



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**MANERAS PARA DETERMINAR MODELOS
MATEMÁTICOS EN LA TRANSFORMACIÓN DE UNA
SUPERFICIE MEDIANTE UN CONTEXTO DE RESIDUOS
PLÁSTICOS CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA**

Autor

Evelio Marcial Plaza Montes

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Matemática

Apartadó Antioquia, Colombia

Año 2021

**MANERAS PARA DETERMINAR MODELOS MATEMÁTICOS EN LA
TRANSFORMACIÓN DE UNA SUPERFICIE MEDIANTE UN CONTEXTO DE
RESIDUOS PLÁSTICOS CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA**

Evelio Marcial Plaza Montes

Trabajo de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Educación

Asesores (a):

Mg. Sandra Milena Londoño Orrego

Mg. José Luis Bossio Vélez

Línea de Investigación:

Investigación en Educación Matemática

Grupo de Investigación:

EDUMATH

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada

Apartadó-Antioquia, Colombia

2021

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos durante este proceso de investigación a:

Dios, por darme sabiduría y fortaleza en todo momento.

Mi familia, por su paciencia, apoyo y comprensión durante todo este proceso.

A mis asesores, Sandra Milena Londoño Orrego, por su paciencia y comprensión al asumir este reto conmigo, en las distintas pruebas durante el desarrollo de este estudio; a José Luis Bossio Vélez, quien con su fluidez y experiencia me permitió direccionarme por un camino amplio en el campo de la investigación.

A mis profesores de seminario de la línea de Matemáticas, Carlos Mario Jaramillo López, Pedro Vicente Esteban Duarte, René Alejandro Londoño Cano y Edison Sucerquia, quienes con su sabiduría y experiencia me permitieron ver la Educación Matemática con otra mirada.

A mi Institución Educativa San Pedro de Urabá, por brindarme el espacio y el apoyo en el desarrollo de la investigación.

A mis participantes, por su disposición, interés y contribución en el proceso de investigación para mi formación personal y profesional.

RESUMEN

La presente investigación se realizó con estudiantes de educación media, profundización matemática y ciencias naturales en una institución educativa del municipio de San Pedro de Urabá, Antioquia. Se implementó la modelación matemática como una alternativa de enseñanza de las matemáticas para modelar el proceso mediante la articulación de conocimientos aprendidos en clase con situaciones del contexto escolar. En este sentido, la investigación tuvo como objetivo abordar una situación de interés para los estudiantes, al determinar modelos matemáticos mediante la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos. Esta situación permitió construir al interior de la institución educativa una placa huella con material reciclable.

El interés de los estudiantes por responder a cada una de las preguntas relacionadas con la situación placa-huella con residuos plásticos, sus opiniones, procesos y reflexiones, individuales y grupales, permitieron liderar un proceso de modelación que posibilitó la emergencia y análisis de modelos matemáticos. La investigación refiere la modelación, el modelo y el contexto en el marco de los aportes de Blum y Borromeo-Ferri (2009). Desde esta perspectiva, el docente implementa acciones de modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en relación con situaciones de la vida cotidiana.

La metodología se centró en los planteamientos de Stake (1999), referidos al estudio de caso, observación, entrevista y documentos escritos, como instrumentos para la recolección y análisis de información, provenientes de las diferentes fuentes seleccionada, organizada y analizada de manera que se identifique el hilo conductor, las cuales posibilitó la construcción de argumentos para responder a la pregunta de investigación realizada por el docente investigador y un equipo de 16 participantes de Educación Media, en donde se describen los diferentes momentos y subprocesos guiados a partir de preguntas realizadas en el apartado análisis de resultados, a través de acciones consecuentes que aportaron información a la investigación.

Finalmente, se exponen los alcances del objetivo propuesto en esta investigación, diseñado a través de subprocesos asociados a seis momentos enmarcados en el ciclo de modelación de Blum y Borromeo-Ferri (2009), descritos a continuación: *situación en la*

exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos, representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos, idealización y simplificación de la información en la transformación de la superficie, modelos matemáticos en la transformación de una superficie, resultados matemáticos en contexto de la placa huella y validación de resultados obtenidos en un contexto particular. Los subprocesos validaron los modelos obtenidos por medio de la construcción experimental en el contexto de residuos plásticos.

Palabras clave: modelación matemática, modelo matemático, transformación de superficies, residuos plásticos.

ABSTRACT

This research was conducted with secondary-school students who study in-depth mathematics and natural sciences at an educational institution in San Pedro de Urabá, Antioquia-Colombia. Mathematical modelling was used as an alternative for teaching mathematics to model a process through the articulation of knowledge learned in the school context. In this sense, the research aimed to determine mathematical models developed by students in the transformation of plastic waste. This situation allowed the construction of a concrete strip road with recycled material, inside the educational institution.

Student interest in answering each question related to the above situation, also their individual and group ideas, processes and reflections allowed the teacher to lead a modelling process that enabled the emergence and analysis of mathematical models. This research refers modelling, model, and context in accordance with the approach by Blum and Borromeo-Ferri (2009). Teacher implements modelling actions in teaching and learning mathematics related to everyday situations of the students.

Methodology was based on the approach by Stake (1999) related to instruments for collecting and analyzing information from different sources. It allowed the construction of arguments to answer the research question asked by the research teacher and a team of 16 participants from secondary school. Moments and sub-processes are described and guided from questions developed in the results analysis section, through different actions.

Finally, the scope of the objective proposed in this research is presented. It was designed through six moments and corresponding subprocesses framed in the modelling cycle by Blum and Borromeo-Ferri (2009). The moments are mentioned below: situation in the exploration and preparation of a surface in context of plastic waste, representation in a plane of a concrete strip road with plastic waste, idealization and simplification of information in the transformation of a surface, mathematical models in the transformation of a surface, mathematical results in context of the concrete strip road and results validation. Subprocesses validated the models obtained by means of the experimental construction in the context of plastic waste.

Keywords: mathematical modelling, mathematical model, surface transformation, plastic waste.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. Antecedentes desde la revisión de literatura.....	3
1.1.1. Antecedentes relacionados con algunos referentes del Marco de la Política Educativa Nacional.....	4
1.1.2. Problemática del manejo de residuos en la Institución Educativa San Pedro de Urabá. 6	
1.1.3. Estudios relacionados con la modelación matemática como estrategia de enseñanza. 9	
1.1.4. Estudios relacionados con superficies.	11
1.1.5. Estudios relacionados con modelos matemáticos en diversos contextos. ..	14
1.2. Formulación del problema.....	18
1.2.1. Tema.	19
1.2.2. Objeto de Estudio.	20
1.2.3. Pregunta de Investigación.....	20
1.2.4. Objetivo.	20
2. REFERENTES TEÓRICOS.....	21
2.1. Ciclo de modelación en un proceso de modelación matemática	21
2.2. Consideraciones sobre modelo matemático desde una situación conocida por los estudiantes	24
2.3. Aproximación a los contextos como mediadores del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de modelación	26
2.4. Elementos sobre noción de superficie y variables en el currículo escolar de Colombia	29
3. METODOLOGÍA.....	33
3.1. Paradigma	33
3.2. Método.....	34
3.3. Escenario y participantes de la investigación	35
3.4. Fuentes para la generación de datos cualitativos	37
3.4.1. Observación.	37
3.4.2. Entrevista semiestructurada.	38
3.4.3. Documentos escritos.....	38

3.5.	Trabajo de campo.	39
3.6.	Análisis de la información.....	47
3.7.	Cronograma	47
3.8.	Validez de la investigación.....	48
3.9	Criterios éticos.....	49
4.	Análisis de resultados	50
4.1.	Situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos.	51
4.1.1.	Reconocimiento del garaje de bicicletas (Institución Educativa San Pedro de Urabá). 52	
4.1.2.	Preparación del terreno para transformarlo de una superficie irregular a una superficie plana.....	55
4.1.3.	Proceso de recolección de residuos plásticos para el diseño y construcción de bloques. 60	
4.1.4.	Ubicación de los bloques diseñados con residuos plásticos en la construcción de la placa huella.	78
4.1.5.	Muestra de un producto final en la construcción de placa huella con material reciclable. 82	
4.2.	Representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos.	87
4.3.	Idealización y simplificación de la información en la transformación de una superficie.	90
4.3.1.	Formas geométricas descritas en cada superficie acordonada.....	90
4.3.2.	Cantidad de Bloques de botellas en superficies cuadradas.....	91
4.3.3.	Representación del modelo real.....	92
4.4.	Modelos matemáticos en la transformación de una superficie.	93
4.4.1.	Elementos o materiales cuantificables en la placa huella.	94
4.4.2.	Identificación de regularidades y símbolos.	95
4.5.	Momento donde los participantes trabajan con resultados matemáticos en contexto	97
4.5.1.	Representación gráfica de regularidades.....	97
4.5.2.	Relación matemática que les permita calcular la cantidad de bloques que se requiere para cubrir una determinada superficie.	100
4.5.3.	Comparación de relaciones matemáticas.....	102

4.6.	Validación de resultados obtenidos en un contexto particular	103
5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	107
5.5.	Alcance del objetivo	107
5.6.	Etapas en el proceso de modelación en la investigación	108
5.6.2.	Modelo cartesiano del número de bloques vs. área de superficies acordonadas. 109	
5.6.3.	Modelo porcentual de piedra y hormigón de un bloque de botella reciclada. 114	
5.6.4.	Modelo en espiral.	118
5.7.	Aportes de la investigación para los docentes sobre la implementación de la modelación matemática en el aula de clase	118
5.8.	Futuras líneas de investigación.....	119
5.9.	Divulgaciones	120
6.	REFERENCIAS	121
7.	ANEXOS	125
	Anexo 1: Consentimiento de participación.....	125
	Anexo 2: GUÍA N°1. Explorando el espacio de un contexto	127
	Anexo 3: GUÍA N° 2. Preparando un contexto particular.....	128
	Anexo 4: GUIA N°3. Representando el plano de la placa huella.....	131
	Anexo 5: GUIA N° 4. Sistematizando la información	132
	Anexo 6: GUIA N° 5. Generando maneras para determinar modelos matemáticos	134
	Anexo 7: GUIA N° 6. Trabajando con resultados matemáticos.....	135
	Anexo 8: GUIA N° 7. Validando resultados reales.....	136
	Anexo 9: PÓSTER.....	138
	Anexo 10: Entrevista semiestructurada. Momento uno.....	139
	Anexo 11: Tabla para analizar los momentos en el ciclo	150

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Descripción del trabajo de campo.....	39
Tabla 2: Descripción de la actividad.....	48
Tabla 3: Entrevista semiestructurada. Elección del lugar (Audio marzo 2019).....	53
Tabla 4: Entrevista semiestructurada. Interés de construir una placa huella (Audio, abril 2019).	56
Tabla 5: Entrevista semiestructurada. Razón por la cual decidieron trabajar sin ayuda externa (Audio, abril 2019).....	59
Tabla 6: Entrevista semiestructurada. El reciclaje en la institución (Audio, abril 2019).....	61
Tabla 7: Entrevista semiestructurada. El trabajo con botellas de tres o 2,5 litros (Audio, abril 2019).....	65
Tabla 8: Entrevista semiestructurada. Pregunta N°6 (Audio, abril 2019).....	67
Tabla 9: Entrevista semiestructurada. Piedra a los fondos de botellas (Audio, abril 2019).....	69
Tabla 10: Entrevista semiestructurada. Hormigón en el resto de fondos de botellas (Audio, abril 2019).	71
Tabla 11: Promedios de volumen de piedra y hormigón.....	73
Tabla 12: Pintura de fondos de botellas plásticas como cantidad medible (Audio, abril 2019).	76
Tabla 13: Medidas en la placa huella (Audio, abril 2019).....	79
Tabla 14: Entrevista semiestructurada, asociado a la ventaja o desventaja de la placa huella de botellas plásticas (Audio, mayo 2019).	83
Tabla 15: Representaciones geométricas en la placa huella (mayo 2019).	85

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ciclo de modelación de Hans Freudenthal.	16
Figura 2: Ciclo de modelación retomado por Blum-Borromeo (2009).....	22
Figura 3: Modelo de Torres (2015).	26
Figura 4: Manera como está formulado cada Estándar. MEN (2006).....	27
Figura 5: Ubicación de la Institución Educativa San Pedro de Urabá. Recuperado de Googlemaps.....	36
Figura 6: Fotografías del garaje de bicicletas y motocicletas (marzo 2019).	52
Figura 7: Descripción de los participantes sobre características de la superficie a transformar (marzo 2019).	53
Figura 8: Momentos de transformación del espacio físico (abril 2019).....	56
Figura 9: Momentos de nivelación del espacio físico (abril 2019).	60
Figura 10: Momentos de recolección de residuos plásticos (abril 2019).	61
Figura 11: Uso de botellas y picadillo de residuos plásticos (abril 2019).....	64
Figura 12: (a) Superficie del suelo aplanado, (b) Picadillo de plástico ubicado homogéneamente y (c) Bloques con botellas plásticas recicladas.	65
Figura 13: Representación gráfica, la imagen de un bloque de fondo de botellas por el equipo B (abril 2019).	69
Figura 14: Representación gráfica, la imagen de un bloque de fondo de botellas por los participantes (abril 2019).....	69
Figura 15: Fotografía de cinco piedras, un recipiente de fondo de botella de gaseosa de 3 L y un matraz del equipo C (abril 2019).....	72
Figura 16: Modelos matemáticos obtenidos por cada equipo de trabajo (abril 2019).	73
Figura 17: Fotografía de bloques reales hechos de fondos de envases de gaseosa (abril 2019).	74
Figura 18: Gráfica de los promedios de piedra y hormigón en la construcción de un bloque con este material (junio 2020).....	75
Figura 19: Recorrido del Ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) en el modelo del bloque de botellas plástica.	76
Figura 20: Fotografía de la superficie acordonada (abril 2019).	799
Figura 21: Ubicación de bloques de botellas plásticas (mayo 2019).	82

Figura 22: Fotografía de la placa huella de botellas plásticas (mayo 2019).	83
Figura 23: Fotografía de la placa huella, producto terminado (mayo 2019).	85
Figura 24: Fotografía del modelo de la silueta de un espiral descrito por dos participantes (junio 2020).	86
Figura 25: Ruta de dos Subciclo trabajado por los participantes en el primero Momento. Ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009)	88
Figura 26: Representación mediante un dibujo o imagen la forma y características de la placa huella (mayo 2019).	89
Figura 27: Representación de descripción y forma geométrica de la superficie acordonada Equipo C (mayo 2019).	91
Figura 28: Tabla de doble entrada representada por el Equipo D (mayo 2019).	91
Figura 29: Tabla de doble entrada representada por el Equipo C (mayo 2019).	92
Figura 30: Regularidades observadas por el Equipo D (mayo 2019).	93
Figura 31: Proporcionalidad directa descrito por el Equipo D (mayo 2019).	93
Figura 32: Elementos o materiales cuantificables en la placa huella descritos por el Equipo C (mayo 2019).	94
Figura 33: Regularidades asociada al número de bloques diseñado con fondos de botellas recicladas y el área de las superficies acordonadas escrito por el Equipo C (mayo 2019).	95
Figura 34: Símbolo de las regularidades descritos por el Equipo C (mayo 2019).	95
Figura 35: Símbolo de las regularidades descritos por el Equipo D (mayo 2019).	95
Figura 1: Modelo matemático en la tabla de doble entrada de los equipos C y D (junio 2019).	96
Figura 37: Representación de una tabla de doble entrada descrita por el Equipo D (junio 2019).	98
Figura 38: Representación cartesiana descritas por el Equipo D (junio 2019)	98
Figura 39: Representación de una tabla de doble entrada descrita por el Equipo C (junio 2019).	99
Figura 40: Representación cartesiana descritas por el Equipo C (junio 2019).	99
Figura 41: Proporcionalidad directa descritos por el Equipo D (agosto 2019).	100
Figura 42: Análisis geométrico descritos por el Equipo C (agosto 2019).	101
Figura 43: Regla de tres simple por el Equipo A (agosto 2019).	102

Figura 44: Descripción del Equipo C (agosto 2019).....	102
Figura 45: Relaciones matemáticas halladas por los Equipos (agosto 2019).....	103
Figura 46: Cantidad de bloques de botellas requerida en un m ² . Descripción del Equipo A (agosto 2019).....	104
Figura 47: Rutas del ciclo retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) desarrolladas por los equipos C y D.....	106
Figura 48: Proceso de modelación de mayor envergadura que surge en la investigación.	109
Figura 49: Proceso del modelo porcentual de piedra y hormigón de un bloque de botella reciclada.....	115
Figura 50: Gráfica de los promedios de piedra y hormigón en la construcción de un bloque con este material (junio 2020).....	116
Figura 51: El modelo de la silueta espiral de un sector acordonado.....	1188

INTRODUCCIÓN

La modelación matemática ha adquirido importancia en los sistemas educativos a nivel internacional (Huinchahue, Borromeo-Ferri y Mena-Lorca, 2018). En Colombia, se conoce su inclusión en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y se reafirma en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Este proceso ha comenzado a permear las aulas en los diversos niveles e instituciones escolares (Villa-Ochoa, 2007). En este sentido, esta investigación analiza modelos matemáticos a partir de un contexto particular conocido por los estudiantes. En este caso, se consideró el contexto de residuos plásticos como un punto de partida para modelar y posibilitar en los estudiantes el reconocimiento o aproximación a conceptos o nociones relacionadas con la matemática escolar.

Esta investigación de enfoque cualitativo se desarrolló mediante el método estudio de casos. En ella se plantea como objetivo Determinar modelos matemáticos mediante la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media y, al mismo tiempo, evidenciar las matemáticas subyacentes en las distintas situaciones generadas en ese contexto.

En esta investigación se consideran cinco apartados. En primer lugar, se describe de forma general el problema con base en el interés de los participantes por usar los residuos plásticos al interior del establecimiento educativo. De acuerdo con lo anterior, el problema de investigación se describe mediante la siguiente pregunta: *¿De qué manera se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media?*

En segundo lugar, se presentan consideraciones teóricas relacionadas con la modelación matemática como proceso de enseñanza, a partir de la perspectiva de Blum y Borromeo-Ferri (2009), y consideraciones conceptuales que conforman el proceso de esta investigación. Entre estas, algunas concepciones sobre ciclo de modelación en un proceso de modelación matemática, modelo matemático desde una situación conocida por los estudiantes, los contextos como mediadores del aprendizaje de las matemáticas y nociones de superficie y variables en el marco del currículo escolar en Colombia.

En tercer lugar, se presenta la metodología con los siguientes componentes: la descripción del enfoque cualitativo, el método de observación directa de los participantes desde la mirada constructivista, la descripción del contexto cotidiano de los estudiantes y, por último, las técnicas de recolección de los datos en función del análisis de la información. Estos componentes se orientan hacia un proceso de modelación a través de una situación en contexto.

En cuarto lugar, se describe el análisis con base en los datos obtenidos a partir de documentos, entrevistas y observaciones iniciales de un grupo de 16 participantes. De esta forma, se evidencia la construcción de modelos matemáticos a partir de un contexto particular, a través del uso de material reciclado, asociado a seis momentos y subprocesos, las cuales hacen referencia a: *situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos, representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos, idealización y simplificación de la información en la transformación de la superficie, modelos matemáticos en la transformación de una superficie, resultados matemáticos en contexto de la placa huella y la validación de resultados obtenidos en un contexto particular.*

Por último, se exponen las conclusiones centradas en el alcance del objetivo con base en el proceso de modelación que se llevó a cabo en el trabajo de campo, los modelos matemáticos que se determinaron en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media, las prácticas y actividades realizadas por los participantes asociadas a los subprocesos de modelación bajo los planteamiento de Blum y Borromeo-Ferri (2009), con implementación de estrategias para que los estudiantes relacionen el contexto escolar con las matemáticas enseñadas en la escuela.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, en primer lugar, se presentan los antecedentes relacionados con la revisión de literatura en el marco de la Política Educativa Nacional, con foco en los modelos matemáticos asociados al contexto de educación media, a partir de los referentes del Ministerio de Educación Nacional en Colombia (MEN). A partir estos antecedentes, se presenta la problemática del manejo de residuos no biodegradables experimentada por los estudiantes y la comunidad de la Institución Educativa San Pedro de Urabá. Además, se revisa la literatura basada en las experiencias y estudios de la modelación matemática en algunos contextos escolares orientados al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y estudios relacionados con superficies y modelos matemáticos en diversos contextos. En segundo lugar, se formula el problema de investigación a partir de las reflexiones sobre los procesos formativos y diferentes prácticas dentro del aula escolar y fuera de ella.

