean únicamente receptores de conocimientos, sino donde sean partícipes de la construcción del conocimiento en la *actividad* con otros.

En síntesis, a partir de las reflexiones presentadas en este artículo, generamos un problema de investigación que involucró el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, de manera más precisa, de los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* que se pusieron en juego en dichas prácticas y de los *instrumentos* y procedimientos que usaron. Todo esto, en el marco de los Números Racionales como objeto de conocimiento matemático, pues en el contacto con los estudiantes durante el primer semestre de práctica reconocimos la importancia que estos tienen para la vida cotidiana y académica de las personas pues, en coherencia con Obando (2003), permiten analizar y darle significado a grandes volúmenes de información cuantificada en términos de porcentaje, probabilidad, razones, fracciones, entre otros. De igual manera, son de gran importancia en los procesos escolares, pues se constituyen como una base fundamental para la formación en otras disciplinas de la ciencia.

A pesar de los diferentes conceptos que los estudiantes expresan de ellos (como en el segundo episodio presentado en este artículo) siguen siendo un objeto matemático que se aborda a lo largo de la educación básica y media, pero donde se deja de lado asuntos importantes tales como sus diferentes significados y maneras de representarlos.

A partir de lo anterior, formulamos la siguiente pregunta que orientó nuestra investigación:

¿De qué manera se movilizan las prácticas matemáticas de estudiantes de educación media a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales?

A la cual damos respuesta en los artículos: Ramírez, Restrepo-Puerta, Cardona y Parra-Zapata (2019, en prensa) y Restrepo-Puerta, Ramírez, Cardona y Parra-Zapata (2019, en prensa).

Referencias Bibliográficas

Jaramillo, D., Obando, G. y Beltrán, Y. (2009). El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase. Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona, España: Ediciones Paidós.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de aprendizaje V2 en Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema*, *8(2)*, 157-182.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica, 3*(20), 72-90.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9* (Extraordinario 1), 103-129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132- 150.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61-80.

Ramírez, J., Restrepo-Puerta, M., Cardona, S. (2019, en prensa). Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales (Tesis de Pregrado). Medellín: Universidad de Antioquia.

Ramírez, J., Restrepo-Puerta, M., Cardona, S., Parra-Zapata, M. M. (2019, en prensa). Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de un Ambiente Aprendizaje con Números Racionales.

Restrepo-Puerta, M., Ramírez, J., Cardona, S., Parra-Zapata, M. M. (2019, en prensa). Movilización de prácticas matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de la tensión entre conceptos cotidianos y conceptos científicos acerca de los Números Racionales.