



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTO (ABPy)
COMO ALTERNATIVA PARA FAVORECER EL
PROCESO DE GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA
EN ESTUDIANTES DE TERCER GRADO.**

Autor(es)

Julieth Andrea Galeano Quinchía

Daniel Jaramillo Salazar

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2021





**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

Aprendizaje Basado en Proyecto (ABPy) como alternativa para favorecer el proceso de generalización matemática en estudiantes de tercer grado.

Julieth Andrea Galeano Quinchía

Daniel Jaramillo Salazar

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado(a) en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Asesores (a):

Mg. Verónica Valderrama Gómez

Dr. Christian Fernney Giraldo Macías

Línea de Investigación:

Pensamiento Variacional en la básica primaria apoyado en el Aprendizaje Basado en
Proyectos (ABPy)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2021.

Agradecimientos

A Dios infinitas gracias por ser nuestra fortaleza en los momentos de angustia e iluminarnos cuando más lo necesitábamos.

A la Universidad de Antioquia por permitirnos recorrer en este sendero de conocimiento y ofrecernos la mejor educación pública y de calidad.

Al Colegio Calasanz por abrirnos las puertas y brindarnos la confianza de ser parte de su comunidad educativa.

Un eterno agradecimiento a nuestros profesores Verónica Valderrama y Christian Giraldo por brindarnos su acompañamiento, asesoría y aportes durante nuestra formación académica.

Nuestros más sinceros agradecimientos a nuestros esposos Olga Elena y Alexander por ayudarnos a recorrer este camino, alentarnos en los momentos en los que más los necesitábamos y apoyarnos en la materialización de este gran sueño de ser profesionales.

TABLA DE CONTENIDO

1.	Resumen	8
2.	Introducción	9
3.	Planteamiento del Problema y Justificación	10
4.	Objetivos	13
4.1	Objetivo General	13
4.2	Objetivos Específicos	14
5.	Revisión de Literatura	14
5.1	Núcleo Temático 1: Patrones y Regularidades	18
5.2	Núcleo Temático 2: Proceso de Generalización Matemática	19
5.3	Núcleo Temático 3: Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy)	20
6.	Marco Conceptual	22
6.1	Procesos de Generalización Matemática	22
6.2	Aprendizaje Basado en Proyectos	26
7.	Metodología	31
7.1	Metodología de Investigación	31
7.2	Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información	31
-	7.2.1 Prueba Diagnóstica:	32
-	7.2.2 Cuestionario:	32
-	7.2.3 Observación No Participante:	32
-	7.2.4 Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (Gross):	32
7.3	Contexto y Selección de los Participantes	32
7.4	Consideraciones Éticas	33
7.5	Metodología de Intervención	34
7.5.1	Fase de Diagnóstico	36
7.5.2	Fase de Diseño y Ejecución	38
7.5.3	Fase de Socialización y Percepciones	43
8.	Resultados y Análisis	45
8.1	Ideas Previas de los Estudiantes	47
8.2	Implementación del Proyecto	49
8.2.1	Fase Factual	49
8.2.2	Fase Contextual	52
8.2.3	Fase Simbólica	54



8.3	Percepciones	60
8.3.1	Percepciones Componente Matemático	60
8.3.2	Percepciones del Proyecto	62
9.	Consideraciones Finales.	64
10.	Referencias Bibliográficas	69
11.	Anexos	76

Lista de tablas

Tabla 1 Criterios de búsqueda.	15
Tabla 2 Unidades de análisis consideradas en la revisión de la literatura.	16
Tabla 3 Preguntas orientadoras para el diseño del proyecto.	30
Tabla 4 Características del proyecto “La granja Calasanz”	35
Tabla 5 Caracterización de la prueba diagnóstica atendiendo a las fases de Radford (2010)	37
Tabla 6 Descripción de las sesiones.	43
Tabla 7 Categorías apriorísticas asociadas al componente matemático y del proyecto	46
Tabla 8 Respuestas de los estudiantes en la fase factual durante el paso por el juego.	51
Tabla 9 Respuestas de los estudiantes en la fase contextual.	53
Tabla 10 Respuestas de los estudiantes en la fase Simbólica.	57

Lista de Figuras

Figura 1 Estándares de Oro para el ABPy. Larmer y Mergendoller (2015).	28
Figura 2 Estructura general del proyecto por fases	35
Figura 3 Niveles de La Granja Calasanz	39
Figura 4 Menú de inicio del proyecto gamificado “La Granja Calasanz”	40
Figura 5 Crecimiento de raíces asociada a la fase factual.	41
Figura 6 La huerta asociada a la fase contextual.	42
Figura 7 Árbol de manzanas asociado a la fase simbólica.	43
Figura 8 Representación que cambia y permanece por E1	50
Figura 9 Representación que cambia y permanece por E2	50
Figura 10 Respuesta de una estudiante en su tránsito por la fase contextual a la simbólica	56

Lista de gráficos

Gráfico 1 Paso de los estudiantes por las fases de la generalización en cada uno de los niveles propuestos

59

Lista de anexos

Anexo A. Asentimiento del menor.	76
Anexo B. Carta invitación a los padres de familia.	78
Anexo C. Consentimiento informado para padres.	80
Anexo D. Prueba diagnóstica	82
Anexo E. Guía de reconocimientos de objetos y significados (GROS)	87
Anexo F. “Cuestionario Raíz”	94
Anexo G. “Cuestionario La Huerta”	95
Anexo H. “Cuestionario Árbol de manzanas”	98
Anexo I. Clases de patrones	100
Anexo J. Herramienta didáctica desarrollada en Genially	103

1. Resumen

Esta investigación surge del interés de abordar el pensamiento variacional en la educación básica primaria, el cual aparentemente no juega un papel protagónico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al tiempo que se observa una falta de diversificación de estrategias de enseñanza que parece dificultar su inclusión en las actividades planeadas y que aparentemente esta desvinculado de otros tipos de pensamiento matemático; sin embargo, el pensamiento variacional permite en los estudiantes el reconocimiento, la percepción y la identificación de la variación y el cambio en diferentes contextos. Debido a lo anterior, se plantea como objetivo analizar el proceso de generalización matemática que llevan a cabo los estudiantes del grado tercero del Colegio Calasanz Medellín a través de la implementación de un proyecto que involucra patrones numéricos y geométricos. Para lograr lo anterior, se utiliza la estrategia Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) y como referente teórico se retoman las fases de la generalización matemática propuestas por Radford (2010) y citadas por Vergel (2015).

Por su parte, la revisión de la literatura se realizó siguiendo las directrices propuestas por Hoyos (2000) en algunas de sus fases y la metodología se situó desde el enfoque cualitativo (Hernández, Fernández & Baptista, 2014), con un enfoque descriptivo e interpretativo. Adicional a esto, se tuvo en cuenta para el diseño del proyecto, la definición de ABPy de Simó et al., (2016) quienes lo definen como una metodología que integra la teoría y la práctica, la cual fomenta el trabajo colaborativo, se aprende de una forma bidireccional (estudiante-docente) y a través de la experiencia se logran fortalecer competencias en los estudiantes.

Durante la implementación del proyecto se incluyeron actividades, como: una prueba diagnóstica, la ejecución de los niveles al participar del proyecto “La Granja Calasanz” y la

percepción de los estudiantes en relación con su participación en el proyecto, además de un producto final, representado en una gamificación y consolidado en la solución de las actividades de cada nivel.

Dentro de los resultados obtenidos se observa que a los estudiantes lograron demostrar en la resolución de las actividades características propias de las dos primeras fases (factual y contextual) avanzando de manera progresiva hacia la verbalización y uso de palabras clave para el reconocimiento de la regularidad desde la fase simbólica. Además, su motivación aumentó, al trabajar desde contextos que son conocidos por ellos, en este caso alrededor de una granja.

2. Introducción

En este trabajo presentamos el proceso de investigación que llevamos a cabo dentro de las prácticas pedagógicas de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, realizada en el Colegio Calasanz-Medellín la cual tiene por objetivo analizar el proceso de generalización matemática que llevan a cabo los estudiantes del grado tercero a través de la implementación de un proyecto que involucra patrones numéricos y geométricos.

En un principio, se expone el planteamiento del problema y la justificación donde se aborda la importancia del pensamiento variacional en la primaria y cómo a partir de la estrategia Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) se diseña un proyecto que involucra las fases de la generalización propuestas por Radford (2010), con el interés de vincular formas de razonar algebraicamente desde el contexto de los estudiantes.

Seguidamente, se presenta la revisión de la literatura en donde se indagó por la bibliografía relacionada con la problemática planteada, extrayendo de allí algunos artículos de interés considerados pertinentes para alcanzar los objetivos del proyecto.

Posteriormente se presenta el marco conceptual en el cual se muestran algunos aspectos relacionados con patrones y regularidades, los procesos de generalización matemática y, por último, el (ABPy).

Esta investigación tiene una perspectiva cualitativa con un enfoque descriptivo e interpretativo. Para la recolección de la información, se utilizaron diferentes técnicas e instrumentos como la prueba diagnóstica, el cuestionario, la observación no participante y la guía de reconocimientos y significados (GROS). Por su parte, para el análisis se utilizó el programa ATLAS. Ti (V 8.0) en donde se sistematizó y clasificó la información suministrada por los estudiantes en diferentes categorías previamente definidas. Por último, se describen algunas consideraciones finales, al tiempo que se hace mención a los referentes bibliográficos que se tuvieron en cuenta para dar sustento a la presente investigación.

3. Planteamiento del Problema y Justificación

En el proceso de enseñanza de las matemáticas uno de los problemas más recurrentes se relaciona con las dificultades para abordar y desarrollar de manera conjunta y paralela los cinco pensamientos matemáticos (aleatorio, numérico, variacional, métrico y espacial), según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), estos pensamientos deberían abordarse a partir de la construcción de formas generales y articuladas desde los primeros grados de escolaridad.

Dentro de los pensamientos anteriormente mencionados, esta investigación en particular se interesa por el variacional, el cual aparentemente no juega un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas de clase, específicamente en la educación primaria, principalmente porque en estos niveles se privilegian elementos de orden numérico y geométrico, enfocando su enseñanza en asuntos procedimentales asociados a los algoritmos de las operaciones básicas y al reconocimiento de formas geométricas, lo cual ha restado

importancia a procesos necesarios para la formación de las habilidades en el ámbito variacional como el reconocimiento, la percepción y la identificación de la variación y el cambio en diferentes contextos.

Ahora bien, en relación con los conocimientos conceptuales, una de las dificultades más evidentes se relaciona con la falta de énfasis en la identificación de patrones y regularidades, dado que generalmente se privilegia el estudio de patrones por repetición en contextos alejados de la vida cotidiana, dejando de lado aquellos que abordan la recurrencia. Al respecto, Zapatera (2018) afirma que esta situación se genera debido a que “los patrones por recurrencia son los que tienden a presentar mayores dificultades entre los estudiantes de los grados medios y altos de la escuela primaria, debido a que ellos presentan un incremento en el número de elementos en cada término, al tiempo que su regla de formación se vuelve más compleja” (p.57).

Atendiendo a lo anterior, y en concordancia con Radford (2010) este trabajo considera que el pensamiento variacional se debe abordar mediante los procesos de generalización de patrones, ya que estos se consideran una de las formas más importantes de fortalecer el pensamiento algebraico en las escuelas. Adicionalmente, Vergel (2015), menciona que dicho pensamiento permite a los estudiantes trabajar alrededor de situaciones de variación que son esenciales para el desarrollo de este pensamiento.

En consecuencia de lo anterior, las actividades propuestas en el contexto escolar, deben estar orientadas a que el estudiante, observe, describa y generalice las regularidades encontradas en distintos escenarios de la vida cotidiana propios de las matemáticas o de otras ciencias.

Adicionalmente, los procesos de enseñanza son esenciales para acercar a los estudiantes a las formas de generalización desde los primeros años de escolaridad, en este sentido, en la perspectiva que tenga el docente sobre las formas y modos en cómo el estudiante responde frente

a las actividades propuestas, debería considerar en mayor medida procesos que involucren las comunicaciones simbólicas y orales, es decir, la incorporación de dibujos, gestos, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford et al., 2009), citado por Vergel (2013).

Desde una perspectiva metodológica, otra dificultad asociada al objeto de estudio de esta investigación se relaciona con la falta de diversificación de estrategias de enseñanza.

Particularmente, en el contexto de la práctica pedagógica como espacio de reconocimiento de dificultades de corte epistemológico y didáctico, se pudo constatar un enfoque de enseñanza que parece estar direccionado hacia lo tradicional. Al respecto García y De Alba (2008) afirman que el sistema escolar parece limitarse a la transmisión de verdades sin favorecer en las aulas de clase, espacios para la construcción del conocimiento.

No obstante, la educación debe indagar por nuevas metodologías que favorezcan la participación activa de los estudiantes y que les permitan pensar dinámicamente al enfrentarse a situaciones propias de la vida cotidiana. En este sentido, Heras (2017) propone que se involucre (...) la originalidad, la posibilidad de movimiento, la interacción con el medio, el diálogo con los demás y la experimentación al promoverse desde una visión dinámica. Por tanto, se debe potenciar al máximo los aspectos funcionales de la asignatura desde la educación Primaria, para ayudar a los alumnos a conseguir un pensamiento positivo hacia esta. (p.5)

En concordancia con lo anterior, este trabajo se propone implementar el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) para atender a las dificultades anteriormente descritas, el cual será considerado como una estrategia que “dinamiza el proceso de enseñanza aprendizaje, aumentando el interés de los educandos, lo que se traduce en el mejoramiento del rendimiento y

el desarrollo de la competencia de resolución de problemas situados en el entorno” (Matos et al., 2015, p.36).

Del mismo modo, Medina y Tapia (2017) mencionan que el ABPy “permite al estudiante convertirse en protagonista de su aprendizaje, como fundamento para el desarrollo de competencias y la mejora de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje” (p.10). Este rol del estudiante podría posibilitar que se alcancen procesos de generalización significativos, en la medida en que se favorece la interacción entre pares y se generan espacios de reflexión, crítica y revisión.

En el marco de esta propuesta metodológica, este trabajo abordará el pensamiento variacional a partir del diseño de un proyecto que involucra las fases de la generalización propuestas por Radford (2010). Por lo tanto, se espera que el ABPy en asociación con la propuesta teórica de Radford permita reconocer situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar (Vergel, 2015).

En definitiva, con la intención de favorecer los procesos de generalización de patrones por recurrencia en estudiantes del grado tercero y en atención a las problemáticas descritas anteriormente, se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera un proyecto que involucra el trabajo con patrones numéricos y geométricos con énfasis en la recurrencia favorece el proceso de generalización en estudiantes del grado tercero del Colegio Calasanz Medellín?

