



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Facultad de Educación

### La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones desde una construcción de carácter epistemológico.

Estudio de caso en la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia (CEFA)

**Daniela Calle Cardona**

**Daniel Felipe Gil Bustamante**

**Jheison German Morales Patiño**

# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3  
Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

Medellín

2018

**La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones desde una  
construcción de carácter epistemológico.**

Estudio de casos en la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia (CEFA)

**Daniela Calle Cardona**

**Daniel Felipe Gil Bustamante**

**Jheison German Morales Patiño**

Trabajo presentado para optar al título de licenciado(a) en Matemáticas y Física

**Asesora**

**Erika Tobón Cardona**

**Magíster en Educación en Ciencias Naturales**

**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**Universidad de Antioquia**

**Facultad de Educación**

**Licenciatura en Matemáticas y Física**

**Medellín**

**2018**

Universidad de Antioquia  
Facultad de Educación

Trabajo de investigación:  
**La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones desde una  
construcción de carácter epistemológico.**

Estudio de casos en la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia (CEFA)

**Daniela Calle Cardona**

**Daniel Felipe Gil Bustamante**

**Jheison German Morales Patiño**

**Asesora**

**Erika Tobón Cardona**

**Magíster en Educación en Ciencias Naturales**

**Nota de aceptación**

---

---

---

**Firma presidente del jurado**

**Firma del jurado**

1 8 0 3

**Firma del jurado**

Medellín  
2018



*A mis compañeros quienes con tanto esfuerzo y sacrificio dieron todo de sí para hacer  
este trabajo posible.*

**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

## **Agradecimientos:**

Queremos agradecerle principalmente a Dios, por brindarnos las fuerzas y salud para llevar este trabajo a cabo.

A nuestros padres, quienes han dado todo de sí para que sea posible de una u otra manera, culminar con el proceso formativo que nos hemos propuesto, como estudiantes de la licenciatura en Matemáticas y física.

A nuestros docentes cooperadores: Rubén Darío Henao Ciro, Dorian Rodrigo Ruiz Hernández y Natalia Ramírez Castaño, quienes fueron pilares fundamentales en nuestro proceso formativo, permitiéndonos ingresar a sus aulas de clase, acompañándonos con su experiencia y compartiendo todo de sí para favorecer este proceso.

A las estudiantes del Centro Formativo de Antioquia (CEFA), quienes con su esfuerzo contribuyeron a los análisis y conclusiones que el presente trabajo aborda, acompañando este proceso pese a las dificultades que se presentaron en el desarrollo.

Al Centro Formativo de Antioquia (CEFA) por abrirnos sus puertas y acogernos como en casa, permitiendo que compartiéramos y aprendiéramos de sus estudiantes.

A la universidad de Antioquia y Facultad de Educación por el proceso formativo que ha lleva con cada uno de nosotros, brindando las herramientas en la construcción de seres autónomos e intelectuales, y al cuerpo de docentes y administrativos quienes de una u otra manera han de estar en nuestros corazones.

Finalmente al Profesor Dany Esteban Gallego, quien hizo sugerencias para el desarrollo del presente trabajo, brindándonos pautas y guías necesarias en su momento para superar conflictos que dificultaban con un avance significativo.

## Contenido

Agradecimientos: .....	4
Contenido.....	6
Resumen.....	8
Abstract.....	9
1. Planteamiento del problema .....	11
2. Objetivos.....	16
2.1 Objetivo general.....	16
2.2 Objetivos específicos.....	16
3. Marco Metodológico .....	17
3.1 Caracterización de la investigación .....	17
3.2 Contexto de la investigación.....	18
3.3 Técnicas para compilar la información.....	20
3.4 Análisis e interpretación .....	22
3.4.1 Criterios de selección de unidades de análisis y clasificación de enunciados.....	23
3.4.2 Interpretación y triangulación de los datos.....	27
4. Marco conceptual .....	33
4.1 El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista .....	34
4.1.1 La importancia de la unidad en la construcción del concepto de fracción. ....	37
4.1.2 Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.....	41
4.2 La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista.....	44
4.2.1 Educación Matemática Realista: una propuesta de Hans Freudenthal. ....	48
4.2.2 Streefland y Kieren: enfoques realistas para la enseñanza de las fracciones.....	59

5. Descripción de la propuesta de intervención.....	68
El Ábaco Fraccionario.....	68
¿Cómo multiplicar y dividir fracciones en el ábaco fraccionario?.....	72
Encuentro 1.....	76
Encuentro 2.....	78
Encuentro 3.....	80
Encuentro 4.....	84
Encuentro 5.....	86
Encuentro 6.....	87
Encuentro 7.....	89
6. Hallazgos.....	91
6.1 El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista.....	92
6.1.1 La importancia de la unidad en la construcción del concepto de fracción.....	92
6.1.2 Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.....	96
6.2 La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista.....	98
6.2.1 Educación matemática realista (EMR).....	98
6.2.2 Streefland y Kieren: Enfoques realistas para la enseñanza de las fracciones.....	101
7. Conclusiones.....	108
8. Contribución del trabajo a la propuesta pedagógica.....	113
9. Referencias bibliográficas.....	115

## Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones desde una construcción de carácter epistemológico es un trabajo de investigación constituido bajo una perspectiva cualitativa, a partir de un estudio de casos de carácter instrumental. Este se caracteriza por su enfoque epistemológico de las ciencias, en el cual se analizan los procesos de interpretaciones de formalismos matemáticos de las fracciones. El presente trabajo investigativo sostiene una caracterización de los resultados de los procesos de formalización donde se destacan la socialización, la matematización y la organización de experiencias.

En esta misma línea se reconstruyen conceptualmente desde los trabajos de Hans Freudenthal y Lee Streefland las perspectivas histórica y epistemológica de los contenidos de enseñanza acerca de las fracciones. Estas servirán para contrastar aspectos referentes a las percepciones que las informantes poseen, así como lo que adquieren para mejorar la conceptualización de las fracciones. Finalmente, cada uno de estos aspectos aporta a una configuración de intervención en los que se apunta a una alternativa de enseñanza.

Este trabajo de investigación es una reflexión acerca del uso de herramientas epistemológicas para la construcción del concepto de fracción, teniendo de base La Educación Matemática Realista como proceso amplio para vincular la teoría y el contexto. Se tiene entonces que las problemáticas asociadas a las fracciones es la escasa relación entre el simbolismo y la experiencia, además de que la enseñanza de las fracciones se centra principalmente en el aprendizaje de algoritmos. De esta manera se proponen una serie de encuentros que relacionan el fundamento teórico con las problemática percibidas en las prácticas pedagógicas. Las actividades de los encuentro se aplicaron a estudiantes del Centro Formativo de Antioquia (CEFA) y como enfoque metodológico se interpretó desde la descripción densa.

A partir del análisis el cual fue construido con base en la implementación de la propuestas de intervención, a partir de lo anterior se presentaron hallazgos, los cuales retoman elementos conceptuales y elementos decisivos en cuanto a la construcción epistemológica del concepto de fracción, además de generar nuevos elementos relacionados con las problemáticas que surgen al tratar con las fracciones y sus operaciones.

**Palabras clave:** Fracciones, Educación Matemática Realista, epistemología de las ciencias.

### **Abstract**

The education and the learning of the fractions from a construction of epistemological character is a work of investigation constituted under a qualitative perspective, from a study of cases of instrumental character. This characterises by his epistemological approach of the sciences, in which they analyse the processes of interpretations of mathematical formalisms of the fractions. The present work investigativo sustains a characterisation of the results of the processes of formalisation where stand out the socialisation, the matematización and the organisation of experiences.

In this same line reconstruct conceptually from the works of Hans Freudenthal and Reads Streefland the historical and epistemological perspectives of the contents of education about the fractions. These will serve to contrast with regard to the perceptions that the informants possess, as well as what purchase to improve the conceptualization of the fractions. Finally, each one of these appearances contributes to a configuration of intervention in which it aims to an alternative of education.

This work of investigation is a reflection about the use of epistemological tools for the construction of the concept of fraction, having of base The Realistic Mathematical Education like wide process to link the theory and the context. It has then that the problematic associated to the fractions is the scarce relation between the symbolism and the experience, in addition to that the education of the fractions centers mainly in the learning of algorithms. Of this way propose a series of meetings that relate the theoretical foundation with the problematic perceived in the pedagogical practices. The activities of the meeting applied to students of the Formative Centre of Antioquia (CEFA) and like methodological approach interpreted from the dense description.

From the analysis which was built with base in the implementation of the proposals of intervention, from the previous presented findings, which restart conceptual elements and decisive elements regarding the epistemological construction of the concept of fraction, in addition to generating new elements related with the problematic that arise when treating with the fractions and his operations.

**Keywords:** Fractions, Realistic mathematical Education, epistemology of the sciences.

## 1. Planteamiento del problema

A partir de las observaciones registradas en los diarios de campo de cada uno de los investigadores en la práctica pedagógica la Licenciatura en Matemáticas y Física, se pudo evidenciar cómo la Matemática se asemeja a una disciplina llena de fórmulas y complejos modelos que dificultan su comprensión. Aspectos como la división o repartición de una unidad en partes iguales y toda la conceptualización que esto supone, se ven empañados por un sin número de fórmulas y mecanismos de cálculo que desdibujan la comprensión de los mismos. En ese sentido, se hace evidente que los procedimientos que se implementan en la enseñanza de la Matemática hacen que esta se constituya como una materia rigurosa y conforme se va dando su enseñanza los estudiantes la van considerando como una materia tediosa.

Así pues, van surgiendo problemas conceptuales en los procesos de enseñanza para todos los contenidos de Matemáticas. En el caso de las fracciones se tienen dificultades como: no reconocer qué es una fracción, qué es una unidad, una fracción como parte de un todo o como una relación de equivalencia. En lo que respecta al proceso que se vive en el aula de clase se puede observar que la idea de fracción y todo aquello con lo que se relaciona son cuestiones que proporcionan una posible ruta de análisis sobre cómo se está enseñando. Asuntos conectados con la enseñanza de las fracciones como su significado, cómo operarlas, cómo hacer de sus contenidos teóricos una mejor contextualización para el estudiante, cuál es su representación mediante el lenguaje formal que se establece en la matemática; son aspectos que representan más una dificultad que una ayuda.

De esta misma manera la idea que se tiene de los contenidos y la generalización de los procesos de construcción de las fracciones, en ocasiones suele limitar al estudiante en la medida que dicho formalismo matemático se plantea como único medio de comprensión, haciendo que

los estudiantes entiendan la Matemática como un conjunto de reglas lógicas y un sinfín de axiomas que provocan sentimientos negativos en los estudiantes frente a la Matemática.

Aún en este punto, se puede ver que los muchos esfuerzos que se han realizado para que las materias con un alto nivel teórico como lo es la Matemática, se puedan aplicar en un proceso de enseñanza en el que tanto los estudiantes como el docente se sientan a gusto, no ha bastado. En un caso tan específico del área de Matemáticas como lo es la enseñanza de las fracciones, se mantiene la idea de que los procesos de enseñanza-aprendizaje en los que no se tienen en cuenta en primer plano a los estudiantes. En este sentido, la enseñanza de las fracciones suele encaminar al estudiante en un proceso mecanicista en el que solo son importantes la memorización de símbolos y su manipulación (cómo operarlas); donde se menosprecian las diversas formas en que las fracciones podrían ser construidas, por ejemplo, mediante lo concreto explorando otros sentidos.

Es evidente que no hay un énfasis en el que cada uno de los implicados (tanto el docente como los estudiantes) partan de aquellos conceptos que ya conocen e identifican los conceptos de las fracciones que se presentan nuevos y los tomen como un solo cuerpo. De tal modo que se pueda evidenciar la relación que existe entre las fracciones y las vivencias del día a día; por tanto, sucede que se crea una barrera entre el mundo real y lo que se enseña en la escuela. Este distanciamiento, origina también problemáticas e ideas un tanto dispersas sobre el tema de fracciones; siendo la siguiente la más común: el estudio de las fracciones corresponde a un proceso matemático encasillado estrictamente a algo operativo que desecha los análisis que conllevan a las abstracciones sobre las situaciones y fenómenos del mundo.

Al retroceder y dar un vistazo a la experiencia de cada estudiante podríamos encontrar un gran número de situaciones en las que las fracciones están presentes. Por ejemplo, al momento

de realizar una partición de algún alimento para varias personas, organizar las cabezas de ganado en sus respectivas parcelas, fraccionar el dinero para los gastos que se presentaron en el hogar, organizar los integrantes por equipo para un torneo, entre otros.

De esta forma se evidenciaría que la relación que se tiene con este tema de la Matemática, no es tan nueva ni distante de nuestra cotidianidad, y esto lo muestra Kieren (1975) cuando dice que “las fracciones y los números racionales han estado con nosotros casi a lo largo de toda la historia registrada” (p.101). Dicha cuestión sería la base para el proceso de enseñanza-aprendizaje (Entendiendo enseñanza-aprendizaje, como un proceso bilateral en donde participan tanto el docente como el estudiante en el cual los dos cumplen el mismo papel tanto enseñando como aprendiendo. Así como lo menciona Gómez (2001) “el principal criterio a tener en cuenta es el de enfocar la actividad de enseñanza y aprendizaje como un proceso social interactivo que suscite y estimule procesos cognitivos en alumnos y profesores.”) Del tema de fracciones; ya que hay ciertos aspectos que son útiles para guiar una construcción más acertada de esta idea y facilitar una comprensión más allá de las representaciones que surgen en los estudiantes. De esta manera, se puede llegar a la formalización del concepto en vez de ahogar a los estudiantes en un mundo de ecuaciones y símbolos que distan de un proceso de aprendizaje adecuado con los intereses de los mismos.

Aun así, surgen más cuestionamientos como ¿Es suficiente ejemplificar este tema con situaciones o fenómenos de lo cotidiano? ¿Por qué siendo este tema tan común como lo evidencian las situaciones mencionadas en el párrafo anterior se presenta una problemática al momento de su enseñanza-aprendizaje en el aula de clase? ¿Por qué se constituye como un problema el empoderamiento de esa formalización del tema de fracciones aun cuando ya se ha tenido una inmersión en situaciones experienciales que implican fracciones?

En línea con las anteriores preguntas, se observó en la práctica pedagógica que para los estudiantes es más fácil realizar el proceso que demanda cada uno de los algoritmos (en algunos casos a la perfección) en búsqueda de la satisfacción del docente o el cumplimiento con el objetivo propuesto en clase. Pero al momento de llevar a cabo la abstracción necesaria de esas partes experienciales y las partes formales los estudiantes encuentran un muro que separa lo que está en su cuaderno del contexto en donde habita. En este orden de ideas es preciso indagar por lo que genera inseguridad a la hora de entender las fracciones o las razones por las cuales siendo este un tema tan inmerso en nuestro contexto, se dificulta su comprensión.

Una pregunta a resolver para solucionar el problema en cuestión se relaciona con las representaciones de las fracciones y su significado: ¿Qué relación debe existir entre la representación de las fracciones y la situación en la que están inmersas? Según Streefland (1993) “El establecer significado es uno de los principales asuntos tanto histórica como actualmente, en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones” (p.289). Esto da a entender que no es el objetivo enseñar algo meramente algorítmico, rutinario y memorístico; sino que es vital indagar en lo que las fracciones significan y en su representación para facilitar su comprensión.

Estos apuntes de carácter epistemológico llevan a nuevos interrogantes: ¿Podría la epistemología ser suficiente para repensar las fracciones? ¿Puede un estudio epistemológico mostrar una forma eficaz de enseñar fracciones donde el estudiante se sienta cómodo?

Es de vital importancia para el desarrollo del presente trabajo, conocer algunas dificultades presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones. Así, desde el conocimiento de dichas dificultades se puede establecer un aporte que ayude al mejoramiento de los procesos educativos y retomar aspectos importantes como lo es la manera en que se pierde la relación de la representación y lo concreto. Algo que es considerado a realizar en este proceso es

**Facultad de Educación**

deconstruir y reconstruir esa idea tan arraigada que tanto los estudiantes como los profesores tienen de las fracciones; la cual es verlas como algo netamente operacional. En esta medida se puede ofrecer un sentido diferente a su enseñanza y aprendizaje a partir de la identificación de contextos en los que el estudiante analice la necesidad de la implementación de las fracciones, para el desarrollo de actividades presentadas en su diario vivir.



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

## 2. Objetivos

### 2.1 Objetivo general

Construir fundamentos epistemológicos que permitan la apropiación del concepto de fracción y fortalezca el aprendizaje de las estudiantes de grado Undécimo de la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia (CEFA)

### 2.2 Objetivos específicos

- Reconstruir conceptualmente contenidos de la enseñanza relacionados con las fracciones desde la Educación Matemática Realista (EMR) propuesta por Hans Freudenthal.
- Determinar como posible alternativa para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones el *ábaco fraccionario*.
- Identificar la pertinencia de elementos teóricos y procedimentales que pueden facilitar la construcción del concepto de fracción, así como la oportunidad que ofrece el contexto y del *ábaco fraccionario* para facilitar el aprendizaje de las fracciones.

### **3. Marco Metodológico**

#### **3.1 Caracterización de la investigación**

El presente trabajo se realizó a partir de la investigación cualitativa, dado que se pretende realizar un estudio de casos la cual según Hernández (2010) “utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación” (p.7). De esta manera, al hacer un énfasis en la interpretación; la investigación cualitativa busca describir los fenómenos que suceden con profundidad, construir sus significados y la red de relaciones entre los mismos. De acuerdo con Hernández (2010), esta construcción de datos ofrece “descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones” (p.9) que favorecen en gran medida lo que se quiere investigar. De esta manera, el enfoque cualitativo es de vital importancia para esta investigación ya que ofrece flexibilidad en cuanto a lo que se quiere indagar, permite reflexión y conocimiento en las experiencias de los participantes, haciendo uso “...de una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos” (Hernández, 2010, p.10) que ayudan a la construcción de datos y hallazgos. Debido a esto, el problema de investigación requiere de un enfoque cualitativo, dado que se pretende estudiar lo que genera problemas al momento de tratar el tema de fracción, vinculando diferentes herramientas que ayudaran a su comprensión.

A partir de lo anterior y enmarcado en la flexibilidad que este enfoque ofrece, se hizo uso del estudio de casos como enfoque de la investigación cualitativa. Según Stake (2007), el estudio de caso “...es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p.11). Debido a esto, la investigación se centró en lo que las informantes pueden aportar a diferentes contextos problemáticos y su

capacidad de interpretarlos, resolverlos y transformarlos. De esta manera este estudio de caso será de carácter instrumental, centrándose así en buscar algo diferente en la comprensión de no solo una persona en concreto sino de varias personas y lo que opinan sobre el caso. Siendo este, la enseñanza-aprendizaje de las fracciones.

Ya que el énfasis de este trabajo se centra en una minuciosa observación e interpretación, se propone la utilización de la “descripción densa” que según Ryle (Citado por Elkana, 1983) se refiere a “...una manera de describir la complejidad del pensamiento...” (p.5). Debido a esto, se hace necesario iniciar una descripción por niveles, la cual pretende primero comenzar desde una descripción más simple para llegar así a la “descripción densa” en donde terminaría ésta siendo una descripción más detallada. Cabe aclarar que según Elkana (1983) el proceso de esta descripción depende de la actividad que se quiera describir, es decir, en diferentes circunstancias la descripción puede cambiar, ya que puede que las condiciones no sean las mismas y las intenciones que se tengan para las actividades tampoco.

En conclusión, esta investigación es de carácter cualitativo con estudio instrumental de caso. Se pretenden encontrar descripciones densas que favorezcan a la solución del caso con la participación de 4 estudiantes de la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia (CEFA).

### **3.2 Contexto de la investigación**

El Centro Formativo de Antioquia (CEFA), es una institución educativa de carácter público que imparte enseñanza de educación formal en los niveles de educación media técnica y educación media académica. Esta institución es un colegio femenino ubicado en el centro de Medellín. Actualmente cuenta con una distribución de espacio conformada por aulas de clase, laboratorios de física, química, biología, salud, aulas especializadas, biblioteca, espacios

Facultad de Educación

recreativos, coliseo y demás espacios que conforman un ambiente de aprendizaje acogedor para la población estudiantil.



Imagen 1: Centro Formativo de Antioquia (CEFA)

Su ubicación, hace que la institución tenga una variada conformación de estudiantes de diferentes estratos socioeconómicos, en la que ofrece un servicio de alta calidad a la población femenina del área Metropolitana, comprendida entre los 15 y 18 años de edad; lo que hace que el contexto educativo de la institución sea uno de los ambientes más favorables para satisfacer los objetivos de esta

investigación.

En el momento de una de las prácticas pedagógicas en el CEFA (realizada por Jheison Morales), se pudieron identificar con base en los acercamientos académicos y personales además por sugerencia de la cooperadora de la institución encargada del proceso de práctica, las informantes (por convención de esta



Imagen 2: Alumnas CEFA

manera se hará referencia a las cuatro estudiantes que fueron partícipes del proceso investigativo) que comprenden el objeto de estudio de esta investigación. La selección de dichas informantes se determinó también por la disposición y el interés que presentaron las informantes

de la institución, interés percibido en las intervenciones que propone la institución a la hora de realizar la práctica pedagógica.



Imagen 3: Informantes en el estudio del caso

Se considera pertinente dicha elección, dado a que podían suplir las dificultades presentadas con horarios, extensión de jornada y desplazamiento. Además, también por habilidades que mostraron las informantes en las intervenciones en el aula de clase. Cabe resaltar que son alumnas de la modalidad de matemática y esto hace de alguna manera que sienta cierta afinidad por el área.