1.1. Antecedentes desde la revisión de literatura

La revisión de literatura implicó una búsqueda teórica, realizada bajo la experiencia del docente investigador con estudiantes de educación media y con miras a implementar un proceso de modelación matemática en un contexto particular al interior de su institución relacionado con una necesidad local de tipo ambiental. De este modo, se analizan estrategias didácticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Bajo este contexto, algunos interrogantes que direccionaron la revisión de la literatura fueron: ¿Qué se entiende por transformación de una superficie? ¿Cómo se aborda el reciclaje en el contexto escolar a partir de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? La información obtenida en la revisión de literatura posibilitó responder estos interrogantes y otras preguntas que pudieron producir un hilo conductor articulado a un proceso de modelación matemática, y las maneras para determinar los modelos matemáticos en la transformación de una superficie, a través de un contexto particular.

La revisión de literatura se asoció a conceptos teóricos e investigaciones relacionadas con esta investigación y se realizó en bases de datos, tales como: Dialnet, Redalyc, Scielo, entre otras. También se consideró el uso de buscadores como Google y Google Académico.

Otras ayudas que se consideraron fueron las memorias de algunos eventos académicos como las CIAEM (2019), EDUMATH (2017), ECME (2013), y las que se hallaron en repositorios de universidades tales como: Universidad Nacional, Universidad de Antioquia, Universidad del Valle, entre otras. En esta revisión de literatura se encontraron algunas investigaciones en tesis, artículos, talleres y otros documentos que orientaron esta investigación. Los siguientes apartados presentan algunas consideraciones halladas en la revisión de literatura.

1.1.1. Antecedentes relacionados con algunos referentes del Marco de la Política Educativa Nacional.

Algunos antecedentes del problema de esta investigación se centran en el marco de la Política Educativa Nacional, relacionada con modelos matemáticos en la educación media, a partir de los referentes del Ministerio de Educación Nacional en Colombia (MEN), y también desde la revisión de la literatura basada en experiencias y consideraciones de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se describen los referentes que definieron el problema de esta investigación.

En las últimas décadas, la modelación matemática ha adquirido cada vez más relevancia en los sistemas educativos a nivel internacional (Huincahue, Borromeo-Ferri y Mena-Lorca, 2018). En Colombia, se conoce su inclusión en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas MEN (1998), y se reafirma en los Estándares Básicos de Competencias por el MEN (2006). De forma progresiva, los constructos teóricos asociados a este proceso han comenzado a permear las aulas en los diversos niveles e instituciones escolares (Villa-Ochoa, 2007, p. 65), ello incluye la Educación Primaria y Educación Secundaria (Parra-Zapata, 2015) y en contextos universitarios (Sepúlveda, González-Gómez y Villa-Ochoa, 2020) y formación de profesores (Rosa y Orey, 2019; Romo-Vázquez, Barquero, Bosch, 2019). Sin embargo, la integración de la modelación en la cotidianidad escolar aun es un desafío para la investigación (Villa-Ochoa y Ruiz, 2009; Kaiser, 2014). En particular, la implementación de la modelación y el uso de modelos es una necesidad en la Institución Educativa donde se lleva a cabo esta investigación pues no se evidencia la implementación y apropiación de procesos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, encaminados a

la interpretación y análisis de modelos matemáticos mediante un contexto escolares, con el fin de otorgar sentido a las matemáticas.

Referentes nacionales de calidad como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006), contemplan un currículo basado en cinco conocimientos básicos, cinco procesos para el aula y tres tipos de contextos presentados en el marco de las políticas educativas descritas por el Ministerio de Educación Nacional. Uno de los procesos es la modelación. En un análisis de los Lineamientos acerca de los procesos matemáticos descritos por el MEN (2006); Villa-Ochoa y Ruiz (2009) afirman que: “están más cercanos a la noción de resolución de problemas que a la modelación, presentando así una ligera contradicción entre lo expuesto teóricamente y lo ilustrado para la práctica” (p. 19). En este sentido, se deduce que, a partir de este distanciamiento, se plantea una problemática en términos de la necesidad de una reestructuración centrada en aspectos teóricos y metodológicos, que permitan actualizar el currículo en diferentes posturas y fundamentos y direccionar el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos.

Los tipos de contextos descritos en los estándares de matemática MEN (2006), y que están relacionados entre sí, son: *el contexto inmediato* o contexto de aula, *el contexto escolar* o contexto institucional, configurado por los escenarios de las distintas actividades diarias, y *el contexto extraescolar* o contexto sociocultural, conformado por todo lo que pasa fuera de la institución. En el proceso de modelación se evidencia una necesidad en la Institución Educativa por parte de los docentes en el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, debido a la desarticulación entre contenidos específicos encaminados de manera tradicional y los ejes temáticos basados en las necesidades de los estudiantes. Por tanto, se plantea la posibilidad, a través de los diferentes tipos de contextos escolares, de articular en un escenario diario de aula las situaciones y problemas a partir del contexto sociocultural de los estudiantes, considerando los procesos a lo largo de las diferentes actividades curriculares de matemáticas planeadas por los docentes.

Los procesos presentes en las diferentes actividades curriculares de matemáticas, descritos por el MEN (2006), pueden convertirse en el principal eje organizador del

currículo de matemáticas, porque les permitirá a los estudiantes familiarizarse con el contexto y los conocimientos matemáticos, vinculados a la realidad experimentada por ellos mismos. Bajo esta perspectiva, el MEN (2006) establece que:

El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar no sólo físico, sino ante todo sociocultural desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, estableciendo conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes, a partir de las cuales, ellos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva. (p. 25)

En este sentido, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del MEN (2006) proponen en los procesos de enseñanza de las matemáticas que se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje, donde docentes y estudiantes interactúen para construir y validar conocimiento mediante diversas situaciones contextuales. En este sentido, la problemática en la institución educativa se observa a través de la necesidad de interactuar con contextos fuera del aula, hasta llegar a construcciones de situaciones propias para los estudiantes, en aras de analizar modelos matemáticos a partir de las condiciones dadas por los diferentes contextos.

El MEN (2006) afirma que “Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (p. 52). Bajo esta mirada, se considera que los modelos matemáticos se encuentran asociados a la percepción de la realidad por parte de sujetos. Por tanto, los procesos en el aula se pueden pensar desde la producción de representaciones de un entorno real donde, a partir del interés de los estudiantes, se puedan deducir expresiones y/o modelos para predecir situaciones generales.

1.1.2. Problemática del manejo de residuos en la Institución Educativa San Pedro de Urabá.

En este apartado se hace un bosquejo de la problemática del manejo de residuos plásticos al interior de la institución educativa, donde los estudiantes juegan

un papel importante para la visibilización de su cotidianidad y de sus prácticas socioculturales. Esta visibilización es relevante para abordar el objeto de estudio de esta investigación.

Al respecto, el Plan Decenal de Educación (MEN, 2017), en su segunda edición describe la necesidad de impulsar modelos de formación para educadores que procuren la preservación y sostenibilidad del medio ambiente y fomenten modelos productivos coherentes con su contexto. Teniendo en cuenta esta necesidad, en el establecimiento educativo se debe propiciar la articulación de las matemáticas con las demás ciencias.

Esta investigación considera el reciclaje como una oportunidad y respuesta a la problemática del manejo de residuos, como también una vía para el aprendizaje de las matemáticas y la protección del medio ambiente. Al mismo tiempo, es funcional como una alternativa didáctica y mediadora donde el estudiante pueda familiarizarse con su entorno y con acciones que conlleven al proceso para la elaboración de modelos matemáticos propios. Bajo estas ideas, el Plan Decenal (MEN, 2017) sugiere, en un marco de diversidad en contextos urbanos, procurar que los participantes estructuren modelos que favorezcan su formación. En este caso, los estudiantes participarán en el análisis con el propósito de vincular, mediante las matemáticas, el reconocimiento de las diferentes variables implicadas en el fenómeno de los residuos plásticos.

En este sentido, se considera importante cómo un proceso de modelación posibilita estudiar este fenómeno relacionado con el manejo de los residuos plásticos. Además, Cardona, Martínez, Ocampo y Parra (2015) consideran que la modelación matemática es asumida como un proceso que permite la toma de decisiones y el posicionamiento frente a diversas problemáticas sociales. Por lo tanto, es una oportunidad para la consolidación de herramientas asociadas a la reflexión y el diseño de situaciones relacionadas con el contexto de estos residuos en las aulas escolares. En consecuencia, esta investigación favorecería una solución de reciclaje para el mejoramiento del manejo de algunos residuos sólidos en la institución educativa.

Al respecto, un equipo académico de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, con el proyecto escolar Medio Ambiente, lleva a cabo una serie de acciones proyectadas a

toda la comunidad educativa. El proyecto se relaciona con un adecuado manejo de los residuos sólidos que se producen de forma diaria y se ha establecido un esquema general en aras de colaborar en la organización institucional; se centra en los asuntos importantes para ser compartidos con las diferentes áreas del conocimiento, en un proceso de socialización interdisciplinar en relación con el interrogante: ¿Conoces el origen y el fin de los residuos sólidos?

La elaboración colectiva, con la participación de un grupo de docentes, referente al fortalecimiento de una conciencia ambiental acerca del manejo adecuado y disposición final de los residuos sólidos, es una evidencia que afianzó el concepto de trabajo colaborativo y, por tanto, aporta en diferentes perspectivas, dimensiones socioculturales y profesionales. En este sentido, al interior de la institución se lleva a cabo una serie de actividades que repercuten en toda la comunidad educativa y contribuyen en la consolidación de un ambiente al mejorar la imagen de sus dependencias y alrededores.

En cuanto al reciclaje como contexto escolar, Yupanqui (2014) describe cómo los estudiantes de diversas instituciones depositan sus desperdicios en cualquier lugar y no perciben los posibles usos de estos desechos en el entorno escolar. Concluye que los estudiantes y docentes, luego de tomar conciencia, podrían usar estos desechos plásticos para elaborar material didáctico. En el estudio de Yupanqui (2014) se evidencia que los materiales reciclables fueron tenidos en cuenta para la elaboración de figuras artesanales y decorativas, mas no de material didáctico asociado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, sería pertinente investigar el uso de estos materiales con base en estrategias didácticas articuladas con las Matemáticas y el medio ambiente en el aprendizaje de educación media, empleándolos en los diferentes contenidos curriculares de matemática; que posibiliten, para esta población estudiantil, el interés por generar modelos matemáticos asociados al contexto de residuos plásticos

La investigación de Valle (2013) aborda la necesidad de implementar la utilización de botellas plásticas recicladas como unidad estructural para la mampostería liviana. Además, considera los residuos como una problemática de tipo ambiental a nivel mundial, pues no pueden ser degradados por el entorno. No obstante, a causa del crecimiento

exponencial de la industria de los plásticos, se crea dependencia sobre estos utensilios permitiendo, de algún modo, un crecimiento descomunal de plásticos como desecho, y muchos de ellos son arrojados indiscriminadamente a basureros sin importar si son plásticos considerados reciclables. En este sentido, Valle (2013) concluye que las estructuras diseñadas con botellas plásticas recicladas presentan mejores características que los bloques convencionales cuya resistencia a la compresión aumentó en 23.63kg/cm^2 con respecto a las unidades estructurales por lo tanto, el uso de este material arrojó resultados positivos en el campo de la ingeniería ambiental.

En los proyectos de medio ambiente implementados por los establecimientos educativos, el reciclaje y la reutilización de estos residuos no biodegradable se pudo trabajar en diferentes líneas, de acuerdo con la necesidad de cada institución. En la institución educativa donde se lleva a cabo esta investigación, estos recursos no se han aprovechado asociándolos a estudios y pruebas con los estudiantes, especialmente el uso de material reciclable como contexto particular, de forma que posibilitara aportes en un proceso de modelación, a partir de la formulación relacionada con las maneras para determinar modelos matemáticos en torno a esta realidad, orientado a acciones transversales mediante el desarrollo de competencias matemáticas en educación básica y media académica. En este sentido, esta investigación articula el proyecto ambiental desarrollado en la institución educativa con las maneras para determinar los modelos matemáticos asociados a la transformación de un lugar del establecimiento escolar, usando botellas plásticas recicladas.

1.1.3. Estudios relacionados con la modelación matemática como estrategia de enseñanza.

A partir de las experiencias en las aulas escolares, los procesos de enseñanza y sus aplicaciones propenden al crecimiento académico de los estudiantes para enfrentarse al mundo real. Por tal razón, a partir de la problemática en las diferentes estrategias metodológicas, se propone la reestructuración de planes curriculares que favorezcan la construcción, comprensión e interpretación de los diferentes modelos matemáticos aplicados en los entornos socioculturales.

A continuación, se describen algunos estudios que se realizaron en el campo de la modelación matemática como proceso en situaciones de un contexto durante las clases.

En la investigación de Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007) se plantea que en la Educación Matemática no existe una transferencia automática del conocimiento si se pretende abordarla desde la teoría hacia una comprensión en diferentes fenómenos contextuales. La distancia entre la teoría y la práctica ha sido una de las problemáticas a discutir en el campo de la Educación Matemática. Por lo tanto, esta investigación trabaja con necesidades de modelos matemáticos que resulten de un proceso no automático en la transformación de una superficie, potenciando elementos propios de los diferentes pensamientos matemáticos.

Con base en la orientación de Bassanezi y Biembengut (1994), la modelación matemática como estrategia de enseñanza inicia con un tema donde se desarrollan situaciones o preguntas del interés de los estudiantes. Estas preguntas deberán ser contestadas a partir del uso de herramientas matemáticas y de la investigación sobre el tema. Bajo estas circunstancias, el estudiante es responsable de su aprendizaje y el profesor, un orientador. Esta estrategia es secuencial y circular, empieza con la selección de un tema, se experimenta con una situación del contexto o datos empíricos, se analiza un problema del entorno, se abstraen las maneras para determinar los modelos matemáticos en la resolución de la situación, se evidencia soluciones analíticas del problema matemático para validarlo en la situación del contexto y, finalmente, viene la aplicación; si estos datos no coinciden con la situación del contexto, se modificarán hasta encontrar el modelo correcto. Para Biembengut y Hein (2004), este proceso de modelación en la enseñanza formal, algunos factores del currículo, horario de clases, número de estudiantes por curso, disponibilidad de tiempo de los profesores en el acompañamiento simultáneo de los trabajos de los estudiantes, los llevó a efectuar algunas modificaciones en el proceso de la modelación de Bassanezi y Biembengut (1994).

Con base en esta apreciación, la implementación de la modelación matemática en la enseñanza se realizará mediante dos tipos de abordajes: el primero, permite al docente desarrollar el contenido programático a partir de modelos matemáticos y, el segundo,

orienta a sus estudiantes a desarrollar un trabajo de modelaje. En este sentido, a través de estas orientaciones se extrae el contenido programado durante los periodos o el año lectivo. Lo importante es que exista afinidad con los intereses de los estudiantes.

1.1.4. Estudios relacionados con superficies.

Teniendo en cuenta el término superficie, Corberán (1996) indica que el área es la cantidad de plano ocupado por la superficie, o el área entendida como número de unidades que recubren las superficies. Cierta unidad cuadrada se comprenderá como unidad de medida para cubrir una determinada cantidad de superficie. En el caso de esta investigación, la problemática gira en torno a la inserción de formas circulares en superficies rectangulares o cuadradas.

El estudio descrito por Fandiño y D'Amore (2009) refiere que los griegos propusieron por muchos siglos solucionar el problema de la cuadratura del círculo y “buscaron la forma que les permitiera transformar la superficie de un círculo de radio r en la de un cuadrado de lado l , con l en términos de r ” (p. 58). Bajo esta referencia, se define el área como el número de unidades que cubren una superficie. En este sentido, transformar una superficie significa modificar cualidades de una determinada figura geométrica. Para este caso, se trata de modificar un espacio físico ubicado al interior de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, a través del uso de botellas plásticas circulares interpuestas en una superficie rectangular.

En este orden de ideas, “en el estudio escolar de las medidas de superficies, una de las actividades preliminares más aconsejadas por distintos autores son las de recubrimiento del plano” (Castro, Flores y Segovia, 1997). Estas actividades sitúan al estudiante en condiciones para percibir e introducirlos a las exigentes prácticas que requieren en la medida directa de una superficie para recubrir un determinado plano. Las expresiones matemáticas encontradas en el contexto escolar se emplean en los hallazgos del área de una superficie geométrica, ajustado al punto de vista de los estudiantes en cuanto al uso de las unidades de superficie.

Castillo (2012) refiere que las unidades en una superficie geométrica pueden ser utilizadas para rellenar líneas, planos, volúmenes y ángulos, además argumenta que, para medir longitudes, las unidades necesitan ordenarse de forma sucesiva. Aunque los niños encuentran útil este proceso, en ocasiones no son conscientes de las consecuencias de dejar huecos o parte sin recubrir. Rellenar espacios está implícito en la subdivisión de longitud, áreas, volúmenes y ángulos, pero este proceso podría ocasionar confusión en los estudiantes cuando se requiere llevar el conocimiento desde lo práctico a lo teórico.

Entre los antecedentes relacionados con superficies que se basan en el marco de las políticas educativas nacionales y se asocian a los estándares de calidad descritos por el MEN (2006), se refiere el pensamiento espacial como el conjunto de procesos cognitivos en los cuales se construye y se manipula representaciones mentales de objetos del espacio, donde los estudiantes puedan hacer una relación entre sí, con representaciones de diversas formas, a través de sus dimensiones espaciales al interactuar con una diversidad de objetos situados en el espacio. Desde esta perspectiva se retoma, de un lado, las relaciones topológicas (entendida como las relaciones cualitativas y las posiciones relativas que existen entre los objetos, dando lugar a nociones como: cerca, lejos, arriba, abajo, adelante, atrás, etc.), la reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea. Por tal motivo, los participantes de esta investigación no solo hicieron uso del aula escolar, también del entorno físico de la institución como laboratorio de aprendizaje. De esta forma, articularon el pensamiento espacial con los otros pensamientos matemáticos, en torno a la sistematización de un conocimiento práctico que condujo a representaciones e interpretaciones teóricas de modelos matemáticos, favoreciendo el aprendizaje autónomo desde su propio interés.

La apropiación del espacio físico al interior de la institución por parte de los estudiantes requiere del estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos geométricos que ellos puedan observar y manipular. Cada cuerpo ya sea sólido o hueco debe estudiarse según sus formas y caras, bordes y vértices. En cuanto a superficies, regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y el estudio de lo que cambia o se

mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones. En este sentido, los estudiantes pueden enriquecer sus prácticas de aprendizaje, porque no solo observan y hacen relaciones geométricas de los espacios físicos de la institución, sino que hacen parte de un proceso en la transformación de una superficie que les permitirá sistematizar información en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con las relaciones geométricas observadas en el espacio físico de la institución, según los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, V.2) del MEN (2016), los estudiantes de educación media están en capacidad de modelar objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realizar comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos. En este sentido, se presenta la problemática con base en la necesidad de que los estudiantes evidencien aprendizajes para reconocer y utilizar distintos sistemas de coordenadas al modelar, comparando objetos geométricos, a partir de diferentes puntos de referencia. Además, deberán explorar el entorno del contexto para poder representarlo mediante diversos sistemas de coordenadas.

En cuanto a estos requerimientos del entorno geométrico sobre las relaciones entre superficie y volumen, respecto a dimensiones de figuras y sólidos, se debe elegir las unidades apropiadas según el tipo de medición (directa e indirecta), de igual manera, los instrumentos y los procedimientos que determinan las medidas reales de una figura a partir de un registro gráfico (un plano). Además, se debe tener en cuenta las medidas de superficie y longitud utilizando diferentes estrategias (composición, recubrimiento, bordeado, cálculo), en la construcción y descomposición de figuras planas y sólidos, a partir de medidas establecidas, para realizar estimaciones y mediciones con unidades apropiadas según sea longitud, área o volumen. En este sentido, Zapata-Grajales, Cano-Velásquez y Villa-Ochoa (2018), consideran que, la modelación en el estudio de formas y magnitudes geométricas, los estudiantes son capaces de averiguar el significado de ciertos conceptos matemáticos y participar en actividades para llegar a otros procesos como exploración, representación, construcción formal y validación de resultados matemáticos. De esta forma, los estudiantes de educación media pueden proponer estrategias de solución a problemas relacionados con la medida de superficie de figuras planas.