4. Objetivos

4.1 Objetivo General

Analizar el proceso de generalización matemática que llevan a cabo los estudiantes del grado tercero del Colegio Calasanz Medellín a través de la implementación de un proyecto que involucra patrones numéricos y geométricos.

4.2 Objetivos Específicos

- Identificar las ideas previas que los estudiantes tienen sobre los patrones numéricos y geométricos para el diseño de un proyecto.
- Favorecer procesos de generalización matemática a través de un proyecto que involucra patrones numéricos y geométricos.
- Valorar la percepción que tienen los estudiantes del grado tercero al aplicar un proyecto que involucra patrones numéricos y geométricos.

5. Revisión de Literatura

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al realizar una revisión de la literatura, cuyo propósito fue elaborar un rastreo de algunos referentes acerca de elementos esenciales de la actividad matemática enfocados en los procesos de generalización, el aprendizaje de patrones numéricos y geométricos en la educación primaria relacionados con la recurrencia numérica (RN) y el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) como estrategia de enseñanza.

Para esta revisión utilizamos algunos planteamientos propuestos por Hoyos (2000) quien presenta una propuesta de investigación de la cual se retoman elementos para este apartado, como lo son la fase preparatoria, la fase descriptiva y la fase interpretativa por núcleo temático; al tiempo que proponen orientaciones para la construcción teórica del marco conceptual, al analizar y conceptualizar la información que se requiere para el desarrollo del trabajo propuesto.

Inicialmente, Hoyos (2000) plantea establecer núcleos temáticos y definir criterios de exclusión, los cuales se detallan en la tabla 1.

Tabla 1

Criterios de búsqueda.

CRITERIOS				
Delimitación temática	Delimitación temporal	Contexto	Unidades de análisis	Núcleos temáticos
Patrones y regularidades en la básica primaria	2010/2020	Ámbito Nacional e internacional	Artículos. Tesis	<ul style="list-style-type: none"> ● Patrones y regularidades ● Proceso de generalización matemática ● Aprendizaje Basado en Proyectos.

Nota: Elaboración propia (2021)

Asimismo, Hoyos sugiere la búsqueda de “unidades de análisis”, entendidas como los artículos o documentos que serán revisados; para este aspecto, se tuvieron en cuenta artículos de revistas nacionales e internacionales, las cuales fueron revisadas utilizando palabras claves como: Proyecto, Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy), Patrones y regularidades en Primaria y generalización matemática. En la tabla 2, se presentan los resultados generales de la búsqueda por núcleo temático, con las unidades de análisis que fueron consideradas para este trabajo. Es importante aclarar que solo se incluyeron aquellos artículos que consideramos esenciales para esta investigación.

Tabla 2

Unidades de análisis consideradas en la revisión de la literatura.

Núcleo Temático 1. Patrones y Regularidades	
Nombre	Autor/es y año
Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo	Rangel (2012)
Investigación en educación matemática XXI	Muñoz et al. (2017)
Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en Problemas	Paladinez (2018)
Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros	Godino y Font (2003).
Núcleo Temático 2. Proceso de generalización matemática	
Capítulo 2. Generalización. En ideas y actividades para enseñar álgebra	Grupo Azarquiel. (1993)
Pensamiento algebraico temprano	Butto y Rojano (2009)
Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje	Zapatera-Llinares (2018a).
Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria	Zapatera-Llinares (2018b).
Desarrollo del razonamiento algebraico vía la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de la educación básica primaria.	Hernández y Tapiero (2015)
Generalización de patrones y formas de	Vergel, R. (2015a).

pensamiento algebraico temprano.	
Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.	Vergel, R. (2015 b).
Núcleo Temático 3. Aprendizaje Basado en Proyectos	
Hablando sobre Aprendizaje Basado en Proyectos con Julia.	Garrigós y Valero-García (2012)
Un aprendizaje basado en proyectos de matemáticas con alumnos de undécimo grado	Morales y García (2015)
Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática.	Álzate et al., (2013)
Interdisciplinares: implementación de metodologías de aprendizaje basado en proyectos y cooperativo	Simó et al., (2016)
Aprendizaje basado en proyectos estrategia pedagógica en la enseñanza de las matemáticas	Matos et al., (2015)
A review of research on Project - based learning. Revisión de la investigación sobre el aprendizaje basado en proyectos.	Thomas (2000).
The Project Approach. In press: Approaches to Early Childhood Education- El enfoque de proyectos. En prensa: Enfoques de la educación infantil.	Katz y Chard (1992).
Students Research the Effects of Fire on the Soil System through Project-based Learning- Los estudiantes investigan los efectos del suelo a través del aprendizaje basado en proyectos.	Kioui y Arianoutsou (2016)
Aprendizaje significativo por investigación: Propuesta alternativa-Significant learning research: alternative proposal.	Eraso et al., (2014)

El aprendizaje basado en proyectos: un constante desafío	Rekalde y García (2015)
“Why We Changed Our Model of the “8 Essential Elements of PBL”.	Larmer y Mergendoller (2015).

Nota: Elaboración propia. (2021)

5.1 Núcleo Temático 1: Patrones y Regularidades

Tal y como lo expresa Rangel (2012) el razonamiento inductivo está íntimamente relacionado con el descubrimiento de patrones y las leyes que los rigen y desde esta perspectiva cumplen un papel esencial en el fortalecimiento del desarrollo matemático y está ligado de manera directa con los procesos de generalización matemática.

Atendiendo al llamado de este autor, en este trabajo se considera como necesario abordar esta temática en la básica primaria como una oportunidad para aportar en el fortalecimiento del pensamiento matemático para que de esta manera se desarrollen competencias matemáticas que deriven en la comprensión y solución de problemas en contexto.

Del mismo modo, otros autores como Muñoz et al., (2017), Godino y Font (2003) y Paladinez (2018), concuerdan en que el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones; y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas, permitiendo establecer conexiones y relaciones entre diferentes conceptos y procesos matemáticos que allí puedan involucrarse.

Adicionalmente, Godino y Font (2003) en el texto titulado Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros mencionan que “un contexto adecuado para iniciar a los alumnos desde preescolar en el razonamiento algebraico y funcional es proporcionarles secuencias de figuras u objetos que siguen un cierto orden o regularidad (seriaciones, cenefas, etc.)” (p. 817) En este

trabajo en particular se presentan alternativas y estrategias para abordar el trabajo con patrones en la escuela.

5.2 Núcleo Temático 2: Proceso de Generalización Matemática

Gran parte de las investigaciones sobre el proceso de generalización matemática han estudiado las respuestas de los estudiantes analizando las estrategias, los niveles y las etapas por las que pasa un estudiante en el proceso de generalización, la relación con los pensamientos numérico y espacial en el desarrollo de la generalización y diversos modos de introducción del lenguaje y razonamiento algebraico desde los primeros años.

En este sentido, toman relevancia investigaciones como las de Butto y Rojano (2009), Zapatera-Llinares (2018), Hernández y Tapiero (2015), Vergel (2015) y Radford (2010) Grupo Azarquiel (1993), las cuales concuerdan en la importancia de iniciar los procesos del razonamiento algebraico en etapas tempranas de escolaridad, puesto que reconocen que los estudiantes tienen capacidades naturales de generalización y habilidades para reconocer y expresar patrones. Igualmente exponen que la generalización matemática escolar es una vía propicia para introducir el álgebra de manera temprana, además, de poner en consideración la necesidad de introducir discusiones académicas en el desarrollo de tareas de generalización para promover el reconocimiento de la complejidad matemática que subyace en el trabajo por patrones.

Asimismo, trabajos como el desarrollado por Mouhayar y Jourdak (2012) citados por Zapatera (2015), resaltan la necesidad de estudiar no sólo la manera en la cual los estudiantes resuelven problemas asociados a la generalización de patrones, sino incluir de manera especial el proceso inverso, es decir, proponer un camino donde la generalización de patrones sea el foco para fortalecer y evaluar el grado de desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Otro estudio como el de Callejo y Zapatera (2014) menciona que en el proceso de la generalización matemática es muy importante la idoneidad de las estrategias que se van a utilizar y que de su uso flexible y atento depende que se pueda pasar de un reconocimiento de un patrón a la expresión de la regla general, dicho estudio presenta información relevante para nuestro trabajo en la medida que expone estrategias para pasar de una generalización cercana a una generalización que llegue a la expresión general, lo cual permite la identificación de los obstáculos de los estudiantes en el proceso y facilita los cambios cognitivos de los general a lo particular y viceversa.

En síntesis, los trabajos relevados en esta línea o núcleo temático plantean la incorporación desde los primeros años de escolaridad de tareas de generalización matemática que incluyan el reconocimiento y exploración de patrones para que los estudiantes puedan lograr la expresión verbal y posteriormente la expresión escrita y simbólica de la regularidad encontrada, tal y como lo propone el early algebra.

Por lo anterior consideramos que es importante acompañar a los docentes en el diseño e implementación de situaciones amplias y diversas orientadas a que los alumnos conecten diferentes contextos y formas de razonamiento algebraico, a través de sus experiencias escolares y tomando como base su accionar cotidiano.

5.3 Núcleo Temático 3: Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy)

Dentro de los referentes teóricos que abordamos para el núcleo temático de ABPy, se encontraron artículos de autores como Garrigós y Valero-García (2012), Morales y García (2015), Álzate et al.,(2013), Simó et al., (2016) y Matos et al., (2015) , los cuales concuerdan que en la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos se destaca el trabajo colaborativo,

donde se estimula la autonomía del estudiante y la motivación aumenta al ser un proceso que no se enmarca dentro de la enseñanza tradicional.

Adicionalmente, Garrigós y Valero-García (2012) afirman que el ABPy introduce situaciones adicionales de motivación para que los estudiantes realicen las actividades planificadas y se introduzcan en el proceso con relativa facilidad, potenciando el desarrollo de habilidades como la comunicación y el trabajo grupal.

Por su parte Thomas (2000), Katz y Chard (1992) Kioupi y Arianoutsou (2016), Eraso et al., (2014), Rekalde y García (2015) hacen énfasis en que el docente y el alumno trabajan de manera conjunta y este es considerado un productor y facilitador en el mejoramiento de estrategias de aprendizaje, asimismo, mencionan algunos elementos que caracterizan el aprendizaje basado en proyectos como lo son estructurado, centralizado, autónomo, enfocado y realista.

Además, desde la perspectiva de Thomas (2000) el ABPy debería ser considerado como una estrategia didáctica que podría propiciar el interés de los estudiantes hacia la ciencia y su aprendizaje, debido a que lo sitúa en el centro del proceso formativo, fomenta su autonomía y pone énfasis en respuestas a preguntas o elaboración de productos de interés, mediante la utilización de técnicas de investigación.

Tomando como base los planteamientos anteriores, este trabajo de investigación toma como referente principal los elementos metodológicos planteados por Larmer, Mergendoller y Boss (2015) quienes mencionan que “el corazón de un proyecto es un problema que investigar o una pregunta que explorar y responder”(p.2) y proponen que para el diseño de un proyecto, es necesario atender a lo que ellos denominaron “estándares de oro” o características esenciales para el diseño de proyectos, las cuales serán descritas en el marco conceptual.

Los aportes de estos autores son pertinentes para nuestra investigación porque con esta metodología de enseñanza se busca potenciar el conocimiento de los estudiantes desde el contexto con problemáticas o situaciones que sean cercanas a ellos. Consideramos que esta unidad de análisis es conveniente para nuestro trabajo, debido a que en ella se menciona que la enseñanza bajo esta metodología es más eficaz en el desarrollo de los procesos de aprendizaje que las de corte tradicional dado que fomenta otras habilidades.

La revisión de literatura en este trabajo investigativo fue significativa, debido a que nos permitió evidenciar la descontextualización que existe entre las matemáticas y el mundo real; por ello nuestra investigación se orientó hacia el favorecimiento de un aprendizaje significativo al incorporar, por medio del proyecto La Granja Calasanz, la matemática con el contexto de los estudiantes, favoreciendo su participación y predisposición para aprender.

6. Marco Conceptual

El presente marco desarrolla los núcleos temáticos definidos en la revisión de literatura los cuales son la base para el análisis del objeto de estudio planteado en esta investigación. En primer lugar, se encuentran los procesos de generalización matemática, los cuales son vistos como un acto que se va desarrollando durante el proceso escolar de los estudiantes, logrando de esta manera atravesar diferentes fases al ser abordados a través de los patrones matemáticos.

En segundo lugar, se presenta el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) como una metodología integradora que nos permite acercar a los estudiantes a diferentes patrones numéricos y geométricos. En este sentido, se mencionan los estándares de oro propuestos por Larmer, et al., (2015), en los cuales se establecen las características principales para el diseño del proyecto.

6.1 Procesos de Generalización Matemática

La actividad matemática trae consigo el establecimiento de proposiciones, el planteamiento y resolución de problemas y otras tantas formas hacer y vivir las matemáticas; donde se ponen en juego procesos para apreciar la generalidad ya sea en lenguaje natural o simbólico, a la vez que se puede razonar sobre las regularidades encontradas para compararlas o deducir otras.

Atendiendo a lo anterior, el desarrollo de la capacidad de generalizar ya sea expresando verbalmente la generalidad encontrada o con ayuda de símbolos aparece como un aspecto importante dentro de nuestro currículo nacional, pues como lo enuncia el Ministerio de Educación Nacional, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006)

(...) Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. (p. 67)

Otro argumento teórico al respecto de lo anterior, lo encontramos en la perspectiva de Radford (1997) citado por Vergel (2015), quien menciona que la generalización “significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto, emerge progresivamente” (p. 74-75).

En este sentido, para Radford (2013) la generalización algebraica de secuencias geométricas o numéricas tiene características como la toma de conciencia de una propiedad común que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares, la generalización de dicha propiedad a todos los términos

subsecuentes de la secuencia y la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Adicionalmente Kieran (1989) y Mason (1996) citados en Vergel (2014) argumentan que para identificar un verdadero desarrollo del pensamiento algebraico no basta con ver la generalidad en la particularidad, se debe ser capaz de expresar lo encontrado de forma algebraica, por lo que la simbolización como proceso aparece de manera preponderante como “el lenguaje que expresa la generalidad”.

Sin embargo, la naturaleza diversa de este lenguaje evidenciada en diversos estudios (Vasco, 2007; Radford, 2008, 2009, 2010) muestran la importancia de generar una clasificación acerca de las formas en cómo los niños y las niñas transitan por el proceso de generalización. Por tanto, nuestro trabajo de investigación se acoge a la tipología propuesta por dichos autores donde se destacan tres fases citas por Vergel (2015) que pueden considerarse como formas de pensamiento algebraico: Factual, Contextual y Simbólica.