Así, el desarrollo de esta investigación se realizó con base a la información que 4 informantes entre las edades de 15 a 18 años, las cuales pertenecen actualmente al grado undécimo, pudiesen aportar acerca del tema de las fracciones. Para efecto de análisis y referencias, aun pese a los consentimientos firmados por los diferentes padres de cada una de las informantes y consentimientos verbales de ellas en el desarrollo del trabajo investigativo se referencian cada una de las informantes como informantes, (informante 1, informante 2, informante 3 e informante 4) donde cada vez que se haga referencia a una de las informantes, siempre será la misma dependiendo del número que le preceda.

### 3.3 Técnicas para compilar la información

Las técnicas para construir la información para esta investigación son la observación participante, la entrevista y el diario de campo, se consideró pertinente estas herramientas ya que

facilitaba el enfoque que se le quiere dar a la investigación. A continuación se dará una descripción detallada de cada una y la importancia que tiene.

En línea con lo anterior, se entiende según Bonilla C. Elssy (1997) la observación como todo aquello que “...implica focalizar la atención de manera intencional, sobre algunos segmentos de la realidad que se estudia, tratando de captar sus elementos constitutivos y la manera cómo interactúan entre sí...” (p.118). De esta manera la *observación participante* juega un papel fundamental al momento de interpretar las acciones que los participantes realizan pues permite observar el desarrollo de las actividades e intervenir en el momento preciso con preguntas de interés. La participación de los casos en el desarrollo de los talleres de la propuesta de intervención sobre las fracciones se encuentra inmersa en esta técnica de construcción de la información.

*Las entrevistas*, por otro lado pueden ayudar a identificar de manera profunda la perspectiva de las informantes; además permiten conocer puntualmente interrogantes que surjan en el desarrollo de la propuesta. Potton (Citada por Bonilla C. Elssy, 1997) considera que “El objetivo de la entrevista cualitativa es conocer la perspectiva, el marco de referencia a partir del cual las personas organizan su entorno y orientan su comportamiento” (p.93). Así entonces, las entrevistas muestran más a fondo el punto de vista de las participantes y la realidad en la que se ven inmersas, pues en muchas ocasiones las informantes pueden presentar más comodidad al contar que es lo que está sucediendo en vez de escribirlo.

*El diario de campo*, implica documentar lo que las participantes realizan más detalladamente, es ir más allá de lo que simplemente se observa y plasmarlo en el papel. Es importante esto en la medida que “un diario de campo representa tanto para unos como para otros, disponer de un cúmulo de datos que les permita asumir un proceso investigativo y

pedagógico permanente” (Sierra, 1999, p.11), el cual favorece de alguna manera el aprendizaje de los investigadores.

Finalmente se espera entonces desarrollar instrumentos enmarcados en la observación participante, las entrevistas y el diario de campo, de cómo que se favorezca la descripción y el detalle para así obtener una mayor interpretación de la investigación.

### **3.4 Análisis e interpretación**

Luego de tener los registros se procederá al desarrollo del análisis basado en la metodología de la investigación, donde esta metodología brinda las herramientas necesarias para un análisis detallado, descriptivo y conciso. Dicho análisis se realizará a partir de la descripción densa, se trata entonces de que en los datos suministrados por las informantes a través de las actividades, se obtengan resultados para ser objeto de análisis y reflexión por los investigadores, destacando así lo más relevante del proceso, para finalmente llegar a una descripción más detallada, *descripción densa*. Por tanto en lo anterior, es importante describir cada uno de los procesos que dieron lugar al registro e interpretación de datos con el propósito de obtener finalmente los hallazgos.

A partir de lo anterior, las herramientas que se utilizaron en la construcción de datos para la propuesta de investigación, fueron los registros audiovisuales, las entrevistas, los talleres escritos y el diario pedagógico. Cabe resaltar que se transcribieron los audios y videos de tal modo que el orden, la fluidez y eficiencia permitieran un buen análisis; filtrando cierta información según los objetivos de la investigación. Luego de esto, se procedió a seleccionar las unidades de análisis mediante una tabla de indicios conectada con las categorías postuladas en el marco teórico. Ésta ayudó en la clasificación de los datos obtenidos, para finalmente elaborar el escrito a partir de la conexión con los referentes conceptuales.

### **3.4.1 Criterios de selección de unidades de análisis y clasificación de enunciados.**

Luego de tener los registros organizados, se pudo observar que las unidades de análisis permiten una visión acerca del desarrollo de los conceptos percibidos por las informantes, al mismo tiempo entender el porqué de los procedimientos algorítmicos, permitiendo que este análisis se encamine a una descripción densa. En estas descripciones densas se percibe cómo las informantes entienden el concepto de fracción ligado a los elementos epistemológicos. Esto con el fin de recoger información relevante que pudiera dar pie a interpretaciones más profundas.

Para el análisis fue importante tener en cuenta que “Las categorías siempre derivan de las miradas, o lo que es más preciso, de las representaciones que permiten la mirada del objeto de análisis” (Raigada, 2002, p.10). De este modo, las características de las categorías se obtuvieron de acuerdo a los problemas observados por los investigadores en cada uno de los encuentros, además del planteamiento del problema de investigación, de modo que las categorías dan cuenta de los problemas que surgen en las fracciones.

Respecto a lo anterior, la selección de las unidades de análisis se basó principalmente en cada una de las características de cada categoría abordadas en el marco conceptual (El cual se abordará en el capítulo 4). De este modo los indicios serían aquellas acciones que realizan las informantes durante el taller o entrevista que se le asigna en las sesiones, en concordancia con los objetivos que se persiguen en el marco conceptual. A continuación se mostrará la tabla 1 (Red de categoría de análisis) donde se ven ilustradas las categorías, subcategorías e indicios, los cuales ayudaron a la interpretación y realización de las unidades de análisis.

Tabla 1: Red de categorías de análisis.

Categorías	Subcategorías	Indicios
El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista.	La importancia de la unidad en la construcción del concepto de fracción	Identifica el concepto de unidad.
		Identifica y manipula el concepto de mcm como facilitador para la solución de la suma entre fracciones.
		Diferencia entre numerador y denominador, fracciones homogéneas, heterogéneas y mixtas.
		Aplica adecuadamente el proceso para resolver operaciones entre fracciones.
	Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.	Manipula adecuadamente códigos verbales y numéricos.
		Construye algoritmos como único proceso para solucionar fracciones.
Reconoce la fracción a partir de diferentes representaciones.		
La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista	Educación Matemática Realista (EMR).	Realiza comparaciones entre el contexto y las operaciones entre fracciones
		Estructuran la realidad que las rodea en procesos matemáticos.
		Reconocen la fracción en relación con situación cotidiana en su día a día.
	Streefland y Kieren: enfoques realistas para la enseñanza de las fracciones.	Manipula diferentes materiales tangibles para apoyar la solución de problemas de operaciones entre fracciones.
		Entiende los procesos de suma, resta, multiplicación y división de fracciones a partir del <i>ábaco fraccionario</i> .
		Utiliza alternativas para mejorar el aprendizaje de las fracciones.

En concordancia con lo que dice Cabrera (2005) de tiene que:

...se asume la cuestión de la construcción del conocimiento como un proceso subjetivo e intersubjetivo, en tanto es el sujeto quien construye el diseño de investigación, recopila la información, la organiza y le da sentido, tanto desde sus estructuras conceptuales previas como desde aquellos hallazgos que surgen de la propia investigación, la que luego se colectiviza y discute en la comunidad académica (p.62).

Así, en la manera en que los investigadores construyen, clasifican y seleccionan las unidades de análisis, se apoderan del tipo de investigación y de los resultados que quieren desarrollar, de esta manera el investigador puede tener el control del cómo analizar sus indicios. A continuación, se presenta la tabla según las actividades y entrevistas que se les realizaron a las informantes del estudio donde se muestra, cómo van organizados los párrafos, además de dar una ilustración de cómo el indicio puede estar en dos sub-categorías diferentes.

Tabla 2: Cuadro de selección de unidades de análisis

		Actividades	Encuentro 1	Encuentro 2	Encuentro 3	...
indicios						
Categoría 1	Subcategoría 1	Indicio 1	Párrafo 2			
		Indicio 2		Párrafo 8		
		Indicio 3				
		Indicio 4	Párrafo 4			
	Subcategoría 2	Indicio 5	Párrafo 4		Párrafo 3 párrafo 5	
		Indicio 6				
		Indicio 7		Párrafo 9		
		Indicio 8	Párrafo 1			
...	...	Indicio 9		Párrafo 10		
		...				

Tabla 3: Indicios correspondientes al ejemplo

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	INDICIOS	Encuentro 3: Entrevista
El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista	La importancia de la unidad en la construcción del concepto de fracción	Diferencia entre numerador y denominador, fracciones homogéneas, heterogéneas y mixtas.	Caso 1: Desde tercero iniciaron enseñando cual es el denominador y el numerador, caracterizándolas con peras y manzanas, es decir, el denominador eran peras y el numerador eran manzanas
	Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.	Reconoce la fracción a partir de diferentes representaciones	Caso 1: Desde tercero iniciaron enseñando cual es el denominador y el numerador, caracterizándolas con peras y manzanas, es decir, el denominador eran peras y el numerador eran manzanas

Como un ejemplo de una unidad de análisis, tenemos el encuentro 3: Entrevista. Se pudo observar una coincidencia en los indicios *Diferencia entre numerador y denominador, fracciones homogéneas, heterogéneas y mixtas* y *Reconoce la fracción a partir de diferentes representaciones*, de tal modo que la respuesta que dio la informante 1 se puede ubicar en dos partes diferentes de la tabla. Informante 1: “Desde tercero iniciaron enseñando cual es el denominador y el numerador, caracterizándose con peras y manzanas, es decir, el denominador eran peras y el numerador eran manzanas” Esta afirmación que hizo la informante no es cierta la cual se volverá a abordar en el capítulo de hallazgos se abordará más en el tema.

De lo anterior se puede deducir que la informante recuerda muy bien que en un grado de escolaridad empezaron con la noción de fracción y sus partes, dejando claro que con esto empiezan a introducir la noción de unidad y de reparto. Esto muestra que al observar las fracciones desde un modelo visual, deja en el estudiante una mayor retentiva. En relación con esto y con el fin de aclarar los nociones más fundamentales acerca de las fracciones; los talleres y entrevistas además de hacer un acercamiento sobre los primeros recuerdos que tuvieron acerca de la noción de fracción, pretenden reforzar los conceptos de unidad y que construyan de manera clara que significa en sí trabajar con fracciones, por esta razón se ubicó a través de los indicios anteriormente mencionados.

### **3.4.2 Interpretación y triangulación de los datos.**

Hasta ahora se ha argumentado que la selección y la clasificación de las unidades de análisis siempre estuvieron encaminadas por las categorías construidas en el marco conceptual, además de los referentes metodológicos. A partir de esto se realizó una narración pero desde la perspectiva de las personas que vivieron el proceso investigativo, en otras palabras desde las

informantes a partir de la idea de descripción densa como prueba de construcción científica mencionada en párrafos anteriores.

Para la categoría “el concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista” se interpretó los enunciados que atienden a descripciones densas sobre las características de las fracciones a partir de definiciones mnemotécnicas de las fracciones. En esta línea, se desglosaron las unidades de análisis resaltando las percepciones sobre las fracciones dadas desde perspectivas individuales y grupales. También se buscó y ordenaron enunciados donde se pudiera reconocer la fracción a partir de diferentes representaciones, que identificaran y manipularon el concepto de mcm (mínimo común múltiplo) como facilitador para la solución de operaciones entre fracciones; que realizan sumas, restas multiplicaciones y divisiones entre fracciones y que representarán las fracciones mediante materiales tangibles.

Para la categoría “la enseñanza de las fracciones desde un enfoque realista” se llevó a cabo un proceso de interpretación con el fin de resaltar la Educación Matemática Realista (EMR) propuesta por Hans Freudenthal y tratado también por el teórico Streefland. También las características que los teóricos sugieren acerca de la enseñanza de las fracciones, con el objetivo de validar el cumplimiento de dicho fin, se proponen actividades en las que se pudiera identificar la apropiación del contexto para el entendimiento de operaciones entre fracciones, la utilización de alternativas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones; así como visualizar una comprensión de las operaciones básicas entre fracciones a partir de métodos no convencionales (el *ábaco fraccionario*, por ejemplo). 3

Las categorías de análisis anteriormente mencionadas, no se propusieron con el fin de enmarcar a cada sujeto con un pensamiento o estilo diferente, se trata más bien como un método en el cual se pueda observar lo que las informantes analizaron, describieron e interpretaron sobre

los procesos llevados a cabo a lo largo de la implementación de las actividades. De esta manera, se buscaron las características de cada estudiante respecto a cómo perciben ellos el concepto de fracción y fortalecen técnicas desde lo real para abordar problemas relacionados con estos; además encontrar herramientas desde lo epistemológico para fortalecer así el concepto de fracción, sus operaciones y cómo lo usan en un contexto. Por esta razón las interpretaciones que se realizaron a los datos suministrados por las informante van en línea con las unidades de análisis, las cuales vienen de las categorías y subcategorías.

En el proceso investigativo, se llevó a cabo un proceso de triangulación como el propuesto por Cabrera (2005), entendiéndose este como: “la acción de reunión y cruce dialéctico de toda la información pertinente al objeto de estudio surgida en una investigación por medio de los instrumentos correspondientes, y que en esencia constituye el corpus de resultados de la investigación.” (Cabrera, 2005 p.8)

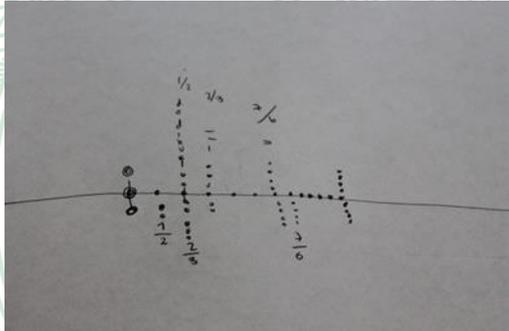
Cumpliendo así con la categorización que él propone, en donde dice que es necesario seleccionar la información obtenida y realizar algunos tipos de triangulación; el triangular la información por cada estamento, triangular la información entre todos los estamentos investigados, triangular la información con los datos obtenidos mediante los otros instrumentos y triangular la información con el marco teórico.

En el proceso de validación de la información, se llevó a cabo el proceso de triangulación que en concordancia con Cabrera (2005), se pretende poder hilar debidamente los caracteres específicos de la investigación que consisten en establecer relaciones de comparación significativa. También se triangula con diversas fuentes de información, permitiendo conocer la coherencia y pertinencia entre las ideas y objetivos de las actividades con la finalidad de la investigación.

Finalmente se pretendió mostrar dos tipos de triangulaciones, en primer momento la triangulación con pares, es decir compañeros del semillero de práctica, apropiándose así de la cosmovisión por la diversidad de objetos de estudio, con el objetivo de encontrar en la discusión con otras investigaciones la pertinencia y coherencia en las medidas para la recolección de datos, y en segundo momento la triangulación con el marco teórico con el propósito de, como menciona Cabrera (2005):

Retomar entonces esta discusión bibliográfica y desde allí producir una nueva discusión, pero ahora con los resultados concretos del trabajo de campo desde una interrogación reflexiva entre lo que la literatura nos indica sobre los diversos tópicos, que en el diseño metodológico hemos materializado como categorías y sub-categorías, y lo que sobre ello hemos encontrado cuando hemos realizado la indagación en terreno. (p.9)

Tabla 4: Triangulación entre diversas fuentes de información sistematizada

Indicio	Encuentro 3: Entrevista	Encuentro 4: Operaciones entre fracciones	Encuentro 5: Ayuda a un amigo	Encuentro 6: Entrevista final
<p>Reconoce la fracción a partir de diferentes representaciones</p>	<p>Caso 1: En cuarto comenzamos a efectuar las fracciones con las operaciones básicas, nos lo enseñaron con diagramas y tortas circulares</p>	<p>Caso 2: Utiliza la recta numérica (ella la llama también diagrama de barras) para solucionar operaciones aunque le presenta cierta dificultad la solución con este método generándole algunas desmotivaciones.</p> 	<p>Caso 2: Intenta explicar a partir de una carta en donde se explica el procedimiento a un amigo, el cual no tiene un buen dominio de las fracciones.</p> 	<p>Caso: 4 La razón de que existan las fracciones y cualquier derivación de la matemática es que nos ayudan a resolver problemas de la vida cotidiana.</p>

La anterior tabla es un ejemplo de la triangulación realizada por selección de la información o instrumentos, que luego a partir de una tabla de indicios se procedió a clasificarlas. De este modo se desecha información que es irrelevante para la investigación y se busca tener un mayor control favoreciendo la selección de descripciones densas. Con estas y a partir del material recopilado se procede a la interpretación, dejando a un lado aquello que no concuerda o lo que se aleja de los objetivos de la investigación.



#### 4. Marco conceptual

Retomando algunas de las situaciones que se evidenciaron a lo largo del planteamiento del problema y que obedecen a observaciones realizadas en la práctica pedagógica en la Licenciatura en Matemáticas y Física, se hizo notoria la existencia de complicaciones que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones en la educación escolar. Lo anterior condujo a indagar cómo puede replantearse la enseñanza de este fundamental tema. Para resolver esta cuestión se proponen dos ejes de reflexión. En un primer eje se hace un recuento sobre las características de las fracciones como objeto de enseñanza y se propone una construcción epistemológica basada en las propuestas Thomas Kieren, Hans Freudenthal y Lee Streefland. Como segundo eje se plantea la cuestión de los problemas comunes en la enseñanza de las fracciones y como la Educación Matemática Realista supone una alternativa de solución.

Por otra parte, se podría decir que una necesidad como lo es la acción de contar para el ser humano, podría ser la que obliga a considerar la relevancia del concepto de fracción en las situaciones cotidianas. Así mismo podría suceder con la acción de medir de donde Romero, (2005) dice: “La medición, en su acepción más fundamental, se identifica con la acción o acciones por medio de las cuales se compara una propiedad de un objeto o sistema, con otra de la misma clase asumida como patrón” (p.127). De a lo anterior de una manera más intuitiva, se podría decir que el medir está dado por la comparación de un patrón o unidad en lo otro que se pretende medir, y determinar el número de veces que mi patrón o unidad está o completa lo que se pretende medir. Sin embargo resultaría de lo anterior la pregunta por ¿Qué sucede cuando el patrón o unidad de medida no coincide un número exacto de veces?

En consecuencia al proceso de medición, se evidencia la necesidad de precisión, en donde se le asocia a la medición un valor estándar, de dónde Campbell (1921) dice:“ La

medición puede definirse en general como la atribución de números a propiedades, para representarlas” (p.186) esta precisión es la que genera la división de la unidad en partes más pequeñas, buscando que la diferencia entre las comparaciones sea mínima, cumpliéndose una relación inversa entre el número de divisiones y la diferencia para completar lo que se pretende medir, obteniendo así las medidas que conocemos como lo es el metro, que en la preocupación por precisión se llegó a la medida del milímetro, donde se vio la necesidad de hacer la división de una unidad (metro) en mil partes para reducir esa diferencia en la comparación de lo que se pretende medir con la unidad.

#### **4.1 El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista**

En cada situación en la que se ven inmersos tanto estudiantes como profesores durante la trayectoria en la escuela (específicamente en el transcurso de las clases de Matemáticas) y fuera de ella; se puede evidenciar que al momento de hablar de las fracciones estas se constituyen para cada individuo de forma diferente debido a la diversidad de situaciones a las que cada persona se enfrenta en su diario vivir.

Lo que se podría asegurar es que la historia ha enseñado que la formalización del proceso matemático sobre el tema de fracciones está dado a partir de situaciones cotidianas apoyadas en el lenguaje. Como lo afirma Gómez (2010) en el libro *Fracciones y Decimales*: “El primer contacto del niño con las fracciones suele ser a través de su lenguaje y afectos descriptivos: *esta botella está llena, nos toca de a un cuarto, hay que partir a la mitad*”. En otros casos se representa en una acción, usualmente de reparto: “os voy a dar la cuarta parte a cada uno”. (p.35). Este primer contacto a través del lenguaje indica la necesidad de reflexionar sobre la representación de fracciones como acto lingüístico y su papel en la construcción epistemológica de las mismas.

Por otra parte, las representaciones están presentes en diferentes aspectos y situaciones de la vida; por ejemplo, al momento de entregar un examen escrito los estudiantes se representan en la hoja de respuestas con su nombre. También, en el lenguaje de señas las personas representan su nombre con una seña personal y las señales de tránsito son una representación de ciertas situaciones o acciones que pueden ocurrir en la carretera. A partir de los anteriores ejemplos, se puede establecer de acuerdo con Gómez (2010) que “una representación es, en sentido amplio, algo que se coloca en lugar de otra cosa”. (p.73).

La acción de representar implica mucho más que reemplazar una cosa por otra. Para entender mejor este concepto en las palabras de Alzate (2009), el cual define la representación como “cualquier notación, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior como del mundo interior” (p.39). De esta forma, se consideran las representaciones *externas* como las representaciones que son elaboradas con propósitos comunicativos como mapas, diagramas y dibujos; y las representaciones *internas* como aquellas representaciones que ocupan un lugar en la mente de los sujetos como los conceptos, nociones, creencias, entre otros.

En el proceso enseñanza-aprendizaje, el papel que juegan las representaciones utilizadas por el docente en el aula de clase es fundamental. Son estas representaciones el puente que asegura una fortaleza en la relación entre los conceptos que el estudiante tiene adquiridos por sus experiencias previas y los conceptos que el mismo docente construye en el aula. Desde esta perspectiva, las representaciones no son acciones desconectadas de los alumnos que se realizan por un proceso mecánico (aunque en la escuela esto sea lo que rige la enseñanza de los temas de Matemáticas); las representaciones también exige una relación con los sentimientos causados por lo que se va a representar.