1.1.5. Estudios relacionados con modelos matemáticos en diversos contextos.

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2019), la palabra modelo proviene del italiano *modello*, que a su vez proviene del latín “*modulus*” que significa: molde, medida, cantidad de cualquier cosa. Agrega que presenta varios significados. Entre estos tenemos los siguientes: un modelo es la representación en pequeño de alguna cosa; otro significado de modelo, se dice que es un esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. En este sentido, el concepto de modelo podría entenderse como la relación directa que existe entre la representación esquemática de una realidad, articulada a conceptos teóricos característicos, a sistemas o expresiones matemáticas que faciliten la asimilación y estudio de comportamiento de dicha realidad.

Torres (2015) considera que un modelo es el resultado del proceso de generar una representación abstracta de una porción de la realidad, ya sea un objeto, un fenómeno, un proceso, un sistema o cualquier otra cosa de interés. Bajo esta apreciación, los modelos representan una realidad a partir de diferentes recursos, como ideas, palabras, gráficos, elementos físicos o incluso herramientas matemáticas, desde las más simples hasta los más complejos.

Mujica y Rincón (2011) consideran el modelo como una representación que, a su vez, arropa su sentido como explicación y como teoría. En esta medida, representar una realidad no es más que hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene para sustituir dicha realidad; el modelo es una idea abstracta referida a la realidad, donde esas abstracciones puedan ser explicadas y plasmadas a nivel teórico. En esta investigación se muestra la problemática basada en el objeto de estudio cuando se relacionan maneras para determinar modelos matemáticos en una realidad vivida por los mismos estudiantes al interior de la institución educativa; esto posibilita representaciones de una realidad del entorno escolar, abstrayendo ideas propias y concretas en el desarrollo de explicaciones teóricas de un contexto particular manipulado por los estudiantes.

Konikow y Reilly (1999) definen modelo matemático como una ecuación o conjunto de ecuaciones que simulan de manera aproximada la relación estímulo-respuesta de un sistema. Desde este punto de vista, se puede considerar que los modelos matemáticos son herramientas que se pueden utilizar para analizar y evaluar los sistemas, para predecir respuestas ante estímulos y acciones de expresiones matemáticas.

Estos modelos matemáticos son una forma de contextualizar en conocimiento en situaciones problemáticas reales que sean factibles de representación (Trigueros 2009). En este sentido, los modelos matemáticos aparecen cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales. En este caso, parte de la problemática basada en esta investigación son interrogantes que surgen de la necesidad e intereses de los participantes, al tomar decisiones asociadas a la predicción de fenómenos contextuales factibles a la representación teórica de dicha realidad.

Torres (2015) plantea que los modelos matemáticos conducen al funcionamiento de un sistema generando resultados a través del modelo, que deben ser similares a los observados en la realidad. Esto se conoce como la *validez* o capacidad que tiene el modelo de ser contrastado. En este sentido, las maneras para determinar los modelos matemáticos en el contexto de esta investigación se podrían considerar como una problemática por parte de los estudiantes, al momento de validar situaciones de resultados porque se pueden encontrar con un margen de errores en la producción de cantidades verificables a partir de la realidad.

Teniendo en cuenta los modelos matemáticos, Aravena, Caamaño, y Giménez (2008) proponen trabajar por proyectos, a partir de los siguientes argumentos: el *formativo*, ya que pueden trabajarse como medios adecuados para desarrollar competencias en los estudiantes, de acuerdo con su interés por descubrir; la *competencia crítica*, la cual desarrolla crítica en los estudiantes para intervenir en la sociedad y contribuir a la resolución de problemas relevantes; la *visión integrada*, que ayuda a que los estudiantes adquieran destrezas en conceptos y métodos matemáticos en situaciones exploradas; por último, la *utilidad*, que tiene como objetivo de enseñanza preparar a los estudiantes en el uso de las matemáticas para la resolución de problemas de la vida real y de otras áreas.

En referencia a los antecedentes relacionados con modelos matemáticos centrados en el marco de las políticas educativas nacionales, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas descritos por el MEN (1998) indican que, en un proceso de resolución, el problema matemático se transformará en un modelo que puede evolucionar desde la particularidad de una situación a un modelo para todos los problemas que se le asemejan, desde el punto de vista matemático. A menudo, estos modelos se usan para ayudar a los estudiantes a comprender la acción de la operación. En estos lineamientos, se cita al matemático holandés Hans Freudenthal (1988), para presentar los elementos básicos de la construcción de modelos. El autor considera que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización.



Figura 2: Ciclo de modelación de Hans Freudenthal.

Fuente: Adaptado de MEN (1998).

El punto de partida de la modelación es una situación problemática real. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema que contenga características esenciales de la situación original y la esquematización, permitiendo una aproximación con medios matemáticos. Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así, resulta un modelo matemático de la situación original. Este modelo consta esencialmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los “elementos básicos” de la situación original, y de ciertas relaciones entre esos objetos.

La capacidad de predicción, descripción o hechos para controlar un fenómeno que tiene un modelo matemático al representar la realidad (Magnani, Nersessian y Thagard, 1999) es un concepto poderoso y fundamental en las diferentes actividades matemáticas. Cuando se habla de la actividad matemática en la escuela se destaca que el estudiante aprende matemáticas “haciendo matemáticas”. Esto implica que, desde el principio, se integre al currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes.

Los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) consideran la matematización como el proceso desde el problema anunciado matemáticamente hasta las matemáticas y la modelación, o la construcción de modelos como el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático.

En los estándares de calidad descritos por el MEN (2006) se considera que todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo. De forma análoga, todo modelo es un sistema, pero no todo sistema es un modelo, aunque cualquier sistema podría utilizarse como modelo. En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

En los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) del MEN (2016) se proponen relaciones o modelos funcionales entre variables para identificar y analizar propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y representación mediante gráficas. Por tanto, se debe tener en cuenta evidencias de aprendizaje donde los estudiantes tomen decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados, y las relacionen con características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva, para modelar objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas y realizar comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.

1.2. Formulación del problema

De acuerdo con los apartados anteriores, en esta investigación se presentan reflexiones y orientaciones sobre procesos formativos y prácticos que un docente investigador de educación media realiza en el aula y fuera de ella, de acuerdo con investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con la perspectiva educativa en los procesos de modelación matemática en ámbitos escolares. Este objeto de estudio se asocia a hechos reales vividos por los estudiantes de educación media como participantes de esta investigación.

En este sentido, los participantes podrán obtener maneras para determinar modelos matemáticos a través del uso de material reciclable, asociado a una problemática en la identificación y simbolización de algunas variables en el marco de un proceso en situaciones de un contexto particular. Por lo tanto, la importancia de conocer el reciclaje como contexto escolar al interior de la institución resulta oportuno. Además, se observa que cuando los estudiantes de educación media se enfrentan a situaciones que requieren interpretación de una situación problema, se les dificulta traducir e interpretar esta información a partir de la matematización e implementación de procedimientos.

En consecuencia, el proceso de modelación matemática en contextos escolares, la transformación de una superficie aplicada al entorno contextual y la identificación y análisis de modelos matemáticos encontrados en diversos contextos, son algunos de los asuntos a tratar en esta investigación. Se reconoce el uso de contextos particulares en la modelación matemática como un aspecto que favorece el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, investigar las formas en que los estudiantes construyen modelos matemáticos adquiere importancia en los procesos de seguimiento para los maestros, como en otras formas de interacción en el aula y podría ser un punto de partida para pensar nuevas maneras curriculares en miras a que el estudiante le encuentre sentido al aprendizaje de las matemáticas. A pesar de que en los referentes curriculares de matemáticas en Colombia se contempla la modelación como un proceso de enseñanza en el desarrollo de las competencias, es necesario reconocer que en la institución donde se lleva a cabo esta

investigación no existe evidencia del uso de la modelación, sea procedimental o metodológica, por parte de los educadores del área de matemática. Este hecho suscita el interés por parte del investigador y los participantes.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas descritos por el MEN (2006) orientan los procesos curriculares y actividades centradas en la comprensión del uso y significado de los números. Estos procesos y actividades se enriquecen si se considera trabajar con las magnitudes, cantidades y medidas como base para dar significado y comprender los conceptos y procedimientos asociados al pensamiento numérico y al pensamiento métrico.

Para poner en marcha esta orientación, que afronta como problemática la dificultad de analizar, comprender, proponer y argumentar, se propuso a los estudiantes construir una pequeña edificación plana en uno de los patios al interior de la institución educativa, a través del uso de residuos plásticos. Esta actividad modificó o transformó un sector de la superficie del suelo y, a la vez, se reconoció como un contexto que generó una dinámica para abordar magnitudes, cantidades y medidas en relación con la cantidad de botellas plásticas recicladas. Desde el contexto abordado, el fondo de las botellas que se utiliza para la construcción de un modelo real no puede ser fraccionado o dividido, entendiéndose que inicialmente los estudiantes harán uso de cantidades discretas.

El problema se presenta cuando los estudiantes buscan determinar modelos matemáticos relacionados con la transformación de una superficie, durante el proceso de la investigación, atendiendo a este contexto particular. A partir de esta apreciación, se generó la siguiente pregunta: ¿De qué manera se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media?

1.2.1. Tema.

Modelos matemáticos en la transformación de una superficie.

1.2.2. Objeto de Estudio.

Maneras para determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media.

1.2.3. Pregunta de Investigación.

¿De qué manera se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media?

1.2.4. Objetivo.

Determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media.

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se exponen las consideraciones teóricas y conceptuales que conforman el proceso de esta investigación. Entre estas consideraciones se hallan concepciones sobre ciclo de modelación en un proceso de modelación matemática, modelo matemático desde una situación conocida por los estudiantes, los contextos como mediador del aprendizaje de las matemáticas y, por último, nociones de superficie y variables en el marco del currículo escolar en Colombia.

2.1. Ciclo de modelación en un proceso de modelación matemática

Varios países adoptan la modelación matemática como método de enseñanza, por lo que comunidades matemáticas como ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications), RECOMEM (Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática), CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) han organizado congresos internacionales asociados a investigaciones de Modelación. Sin embargo, concurre una diversidad de opiniones sobre la no existencia de una comprensión y conceptualización homogénea sobre el significado de modelación matemática (Kaiser y Sriraman, 2006).

En el caso de Colombia, la modelación fue incorporada al currículo escolar a través de los Lineamientos Curriculares de 1998 y se reafirmó de nuevo en el año 2006, bajo las orientaciones de los Estándares Básicos de Competencias. En estas últimas orientaciones se describe la modelación matemática como la detección de esquemas que se repiten en situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente (MEN, 2006).

De acuerdo con Villa-Ochoa (2007), la modelación matemática potencia el desarrollo de capacidades en los estudiantes, en el sentido de leer, interpretar, proponer y resolver situaciones matemáticas de su interés y motivaciones particulares, cuando aborda situaciones del contexto social y cultural. Se considera pertinente el uso de la modelación en el aula de clases para relacionar asuntos sociales y culturales con las matemáticas

(Bossio, 2014). Esa relación se entiende bajo la perspectiva de favorecer la vida del estudiante respecto a la solución de problemas en diferentes situaciones del contexto cotidiano, de forma que se fortalece la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al considerar sus intereses para abordar un proceso de modelación; estos intereses tienen estrecha relación con las labores que ejercen sus padres de familia.

En este estudio se considera el ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) para analizar las acciones y las interacciones de los estudiantes en cada momento del proceso de modelación. Por tanto, se proponen seis momentos y siete subprocesos. Para el caso de los momentos, se pueden visualizar los siguientes: *situación real*, *modelo de la situación*, *modelo real*, *modelo matemático*, *resultados matemáticos* y *resultados reales*. Para el caso de los subprocesos, se observa: *la comprensión de la situación*, *simplificación/estructuración*, *matematización*, *trabajo matemático*, *interpretación y validación* y *exposición*. Este ciclo, no se entenderá como una manera rígida ni lineal de interpretar las acciones de los estudiantes de un subproceso al otro, sino, como un ciclo recurrente que ofrece orientaciones para analizar las acciones de los estudiantes e interpretar su transcurrir desde un subproceso a otro (ver Figura 2).

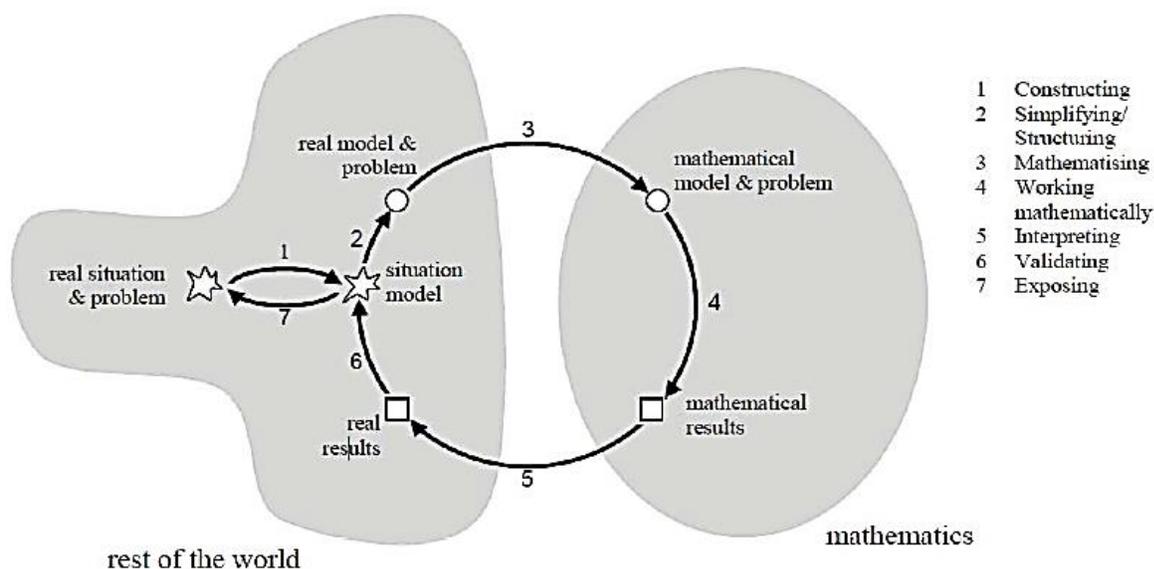


Figura 3: *Ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009)*

En este proceso de modelación, a través del acompañamiento del docente, los estudiantes se les posibilitan abordar de forma inicial una situación que genera, de algún

modo, un problema en el entorno social; desde el ciclo se reconocería como la *situación real (RS)* y puede darse por una imagen, un texto o ambos. Luego existe un subproceso, que es el entendimiento parcial del problema y puede ser a nivel implícito e inconsciente para el modelador. El siguiente momento, la situación es construida y comprendida por el estudiante como un proceso de transición de la *situación real* a la *representación mental de la situación (MRS)*; esta representación se puede evidenciar a través de imágenes o bocetos construidos por los estudiantes. En este momento depende el estilo de pensamiento matemático del individuo, ya que en este subproceso es en donde se define cómo tratar el problema.

De manera seguida, se puede identificar un proceso de simplificación/estructuración a partir de la presentación del modelo de la situación para pasar al *modelo real (RM)*. El *modelo real*, puede ser una forma simplificada para entender la situación; contiene aspectos extra-matemáticos y, a la vez, una relación con las matemáticas. Este modelo les posibilitará a los estudiantes identificar las regularidades en correspondencia con la situación real, orientándolos a ir en busca del *modelo matemático (MM)*, mediante un subproceso de matematización.

A partir del *modelo matemático*, se desarrolla el subproceso conocido como trabajo matemático. En este momento, los estudiantes se desprenden de los aspectos extra-matemáticos para hacer uso de las matemáticas, generando *resultados matemáticos (MR)*, después son interpretados, incluso de manera inconsciente, para obtener los *resultados reales (RR)* que deben validarse discutiendo la correspondencia entre los resultados reales y la representación mental de la situación.

Si el modelo no es consistente, es decir, si el estudiante reconoce que el modelo no responde a la necesidad para la que fue construido, puede iniciar nuevamente el ciclo. Al final, luego de desarrollar el proceso de modelación y construir el modelo, expone los resultados y la solución del problema.

2.2. Consideraciones sobre modelo matemático desde una situación conocida por los estudiantes

En los Estándares Básicos de Competencia en matemáticas (MEN, 2006) se describe que: “Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo, mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (p. 52). Se entiende que los modelos matemáticos estructuran una realidad a través de representaciones y esquemas al aplicar procesos experimentales en situaciones que posibiliten la construcción de diversas formas de entender fenómenos en la vida diaria.

Para pensar en ideas matemáticas y comunicarlas se hace necesario representarlas de algún modo (Rosas, 2008). Por tanto, el pensamiento puede estar articulado entre el aprendizaje de las matemáticas y las situaciones conocidas, permitiendo acercar intuitivamente a los estudiantes hacia algunos conceptos matemáticos y sus propiedades.

Rosas (2008) argumenta que un esquema representativo da origen a un conjunto de números caracterizados porque todos son representados según ese modelo. Por ejemplo, los números triangulares y los números cuadrados satisfacen unas reglas determinadas de formación que pueden expresarse de forma geométrica, aritmética, algebraica o mediante una relación de recurrencia. Para el caso de un modelo como sistema simbólico figurativo, este se puede construir de manera significativa como las sucesiones de números naturales para la iniciación a la noción de término general de una sucesión y su simbolización; modelo que se centra en el contexto abstracto de las matemáticas.

Un modelo matemático es la representación de la realidad a través de símbolos que tienen generalmente un carácter matemático o lógico (Maino; Pittet, y Kóbrich, 1991). Desde esta mirada, un modelo matemático podría ser una ecuación algebraica donde algunos símbolos signifiquen aspectos de la situación real. Esta descripción es similar a lo que plantea Chakravarty (1966) cuando se refiere a los modelos como una representación simplificada de la estructura y el funcionamiento de un determinado sistema real, utilizando el lenguaje matemático para expresar las relaciones entre variables y operaciones matemáticas para obtener los conocimientos deseados. En este sentido, los modelos se

pueden interpretar como estructuras inspiradas en una realidad, plasmada desde una perspectiva abstracta.

Maino, Pittet, y Kóbrich, (1991) aseguran que la eficacia de un modelo implica la incorporación de dos elementos que son el realismo y la simplicidad. El modelo debe ser una aproximación razonable del sistema real y debe incorporar muchos de sus aspectos importantes. Por tanto, para la construcción de un modelo se considera el realismo como una situación cotidiana y la simplicidad en la relación de letras y símbolos que se usan en las matemáticas.

No solo existen los modelos representados a través de símbolos o esquemas. Moreira, y Greca (2011) argumentan que existen los modelos mentales que les posibilitan a las personas representar sistemas físicos (o estados de cosas más abstractos). En este sentido, los modelos mentales se entienden a partir de representaciones internas cuyo compromiso básico es explicar y predecir eventualidades desde el punto de vista científico, pero no se logra de forma necesaria una representación simbólica o esquemática de una situación.

Existe una inclinación hacia el significado de modelo como representación y que, a su vez, esta arroja su sentido como explicación y como teoría (Mujica y Rincón, 2011). Esto significa que la representación de una realidad puede asumirse en términos de significado de algo con palabras o figuras que la imaginación retiene.

Al respecto, Torres (2015) describe dos usos de los modelos. Uno de ellos es el didáctico que refiere a la forma como los estudiantes comprenden el funcionamiento de algo; el otro es el científico, que corresponde a la comprensión o el análisis sobre ese funcionamiento. Por ejemplo, si se quiere calcular el volumen de una naranja, se simula una esférica y se mide el diámetro para calcular el volumen, pero ninguna naranja es idealmente esférica. Sin embargo, esta simulación permite que una esfera sea un modelo adecuado para representar una “naranja ideal” y permitir el cálculo del volumen de cualquier naranja con sólo conocer sus medidas. La Figura 3 simula el modelo de este ejemplo.



Figura 4: Modelo de Torres (2015).

Estas consideraciones presentan una perspectiva de los modelos, en el sentido de representaciones que se pueden hacer a partir de situaciones conocidas y el uso de conceptos matemáticos. Los modelos matemáticos se consideran como la parte científica que hace uso de las matemáticas para describir o explicar una parte de la realidad donde se encuentra el problema.

2.3. Aproximación a los contextos como mediadores del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de modelación

En los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) se describen los conceptos de estimación y aproximación como procesos presentes en los diferentes pensamientos de las matemáticas. Estos conceptos son considerados elementos fundamentales en la construcción de otros conceptos, procesos y procedimientos relativos a cada pensamiento, los cuales ayudan a organizar formas de pensamiento flexibles asociadas a contextos particulares. En este sentido, el MEN (2006) orienta que el contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar, no sólo físico, sino ante todo sociocultural, desde donde se puede construir sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos en la escuela. Además, es donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades en el aula de clase y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas.