Al respecto, la primera fase denominada como pensamiento algebraico factual hace alusión a los medios utilizados por los estudiantes como los gestos, movimientos, ritmos, actividad perceptual y palabras. En esta fase aún no se alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números.

La segunda fase enunciada como pensamiento algebraico contextual expone cómo los gestos y las palabras son sustituidas por otros medios como frases “clave”. En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Esto significa que los estudiantes tienen que trabajar con formas reducidas de expresión.

Finalmente, la tercera fase es nombrada por los autores como pensamiento algebraico simbólico donde se recurre al uso de las frases *clave* las cuales son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ o $2n-1$. Según Radford (2010), en este estrato de pensamiento “hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso” (p. 8)

Por lo anterior, este mismo autor advierte sobre la importancia de introducir el álgebra en la escuela, ya que podría invitar a los estudiantes a acercarse a situaciones de variación que se presentan como una oportunidad para desarrollar el pensamiento algebraico.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente y ligado a los procesos de generalización matemática, se encuentran los patrones, los cuales son definidos por Zapatera (2018), como “las sucesiones de elementos que se construyen siguiendo una determinada regla; los estudiantes, a partir de casos particulares, han de deducir esa regla para generalizar el patrón y continuar la sucesión” (p.55).

Estos tipos de sucesiones, se pueden construir en dos vías; la primera de ellas sigue las reglas de repetición, en donde sus elementos se presentan de forma periódica y se repiten cada cierto número de elementos, lo que genera que estos sean limitados dentro de su formación, es decir, siempre habrá el mismo “n” número de elementos en el patrón propuesto y en su construcción.

Por su parte, la segunda vía es a partir de reglas de recurrencia, en las cuales la sucesión se expresa teniendo en cuenta los anteriores términos, lo que quiere decir, a partir de unas generalidades previamente establecidas, se pueden construir los siguientes elementos en la sucesión propuesta; para este caso, el número de elementos es infinito y siempre serán diferentes entre sí.

En correspondencia con lo anterior, la construcción de estos patrones pueden ser geométricos o numéricos; en donde los primeros, como su nombre lo indica, tienen en cuenta las diferentes figuras geométricas, y es a partir de ellas, que se pueden generar patrones de repetición como el siguiente: estrella, rectángulo, rombo, estrella, rectángulo, rombo, estrella, ..., en donde su regla de formación es repetir los elementos cada tres posiciones; a su vez, que patrones de recurrencia como: punto, línea, triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, ..., los cuales se forman a partir de la regla de agregar un lado más al siguiente elemento.

En cuanto a los numéricos, estos tienen como base los números pertenecientes a los diferentes conjuntos (naturales, enteros, racionales,...) y las diferentes relaciones que pueden existir entre ellos; en su mayoría, los patrones que se generan por repetición en lo numérico están relacionados a patrones gráficos (imágenes) propuestos a los estudiantes, por ejemplo: número de ventanas en los edificios, teniendo como resultado: 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, ..., para este caso, la regla de formación es dada por lo visto por el estudiante en la imagen propuesta. Por su parte, los de recurrencia se asocian a operaciones matemáticas entre los números, es decir, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., en donde su regla de formación es multiplicar por dos el número anterior para conocer el valor de la siguiente posición.

En síntesis, observar regularidades y llevarlas a la cotidianidad de los estudiantes, sirve para guiarlos y también para ayudarlos a comprender nuevos conceptos que son la base para la construcción de otros más complejos como el concepto de variable y decir que la observación y exploración de patrones es útil en la comprensión de las matemáticas y en la consolidación del proceso de generalización.

6.2 Aprendizaje Basado en Proyectos

Dentro de las múltiples definiciones que se encuentran en la literatura en relación con el ABPy, Markham, et al (2003) pertenecientes al Buck Institute for education (BIE) lo define como “un método sistemático de enseñanza que involucra a los estudiantes en el aprendizaje de conocimientos y habilidades, a través de un proceso extendido de indagación, estructurado alrededor de preguntas complejas y auténticas, y tareas y productos cuidadosamente diseñados” (p. 14).

Aunque la definición anterior expone un conjunto de características que serán consideradas en este trabajo, particularmente, nos identificamos con la postura de Simó et al., (2016) quienes definen el ABPy como una metodología que integra la teoría y la práctica, la cual fomenta el trabajo colaborativo, se aprende de una forma bidireccional (estudiante-docente) y a través de la experiencia se logran fortalecer competencias en los estudiantes.

Por otro lado, el ABPy, desde la perspectiva de Thomas (2000) establece cinco elementos o características fundamentales, que resaltan que un proyecto debe ser centralizado; es decir, supone trabajar desde unos contenidos curriculares, estructurado en preguntas dirigidas, enfocado hacia una investigación de corte constructivista, fomenta la autonomía y es realista; es decir debe tener sentido para los estudiantes.

Ahora bien, Larmer et al., (2015) utilizan la denominación de “estándares de oro” para referirse a un conjunto de características que ellos consideran esenciales para el diseño de un proyecto (Ver figura 1) y que son la base para la construcción de la propuesta de enseñanza que hace parte de esta investigación.



Figura 1 Estándares de Oro para el ABPy. Larmer y Mergendoller (2015).

Desde la perspectiva anterior, el diseño de un proyecto se estructura con base en ocho características, las cuales se presentan a continuación:

- **Conocimientos y habilidades:** Se refieren a los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que serán definidos para el desarrollo del proyecto, curricularmente definen el norte para el trabajo con los estudiantes. Además, se sugiere abordar una habilidad asociada a la resolución de problemas, pensamiento crítico, entre otras.
- **Pregunta orientadora:** Se refiere a la selección de una pregunta o reto que investigar, la cual sea atractiva y que atienda a la necesidad real de saber o resolver un problema de su contexto.
- **Producto para un público:** Hace alusión a la creación de un material concreto que será una muestra del proceso vivido durante el proyecto, no se trata de un ejercicio de final de proyecto, por el contrario, hace parte del proceso.

Adicional a esto, cuando se hace dicho producto se aumenta la motivación y anima a los estudiantes a realizar un trabajo de alta calidad.

- **Conexión con el mundo real:** Se sugiere partir de una situación real, relevante para un contexto específico y con base en los intereses y necesidades de una comunidad. Al respecto, se involucran expertos y entidades externas. Además, se muestran las realidades del problema detectado desde diferentes perspectivas.
- **Investigación continua:** Bajo este enfoque, se pretende que los estudiantes adquieran habilidades propias del campo de estudio, mediante ejercicios de recolección y análisis de datos, sistematización y selección de información en diferentes fuentes.
- **Voz y voto del estudiante:** Se pretende que los estudiantes sean autónomos en su aprendizaje, guiados siempre por su maestro. En esta característica se permite a los estudiantes tomar algunas decisiones durante el desarrollo del proyecto, por ejemplo, modificaciones al producto final, su rol al interior del grupo o el diseño de algunos instrumentos para la recolección de información.
- **Crítica y Revisión:** Se refiere a los espacios de retroalimentación necesarios para que los estudiantes mejoren sus producciones y conozcan la percepción de sus compañeros y docentes en relación con los avances en su trabajo.
- **Reflexión:** Se asume como un proceso evaluativo de corte formativo, se suele asociar a modalidades de la evaluación como la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación, ayudando a los estudiantes a fortalecer lo aprendido.

Para guiar la construcción del proyecto a partir de las características mencionadas anteriormente, Giraldo (2019) propone utilizar algunas preguntas que se presentan en la tabla 3.

Tabla 3

Preguntas orientadoras para el diseño del proyecto.

Investigación continua		Voz y voto del estudiante
¿Qué fuentes de investigación serán consideradas? ¿Cómo sistematizar y usar la información? ¿Cómo vincular las TIC a las tareas del proyecto? ¿Qué lugares, expertos y materiales serán considerados en el proyecto?		¿Cómo se van a organizar los grupos de trabajo? ¿Qué decisiones podrán tomar los estudiantes? ¿Cuáles serán los roles de los participantes?
Reflexión	Pregunta orientadora	Conexión con el mundo real
¿Qué espacios o momentos se van a propiciar para la reflexión y toma de decisiones?	¿Qué queremos investigar? ¿Qué reto queremos proponer? ¿Qué problema queremos solucionar?	¿Qué personas deben implicarse en el proyecto? ¿Qué problemas del contexto se pretenden trabajar? ¿Qué lugares, expertos y materiales se podrían relacionar con los propósitos del proyecto?
Crítica y Revisión	Conocimientos y habilidades	Producto para un público
¿Cuáles estrategias de evaluación se van a considerar? ¿Qué insumos se van a utilizar para realizar seguimiento?	¿Qué conocimientos y habilidades se desean potenciar? ¿Qué contenidos se van a privilegiar durante el proyecto?	¿Cuáles serán las estrategias de socialización? ¿Qué tipo de productos se podrían esperar?

Nota: Tomado de Giraldo (2019)

En conclusión, el ABPy se presenta como una alternativa para motivar a los estudiantes, fomentar la participación activa y alcanzar los objetivos propuestos, de esta manera los estudiantes no solo aprenden, sino que también utilizan los conocimientos que han adquirido durante el proceso para mejorar el entorno de una manera práctica, beneficiándose ellos mismos y a la sociedad.

Por tanto, el ABPy se convierte en la base para planificar y gestionar situaciones de enseñanza, promoviendo así la construcción de los conceptos matemáticos de los estudiantes.

7. Metodología

En este capítulo presentamos dos aspectos fundamentales para el diseño metodológico, en primer lugar, se detallan los aspectos teóricos que orientan nuestro trabajo de investigación enfocado desde el paradigma cualitativo, considerando la descripción de la población objeto de estudio, las técnicas e instrumentos utilizados durante el proceso para la recolección de la información, las consideraciones éticas y la propuesta de análisis de los datos. En segundo lugar, exponemos la propuesta de intervención la cual se enmarca desde la estrategia de enseñanza Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy), para la consolidación del proyecto denominado “La granja Calasanz” como elemento clave para fortalecer aspectos de la generalización matemática en estudiantes del grado tercero de educación básica primaria.

7.1 Metodología de Investigación

Nuestra investigación se desarrolla bajo una perspectiva cualitativa, ya que buscamos comprender procesos y significados prescindiendo de las mediciones numéricas y estudios cuantitativos (Denzin y Lincoln, 2005). En este sentido, nos posicionamos desde un enfoque descriptivo e interpretativo, el cual según Aguirre (1997) trata de un estudio descriptivo de la cultura escolar y de algunos aspectos fundamentales de la misma. Ahora bien, en relación con lo interpretativo, referimos la importancia de realizar descripciones reflexivas asociadas al contexto de manera que nos permita desarrollar categorías conceptuales para desafiar los presupuestos teóricos expuestos en el apartado anterior.

7.2 Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información

Durante el proceso de intervención se utilizaron algunas técnicas e instrumentos de recolección de información que nos permitieron conocer la perspectiva de los estudiantes frente al proceso de generalización matemática.

- **7.2.1 Prueba Diagnóstica:** El objetivo principal de la prueba diagnóstica es determinar el estado y saberes previos de cada estudiante antes de iniciar un determinado proceso de enseñanza-aprendizaje y de este modo lograr adaptarlo a sus necesidades.
- **7.2.2 Cuestionario:** Desde la perspectiva de Chasteauneuf (2009), citado por Hernández, Fernández y Baptista (2014) un cuestionario se define como “un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir”. De igual forma, las preguntas allí formuladas son de tipo abiertas, con el objetivo de identificar las ideas iniciales de los estudiantes.
- **7.2.3 Observación No Participante:** Según Stake (1998, p. 60), “los significados de los datos cualitativos o interpretativos son los que directamente reconoce el observador”. Es decir, la observación es una forma de reconocer lo que está sucediendo en el mundo real, para esto se utilizó como recurso el diario pedagógico recolectando en él información relevante para el proceso de análisis.
- **7.2.4 Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (Gross):** Nos permite en palabras de Godino et al., (2008) tener una “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados” con la finalidad de realizar un análisis a priori de los objetos y significados dispuestos al interior del proyecto diseñado.

7.3 Contexto y Selección de los Participantes

La institución educativa donde llevamos a cabo nuestra práctica pedagógica fue el Colegio Calasanz Medellín, es una institución de carácter privado en la cual se atienden los

niveles de preescolar, básica y media, el colegio cuenta con dos sedes, la sección mayor y la sección infantil, las cuales se encuentran ubicadas en la comuna 12 y 13 del Barrio Calasanz, en el municipio de Medellín.

Para la implementación del proyecto y la obtención de información, se seleccionaron como participantes, 97 estudiantes de tercer grado, los cuales tenían edades que oscilaban entre los ocho y nueve años. Los participantes, estaban distribuidos en tres grupos (3A, 3B y 3C) y la intensidad horaria para el área de matemáticas era de 6 horas. El proyecto se abordó durante cinco semanas (diagnóstico y lanzamiento, implementación del proyecto y cierre)

Lo anterior, se vio afectado debido a la pandemia generada por el COVID-19, durante la cual los colegios trasladaron las aulas presenciales de clase a las plataformas virtuales, en este caso, a la plataforma TEAMS. Por medio de esta plataforma, pasamos a encontrarnos con los estudiantes 4 horas a la semana. Del mismo modo, la implementación del proyecto “La Granja Calasanz”, que fue pensado en un principio para ser trabajado en presencialidad, se trasladó a la virtualidad por medio de una gamificación, la cual es “un proceso relacionado con el pensamiento del jugador y las técnicas de juego para atraer a los usuarios y resolver problemas” (Zichermann y Cunningham, 2011, p.11).

7.4 Consideraciones Éticas

Atendiendo a que nuestra investigación está centrada en la participación de seres humanos como unidades de observación, nos remitimos a los siguientes criterios éticos propuestos por Hernández et al., (2014)

a. Los participantes tienen derecho a estar informados del propósito de la investigación, el uso que se hará de los resultados de la misma y las consecuencias que puede tener en sus vidas. (Ver anexo A)

b. Negarse a participar en el estudio y abandonarlo en cualquier momento que así lo consideren conveniente, así como negarse a proporcionar información. (Ver anexo B)

c. Uso de consentimiento o aprobación de la participación. Además de conocer su papel en una investigación específica, es necesario que los participantes y sus acudientes proporcionen el consentimiento explícito acerca de su colaboración (Ver anexo C)

d. Cuando se utiliza información suministrada por ellos o que involucra cuestiones individuales, su anonimato debe ser garantizado y observado por el investigador.