El campo de las Matemáticas exige un alto nivel de abstracción; no obstante la mayoría de las representaciones que se utilizan para facilitar el proceso de enseñanza por ejemplo de las fracciones, se ciñen a representaciones icónicas<sup>1</sup>. Aparece de este modo la necesidad de una mejor comprensión del tema de fracciones por parte de los docentes ya que los estudiantes exigen una diversidad de representaciones. Es esta diversidad y la posibilidad de participar de su construcción lo que permite de una manera más amplia, facilitar las posibilidades de que estudiantes y profesores logren mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Con base en la experiencia que se tiene en cuanto a la enseñanza de las fracciones en el aula de clase, es evidente que para este concepto, de acuerdo con Gómez (2010) “Se presta una gran atención a que los estudiantes abstraigan de determinados modelos (diagramas de tortas, papel doblado, segmentos fragmentados) el concepto de fracción y sepan expresarlo adecuadamente por medios lingüísticos y simbólicos” (p.76). Sin embargo, se evidencia que en el uso de las representaciones se hace en un proceso mecánico haciendo que quede en segundo lugar las acciones de partir, medir o comparar dos cantidades. Es decir, se pierden las nociones anteriores que se consideran básicas y se adoptan las comprensiones simbólicas de otros. Los estudiantes no participan de la construcción de los símbolos asociados a las fracciones y aceptan estos signos como impuestos. Lo anterior dista del objetivo principal de la enseñanza de las fracciones ya que alimenta la separación entre el contenido enseñado y las necesidades del estudiante.

Las representaciones forman parte importante del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de fracción en la medida que “mediante una representación (por ejemplo, una barra de chocolate de 6 partes) las principales operaciones con fracciones pueden ser percibidas y

---

<sup>1</sup> “Los gráficos, dibujos y, en general, las representaciones icónicas tienen una gran presencia en las aulas de clase” (Maza, 2010). p.76.(2010)

llevadas a cabo” (Gómez, 2010, p. 2). En la diversidad de dichas representaciones como se mencionó antes, se contribuye a que el proceso de aprendizaje del concepto de fracción sea un proceso participativo. Esto es posible ya que los estudiantes no se sentirían tentados a usar las reglas aritméticas como se han acostumbrado a hacerlo; sino que, tendrían la libertad de realizar otros procesos de resolución como consecuencia de otras formas de representación.

A partir de lo anterior esta subcategoría pretende proponer algunas concepciones acerca del tema de fracciones, las cuales serán herramientas fundamentales para la construcción de bases epistemológicas que ayuden a una adecuada interiorización de lo que significan las fracciones. Por esta razón, es indispensable crear cimientos acerca de cada una de las concepciones asociadas a las fracciones y sus características para facilitar su comprensión. De esta manera, es preciso reconocer y abordar conceptos tales como: unidad, fracción y representación; al igual que abordar variantes como tipos, procedimientos, formas y estructuras de las fracciones, de esta manera se podrá definir maneras de abordarlas y manipularlas.

#### **4.1.1 La importancia de la unidad en la construcción del concepto de fracción.**

Se hace indispensable hablar de una unidad a la hora de hablar de fracciones. Si bien la palabra fracción o fraccionar puede dar una idea de lo que significa, en algunos momentos no es tan intuitivo. Sin embargo, se podría ver fraccionar como dividir, pero ¿Dividir qué? es acá donde entra la relevancia de la elección de una unidad o de eso que pretendo dividir, como lo menciona Maia, Cámara y Cámara (citada por Zarzar, 2013):

La idea de fraccionamiento trae consigo una idea explícita de que cuando algo es dividido, es necesariamente dividirlo en porciones menores que el todo inicial, cada una de esas porciones menores es igual y es una fracción de lo que fue un “todo” en su forma original. Cuando el “todo” no es suficientemente claro para los estudiantes, la idea de unidad es oscura y el

Es por esto que unidad se puede entender como una convención o adaptación dependiendo de necesidades personales, algunas personas podrían decir que la unidad es el uno (1), pero esto varía dependiendo de un contexto, por ejemplo: En la denominación de la moneda en Colombia, no se maneja el valor de un peso, el valor mínimo en moneda es de \$50 y el valor máximo en billete es de \$100.000. Entonces al momento de fraccionar la unidad; ¿cuál debemos escoger? Este es un claro ejemplo de cómo la unidad varía, dependiendo del contexto o situación y dependiendo de la necesidad. Si necesitamos fraccionar un billete en monedas, sería apropiado dividir un billete de \$1.000 en 10 monedas de \$100, donde cada moneda representa  $\frac{1}{10}$  de la unidad que en este caso sería el billete de \$1000, pero si necesitamos fraccionar un billete de \$20.000 en 10 partes, tendríamos que \$2000 equivalen al  $\frac{1}{10}$  de la unidad la cual para este caso, la unidad es \$20.000. Si bien se pudo observar como la misma fracción  $\frac{1}{10}$ , varía estrictamente de la unidad, pero la unidad es relativa, varía dependiendo de la necesidad del contexto y no es explícitamente el número 1, ni las potencias de 10.

La fracción se puede entender de diferentes maneras dependiendo de su finalidad, en la medida en que se puede ver como una razón, un cociente o la parte de algo. En algunos casos son quizás estas manifestaciones las que pueden generar confusión; aun sabiendo que no habría razón alguna si se tiene claro para que se necesita en sí la fracción. Se entiende la fracción como una *razón* en la medida en que hay un vínculo entre un valor y otro, es decir hay un vínculo entre el numerador y el denominador<sup>2</sup> o como en algunos casos se suele decir en la escuela: “...el número de arriba es cuántas partes se va a pintar y el de abajo cuantas partes se va a dividir el círculo” (Zarzar, 2013, p.34.). Se entiende como *cociente* en la medida de encontrar la

---

<sup>2</sup> Al momento de escribir una fracción, se suele representar como  $\frac{a}{b}$  donde a se conoce como numerador y b como denominador. Generalmente en algunos casos se conoce al denominador como la unidad y el numerador como las partes o fracciones que se toman de la unidad.

simplificación de una fracción; es en sí, hacer la división o resolver el cociente entre el numerador y denominador en donde estos son respectivamente el dividendo y divisor. Dependiendo de la manera en cómo se dé esta división, la fracción podría obtener otra categoría ya sea como una fracción propia, impropia o número mixto.

Se comprende por fracción propia, cuando por decirlo de alguna manera es una verdadera fracción, es decir el cociente o resultado de la fracción es menor que 1, como por ejemplo  $1/2$  en donde el resultado del cociente es de 0,5. Impropia cuando el cociente es mayor que 1, como el caso de  $3/2$  donde el cociente es de 1,5. Se convierte en un número mixto cuando está compuesto por una parte fraccionaria y una parte entera como es el caso de  $3/2$  ya que toda fracción impropia es un número mixto en este caso la parte entera de  $3/2$  sería 1 o  $2/2$  y la parte fraccionaria sería  $1/2$ , se expresaría como  $3/2=1(1/2)$ . Como último, se tiene la relación *parteto* que como lo menciona Vergnaud (citado por Zarzar, 2013):

Los estudiantes deben comprender que un todo es siempre compuesto por elementos separados y que una fracción implica un determinado número de partes. El todo puede ser exhaustivamente subdividido, pero no se puede subdividir partes del todo e ignorar las otras partes. El todo existe en una relación entre el número de partes y las divisiones. (p.36).

Si el todo es dividido se puede obtener una fracción la cual estaría indicando las divisiones de ese todo. Sin embargo Vergnaud (citada por Zarzar, 2013) menciona el cuidado en la división de una parte ya dividida, dado que se estaría tomando una fracción de otra fracción. Lo que conlleva a una operación no tan intuitiva. Si bien se puede dividir algo entre 4, se estaría diciendo que cada una de las partes conformaría  $1/4$ ; las 4 partes conforman el todo. El cuidado que nos resalta Vergnaud (citada por Zarzar, 2013), se da en la medida en que ese  $1/4$  no es posible dividirlo y llamar esa nueva fracción como la parte del todo, porque el todo ahora no sería ese algo que dividimos, el todo sería ahora el  $1/4$ .

Si bien las fracciones tienen una representación en cuanto a la parte de una unidad, también tienen un contenido matemático, un valor numérico. A la fracción se le puede entregar una denominación, es decir; \$2000 puede ser igual a  $1/10$  cuando se tiene que la unidad es \$20.000, pero también  $1/10$  por sí solo puede representar un valor en la recta numérica, siendo 0,1. Este valor varía dado que la fracción tiene el sentido de ser un operador<sup>3</sup> cuando es multiplicada, pero al mismo tiempo puede ser una representación numérica.

Como la fracción es también una representación numérica, cumple las características de todos los números, más aún porque estos números pertenecen al conjunto de los reales y adquieren así sus propiedades, es decir, se pueden realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre fracciones con todas las propiedades de cualquier número real.

Para entender y no solo realizar cualquier operación entre fracciones es necesario saber que significan. Resolver operaciones entre fracciones, se puede obtener mediante un sencillo algoritmo el cual puede tener múltiples nombres, ayudas mnemotécnicas o simplemente seguir un recetario<sup>4</sup>, el verdadero reto inicia cuando se pretende entender ¿Qué se hace? ¿Por qué se hace? y ¿Cómo se hace?

Para algunas mentes más curiosas no basta decir que  $1/2 + 1/2 = 1$ . Aunque desde el lenguaje común parece muy trivial decir que “sumar dos mitades me va a dar el objeto completo”; esto no se hace tan evidente cuando se debe resolver una operación de sumas entre fracciones y más aún cuando se trata de otras fracciones que no son tan intuitivas. ¿Cómo sumar  $3/4$  y  $2/5$ ? Para intentar resolver esta pregunta es necesario primero solucionar otras que pudiesen ayudar a reforzar fundamentos epistemológicos, los cuales permitan entender qué es lo que se

---

<sup>3</sup> Entiéndase como operador aquello que tiene la posibilidad de modificar una expresión, en este caso al operar un valor por una fracción, el valor se verá alterado dependiendo de la fracción por la cual haya sido multiplicada.

<sup>4</sup> Entendiéndose como recetario, aquella guía donde se da instrucciones paso a paso de cómo se debe de realizar una actividad, generalmente como una receta en un libro de cocina, pero para este caso son las instrucciones paso a paso de cómo se debe de realizar una operación.

está haciendo. Se puede afirmar que al momento de este marco teórico existe una aproximación a la respuesta por el *¿Qué es una fracción?*, pero quedan por resolver preguntas como: *¿Qué implica sumar fracciones? ¿Todas las fracciones se suman de la misma manera? ¿De qué servirá sumar fracciones?* Estas preguntas son las que marcan una diferencia dependiendo de la curiosidad del estudiante y la necesidad de aprender y conocer o solo la de cumplir un requisito del profesor.

#### 4.1.2 Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.

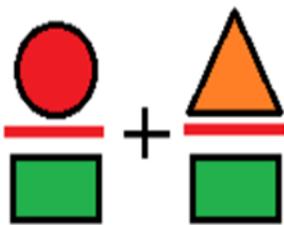


Figura 1: suma entre fracciones homogéneas

La cuestión no es la dificultad de las anteriores preguntas, no es obligatoriamente necesario tener un vasto conocimiento, se necesita más la intención por conocer y preguntarse sobre el significado de sumar fracciones. *¿Será sumar dos partes de algo? ¿Pueden ser dos partes del mismo algo o de algo diferente?* Esto

implicaría lo que se denomina fracciones homogéneas (figura 1) y fracciones heterogéneas<sup>5</sup> (figura 2) dependiendo respectivamente de si son fracciones que vienen del mismo denominador o de diferente denominador.

Es de notar la facilidad que se presenta al momento de operar las fracciones homogéneas; al igual que acercarse al concepto de fracción es más sencillo extraer dos fracciones de una misma unidad y operarlas que tomar dos unidades diferentes y operarlas luego.

Usualmente las operaciones entre fracciones heterogéneas (por lo

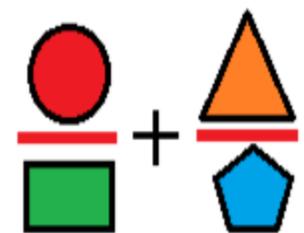


Figura 2: suma entre fracciones heterogéneas

<sup>5</sup> Que dos fracciones sean homogéneas significa que en ambas fracciones el denominador es el mismo, es decir, la unidad está dividida en la misma cantidad de partes. Que dos fracciones son heterogéneas significa que en ambas fracciones la unidad está dividida en una cantidad diferentes de partes.

menos suma y resta) son de manera más operativa, dado que cuando están incrustadas en un contexto suelen ser homogéneas. Por ejemplo, si se tiene  $1/10$  de \$2000 y se le suman  $2/10$  de \$2000, se tendrían dos fracciones que son homogéneas en la medida en que la unidad se divide en las mismas partes. Mientras que si a  $1/10$  de \$2000, se le suma un  $1/5$  de \$2000, se tendrían dos fracciones que son heterogéneas en la medida en que la unidad se divide en partes diferentes.

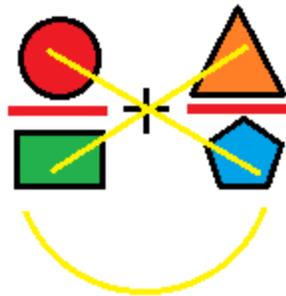


Figura 3: suma entre fracciones

En caso de que las fracciones sean homogéneas (la misma división de la unidad), sólo sería operarlas, es decir resolver la suma entre numeradores mientras el denominador permanece igual. En caso de fracciones heterogéneas, se podría utilizar el método nemotécnico como comúnmente se le denomina en las instituciones: carita feliz<sup>6</sup> (figura 3: suma entre fracciones).

Sería entonces apropiado pensar ¿Qué sucede entonces con las otras operaciones que conocemos como multiplicación y división? Como ya se había mencionado, las fracciones cumplen el papel de ser cantidad y de ser un operador. Al ser una cantidad, no sería descabellado pensar que es posible también multiplicar y dividir, es de preguntarse entonces ¿Qué implica multiplicar y dividir fracciones?

Si bien la multiplicación de enteros, la hemos visto como una abreviación de una suma, ¿representaría lo mismo multiplicar fracciones? La manera más simple de verlo sería considerando el cálculo del área de un rectángulo. La multiplicación de los lados

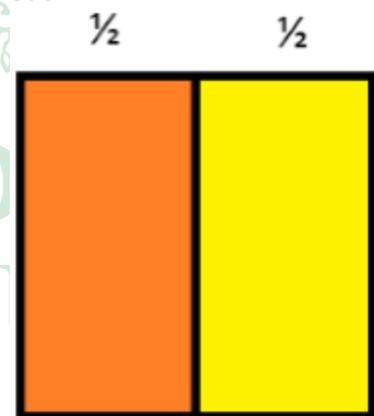


Figura 4: división de la unidad (un cuadrado) en medios

<sup>6</sup> La suma entre fracciones por lo que se conoce comúnmente carita feliz, es el cociente entre la suma o resta del producto entre el numerador del primer factor con el denominador del segundo factor, multiplicado el producto entre el numerador del segundo factor con el denominador del primer factor y el producto entre los denominadores.

del rectángulo determina su área y esto mismo ocurriría con las fracciones. Se tomará primero la unidad (un cuadrado) y se dividirá en 2 partes donde cada parte equivale a  $\frac{1}{2}$  del área de la unidad tal cual lo muestra la figura 4.

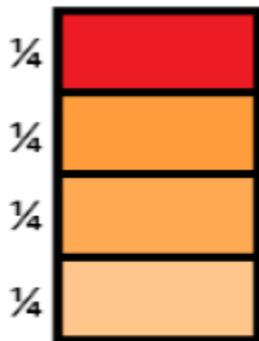


Figura 5: división (de la parte naranjada) en cuartos

Luego tomaremos la parte naranjada (que corresponde a la mitad de la unidad) y la dividiremos en cuatro partes iguales tal como lo muestra la figura 5. Tenemos entonces dos fracciones de la unidad que acabamos de dividir, primero  $\frac{1}{2}$  de la unidad y luego  $\frac{1}{4}$  de la mitad. Al multiplicarlas tenemos la fracción  $\frac{1}{8}$  que sería el fragmento rojo como lo muestra la figura 6. Para conocer entonces, el área roja es preciso hacer el producto entre las dos

fracciones, donde se tiene que  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  la cual es la equivalencia del área de color rojo en la figura 6, respecto al área total del cuadro de la figura 4.

Si bien hasta el momento se ha construido la respuesta acerca de que es sumar, restar, y multiplicar fracciones ¿Qué significa dividir fracciones? Se podría mirar como una comparación entre una fracción y otra. Sería entonces también preguntarse ¿Cuántas veces está una fracción en otra? Por ejemplo cuántas veces está el  $\frac{1}{6}$  en  $\frac{5}{6}$ , o lo que sería lo mismo la división  $\frac{5}{6}$  entre

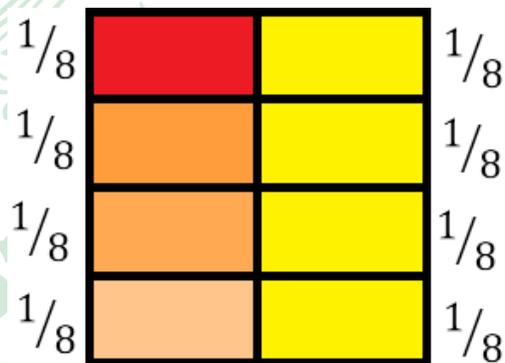


Figura 6: Resultado multiplicación entre fracciones

$\frac{1}{6}$  (la zona sombreada de gris) de la figura 7. Gráficamente se podría visualizar este ejemplo. Así pues,  $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$  es igual a 5. Es decir  $\frac{1}{6}$  cabe cinco veces  $\frac{5}{6}$ .

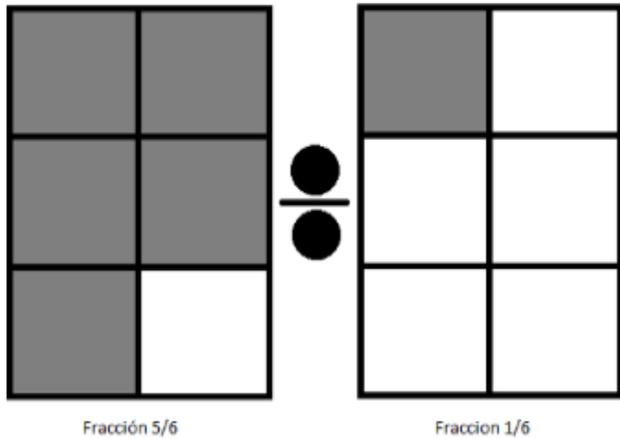


Figura 7: División entre fracciones

De acuerdo con lo anterior, se podría decir que se hace necesario en el proceso de enseñanza de las fracciones la propuesta de un método por parte del docente en el que el estudiante pueda reconocer la diversidad de representaciones en cuanto a fracciones, permitiéndole así una manipulación más amplia. Al igual que una construcción en donde este siempre presente la pregunta por el significado detrás del algoritmo.

#### **4.2 La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista**

Para iniciar es importante comenzar con lo que es la epistemología es y cómo se relaciona con la investigación, para contextualizar según Ceberio y Watzlawick (citado por Echeverri, 2003) “El término epistemología deriva del griego episteme que significa conocimiento, y es una rama de la filosofía que se ocupa de todos los elementos que procuran la adquisición de conocimiento e investiga los fundamentos, límites, métodos y validez del mismo” (p.175) De esta manera, la epistemología busca la profundización de los conocimientos, sus funciones, sus raíces, cómo se verifica y construye un determinado concepto. En esta misma línea Echeverri (2003) dice “La epistemología es a mi criterio, ese punto de vista desde el cual me relaciono con las cosas, con los fenómenos, con los hombres y eventualmente con lo trascendente”(p.176) A partir de esta cita se pretende mostrar que la construcción epistemológica del concepto de fracción es importante ya que se pretende ver cómo las informantes se relacionan con el concepto de fracción y la manera en cómo se les muestra y

trascienden en ello, además no es solo ver el por qué del concepto es mirar también cómo se puede contribuir y evolucionar en él.

Retomando algunas de las observaciones problemáticas que se evidenciaron a lo largo de la práctica pedagógica, se hizo notoria la existencia de complicaciones que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones en la educación escolar. Lo anterior condujo a indagar sobre cómo se plantea la enseñanza de este tema en la educación colombiana y su importancia.

Según lo planteado en los Estándares básicos de competencias (2006) del área de Matemáticas, la enseñanza de las fracciones debe ser realizada desde el grado primero de primaria pero no con la complejidad como se trabajaría en bachillerato o la universidad. Sin embargo, se ha acordado por dichos estándares que desde este grado debe generarse un acercamiento inicial en el cual debe enfatizarse en los dos ítems siguientes: “Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes”. (p.80) y “Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones” (p.80).

Tabla 6: Estándares básicos de competencias referentes a las fracciones desde primero hasta once

Grado	Estándares básicos de competencias en Matemáticas
De primero a tercero	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes.</li> <li>● Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.</li> </ul>
De cuarto a quinto	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.</li> <li>● Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.</li> </ul>
De sexto a séptimo	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.</li> </ul>
De octavo a noveno	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.</li> <li>● Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.</li> </ul>
De décimo a undécimo	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.</li> </ul>

Así, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones debería ser constante año tras año hasta el grado once. (En la tabla 6 se especifican los estándares de competencia referentes a las fracciones que deben adquirir los alumnos en los diferentes grados hasta el grado once). Esto se evidencia en los Estándares básicos de competencias (2006) del área de Matemáticas según los cuales el estudiante al terminar el grado once debe adquirir los procesos necesarios para las operaciones entre fracciones tales como identificar las relaciones parte-todo.