Teniendo en cuenta el aspecto sociocultural asociado a un proceso de modelación, se resalta la forma como está constituido el contexto cotidiano del estudiante, en el sentido de sus estructuras y conexiones, el cual le brinda la oportunidad de hacer uso de las

matemáticas con sentido (Bossio, 2014). Se infiere que un proceso de modelación en el contexto cercano al estudiante le permite profundizar y observar aspectos nuevos que no consideró en el transcurso de su vida diaria. En el caso de esta investigación, se podría reconocer el cambio de la percepción de los contextos de los estudiantes en una cultura particular, para darle sentido a los procesos algorítmicos en la solución de problemas relacionados con el entorno, al interior o fuera de las aulas escolares, la cual se adopta un proceso de modelación matemática como marco teórico enmarcado en contexto intermedio o contexto escolar asociado a una transformación de superficie.

La noción de contexto, tal como se utiliza en los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006), está subdividida en *contexto amplio* o *contexto extraescolar*: comprendido como el entorno sociocultural, ambiente local, regional, nacional e internacional; *contexto intermedio* o *contexto escolar*: en donde se viven distintas situaciones y se estudian distintas áreas, configurado por los escenarios de las actividades diarias, la arquitectura escolar, las tradiciones y los saberes de los estudiantes, docentes, empleados administrativos y directivos, así como por el PEI, las normas de convivencia, el currículo explícito de las distintas áreas curriculares y; *contexto inmediato* o *contexto de aula*: contexto preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas a las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar y al mismo entorno sociocultural, etc., o a situaciones hipotéticas y aun fantásticas, a partir de las cuales los alumnos pueden pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva.

En este orden de ideas, en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se describe una relación entre los procesos generales y los contextos a partir de los conceptos y procedimientos matemáticos; esta estructura se puede visualizar en la Figura 4.

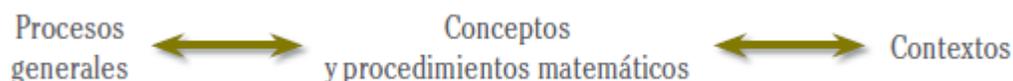


Figura 5: Manera como está formulado cada Estándar. MEN (2006), p. 77

En cuanto a la particularidad de algunas regularidades matemáticas, en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se manifiesta que los contextos son usados como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de regularidades entre variables en lo que respecta a la predicción de eventualidades. Desde esta perspectiva, se infiere que los contextos preparan al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de situaciones donde las variables exhiben una regularidad, con el fin de determinar la existencia de expresiones matemáticas.

Para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas y proponer actividades que puedan ayudarlos, el MEN (1998) propone discutir problemas en diferentes contextos y considera que en un proceso de resolver problemas influyen factores como el dominio del conocimiento, que hace referencia a los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden utilizarse en una situación problema; las estrategias cognoscitivas, que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y el error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema; las estrategias metacognitivas, que se relacionan con el monitoreo y el control para planear, evaluar y decidir y; el sistema de creencias, que se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí, tales como las técnicas, el tiempo y el esfuerzo, entre otros.

El autor de la presente investigación, reconoce una desarticulación entre la matemática que se enseña en clase y los contextos extraescolares en los que se desenvuelve cada estudiante. En este sentir, la tendencia de los investigadores en Educación Matemática es la de conectar la realidad con las matemáticas, especialmente cuando se trata de contextos extraescolares, tal como se evidencia en Obando y Sánchez (2014). Su investigación se centra en el contexto cafetero como contexto cercano a los estudiantes y éste los condujo al análisis de algunos fenómenos para articular la matemática escolar con los contextos extraescolares. Desde esta mirada, es posible implementar la modelación matemática como uno de los procesos generales propuestos por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), para orientar hacia la comprensión e

interpretación de los fenómenos en cada uno de los contextos sociales, culturales, familiares y escolares que se pueden representar a través de procesos y análisis matemáticos.

Direccionar el aprendizaje de conceptos matemáticos a partir del entorno de los estudiantes posibilita resaltar la importancia de la realidad que viven, la cual se podría tener en cuenta para redireccionar el aprendizaje desde contextos auténticos, para establecer elementos de las matemáticas destacando la importancia de la realidad en que viven los estudiantes (Rivera, 2014). De esta manera, se resalta el papel que juega la modelación matemática en el contexto de los estudiantes y la relación que existe con las matemáticas en el aula. Por tal motivo, durante el proceso de investigación, se propone que los estudiantes analicen, comprendan, propongan y argumenten maneras para determinar modelos matemáticos asociados a la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos.

2.4. Elementos sobre noción de superficie y variables en el currículo escolar de Colombia

El MEN (1998) ejemplifica el concepto de superficie a través de la siguiente situación: Al pasar las manos por las superficies de objetos, muebles y paredes se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies, y entre superficies planas y curvas. La interrupción del movimiento prepara el concepto de superficie como frontera de un cuerpo, y el movimiento de la mano prepara el concepto de plano, el de región y el de área.

En este sentido, el MEN (2007) resalta la importancia de comparar y explicar las características medibles en el proceso de resolución de problemas relacionados con superficie, permitiendo evidenciar aprendizajes en los estudiantes a través del uso de instrumentos y unidades de medición apropiadas para diversas magnitudes en la descripción de procedimientos de superficies, asociadas a situaciones del contexto escolar. En este sentido, los participantes de la investigación deben justificar relaciones entre superficies respecto a sus dimensiones en la elección de unidades apropiadas: tipo de medición (directa e indirecta), los instrumentos y los procedimientos (un plano) y medición de superficies y longitudes (composición, recubrimiento, bordeado, cálculo).

Cuando se trata del área de superficies, es usual “cuadrangular” su representación y preguntar, por ejemplo ¿con cuántas baldosas se recubren el piso? La unidad patrón es la baldosa y el número de ellas es una medida de tal área. Estas actividades conllevan a la noción de recubrimiento por repetición de una unidad y son previas para el proceso de medición del área. Sin embargo, es necesario realizar otro tipo de actividades que permitan captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida ya que las anteriores acciones tienen la desventaja de promover un carácter discreto y exacto de la medida; esta es una primera aproximación que, si no se supera oportunamente, obstaculiza el desarrollo interior de los procesos de medición. En el estudio de superficies a través de un proceso de modelación puede emerger una diversidad de conceptos transversales que enriquecen un currículo basado en experiencias de los estudiantes.

En esta diversidad de conceptos, las gráficas cartesianas, según el MEN (1998), pueden ser introducidas en el currículo en los grados inferiores, porque hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación entre las variables que determinan una gráfica puede iniciarse con situaciones de regularidades cualitativas y con la identificación de nombres para los ejes de coordenadas. Particularmente, la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, generando la noción de función como dependencia.

Los contextos donde aparece la noción de situación establecen relaciones funcionales entre los elementos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesario para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar estas regularidades.

En el estudio de superficie como un contexto del entorno escolar se pueden describir unos procedimientos relacionados con gráficas y representación que se desarrollan en los distintos campos de las matemáticas. Cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura se están aplicando procedimientos de tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o una relación.

La ecuación de la recta $y = mx$ es una representación de todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas y, a la vez, es un modelo para infinidad de fenómenos cuyas magnitudes se pueden aproximar con las variables “ x ” y “ y ” (en relación directamente proporcional).

Respecto a la concepción del uso de las letras para representar las variables por parte del estudiante, Bossio (2014) manifiesta que es diferente a las reglas de las operaciones estipuladas por la lógica del lenguaje algebraico. Debido a esto, se comprende la necesidad de las orientaciones pertinentes en el aula de clase de matemáticas cuando los estudiantes usan las letras para representar las variables. En este sentido, es importante ofrecerles un contexto conocido que posibilite las conexiones necesarias para reconocer de manera flexible la integralidad del concepto de variable en el álgebra escolar.

En una situación asociada al estudio de una superficie, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes. Esto posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonables son respecto a las condiciones iniciales. En este sentido, el MEN (2006) proporciona un tratamiento de las situaciones que involucran fenómenos cambiantes que hace necesario identificar conceptos relacionados con el pensamiento variacional, al igual que los conceptos numéricos, para identificar variables, determinar su comportamiento, discriminar entre las variables independientes y las dependientes. Por lo tanto, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y de la manera cómo varían sus resultados con el cambio de los argumentos o de los objetos de la geometría (espacio) y la manera cómo cambian las medidas de las cantidades asociadas con las transformaciones de esas superficies se propone como abstracción y generalización.

La articulación entre los conceptos aritméticos y geométricos ganaría flexibilidad y generalidad en momentos transversales, lo que atraería el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional. En esta dirección, el MEN (2006) especifica que el estudio de la variación hace necesaria una referencia a la identificación de variables y, por tanto, al reconocimiento de las magnitudes y medidas de cantidades asociadas.

Los participantes deben identificar y analizar propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos para representarlas mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) (MEN, 2017). En esta dirección, es posible evidenciar patrones de comportamiento numéricos a la hora de expresar, de forma verbal o por escrito, los procedimientos matemáticos en la realización de cálculos numéricos, la organización de tablas, la elaboración de representaciones gráficas y las interpretaciones para dar respuestas a los problemas matemáticos. En este sentido, los participantes estarán en condiciones de plantear modelos gráficos o numéricos en los que se puedan identificar variables y rangos de variación de las variables, para tomar decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.

3. METODOLOGÍA

En este apartado se presenta el desarrollo metodológico a partir de los siguientes componentes: la descripción del enfoque, que direccionó el proceso de modelación en la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos; un método que permitió la observación directa de los participantes a través del estudio de casos y orientó el logro de los objetivos propuestos en esta investigación, este método de muestras da a conocer un caso particular de forma extensiva e intensiva (Stake, 1999); la descripción del ambiente institucional y del investigador, fases del trabajo de campo, selección de los participantes, instrumentos de recolección de la información y, por último, las técnicas de recolección de los datos en función del análisis de la información. Todos los componentes se orientan a temas que surgen del proceso de modelación, a través de una situación en contexto.

3.1. Paradigma

Se abordó un paradigma cualitativo con enfoque constructivista en la perspectiva de Stake (1999), debido a que el tratamiento de los datos es de naturaleza narrativa y representativa de unas acciones ancladas en un contexto real. Para todo el estudio se implementó entrevistas, documentos escritos, reflexiones y discusiones de los 16 participantes, y así se llevó a cabo un proceso de modelación que posibilitó las maneras para determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie. El enfoque delimitó los intereses manifestado por los participantes desde diferentes situaciones, tal como lo sustenta Stake (1999, p.26). En el estudio de modelos matemáticos se propuso empezar con temas particulares hasta llegar a modelos generales, en este sentido, Stake (1999) manifiesta que, en el estudio instrumental de casos, el tema es dominante; se empieza y se termina con los temas dominantes. Por lo tanto, en la recolección de datos, los participantes durante el proceso de investigación pudieron experimentar con el contexto de residuos plásticos, perspectivas y puntos de vista a la hora de determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie.

De acuerdo con el enfoque constructivista, Stake (1999) afirma que: “Los niños, jóvenes y adultos construyen sus conocimientos a partir de la experiencia y por lo que se les dice acerca de cómo es el mundo, y no porque lo descubran ahí, girando, y ajeno a la

experiencia” (p.89). Teniendo en cuenta esta idea, la experiencia juega un papel fundamental en los procesos llevados a cabo con los participantes. Con el marco referencial “*modelación matemática*”, podría mirarse la relación existente entre la experiencia, conceptos y conocimientos.

El enfoque permite el estudio de los participantes a partir de los procesos, la interacción comunicativa y las ideas al interior del aula, cuando se enfrentan al desarrollo de actividades asociadas a modelos matemáticos en situaciones escolares procedentes de sus necesidades e intereses, en compañía del docente investigador. En este sentido, esta investigación adopta una metodología cualitativa tipo instrumental con un enfoque constructivista mediante la mirada de Stake (1999), las cuales podrían poner en marcha orientaciones en la búsqueda de información de tipo narrativo y representativo mediante unas acciones que afronta como problemática la dificultad de analizar, comprender, proponer y argumentar. Por lo tanto, se propuso a los estudiantes construir una pequeña edificación plana en uno de los patios al interior de la Institución Educativa, a través del uso de residuos plásticos. Esta actividad transformó un sector de la superficie del suelo y, a la vez, se reconoció como un contexto en relación con cantidad de botellas plásticas recicladas. El problema se presenta cuando los estudiantes buscan determinar modelos matemáticos relacionados con la transformación de una superficie, durante el proceso de la investigación, atendiendo a este contexto particular.

3.2. Método

Se aplicaron instrumentos para obtener resultados a partir de los momentos descritos en el ciclo retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009). Además, se utilizó el método “estudio de casos” en la interacción con un contexto asociado a la transformación de un lugar específico de la institución educativa con el uso de botellas plásticas recicladas a partir del estilo placa huella. El pavimento con placa huella constituyen una solución para vías terciarias de carácter veredal que presentan un volumen de tránsito bajo, reduce costos de construcción y mantenimiento, además ofrece posibilidades de utilización de materiales y mano de obra locales (Orobio y Orobio, 2015, p. 2).

En la ejecución de esta investigación, se asumió el estudio de caso tipo instrumental descrito por Stake (1994), debido a que el caso no viene dado. En este sentido, este método permitió que los participantes establecieran una relación entre una situación en el contexto escolar y las matemáticas, mediante un proceso de modelación matemática, la cual reconoció el uso de instrumentos para comprender situaciones del entorno de los participantes. El caso para esta investigación está definido en la manera en que 16 participantes de educación media generaron modelos matemáticos al transformar una superficie en un proceso de modelación a partir de la articulación de contextos de residuos plásticos.

Por lo tanto, esta investigación se interesa en atender un estudio de caso instrumental, para identificar maneras en que los estudiantes de educación media desarrollan actividades de modelación, esto quiere decir que el investigador distinguió varios caminos relacionados con los momentos del proceso de modelación y sus diferentes formas de expresión matemática, además se reconoció el aporte grupal e individual de los participantes a partir de sus experiencias y conceptos en la determinación de modelos particulares que dan cuenta de relaciones matemáticas, en el contexto de residuos sólidos.

3.3. Escenario y participantes de la investigación

La investigación se desarrolló en Institución Educativa San Pedro de Urabá, ubicada en la zona urbana del municipio de San Pedro de Urabá. La institución es de carácter público, tiene una sede principal urbana en la que se ofrece educación en los niveles de Básica Secundaria y Media Vocacional, dos subsedes urbanas y cinco subsedes rurales en las que se ofrece educación en los niveles de Transición y Básica Primaria. Cuenta con 1930 estudiantes, 67 docentes, un rector, tres coordinadores y una psico-orientadora. En la siguiente ilustración se observa la ubicación geográfica de la institución donde se realizó la investigación.

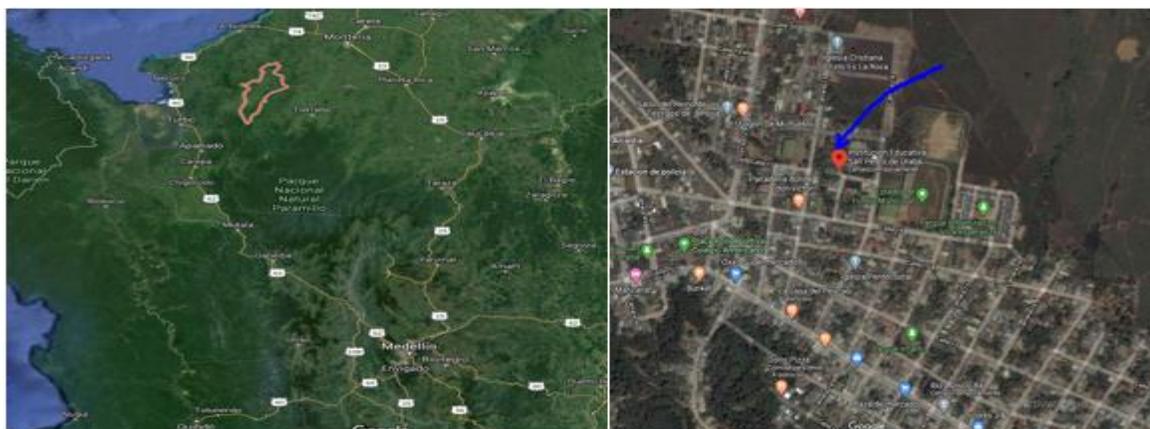


Figura 6: *Ubicación de la Institución Educativa San Pedro de Urabá. Recuperado de Goglemaps.*

La Institución Educativa San Pedro de Urabá es una institución de carácter oficial mixto, aprobada por resolución 21405 del 02 de diciembre de 1983, resolución 1002 del 11 de agosto de 1997, resolución 1498 del 20 de febrero de 2003, y funciona con resolución 133338 del 20 de noviembre de 2014. En este plantel, los procesos de enseñanza y aprendizajes son orientados bajo los parámetros del modelo social desarrollista. Se ubica en un contexto urbano y rural, donde algunos viven en veredas y las familias se dedican a la agricultura o a oficios varios.

Los participantes de esta investigación fueron un docente investigador y un equipo de 16 participantes de educación media de la profundización matemática y ciencias naturales, seis de décimo grado y 10 de undécimo grado, con edades que oscilan entre los 14 y 17 años, con los siguientes seudónimos: Jesús, Andrés, Vanesa, Patiño, José, Juan, Duberney, Tamara, Correa, Miranda, Chica, Luisa, Ester, Manuel, David y Lizet.; a su vez, realizaron el trabajo de campo en el marco del proyecto institucional llamado Servicio Social.

Además, se tuvo en cuenta el interés y motivación de estos participantes por el área de matemáticas. Otros criterios correspondieron a:

- Hacer parte del proyecto social e institucional Medio Ambiente.
- Conocer la problemática de residuos no biodegradables de la institución.
- Tener sentido de pertenencia por la institución.

- Ser un estudiante que le guste reciclar o por lo menos se encamine por esa línea.
- Evidenciar interés por explorar nuevos métodos en el aprendizaje de las matemáticas.

Otro criterio fue la disponibilidad de tiempo para la implementación de la investigación y el consentimiento de los padres y de los estudiantes para participar en el proceso investigativo.

De acuerdo con el problema y el objetivo de investigación, se considera que estos criterios son elementos que permiten que las actividades en el aula se desarrollen de una manera en la que el participante pueda trabajar de forma conjunta con sus compañeros, atendiendo las orientaciones del investigador, aspecto fundamental en un proceso de modelación matemática.

3.4. Fuentes para la generación de datos cualitativos

Las fuentes o rutas del trabajo de campo que se utilizaron en esta investigación fueron las siguientes: observación, entrevista semiestructurada y documentos escritos.

3.4.1. Observación.

“Durante la observación, el investigador, a partir del enfoque cualitativo en estudio de casos, registra los acontecimientos para ofrecer una *descripción* relativamente *incuestionable* a posteriores análisis y el informe final” (Stake, 1999, p.61). Por tanto, se hizo un diagnóstico del problema a partir de la observación, para recolectar datos y dar respuesta a las actividades de modelación. En esta investigación, se observó a los participantes que estuvieron en el trabajo de campo, sus interacciones y sus prácticas. Con esta observación se configuró el problema a investigar, para poder recolectar datos, y dar respuesta a las actividades de modelación.

Las observaciones se orientaron a la recolección de información a partir de prácticas, procedimientos, elementos, hechos relevantes, representaciones, diseños, representaciones y mecanismos que los participantes utilizaron para compartir y manifestar

sus ideas, en el desarrollo de las actividades de modelación. En este estudio se realizaron observaciones en todos los encuentros propuestos para el trabajo de campo.

3.4.2. Entrevista semiestructurada.

Rojas (2010) define la entrevista semiestructurada como “un encuentro en el cual el entrevistador intenta obtener información, opiniones o creencias de una o varias personas” (p.85). En algunos momentos del proceso de modelación, los participantes fueron entrevistados para conocer sus intereses, concepciones y argumentos relacionados en el estudio de modelos matemáticos.