7.5 Metodología de Intervención

En el presente apartado se realiza una descripción de la estrategia de intervención llevada a cabo en el centro de práctica, desarrollando de manera explícita cada una de las fases que fueron estimadas para el diseño y posterior implementación del proyecto “la Granja Calasanz”.

En primer lugar, es importante precisar que dicho proyecto nace como una iniciativa de articulación del contexto, con las matemáticas, y es en este punto, donde la huerta de la institución se convirtió en el escenario propicio para vincular formas de razonar algebraicamente a temprana edad a partir de los sembrados y cultivos.

Sin embargo, lo que inicialmente se gestó como una opción de interacción presencial en la huerta institucional, se vio modificado por el cambio de las prácticas educativas presenciales a las virtuales producto de la pandemia ocasionada por el COVID-19. Dicho cambio derivó en que el escenario real de la huerta escolar, pasará a ser simulado a través del diseño de un juego interactivo que se denominó “La granja Calasanz”.

En correspondencia con lo anterior, el proyecto encontró a través de la creación virtual de diferentes escenarios asociados al cultivo y la siembra de hortalizas y plantas herbáceas como la

lechuga, una manera propicia para abordar conceptos matemáticos como la generalización de patrones numéricos y geométricos.

A continuación, se presenta la estructura general del proyecto caracterizado por 3 fases que se desarrollaron de forma secuencial: Fase diagnóstica, fase de diseño y ejecución y fase de socialización (Ver figura 2).

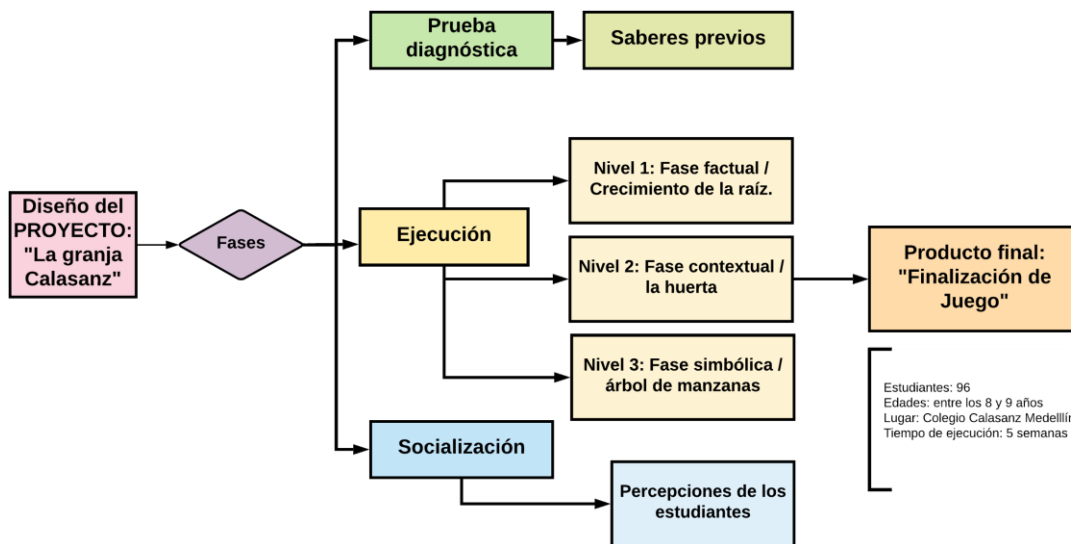


Figura 2 Estructura general del proyecto por fases

Nota: elaboración propia. (2021)

Además, se presentan los elementos considerados para el diseño del proyecto, atendiendo al referente metodológico ABPy. (Ver tabla 4)

Tabla 4

Características del proyecto “La granja Calasanz”

Investigación continua	Voz y voto del estudiante
<ul style="list-style-type: none"> - Actividades en línea usando plataformas digitales para afianzar los conceptos estudiados. 	<ul style="list-style-type: none"> - Gestión individual del juego - Participación libre y espontánea durante las sesiones sincrónicas.

- Resolución de problemas asociados a los patrones y las regularidades.	- Paso por cada uno de los niveles del juego.	
Reflexión	Pregunta orientadora	Conexión con el mundo real
Espacio de retroalimentación y consideraciones de las percepciones de los estudiantes.	¿Cómo puedo identificar secuencias y regularidades en la granja de mi escuela?	La granja escolar como espacio para identificar patrones y regularidades.
Crítica y Revisión	Conocimientos y habilidades	Producto para un público
Revisión de soluciones a problemas planteados en cada uno de los niveles de la granja.	Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.	Resolución de problemas asociados al Juego “La granja Calasanz” consolidados en una bitácora.

Nota: Elaboración propia. (2021)

7.5.1 Fase de Diagnóstico

La primera fase del diseño del proyecto “La granja Calasanz” consistió en realizar por medio de un formulario digital una prueba diagnóstica (Ver anexo D) tipo cuestionario, el cual pretendía poner en evidencia el reconocimiento de patrones numéricos y geométricos; la identificación de regularidades y la posible formulación simbólica de la regularidad encontrada.

El cuestionario compuesto de 10 preguntas fue diseñado atendiendo a las tres fases propuestas por Radford (2010) citadas por Vergel (2015) tal y como se muestra a continuación. (ver tabla 5)

Tabla 5

Caracterización de la prueba diagnóstica atendiendo a las fases de Radford (2010)

Fase involucrada	Puntos de la prueba diagnóstica	Descripción
Factual	2	El planteamiento de este ejercicio promueve que los estudiantes puedan rastrear por medio de gestos (indicar con los dedos, deslizar en la hoja) la figura que sigue; de igual forma, favorece que ellos tengan en cuenta cómo el tamaño (grande/ pequeño) afecta la continuidad del patrón, por lo cual se espera que hagan uso de sus percepciones del mismo.
	6	El ejercicio indaga por el conocimiento matemático que el estudiante tiene sobre patrones
	8	El planteamiento de este ejercicio promueve que los estudiantes puedan rastrear por medio de gestos (indicar con los dedos, deslizar en la hoja) la figura que sigue.
	11	La presentación de este patrón favorece que los estudiantes, en un principio a identificar la variación que hay entre los números, y posteriormente a calcular el número que hace falta dentro del patrón propuesto, para ello los estudiantes pueden realizar cálculos con los dedos .
Contextual	1	Se busca que los estudiantes puedan

		ingeniar una forma de encontrar como aumenta la regla de formación establecida en el ejercicio.
	3	El ejercicio propuesto busca que los estudiantes encuentren la operación que le permita hallar el número siguiente a partir de la identificación de palabras clave
	9	Según la regla de formación este ejercicio busca que los estudiantes cambien de un término a otro
Simbólica	4	Este ejercicio propone por medio del lenguaje matemático los cambios que se pueden evidenciar en la imagen dada
	5	Se busca que el estudiante de cuenta de la construcción de un patrón
	7	La representación gráfica que se le presenta al estudiante en este punto orienta a una regla de formación establecida.

Nota: Elaboración propia.

7.5.2 Fase de Diseño y Ejecución

El diseño del proyecto “La granja Calasanz” se orientó con base en las fases definidas previamente desde la teoría de Radford (2010) y se corresponden con lo propuesto en el diagnóstico. A continuación, presentamos el esquema base de diseño caracterizado en tres niveles. (Ver figura 3)

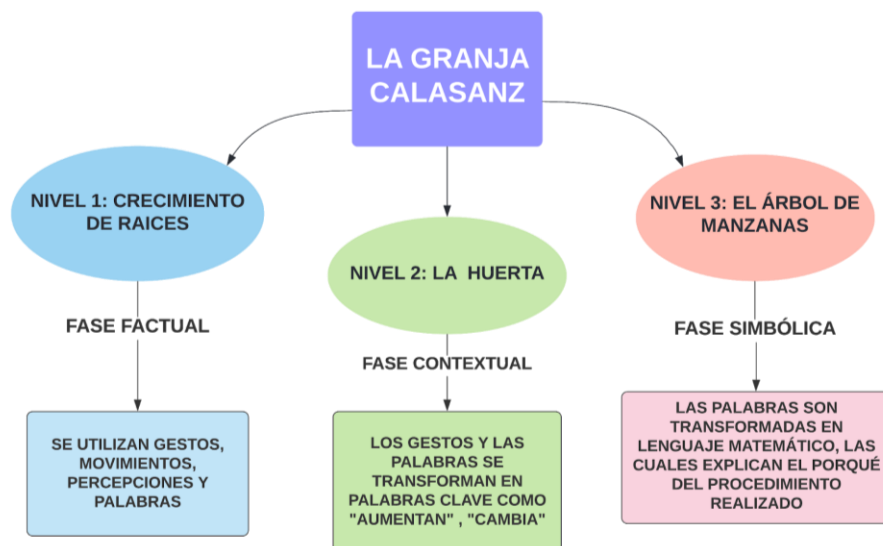


Figura 3 Niveles de La Granja Calasanz

Nota: elaboración propia. (2021)

Es importante anotar que un aspecto fundamental dentro del diseño de cada uno de los niveles del juego, fue la realización de la Guía de reconocimientos de objetos y significados (GROS), la cual atendiendo a las idoneidades epistémica - cognitiva¹ propuestas por Godino (2011) pretende desde un análisis a-priori la identificación de los tipos de objetos o entidades primarias referidas, puestas en juego en la solución de problemas, agrupadas en los siguientes tipos: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas) conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular un definición), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades (enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba) y argumento (justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas). Asimismo, para cada una de estas entidades se identificaron posibles

¹ Epistémico (naturaleza relacional de las matemáticas; las matemáticas como actividad humana; las matemáticas como proceso, antes que como producto. Cognitivo (adaptación consistente de los nuevos conocimientos a los previamente establecidos; interacción social y comunicación como motores del aprendizaje; complejidad del aprendizaje)

conflictos de significado que podrían surgir durante la actividad de resolución del problema. (Ver anexo E)

A continuación, presentamos cada uno de los niveles propuestos dentro del diseño del proyecto gamificado “La granja Calasanz”:



Figura 4 Menú de inicio del proyecto gamificado “La Granja Calasanz”

Nota: tomada de proyecto “La Granja Calasanz” (2020)

Nivel 1: “Crecimiento de raíces”

Este nivel se encuentra directamente relacionado con la **fase factual** y está enmarcado en el crecimiento de las raíces secundarias de una planta semana tras semana. Las situaciones propuestas están orientadas a indagar las percepciones y palabras utilizadas por los estudiantes para describir los cambios ocurridos durante las semanas propuestas. (Ver anexo F)

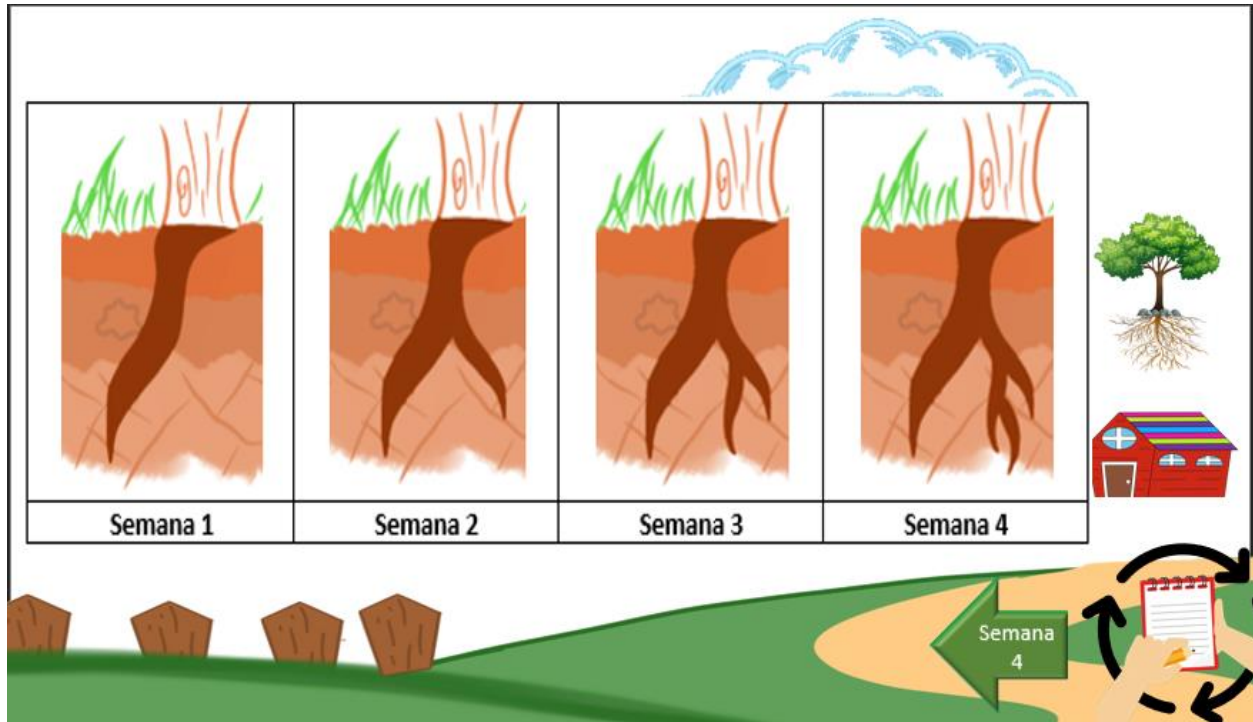


Figura 5 Crecimiento de raíces asociada a la fase factual.