Sin embargo, se puede pensar que este no es el caso en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la medida en que en algunas instituciones educativas el tema de fracciones no es tan periódico. Así, en algunos centros educativos como se evidenció en la práctica pedagógica<sup>7</sup>; se enseña fracciones en el grado séptimo u octavo y se puede constatar que en algunos casos a los estudiantes en el grado décimo aún se les presenta cierta dificultad por ejemplo al distinguir el numerador del denominador.

En lo que respecta al trabajo del docente, a este se le exige desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) que “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista” (p.18) con el fin de que haya una adecuada aproximación al tema. En el caso de las fracciones, el docente se encontraría así en la tarea de mostrarle al alumno como facilitar la abstracción de las fracciones llevándola a la vida cotidiana.

De esta manera, el profesor debe introducir procesos de enseñanza en los cuales según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) “...no se puede restringir a un sólo proceso de aprendizaje como el razonamiento, se involucran otros procesos que están estrechamente relacionados con la actividad matemática, como los de modelación, comunicación, entre otros” (p.21). Esto se da cuando el profesor plantea en clase un problema, por ejemplo el cuándo tiene una dificultad en la casa y les toca empeñar algo y solo le dan una fracción de su valor real, en este caso el niño puede conocer su contexto y se ve obligado a representar la situación para la solución del problema que ha sido planteado. Después de este proceso es importante contextualizar el concepto de fracción y encontrar las herramientas idóneas para que el niño,

---

<sup>7</sup> Práctica pedagógica en los grados séptimo, noveno y décimo en las instituciones: Institución educativa normal superior de Medellín (Villahermosa), Institución educativa Tulio Ospina (Medellín) e Institución educativa Centro Formativo de Antioquia (CEFA), respectivamente.

pueda apropiarse y manipular en sí los elementos relacionados con las fracciones como algo necesario en su día a día.

En línea con lo anterior se proponen a continuación dos subcategorías que cuestionan la enseñanza de las fracciones y postulan alternativas de solución al problema de esta investigación. En la primera Hans Freudenthal propone que las matemáticas deben ser enseñadas desde lo real, por esta razón se proponen 6 principios los cuales satisfacen dicha propuesta, con el objetivo de que esto se lleve más al aula de clase. En la segunda encontramos la propuesta de Kieren y Streefland que enfatizan en las problemáticas que surgen al momento de tratar las fracciones, de este modo Kieren muestra una serie de secuencias que permite al estudiante aprenderlas de una manera adecuada, rechazando la parte mecanicista de las fracciones, en la misma línea está Streefland el cual propone un ejemplo claro de cómo debería enseñarse las fracciones desde un enfoque realista, dejando a un lado la parte algorítmica y resaltando la parte de la abstracción.

#### **4.2.1 Educación Matemática Realista: una propuesta de Hans Freudenthal.**

La corriente conocida como Educación Matemática Realista (EMR), fue fundada en Holanda en los años 60 por el matemático y educador Hans Freudenthal y se opone al enfoque mecanicista de la matemática de la época. Por esta razón, para Freudenthal la EMR se centra en incorporar el contexto y las situaciones problemáticas que involucren la realidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, además de centrarse en el cómo y el qué de su enseñanza. Es en este sentido, Freudenthal (citada por Bressan A. M., 1973) nos dice que para él “un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (p.3), siendo el término “matematizar” un elemento importante en la EMR.

En cuanto a la importancia del contexto en la enseñanza de la matemática, el cual es uno de los ejes fundamentales de este modelo pedagógico; Según Heuvel-Panhuizen (1987), nos dice que tal vez, “matematizar” sea uno de los principales conceptos de su propuesta. Entendida esta acción como el proceso en el cual se organiza la realidad a partir de herramientas matemáticas y que se fundamenta en ver la matemática como una actividad humana. Se pretende mostrar que Freudenthal (citada por Heuvel-Panhuizen, 2009) dice que “las estructuras matemáticas no son un conjunto de datos fijos, sino que surgen de la realidad y se expanden continuamente en procesos individuales y colectivos de aprendizaje” (p.38), haciendo del proceso de formación una actividad social e interactiva.

Según Alsina (2009), Hans Freudenthal en su modelo pedagógico, propone 6 principios los cuales sirven de apoyo para el uso adecuado del mismo. Se muestra de manera sintetizada lo que Freudenthal propone para cada uno de sus principios en la Tabla 7:

Tabla 7: Principios propuestos por Hans Freudenthal descritos por (Alsina, 2009).

Principio	¿Qué es?
1. <b>Actividad</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Las matemáticas se consideran una actividad humana.</li> <li>● La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática.</li> <li>● La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema.</li> </ul>
2. <b>Realidad</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales.</li> <li>● Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.</li> </ul>
3. <b>Niveles</b>	<p>Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Situacional: en el contexto de la situación.</li> <li>● Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc.</li> <li>● General: exploración, reflexión y generalización.</li> <li>● Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.</li> </ul>
4. <b>Reinvención guiada</b>	<p>Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.</p>
5. <b>Interacción</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social.</li> <li>● La interacción entre los estudiantes, entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.</li> </ul>



**6. Interconexión**

Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría...) no pueden ser tratados como entidades separadas.



En el momento en que Freudenthal propone sus principios pretende mostrar que “la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola” (Bressan, 2004, p.2). Freudenthal dice (citada por en Bressan, 2004) “la evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel” (p.7). Se evidencia la necesidad de una secuencia frente al proceso de aprendizaje del niño, o como él lo llama el principio de niveles. Es por esto que Bressan (2004) dice que “la interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados.” (p.10).

Es necesario también que haya una conexión estrecha entre los contenidos temáticos; que sea para el niño una conexión visible entre un tema y el siguiente para marcar la importancia de la secuencialidad en las matemáticas. Así el niño esté en la capacidad de realizar análisis de cada uno de los conceptos en la clase y pueda manejar así una estructura formal.

Según la EMR la reinención guiada es “un proceso en el que los alumnos re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente” (Bressan A. 1973, p.5). En esta misma línea; la reinención guiada también se constituye como una actividad en la que se hace posible tratar los aspectos de la cotidianidad desde la matemática. Matematizar exige desde un punto de vista curricular, “la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes” (Bressan A. 1973, p. 2).

La EMR se constituye como un proceso pedagógico en que la matemática deja de ser una un proceso meramente instruccional<sup>8</sup> en el que se reconocen pocas relaciones con el contexto real y pasa a convertirse en una “actividad humana” (Freudenthal H. 1971, p. 3). De esta manera lo que se pretende es que sea una situación real en donde el niño pueda imaginarla y de esta manera manipularla mentalmente, el niño reinventa así, en la medida en que manipula la situación sin necesidad de que él deba inventarla, crearla, solo es necesario manipularla y es una manipulación no exactamente tangible, puede, puede ser una manipulación imaginaria, tal como la menciona Heuvel-Panhuizen (2009) a la hora de hablar de la creación de contextos:

Los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, e incluso el mundo formal de las matemáticas, son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean “reales” en la mente de los estudiantes. (p.37)

Si fuese posible recordar, ¿Cuál es la primera relación con la idea de fracción?, ¿Cuál fue la primera representación que se tuvo de las fracciones? No se puede asegurar que haya un tipo de representación y una misma relación que sea igual para cada persona puesto que estas características varían de acuerdo al contexto en el que el individuo esté inmerso.

Al considerar entonces la matemática como una actividad humana en la que, como se mencionó líneas atrás, todos los eventos de la vida son matematizables; se hace indispensable que para el caso de las fracciones se hable de la matemática en un contexto como una herramienta para favorecer el aprendizaje de este tema. De esta forma, la EMR considera que “los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos” (Heuvel-Panhuizen, 2009, p. 37).

---

<sup>8</sup> Entendiéndose este como un proceso en el que el estudiante solo recibe el que hacer por parte del docente, donde este le dice paso a paso lo que debe de realizar sin preocuparse por el análisis que el estudiante pueda realizar por sí mismo.

Así como lo menciona Bressan A. (1973) “una idea central, sino la más importante de la EMR, es que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad” (p.2). Es desde aquí, que se puede decir que en el aula de clase está la necesidad de hablar de la matemática desde una educación realista como una herramienta para facilitar el aprendizaje de las fracciones.

Dado a lo presentado anteriormente es que se considera de carácter necesario la inclusión de esta propuesta como mediador de una manera diferente que se desligue de lo que generalmente se vive en el aula de clase y pueda posibilitar de una u otra manera la enseñanza y el aprendizaje dentro del aula de clase. Lo que se pretende en esta investigación en cuanto a este método pedagógico, es adoptar la propuesta diseñada por Freudenthal acerca de la Educación Matemática Realista (EMR) para crear actividades donde se desarrolle el concepto de fracción. De acuerdo con lo que propone la EMR y en palabras de Alsina (2009), la enseñanza se concibe como “la interacción en el aula entre los estudiantes y entre el profesor y los estudiantes. Esta interacción, que debe ser intensa y permitir a los profesores construir sus clases, teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes” (p.122).

Esta interacción a la que se hace referencia, es la principal herramienta para que el proceso de enseñanza-aprendizaje se constituye de tal forma que los estudiantes relacionen su experiencia con los conocimientos a construir; y que el docente de un giro a su práctica para sustentarse en los eventos de la cotidianidad. Es desde este nuevo proceso de formación del que se desea partir, y del cual, se espera romper con los tradicionalismos y las ideas que tanto profesores y estudiantes reflejan al momento de dar o recibir, según sea el caso, una clase de matemáticas. Esto aplica principalmente para los autores de esta investigación.

A partir de todos estos cuestionamientos y en el contexto de la enseñanza de las fracciones, Hans Freudenthal aplica la EMR para forjar una estrategia de reflexión epistemológica sobre las fracciones como objeto de conocimiento. Se puede observar que el concepto de fracción es amplio y no tan sencillo como algunos piensan, debido a esto, Freudenthal en su texto *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*<sup>9</sup> nos muestra cómo relacionar las fracciones con el contexto de forma que sirva de herramienta para mejorar la comprensión de las fracciones. Es fácil evidenciar que en algún momento de la vida se han visto involucrados el número racional, pero usualmente en la educación se da a conocer por medio de la fracción. Esto según Freudenthal (2001) “es la palabra con la que entra el número racional, y en todas las lenguas que conozco está relacionada con romper: fracturar” (p.2), y así se inicia la idea de fracción de una manera más intuitiva, desligando de ahí las demás partes que conforman un número racional, por ejemplo los porcentajes y el número decimal.

Sin embargo, la idea de fracción necesita de un contexto que lleve a los estudiantes a un mejor acercamiento respecto de este concepto, pero sin creer que el simple hecho de mirar este desde una realidad sea la única manera para construir lo que es la fracción, Según Freudenthal (2001), “...este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones se consideran peores que los números naturales y por lo que mucha gente nunca aprende las fracciones” (p.2); ya que suponer que los números fraccionarios pueden tratarse de la misma manera que los naturales puede causar problemas conceptuales.

Por tanto de acuerdo con lo que dice Freudenthal (2001) “Los alumnos con el don de digerir algoritmos aprenden a operar con fracciones de todos modos, los alumnos menos o nada dotados en este sentido específico lo aprenden por ensayo y error o no lo aprenden en absoluto”

---

<sup>9</sup> Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas, texto traducido por: Luis Puig, 2001

(p.13). Con lo anterior, no se está diciendo que este mal que ellos se aprendan los algoritmos para operar fracciones, lo que se pretende es que el estudiante pueda hacer diferentes abstracciones, que pueda comparar cantidades y construir el significado de las fracciones en profundidad.

Inicialmente para un docente en Matemáticas, involucrar el contexto es de suma importancia para mejorar los contenidos, de esta manera el tema de fracciones tiene diversos problemas que ayudarían en la implementación del contexto como “...la mitad de (por analogía con igual de, el doble de...) Seguido de..., largo, pesado, viejo, comparar cantidades y valores de magnitudes” (Freudenthal, 2001, p.3), es decir el implementar las fracciones en el contexto implica también otras formas verbales como, por ejemplo la mitad de largo, el doble de pesado e incluso igual de viejo de esta manera las fracciones no solo están tratadas numéricamente, sino que en este caso se pueden dar por comparaciones. Por otro lado, según Freudenthal (2001) “Menos usual es un tercio de, dos tercios de..., largo, pesado, viejo... a duras penas puede ser considerado como perteneciente al lenguaje cotidiano” (p.3). En otras palabras, involucrar en el contexto un tercio de pesado, un tercio de largo o un tercio de viejo es un poco usual, lo mismo que  $\frac{1}{5}$  o  $\frac{1}{7}$  de algo. Es por esto que el trabajar con el contexto significa poner valores con los que los estudiantes se vean medianamente involucrados y no solo un montón de fracciones que puedan que no tengan ningún sentido en la realidad en la que se encuentran.

Al mismo tiempo, así como es importante analizar lo que implica “un medio de...”, o “un tercio de algo”, es igual de importante que los esquemas tradicionales que se usan en la enseñanza de las fracciones. Por ejemplo, al partir una torta “La cuestión de cuántas veces una parte cabe en un todo es significativa sólo si uno ha acordado bajo qué condición se consideran las partes como equivalentes” (Freudenthal, 2001, p.14). De esta manera, el tratar ejemplos como

los de la torta involucra también otros conceptos importantes como lo son, la equivalencia de fracciones, la parte-todo y las fracciones propias e impropias que proporcionan al estudiante herramientas que facilitan la comprensión de este tema.

A partir de lo anterior es pertinente decir que en el estudio de las fracciones la relación parte-todo juega un papel importante en cuanto a la consideración de la unidad, pues el todo en este caso representa la unidad. Se podría decir que los primeros acercamientos que los niños tienen acerca de las fracciones son expresiones como: “este balde está medio lleno” “nos queda la tercera parte de algo” o “la caja está medio llena” se podría decir entonces de acuerdo a esto, que el primer acercamiento que se tiene de la noción parte-todo va ligado a acciones cotidianas, pero según Gómez (2010) “En la escuela, el reparto se realiza sobre una magnitud continua, como es el caso de una hoja de papel” (p.35) con esto, aunque lo cotidiano se presta para inicialmente dar un acercamiento sobre “la parte de un algo” usualmente en algunas instituciones suelen enseñarlo a partir de una hoja de papel, en este caso el maestro trata de mostrarle a los estudiantes que si corta el papel en dos partes iguales, se asocia la palabra “un medio” y el símbolo numérico asociado a este es  $1/2$ . Además de enseñarle al estudiante la noción parte-todo a partir de una magnitud continua ejemplo anterior, también se le enseña a partir de una magnitud discreta, como por ejemplo el reparto de un conjunto de canicas.

Según Morales (2011) “la fracción parte-todo se considera como un todo continuo o discreto que se divide en partes iguales indicando esencialmente la relación existente entre el todo y un número designado de partes”(p.22) donde esta relación parte-todo va ligada a la conceptualización de algunas propiedades “como la que conduce a la denominación “fracción propia” e “impropia”), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma y la resta)”(p.22). De esta manera la noción de parte-todo no solo tiene relación

con la unidad sino que también va ligada a otras propiedades de las fracciones como las anteriores que son importantes para su conceptualización en el aula de clase.

De la misma manera que la noción de parte-todo juega un papel fundamental, la relación de equivalencia en la enseñanza de las fracciones también, ya que estas pueden facilitar la solución de operaciones entre fracciones en la medida en que las fracciones de equivalencia pueden ser entendidas como fracciones que representan la misma cantidad o parte de un todo. Usualmente en algunas instituciones educativas se muestra que dos fracciones son equivalentes si los productos cruzados son iguales, es decir  $1/2 = 2/4$  si  $1*4=2*2$ . En esta misma línea Kieren (citado por Gómez, 2010) “La idea de equivalencia entre fracciones implica, la comprensión de dos tipos de igualdades: La “relativa” (traducible a la regla de multiplicación por uno) y la “deductiva”, que afirma que dos fracciones son equivalentes cuando es igual al producto de medios y extremos” (p.164) respecto a lo anterior la regla de la multiplicación por uno según Gómez (2010) es como los matemáticos definen la relación de equivalencia.

Otro aspecto importante para tener en cuenta según Freudenthal es la comparación. Según Freudenthal (2001) “La didáctica tradicional pasa por alto que la concreción de las fracciones no se agota con romper un todo en partes” (p.14) Con esto, hay que entender que también hay otros esquemas que ayudan a comprender las fracciones, y no solo el tomar una unidad y de allí sacar la parte que necesito, las fracciones son mucho más que eso. Por ejemplo: “En esta habitación hay la mitad de mujeres y de hombres, el banco es la mitad de alto que la mesa, la calle es  $1\frac{1}{2}$  veces más ancha que el sendero, Juan gana la mitad que Pedro, el cobre es la mitad de pesado que el oro” (Freudenthal, 2001,p.14). De esta manera se pueden establecer diferentes relaciones las cuales se pueden enseñar con situaciones similares que involucren

objetos que se tienen en el salón o en su entorno, así construir el concepto de fracción de una manera realista.

Finalmente el poder representar las fracciones de manera diferente ayuda a que el estudiante cree patrones y asemeja más lo que observa en su entorno y lo lleve más allá de una serie de algoritmos. A partir de lo anterior, lo que pretende Freudenthal es mostrar toda una serie de herramientas que se pueden tener sobre las fracciones con respecto a la cotidianidad. Para ello se basa en comparaciones, esquemas y razones, de manera que se desarrollen y lleguen a ampliar herramientas tanto conceptuales como tangibles que se le presentan en el aula de clase, con el objetivo de dejar esa manera trillada de ver las fracciones.

#### **4.2.2 Streefland y Kieren: enfoques realistas para la enseñanza de las fracciones.**

##### *4.2.2.1 Streefland.*

Siguiendo con el enfoque realista que nos propone Hans Freudenthal, Streefland reflexiona sobre la importancia de crear un ambiente realista en el que los estudiantes puedan aprender las fracciones Streefland (1993). Decide entonces seguir con la idea de que “...la matemática que va a ser enseñada está conectada firmemente con la realidad” (p.1). De este modo, cualquier tema de matemáticas que se pueda enseñar en el colegio debería estar vinculado con su realidad.

Con relación a lo anterior, Streefland en su texto *fracciones: un enfoque realista*, además de mencionar la importancia que se le da a las matemáticas en cuanto a involucrar lo real en el aula de clase, se enfoca en el tema de las fracciones. Menciona en primera instancia que “...el término realista se refiere a la manera en la cual los alumnos comprenden (sus) fracciones en el

proceso de enseñanza-aprendizaje” (Streefland, 1993, p.1). De esta manera el enfoque realista no pretende orientarse sólo en las herramientas teóricas que se usan, se refiere más a la enseñanza en la medida en cómo a partir de los conocimientos forjados por la experiencia, se crean ambientes de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, el tratar de buscar enseñar las fracciones desde este enfoque, en ocasiones no suele ser tan sencillo como se piensa por diversos motivos por ejemplo: el tiempo, falta de compromiso o simplemente desconocimiento.

Es por esto que se esperaría que dichas problemáticas no se presentaran durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues como se ha mencionado durante todo el trabajo, las fracciones nos han acompañado desde casi siempre a lo largo de la historia.

Martínez (1992) considera que “parecería natural, desde la perspectiva de la estructura de la matemática, que si el niño ya conoce los números enteros fácilmente puede abordar las fracciones” (p. 2). Esto lleva a pensar que los estudiantes deberían manejar casi a la perfección el concepto de fracción o por lo menos, no se les dificultará conectar los conceptos experienciales que cada uno trae con los conceptos formales que se enseñaran en la escuela puesto que ya conocen los números naturales.

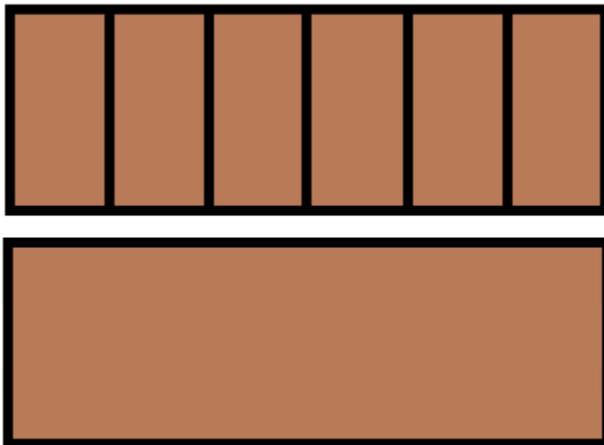


Figura 8: Unidad (chocolatina)

Debido a estas problemáticas ya la manera en cómo se enseña la Matemática lo que Streefland (1993) propone es “La exploración de situaciones como: dividir 6 panqueques entre 8 chicos o 5 pizzas entre 4 chicos” ya que en el análisis de estas situaciones se produce fracciones equivalentes y números mixtos” (p.2). Esto con el objetivo

de involucrar situaciones problemas relacionadas con la realidad y soluciones alternativas que ayuden a desarrollar tanto esquemas visuales, como los diferentes subtemas que involucran las fracciones.