Según Stake (1999), las entrevistas cualitativas se articulan con las observaciones cualitativas, además buscan la suma de opiniones o de conocimientos de múltiples entrevistados. En este sentido, las preguntas basadas en la investigación deben ensayarse, sin aferrarse a los límites establecidos en el diseño de la investigación. Este instrumento de recolección posibilitó obtener información acerca de cómo los participantes, al relacionar situaciones del contexto de residuos plásticos en las actividades de modelación, construyeron diferentes maneras para determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie, a partir de interacciones o prácticas: comunicación, trabajo en equipo, argumentación, expresión de ideas, representaciones, y explicaciones. Por tanto, el lenguaje matemático se reconoce como elemento que puede relacionar un proceso de modelación matemática con modelos matemáticos. Esta relación permitió comprender las diferentes maneras de darle uso y aplicación a las expresiones y representaciones matemáticas.

3.4.3. Documentos escritos.

Stake (1999) plantea que los documentos escritos “sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente” (p. 63). Mediante esta fuente se observó los modelos matemáticos generados por los participantes, a partir de las situaciones del mundo real y mundo matemático, tal como se describe en el ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009).

Esta es una fuente de información tradicional y la que mayor cantidad de datos directos puede proporcionar acerca de los acontecimientos estudiados (Henríquez, 2007).

En este caso, evidenció en forma directa las ideas y conceptos relacionados con modelos matemáticos a partir de esta propuesta de estudio. Los registros ofrecieron un hilo conductor para cada actividad, al planificar acciones concretas en cada momento del proceso de modelación.

En los documentos escritos se identificaron símbolos, gráficas, algoritmos, herramientas y demás procedimientos que los participantes utilizaron en el desarrollo de las actividades de modelación matemática. Estos documentos evidenciaron cómo se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos.

3.5. Trabajo de campo.

Los estudiantes de educación media de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, profundización Matemática y Ciencias Naturales, decidieron hacer uso de material reciclable para transformar una parte del suelo al interior de la institución educativa. La idea surgió en el desarrollo de uno de los proyectos sociales avalado por el consejo académico y se constituyó como proyecto transversal. Esta situación fue considerada para un proceso de modelación matemática porque permitió a los participantes determinar un modelo a partir del contexto de residuos plásticos, orientado mediante el marco de la modelación de Blum y Borromeo-Ferri (2009). En este sentido, se determinaron algunos modelos matemáticos que surgieron a partir de la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos.

Los momentos y subprocesos de un proceso de modelación de Blum y Borromeo-Ferri (2009) hicieron parte en la construcción de una placa huella dentro de la institución. A continuación, se enuncia en relación con las fuentes para la generación de datos cualitativos, estos momentos y procesos de modelación de acuerdo con el contexto cualitativo de la investigación de manera paralela a las mismas acciones investigativas:

Tabla 2: Descripción del trabajo de campo

Momen- tos	N°	Encuentros Subprocesos	Propósitos	Fuentes para la generación de datos cualitativos
-----------------------	-----------	-----------------------------------	-------------------	---

M1	1.	Situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos.	Identificar y recolectar materiales no biodegradables que fueron tenidos en cuenta para el diseño de bloques y la construcción de la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes, entrevista semiestructurada.
	1.1.	<i>Reconocimiento del garaje de bicicletas.</i>	Identificar características del lugar físico donde se pretende construir la placa huella con material reciclable.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes, entrevista semiestructurada.
	1.1.1.	<i>Descripción de la situación.</i>	Plantear descripciones del lugar donde se pretende construir la placa huella con material reciclable.	Observaciones y escritos por los participantes.
	1.1.2.	<i>Características de la superficie que se pretende transformar.</i>	Representar mediante un dibujo o imagen, las características de la superficie que se pretende transformar.	Observación, revisión de documentos y Entrevista semiestructurada.
	1.2.	<i>Preparación del terreno para transformarlo desde una superficie irregular a una superficie plana.</i>	Buscar estrategias para nivelar, preparar o transformar el lugar dispuesto para la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes, entrevista semiestructurada.

1.3.	<i>Proceso de recolección de residuos plásticos para el diseño y construcción de bloques.</i>	Identificar y recolectar los materiales no biodegradables que puedan ser utilizados para diseñar bloques en el marco de la construcción de la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes, entrevista semiestructurada.
1.3.1.	<i>Materiales no biodegradables encontradas en el establecimiento escolar.</i>	Identificar y recolectar materiales no biodegradables producidos por la comunidad educativa.	Observación, revisión de documentos y Entrevista semiestructurada.
1.3.2.	<i>Función cumplida por cada uno de los materiales en el diseño de la placa huella.</i>	Determinar la función que cumple los materiales no biodegradables identificado por los participantes, en la construcción de la placa huella.	Observación, revisión de documentos.
1.3.3.	<i>Dimensiones de los fondos de botellas plásticas recicladas.</i>	Conocer las dimensiones de los fondos de botellas plásticas recicladas.	Observación, revisión de documentos y Entrevista semiestructurada.
1.3.4	<i>Diseño de bloque de botella novedoso, económico y de mejor calidad que un bloque convencional.</i>	Realizar un modelo de bloque de botellas recicladas que sea novedoso, económico y	Observación, revisión de documentos y Entrevista semiestructurada.

		de mejor calidad que un bloque convencional.	
1.3.5	<i>Ventajas y desventajas que tiene este tipo de bloque de botellas plástica.</i>	Explicar las ventajas y desventajas que tiene este tipo de bloque no convencional con relación al convencional.	Observación, revisión de documentos.
1.4.	<i>Ubicación de los bloques diseñados con residuos plásticos en la construcción de la placa huella.</i>	Determinar estrategias para la ubicación de los bloques diseñados con residuos plásticos en la construcción de la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes, entrevista semiestructurada.
1.4.1.	<i>Especificaciones de las superficies acordonadas.</i>	Especificar medidas asociadas a las superficies acordonadas.	Observación, revisión de documentos y Entrevista semiestructurada.
1.4.2.	<i>Función de los residuos sólidos.</i>	Determinar las funciones que cumplen los residuos sólidos en la construcción de la placa huella.	Observación, revisión de documentos.
1.4.3.	<i>Ubicación de bloques de botellas plásticas recicladas.</i>	Idear formas para la ubicación de bloques de botellas plásticas recicladas.	Observación, revisión de documentos.
1.5.	<i>Muestra de un producto final en la construcción de placa</i>	Explicar el proceso final, haciendo una descripción general de lo ocurrido en	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y

		<i>huella con material reciclable.</i>	la construcción de la placa huella.	entrevista semiestructurada.
M2	2.	Representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos.	Realizar una representación mental, una imagen o plano de la placa huella construida con botellas plásticas recicladas.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
M3	3.	Idealización y simplificación de la información en la transformación de una superficie.	Definir cómo encontrar objetos matemáticos que sean de interés de los participantes, para trascender a un modelo real, a través de la información abstraída en la identificación de algunas regularidades.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
	3.1.	<i>Forma geométrica descritas en cada superficie acordonada.</i>	Describir formas geométricas que tiene cada superficie acordonada, incluyendo sus respectivas dimensiones.	Observación y documentos escritos.
	3.2.	<i>Cantidad de bloques de botellas plásticas observadas en una superficie acordonada.</i>	Determinar la cantidad de bloques de botellas plásticas recicladas, requeridas para cubrir cada superficie acordonada.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.

	3.3.	<i>Representación del modelo real.</i>	Representar regularidades considerada como modelo real.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
	3.4.	<i>Variables identificadas en el modelo real.</i>	Identificar las regularidades representadas en el modelo real.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
M4	4.	Modelos matemáticos en la transformación de una superficie.	Determinar un modelo matemático que avale los resultados obtenidos en el modelo real, a través de la matematización de variables encontradas del entorno real, hasta trascender al entorno matemático.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
	4.1.	<i>Elementos cuantificables en la placa huella.</i>	Cuantificar regularidades halladas en la construcción de la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
	4.2.	<i>Identificación de regularidades y símbolos.</i>	Identificar y simbolizar regularidades cuantificables de la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.

	4.3.	<i>Representación gráfica de regularidades.</i>	Representar gráficamente esta información para identificar el comportamiento de las regularidades.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
M5	5.	Momento donde los participantes trabajan con resultados matemáticos en contexto.	Analizar el modelo matemático que emergió en el momento anterior, a través de un trabajo matemático para obtener resultados matemáticos.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
	5.1.	<i>Relación matemática hallada por los participantes.</i>	Determinar una relación matemática, que permita calcular la cantidad de bloques que se requieren para cubrir una determinada superficie	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
	5.2.	<i>Comparación de relaciones matemáticas.</i>	Comparar resultados hallados por cada equipo de participantes, para estableciendo relaciones y/o diferencias de sus hallazgos.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
M6	6.	Validación de resultados obtenidos en un contexto particular.	Asociar resultados matemáticos con resultados reales, para validar el modelo matemático en el cumplimiento de las características y	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.

		condiciones generales del contexto particular.	
6.1.	<i>Cantidad de botellas que se necesitan para cubrir una superficie de un metro cuadrado.</i>	A través del modelo hallado, determinar la cantidad de bloques de botellas plásticas que se requieren para cubrir una superficie de un metro cuadrado.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
6.2.	<i>Comparación de resultados.</i>	Comparar resultados de bloques de botellas que se requieren para cubrir una superficie de un metro cuadrado con los resultados reales observados en la placa huella.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
6.3.	<i>Justificación de resultados.</i>	Justificar si los resultados obtenidos podrían considerarse como solución al modelo matemático hallado.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.
6.4.	<i>Condiciones para validar los resultados.</i>	Determinar condiciones para que el modelo matemático sea válido en el entorno real.	Observación, Guía Resuelta por los estudiantes y documentos escritos.

Estos momentos y subprocesos fueron guiados por el docente investigador, a partir de preguntas que se describen y analizan en el apartado Análisis de resultados. Los participantes realizaron acciones consecuentes que aportaron información a la investigación

3.6. Análisis de la información

Para la triangulación y análisis de datos se utilizaron las anteriores fuentes de recolección, a partir de las consideraciones de Stake (1999) sobre la perspectiva cualitativa. A este análisis se asocia una interpretación directa de ejemplos individuales que se convierten en categorías y se compilan en un esquema interpretativo formado por varios momentos descritos en el clico de Blum y Borromeo-Ferri (2009), tal como se evidencia en el trabajo de campo. De esta forma, se estudian las maneras para determinar los modelos matemáticos asociados a la transformación de superficie en contexto de residuos plásticos.

Con base en el estudio de caso de Stake (1999), fue necesario propiciar los momentos para un proceso de modelación matemática en situaciones del contexto de residuos plásticos. En este sentido, se reconocieron las distintas relaciones que hicieron los participantes a partir del contexto de construcción de una placa huella, a través de cada momento, para evidenciar la manera cómo se determinaron modelos matemáticos a partir de un contexto particular.

La información que proviene de las diferentes fuentes fue seleccionada, organizada y analizada de manera que se identificara el hilo conductor que posibilita la construcción de argumentos para responder a la pregunta de investigación.

En cuanto al proceso de modelación matemática descrito por Blum y Borromeo-Ferri (2009), se buscó analizar la relación entre el uso del reciclaje como entorno real y las matemáticas.

3.7. Cronograma

El proceso para responder a la pregunta y al objetivo de esta investigación inició en marzo de 2018 y terminó en junio de 2020, como se muestra en la Tabla N°2. Se presentan las actividades que se realizaron durante el proceso de investigación, incluyendo el diseño y

aplicación del trabajo de campo y el intervalo de tiempo en el cual se desarrollaron y analizaron.

Tabla 2: Descripción de la actividad

Descripción de la actividad	Semestre			
	1	2	3	4
1. Revisión de literatura.				
2. Diseño de instrumentos de recolección de información.				
3. Diseño metodológico.				
4. Aplicación de los instrumentos de recolección de información.				
5. Sistematización de información.				
6. Análisis y triangulación de información del trabajo de campo.				
7. Elaboración de informes y conclusiones.				
8. Redacción del informe de investigación.				
9. Presentación a Congresos Internacionales.				

3.8. Validez de la investigación

La validez de la investigación cualitativa se asocia a la confiabilidad del estudio mediante la triangulación de la información, y del trabajo y análisis realizado por Stake (1999). En esta investigación, se hizo énfasis en la triangulación de datos que se recolectaron a través de los instrumentos y técnicas que se utilizaron durante el proceso investigativo. Los alcances son afines con aspectos teóricos, metodológicos y pragmáticos a partir de los cuales se identificaron las formas en que los estudiantes generan maneras para determinar modelos matemáticos a partir de un contexto particular.

Metodológicamente, se da cuenta del dominio de las actividades de modelación por parte de los estudiantes de educación media para determinar modelos matemáticos. En consecuencia, a partir de las orientaciones del docente investigador, ellos son los encargados de su propio aprendizaje, apropiándose de conocimientos matemáticos que aplican en situaciones de su propia realidad y vivencias.

3.9 Criterios éticos

Esta investigación considera el reciclaje como una oportunidad y respuesta al manejo de residuos, como también una vía en el aprendizaje de las matemáticas y la protección del medio ambiente, al interior de la institución educativa donde los participantes jugaron un papel importante en la visibilización de su cotidianidad y de sus prácticas socioculturales, las cuales hicieron uso de material reciclable al transformar una parte del suelo en el interior de la Institución Educativa San Pedro de Urabá. En este sentido, la institución autorizó la realización de esta investigación y el uso de su nombre avalado por el consejo académico, aprobado en el marco del desarrollo de uno de los proyectos sociales, configurándose como proyecto transversal. Por tanto, esta investigación articula el proyecto ambiental desarrollado en la institución educativa con las maneras para determinar los modelos matemáticos asociados a la transformación de un lugar del establecimiento escolar, usando botellas plásticas recicladas.

En esta investigación, hay un proceso de confiabilidad para cuidar del nombre de los participantes y cualquier otro vinculo asociados a ellos. En este sentido, los padres de familia firmaron un consentimiento informado debido a que los participantes eran menores de edad, siguiendo los aspectos legales que debe tener el documento. Para mayor referencia de la información, este consentimiento se encuentra en el Anexo 1.

4. Análisis de resultados

El objetivo de la presente investigación es determinar modelos matemáticos a partir de un proceso de modelación. Por lo tanto, en este capítulo se analiza y presentan los resultados de este estudio. Los dieciséis participantes de educación media se denominaron con los siguientes seudónimos: Jesús, Andrés, Vanesa, Patiño, José, Juan, Duberney, Tamara, Correa, Miranda, Chica, Luisa, Ester, Manuel, David y Lizet.

Como producto de este proceso de investigación se analizan seis momentos que se basan en el ciclo retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) y hacen referencia a:

- *Situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos.*
- *Representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos.*
- *Idealización y simplificación de la información en la transformación de la superficie.*
- *Modelos matemáticos en la transformación de una superficie.*
- *Resultados matemáticos en contexto de la placa huella.*
- *Validación de resultados obtenidos en un contexto particular.*

En cada apartado se analiza estos momentos y los subprocesos correspondientes, teniendo en cuenta la información obtenida a partir de las fuentes o rutas del trabajo de campo que se utilizaron en esta investigación: observación, entrevista semiestructurada y documentos escritos.

De esta forma, se teje un hilo conductor entre los momentos para establecer las maneras en que se determinan los modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media. Se analiza los conocimientos previos que fueron puestos en una secuencia mediante el marco del proceso de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009); la experimentación por parte de los participantes y el investigador en la construcción de la placa huella; y la validez de los modelos hallados, tanto en la literatura como en la experiencia de los participantes durante el proceso de esta investigación.

Se hizo uso de la triangulación de los resultados de estos momentos bajo la mirada de Stake (1999), a partir de la observación, entrevista semiestructurada y documentos escritos, como fuente o ruta del trabajo de campo, para la interpretación directa de algunos episodios, la cual fue convertido en categoría, para ser interpretada, compilada y así construir un esquema que permita estudiar en los participantes, modelo o modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos.

Los participantes de esta investigación hicieron uso de material reciclable para transformar una parte del suelo al interior de la institución educativa. Esta situación fue considerada para un proceso de modelación matemática porque posibilitó a los participantes construir maneras para determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plástico. En este sentido, se analizan la manera para determinar modelos matemáticos en esta situación.

A continuación, se describen los procesos y resultados de los seis momentos.

4.1. Situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos.

Mientras se realizó un recorrido con los participantes, donde se construyó la placa huella, se desarrollaron actividades a través del uso de fuentes tales como la observación, revisión de documentos y entrevista semiestructurada. De esta forma, se indaga por las características de la superficie a transformar.

También se tiene cuenta las acciones realizadas por los participantes y la interacción con el contexto ambiental de la institución, para la identificación y recolección de los materiales no biodegradables que se usaron en el diseño de los bloques para la construcción de la placa huella.

A continuación, se analiza el primer subproceso de modelación matemática propuesto por Blum y Borromeo-Ferri (2009), articulado a un contexto particular como “situación real”. En este subproceso también se analizan los modelos matemáticos que se

determinaron al relacionar el uso de residuos plásticos y las matemáticas, a partir del interés de los participantes involucrados en la investigación.

4.1.1. Reconocimiento del garaje de bicicletas (Institución Educativa San Pedro de Urabá).

Los participantes y el profesor de matemáticas (docente investigador) hicieron una visita de campo al sitio donde se ubican las motos y bicicletas de los estudiantes y educadores. Al respecto, realizaron descripciones del lugar donde identificaron, a través de sus escritos, las características de la superficie que se pretende transformar. Cinco de seis equipos hablan de un lugar al interior de la institución para parqueos de vehículos (Motos y bicicletas) donde aseguran haber encontrado un terreno irregular, lleno de raíces y lomas.



Figura 7: *Fotografías del garaje de bicicletas y motocicletas (marzo 2019).*

Los seis equipos coinciden en que el terreno está desnivelado. Tres equipos de los seis equipos aseguran haber encontrado piedras, zanjas, desechos y hierba en todo el terreno y dos equipos afirman que el terreno es parcialmente pantanoso en épocas de lluvia. De forma posterior, realizan un dibujo las características de la superficie que se pretende transformar.

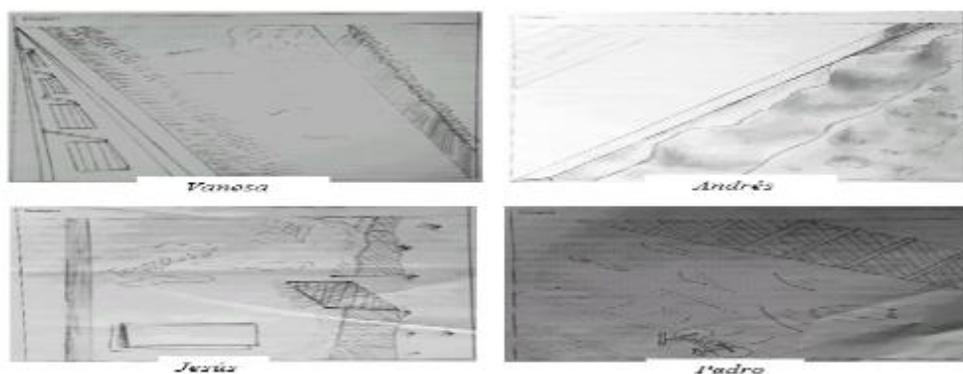


Figura 8: Descripción de los participantes sobre características de la superficie a transformar (marzo 2019).

En la mayoría de los casos, revelan características negativas del sitio o lugar observado por ellos. En este sentido, en la primera experiencia vivida por los participantes solo percibieron dificultades ya que no existe un uso consciente de estrategias de resolución de problemas. De acuerdo con Blum y Borromeo-Ferri (2009), sus estudios han demostrado que todas las posibles barreras cognitivas pueden observarse empíricamente, específicamente para tareas individuales.

Las barreras anteriores que se presentan evidencian la necesidad de un cambio. Por lo tanto, los participantes manifiestan interés por organizar este lugar. En este orden de ideas, a través de una entrevista semiestructurada, se les preguntó sobre su interés en este sitio. En la Tabla 3 se presentan las respuestas de algunos participantes y sus argumentos a la pregunta *¿Qué los motivó a elegir ese lugar, existiendo otros lugares con mayor visibilidad en la institución?*

Tabla 3: Entrevista semiestructurada. Elección del lugar (Audio marzo 2019).

<i>Investigador</i>	<i>¿Qué los motivó a elegir ese lugar existiendo otros lugares con mayor visibilidad en la institución?</i>
<i>Participantes</i>	<i>Respuesta de los participantes.</i>
Correa	Porque se realizó en un lugar con visibilidad externa. Por lo tanto, es llamativo ante la mirada no solo de los estudiantes que están dentro de la institución, sino que también llama la atención a todo aquel que pasa fuera del establecimiento, porque se encuentra en frente de la institución, que en

este caso corresponde a la zona donde parquean motos y bicicletas, al lado de la entrada principal. Esto hace que la construcción de la placa huella o el proyecto sea llamativo, por eso decidimos hacerlo en este lugar.