Nota: tomada del proyecto “La granja Calasanz” (2020)

Nivel 2: “La Huerta”

El segundo nivel “**La huerta**” se encuentra relacionado con la **fase contextual**, allí se plantea el trabajo por patrones y regularidades a través del crecimiento de tomates y lechugas en diferentes camas de cultivo, las cuales se encuentran organizadas de manera secuencial a medida que aumenta el número de camas. Las situaciones propuestas están orientadas a conocer las palabras clave que utilizan los estudiantes para describir lo observado en el nivel, entre las cuales se tienen en cuenta “aumenta”, “cambia”, entre otras. (Ver anexo G)

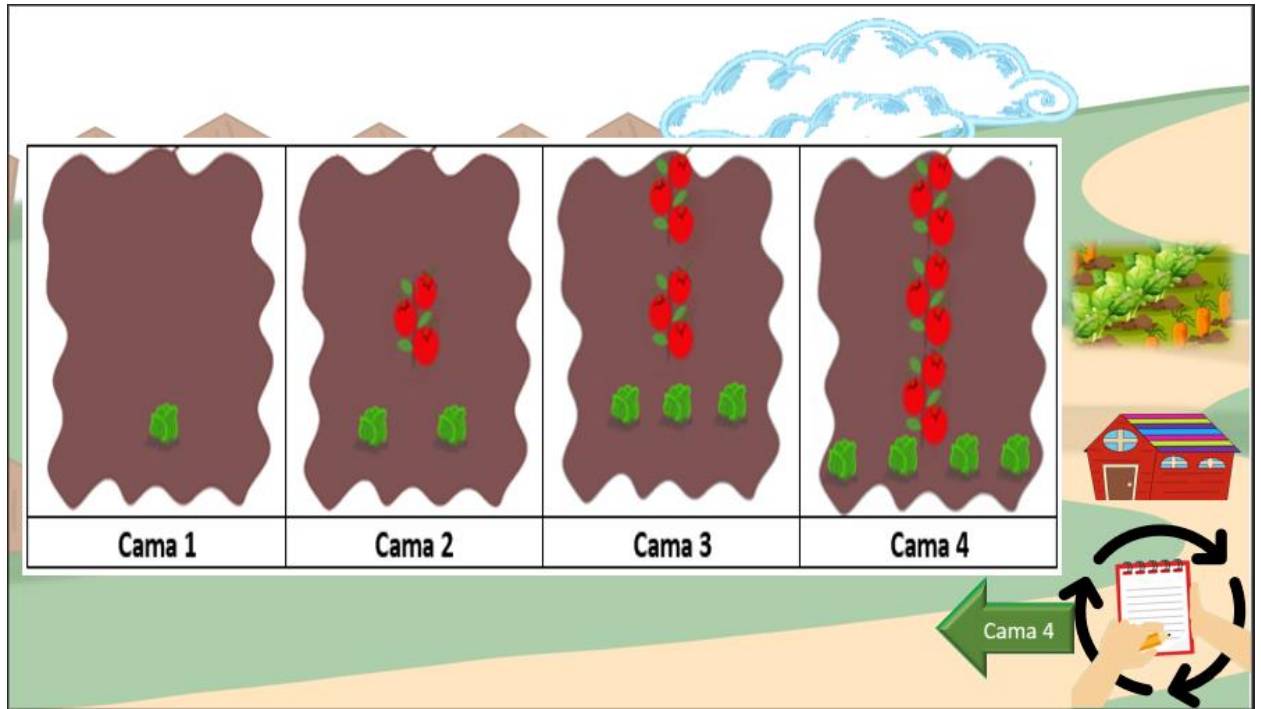


Figura 6 La huerta asociada a la fase contextual.

Nota: tomada de proyecto “La Granja Calasanz” (2020)

Nivel 3: “Árbol de manzanas”

El tercer nivel “**Árbol de manzanas**” se encuentra relacionado con la **fase simbólica**, la cual plantea la posible incorporación de elementos simbólicos a través de una analogía relacionada con la caída de algunas manzanas, las cuales se van acomodando de acuerdo a los números triangulares a medida que avanzan los días. Las situaciones propuestas están orientadas a observar cómo los estudiantes se van acercando a la transformación y uso del lenguaje matemático, el cual es utilizando para brindar la explicación del porqué del procedimiento realizado. (Ver anexo H)

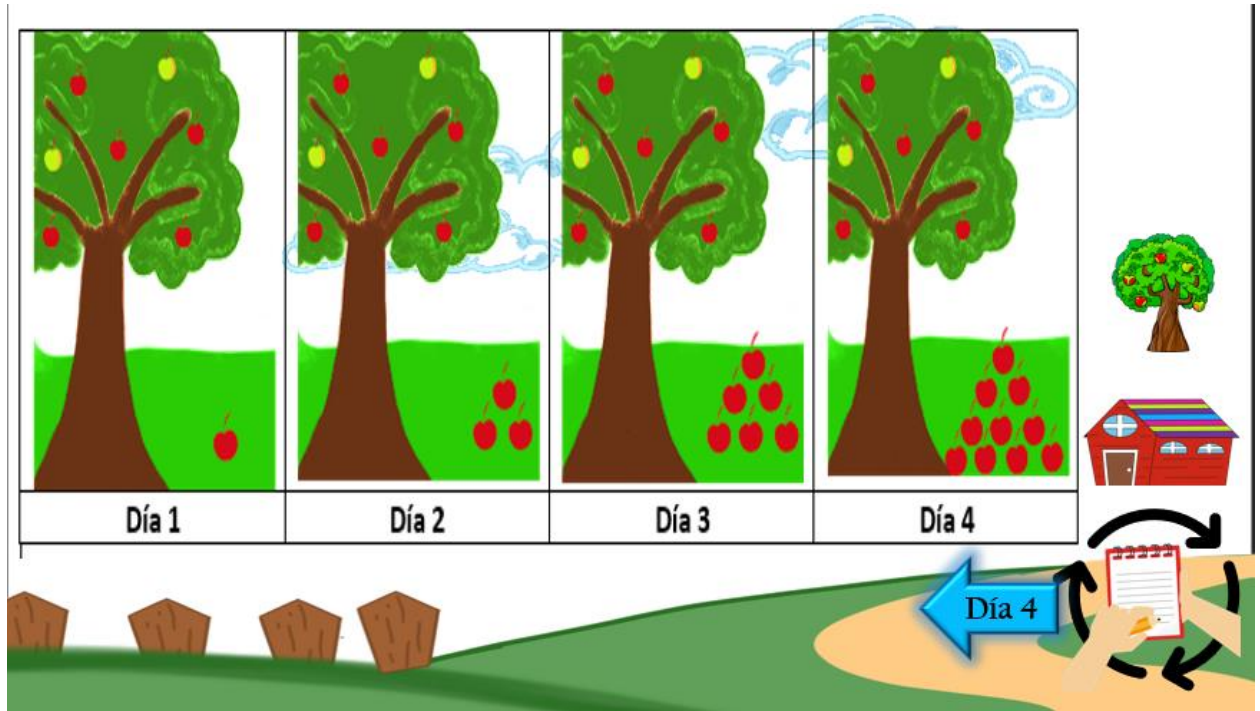


Figura 7 Árbol de manzanas asociado a la fase simbólica.

Nota: tomada del proyecto “La granja Calasanz” (2020)

7.5.3 Fase de Socialización y Percepciones

Durante esta fase los estudiantes tuvieron la posibilidad de manifestar sus percepciones en relación con el desarrollo del proyecto. Para la recolección de la información se realizó un conversatorio en clase. Las ideas expresadas por los estudiantes se dividieron en dos categorías, una asociada al componente matemático y otra a su participación en el proyecto.

Atendiendo a las fases anteriores, a continuación, describimos las actividades desarrolladas en cada una de las sesiones de clase.

Tabla 6

Descripción de las sesiones.

Sesión 1 (ver anexo D)	Prueba diagnóstica: para esta primera sesión se llevó a cabo una prueba en la cual brindará qué conocimientos previos tenían los estudiantes con respecto a la construcción y definición de patrones numéricos y geométricos.
---------------------------	---

<p>Sesión 2 (ver anexo I)</p>	<p>Clase de patrones: para ello se utilizó la herramienta prezi como recurso de presentación de la clase de patrones numéricos y geométricos, también se trabajó en el texto guía de matemáticas las páginas 72 y 73.</p>
<p>Sesión 3 (ver anexo J)</p>	<p>Clase con herramienta digital: Durante esta sesión se les presentó de manera didáctica a los estudiantes una actividad en Genially como recurso para el desarrollo de la de la misma.</p>
<p>Sesión 4 (ver anexo F)</p>	<p>Se da a conocer el proyecto titulado la granja Calasanz a los estudiantes el cual inicia con una introducción de la visita que hizo “Andrea y Santiago” los personajes de la granja los cuales posteriormente visitan cada nivel. El primer nivel llamado crecimiento de raíces, donde se muestra los dibujos que realizó Andrea de las raíces secundarias durante cuatro semanas y a partir de lo presentado los estudiantes deberán responder a las preguntas;</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Qué cambio se pueden ver en las raíces que dibujo Andrea, semana tras semana. 2. Señala por medio de un dibujo que cambia en las raíces y qué permanece igual.
<p>Sesión 5 (ver anexo G)</p>	<p>En el segundo nivel de la granja presentamos la huerta en el cual se menciona que “Santiago” el personaje de la granja juntos con sus compañeros del salón, le pidieron permiso a la profesora para sembrar algunos frutos como los tomates y algunas verduras como las lechugas, allí se les pide que observen cómo repartieron los tomates y las lechugas en cada cama de cultivo que allí había, después de la observación se plantean unas preguntas para darle solución al segundo nivel las cuales son;</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizan la siguiente tabla (ver anexo 7) para escribir cuántas lechugas y cuántos tomates hay en cada cama de cultivo que sembró Santiago con sus compañeros. 2. Extiende por medio de dibujos las camas de cultivo hasta la 6. <ul style="list-style-type: none"> - ¿Cuántas lechugas y cuántos tomates se cultivan en la cama 5? - ¿Cuántas lechugas y cuántos tomates se cultivan en la cama 6? 3. ¿Hay alguna forma de encontrar el número de tomates y el número de lechugas que sembraron en la cama 8, sin construir la figura? Explica

<p>Sesión 6 (ver anexo H)</p>	<p>Para finalizar en el nivel 3 llamado el árbol de manzanas, Andrea y Santiago observaron que con el pasar de los días la cosecha de manzanas iba aumentando al mismo tiempo se iban creando triángulos cuando estas caían aquí se les presenta los dibujos de la cosecha durante los primeros cuatro días (Ver anexo H) para posteriormente proponerles unos retos a resolver.</p> <p>Para el primer reto se les presenta un dibujo que Andrea realizó el último día de visita a la granja para posteriormente preguntarles.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿A qué día de recolección pertenece este dibujo? Explica la manera en cómo lograste encontrar tu respuesta. 2. Santiago quiere saber cómo se verán las manzanas caídas en el día 7. Explica, con tus palabras o dibujos, lo que debe hacer para dibujarlo. 3. Escribe un mensaje a Camilo, un compañero de Andrea y Santiago, que no asistió a la granja, en donde le expliques de manera clara y de forma detallada cómo calculaste las manzanas recolectadas el día 7.
<p>Sesión 7</p>	<p>Cierre: Se socializa con los alumnos la experiencia vivida con la granja Calasanz, a partir de preguntas como; qué fue lo más fácil, qué nivel les pareció más complejo y como se sintieron realizando el proyecto.</p>

Nota: Elaboración propia (2021)

Para finalizar, resaltamos que el diseño del proyecto “la granja Calasanz” en cada de una de sus sesiones lleva implícita la idea de la incorporación del contexto de los estudiantes, asimismo plantear situaciones que pongan en escena una matemática cercana y presente en muchas de las situaciones de nuestra vida cotidiana y donde la variación y el cambio aparece como sustrato de ellas.

A continuación, presentamos los resultados del proceso de implementación de la “Granja Calasanz” con los estudiantes del grado tercero.

8. Resultados y Análisis

En este apartado se presentan los análisis y la interpretación de los datos cualitativos obtenidos durante la implementación del proyecto “La granja Calasanz” al triangular la

información. Además, se utilizaron diferentes categorías atendiendo a los objetivos principales planteados en este estudio. En este sentido, se consideraron categorías apriorísticas, asociadas al componente matemático y a las percepciones de los estudiantes. En la tabla 7, se presentan las categorías y su correspondiente descripción.

Tabla 7

Categorías apriorísticas asociadas al componente matemático y del proyecto

Componente Matemático		
Categoría	Código	Descripción
Fase Factual	FF	Se presentan evidencias de gestos, percepciones, palabras señalamientos frente a las secuencias presentadas
Fase contextual	FC	Se presenta la sustitución de los gestos, percepciones y señalamientos por el uso de palabras clave para expresar la regularidad
Fase simbólica	FS	las frases y palabras clave son reemplazadas por símbolos alfanuméricos del álgebra.
Percepciones		
Categoría	Código	Descripción
Percepciones asociadas al componente matemático	PM	Se presentan algunas expresiones de los estudiantes en relación con los aprendizajes que ellos consideran haber obtenido durante el desarrollo del proyecto. Se incluyen percepciones positivas y oportunidades de mejora.
Percepciones asociadas al proyecto	PP	Se presentan algunas expresiones de los estudiantes en relación con su participación en cada una de las fases del proyecto.

Nota: Elaboración Propia (2021)

Para el análisis de los datos obtenidos durante la realización del proyecto se utilizó el programa ATLAS. Ti (V 8.0) con el objetivo de sistematizar la información, al tiempo que

observar y clasificar las respuestas que los estudiantes brindaron para cada una de las fases: factual, contextual y simbólica.

Ahora bien, para atender a lo descrito anteriormente y responder a los objetivos de esta investigación se procederá a presentar los resultados iniciando con las ideas previas de los estudiantes y posteriormente, se presentan los resultados y su respectivo análisis para cada una de las categorías previamente definidas.

8.1 Ideas Previas de los Estudiantes

Para identificar las ideas previas de los estudiantes se realizó una prueba diagnóstica (ver anexo D) y las respuestas obtenidas se contrastaron con conversatorios con algunos estudiantes seleccionados de forma aleatoria. A continuación, se describen algunas situaciones identificadas para cada fase.

En primer lugar, se puede mencionar que en las preguntas propuestas para la fase factual la mayoría de los estudiantes tuvieron un acercamiento adecuado a los puntos propuestos, en donde destacaron aquellas preguntas que apuntaban al uso de gestos y a la percepción que tienen sobre ¿qué es un patrón?, seguido por la situación que requería una combinación de percepciones y uso de su cuerpo para encontrar la respuesta al patrón propuesto.

A pesar de que los estudiantes reconocen patrones y la figura que sigue cuando se les presenta una secuencia, se identificaron algunas dificultades asociadas con la falta de argumentar el porqué de su elección, se perciben ambigüedades en las respuestas y al contrastar algunas de las selecciones con diálogos sincrónicos con estudiantes seleccionados al azar se confirmaron estas dificultades.

Asimismo, los estudiantes dan sus explicaciones para resolver los patrones de manera mental y cuando tratan de realizar gestos con sus manos lo hacen de manera tímida o escondida y no de forma espontánea.

En segundo lugar, se puede observar que, en las preguntas correspondientes a la fase contextual, una gran cantidad de estudiantes respondieron correctamente las proposiciones que apuntaban a las características de esta fase, la cantidad de respuestas correctas fueron menores respecto a la fase factual, lo cual puede significar que algunos estudiantes se encuentran en proceso de sustituir los gestos para de este modo identificar aquellas palabras clave que permitan conocer la regla de formación en los patrones propuestos.