Una de estas situaciones problema sería según Streefland (1993) operar las fracciones con una barra de chocolate que contenga seis partes (figura 8) “Media barra es igual a tres partes y dos partes son iguales a un tercio (figura 9). Si combinamos tres partes y dos partes, falta sólo una parte o un sexto para completar la barra. Entonces  $1/2 + 1/3 = 5/6$ ”

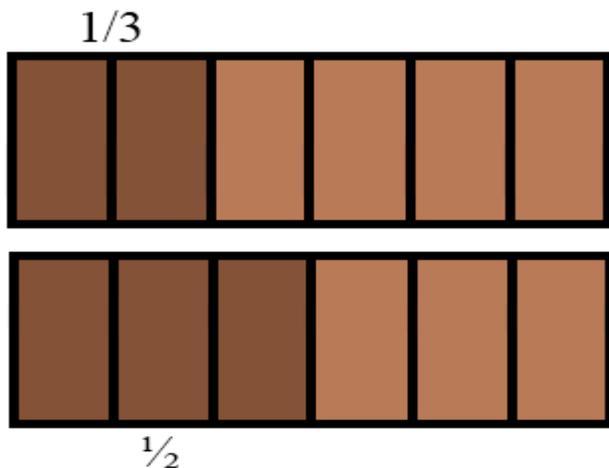


Figura 9: División de la unidad en 3 y en 2 partes

(figura 10) (p.2), Con esto el autor pretende explicar cómo se puede sumar las fracciones, en este caso los estudiantes pueden establecer intuitivamente qué significa la unidad y hacer un análisis sobre lo que involucra sumar fracciones.

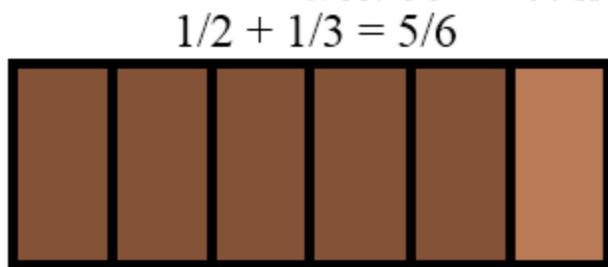


Figura 10: suma

Para la división por ejemplo, la operación  $1/2 \div 1/3$  se puede deducir como el resultado de la comparación de tres partes con las dos partes. “Esto muestra que el último entra una vez y media en el primero.

Por lo tanto,  $1/2 \div 1/3 = 1 \frac{1}{2}$ ” (figura 11) (Streefland, 1993, p.2). Esta manera de operar la división, comúnmente no es mostrada en el salón de clase, de hecho la división de fracciones se suele enseñar por el método de “extremos y medios, también conocido como (ley de la oreja) o de invertir una de las fracciones y luego

utilizar el método de la multiplicación. Así que, no se trata de explicar algo abstracto, se trata de utilizar formas en las cuales se pueda entender lo que significa la división y elementos en este caso como la comparación resultan muy útiles.

No solo se muestra un algoritmo, se muestra una manera de llevar a cabo estos problemas tomando conciencia de que hay más elementos importantes, mostrando así que las diferentes representaciones crean una manera diferente de operar las fracciones.

Para finalizar este apartado, se plantea el uso de esquemas visuales o tangibles como posibilidad de adquirir una buena comprensión de lo que se está enseñando. En palabras de Streefland (1993) “Las fracciones simbólicas sólo pueden ser entendidas cuando las fracciones

representan algo” (p.5). No solo es mostrar elementos sin sentido, los cuales solo garantizan que el estudiante se pierda más. Por ejemplo el enseñar una suma como  $\frac{7}{88} + \frac{80}{3}$  no tienen sentido ya que ¿Se usa esta suma de fracciones en la vida cotidiana? La respuesta es no; a duras penas se ve una fracción como  $\frac{1}{5}$  en la vida cotidiana.

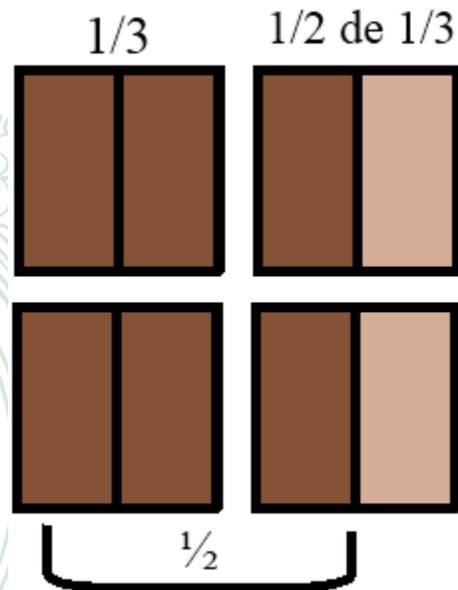


Figura 11:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$

#### 4.2.2.2 Kieren.

Thomas Kieren, profesor de la facultad de Educación de la Universidad de Alberta en Canadá, ha dedicado alrededor de 30 años de trabajo a aspectos relacionados con la Matemática y el currículo. Años entre los cuales se ha destacado como experto en el estudio sobre cómo las personas llegan a conocer los números fraccionarios. Enfatiza en su texto *On the mathematical,*

*cognitive and instructional foundations of rational number*<sup>10</sup> la importancia de los registros históricos en lo que se refiere a las fracciones en diferentes contextos, tales como en los egipcios y babilónicos. Además de su preocupación por estudiar cómo el niño entiende las fracciones y lo necesario que es la experiencia a la hora de comprenderlas; analiza también cómo las operaciones de números fraccionarios se resuelven de forma mecanicista.

Kieren (1975) menciona que “Las fracciones eran objetos de cálculo” (p.104) por lo tanto, se le prestaba más atención a lo simbólico y a la memorización de diferentes términos dejando a un lado la parte de la representación y el análisis de diferentes problemas. Esto se puede ver expuesto en la educación a lo largo de la historia, mostrando así que la enseñanza de las fracciones sigue siendo enseñada de la misma manera: rutinaria y algorítmica.

Retomando lo anterior, cuando Kieren (1975) es enfático diciendo que “las fracciones y los números racionales han estado con nosotros casi a lo largo de toda la historia registrada” es paradójico el hecho de que si han estado con nosotros desde hace tanto tiempo y si siempre ha tenido presente el contexto, tendría que haber herramientas suficientes que ayudarán a su comprensión en la actualidad. Con esto Freudenthal (citado por Heuvel-Panhuizen, 2009) enfatiza que “Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas” (p. 39). En otras palabras, es dejar de ver la Matemática como un sistema para resolver operaciones y verla como una herramienta que se usa en la cotidianidad facilitando la comprensión de diversas situaciones:

Se podría decir, que se hace necesario hablar de los números racionales debido a que estos tienen diversas representaciones como por ejemplo; cuando se trabaja con porcentaje,

---

<sup>10</sup> En la Matemática, Cognitiva e Instruccional Fundamentos de los números racionales, texto traducido por: Daniela Calle Cardona, Daniel Felipe Gil Bustamante y Jheison German Morales

fracciones o números decimales; en este trabajo se quiere enfatizar principalmente en las fracciones, tomando este tema de suma importancia a lo largo del tiempo. Según Mainville (citado por Kieren 1975) “En el papiro antiguo de Ahmes, los números racionales se expresan en términos de unidad de fracción” (p.101) esto significa que los racionales siempre tienden a ser representados en forma de fracción, resaltando así, como los números racionales se ven inmersos en nuestro contexto, como por ejemplo, obtener el porcentaje de cuántos niños o niñas hay en un colegio respecto a la población completa, de donde el porcentaje siempre tiende a llegar a los números fraccionarios.

Respecto a la importancia histórica en la cultura egipcia trabajaban sólo en términos de unidad de fracción, por ejemplo  $18/77$  lo expresan como  $1/7 + 1/11$ , pues ellos sólo utilizaban fracciones unitarias. Por ejemplo, respecto a las pirámides, “una cuestión previa que llamó la atención desde el principio fue la aparición del término  $1/3$  en la relación de los volúmenes” (Gómez, 2016, p.485) de manera que “...el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un paralelepípedo<sup>11</sup>...” (Gómez, 2016, p.485). Esto nos muestra que las pirámides pueden estudiarse desde una relación directa con las fracciones, siendo de suma importancia para la construcción de su estructura. A partir de lo anterior se ve una vez más que el uso de las fracciones está ligado de una u otra manera al contexto y está presente en las diferentes culturas a través de la historia.

Sin embargo se muestra que la suma de fracciones de una u otra manera presenta en los estudiantes cierta dificultad. Según Fish (Citado por Kieren, 1975) menciona que a la hora de abordar la suma de fracciones, el niño debe adquirir una secuencia de habilidades las cuales en algunas instituciones educativas, se trata de introducir de alguna manera desde la primaria.

---

<sup>11</sup> Se dice de una figura de 6 lados en el cual, todos los lados son paralelogramos pares e iguales dos a dos.

A continuación se presentarán las habilidades:

- 1) Reducir las fracciones a términos más y más bajos; esto quiere decir analizar la fracción y tratar de simplificar lo más que se pueda, aprendiendo e identificando la equivalencia de fracciones.
- 2) Identificar los números mixtos y transformarlos en fracciones impropias.
- 3) Simplificar dos fracciones de tal manera que tengan un común denominador, esto es por ejemplo, al simplificar cada una de las fracciones; haciendo que la nueva suma sea entre fracciones homogéneas.
- 4) Por último sería adicionar las fracciones.

Con la anterior secuencia se pensaría que estas “habilidades” son más un proceso operacional y algorítmico, aun así Kieren (1975) pretende que “el análisis del tipo anterior lleve a diagnosticar errores cometidos por los niños con la esperanza de especificar una tarea de repetición.”(p.107). Efectivamente lo que se pretende es que a partir de esa secuencia se pueda mostrar los problemas que presentan los estudiantes en cuanto a la forma repetitiva en la que operan las fracciones, de esta manera se busca que los niños aprendan a operar, teniendo presente lo que significa cada paso que realizan.

Partiendo de lo anterior es importante resaltar que el proceso de operar, representar y analizar las fracciones podría no ser fácil; pues estos procesos exigen contar las habilidades propuestas por Fish (citado por Kieren, 1975) las cuales generalmente se forma “mecanicista”. Se debe tener presente que el niño no solamente está operando las fracciones de manera repetitiva, sino que está realizando un análisis y una interiorización del concepto de fracción.

Dado lo anterior, según Kieren (1975), el que el niño aprenda de manera adecuada las fracciones implican de tres fases fundamentales:

- En la primera fase debe observar las situaciones que se le presentan e identificar cada una de sus características.
- La segunda fase es de representación; donde el niño debe aprender estructuras simbólicas las cuales le servirán para aprender a representar las fracciones en la vida cotidiana.
- La tercera fase se vincula con la segunda; donde el estudiante deberá aprender las diferentes representaciones, nociones relacionadas con la parte-todo, la equivalencia, aprender códigos verbales, numéricos y aprender correctamente a identificar las fracciones.

De acuerdo a lo anterior y retomando lo que dice Kieren (1975) “El niño debe aprender estructuras simbólicas apropiadas para representar una realidad cotidiana” (p.107). Por esto es común observar ejemplos como: partir una manzana para cinco personas, hacer compras como de medio kilo de algo o kilo y medio de otra cosa, en la cocina cuando adicionamos el azúcar a las bebidas con una cucharada y media o una pizca, entre otros. Es a partir de estas experiencias donde se observa una primera asociación entre las fracciones y la idea de división que en la mayoría de los casos los estudiantes no logran asociar.

Se puede resaltar de lo anterior, que el estudiante debe de alguna manera realizar procesos en los cuales aprenda a operar las fracciones; sin embargo, es de vital importancia que además de aprender cómo se deben operar, el estudiante construya el concepto de fracción, lo que representa y observe la forma de cómo abstraer de la realidad en la que se encuentra un simbolismo asociado a las fracciones. Aunque las habilidades y fases anteriores parezcan un tanto trilladas y sencillas, fundamentan lo que en si se requiere al enseñar fracciones y que aunque se puede ver en el aula de clase actual, es necesario que se innove y que no se usen como

lo dice Kieren (1975) muchos de los problemas absurdos” (p.105) que se han venido tratando a lo largo de la historia registrada.



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

## 5. Descripción de la propuesta de intervención

### El Ábaco Fraccionario.

Su nombre surgió por la semejanza con el ábaco tradicional (imagen 1A), el cual también usa la unidad. Su dinámica es muy parecida ya que el ábaco tradicional se corren sus partes al momento de realizar las operaciones, lo mismo que en el *ábaco fraccionario* ya que las canicas pueden ser trasladadas de un espacio a otro del de acuerdo

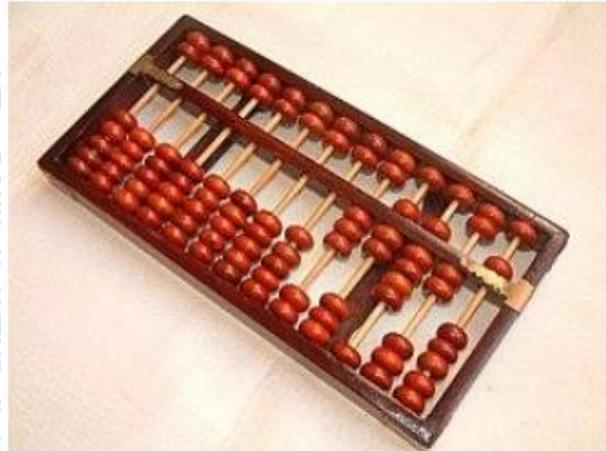


Imagen 4: ábaco tradicional tomado de: [google imágenes-ábaco](#)

a la operación que se esté realizando, también son similares en la medida que tanto el ábaco tradicional como el *ábaco fraccionario* no resuelven los cálculos, sino que contribuyen a que este se haga mentalmente, fortaleciendo así la lógica.

La intención con la variación de este instrumento es que se puedan resolver operaciones entre fracciones, y posibiliten una construcción de carácter epistemológico del concepto de unidad y fracción, en la medida en que los estudiantes entiendan y no solo repitan la definición de los conceptos, como también se apropien y manipulen en diferentes situaciones o contextos las fracciones. Con la forma dinámica del instrumento, se pretende establecer un método diferente al tradicional de solucionar problemas con fracciones, de manera que los estudiantes puedan recurrir a otras maneras de ver y descubrir que hay detrás de las operaciones entre fracciones y también observar una manera diferente al algoritmo o nemotecnia generalmente explicada en las instituciones educativas, estimulando en cada una de los estudiantes un proceso de enseñanza que sea significativo respecto al concepto de unidad y fracción.



Imagen 4: *ábaco fraccionario*

*ábaco fraccionario* pretende construir el concepto de unidad y fracción, no se pretende construir el manejo del *ábaco fraccionario*. Sin embargo si se podría llevar al aula de clase como actividad una calculadora de fracciones, el *ábaco fraccionario*, dado que su diseño puede ser muy sencillo como se describe a continuación.

El *ábaco fraccionario* tiene para este caso, seis espacios donde se le pueden colocar unas esferas de cristal (canicas), pero el número de espacios puede variar dependiendo de las necesidades o pretensiones del docente. La intención de que sean canicas es por la dificultad de



Imagen 5

dividir las, en si los materiales pueden ser diversos, los puede escoger el docente. Planteándose como se mencionó quizás una actividad de construcción, la parte relevante es evitar que el estudiante pueda dividir los objetos a la mitad o en las partes que desee.

La selección del número de espacios fue con el siguiente propósito: en el primer espacio, se pretende situar la unidad representada por la cantidad de canicas tomadas, es de vital

Facultad de Educación

importancia tener claro el concepto de unidad y también la salvedad de que este es un valor relativo, que puede cambiar, como se desarrolló en el marco conceptual del presente trabajo, este es el propósito o la conclusión que se pretende, se busca que los estudiantes obtengan en cuanto a la construcción de la unidad, diferentes aportes a los que pueden hacer dependiendo de la actividad o pretensión del docente. Luego se dejarán los espacios donde se pretenden se sitúen las fracciones que componen el ejercicio planteado, el número de espacios depende

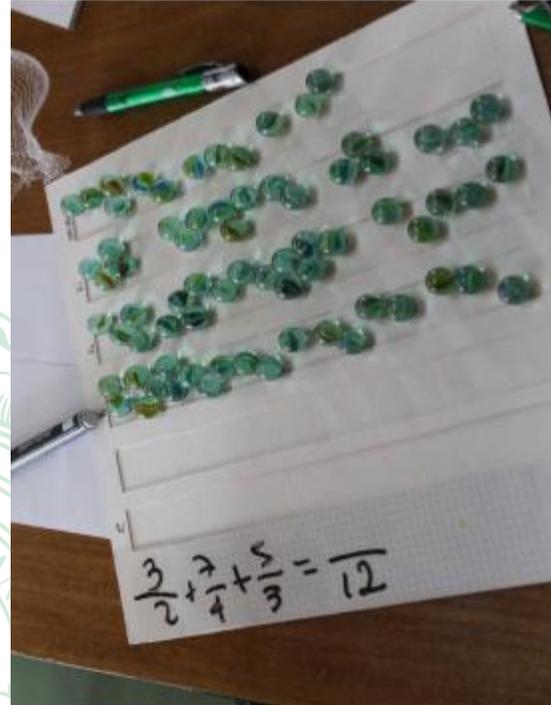


Imagen 6: Suma entre fracciones utilizando el *ábaco fraccionario*

del número de fracciones que se quieran operar para este caso, se consideró pertinente el diseño de tres espacios, para posibilitar la suma de tres fracciones como lo muestra la imagen 6 los siguientes espacios se dejaron con el propósito de hacer la respectiva operación, es decir hacer la reunión de las canicas para proceder a contarlas. Por último en la parte final del tablero del *ábaco fraccionario*, se ideó un espacio en el que los estudiantes pueden escribir y realizar los cálculos que consideren necesarios para el ejercicio planteado, también en el caso del trabajo posibilitó verificar el resultado después de resolverlo con el *ábaco fraccionario*, ya que las estudiantes tenían conocimiento acerca de la solución por medio del algoritmo.

Es de tener en cuenta que el objetivo del *ábaco fraccionario* es más la construcción epistemológica del concepto, como sugerencia, el por qué y para qué podría presentarse el manejo y construcción de este, antes del algoritmo para la solución de operaciones entre fracciones, también que es un proceso lento, de la necesidad de la guía constante del docente

para una buena construcción, pero como ventaja se tiene la buena inversión de crear bases teóricas firmes para la continuación del proceso de aprendizaje.



Imagen 7

Antes de iniciar con las operaciones, es bueno crear intriga y curiosidad con la pregunta, ¿Cómo se puede representar  $1/2$  con los materiales a la mano? es decir, mediante la utilización del *ábaco fraccionario*, el cual una de sus partes son las canicas que son un material que no se puede fragmentar o partir a la mitad.

La intención es siempre el construir y descubrir el proceso, para facilitar la comprensión del ¿Por qué? y ¿Para qué?, sin embargo el *ábaco fraccionario* presenta también un algoritmo para las operaciones entre fracciones.

Para sumar fracciones, se debe identificar primero el mcm entre las fracciones que se quieren operar. Para el caso de la suma, se tiene entonces que la unidad siempre será el mcm porque sería un valor que es divisible por cada una de las fracciones tal como lo muestra la definición formal de mcm planteada en el marco conceptual del presente trabajo.

Para reescribir la fracción uno, solo bastaría con dividir la unidad, en el número que dice el denominar y tomar el número de canicas que dice el numerador. Si por ejemplo nuestra primera fracción fue  $2/3$  y la unidad fue 6, tendríamos que dividir la unidad en tres partes iguales, las que menciona el denominador de  $2/3$  y tomar el número de veces que indica el numerador, para este caso sería dos veces, es decir la fracción 1 equivaldría a 4 canicas. Este proceso sería análogo para el número de fracciones que se tengan en el ejercicio.

El resultado de la suma de las fracciones, sería el contar el número de canicas que se generan en cada fracción y poner este valor como numerador, teniendo presente que el valor del denominador es el valor de la unidad.

En el caso de la resta de fracciones, la variación que tendría es la de restar el número de canicas que se tiene como equivalencia de la fracción 2 al número de canicas de la fracción uno, en caso de que la fracción 2 sea mayor que la fracción 1 se debe tener en cuenta que la resta será negativa, un proceso mental dado que el *ábaco fraccionario* no distinguiría si el resultado es positivo o negativo.

### **¿Cómo multiplicar y dividir fracciones en el ábaco fraccionario?**

En la multiplicación de las fracciones, una pregunta que podría ser guía a este proceso es la de ¿Qué implica multiplicar? y así intentar hacer una analogía con ¿Cuáles serán las implicaciones de multiplicar fracciones?

El algoritmo para este caso sería encontrar la equivalencia de canicas de la segunda fracción, el cual se hace como en la suma y resta, es decir dividir la unidad en las partes que dice el denominador y tomar las partes que dice el numerador, pero para la equivalencia de canicas de la primera fracción, ya no se toma la unidad inicial (20), sino el resultado del proceso realizado entre la segunda fracción y la unidad inicial que es (8). Una vez establecida la nueva unidad, se hace el mismo proceso esta vez entre la fracción uno y la nueva unidad; de esta forma resulta que al dividir la nueva unidad (8) entre cuatro y tomar dos el número de canicas que se obtiene es (2) este resultado se multiplica con el numerador de la primera fracciones y se completa el proceso dividiendo ese resultado de multiplicar  $(2 \times 3) = 6$ , entre la unidad inicial, es decir entre (20).

Luego de tener las primeras tres operaciones, es decir suma, resta y multiplicación, de alguna manera se facilita la división en la medida en que se puede ver o solucionar como una

relación entre proporciones y resolviendo a la pregunta de ¿cuál es la implicación de la división? o como cuando se resuelve el algoritmo de la división de enteros ¿cuántas veces está un número en otro? En los resultados de la división generalmente se tiene números mixtos o enteros, en la medida en que un valor puede estar por ejemplo una vez y la mitad de esa vez, lo que daría el número mixto  $1 \frac{1}{2}$ .