Vanesa

La idea desde un inicio era escoger un lugar dentro de la institución para realizar nuestro proyecto, un espacio libre y que no tuviera algún inconveniente para realizar el trabajo en dicho terreno. El lugar o espacio que se seleccionó ya tenía una previa utilización como parqueadero de bicicletas, pero habría serias dificultades por la forma irregular del suelo. Teniendo presente que es un parqueadero y que la zona tenía buen espacio, ante el consejo académico de la institución pedimos el usar este lugar para nuestro proyecto.

Miranda

Mi motivación a escoger ese lugar fue porque es un espacio dentro de la institución que se ha preocupado para organizarlo, para ponerlo en buenas condiciones y cómo ha estado muy abandonado todo el tiempo que he estudiado en el establecimiento, entonces creo que no fue una mala idea de seleccionar ese lugar para la construcción de la placa huella, porque es un lugar donde los compañeros guardan sus bicicletas y, siempre que llueve, el suelo se torna pantanoso. Entonces creo que no es mala idea porque se estaría evitando el barro y le daría una mejor presentación al establecimiento en lo que respecta al espacio donde se desea construir la placa huella. Este es un espacio que nunca se ha renovado desde que yo estoy estudiando en la institución.

La teoría de un concepto personal y mental genera criterios para conocer las preferencias y gustos de los estudiantes, clarificando diferencias entre los gustos y aptitudes para definir las formas del pensamiento de las personas (Sternberg, 1997, 1999). En este sentido, las diferencias individuales expresadas por cada uno de los participantes, asociada a la *elección de un lugar en el entorno escolar*, están relacionadas a los conceptos personales a partir de sus maneras de pensar. Estas formas de pensamiento incluyen variables como el entorno, la cultura, la escolaridad, la crianza y el género; estos son aspectos que definen las rutas del pensamiento de un estudiante.

En concordancia con Borromeo-Ferri (2009), los participantes muestran preferencias para diferentes imaginaciones pictóricas internas y representaciones pictóricas externalizadas, así como las preferencias para el entendimiento de hechos y conexiones a través de representaciones holísticas. Además, se considera que las imaginaciones internas son afectadas por fuertes asociaciones con situaciones vividas.

Por otra parte, las intenciones de los participantes tal como se evidencia en la preparación del terreno para transformarlo de una superficie irregular a una superficie plana, no se estancan en opiniones personales porque sus intenciones superan una simple observación.

4.1.2. Preparación del terreno para transformarlo de una superficie irregular a una superficie plana.

Se generó la siguiente pregunta: ¿qué estrategia podrías utilizar para que este lugar irregular se pueda transformar en un lugar plano? Los participantes buscaron estrategias para preparar o transformar el terreno dispuesto para la placa huella de forma que se encuentre totalmente nivelado.

Los 16 participantes señalan haberse repartido la zona para nivelar su superficie de forma homogénea. Les correspondió de 2m² por participante y, para tal efecto, usaron palas y aplanador (pisón), de manera que el terreno presente una superficie plana. Cinco de los seis equipos de participantes aseguran haber usado otros utensilios que facilitarían la nivelación del terreno, tales como palines, machetes, pica y hasta una cinta métrica para las respectivas mediciones. Solo dos equipos afirman que usaron una barra de hierro porque el suelo estaba totalmente duro. La Figura 8 muestra el proceso de la preparación del sitio donde se construyó la placa huella.



Figura 9: Momentos de transformación del espacio físico (abril 2019).

Muchos de los participantes decidieron colaborar mutuamente en aspectos relacionados con el préstamo de herramientas y la ayuda física para aplanar el sitio.

Una característica peculiar del aprendizaje por proyectos está dada por el aprendizaje cooperativo/colaborativo, el cual desempeña un papel fundamental por motivar hacia el trabajo en equipo (Manzueta, J. Machado, E. y Blanco, R. 2018). Se afirma que la modelación de situaciones en el entorno *escolar* es un contexto perfecto frente a la enseñanza y aprendizaje de los participantes.

En la siguiente tabla se presentan algunas respuestas que sustentan el interés de construir una placa huella:

Tabla 4: Entrevista semiestructurada. Interés de construir una placa huella (Audio, abril 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Por qué decidieron construir una placa huella? ¿Planearon la construcción en lo que respecta a planos, costos y otros detalles?</i>
Vanessa	Se decidió construir una placa huella porque siempre que lloviznaba, las motos y bicicletas tenían dificultad para salir. Por eso, se pensó en las

personas que dejaban sus vehículos en ese espacio, por eso se pensó en la construcción de la placa huella para tener facilidad en la entrada y salida estando el suelo con mejor firmeza.

Con relación a planos, costos y materiales a utilizar, sí se tuvo en cuenta. La idea era que todo lo que se hiciera, no tuviera costos elevados. En cuanto a los planos, se tuvo en cuenta la forma (planos) de la placa huella, la medición de distancias en su contorno para facilitarnos el trabajo y se pensó en materiales que cumplieran un rol importante en lo que respecta a decoración y acabados en la placa huella.

Miranda La placa huella se decidió construir porque había una problemática en el espacio donde se estacionan las bicicletas y motos de los estudiantes y profesores debido a que, en época de lluvias, este espacio es pantanoso, por lo que se le dificulta poder entrar y salir en esta temporada de lluvia debido a que los zapatos no podían salir limpios. En cambio, con esta placa huella, se busca atacar este problema para que los estudiantes y profesores pudieran entrar y salir tranquilamente sin miedo a que el uniforme se pueda ensuciar.

En cuanto a planeación, nos sentamos a dialogar analizando los posibles costos de los materiales y, además, el uso de materiales con que podríamos hacer la placa huella.

Duberney Decidimos construir dicha placa huella porque teníamos la intención de realizar un proyecto donde la institución, en su entrada, tuviera una vista agradable ante los visitantes y, además, con esta construcción podríamos adquirir conocimiento para nuestra vida.

En cuanto a planos, costos y otros detalles sí nos reunimos a planificar y, de entrada, notamos un suelo totalmente desnivelado, decidimos nivelar el terreno para poder seguir con la placa huella.

Patiño La decidimos construir precisamente porque no había un sector donde los profesores y los estudiantes pudieran dejar su vehículo en un espacio seguro, también se tuvo en cuenta que en ese espacio, al momento de llover, se volvía de difícil acceder a dicho lugar.

Sí, se tuvo en cuenta esos temas para la construcción ya que desde un principio se pensó en cómo sería, qué materiales usaríamos y con qué medidas se podría trabajar para cubrir el espacio asignado para tal obra y obtener la máxima eficiencia

Tamara

Con relación a la construcción de la placa huella, esta se hizo con el objetivo de darle una mejor consistencia al suelo para tener facilidad al momento de parquear motos y bicicletas para que probablemente no se cayeran estos vehículos.

Lo que respecta a planos, costos y otros detalles, sí fue planeada, con la ayuda de nuestros maestros y personal que nos colaboró en dicha construcción. Se pensó en el uso de materiales, el costo de los materiales tales como el cemento entre otros; todo esto lo tuvimos en cuenta, la idea es tener todo organizado para no improvisar.

Teniendo en cuenta la justificación de los participantes, se reconoce una solución al problema de épocas de lluvias, aunque un participante considera que esta placa huella le daría una vista agradable a los visitantes y que, con este proyecto, se puede adquirir conocimiento que favorece al diario vivir. En este sentido, en la apreciación realizada por *Duberney*, se evidencia que las experiencias vividas en un entorno no escolar son herramientas de conocimiento empírico que favorecen su aprendizaje.

En referencia al pensamiento matemático de los estudiantes, Blum y Borromeo-Ferri (2009) consideran que empíricamente se podrían reconstruir tres estilos de pensamientos tales como: el "visual" (pictórico-holístico), donde se muestran preferencias por imaginaciones y representaciones centradas en el proceso del mundo real; el "analítico" (disección simbólica), donde se muestran preferencias por imaginaciones y representaciones formales a través de un lenguaje simbólico o verbal centradas en el proceso de las matemáticas; y el pensamiento "integrado", asociado a estudiantes que pueden combinar formas de pensamiento visuales y analíticas en la misma medida. En este sentido, en la medida que los participantes puedan ser conducidos en un proceso de modelación matemática, se pudo establecer en qué estilo de pensamiento se encuentran con relación a sus conocimientos empíricos.

En relación con la pregunta respecto a planos, costos y materiales, *Vanesa, Miranda, Patiño y Tamara* consideran que la idea era de economizar. Además, especifican que, en cuanto a los planos, se tuvo en cuenta la forma plana y la medición de su entorno para facilitar el trabajo. *Vanesa* afirma que se pensó en materiales que cumplieran un rol importante en lo que respecta a decoración y acabados.

En este orden de ideas, haciendo uso de la misma fuente, se preguntó los participantes: *¿Consideraron buscar ayuda para nivelar el terreno?*

Tabla 5: Entrevista semiestructurada. Razón por la cual decidieron trabajar sin ayuda externa (Audio, abril 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Consideraron buscar ayuda para nivelar el terreno?</i>
Miranda	De considerarlo prácticamente no, porque en el equipo de los chicos que estuvimos trabajando en la placa huella, algunos teníamos conocimientos de cómo nivelar el suelo. Así que no vimos la necesidad de buscar ayuda para nivelar este terreno, solamente lo hicimos con la ayuda del profesor y los estudiantes que sabíamos.
Duberney	De buscar ayuda para nivelar el terreno, si lo consideramos, pero en conjunto tomamos el acuerdo de hacerlo nosotros mismos, ahorrar costos, ya que eran pocos los que teníamos conocimientos sobre cómo nivelar el suelo para que al final nos quedara totalmente plano.
Patiño	No, todo lo hicimos nosotros con las palas y las demás herramientas, nos repartimos la zona en espacios iguales para remover pasto, basuras, impurezas y, finalmente, nivelar el suelo para que la construcción fuera uniforme.
Vanesa	Nadie nos ayudó a nivelar el sector acordonado, cada quien midió una superficie de dos metros cuadrados y procedimos a nivelar utilizando herramientas tradicionales y locales tales como: palas, picas, palines, entre otras herramientas. Todo eso que hicimos para remover la parte superficial del suelo, y luego la compactamos para que el suelo quedara totalmente plano.

Duberney consideró la posibilidad de pedir ayuda para nivelar el suelo, pero se sometió al acuerdo que se tomó en conjunto, dado que *Miranda, Patiño y Vanesa* aseguran que algunos tenían conocimiento de cómo nivelar una superficie física (suelo). El trabajo colaborativo en la modelación matemática permite interacciones que favorecen un ambiente social y la promoción de discusiones para la solución de problemas más complejos (Alsina, 2007). En este sentido, se evidencia en los participantes el deseo de trabajar en una propuesta escolar asociada a un entorno social, basada en conocimientos aprendidos y/o vividos en sus hogares relacionados con la construcción o remodelación informal de viviendas, en las cuales se desempeña algún familiar o amigo.



Figura 10: *Momentos de nivelación del espacio físico (abril 2019).*

En la imagen se evidencia una superficie de terreno preparada por los mismos participantes con un propósito claro, con herramientas y estrategias definidas.

4.1.3. Proceso de recolección de residuos plásticos para el diseño y construcción de bloques.

Luego de las observaciones y acciones anteriores, los participantes procedieron a identificar y recolectar los materiales no biodegradables que podrían utilizar para diseñar bloques en el marco de la construcción de la placa huella, a partir de la transformación y acordonamiento de un lugar físico de la institución.

Todo esto conllevó a preguntarles. ¿Qué materiales no biodegradables puedes encontrar en el establecimiento escolar?, ¿Cuáles podrían ser útiles para la construcción de la placa huella?

En cuanto a la identificación de materiales no biodegradables encontrados al interior de la institución, los 16 participantes involucrados en la investigación aseguran haber encontrado botellas plásticas de diferentes tamaños, especialmente envases de gaseosa de entre 2,5 y 3 litros, otro material hallado fueron bolsas plásticas y botellas de vidrios. Cuatro de los seis equipos de participantes detallaron materiales no biodegradables tales como: empaque de papas, vasos desechables y palitos de bombón. Tres equipos especifican haber encontrado empaque de yupis y de confites y solo un equipo de los seis encontró envoltura de galletas y mecatos. A continuación, se evidencia esta recolección.



Figura 11: Momentos de recolección de residuos plásticos (abril 2019).

Surgieron inquietudes relacionadas con este momento contextual que se presentan a continuación.

Tabla 6: Entrevista semiestructurada. El reciclaje en la institución (Audio, abril 2019).

Participantes	<i>¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclables para la placa huella? ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron?</i>
----------------------	---

Vanesa

¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? Lo que sucedía con el reciclaje en la institución era que nadie lo utilizaba. Siempre terminaba desechado en el basurero y no se le daba un uso eficiente en beneficio para el medio ambiente. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? Porque de algún modo se podía utilizar para beneficio dentro de la institución, y si no se usaba este material, no podríamos asumir costos en la construcción de la placa huella, en cambio, con este material reciclable lo que se hizo fue hacer uso de algo que no tenía ninguna utilidad dentro de la institución y que también fuera económico. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? No consideramos algunos reciclables biodegradables tal como lo son el papel y el cartón, porque con el agua se descompone, tampoco consideramos el uso de vidrios por su fragilidad.

Miranda

¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? Nosotros tuvimos investigación sobre el uso del reciclaje en la institución, y prácticamente concluimos que todo este reciclaje se iba a la basura como cualquier otra basura no reciclable. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? A partir de este proyecto, consideramos utilizar el uso de estos materiales reciclables, tales como: envases de gaseosa, bolsas de papitas, entre otros materiales, y de esta manera, será más fácil o más viable trabajar con este material reciclable conseguido en la misma institución, lo cual nos ahorraría costos. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? Las opciones que no consideramos fue el uso de botellas plásticas pequeñas porque es más complejo para rellenar y además necesitaríamos mayor cantidad. Otra opción que no consideramos fue el uso de cartón y papel porque se desintegra con mayor rapidez y otros materiales que no lo utilizamos para nuestro propósito.

Duberney

¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? El material que se podría reciclar en la institución se perdía en el basurero donde los vehículos encargados de recolectar se lo llevaban. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? Decidimos utilizar este material en la construcción de la placa huella para contribuir con la conservación del medio ambiente. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? Quizás sí podrían existir otras opciones, pero sólo decidimos hacerlo con hormigón y con piedra y, además, el uso de material reciclable porque ayudaba a mejorar la institución y a nuestro planeta.

Patiño

¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? Con el reciclaje no se hacía nada en la institución, todo termina en las canecas de la basura. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? Se consideró su uso por que nadie más lo usaba, se colabora con el medio ambiente y también se ahorra dinero. Además, percibimos que podría ser un buen material para trabajar en la placa huella. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? Las opciones que no se consideramos fueron la de usar papel, cartón, vidrio y otras.

Los participantes consideran que el material reciclable terminaba desechado en el basurero, donde los vehículos encargados de recolectar se lo llevaban. Según el concepto que tienen los participantes entrevistados sobre el manejo de las basuras, desconocen totalmente el fin de los residuos producidos por los miembros de la institución, pero consideran que no se le dan un manejo adecuado y benéfico al medio ambiente.

Los participantes afirman que se podría utilizar para beneficio dentro de la institución, por ser un material al que no se le está dado uso, lo cual ahorraría costos y, a la vez, ayudaría a la conservación del medio ambiente. De igual forma, los participantes argumentaron no tener en cuenta el papel y cartón, porque se degrada con facilidad al exponerlo a la intemperie y, el vidrio, por su fragilidad.

Una vez que se identificaron y recolectaron los materiales no biodegradables, los participantes explicaron la función que de cada uno de estos en el diseño de la placa huella. Cinco de los seis equipos de participantes detallan que las botellas plásticas recicladas serán recortadas por su fondo con una altura de 11cm y servirán como estructura o soporte de bloques. Cuatro de los seis equipos de participantes dicen que las envolturas de mecatro se desmenuzan en pequeñas partículas y que este picadillo soportará los bloques para evitar grietas en el suelo y evitar filtración de agua en temporadas de lluvia. Solo dos equipos detallan que el interior de los fondos de botellas se rellena con una piedra que ocupe gran parte del volumen y que el resto de los fondos de botellas se rellenan con cemento (hormigón); además, argumentan que las botellas se pintarán para darle un estilo decorativo a la placa huella.



Figura 12: Uso de botellas y picadillo de residuos plásticos (abril 2019).

Las evidencias muestran el uso de materiales de residuos plásticos. Argumentan que este picadillo de plástico (b) homogéneo en la superficie del suelo aplanado por ellos (a), servirá como soporte o aislante para los bloques hechos con botellas plásticas recicladas (c), y además evitarán fallas geológicas en temporadas de sequía, donde el suelo se dilata.

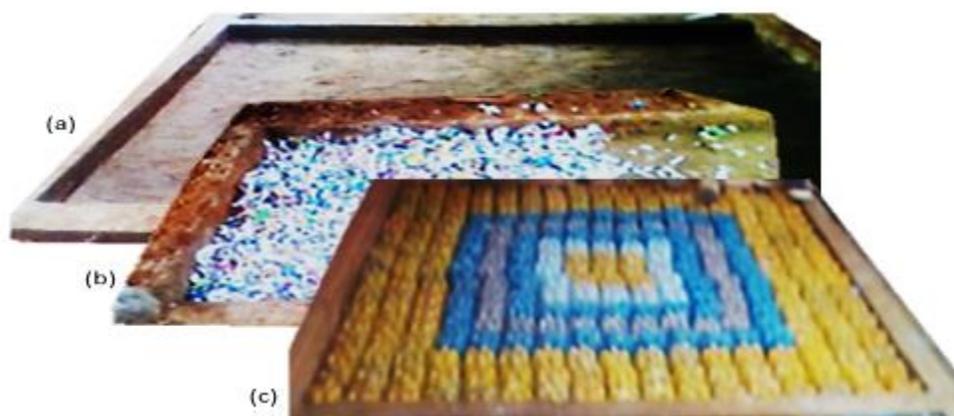


Figura 13: (a) Superficie del suelo aplanado, (b) Picadillo de plástico ubicado homogéneamente y (c) Bloques con botellas plásticas recicladas.

Los participantes deciden trabajar con botellas de gaseosa de 2,5 y 3 litros. La siguiente pregunta hizo parte de una entrevista semiestructurada que los estudiantes respondieron con el medio de audios.

Tabla 7: Entrevista semiestructurada. El trabajo con botellas de tres o 2,5 litros (Audio, abril 2019).

Participantes	¿Por qué decidieron trabajar con botellas de 3 o 2,5 litros?
Vanesa	Decidimos hacer uso de las botellas plásticas de 2.5 y 3 litros porque considero que son las más grandes que se encontraban en el mercado y también son las que venden en la tienda. Si hubiéramos hecho uso de botellas de menor tamaño, entonces necesitaríamos mayor cantidad de botellas para poder rellenar el espacio acordonado en la placa huella.
Miranda	Escogimos estas botellas observando los diferentes tamaños de botellas plásticas desechadas en la institución. Llegamos a la conclusión de que, entre más grande sea la botella, más espacio ocupa a la hora de rellenar el cuadro acordonado.
Duberney	Respecto a esto, decidimos trabajar con este tipo de botellas porque sus medidas eran apropiadas con las vigas acordonadas que ya se habían

hecho y a la hora de ubicar las botellas obtenemos un producto justo y ordenado.

Patiño Las botellas de 2.5 a 3 litros tienen mayor capacidad de almacenamiento y son las de mayor comercialización en la institución, por tanto, nos era de mucha utilidad usar esas botellas que nadie utilizaba. Con esta propuesta se está contribuyendo al mejoramiento del medio ambiente.