De igual forma, en los diálogos realizados con los estudiantes se logró evidenciar que, aunque algunos utilizan palabras clave como *sube, baja, aumenta o se mueve* mientras realizan el procedimiento no son capaces de explicar el porque de su uso.

En tercer lugar, en las preguntas que apuntaban a la fase simbólica, se pudo apreciar que los estudiantes no incorporan en sus explicaciones argumentos simbólicos que permitan encontrar una regla de formación del patrón. se les dificultó proponer los cambios que se generan en un patrón específico por medio del lenguaje matemático; sin embargo, también se pudo observar que, al momento de crear un patrón propio a partir de unos elementos dados, los estudiantes crean una regla de formación propia, la cual les permitieron generar patrones de repetición correctos. Sin embargo, se evidencia en las respuestas dadas por los estudiantes se les dificulta verbalizar la operación realizada en la solución del planteamiento propuesto, dejando de lado los símbolos propios de la matemática, asimismo al momento de socializar las respuestas con los estudiantes, estos daban explicaciones ambiguas tales como las cuales no evidenciaban el proceso real que requería la solución de cada uno de los patrones planteado.

Los resultados anteriores se convierten en un insumo importante para el posterior diseño del proyecto y refiere un conjunto de dificultades que son atendidas durante la ejecución y en relación con cada una de las fases propuestas por Radford (2010).

8.2 Implementación del Proyecto

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en cada uno de los niveles del proyecto, a su vez la clasificación y análisis realizados posteriormente de las respuestas brindadas por los estudiantes en cada una de las fases propuestas.

Es importante destacar que, aunque el trabajo no fue pensado para ser desarrollado desde la virtualidad, por medio de encuentros sincrónicos con los estudiantes se lograron llevar a cabo diálogos con ellos, los cuales nos permitieron reconocer algunos indicios del tránsito por la fase factual, contextual y simbólica en la cuales se encontraban, en conjunto con las respuestas brindadas a los planteamientos propuestos en los diferentes niveles del proyecto.

8.2.1 Fase Factual

En el presente apartado se presentan los resultados y el respectivo análisis de las respuestas que se categorizaron en la fase factual, para esta clasificación se tuvo en cuenta la descripción mencionada en la Tabla 7 respecto a la presente fase presentan evidencias de gestos, percepciones, palabras y señalamientos frente a las secuencias presentadas.

Para el análisis de esta fase cabe destacar que la evidencia empírica que se logró obtener no es muy amplia, debido a que su ejecución se realizó en medio de la virtualidad, por lo cual los datos obtenidos surgen de diálogos sincrónicos con algunos estudiantes en donde se logró evidenciar por medio del uso de la cámara y la plataforma Teams la forma en cómo los estudiantes usaban su cuerpo, los gestos que realizaban, etc. para dar cuenta de la regularidad.

A continuación, se presentan algunas respuestas, para lo cual se utilizará la letra E acompañada de un número para hacer referencia a un estudiante en particular, un ejemplo de ello sería: E1, este código correspondería a la respuesta dada por el estudiante 1. Al respecto, retomamos las respuestas dadas por E1 y E2 en las cuales se evidencia su paso por la fase factual como se evidencia en las figuras 8 y 9.

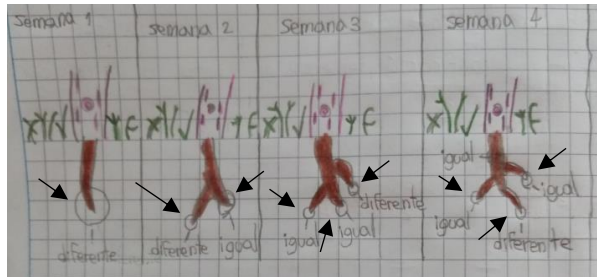


Figura 8 Representación que cambia y permanece por E1



Figura 9 Representación que cambia y permanece por E2

Las figuras 8 y 9 surgen como respuesta de los estudiantes al planteamiento sobre qué cambia en las raíces y qué permanece igual. En ellas se pueden observar los códigos internos que generan los estudiantes, en primer lugar, en la figura 8 se puede visualizar que el estudiante indica por medio de circunferencias y palabras la solución al enunciado; en segundo lugar, en la figura 9 el estudiante hace uso de un código general (cambia/no cambia) con una representación gráfica, el cual replica en la figura dada durante el juego.

En ambas figuras, se pueden apreciar las percepciones que tienen los estudiantes frente a un mismo enunciado, en ellas se puede ver que E1 considera cada nueva raíz como algo que cambia y las raíces anteriores como algo igual, mientras que E2 considera todas las raíces que

han nacido como algo que cambia en todos los momentos y como algo que no cambia la raíz principal.

En síntesis, se puede evidenciar que cada estudiante generó un código personal para dar cuenta de las percepciones que tiene sobre el enunciado propuesto, por lo cual dichas respuestas se pueden ubicar en la primera fase de la generalización. En esta misma línea, se encontró de manera generalizada para el Nivel I del proyecto que de los 97 estudiantes que participaron en él, en las respuestas brindadas por 80 de ellos predominan las características propias de la fase factual, a la cual se enfocaba.

Ahora bien, en la tabla 8 se refieren algunas expresiones que dan cuenta del paso por la fase factual.

Tabla 8

Respuestas de los estudiantes en la fase factual durante el paso por el juego.

Fase factual	
Nivel juego	Respuesta estudiante
1.Crecimiento de raíces	E3: “ <i>Primero le creció una raíz grande al lado derecho. 2 semana: creció una pequeña raíz al lado izquierdo 3 semanas: después creció otra debajo de la que estaba al lado izquierdo. 4 semana: le creció otra hacia abajo”</i>
2.La huerta	E4: “ <i>Cada semana hay una nueva lechuga y tres tomates más, entonces En la semana 8 habrá 8 lechugas y 21 tomates”</i>
3.Árbol de manzanas	E5: “ <i>El día 7 caen 7 manzanas y quedan abajo como base de la pirámide El día 6 caen 6 manzanas y quedan arriba del día 7 El día 5 caen 5 manzanas y quedan arriba del día 6 El día 4 caen 4 manzanas y quedan arriba del día 5 El día 3 caen 3 manzanas y quedan arriba del día 4 El día caen 2 manzanas y quedan arriba del día 3 El día 1 cae una manzana y queda arriba del día 2 Así se forma la pirámide”</i> .

Dentro de las respuestas mencionadas por los estudiantes se puede observar que responden a las situaciones propuestas con palabras que reflejan sus percepciones, mediante el uso de expresiones o explicaciones libres al hacer uso de palabras como: lado derecho, lado izquierdo, debajo, hacia abajo, hay una nueva, quedan abajo, quedan arriba, entre otras.

En general, se puede mencionar en las respuestas dadas por los estudiantes predominan las características propias de esta fase, puesto que dan sus explicaciones de manera espontánea, mencionando o representando de forma literal lo que logran observar, por lo cual hacen uso de palabras propias o referentes a la lateralidad (arriba, abajo, izquierda, derecha) para hacer referencia a lo que ven y para dar solución a las diferentes situaciones planteadas a lo largo del juego, en donde no se percibe el uso del lenguaje matemático.

8.2.2 Fase Contextual

Para el análisis de esta fase es importante aclarar que la información recolectada se realizó en medio de la virtualidad, para lo cual fue necesario utilizar la plataforma Teams – área de trabajo virtual que permite la comunicación en tiempo real mediante audio, vídeo y chats - para los encuentros sincrónicos con algunos estudiantes y lograr evidenciar cómo las percepciones y los gestos los iban cambiando a un lenguaje más concreto utilizando palabras clave como aumenta, crece o cambia para dar respuesta a las regularidades.

Para el Nivel II del proyecto, 51 estudiantes de 97, dieron respuestas en las cuales se pueden observar algunas características propias de la fase contextual a la cual el nivel apuntaba; a continuación, se presentan las respuestas dadas por dos estudiantes frente al reto propuesto en este nivel, en donde se planteaba encontrar el número de tomates y el número de lechugas que se pueden sembrar en la cama 8, sin realizar su representación gráfica. Para este caso, E5 responde “*serían 8 lechugas porque en cada cama crece de a una lechuga y serían 21 tomates porque a*

*partir de la segunda cama **crecen** de a tres tomates por cama, en total **crecen** 29 contando las lechugas y los tomates”; por su parte, E6 menciona que “*si se puede conocer porque los tomates **aumentan** en cada cama de 3 en 3, y las lechugas **aumentaban** de 1 en 1. Por lo tanto, en la cama 8 habría 21 tomates y 8 lechugas”.**

En las respuestas brindadas por los estudiantes se puede observar la manera como los dos estudiantes logran llegar a una afirmación sin tener presente el dibujo; por una parte, el E5 utiliza como palabra clave “crecen” para describir cómo cambian los tomates y las lechugas en las diferentes camas, mientras que el E6 hace uso de la palabra clave “aumentan” para su descripción.

En lo dicho anteriormente, se puede observar que los estudiantes logran cambiar sus palabras espontáneas por unas más concretas que, aunque aún no son parte del lenguaje matemático, si hacen énfasis en una característica común del patrón y la situación formulada, las cuales les permite dar solución a los planteamientos propuestos de una forma más acorde al nivel presentado.

Por otro lado, en esta fase también se tuvieron en cuenta las respuestas dadas por los estudiantes durante el desarrollo de los diferentes niveles de la “Granja Calasanz”, en las cuales se pudo observar algunas características propias de la presente fase. (ver tabla 9).

Tabla 9

Respuestas de los estudiantes en la fase contextual.

Fase contextual	
Nivel juego	Respuesta estudiante
1.Crecimiento de raíces	E7: “ <i>Que depende del número de semana salía una raíz. Ejemplo: en la semana 3 sale una tercera raíz, la semana 2 sale una segunda raíz.”</i>

2.La huerta	E9: “En la cama número 8 podemos encontrar: 7 lechugas 13 tomates Porque en las lechugas por cada cama nueva aumentada en una el número de lechugas, en los tomates por cada cama se incrementaba de a dos”
3.Árbol de manzanas	E8: “La imagen pertenece al día 5 porque cada día cae el número de manzanas correspondiente al día de la semana y en el día 4 había 10 manzanas y 5 que cayeron al otro día serían 15 manzanas”

Dentro de las respuestas mencionadas por los estudiantes para esta fase se puede observar que responden a las situaciones planteadas utilizando palabras claves como “salía una”, “sale una segunda”, “sale una tercera”, “aumentaba”, “incrementaba”, “cae” y “cayeron” para dar explicación a lo que sucede en cada uno de los patrones y con ello poder solucionar las preguntas realizadas en los niveles propuestos.

En síntesis, la respuestas que se categorizaron en esta fase utilizan un lenguaje más preciso y refinado al momento de dar cuenta de lo que se observa en los patrones, lo cual sugiere un reconocimiento del patrón de cambio, aspecto que también se evidencia parcialmente en las respuestas de los estudiantes, por ejemplo E8 menciona correctamente el total de manzanas que hay en el día 5, mientras que E9, aunque da una formulación correcta de cómo cambian las cantidades de lechugas y de tomates, no acierta al mencionar el total de vegetales que habrán en la cama 8.

8.2.3 Fase Simbólica

Para el análisis de esta fase, es importante comenzar mencionando que, en las respuestas dadas por los estudiantes en los diferentes niveles del proyecto, se pueden observar que se continúan apoyando en palabras clave para sustentar sus explicaciones, lo cual puede indicar que los estudiantes que cumplen en sus respuestas con algunas características propias de esta fase, se encuentran aún en tránsito de la fase contextual a la simbólica y por tanto, no se han apropiado

aún en su totalidad del uso de símbolos alfanuméricos para explicar o expresar lo que logran observar en los patrones propuestos.

En concordancia con lo anterior a continuación se presentan algunas respuestas dadas por los estudiantes y su respectivo análisis; para ello, en primer lugar se toma como referencia la respuesta dada por E10, a la propuesta de escribir un mensaje a un estudiante que no asistió a la granja, en donde explique la manera en cómo calculó las manzanas recolectadas el día 7, “*Hola Camilo, imagino que hay muchas formas de calcular las manzanas, la manera como yo las hallé fue siguiendo la secuencia de las manzanas que había, sumándolas por el día de la semana, por ejemplo: Día 1 tengo una manzana, si le **sumo** el día 2 de la semana me da 3 manzanas, a esas 3 manzanas le **sumo** el día 3 de la semana y me da **igual** a 6 manzanas y así sucesivamente*”.

En segundo lugar, en la figura 10 presentamos la respuesta dada por E11 donde se evidencia el posible tránsito entre la fase contextual a la fase simbólica (ver figura 10):

Camilo esta es la forma que desarrolle mi ejercicio.

1. identificar el numero de manzanas de cada dia
1-3-6-10-15-21-28

2. identificar si entre un dia y otro existe una secuencia numerica que permita mantener la forma del triangulo asi:

dia 1 = 1 + 0 = 1
 dia 2 = 1 + 2 = 3
 dia 3 = 3 + 3 = 6
 dia 4 = 6 + 4 = 10
 dia 5 = 10 + 5 = 15
 dia 6 = 15 + 6 = 21
 dia 7 = 21 + 7 = 28

Graficamente si tomamos el dia 5, por ejemplo partimos de tener 15 manzanas caidas. para calcular las manzanas que caen el dia siguiente se le suma 6 que es el numero que corresponde a la secuencia de ese dia




Figura 10 Respuesta de una estudiante en su tránsito por la fase contextual a la simbólica

En las respuestas dadas por E10 y E11 se puede observar cómo ambos estudiantes utilizan dentro de su discurso escrito lenguaje más elaborado a lo observado en las fases anteriores, en donde no solamente usan palabras claves, sino que también incluyen lenguaje matemático. Respecto a lo anterior se evidencia el uso de palabras como “*secuencia*”, “*le sumo el día*”, “*se le suma el número que corresponde a la secuencia de ese día*”, las cuales permiten deducir que dichos estudiantes han interiorizado el patrón de comportamiento de la secuencia y a través del uso de palabras clave han podido poner en comunicación con sus pares la posible regla de formación. Es importante resaltar, que dentro del Nivel III del proyecto, el cual apuntaba a la fase simbólica, se observa que las respuestas de 62 estudiantes se categorizan en la fase

contextual, 11 más en comparación con el nivel anterior lo que evidencia que, aunque no hubo una clara muestra de asuntos simbólicos, el paso por los niveles de la Granja Calasanz fue útil en la medida que se logró no sólo el uso del cuerpo, gestos y movimientos en el reconocimiento del patrón, sino que se avanzó. progresivamente hacia el uso de palabras clave y verbalizaciones para la identificación de la posible regla de formación.