Al momento de tener contacto con el ábaco fraccionario, las informantes se notaron indispuestas al ver que no sabían qué hacer con este, aun teniendo el primer paso de la identificación de la unidad claro, después de varios intentos para conseguir la respuesta correcta al ejercicio, las informantes reconocen que el cuerpo del ejercicio representa una guía de lo que se debe hacer a la unidad respecto de cada fracción implicada y de esta forma logran avanzar en su proceso de utilización del ábaco fraccionario.

A continuación se describe la propuesta de talleres que se implementaron durante el proceso de investigación los cuales hacen parte de la propuesta de enseñanza-aprendizaje de las fracciones. Cabe resaltar que en cada uno de los encuentros fue de vital importancia el acompañamiento por parte de los investigadores, con el propósito de apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje, dado que se consideraba como eje fundamental el aprendizaje de las informantes a partir de los aportes que entre ellas mismas podía surgir, como también el aprendizaje que se daba de los investigadores por el proceso que llevaban las informantes y las informantes con las intervenciones como guía que llevaban los investigadores. Este proceso podría reforzar esa relación bilateral enseñanza-aprendizaje.

Las intervenciones de los investigadores resultaba determinante en la medida en que posibilitan el desarrollo de los encuentros con mayor fluidez, permitiendo la interacción y solución de interrogantes procedimentales frente al propósito de las interacciones, como también

**Facultad de Educación**

algunas correcciones conceptuales mediante ejemplificaciones o similitudes con el objetivo de orientar el proceso de la construcción de cada una de las informantes más no darles una guía o determinar el camino para llegar a tal construcción. A partir de preguntas problematizadoras, o que sacaran las informantes de la zona de confort, como cuando se pretende que construyeran el concepto de unidad por medio de la fragmentación de sus partes, es decir la representación de la mitad de la unidad, se podía intuir que habían varias respuestas inmediatas a esa pregunta como el partir algo a la mitad, pero fue importante preguntar ¿Qué sucede si no lo puedo dividir?, ¿Cómo representaría la mitad si los objetos son por ejemplo canicas? esta situación en la que no pueden partir una canica a la mitad y otras similares, en algunos casos dependiendo de la particularidad de cómo avanzaba el encuentro, hicieron posible la construcción conjunta del desarrollo de las actividades.

La primera propuesta de taller, se dividió en dos momentos; en el primero, se realizó la actividad piloto llamada *construcción de una pista*, con la que se pretendió obtener un acercamiento a los conocimientos previos de las informantes y crear un grupo ameno de estudio, conociendo aptitudes y características tanto individuales como colectivas, que favorecen los encuentros siguientes. En este encuentro, se proporcionó los instrumentos para las informantes con el objetivo de visualizar una idea acerca de aspectos de logística. En el segundo momento, se realizó el taller denominado *cuestionario de la actividad* con el propósito de evaluar el proceso realizado en el primer encuentro.

De esta manera se pudo evidenciar problemas relacionados con el tiempo, la organización y la manera en cómo se les quería mostrar los encuentros a las informantes permitiendo corregir asuntos tanto logísticos como de contenido, los cuales en la prueba piloto se mostraban poco eficientes, ayudando a que finalmente los encuentros se lograrán de manera satisfactoria.



**Facultad de Educación**

También se consiguió mejorar los tiempos y dejó como evidencia que la manera en cómo se les muestra una actividad a las informantes influye en ellas, en la medida en que una actividad bien guiada refleja compromiso, entrega y disposición por parte de las informantes para completar con éxito lo que se les propone. Seguidamente se presenta la estructura de ambos talleres.



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**Encuentro 1**

**Parte 1: Construcción de una pista.**

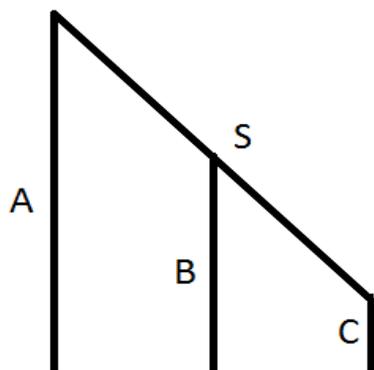
**Nombre:** \_\_\_\_\_

En parejas se construirá una pista (en forma de lisadero), el cual será un tercio de una pista completa, el objetivo final, será poder unir las partes para formar la pista completa. De la exactitud de las medidas, dependerá la eficiencia de las pistas al igual de la precisión de esta.

**Materiales:**

- Bisturí
- Regla
- transportador
- Hoja
- Lápiz
- Palos de balsa
- Plataforma (lisadero)
- Alfileres
- Hoja milimetrada

**Nota:** Verifique que se le han entregado todos los materiales antes de iniciar con la realización de la actividad.



**Fragmento 1<sup>12</sup>:** Tenga en cuenta que por ser el primer fragmento (C1) es cero ya que la estructura completa, irá apoyada en el suelo.

La inclinación del fragmento respecto al suelo es de 26.56°.

Luego (B1) deberá de ir ubicado en S/2, donde (B1) cumple con la relación de  $\frac{1}{2}$ , de tal manera que la altura de (B1) es igual a la base medios. ¿Qué altura tendrá

<sup>12</sup> Cada uno de los tres fragmentos se entregó por separado, es decir se entregaron tres guías en donde lo único que variaba era el fragmento.

Se cumple también que  $(A1)/2 = (B1)$ , ¿Qué altura en centímetros tendrá (A1)?

**Fragmento 2:** Tenga en cuenta que este es el segundo fragmento, debido a esto hay una altura inicial de 4 cm y este se convertirá en su soporte (C2)

La inclinación del fragmento respecto al suelo es de  $41.81^\circ$ . Luego (B2) deberá de ir ubicado en S/3, donde (B2) cumple con la relación de 3/2, respecto al primer soporte (C2). ¿Qué altura tendrá (B2)?

Se cumple también que el tercer soporte (A2), tiene una relación de 5/3 respecto (B2), ¿Qué altura en centímetros tendrá (A2)?

**Fragmento 3:** Tenga en cuenta que este es el tercer y último fragmento, debido a esto hay una altura inicial de 10 cm y este se convertirá en su soporte (C3)

La inclinación del fragmento respecto al suelo es de  $45.58^\circ$ . Luego (B3) deberá de ir ubicado en 7S/10, tomándolo desde el extremo unido con (C3) hacia el extremo unido con (A3). Donde (B3) cumple con la relación de 3/2, respecto al primer soporte (C3). ¿Qué altura en centímetros tendrá (B3)?

Se cumple también que el tercer soporte (A3), tiene una relación de 7/4 respecto (C3), ¿Qué altura en centímetros tendrá (A3)?

**Encuentro 2**

**Parte 2: Cuestionario de la actividad (Construcción de una Rampa).**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

Responda las siguientes preguntas, con base a la actividad (construcción de una rampa) completamente terminada, es decir la realización de cada fragmento de la Rampa que le correspondió y a la unión de los 3 fragmentos.

1. ¿Qué dificultades se presentaron a la hora de realizar cada estructura?
2. ¿Que posibilita o imposibilita la unión de las estructuras?
3. ¿Cómo fue la operatividad en el uso de las fracciones? (describa posibles aciertos o dificultades)
4. ¿Cuál de las tres estructuras pudo haber sido más difícil de construir? ¿porqué?

Realice a escala la gráfica de la estructura completa, y determine la siguiente.

5. Diga mínimo 3 relaciones (fracción) de cada soporte respecto con el otro.

Soporte unidad: \_\_\_\_\_

- Relación de \_\_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_\_
- Relación de \_\_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_\_
- Relación de \_\_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_\_
- Relación de \_\_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_\_

6. Diga cuál es la relación de mínimo tres soportes con la unidad entregada

Unidad entregada

- Relación de \_\_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_\_
- Relación de \_\_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_\_

- Relación de \_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_
  - Relación de \_\_\_\_ entre la unidad y el soporte \_\_\_\_
7. ¿Cómo podría vincularse con la vida real?
  8. ¿Con qué otros procesos de construcción, se podría asociar este ejercicio?, ejemplifique
  9. ¿se verán inmersas las fracciones en el proceso anteriormente mencionado? ¿de qué manera?
  10. ¿Cómo fue el proceso que se realizó, por ejemplo, en el caso la última superficie al ubicar el soporte (B3) en 7/10? (en caso de que este no hubiese sido mi estructura) ¿Cómo podría ubicar el soporte (B3)?
  11. De imaginariamente, una solución a este problema la cual pudieron haber utilizado nuestros antepasados.

Para el encuentro tres, llamado *entrevista*, donde se registró también información mediante procesos audiovisuales y escritos, se realizó con el objetivo de tener un primer acercamiento a las informantes respecto sus saberes previos sobre las fracciones, aparte de la construcción de un ambiente de trabajo, junto con las pautas necesarias para actividades posteriores.

**Encuentro 3  
Entrevista.**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

1. ¿Qué recuerdo acerca de la enseñanza de fracciones?
2. De las instituciones educativas a las que he pertenecido, ¿Qué he aprendido acerca de las fracciones?
3. ¿De qué manera conoce las fracciones? (nombres que pueda recibir)
4. ¿Dónde podría observarse en el día a día una situación donde las fracciones están inmersas?
5. ¿Cómo sería más fácil observar una fracción?, ¿Por qué?
6. ¿Qué podría utilizar para resolver una fracción? (aparte del lápiz y papel)
7. ¿Cómo se resuelven la suma y la resta entre fracciones?

Para los encuentros 4, 5 y 6; se propusieron con base a la idea de la EMR. Para esto se utilizó el *ábaco fraccionario*, (ver anexo 1). De acuerdo con lo anterior, se propone el encuentro 4 *operaciones entre fracciones*, este se realizó con el fin de intentar que cada una de las informantes cree su propio concepto acerca de lo que implica sumar fracciones y en ese sentido, que entienda el porqué del algoritmo y busque luego, una manera de cómo solucionar una suma y una resta entendiendo paso a paso que es lo que está realizando, más que simplemente seguir una instrucción determinada.

Al realizar el encuentro; *operaciones entre fracciones* se le proporcionó a cada niña el *ábaco fraccionario*, con este material las informantes deberían realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones. El objetivo de esto, es que ellas dejaran a un lado el proceso algorítmico que usaban normalmente y con este material logaran comprender el concepto de unidad, de fracción y de lo que implicaba realizar las operaciones.

Este material, *ábaco fraccionario*; cumple con la EMR propuesta por Hans Freudenthal en la medida que está articulada a los siguientes principios:

Principio de actividad: En la medida en que se pueda tener una relación con el medio, donde lo concreto posibilita una mejor asociación y también la matematización de una situación.

Principio de realidad: Se buscó que cada informante realizará de manera autónoma e intentara descubrir que sucedía con cada necesidad, y pudiera asociar al contexto real de una manera inmediata.

Principio de niveles: Con el *ábaco fraccionario*, al ser este una herramienta que no han utilizado las informantes antes en procesos de solución de operaciones entre fracciones, realizaron primero una exploración, reflexión y generalización; para luego hacer uso del lenguaje

formal, donde hicieron uso de una notación convencional después de haber encontrado y descubierto por sí mismas una manera de resolver las operaciones.

Reinvención guiada: Proceso matemático que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.

Interacción: Es considerada como actividad social, en la medida en que había una interacción entre las informantes para el proceso constructivo.

En apoyo a los principios se logró las interacciones de las informantes y los investigadores, lo cual posibilitó la reflexión acerca del concepto de unidad y fracción.

En el encuentro 5, la finalidad de la propuesta se enfocó en mostrar una posible realidad y la necesidad de no solo utilizar las fracciones para obtener un resultado, sino de entenderlas para poderlas explicar. Según lo propuesto por la EMR, se estableció que este encuentro junto con el encuentro 6, se conforman con una base donde se cumplen los siguientes principios:

Actividad: en la medida en que la finalidad de las Matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo la propia Matemática. Además, de que la matematización es una búsqueda de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema.

Realidad: Las Matemáticas se aprenden haciendo Matemáticas en contextos reales; este contexto real se refiere a situaciones problemas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de las informantes.

Niveles: Cumple con los siguientes niveles de comprensión: Referencial: esquematización a través de modelos y el formal: procedimientos estándares y notación convencional.

Reinvención guiada: Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.

Interacción: En la que se intentó mostrar a partir de problemas que involucran el contexto, mostrado así que el presentarle a las informantes problemas desde una realidad que se ven inmersas provoca un sentido a lo que están realizando.



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**Encuentro 4**  
**Operaciones entre fracciones.**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Objetivo:** Buscar una aproximación del porqué del algoritmo para luego buscar nuevas alternativas de resolución de problemas de suma y restas de fracciones.

**Materiales:**

- Bolas de cristal (canicas)
- Marcador borrable
- Tabla para operaciones (*ábaco fraccionario*)

Mediante material tangible (canicas) ¿cómo harías para solucionar las siguientes operaciones?

- $1/2 + 2 = 5/2$
- $1/2 + 2/3 = 7/6$

Utiliza el *ábaco fraccionario* para resolver la siguiente fracción.

- $3/4 + 5/2 = 13/4$
- $3 - 1/2 = 5/2$
- $3/2 + 7/4 + 5/3 = 59/12$
- $3/2 - 1/3 = 7/6$

¿Qué ventajas y dificultades se presentaron al momento de utilizar el *ábaco fraccionario*?

Con base a los procesos realizados para la solución de las anteriores operaciones con ayuda del *ábaco fraccionario*, defina:

- Unidad
- fracción

¿Con qué podrías relacionar el ejercicio en un contexto cotidiano para ti?

Resolver las siguientes operaciones:

- $3/4 \times 2/5$

¿Para usted que significa multiplicar fracciones?



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

**Encuentro 5  
Ayuda a un amigo**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

Suponga que tiene un familiar con un dominio no tan bueno en matemáticas que necesita hacer las siguientes operaciones y tampoco posee una calculadora o un elemento electrónico que le facilite la operación, ¿cómo le escribirías, explicando el proceso de solución con la ayuda de material tangible?

¿Qué dificultades encontró en la solución de las operaciones? Ayuda a tu familiar a evitar estas dificultades.

**Encuentro 6  
Problemas EMR.**

Nombre: \_\_\_\_\_

**Problemas:**

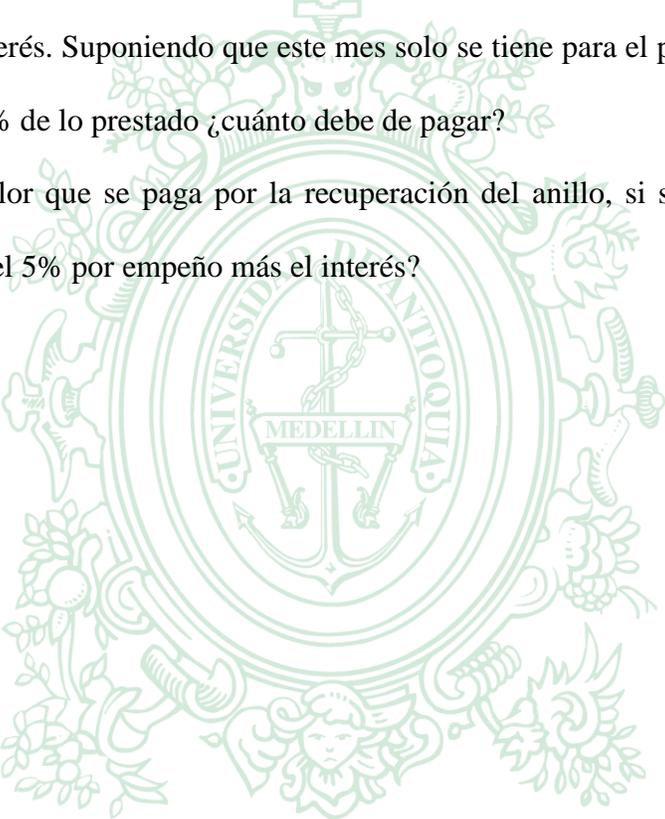
1. En la institución educativa CEFA sepultaron una cápsula del tiempo a aproximadamente 67 cm de la superficie del suelo, si en un año, el aumento de la superficie del suelo es a una tasa de  $\frac{2}{5}$  de cm por año. ¿Cuánto habría que cavar para encontrar la cápsula, pasados 37 años?
2. Hay una dificultad en la economía del hogar, por lo cual no se puede suplir el pago de la cuenta de los servicios por valor \$423.000. Para ayudar con esta necesidad se ha decidido empeñar un artículo de plata.  
Entre las opciones se encuentran: una cadena, un anillo y unos aretes.
3. A continuación se presenta cada artículo y su peso en onzas.

Información importante:

- A. 1 onza equivale aproximadamente a 28 gramos
- B. El dinero que la compraventa otorga al cliente por empeñar cada artículo es la tercera parte del valor total del objeto.
- C. El valor del gramo de plata es de 17.000.

Artículo	Posibles fracciones
Aretas	$\frac{1}{7}$ oz.
Anillo	$\frac{3}{4}$ oz.
Cadena	$\frac{3}{4}$ oz.

1. si la deuda de la factura por dos meses es de 423.000 empeñando que artículos de los tres anteriores la supliría
2. La compraventa da como opción pagar el valor del artículo antes del mes o en su defecto el valor del interés. Suponiendo que este mes solo se tiene para el pago del interés el cual equivale al 20% de lo prestado ¿cuánto debe de pagar?
3. ¿Cuál es el valor que se paga por la recuperación del anillo, si se debe pagar el valor prestado, más el 5% por empeño más el interés?



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Para el encuentro 7 se realizó un taller denominado *entrevista final*, en el cual se pretende ejecutar una retroalimentación mediante el análisis de las percepciones por las informantes acerca de las actividades, los procesos y fundamentos tanto teóricos como epistemológicos que pudiesen haber adquirido.

### **Encuentro 7 Entrevista final**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

Con base a las actividades resueltas desde la actividad de la rampa (prueba piloto) responda las siguientes preguntas, teniendo en cuenta el proceso de cada una de las actividades, junto con el objetivo. Intente recordar y recrear cada una de las actividades con el fin de que las respuestas pueden darse de manera espontánea y fluida, la intención es que puedan expresar de libremente e intenten ser lo más claras posibles. Recuerda que tus límites llegan hasta donde tu imaginación te lo permite.

1. ¿Cómo fue la experiencia en la realización de las actividades? ¿Qué le mejoraría a las actividades?
2. ¿Mencione algunos aportes que le dejaron las actividades realizadas?
3. ¿De qué manera influyó el hecho de que un problema fraccionario, tenga un contexto y no sea solo la operación entre fracciones?
4. ¿Pudo la manipulación del *ábaco fraccionario* afianzar algún dominio en cuanto a las fracciones?
5. ¿Con qué proceso (por ejemplo: nemotécnico tradicionalista, uso del *ábaco fraccionario*...) te sentirás mejor al resolver problemas de matemáticas que se relacionen con las fracciones?
6. A partir de lo desarrollado ¿Cómo definirías fracción?

Tabla 8: Encuentros y actividades

<b>Actividades</b>	<b>Encuentros</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Recursos</b>
Construcción de una pista	Encuentro 1	Establecer elementos relacionados con el contexto por medio de la realización de una rampa, con el fin de fortalecer elementos teóricos relacionados con las fracciones.	Audios , Registros escritos
Cuestionario de la actividad	Encuentro 2	Conocer cómo fue el proceso de la construcción y las características que podría proporcionar para la investigación.	Audios , Registros escritos
Entrevista	Encuentro 3	Ampliar el panorama acerca de concepciones e ideas previas que tienen las alumnas del CEFA acerca de las fracciones.	Audios , Registros escritos, diario de campo
Operaciones entre fracciones	Encuentro 4	Buscar una aproximación del porqué del algoritmo para luego buscar nuevas alternativas de resolución de problemas de suma y restas de fracciones.	Audios, Registros escritos, diario de campo
Ayuda a un amigo	Encuentro 5	Desarrollar elementos que faciliten la comprensión de las fracciones en la vida cotidiana.	Registros Escritos ,
Problemas EMR	Encuentro 6	Evidenciar las fracciones en el contexto diario mediante situaciones que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje.	Registros Escritos
Entrevista Final	Encuentro 7	Identificar la interiorización de los diferentes conceptos presentados en cada una de las actividades anteriores con el propósito de reflexionar acerca de los diversos procesos que las informantes utilizaron.	Registros escritos

## 6. Hallazgos

En la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones desde una construcción de carácter epistemológico, se hizo un énfasis en que enseñar y aprender fracciones implica la apropiación del concepto de fracción. Se divide entonces el objeto de la investigación en dos categorías, El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista con el objetivo de tener fundamentos conceptuales tradicionalmente aceptados y La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista, con el objetivo de articular de una manera contextualizada la enseñanza-aprendizaje de las fracciones.

En el capítulo el concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista, se pudo desarrollar la construcción del concepto de fracción y unidad guiado por la propuesta de Hans Freudenthal, al igual que se definieron conceptos tales como el numerador, denominador, fracciones homogéneas, heterogéneas, propias e impropias y números mixtos, desarrollándose también procesos algorítmicos.

En La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista, se describió la forma como las fracciones se ven inmersas en el contexto a partir de la propuesta de Hans Freudenthal acerca de la EMR. Además, en relación con esto, Streefland y Kieren proponen algunos ejemplos que ilustran la manera de cómo deben ser enseñadas las fracciones desde un enfoque realista y la secuencia de habilidades que se deben tener para poder enseñar las fracciones.