En cuanto a la indagación sobre el uso de botellas de tres o 2,5 litros, *Vanesa y Patiño* consideran que es la de mayor comercialización en la institución. Además, *Vanesa* piensa que, si las botellas hubiesen sido de menor tamaño, entonces se necesitan cantidades mayores para cubrir determinada superficie. Teniendo en cuenta esta apreciación, se evidencia el concepto de una proporcionalidad inversa. Con relación a la modelación matemática como estrategia en la enseñanza y el aprendizaje, se asume el modelo matemático como una construcción a partir de una situación del mundo real y, con base en las consideraciones de Blum (2002), se afirma que una proporcionalidad inversa se considera como un modelo de un tipo estándar. De acuerdo con esto, Bossio, Londoño, y Jaramillo (2018) afirman que un estudiante puede hacer uso del conocimiento matemático de manera particular, aunque se entienda que hace alusión a un concepto matemático para solucionar un problema relacionado con una situación en contexto. En este sentido, *Vanesa* pudo comprender que en la variable “*botellas de menor tamaño requieren mayor cantidad para cubrir un espacio determinado*” vislumbra una situación matemática que soluciona un problema relacionado con una situación en contexto de residuos plásticos. En este orden de ideas, la participante *Miranda*, en su respuesta a la entrevista semiestructurada, se acerca al concepto de proporcionalidad directa, porque toma como referencia la variable “*botellas de mayor volumen cubren mayor superficie*”. Esto indica que, en una misma situación contextual, los participantes pueden razonar o justificar sus puntos de vista frente al conocimiento y aprendizaje de las matemáticas asociado a sus presaberes.

En cuanto al ámbito empírico, el punto de vista de *Duberney* se centra en un pensamiento "visual" (pictórico-holístico), descrito por Blum y Borromeo-Ferri (2009). Asegura que el tamaño de las botellas se adapta a la superficie acordonada, mostrando preferencia por imaginaciones y representaciones centradas en el proceso del mundo real.

Los participantes se interesaron por identificar las dimensiones de los fondos de botellas plásticas recicladas, por lo que los 16 participantes afirman que el fondo de las botellas de entre 2,5 y 3 litros tiene una altura de 11cm. Cinco de los seis equipos de participantes dicen que el volumen es otra dimensión de suma importancia en el uso del fondo de botellas, ya que al interior de ella se introducirá una piedra que ocupe el mayor volumen posible. Por su parte, dos de los seis equipos de participantes tuvieron en cuenta el diámetro de los fondos de botellas, donde encontraron una longitud promedio de 11 cm. Además, dos equipos mencionan que estos fondos se pintaron de tres colores. Con base en esta apreciación, se hizo una pregunta cuyas respuestas aparecen en la siguiente tabla.

Tabla 8: Entrevista semiestructurada. Pregunta N°6 (Audio, abril 2019)

Participantes	¿Qué criterios tuvieron en cuenta para el corte de los fondos de botellas?
Vanessa	Se tuvo en cuenta porque si era muy alta, por ejemplo, unos 20cm, quedaría muy elevado el terreno y era difícil para que los vehículos pudieran subir ahí. Y si estaba por bajo del nivel del suelo, entonces el espacio podría inundarse.
Miranda	El criterio que tuvimos en cuenta para cortar los fondos de botellas plásticas fueron: primero estuvimos midiendo la altura de la base acordonada del sector que cubre todo el cuadro de la placa huella, de alto tenía una medida de 11 cm y por eso recortamos la botella a una altura de 11 cm para poder rellenar y que quedara totalmente nivelada.
Duberney	Con base en el corte de las botellas tuvimos en cuenta varias cosas, entre estas tenemos, por ejemplo, el ahorro del hormigón y la altura de las vigas ubicadas en la zona acordonada.
Patiño	El tamaño fue fundamental. Si estos fondos de botellas fueran muy elevados, se corre el riesgo de que quede se requiera mayor cantidad de materiales tales como hormigón y piedra. Y si es lo contrario, o sea, fondos de botellas pequeñas en estatura, esta placa huella se podría inundar y llegar a ser más un problema que una solución.

Vanesa y *Patiño* consideran que la medida de 11cm fue lo justo, porque si se eleva por encima de esa altura, *Vanesa* cree que los vehículos no podrían subir por lo elevado de la placa huella, y *Patiño* considera que se elevarían los costos. En este sentido, si no existe una rampa que se eleve a la altura de la placa huella, se podría considerar que las motocicletas subirán con mucha dificultad. La opción de *Patiño* es válida en el sentido de que “a *mayor altura* de los fondos de botellas, *mayor cantidad* de hormigón se requiere”. Esto incrementa costos; en esta respuesta se puede asociar al concepto de proporcionalidad directa.

Por otra parte, en el aula taller de matemáticas, los participantes experimentaron con algunas técnicas para construir bloques de botellas plásticas. A partir de su creatividad, deciden realizar un diseño que consideran novedoso, económico y de mejor calidad que un bloque convencional.

La estrategia que se utilizó fue la de introducir una piedra que cubriera la mayor cantidad de volumen del fondo de la botella, sin deformar dicho fondo ni que la piedra no sobresaliera. En el ciclo de Blum y Borromeo-Ferri (2009), su momento es iniciado con una “situación dada en el mundo real”. En este caso, los participantes pretenden demostrar la razón por la cual los bloques de fondos de botellas, como *situación particular*, reducen costo al compararlo con un bloque convencional.

En el segundo momento descrito por Blum y Borromeo-Ferri (2009), existe un subproceso, que es el entendimiento parcial del problema, que ocurre a nivel implícito e inconsciente para el modelador. Este momento es llamado “representación mental de la situación”, donde los participantes toman decisiones y filtran información del problema. En este sentido, los participantes esbozan, a través de una *representación mental*, la imagen de un bloque de fondo de botellas como situación real.

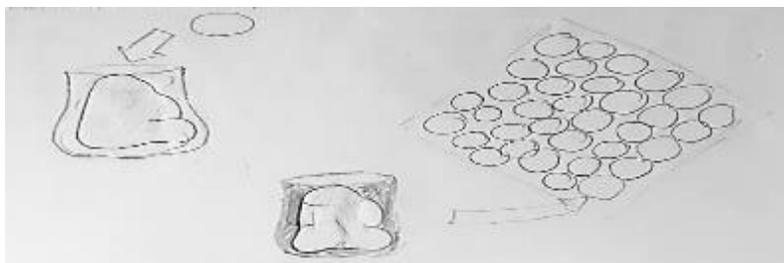


Figura 14: Representación gráfica, la imagen de un bloque de fondo de botellas por el equipo B (abril 2019).

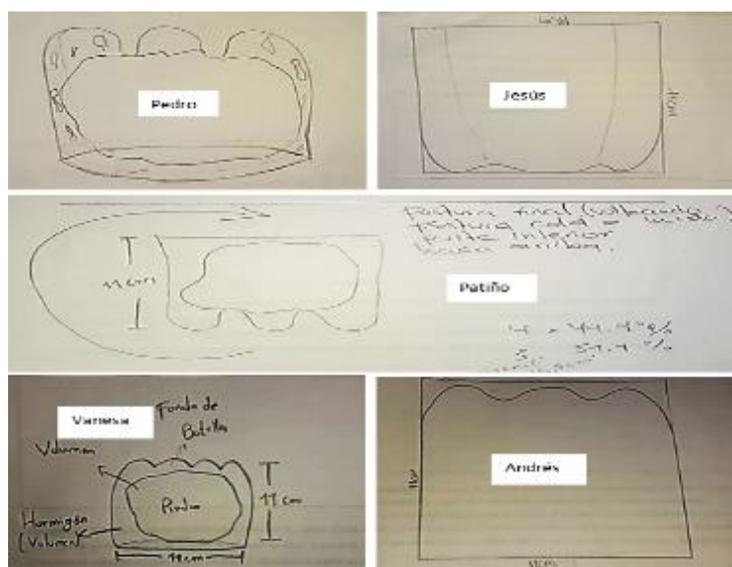


Figura 15: Representación mental, la imagen de un bloque de fondo de botellas por los participantes (abril 2019).

A partir de estos hallazgos en sus documentos escritos, se hizo la siguiente pregunta: *¿Por qué decidieron introducir piedra a los fondos de botellas o tuviste en cuenta otra opción diferente a piedra?* (TablaN°9). Además, se pide que justifiquen el uso del hormigón: *¿Por qué se introdujo hormigón en el resto de los fondos de las botellas? ¿Había otros materiales que podría tenerse en cuenta diferente al hormigón para mitigar costo?*

Tabla 9: Entrevista semiestructurada. Piedra a los fondos de botellas (Audio, abril 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Por qué decidieron introducir piedra a los fondos de botellas o tuviste en cuenta otra opción diferente a piedra?</i>
----------------------	---

Vanesa	La piedra es un elemento útil en la construcción local con capacidad para ser resistente y, si es de un tamaño considerable que ocupe el mayor volumen posible, al introducirla en los fondos de estas botellas plásticas se podría ahorrar material de hormigón.
Miranda	Estuvimos pensando en eso antes de realizarlo ya que, si se dejaba solamente la botella sin la piedra, habría más gasto de hormigón. En cambio, con la piedra, genera menos gasto de hormigón y a la vez más resistencia porque la piedra es sólida.
Duberney	Decidimos colocar una piedra en el fondo de la botella plástica para ahorrarnos cierta cantidad de hormigón y el bloque quedaba más resistente que bloques convencionales.
Patiño	La piedra en los bloques renovables la elegimos de entre otros materiales o inclusive de entre otros tipos de piedra, por el simple hecho de la experimentación. En cuanto a construcción, hicimos varios modelos de bloques, estudiando su resistencia, ahorro de materiales como el concreto, y al final llegamos a la conclusión de que el bloque con una piedra de tamaño considerable nos producía un ahorro en costos, además, da una mayor resistencia que contribuye a la durabilidad de la placa huella

Los participantes entrevistados justifican la razón del uso de la piedra como material importante en la construcción local. Además, argumentan que al introducirlo dentro de los recipientes de fondos de botellas proporcionará un bloque altamente resistente por la contextura de la piedra y el ahorro considerable de hormigón.

A continuación, se solicita a dos participantes que justifiquen el uso de hormigón. Las preguntas y respuestas se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 10: Entrevista semiestructurada. Hormigón en el resto de fondos de botellas (Audio, abril 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Por qué se introdujo hormigón en el resto de fondos de botellas? ¿Había otros materiales que podría tenerse en cuenta diferente al hormigón para mitigar costo?</i>
Vanesa	El hormigón es un material reconocido para la construcción en comparación con los otros materiales más rústicos no convencionales en lo que tiene que ver con la construcción de bloques. Por tal razón, las botellas plásticas con un tamaño adecuado y las piedras, más el componente de hormigón, estos bloques nos quedarían más compactas y con la seguridad de que no se van a dañar tan rápido con el tiempo.
Miranda	Desde mi punto de vista el bloque convencional a los pocos años o al tiempo se va deteriorando o desmenuzando porque está compuesto por más arena que cemento. En cambio, con las botellas pueden durar más ya que están hechas de hormigón y piedra por eso duraría más tiempo.

Vanesa considera que un tamaño adecuado de fondo de botella plástica, la piedra y el hormigón proveen un bloque compacto, con la certeza de que no se va a dañar en poco tiempo. *Miranda* comparte esta hipótesis, argumentando que este producto sería duradero con el paso del tiempo.

Los participantes, al notar que las piedras son sólidos que no tienen forma definida, deciden utilizar un matraz y agua para calcular su volumen. A partir de sus pre-saberes, determinan el volumen del agua que se desaloja al introducir la piedra en el envase que contenía este líquido.

El siguiente subproceso propuesto por Blum y Borromeo-Ferri (2009) es la idealización y simplificación del problema para llegar al momento del “modelo real”. A través de dibujos o fórmulas se construye el modelo, según las afirmaciones verbales y conocimiento extra matemático que presentan los participantes con respecto al modelo real. Desde esta perspectiva, los participantes, idean un bloque de fondos de botella de bajo costo en comparación con un bloque convencional. Los materiales utilizados fueron cinco piedras

diferentes por cada equipo, un matraz para medir el volumen del agua y de la piedra y un envase hecha de fondo de botellas de tres litros. En la revisión de sus documentos se detalla la capacidad promedio de 900 cm^3 de volumen de cada fondo de botellas.

La siguiente imagen simula un bloque ideal de fondo de botella formado por piedra y agua. El agua simula el espacio correspondiente al hormigón, convirtiéndose así en un *modelo real* diseñado por los participantes.



Figura 16: Fotografía de cinco piedras, un recipiente de fondo de botella de gaseosa de 3 L y un matraz del equipo C (abril 2019).

El deseo de los participantes es establecer el porcentaje promedio de hormigón y porcentaje promedio de roca sólida o piedra en el diseño de los bloques, por lo que deciden trascender a la matematización de la información suministrada en el aula taller de matemática, mediante los experimentos o pruebas hechas por cada equipo de participantes.

En este momento, según Blum y Borromeo-Ferri (2009), los participantes deben utilizar y requerir del conocimiento extramatemático para la construcción del “modelo matemático”. En este sentido, los equipos de participantes hacen representaciones externas con declaraciones de nivel matemático. Los registros promedios consignados por cada equipo se indican en la siguiente tabla.

Tabla 11: Promedios de volumen de piedra y hormigón.

Equipos	Promedio cm^3 (Volumen Piedra)	% de Volumen de la piedra	% Volumen de la capacidad que debería ocupar el hormigón
A	449	49	51
B	449	49	51
C	452,2	50,2	49,8
D	452	50,2	49,8
E	450	50	50
F	449	49,89	50,11

Fuente: Elaboración del autor.

A continuación, se registran los *modelos matemáticos* obtenidos por cada equipo de trabajo.

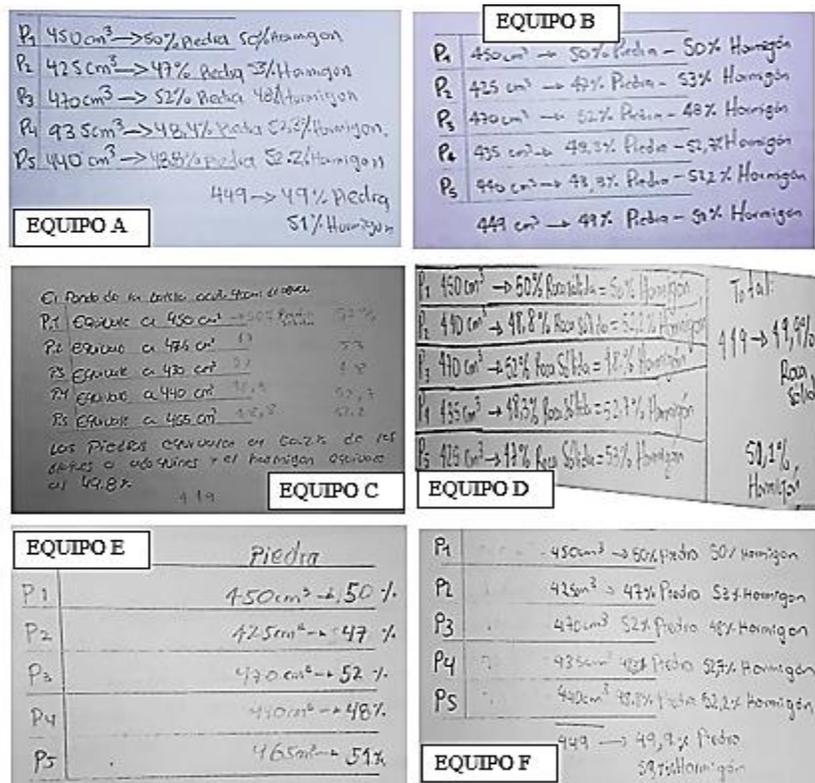


Figura 17: Modelos matemáticos obtenidos por cada equipo de trabajo (abril 2019).

En las tablas de la figura 16 se evidencian los resultados del experimento realizado con las piedras, agua y matraz. Estos valores corresponden a la cantidad de agua desalojada en el recipiente. Este *modelo matemático* realizado por los participantes muestra una tabla

de doble entrada: en la primera columna se registran las piedras (P_1 , P_2 , P_3 , P_4 y P_5); en la segunda columna se evidencia el registro del volumen de cada piedra, las cuales fueron registradas en cm^3 . Se evidencia un trabajo matemático, donde los participantes plasman porcentajes respecto al espacio que ocupa cada piedra en el recipiente plástico de fondo de botellas. Al respecto, Blum y Borromeo-Ferri (2009) cataloga este proceso como el trabajo matemático necesario en las competencias matemáticas del modelador para obtener “resultados matemáticos”. En este sentido, los participantes usaron la regla de tres simple directa para determinar los porcentajes de cada piedra.

Los participantes validan esta información argumentando que, en términos generales, el porcentaje promedio de piedra es del 50% y el de hormigón es del 50%. Este *resultado real* les da la seguridad a los participantes de expresar que los bloques que diseñaron reducen costo en relación con los bloques convencionales del mismo tamaño. Este momento es definido por Blum y Borromeo-Ferri (2009) como interpretación de “resultados reales”, lo cual debe ser validado discutiendo la correspondencia entre los resultados reales y la representación mental de la situación.



Figura 18: *Fotografía de bloques reales hechos de fondos de envases de gaseosa (abril 2019).*

En consonancia, para Blum y Borromeo-Ferri (2009) existen dos tipos de validación. La primera es una validación intuitiva, donde el resultado del proceso de modelación afirma ser o no el correcto sin ser capaz de justificar su respuesta; es una validación que no encaja en el marco de asociaciones. La segunda validación se basa en el

conocimiento de los participantes y se apoya en el mensaje del problema basado en su representación. Generalmente, estos tipos de validación son bien ejecutados. A partir de esta apreciación, los participantes en esta investigación validan estos resultados basados en su conocimiento, debido a sus creíbles demostraciones a través de los hallazgos encontrados en sus documentos.

A continuación, se presenta la información de los promedios de porcentaje de piedras y promedios de porcentajes de hormigón para demostrar si las conclusiones presentadas por los participantes son certeras.

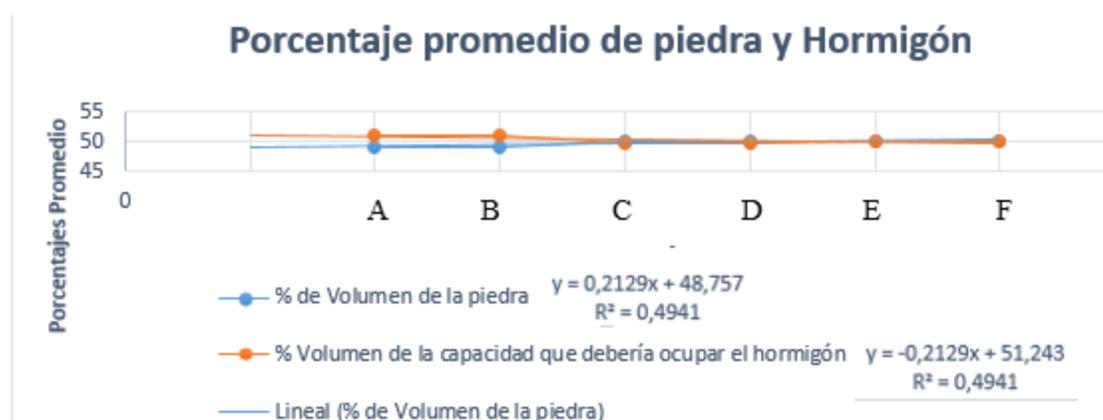


Figura 19: Gráfica de los promedios de piedra y hormigón en la construcción de un bloque con este material (junio 2020).

Fuente proporcionada por el autor con el uso de la herramienta Excel.

La gráfica muestra dos funciones lineales. La de color azul representa el porcentaje promedio de 30 piedras, generando una función $f(x)=0,2129x+48,8$. La de color naranja corresponde al porcentaje de hormigón que se requiere para cada bloque, dicho resultado fue de una función $f(x)=-0,2129x+51,2$.

En la gráfica también se registra el resultado de R^2 de cada función ($R^2= 49,4\%$). El R^2 es el porcentaje de variación o coeficiente de determinación del porcentaje promedio de piedra y hormigón. Esto significa que aproximadamente la mitad de la variación se explica con la relación lineal de las funciones halladas en la tabla anterior. Los participantes no presentaron inquietud por otro tipo de regularidad en este modelo.

En el análisis de la pendiente de las funciones, esta cantidad (0,2129) es un valor cercano a cero, por lo que la función lineal está cerca de una función constante. Si hacemos la pendiente igual a cero, podemos concluir que el porcentaje de piedra sería de aproximadamente de 49% y el de hormigón sería de aproximadamente 51%. Por tanto, se puede concluir que la hipótesis de los participantes, al especificar que los costos se reducen a un 50%, se puede validar como resultado certero.

A continuación, se muestra la ruta grupal recorrida por los participantes con base en el proceso de modelación de Blum y Borromeo-Ferri (2009).