Igualmente, se tuvieron en cuenta algunas respuestas de los estudiantes a lo largo de los diferentes niveles del proyecto, en las cuales se evidencia características propias de la fase en cuestión. (ver tabla 10).

Tabla 10

Respuestas de los estudiantes en la fase Simbólica.

Fase simbólica	
Nivel del juego	Respuesta del estudiante
1.Crecimiento de raíces	E12: <i>“Cada semana la raíz fue creciendo y le fue saliendo una nueva raíz. A partir de la primera semana 1: Sale la raíz principal semana 2: Sale una segunda raíz de la principal semana 3: sale una tercera raíz de la segunda semana 4: sale una raíz a partir de la tercera O sea que cada semana sale una nueva raíz. Se está aplicando la tabla de la 1 hasta el 4”</i>
2.La huerta	E13: <i>“Debemos poner 8 lechugas en la cama ocho, porque en cada cama siempre se aumenta una lechuga y el número de la cama siempre es el número de lechugas”. El número de tomates debe ser el número de la cama menos uno y a eso se le multiplica por 3, o sea que en la cama 8 debe de haber 21 tomates.”</i>
3.Árbol de manzanas	E14: <i>“El día de recolección es el día 5 yo encontré esa respuesta porque con esa respuesta se sigue el patrón de sumar más cada día. En el día 1 hay una manzana en el 2 hay 3 manzanas ósea se suman 2 en el 3 hay 6 manzanas ósea se suman 3 y en el cuatro hay 10 ósea se suman 4 y en el día cinco serian 15 manzanas ósea se suman 5.”</i>

Cómo puede observarse en los registros anteriores los estudiantes hacen uso de lenguaje matemático, al utilizar palabras como “*tabla del 1*” “*el número de la cama menos uno y a eso se le multiplica por 3*” “*el patrón de sumar más cada día*” y “*se suman 2 en el 3 hay 6 manzanas ósea se suman 3 y en el cuatro hay 10 ósea se suman 4 y en el día cinco serían 15 manzanas ósea se suman 5*” para dar respuesta a los planteamientos realizados en los diferentes niveles; asimismo, se evidencia que aunque los estudiantes indican las operaciones matemáticas que observan en cada uno de los niveles y planteamientos propuestos, lo hacen mediante palabras clave y no por medio de símbolos representativos de la matemática.

Debido a lo anterior, se puede decir que los estudiantes en las respuestas clasificadas dentro de la fase simbólica, muestran una mayor apropiación del lenguaje matemático, dentro de las que destacan las operaciones básicas, principalmente suma, resta y multiplicación, sin embargo, aún no alcanzan una apropiación completa de esta fase, puesto que como se mencionó anteriormente, no usan de manera exclusiva símbolos alfanuméricos sino que aún requieren del uso de palabras clave en sus respuestas.

En conclusión, la implementación del proyecto la granja Calasanz logró favorecer en los estudiantes el paso por las diferentes fases de la generalización propuestos por Radford (2010), dado que se logra evidenciar que los estudiantes cumplen con algunas de las características esperadas - según la fase - para dar solución al patrón de recurrencia propuesto. Igualmente, se observa que los estudiantes del grado tercero, de manera individual, no se encuentran en una única fase de la generalización, pues cómo se puede ver en el gráfico 1, para cada uno de los niveles propuestos a lo largo del proyecto, los estudiantes se ubican entre las fases de la generalización factual y contextual; así mismo, se logra visualizar que las respuestas de los estudiantes muestran un progreso entre estas dos fases a medida que avanzan de nivel,

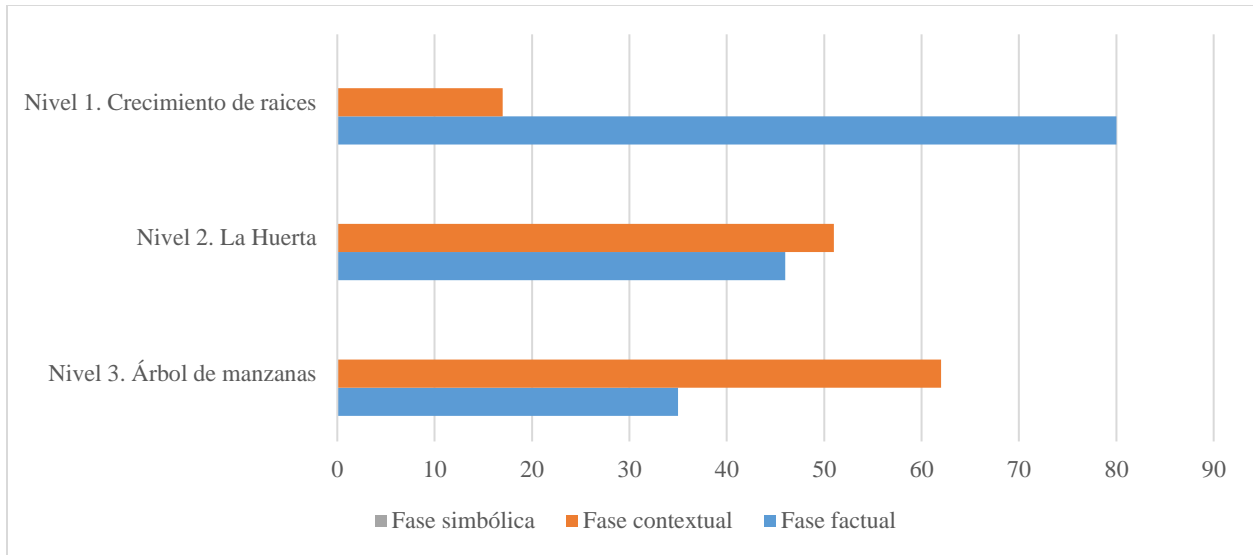
pues para la fase factual, en el nivel I, 80 estudiantes lograron demostrar en la resolución de las actividades características propias de las dos primeras fases (factual y simbólica) avanzando de manera progresiva hacia la verbalización y uso de palabras clave para el reconocimiento de la regularidad.

En este sentido, en el nivel 1 se puede observar que casi el 80% de estudiantes se ubicaron en la fase factual y casi el 20% en la fase contextual; asunto que tuvo un avance para el nivel II donde hubo una disminución en la presencia de la fase factual y mayores registros que apuntaban a la fase contextual. Y finalmente, se observa este avance en el nivel III donde hubo una mayor presencia de elementos propios de la fase contextual por encima de la fase factual que apenas alcanzó un poco menos del 35%.

Ahora bien, es importante mencionar que, dentro del grafico 1 no se hace alusión a la fase simbólica, debido a que los estudiantes se encuentran en tránsito hacia a esta desde la fase contextual, por lo cual sus respuestas se encuentran categorizadas en esta última, pues aunque utilizan términos matemáticos para indicar lo que observan en las situaciones propuestas e indicar los procedimientos que realizan para dar solución a los retos planteados, aún no muestran una apropiación de los símbolos matemáticos.

Gráfico 1.

Paso de los estudiantes por las fases de la generalización en cada uno de los niveles propuestos



Nota: Elaboración propia (2021)

Los análisis anteriores desde la perspectiva de las tres fases propuestas se consolidan con las percepciones y valoraciones de los estudiantes frente al paso por el proyecto. Por tanto, a continuación, presentamos las percepciones que se tuvieron por parte de los estudiantes en la implementación del proyecto, tanto en el componente matemático como en la aplicación de la gamificación.

8.3 Percepciones

Para el registro de las percepciones en un primer momento, se tendrá en cuenta el componente matemático que los estudiantes pudieron percibir durante el desarrollo de los diferentes niveles, y, en segundo lugar, se abarcarán las apreciaciones que tuvieron respecto al proyecto, es decir, a la gamificación realizada clase a clase con ellos.

Es importante destacar que, las percepciones de los estudiantes se obtuvieron mediante un conversatorio durante el último encuentro sincrónico mediado por la plataforma Teams, en donde a partir de unas preguntas orientadoras algunos estudiantes dieron cuenta de los elementos destacados y por mejorar de la granja Calasanz.

8.3.1 Percepciones Componente Matemático

Las percepciones del presente apartado tienen en cuenta las menciones que los estudiantes realizaron frente a los patrones numéricos y geométricos propuestos dentro de los niveles del proyecto.

Algunos de los comentarios que realizaron los estudiantes fueron *“no pensé que podría ver una secuencia en el crecimiento de una raíz”*, *“me gustó porque pude aprender matemáticas mientras me divertía”*, *“no sabía que a partir de una huerta se podría hallar una secuencia”*, *“las manzanas caían en forma de triángulo y eran patrones”* *“mi nivel favorito fue el de las raíces, me gusto ver cómo crecían cada semana y descubrir que crecían una cada semana, además conocí cual era la raíz principal y cuales las secundarias”* y *“me gusto poder escribirle una carta a Camilo, contándole cómo encontré las manzanas, me sentí bien explicándole a un compañero un tema de matemáticas”*.

Las anteriores percepciones de los estudiantes permiten inferir que la implementación del proyecto, al ser trabajado desde un contexto conocido como lo fue la huerta escolar y en consecuencia, algunos procesos naturales que ocurren en ella, permitieron que los estudiantes pudieran vivenciar las matemáticas desde una forma más cercana, la cual pueden experimentar desde su vida cotidiana, al tiempo que utilizar sus conocimientos para expresar lo que en ella sucede, o en palabras de Vergel (2015),

(...) el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar una fórmula en acción. Esto sugiere pensar en la manera como los estudiantes usan el lenguaje natural o, más específicamente, ciertos elementos de este lenguaje (deícticos espaciales y temporales, por ejemplo) que indudablemente quedan muy implícitos en el lenguaje simbólico, esto es, en una fórmula algebraica (con signos alfanuméricos). (pp. 205-06)

En definitiva, esto indica que los estudiantes además de tener conciencia de la regla de formación también han logrado generalizarla para los términos siguientes a los propuestos en las secuencias trabajadas en cada uno de los niveles, consiguiendo con ello, en algunos de los casos generar expresiones que les permite explicar de manera inequívoca sus respuestas.

8.3.2 Percepciones del Proyecto

En lo que respecta a las percepciones de los estudiantes frente a la implementación del proyecto se destacan las siguientes: *“me divertí durante los niveles del juego”, “me gustó mucho”, “ojalá hubieran más clases y actividades parecidas”, “me gustó mucho porque pude aprender y divertirme”, “me gustaría poder jugarlo en mis tiempos libres, ¿nos lo pueden compartir?”, “me gustaría poder mostrárselos a mis papás cuando lleguen”, “deberían realizar más clases con juegos”, “el juego me gustó mucho porque mientras aprendía matemáticas también aprendía algunas cosas sobre las plantas”, “me pareció muy chévere que los personajes del juego tuvieran nuestro uniforme, sentí que ellos eran compañeros de nuestro colegio”*

Asimismo, para la ejecución del proyecto, se tuvieron en cuenta algunas opiniones de expertos, quienes tuvieron acceso al proyecto antes de llevarlo a cabo con los estudiantes, estas fueron: *“Me parece muy interesante la propuesta desde el contenido y la presentación. Un ejercicio contextualizado que permite analizar el nivel de los niños en las diferentes etapas propuestas (factual, contextual y simbólica).”, “Que trabajo tan hermoso el que hicieron estos chicos.” e “Identifico una excelente propuesta metodológica, narrativa agradable y con un adecuado nivel para la comprensión de los niños. ¡Excelente!”.*

Esto indica que, como menciona Vicent (2006) “los beneficios del aprendizaje recaen directamente sobre el alumno ya que es el alumno el que efectúa el esfuerzo para resolver sus tareas asignadas” (p. 340), además “la resolución del proyecto permite al estudiante afianzar e

integrar conocimientos supuestamente ya adquiridos y la incorporación de nuevos por medio de su esfuerzo personal en pro del grupo” (Ibid.).

Asimismo, el ABPy se convierten en base para planificar situaciones de enseñanza y aprendizaje que favorecen el pensamiento matemático en los estudiantes, y de esta forma mejorar los procesos que esta área conlleva; igualmente es importante hacer énfasis en el desarrollo de una matemática informal, centrándose en el descubrimiento matemático como un aspecto esencial en la estructuración de un pensamiento científico en los estudiantes. (Morales, Luisa M, & García, Orlando E., 2013).

Por otra parte, se les preguntó a los estudiantes qué cambiarían o mejorarían del proyecto, teniendo en cuenta que como lo menciona Vicent (2006) “el proyecto se percibe como un proceso y no como un producto. El hecho de que existan “errores”, que el alumno los detecte y sepa solucionarlos es también uno de los atractivos de esta actividad” (p.341).

A partir de lo anterior, se pudo percibir que la mejora que realizarían se base en cómo solucionan los retos propuestos durante el proyecto, debido a que en un principio, se realizó de manera online en donde no todos pudieron acceder de manera autónoma y requerían el acompañamiento de un mayor para su ingreso y envío; y en un segundo momento, se hizo mediante la implementación de guías en Word, en donde también se presentaron algunos inconvenientes para su diligenciamiento; por lo que se tuvieron que adoptar medidas de último momento con la intención que todos los estudiantes del grado tercero pudieran participar.

Es por ello que, la oportunidad de mejorar consiste en buscar una manera en la cual los estudiantes que se encuentren realizando el juego puedan solucionar por sí mismos los retos propuestos, sin la necesidad que un adulto esté acompañando los procesos de los estudiantes, al tiempo que esta permita el ingreso de todos en la plataforma propuesta.

Por lo anterior, se puede inferir de manera general, que hay una apreciación positiva del proyecto realizado con los estudiantes del grado tercero del Colegio Calasanz - Medellín. Por una parte, se puede apreciar que el juego les permitió adquirir conocimientos matemáticos de manera diferente a la que están acostumbrados, generando con ello que las temáticas allí abordadas pueden ser interiorizadas de mejor forma, a su vez, que las respuestas dadas por los estudiantes en los diferentes niveles no estuvieran condicionadas a una nota, sino a la intención de colaborarles a los personajes del juego a superar los retos propuestos; por otro lado, la gamificación permitió que los estudiantes desearan continuar jugando - practicando - por fuera de las clases y así incluir a sus familiares en el mismo.