## 6.1 El concepto de fracción desde una perspectiva tradicionalista

### 6.1.1 La importancia de la unidad en la construcción del concepto de fracción.

La construcción del concepto de fracción a partir de la manipulación del *ábaco fraccionario*, es el objetivo principal de este trabajo investigativo; sin embargo, no podría ser el punto de partida dado que es de vital relevancia la cercanía con otro concepto, siendo este por decirlo de alguna manera un fundamento más primitivo: el concepto de *unidad*. Es de allí donde surgen los cuestionamientos de ¿Cómo entender la unidad? ¿Cómo significar la fracción? Así mismo, resulta casi inmediato preguntarnos ¿qué es lo que significa realizar cada una de las operaciones entre fracciones?

En este sentido, como se mencionó en el marco metodológico, las conexiones entre las unidades de análisis y las categorías son los indicios. Estos corresponden a acciones de los participantes que plasmaron en sus aportes y en los talleres escritos. Los indicios que esbozan respuestas para las preguntas del párrafo anterior y que se constituyen en objetos de análisis para esta subcategoría son:

- Identifica el concepto de unidad.
- Identifica y manipula el concepto de mcm como facilitador para la solución de la suma entre fracciones.
- Diferencia entre numerador y denominador, fracciones homogéneas, heterogéneas y mixtas.
- Aplica adecuadamente el proceso para resolver operaciones entre fracciones.

Como aporte a esta categoría, se toman principalmente los encuentros tres y cuatro, los cuales consisten en una entrevista y una actividad para la solución de operaciones entre

fracciones que; por objetivo respectivamente ver qué ideas previas tiene las informantes sobre el concepto de fracción y propiciar en ellas un ambiente para la creación de dicho concepto.

Si bien se ha puesto como punto de partida la unidad, es porque como se mencionó en el marco teórico, surge la pregunta de qué es lo que se va a dividir cuando vamos a hablar de fracción. Se tiene entonces que lo que se pretende dividir es aquello que se podría conocer como unidad.

Por lo anterior, se hace necesario encontrar una aproximación de lo que cada informante entendía como unidad con el fin de encontrar un punto de partida para saber que ruta tomar a la hora de la construcción de este concepto. Si bien no era el objetivo del trabajo si resultaba ser la base para tal. En los encuentros, se evidenciaron diferentes puntos de vista y definiciones quizás algunos menos vagos que otras, en la medida en que se definió la unidad como “la suma de las partes” (informante 3). Sin embargo, se encontró también que “la unidad es la medida base que puede ser dividida en partes iguales. Representa al número 1, es decir, si tengo un objeto, esa sería mi unidad” (informante 4). De donde se da pie para observar la analogía que se hace entre la unidad y el uno.

Aún sin tener la necesidad de brindarles la relación entre las fracciones con la unidad, las informantes de alguna manera se vieron permeadas por el objetivo del trabajo en la medida en que buscaban relacionar unidad y fracción tal cual lo deja ver la informante 2 cuando menciona: “la unidad es la relación entre los denominadores y la cantidad en que se divide en la recta”. Se puede apreciar cómo habla de la unidad desde la recta numérica, sin embargo, se muestra confusa a la hora de dar una explicación concisa. También se encuentra la definición de unidad como “la parte entera de la fracción, a la que se le extraen las partes necesarias” (informante 1) es valioso el aporte de esta informante ya que inicialmente hizo la siguiente afirmación: “Desde

tercero iniciaron enseñando cual es el denominador y el numerador, caracterizándolas con peras y manzanas, es decir, el denominador eran peras y el numerador eran manzanas”(informante uno) esto es un error conceptual, pues siendo el denominador la unidad y el numerador las partes que voy a tomar, es inconsistente que de peras vaya a tomar manzanas, entonces gracias a la actividad con el *ábaco fraccionario* se le brindaron las herramientas para que reforzará el concepto de unidad y de fracción , diciendo que “ la fracción es la forma de describir cuántas partes necesitan de una unidad, o cuando se tiene que dividir”(informante 1), de esta manera además de reforzar estos conceptos, aclaró elementos como el denominador y el numerador.

Aunque se visualizaron diferentes percepciones acerca del concepto de unidad, se pudo visualizar una leve conexión entre las ideas que presentaron las informantes, también permitieron ver como el denominador juega un papel importante en lo que podría denominarse unidad de una fracción y muestran una relación entre las implicaciones de mcm y mcd como posibilitadores en la solución de operaciones entre fracciones.



Imagen 8: discusión entre mcm y mcd

En la solución de los ejercicios, aunque se intentaba precisar un tecnicismo en el lenguaje por parte de las informantes, se observaron algunas dificultades a la hora de hablar entre el mcm y mcd. Si bien entendían que “En la suma y resta de fracciones heterogéneas, se saca el mínimo común

múltiplo o el máximo común divisor en el denominador” (informante 1); también se percibía que no distinguían exactamente entre uno y otro, incluso se vieron obligadas a preguntarse entre ellas, formando una discusión acerca de si era mcm o mcd. Sin embargo, la informante 2 los

describió diciendo “el máximo común divisor es cuando se multiplican los denominadores y el mínimo común múltiplo es un número que se haya en común en los denominadores”. Esto, permitió observar cómo de alguna manera entendía el proceso para sumar o restar fracciones, sin embargo se les dificulta expresar o explicar el proceso en la medida en que era algo repetitivo, algorítmico pero no un proceso consciente.

De lo anterior podría decirse que resulta normal la mecanización y memorización de algunos procesos en donde se tienden a repetir las cosas por inercia cuando se vuelven una costumbre, la cuestión es si se tiene o no la capacidad de responder al por qué se hace, cómo se hace y de dónde surge esta necesidad, pero ¿te has puesto en la tarea de escribir el proceso de cómo sumar fracciones? deja esto de ser una idea tan intuitiva para convertirse en un problema de otro nivel. Se notó que para las informantes se les presentaba como una dificultad, ya que se enfrentaban a una nueva posición donde se debía explicar los procesos de cómo se hace para intentar entender el por qué se hace el proceso de solucionar fracciones.

Luego, al momento de indagar sobre cómo podían operar las fracciones, mostraron que hay algunas reglas para la solución: “en sexto año aprendí a operarlas con las clásicas reglas para cada operación” (informante 3), reglas notoriamente interiorizadas en la medida en que llegaban a los resultados con extrema facilidad cuando estos eran pedidos y obtenidos en forma algorítmica. Al igual que coinciden en reconocer que hay tipos de fracciones “en quinto vimos los tipos de fracciones, homogéneas, heterogéneas y números mixto...” (Informante 1).

Estos encuentros, permitieron así una pequeña apreciación de la necesidad de un lenguaje concreto que permita una mejor expresión de lo que se quiere decir, sin embargo se podría considerar una dificultad a la hora de responder por falta de claridad, a lo que se da la tendencia de divagar e intentar responder de acuerdo al contexto inmediato como se pudo evidenciar en la

entrevista acerca de las fracciones y operaciones entre fracciones, encuentro 3 y 4. Evidenciándose también, la memorización y adecuada manipulación de un algoritmo que permitiera obtener un resultado en la medida en que incluso era más sencillo resolver la operación mentalmente que describir el proceso.

### **6.1.2 Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.**

Si bien la unidad representa el punto de partida, el objetivo del trabajo es la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Es preciso entonces, hablar de aquellos procesos que permiten darle un sentido a las fracciones; darle un contexto y un fin, en la medida en que es posible operarlas y encontrar un resultado. Sin embargo, lo relevante sería también la solución de la pregunta ¿qué se hace? y ¿para qué se hace? *Uso tradicionalista de las fracciones en el aula de clase.* Busca construir un proceso en el cual se permita la reflexión acerca de estos interrogantes, generando así algunos indicios que posibiliten la construcción del concepto de fracción.

- Manipula adecuadamente códigos verbales y numéricos.
- Construye algoritmos como único proceso para solucionar fracciones.
- Reconoce la fracción a partir de diferentes representaciones.

Fue de vital relevancia para estos indicios los encuentros 4 y 5. El encuentro 5 por ejemplo, consistió en proponer dos ejercicios que pudieran tener un contexto como alternativa donde las fracciones pudiesen tener un significado físico y tangible. Esta actividad tenía como objetivo el identificar las fracciones en el contexto diario mediante situaciones que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las informantes mostraron un adecuado dominio de la terminología y su significado, reconociendo que quizás la rigurosidad de la terminología podría ser mejor en un forma escrita

debido a que en el diálogo, podría resultar “más confuso ya que en ocasiones dan la fracción en letra como (la tercera parte) y de pronto al leer de afán, se confundía” (informante 2), mostrando así una dificultad a la hora de hacer un cambio en lo que tenían por establecido, es decir a la hora de cambiar la presentación de un ejercicio. Sin embargo, también había apropiaciones de lenguaje común en donde estaban inmersas las fracciones: “yo puedo decir que es un medio” (informante 4), “yo tomo la mitad” (informante 1) y otras expresiones que daban cuenta de un sentido de fracción en el diálogo común, mostrando que hay un uso del lenguaje matemático formal respecto a fracciones en el diálogo, pero la solución de un ejercicio proveniente de este diálogo se podría resultar mayor dificultad que uno planteado con el simbolismo matemático.

El uso obligatorio del algoritmo, como única solución se evidenció en el momento en que se les pidió escribir o explicar de qué manera se puede solucionar una operación y se vieron obligadas a escribir las operaciones para modificarlas. De esta manera las informantes, decidieron escribir el algoritmo en la mano para encontrar la solución antes de la explicación a la pregunta de cómo resolver operaciones entre fracciones. También mencionaron cómo de manera mental resuelven la operación porque les resultaba de alguna manera más sencillo hacerlo primero así.

Aunque reconocen también que una fracción aparte de ser de la forma  $a$  sobre  $b$  como se describió en el marco conceptual; también describen otros tipos de representaciones como diagramas de barras, la recta numérica, tortas y división de cuadrados. Sin embargo en algunos



Imagen 9: Solución mediante algoritmo

momentos los resultados no les coincidían con la operación que ya habían hecho de manera algorítmica, ya que como no es un proceso operativo y repetitivo, les presentaba dificultad el desarrollo de operación.

Luego de este proceso, se intentó definir el concepto de fracción desde los conocimientos previos y también desde un primer acercamiento sobre la forma en cómo se realizaban las operaciones. Se tiene que la fracción es: “la forma de escribir cuantas partes se necesitan de una unidad, o en cuanto se tiene que dividir” (Informante 1), también “es una unidad de medición en algunos casos compleja y en otros fácil que consta de partes la unidad y lo que se toma de esta” (informante 2). Lo que ayudó a observar cómo se va configurando de alguna manera la necesidad de incorporar la unidad, después de la construcción del significado de unidad y la relación que tiene esta con la fracción, de la misma manera que se intenta deslizar el significado de fracciones como las simples operaciones que se hacen cuando hay un número arriba y otro abajo, sino que se apuesta por un sentido del que se hace y por qué se hace tal como lo intenta problematizar Freudenthal. Para finalizar las actividades acercaron a las informantes a una contradicción entre lo que se observaba acerca de una fracción y lo que podría llegar a ser o significar, en la medida en que se le muestra un proceso más de análisis con una finalidad concisa y no como un simple método operativo.

## **6.2 La enseñanza del concepto de fracción desde una perspectiva epistemológica: un enfoque realista**

### **6.2.1 Educación matemática realista (EMR).**

La idea que usualmente se tiene de las fracciones es que están conectadas con procesos algorítmicos que solo necesitan ser aprendidos, mostrando en el aula de clase problemas usuales

que vuelven al mismo sistema algorítmico. A partir de esto es que surgen las preguntas ¿Cómo se deben enseñar las fracciones? ¿Cómo otra forma de comprender la unidad y construir algoritmos para las operaciones entre fracciones exigen alternativas de enseñanza y aprendizaje? De esta manera, a partir de la EMR se pretende dar respuesta a estas cuestiones involucrando con esto siempre el contexto como eje principal. A continuación se mostrarán los indicios relacionados con lo que se mencionó en este párrafo:

- Realiza comparaciones entre el contexto y las operaciones entre fracciones.
- Estructuran la realidad que las rodea en procesos matemáticos.
- Reconocen la fracción en relación con situación cotidiana en su día a día.

Con estos indicios se quiere enfatizar principalmente en los encuentros 3 y 7 que eran entrevistas, en las cuales se pretendía indagar sobre qué problemas presentaban a la hora de involucrar el contexto y si las actividades que se realizaron, ayudaron a reforzar problemas que se tenían con la fracciones. El encuentro 7 consistía en una entrevista la cual tenía como objetivo identificar la configuración de los diferentes conceptos presentados en cada una de las actividades anteriores, con el propósito de reflexionar acerca de los diversos procesos que las informantes utilizaron.

A continuación, se mostrarán los resultados que se obtuvieron a partir de los encuentros 3 y 7, los cuales involucran la EMR; donde se esperaba que ellas pudieran visualizar problemas que no eran tan usuales, con el fin de observar sus interpretaciones y si les parecía mejor o no esta manera en cómo se les presentaban estos nuevos problemas.

En el encuentro 3: Entrevista, la informante 4 hace una aclaración interesante al decir que “las fracciones las utilizo por ejemplo en mi día a día como en el colegio para hablar de la repartición de una actividad la cual estaría siendo fraccionada”. Como un ejemplo de esto

propone que “En el colegio, cuando uno dice la mitad del trabajo para ti y la otra para mi” (Informante 4). Esto se considera de suma importancia, pues en el diario vivir de ellas se puede observar que usan las fracciones de manera implícita, pueden mirar que en sí las fracciones pueden utilizar en su entorno y las manejan de una manera no formal. Esto implica que las fracciones son elementos que usados en un aula de clase generan un gran impacto.

Por otra parte una vez en el encuentro 7: Encuesta y taller, al presentarles a las informantes diferentes problemas que involucran contextos diferentes se veían un poco confundidas, en esto la informante 1 nos manifiesta su dificultad.

Para las personas que resolvemos los problemas de manera convencional se nos hace difícil hacerlo de otra manera, incluso pensarlo, pues estamos cerrados solo a que se puede solucionar de esta forma lo cual nos hace pasar desapercibidas otras posibilidades. (Informante 1)

Es claro que para los estudiantes el tener que lidiar con problemas que son poco usuales en la enseñanza, esto les presenta un desequilibrio; pues generalmente se encuentran sujetas a los mismos problemas como repartir una torta, repartir tierras o en la cocina cuando tengo medio kilo de papa y muchas más situaciones de este tipo. A partir de esto, es claro que se debe innovar y proponer otras alternativas, puesto que los problemas con el contexto ayudan a un mayor aprendizaje. En esta cita es evidente que hay una dificultad, pues reiteró que resuelve los problemas de manera convencional, esto hace que se cierren a otras formas de ver las fracciones, por esta razón, cuando se les propone hacer algo diferente entran en un conflicto, pues no es una manera usual de mostrarle las operaciones entre fracciones. Así lo expresa la informante 4 cuando menciona: “la razón de que existan las fracciones y cualquier derivación de la matemática es que nos ayudan a resolver problemas de la vida cotidiana”. Es claro que el uso de las operaciones no solo facilita que entiendan situaciones que se les presentan, sino que también abre una posibilidad de que puedan a partir de un contexto presentar alternativas que mejoren la

capacidad de razonar e interpretar ciertos formalismos matemáticos. Si bien las formas algorítmicas con la solución para diferentes problemas que involucran las fracciones, no son la única alternativa.

En relación con lo anterior, la informante 3 menciona que “El contexto limita la operación y la forma de operar fracciones, Este conduce a la aplicación real de conocimientos, en los cuales se tienen su valor característico”. Esto es interesante en la medida que efectivamente ella pudo ver que el contexto es importante, algo necesario, porque si no tienen un contexto en donde profundizar sus conocimientos, esto queda reducido a simples algoritmos que deben memorizar. Se puede ver entonces, que efectivamente el contexto no se puede ver desligado de la enseñanza de los estudiantes, ya que además de generarse una mayor comprensión, también logra que haya credibilidad ya que cuando lo aplican pueden ver que efectivamente se puede usar en un contexto. Esta cita nos deja ver una dificultad, ya que aunque saben que el contexto es importante para aplicar sus conocimientos, les genera conflicto, pues ve que limita la forma en cómo pueden operar las fracciones y esto no debería ser así, pues al estudiante hay que mostrarles que el involucrar el contexto no es solo operar, sino hacer una abstracción de lo que se está haciendo y buscar representaciones que ayudan a su solución, por ejemplo, usar el *ábaco fraccionario*.

### **6.2.2 Streefland y Kieren: Enfoques realistas para la enseñanza de las fracciones.**

Esta subcategoría relaciona elementos de suma importancia para la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, ya que se pudo mostrar cómo a partir de otras formas de representación, se pueden operar las fracciones y cómo usando diferentes modelos o herramientas; se consigue que las informantes tengan más conciencia a la hora de realizar

problemas y operaciones relacionados con las mismas. A continuación se presentarán los indicios que ayudaron con el análisis.

- Manipula diferentes materiales tangibles para apoyar la solución de problemas de operaciones entre fracciones.
- Entiende los procesos de suma, resta, multiplicación y división de fracciones a partir del ábaco fraccionario.
- Utiliza alternativas para mejorar el aprendizaje de las fracciones.

En relación con los indicios anteriores, se analizaron los registros de las encuestas 3,4 y 7 con el fin de presentar las evidencias necesarias en cuanto a la apreciación de las informantes con el “*ábaco fraccionario*” y cómo esto ayuda a la forma en cómo conciben las fracciones.

Se utilizó *ábaco fraccionario* como alternativa para la solución de operaciones entre fracciones, de esta manera la idea es que ellas pudieran comprender y construir los conceptos de unidad, de fracción y de él porque se operan en cierta manera las fracciones, ya que usualmente solo se les enseña el algoritmo y no el porqué de dichas operaciones.



Imagen 10: *ábaco fraccionario*:  
operaciones entre fracciones

Inicialmente, se puede ver que existe una diversidad en los materiales que se pueden utilizar para la enseñanza de las fracciones, pero en cuanto a la enseñanza de esto en el aula de clase, es poco lo que se puede ver en cuanto a materiales diferentes que ayuden a comprender las fracciones de forma

diferente. De esta manera la informante 2 manifiesta que: “Para resolver operaciones entre

fracciones se utiliza, lápiz, papel y calculadora”; sin mencionar por ningún lado otros materiales para ayudar a este proceso, esto generó en los investigadores desconcierto, pues se pudo evidenciar la forma tan plana de resolver las operaciones entre fracciones, porque no solo es usar esos elementos, también es buscar otros instrumentos que faciliten y ayuden a generar un sentido diferente a las fracciones. No obstante para estos talleres se logró proponer una alternativa didáctica para solucionar problemas con fracciones llamada “el *ábaco fraccionario*”, donde por medio de unas canicas se resuelven diferentes operaciones como se mostró en el capítulo de la propuesta de enseñanza.

Inicialmente las informantes al tener un primer acercamiento con el *ábaco fraccionario* les resultó un tanto complejo la utilización de éste, debido a que tenían siempre en la mente el algoritmo, incluso usaban otros esquemas visuales como por ejemplo tortas fraccionarias, gráficos rectangulares, sin embargo luego de la utilización del *ábaco fraccionario* se pudo observar cómo dejaron a un lado el algoritmo para resolver problemas entre fracciones usando solo el *ábaco fraccionario*.

Algunas dificultades que se presentaron al momento de utilizar el *ábaco fraccionario* es como lo menciona la informante 1: “No fui capaz de efectuar fracciones sin la división de las canicas, así que trate de volverlas números enteros”. De esta manera, se pudo observar que las participantes, si bien sabían cómo operarlas, no tenía claro cómo debería ser su representación con material tangible, en esta línea las informantes trataban de hacer la división de las materias cómo lo dijo la informante 1 “voy a dividir una canica en dos” si bien tienen en la mente la idea de división no es adecuada en este caso, ya que para solucionar operaciones con el *ábaco fraccionario*, no permite realizar ese tipo de división en las canicas.

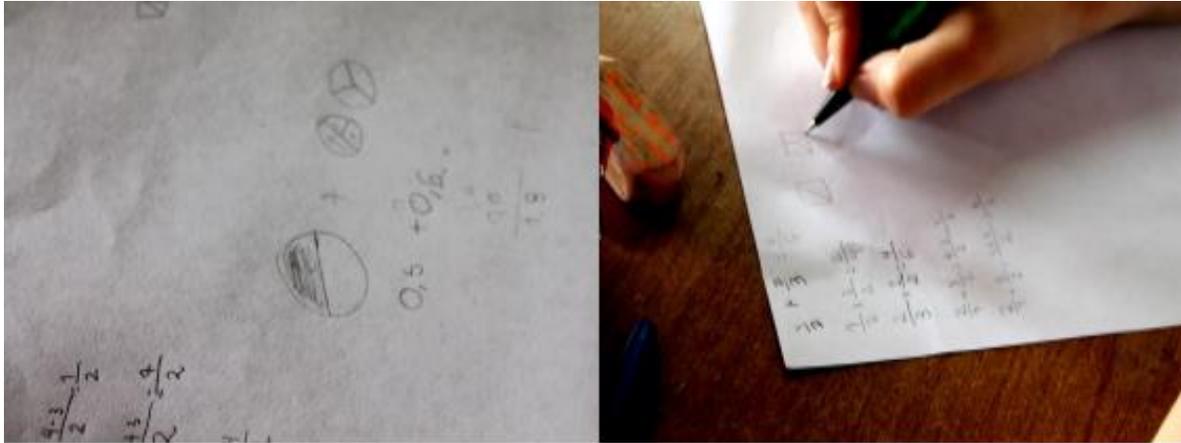


Imagen 11: Representación de fracciones

La imagen anterior muestran los diferentes esquemas que utilizan para resolver operaciones entre fracciones, mostrando que si bien saben cómo operar las fracciones o cómo es el algoritmo, el representarlas con material tangible presentó una dificultad, pues las informantes se restringen al uso de papel y lápiz para poder resolver las operaciones entre fracciones. Sin embargo luego del proceso de manipulación del *ábaco fraccionario* la informante 1: dice” hay maneras no tan convencionales de efectuar la lógica, afiance el significado de fracción y qué es por medio del ábaco fraccionario. Al igual que la informante 3 dice: “creo que este instrumento el *ábaco fraccionario* ayuda a afianzar algunos conocimientos de las fracciones ya que permite percibir las como partes de un todo”. Mostrando así el proceso evolutivo y la relevancia que tuvo

el ábaco fraccionario para las informantes.