9. Consideraciones Finales.

Considerando los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, se puede mencionar que la mayoría de los estudiantes tuvieron un acercamiento asertivo en las diferentes preguntas propuestas para la misma, especialmente en aquellas que apuntaban al uso de gestos y reconocimiento de percepciones propias, las cuales correspondían a la fase factual; contrario a aquellos enunciados que contenían un lenguaje matemático explícito, obteniendo para estas preguntas una menor cantidad de asertividad.

Asimismo, para visualizar los procedimientos realizados por los estudiantes durante la prueba anteriormente mencionada, se llevaron a cabo diálogos sincrónicos en donde se pudieron evidenciar algunas dificultades en las diferentes fases de la generalización; para la fase factual, se pudo evidenciar la falta de argumentación del porqué de su elección, ambigüedades en sus respuestas, y timidez al momento de utilizar gestos con las manos para solucionar el patrón propuesto. Y para las fases contextual y simbólica se pudo evidenciar que la solución que

brindan al patrón es generada de manera superficial, debido a que no son conscientes de las palabras clave u operaciones que utilizan para explicar el procedimiento realizado.

En síntesis se puede concluir que, aunque los estudiantes tuvieron un buen desempeño en el instrumento de la prueba diagnóstica, al contrastar los resultados mediante la socialización de los mismos, quedó en evidencia que se les dificulta dar cuenta del proceso que realizaron para llegar a dichos resultados, por lo cual se puede inferir que no existía una comprensión completa de los mismos.

Por otra parte, respecto a la implementación del proyecto se pudo observar de manera general, que los niveles propuestos dentro de la gamificación en conjunto con los retos que se planteaban en cada uno de ellos, permitieron que los estudiantes transitaran por las fases de la generalización factual y contextual, al tiempo que evidenciaron un tránsito a la fase simbólica, debido a que no muestran una apropiación en el uso de símbolos alfanuméricos para explicar o expresar lo que logran observar en los patrones propuestos.

De manera puntual, en el Nivel I correspondiente a la fase factual se pudo percibir que la mayoría de los estudiantes tienen en sus respuestas características propias de esta fase, puesto que en sus explicaciones mencionan o representan de manera espontánea aquello que observan, para lo cual utilizan palabras propias o referentes a la lateralidad para comentar lo que ven. Para el nivel II correspondiente a la fase contextual, se logra observar una transformación de las palabras espontáneas a unas más concretas que se enfocan en la característica común del patrón y la situación formulada que, aunque aún no son parte del lenguaje matemático les permite dar soluciones más acordes al nivel presentado. Por último, en el Nivel III correspondiente a la fase simbólica, no hubo una clara muestra de asuntos simbólicos, por tanto, la mayoría de las respuestas fueron categorizadas en la fase contextual, en las cuales, en comparación a las del

nivel anterior se observó un avance y delimitación en el tipo de palabras clave y verbalizaciones que usaban los estudiantes para dar cuenta de la posible identificación de la regla de formación.

Por otra parte, las respuestas brindadas por los estudiantes en los diferentes niveles, no sólo se categorizaron en la fase correspondiente a dicho nivel, sino también en las demás fases de la generalización, en donde se puede observar que en dichas respuestas reflejan sus percepciones, mediante el uso de expresiones o explicaciones libres al hacer uso de palabras referentes a la lateralidad en la fase factual, un lenguaje más preciso y refinado al momento de dar cuenta de lo que se observa en los patrones, lo cual sugiere un reconocimiento del patrón de cambio, aspecto que también se evidencia parcialmente en las respuestas de los estudiantes en la fase contextual, al igual que en la fase simbólica, en donde los estudiantes muestran una mayor apropiación del lenguaje matemático, dentro de las que destacan las operaciones básicas, sin embargo, aún no usan de manera exclusiva símbolos alfanuméricos sino que requieren del uso de palabras clave en sus respuestas.

En general, se puede evidenciar que la implementación del proyecto logró favorecer en los estudiantes el paso por las diferentes fases de la generalización propuestos por Radford (2010), dado que se observa una evolución en las respuestas dadas y en la comprensión de los patrones por parte de los estudiantes puesto que cumplen con algunas de las características esperadas - según la fase - para dar solución al patrón de recurrencia propuesto en comparación a las obtenidas en la prueba diagnóstica,.

De manera particular, se pudo evidenciar que los estudiantes se sintieron motivados frente al mismo, debido a la manera en cómo este se encontraba vinculado a la vida cotidiana y a espacios que previamente ya habían habitado en la presencialidad; asimismo, se sintieron a gusto en la solución de los diferentes retos que allí se proponían puesto que el contenido de aprendizaje

no fue propuesto de la manera en cómo acostumbran a abordar los temas en el área de matemáticas, generando con ello un mayor interés en avanzar dentro de los niveles del juego.

Por otra parte, la implementación de la estrategia Aprendizaje Basado en Proyectos nos permitió vincular a los estudiantes en la solución de patrones de recurrencia numéricos y geométricos al incluir en el mismo un espacio que era significativo para ellos, al tiempo que involucrar personajes con los cuales se podían identificar. Asimismo, se destaca la disposición de los estudiantes para adaptarse a los espacios y plataformas digitales durante la virtualidad, en donde pudimos desarrollar “La granja Calasanz” y de esta manera compartir experiencias y potenciar habilidades en ellos.

A demás, se puede mencionar que se alcanzaron los objetivos propuestos para esta investigación, abordándose en el apartado de resultados y análisis la manera en cómo los estudiantes se aproximan a patrones de repetición y recurrencia que presentaban características específicas de las fases de la generalización, al tiempo que, la manera en cómo los estudiantes dieron solución a los diferentes niveles propuestos dentro del proyecto ejecutado con ellos.

Es importante mencionar que la presente investigación no pretendía ubicar a los estudiantes en una fase específica de la generalización, sino por el contrario propone una alternativa para favorecer en ellos los procesos que caracterizan cada una de las fases y de esta manera logren un tránsito armonioso entre las mismas, aspecto que se puede observar en los análisis realizados de las respuestas obtenidas por parte de ellos. Además, la ejecución de este proyecto permitió evidenciar la importancia que tiene analizar las preguntas formuladas a los estudiantes, el uso de material diferente y diverso con la finalidad de favorecer su proceso de aprendizaje.

Por último, se recomienda la estrategia Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) debido a que favorece en los estudiantes sus procesos de aprendizaje al incluir e integrar actividades significativas en las diferentes áreas del conocimiento, en este caso matemáticas en el abordaje de patrones numéricos y geométricos y ciencias naturales con el contexto de la huerta escolar. Así mismo, queda pendiente la pregunta como qué situaciones o niveles se pueden implementar en el proyecto La Granja Calasanz para favorecer el tránsito exitoso a la fase simbólica en los procesos de generalización.

10. Referencias Bibliográficas

- Aguirre, A. (1997). Etnografía. En A. Aguirre (Ed.), Etnografía (Metodología cualitativa de la investigación sociocultural) (pp. 3-20). México: Alfaomega Marcombo.
- Álzate, E., Montes, J. y Escobar, R. (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática. *Scientia et technica*, 18(3), 542-547.
- Buck Institute for Education. (2015). Project Based Learning. Recuperado de <http://www.bie.org/>
- Butto, C., y Rojano, M. (2009). Pensamiento algebraico temprano. 11
- Butto, C., y Rojano, M. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22(3), 55-86. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000300004&lng=es&tlng=es.
- Callejo, M., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 64-88.
- Colegio Calasanz Medellín. (2019). *Proyecto Educativo Institucional*. 1-170
- Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (2005). *The sage handbook of qualitative research* (3rd Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Eraso-Checa, F., Narváez-Solarte, J., Lagos, C., Escobar, E., y Erazo, O. (2014). Aprendizaje significativo por investigación: propuesta alternativa-Significant learning research: alternative proposal. *Revista científica*, 2(19), 158-167.
- García, F., y De Alba, N. (2008). *¿Puede la escuela del siglo XXI educar a los ciudadanos y ciudadanas del siglo XXI? Presentado en X Coloquio Internacional de Geocrítica. Diez*

- años de cambios en el mundo, en la geografía y en las ciencias sociales*, 1999-2008, 26-30. Barcelona. Recuperado de <http://www.ub.edu/geocrit/-xcol/394.htm>
- Garrigós, J., y Valero-García, M. (2012). Hablando sobre aprendizaje basado en proyectos con Júlia. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 10(3), 125-151.
- Giraldo., C (2019). *El aprendizaje basado en proyectos (abpy) y su aporte al aprendizaje significativo de la electricidad desde una mirada crítica* (Doctoral dissertation, Universidad de Burgos).
- Grupo Azarquiel. (1993). Capítulo 2. Generalización. En *Ideas y Actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Godino, J., y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Godino J., Rivas M., Castro W., Konic P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. Actas de las VI Jornadas de Educación
- Godino J., (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. España. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42b), 483-512. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005>
- Matemática Región de Murcia. Centro de Profesores y Recursos. Murcia. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

- Heras, M (2017). Enseñar matemáticas desde situaciones cotidianas: Propuesta para 4to de Primaria. Universidad Internacional de la Rioja. Facultad de Educación. 1-50 España
Recuperado
<https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/5719/HERAS%20CASTRO%2C%20MIREIA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6th ed.). México: McGraw-Hill Education. Recuperado de
<http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>
- Hernández, K., y Tapiero, K. (2015). Desarrollo del razonamiento algebraico vía la generalización de patrones gráficos-icónicos en estudiantes de la educación básica primaria. *RECME*, 1(1), 83-87.
- Hoyos, C. (2000). *Un modelo para investigación documental: Guía teórico-práctica sobre construcción de estados del arte con importantes reflexiones sobre la investigación*. Señal Editorial.
- Katz, L., y Chard, S. (1992). *The Project Approach* (2.^a ed.). Merrill Publishing Co. Recuperado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED340518.pdf>
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kioupi, V. y Arianoutsou, M. (2016). Greek Students Research the Effects of Fire on the Soil System through Project-based Learning. *Journal of Biological Education* 50(3), 1-16.
DOI: 10.1080/00219266.2015.1117509

- Larmer J., Mergendoller J. y Boss (2015). “Why We Changed Our Model of the “8 Essential Elements of PBL”. Buck Institute for Education. Recuperado de https://www.mathizaverb.com/uploads/Why_We_Changed_8EEs_article.pdf
- Markham, T., Larmer, J., Ravitz, J., y Hogg G, S. (2003). Manual para el aprendizaje basado en proyectos: Una guía para el aprendizaje basada en proyectos orientados por estándares. San José, Costa Rica: Fundación Omar Dengo.
- Matos, R., Arias, F., y Caraballo, A. (2015). Aprendizaje basado en proyectos: estrategia pedagógica en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Méthodos*, 13(13), 26-38. Recuperado de <http://openjournalsys.colmayorbolivar.edu.co/index.php/Methodos/article/view/12>
- Medina, M., Tapia, M. (2017). El aprendizaje basado en proyectos: una oportunidad para trabajar interdisciplinariamente. *Revista de la Facultad de Cultura Física de la Universidad de Granma*, 14 (46), 1-11.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos De Competencias en Matemáticas. Bogotá. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Morales, Luisa M, & García, Orlando E. (2013). La afectividad de la inteligencia. *Formación universitaria*, 6(5), 3-12. Recuperado de http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50062013000500002&lng=es.10.4067/S0718-50062013000500002
- Morales, L. y García, O. (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de undécimo grado. *Números*, 90, 21-30

- Muñoz, J., Arnal, A., Beltrán, P., Callejo, L. y Carillo, J. (Eds.), (2017). *Investigación en educación matemática XXI*. Zaragoza: SEIEM. Recuperado de file:///C:/Users/querq/AppData/Local/Temp/Dialnet-InvestigacionEnEducacionMatematicaXXI-705555-1.pdf
- Paladinez, D. (2018). *Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en Problemas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Radford, L. (2008). Iconicidad y contracción: una investigación semiótica de formas de generalizaciones algebraicas de patrones en diferentes contextos. *ZDM*, 40 (1), 83-96.
- Radford, L. (2009). ¿Por qué importan los gestos? Cognición sensual y palpabilidad de significados matemáticos. *Estudios educativos en matemáticas*, 70 (2), 111-126.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62 Recuperado de <https://digibug.ugr.es/handle/10481/3505>.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.
- Rangel, L. (2012). *Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo* (Tesis maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Pág. 1-104
- Regalado-Méndez A., Delgado-Vidal F.K., Martínez-López R.E. y Peralta-Reyes E. Balanceo de Ecuaciones Químicas Integrando las Asignaturas de Química General, Álgebra Lineal y Computación: Un Enfoque de Aprendizaje Activo. *Formación Universitaria*, 7(2), 29-40 (2014).

- Rekalde, I., y García, J. (2015). El aprendizaje basado en proyectos: un constante desafío. *Innovación educativa*, (25). DOI <https://doi.org/10.15304/ie.25.2304>
- Stake, R.E. (1998). Investigación con estudio de casos. Cuarta edición. Madrid, Morata. 157.
- Simó, Á., Ferreira, S., y Ortuño, P. (2016). Workshops interdisciplinares: implementación de metodologías de aprendizaje basado en proyectos y cooperativo. *Opción*, 32(10),752-772. [fecha de Consulta 21 de Enero de 2021]. ISSN: 1012-1587. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=310/31048901042>
- Thomas, J. (2000). *A REVIEW OF RESEARCH ON PROJECT-BASED LEARNING*. Recuperado de https://my.pblworks.org/resource/document/a_review_of_research_on_project_based_learning
- Vasco, C. E. (2007). Análisis semiótico del álgebra elemental. Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas, 107-136.
- Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). *Revista científica*, edición especial. DOI: 10.14483/23448350.6546
- Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA, 9 (3), 193-215. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5379309.pdf>
- Vergel, R. (2015b). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Vergel, R. (2015c). El caso del pensamiento algebraico factual. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 9-17.

- Vergel, R. (2014d). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Bogotá Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4054/1/Vergel2014Formas.pdf>
- Vicent Estruch y Josep Silva: Aprendizaje basado en proyectos en la carrera de informática, JENUI 2006, pp. 339-346, Deusto, julio de 2006. Recuperado de http://bioinfo.uib.es/~joemi/aenui/procJenui/Jen2006/prDef0089_70efdf2ec9.pdf
- Zapatera-Llinares, A. (2015). *La competencia “mirar con sentido” de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Alicante, Alicante.
- Zapatera-Llinares, A. (2018a). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21 (1), 87-104. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114>
- Zapatera, A. (2018b). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 97, 51-67. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/97/Articulos_04.pdf
- Zichermann, G. y Cunningham, C. (2011). *Gamification by Design: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps*. Cambridge, MA: O'Reilly Media.