Imagen 12: Reproducción del algoritmo mediante material tangible

En la imagen 12 se puede apreciar lo que quería mostrar la informante 3 cuando se le presentó la solución de la suma  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ , lo que ella intentaba realizar era a partir de las canicas mostrar por ejemplo 1 sobre 2, poniendo una canica arriba, luego abajo

Facultad de Educación

una hilera de canicas simbolizando la línea que usualmente utilizamos para denotar  $a/b$  y debajo de esta hilar a poner dos canicas, después representa con canicas el signo  $+$ , después de esto realiza lo mismo con el  $2/3$ , coloca una 2 canicas en la parte superior, luego la hilera de canicas y debajo de esta 3 bolitas. Luego pone el igual y al finalizar coloca el resultado que es igual a  $5/6$ .

Así cada informante, mostraba una manera diferente de representar las fracciones, pero teniendo siempre en mente el mismo algoritmo, esto se puede ver evidente en las imágenes anteriores, por ejemplo en la imagen 13 (izquierda), lo que hacía la informante era separar las bolitas con lapiceros, representado el lapicero del medio la línea de la división. En la imagen 13 (derecha), se muestra que la informante hace una representación similar a la de la primera imagen, la diferencia es que ella, la línea que representaba la división no la ponía, pero la tenía siempre presente.

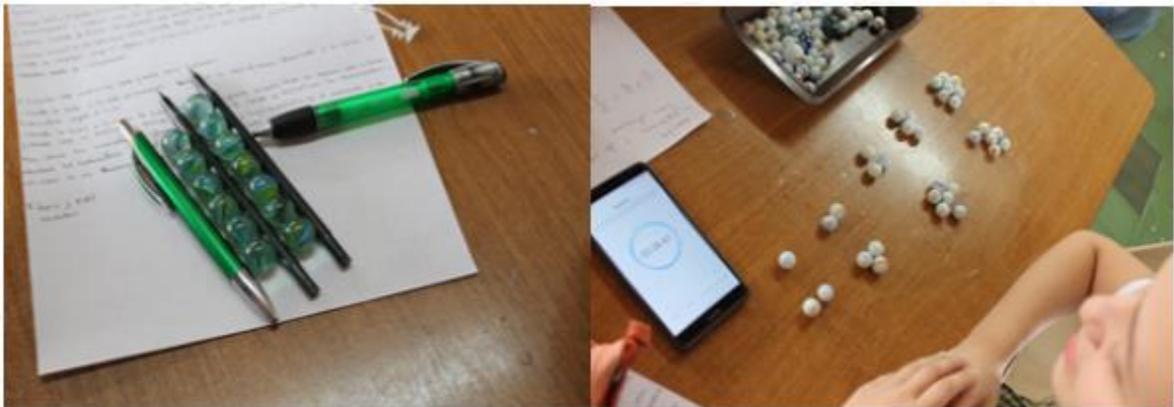


Imagen 13: Reproducción del algoritmo mediante material tangible (2)

Es interesante mostrar lo anterior ya que se puede ver que las informantes tienen una manera mecánica de resolver las fracciones procediendo el mayor tiempo por cálculos escritos. Se pudo observar una gran dificultad para lograr una abstracción sobre cómo se puede realizar una suma de fracciones con las canicas, esto no es de extrañar, pues para los mismos investigadores resultó un tanto complejo. Esto lo pudo expresar la informante 1 “me costó demasiado entender cómo solucionar un problema fraccionario sin fracciones, esta actividad

ayudó a salirme de lo común y experimentar con cosas nuevas desarrollando la lógica y la capacidad de análisis, permitiendo su visualización desde otro punto”. Dado a entender que las fracciones están restringidas estrictamente a la forma  $a/b$  y a los algoritmos que su manejo implica, en el transcurso de la actividad fueron desarrollando conceptos importantes como el concepto de unidad y de fracción; lo cual les sirvió para resolver dicha actividad.



Imagen 14: Utilización del ábaco

Una vez que las informantes lograron interpretar la manera en cómo se puede representar las fracciones usando el *ábaco fraccionario* como se muestra en la imagen 14, hicieron comentarios respecto a éste. Por ejemplo la informante 1 manifestó: “el *ábaco fraccionario* me permitió conocer mejor la forma de la fracción, como se lee y para qué sirve”, mostrando luego una mejor solución de operaciones entre fracciones en la medida en que el tiempo que tardaban en dicha solución disminuye por la apropiación del funcionamiento de este. Además a partir del encuentro, ellas pudieron hacer ese proceso mental para al final llegar a otras maneras de operar las fracciones, logrando así hacer una construcción epistemológica (llena de sentido y significado) del concepto. La informante 4 de la misma manera aporta que: “con el *ábaco fraccionario* se puede aprender el concepto de unidad y con esto, tenerlo presente en casos de la cotidianidad”. Como se decía en párrafos anteriores. Ellas a partir de esto toman más conciencia sobre elementos que se deben tener presente a la hora de realizar fracciones, porque no es

simplemente dar las fracciones como algo que se resuelve mecánicamente, es ver, observar, describir que pasa, sacar conclusiones, dejando así cosas que creían como un hecho sino que tengan conciencia sobre lo que representa, para poder así resolver fracciones de manera profunda.

Una de las dificultades que se observó de la interacción con el *ábaco fraccionario* en el encuentro 4, es que las informantes prefieren resolver algorítmicamente los problemas planteados, dado que ven las matemáticas como un sistema solo para resolver operaciones. Para las operaciones entre fracciones, se les facilitó la solución mediante el algoritmo ya aprendido y no una interpretación acerca del proceso, estas cuestiones se convirtieron en su momento en una dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Finalmente el involucrar el EMR, respecto a lo que proponen Streefland, ayudó a la realización del *ábaco fraccionario*, permitiendo que esto llevará un enfoque realista en la medida en que se puede, a partir de elementos tangibles y a partir de problemas relacionados con la cotidianidad, que el estudiante tenga más herramientas y sepa lo que significan las fracciones en su día a día. Por otra parte Kieren proporcionó elementos contundentes para entender que los estudiantes no solo deben aprender las fracciones mecánicamente y que hay elementos que son fundamentales para entender las fracciones, pues este es un tema amplio que debe ser enseñado con toda la rigurosidad y que claramente el contexto se debe ver inmerso en ello.

## 7. Conclusiones

En este trabajo investigativo sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, se pudo articular las propuestas de Hans Freudenthal, Streefland y Thomas Kieren, con el propósito de encontrar un acercamiento sobre el proceso enseñanza-aprendizaje en el aula de clase. El apoyo del *ábaco fraccionario* permitió también afianzar conceptos sobre las fracciones, por lo tanto la investigación pretende la adquisición por parte de las informantes de fundamentos conceptuales y procedimentales que le faciliten el desarrollo consciente y apropiado sobre las implicaciones de la manipulación de las fracciones.

El estudio de caso fue de carácter instrumental con 4 informantes donde el caso es la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, la información brindada por las informantes permitió en primer lugar observar que acercamiento tenían sobre el tema y cuáles podrían ser sus dificultades, luego se pudo apreciar en el desarrollo de los encuentros, inquietudes por el significado de las implicaciones que tienen las fracciones y de la manera como pueden apropiarse de la construcción de conceptos. La descripción densa ayudó a una interpretación más detallada de los hallazgos, esto otorgó cierta libertad al investigador desarrollando una manera más sintetizada y organizada de mostrar los resultados.

Una de las características que se problematiza mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones en los estudiantes es la falta de comprensión en las temáticas básicas que están inmersas en dicho tema como la identificación del mcm y mcd, si bien esto no es limitación para entender el concepto de fracción, si limita la operación entre fracciones, encontrándose así en contradicción con lo planteado en los estándares básicos de competencias. Debido a esto las interpretaciones de los investigadores juegan un papel importante en la

construcción del presente trabajo, ya que de esta forma y mediante la recolección de datos sin medición numérica como se establece en los procesos de investigación cualitativa, se identificaron una variedad de características a favor y en contra del proceso de enseñanza-aprendizaje que se lleva en el aula sobre el tema de fracciones como la mecanización que se presenta cuando la informante se encuentra en una situación que involucra operaciones con fracciones.

Las herramientas que se utilizaron para la recolección de información, las cuales permitieron la unificación del presente trabajo investigativo, al igual establecer en primera instancia el poco conocimiento que las estudiantes tienen de la relación de las fracciones con situaciones cotidianas y sus procesos para operarlas fueron: el diario de campo, registros escritos y audiovisuales, la observación y los talleres.

Una de las dificultades que se observó de la interacción con el *ábaco fraccionario* en el encuentro 4, es que las informantes prefieren resolver algorítmicamente los problemas planteados, dado que ven las matemáticas como un sistema solo para resolver operaciones, cuestión que se convirtió en su momento en una dificultad el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo después de la interacción con el *ábaco fraccionario* las informantes conocieron una nueva forma de resolver las operaciones, desligándose de la manera tradicionalista en cómo se las han enseñado en el aula de clase. Dejando a un lado solo la búsqueda de un resultado para centrarse en el porqué de las operaciones que estaban realizando.

El marco conceptual aclaró conceptos importantes sobre ¿Qué es la unidad? al igual las diferentes representaciones y otra alternativa de cómo se operan las fracciones, resaltando el *ábaco fraccionario* como alternativa para comprender lo que se está realizando a la hora de tratar con el concepto de unidad en el aula de clase, así mismo ayudó a comprender lo que

conlleva la suma, resta, multiplicación y división de fracciones, rechazando la manera mecanicista en la que se enseña. El marco teórico también ayudó a mostrar las falencias que se tenían de las fracciones a través del tiempo, proponiendo alternativas de solución y ejemplos relacionados con la cotidianidad.

La prueba piloto ejecutada inicialmente ayudó a mostrar problemas relacionados con el tiempo, la organización y la manera en cómo se les quería mostrar los encuentros a las informantes. Permitió corregir asuntos tanto logísticos como de contenido, los cuales en la prueba piloto se mostraban poco eficientes, ayudando a que finalmente los encuentros se lograrán de manera satisfactoria. De esta manera se consiguió mejorar los tiempos y dejó como evidencia que la manera en cómo se les muestra una actividad a las informantes influye también en ellas, en la medida en que una actividad bien guiada refleja compromiso, entrega y disposición por parte de las informantes para completar con éxito lo que se les propone. Respecto a lo anterior la disposición de las informantes fue muy valiosa, ya que permitieron que los encuentros que se llevaron a cabo fueran eficientes, respetando cada actividad que realizaban, llevando así una gran seriedad en el transcurso de lo que se proponía con las actividades.

Una construcción epistemológica del concepto de fracción (se plantea siempre la pregunta de qué se hace, el por qué y para que se hace, cómo encontrar los fundamentos de las acciones de operar fracciones y los fundamentos de las diferentes representaciones de las fracciones), lo que posibilita conocer otra alternativa que medie el proceso de enseñanza-aprendizaje. De esta manera la parte de construcción es importante porque no es solo el hecho de mostrarle y definir a los estudiantes que significan las fracciones, sino de que ellos por sí mismos construyan el concepto a partir de representaciones, material tangible o el contexto, de manera que ellas mismas se sorprendan, busquen y encuentren el concepto. Así mismo se busca que el

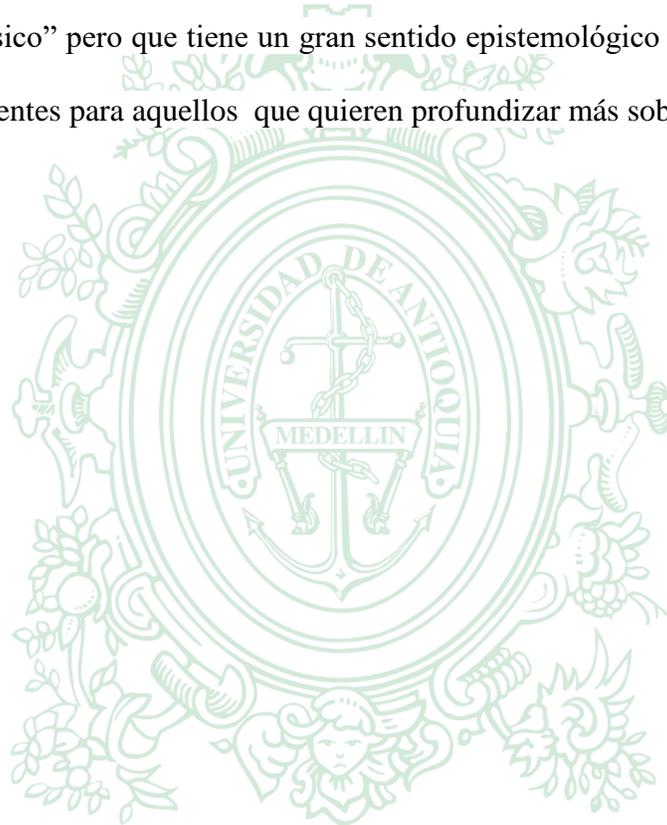
que está aprendiendo se apropie del concepto que está tratando, finalmente cuando descubra lo que significa por el mismo, será un poco más sencillo y significativo lo que luego el profesor procederá a explicarle, dejando en el estudiante conciencia y no solo algoritmos en su cabeza.

En cuanto a los encuentros relacionados con *la enseñanza de las fracciones desde un enfoque realista*, se pudo evidenciar que a las informantes se les dificulta resolver problemas cuando la solución no está mediada por el algoritmo, lo cual las saca de su estado de confort, pues manifiestan estar acostumbradas a procesos más mecánicos, mostraban así una gran confusión cuando se les presentaban problemas que involucran el contexto, ya que no son problemas que habían realizado con anterioridad, esto muestra que en ocasiones los problemas que usualmente se le muestran en las escuelas también obedece a una manera mecanicista y repetitiva de realizarlos. De esta manera, al realizar las operaciones en con el *ábaco fraccionario* también les presento una dificultad, pues aunque no es necesario mostrarlo, en su proceso hubiera sido de utilidad para un acercamiento inicial en la solución de operaciones, de esto, las informantes mostraron un gran asombro mencionando que así podían aprender en sí que eran las fracciones y que representaba la unidad, en si ellas estaban comprendiendo que pasa cuando se suma o se multiplica un par de fracciones, logrando que las informantes dejaran a un lado esa parte algorítmica que tenían. Con lo anterior se logró mostrar que la unidad posibilita el entendimiento de las fracciones en la medida en que ellas comprendieron que no siempre el 1 representa la unidad, que esto puede variar dependiendo de las circunstancias, así mi unidad podrían ser 6, 4 o 10 canicas, permitiéndoles que hicieran una abstracción de lo que involucra tomar una unidad de algo.

Finalmente se puede decir de esta investigación que la enseñanza de las fracciones, pueden tener diversas formas de ser comprendidas, de esta manera con el *ábaco fraccionario* se

**Facultad de Educación**

buscó mostrar otra manera de cómo llevar la comprensión del concepto al aula de clase. El ayudar al estudiante con diversas alternativas para que aprendan un concepto, ayuda a desarrollar diversas herramientas con las cuales se pueden desempeñar a la hora de tratar conceptos matemáticos. Esta investigación ayudó a reflexionar sobre el tema de fracciones que a simple vista parece algo “básico” pero que tiene un gran sentido epistemológico y crítico, el cual puede aportar métodos diferentes para aquellos que quieren profundizar más sobre las fracciones.



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

## **8. Contribución del trabajo a la propuesta pedagógica**

A partir de las conclusiones anteriores se describe como el tipo de investigación, la construcción epistemológica del concepto de fracción y la Educación Matemática Realista, constituyen elementos importantes para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones. De esta forma la manera en cómo se realizaron los encuentros permitieron destacar a las informantes en la manera en que se logró construir un concepto epistemológico de las fracciones. Por lo anterior lo que se busca con la propuesta de pedagógica es que se fortalezca el vínculo enseñanza-aprendizaje de las fracciones con el fin de que las informantes logren construir su propio concepto a partir de herramientas que se van adquiriendo a lo largo de la investigación, dándole un sentido más completo a este tema en cuestión.

*La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones desde una construcción de carácter epistemológico* es una investigación que ha tratado de mostrar a la luz los problemas relacionados con las fracciones y una posible forma de cómo se pueden resolver dichos operaciones entre fracciones desde un enfoque realista. De esta manera la enseñanza de las fracciones debería ser un tema tratado desde los inicios de la vida escolar, de este modo los estudiantes lograran construir con el tiempo el concepto, van adquiriendo experiencias que le proporcionan inquietudes de cómo esto se ve inmerso en la vida cotidiana, de este modo a la medida que avanzan en sus grados de escolaridad, el estudiante tendrá herramientas y un punto de partida para solucionar problemas relacionados con las fracciones.

Por otro lado el tema de fracciones ha sido subestimada a través del tiempo, sin tener en cuenta que algo tan sencillo como la pregunta ¿Qué significa dividir fracciones? implica una serie de conceptos y representaciones, generando tantos ejes de reflexión que no se debería considerar como un tema resuelto para los profesores en matemáticas, pues a partir de estas

preguntas se puede retar el dominio conceptual tanto de los estudiantes como de los profesores, logrando que se genere un aprendizaje colectivo guiado de la mano del docente.

Rescatando de lo anterior las representaciones, las fracciones no solo tienen una misma manera de visualizarse, pues esta tiene miles de representaciones como por ejemplo, mediante diagramas, material tangible y formas verbales, lo cual muestra que enseñar las fracciones de manera repetitiva, desecha todo tipo de herramientas que el docente puede desarrollar en el aula de clase. En este sentido es que la Educación Matemática Realista al mirar la matemática desde lo real, ayuda a crear esquemas que facilitan las formas de representar las fracciones y también de la matemática en general, constituyéndose como un nuevo enfoque didáctico para el estudio de las matemáticas.

Finalmente aunque la propuesta pedagógica es relevante, se quiere mostrar esta como una invitación a profundizar en el tema de las fracciones. En esta medida la primera labor que tendría el docente es preguntarse sobre ¿Qué se yo de esto que voy a enseñar? de manera la construcción del concepto de fracción en primera instancia se debe dar por parte del maestro, el cual debería tener los conocimientos y herramientas para enseñar de forma clara, de esta manera puede proporcionar a los estudiantes diversas formas de cómo pueden aprender las fracciones, las cuales resultan complejas para muchos. Este estudio permite entonces que se hagan reflexiones por parte de los investigadores, maestros y estudiantes sobre el papel que juega en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción y su enfoque realista.

## 9. Referencias bibliográficas

- Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. 119-127.
- Alzate, Ó. E. (2009). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista de Educación y Pedagogía*, vol. XVIII, 37-49.
- Bogdan, S. T. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Buenos Aires: Editorial Paidós, SAICF.
- Bonilla C. Elssy, R. S. (1997). *Más allá del dilema de los métodos*. Bogotá: Grupo Editorial Norma.
- Bressan, A. (1973). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación*, 1-11.
- Bressan, A. (2004). Los principios de la educación matemática realista. Reflexiones teóricas para la educación matemática. 1-13.
- Cabrera, F. C. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, 61-71.
- Campbell, Norman (1921). Medición. [Tomado de *What Is Science*, 1921]. En: Newman, James R. (1985). “Sigma, el mundo de las matemáticas”, Tomo 5, Ed. Grijalbo, Barcelona, 1985. Pp.186- 201.
- Casilimas, C. A. (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá: ARFO Editores e Impresores Ltda.

Echeverri, L. G. (2003). ¿Qué es Epistemología? Mi mirar epistemológico y el progreso de la ciencia. 174-178.

Elkana, Y. (1983). La ciencia como sistema cultural: Una apropiación antropológica.

*Boletín sociedad Colombiana de epistemología*, 1-21.

Freudenthal, H. (2001). Fracciones. En H. Freudenthal, *Fenomenología Didáctica de las*

*Estructuras Matemáticas* (págs. 1-49). México: CINVESTAV.

Gómez, C. M. (2010). *Fracciones y decimales*. Sevilla.

Gómez, I. (2001). Enseñanza y aprendizaje. *Revista Candidus N°15*, 1-9.

Hernández, R. F. (2010). *Metodología de la investigación 5th ed.* México D.F:

INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Heuvel-Panhuizen, M. V. (2009). El uso didáctico de modelos en la educación

matemática realista. *Correo del maestro*, 36-44.

Kieren, T. (1975). On the mathematical, cognitive and instructional. En R. A. Lesh,

*Number and Measurement. Papers from a Research* (101-151).

Martínez, E. M. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación*

*matemática*, 30-54.

Ministerio de Educación, (2014). *Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de

Educación.

Morales, C. P. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. Medellín.

Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de educación.

Nacional, M. d. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de educación.

Raigada, J. L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Sociolinguistic studies*, 1-41.

Romero, Á. E. (2005). El concepto de Magnitud como fundamento del proceso de medición. La cuantificación de los estados de movimiento y sus cambios. *Revista de Educación y pedagogía Vol XVII N°43*, 127-140.

Sierra, T. A.-J. (1999). El Diario de campo: Instrumento educativo. 11-13.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata S.L.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. En E. F. Thomas P. Carpenter, *Rational Numbers* (289-326).

Zarzar, C. B. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Revista de la Unidad de Educación de la Facultad de Ciencias Humanas y Sociales*, 1-13.