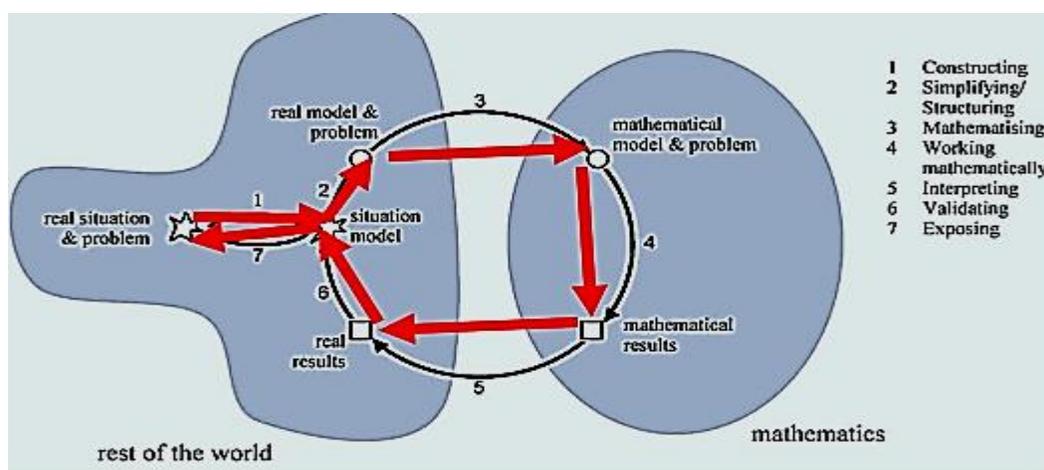


Figura 20: Recorrido del Ciclo de modelación retomado por Blum-Borromeo (2009) en el modelo del bloque de botellas plástica.

Por otra parte, se preguntó a los participantes sobre **la pintura** con que se pintó los fondos de botellas como cantidad cuantificable. Las respuestas se presentan en la tabla siguiente.

Tabla 12: Pintura de fondos de botellas plásticas como cantidad medible (Audio, abril 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Podrías considerar la pintura de estos fondos como una cantidad medible?</i>
Vanessa	En nuestro proyecto, la pintura fue utilizada para darle un estilo creativo a la placa huella y sí considero a la pintura como una cantidad que puede ser medible porque, a mayor cantidad de botellas mayor uso de pintura.

Miranda	La pintura se utiliza en este proceso más que todo para adornar la placa huella para que tenga más vida y que no se vea sólo de un solo color, o sea gris que es el color del cemento.
Patiño	La pintura sí es una cantidad medible. De hecho, es directamente proporcional porque a mayor número de botellas empleadas, mayor pintura por cada botella, con lo cual, calculando cuánta pintura se lleva un fondo de botella, podemos saber cuánta pintura será requerida por un número de fondos determinados y, en consecuencia, por metro cuadrado de superficie, porque recordemos que sólo son los fondos internos.
Duberney	Las botellas tenían una medida exacta y se necesitaba una respectiva cantidad de pintura para cada botella. Por lo tanto, se podría considerar la pintura como una cantidad medible para cada fondo de botella, por tratarse de una medida regular o exacta a la hora de pintar estos fondos de botella.

Las respuestas de *Vanesa*, *Patiño* y *Duberney* posibilitan observar aspectos relacionados con proporcionalidad directa, al considerar que, a mayor número de botellas, mayor pintura requerida. En este sentido, Bossio (2014) enfatiza que, en muchas ocasiones prácticas, cuando se usan las funciones para modelar matemáticamente, es posible describir directamente las variables más importantes en una situación en el contexto cotidiano. Aquí, los participantes interpretan la proporcionalidad que existe entre pintura y fondos de botellas, sin el respaldo de un procedimiento matemático. Este tipo de pensamiento empírico es llamado por Blum y Borromeo-ferri (2009) como pensamiento "visual" (pictórico-holístico), debido a que muestran preferencia por imaginaciones y representaciones centradas en el proceso del mundo real.

En relación con la construcción de los bloques no convencionales, los participantes explican las ventajas y desventajas que tiene este tipo de bloque o adoquín. Al respecto, los 16 participantes coinciden en que son fáciles de conseguir, cuatro de los seis equipos creen que estos bloques que diseñaron son amigables con el medio ambiente, tres equipos consideran que son económicos por la reducción de hormigón y dos equipos dicen que estos bloques se pueden decorar. Entre las desventajas, en relación con el bloque convencional,

seis equipos argumentan que la parte superficial o cara externa no queda nivelada sino en forma de ondas porque la textura del fondo de la botella no es plana y cuatro equipos consideran que los bloques de botellas son circulares, lo que dificulta la ubicación porque quedan espacios sin rellenar entre una botella y otra.

En la revisión de los documentos se registran conclusiones sobre los bloques respecto al tema novedoso, económico y de calidad en comparación con un bloque convencional. Al respecto, *Vanesa* expresa que no ha visto que este tipo de bloques elaborados con botellas plásticas se utilice en otra construcción, además, reporta que las botellas son económicas y fáciles de conseguir. También afirma que la piedra no genera ningún costo y, en cuanto a la durabilidad, refiere que es de mejor calidad que un bloque convencional.

Duberney manifiesta que la creación de estos bloques es mejor que los bloques comunes, ya que se ahorra recursos y trabajo a la hora de hacerlos.

Patiño asegura que el bloque es un invento novedoso por el hecho de utilizar algo tan común para la comunidad estudiantil como lo son los tarros de gaseosa que prácticamente nadie se había preguntado qué se hace con ellos o qué impacto genera en el medio ambiente. Además de ser novedoso, observa su factor económico y es que, al reciclar las botellas como moldes, recolectar piedras que se encuentran en cualquier lugar y hacer un revestimiento de concreto con proporciones de 50% la piedra y 50% concreto, se facilita el ahorro de cemento. La calidad se puede apreciar en la manera de introducir un objeto tan macizo como lo es una piedra. El modelo que se obtiene es de una firmeza mayor, además de utilizar el picadillo que ayuda en cierta medida a la durabilidad en la construcción de la placa huella.

4.1.4. Ubicación de los bloques diseñados con residuos plásticos en la construcción de la placa huella.

Antes de la ubicación de los bloques para construcción de la placa huella, los participantes hacen una descripción general de la misma. Cinco de los seis equipos detallan el sector acordonado e indican que las vigas tienen un ancho de 10 cm, sobresalen a una

altura de 11cm y acordonan ocho superficies cuadradas cuyas medidas internas miden dos metros por dos metros; cuatro equipos aseguran que estas vigas fueron reforzadas por una estructura de tres varillas y; dos equipos dicen que cada superficie llevará una capa de arena totalmente nivelada, para el soporte de los bloques.



Figura 21: Fotografía de la superficie acordonada (abril 2019).

Los estudiantes respondieron a la pregunta ¿Cómo determinaron las medidas? con respecto a los sectores acordonados en la construcción de la placa huella, como se evidencia en la siguiente tabla (Tabla 13).

Tabla 13: Medidas en la placa huella (Audio, abril 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Cómo determinaron las medidas?</i>
Vanesa	<p>Las medidas que se tuvieron en cuenta mirando el tamaño de la placa huella y también algunas expresiones matemáticas, se pudo obtener cantidades precisas a la hora de construir la placa huella.</p> <p>La decisión de trabajar con esas medidas se consideró en conjunto con los compañeros, aprovechando el conocimiento de uno de nuestros compañeros que, de alguna manera, tenía conocimiento empírico con relación a construcciones, por lo que se decidió que, por condiciones</p>

de suelo, estas vigas tuvieran una altura de 11 cm y por economía decidimos que el ancho fuera de 10 cm.

Miranda

Cuando empezamos la construcción, lo primero que se hizo fue distribuirnos el espacio a todos los participantes, dándole a cada uno un sector de un metro de ancho con dos metros de largo para poder nivelar el terreno, luego acordonamos superficies en forma cuadrada de dos metros por cada lado, creando así unas superficies acordonadas de 4m^2 y así la construcción quedaría totalmente cuadrada.

Para construir las vigas, tuvimos en cuenta el ancho de las varillas o la estructura de las varillas para que estas quedaran totalmente cubiertas, y así tuviera la mejor fijación en el suelo, quedando un producto finalizado de una estructura de 11cm de alto por 10cm de ancho.

Patiño

Para tomar las medidas y acordonar el sector utilizamos la medición del sector total y de ahí partimos a utilizar expresiones matemáticas para dividir las zonas uniformemente a cada estudiante.

Primero que todo tuvimos el criterio de la altura respecto a una malla que estaba rodeando el sector y la altura de los fondos de botella, para que quedaran a un nivel adecuado, también que no quedara muy alto respecto a los sectores circundantes porque se podían inundar y un principal objetivo de placa huella es lidiar con el barro y el agua acumulada que generaba el desnivel e inseguridad al entrar/salir del parqueadero

Duberney

Con relación al ancho y altura de las vigas tuvimos la asesoría de una persona externa que nos ayudara a hacerlo y que la vez nos economice costos. Por otro lado, las botellas de tres litros venían con una circunferencia en su molde a 11cm de su fondo, nos pusimos de acuerdo que la viga también tuviera 11cm para que ajustara con los fondos de botellas.

Vanesa considera que las medidas tuvieron en cuenta las dimensiones del espacio y, a través de algunas expresiones matemáticas, se pudo obtener cantidades

precisas. Además, reporta que la decisión de trabajar con esas medidas fue considerada en conjunto con los compañeros, aprovechando el conocimiento empírico (entendido como contacto directo con la realidad o experiencia vivida), por lo que se decidieron que, debido a las condiciones del suelo, estas vigas tuvieran una altura de 11cm y que el ancho fuera de 10 cm por economía. Estas acciones tienen correspondencia con lo que describe Borromeo-Ferri (2006), respecto a la evidencia empírica como directriz en torno a la situación de un contexto real. En este sentido, se posibilita en los participantes la articulación de saberes empíricos con un proceso de modelación matemática, donde se asocia un contexto con el campo de la educación para la identificación de ciertos modelos teóricos.

En este orden de idea, *Miranda* especifica que distribuyeron los espacios físicos del sitio, acordonaron la superficie en forma cuadrada con dos metros por cada lado y crearon una superficie de 4m^2 , de esta forma, la construcción *quedaría totalmente cuadrada*. Esta información no se corresponde con la información inicial que suministró, donde reportó que acordonaron ocho superficies cuadradas cada uno de 4m^2 , pero concluye diciendo que la construcción queda totalmente cuadrada. Esta acotación se asocia a lo que refiere Socas (1997), quien considera que los errores van a tener orígenes diferentes, pero van a ser considerados como la presencia de esquema cognitivo inadecuado en el estudiante, y no solamente como la consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

Entre otros aspectos, *Miranda* especifica que al construir las vigas se tuvo en cuenta el ancho de las varillas o la estructura de las varillas para que quedaran totalmente cubiertas, produciendo una estructura de 11cm de alto por 10 cm de ancho. En este sentido, cuando *Miranda* habla de ancho de la varilla no se refiere al diámetro de cada varilla, sino al ancho de la estructura llamada cercha o armazón formado por tres varillas.

El participante *Patiño* atiende a expresiones matemáticas, al dividir las zonas uniformemente a cada participante. Además, se tuvo como criterio la altura respecto a una malla que estaba rodeando el sector y la altura de los fondos de botella, de manera que quedaran a un nivel adecuado respecto a los sectores circundantes.

Por su parte, *Duberney* asegura que tuvo asesoría de una persona externa y que la decisión que se tomó con base al ancho y alto de las vigas estuvo asociada a las dimensiones de los fondos de botellas de tres litros.



Figura 22: *Ubicación de bloques de botellas plásticas (mayo 2019).*

4.1.5. Muestra de un producto final en la construcción de placa huella con material reciclable.

En la culminación de la construcción de la placa huella, los participantes explican el proceso final haciendo una descripción de lo ocurrido.

Al relacionar los bloques y picadillos de los sectores acordonados, cinco equipos afirman que lo primero que se hizo fue distribuir homogéneamente el picadillo de bolsas de mecatos en la superficie acordonada de tal manera que quedara totalmente nivelada y cuatro equipos creen que este material evitará cualquier falla geológica que pueda ocurrir a la placa huella en temporada de sequía o evitar filtraciones en temporadas de lluvias, además,

ellos detallan que los bloques se ubicaron por colores para resaltar algunas figuras geométricas.

Al respecto, las estructuras de placa huellas convencionales generalmente son construcciones planas. Sin embargo, en la siguiente imagen se visualiza una estructura ondulada, debido a la textura de cada fondo de botellas plásticas.



Figura 23: Fotografía de la placa huella de botellas plásticas (mayo 2019).

Frente a la situación descrita en el párrafo anterior, se realiza una pregunta a los estudiantes sobre las ventajas y desventajas de este sistema. Las respuestas se describen en la siguiente tabla.

Tabla 34: Entrevista semiestructurada, asociado a la ventaja o desventaja de la placa huella de botellas plásticas (Audio, mayo 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Podrías considerar esto como una ventaja o desventaja? ¿Por qué?</i>
Vanessa	Al tener una placa huella de forma ondulada, tiene sus ventajas o desventajas. Desventaja porque en terrenos concurridos, alguien que

no tuviera cuidado podría tener algún tipo de accidente. Como ventaja, esta podría servir como sitio específico para ubicar vehículos.

Duberney

La estructura queda totalmente plana mediante el uso de bloques convencionales, pero con nuestra propuesta de trabajar con bloques hechos de fondos de botellas plásticas recicladas, la estructura queda con pequeñas ondulaciones y como toda construcción conlleva tener ventajas y desventajas, nuestra placa huella no es la excepción porque posee ambas. Pero mas sin embargo, esta forma puede ser más ventajosa porque permite tener una mejor estabilidad a la hora de ubicar los vehículos.

Patiño

La verdad es que no queda lisa completamente la superficie dependiendo del contexto puede ser una ventaja o una desventaja. Si miramos la placa huella y le damos la utilidad de parqueadero o camino transitables de instituciones para estudiantes, vemos que esto no resulta como un problema. De hecho, vemos ventaja en la afinidad cuando hay lluvias o barro, que en una superficie lisa puede ser peligroso, caso contrario tendríamos en una carretera donde estas superficies si serían ineficientes para el tránsito de automóviles.

Vanesa considera que una placa huella de forma ondulada cumpliría los protocolos específicos para los que se construyó (garaje bicicletas y motos). Señala como desventaja que, en sitios concurridos, alguien podría tener algún tipo de accidente. Por su parte, *Duberney* hace alusión a la ventaja que ofrece al permitirle a los vehículos una mejor estabilidad. Por último, *Patiño* argumenta que en carreteras transitadas por automóviles la superficie sería ineficiente. En este sentido, la placa huella con botellas plásticas recicladas, según la opinión de estos participantes, es útil para lugares exclusivos de poca concurrencia de peatones. Esta idea puede resultar novedosa para futuros ingenieros en torno al uso de estos materiales reciclables.



Figura 24: Fotografía de la placa huella, producto terminado (mayo 2019).

En la imagen anterior se reconoce lo expuesto por los participantes, pero a la vez, en el producto final se evidencian los espacios libres cubiertos por hormigón proporcionando una mejor estabilidad a la construcción.

A partir del diseño, se pregunta sobre las figuras geométricas que se aprecian en la placa huella. A continuación, se presentan en la tabla algunas de las respuestas ofrecidas por los participantes.

Tabla 45: Representaciones geométricas en la placa huella (mayo 2019).

<i>Participantes</i>	<i>¿Qué figuras geométricas puedes observar?</i>
Vanesa	Con la placa huella se tuvo en cuenta que nuestra creatividad saliera a la luz. La forma que uno puede notar en esa construcción es la forma de espiral de los fondos de botellas, y la idea era darle un tono creativo y llamativo pero, también, que los colores estuvieran bien combinados para que no se viera muy brusco o contrastado.
Patiño	Podemos apreciar figuras como espirales, cuadrados, algunas más, que se forman como ilustración al pintar la superficie sobresaliente de los fondos de botella.

Miranda, especifica algunos fines específicos propuestos por los participantes, teniendo en cuenta sus intereses. Entre los fines de la construcción de la placa huella se consideró: deducir expresiones matemáticas en su creación, observar regularidades relevantes que se pudieran evidenciar, crear y determinar figuras geométricas encontradas en la placa huella. En este sentido, *Miranda* concluye que las figuras geométricas son los cuadrados de colores y en espiral. Esta afirmación tiene correspondencia con la pregunta de investigación sobre la manera como se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos.

Por su parte, *Vanesa* resalta la creatividad que hubo en todo el equipo de participantes respecto a la forma geométrica visible en la construcción y considera que la silueta formada por los fondos de botellas en la construcción geoméricamente representa un espiral.

Patiño coincide con anteriores participantes al opinar que la figura geométrica es un espiral y cuadrados. Por lo tanto, el docente investigador envía imágenes para que representen el espiral que ellos observan. A continuación, *Miranda* y *Patiño* representan el espiral y uno de ellos justifica que esta espiral fue el recorrido a seguir respecto a la ubicación de cada bloque en el sector acordonado.

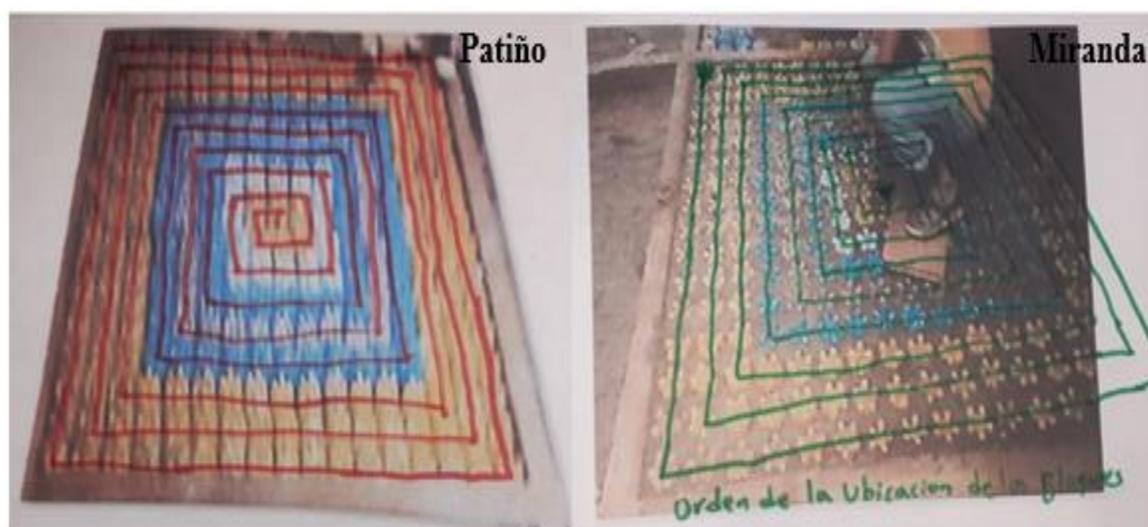


Figura 25: Fotografía del modelo de la silueta de un espiral descrito por dos participantes (junio 2020).

En la imagen anterior se describe el recorrido de la espiral representado por dos participantes. Esto tiene correspondencia con el segundo momento descrito por Blum y Borromeo-Ferri (2009) en relación con la *representación de una situación real*. En este sentido, el modelo descrito por los participantes se tiene en cuenta para el siguiente momento, debido a que los participantes solo se quedaron en una descripción visual y una justificación transicional de la *idealización de un modelo real*. Por ejemplo, *Miranda* describe que el recorrido corresponde al orden de la ubicación de cada bloque.

Hasta este punto, este primer momento presentó una situación en contexto de residuos plásticos que implicó diferentes acciones: reconocimiento del garaje de bicicletas y motocicletas al interior de la institución, preparación del terreno para transformarlo desde una superficie irregular a una superficie plana, recolección de residuos plásticos para el diseño y construcción de bloques, ubicación de los bloques diseñados con residuos plásticos en la construcción de la placa huella y, por último, la muestra de un producto final en la construcción de placa huella con material reciclable. Estas acciones se asocian con el inicio del ciclo de Blum y Borromeo-ferri (2009), correspondiente a una “*situación dada en el mundo real (RS)*”.

En este sentido, este primer momento que representa el *inicio de un ciclo mayor* arrojó resultados asociados con el objetivo de investigación “*determinar modelos matemáticos mediante la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media*”, a partir del marco del proceso de la modelación matemática de Blum y Borromeo-Ferri (2009). A continuación, se avanza al segundo momento donde se profundizan los análisis en torno a las representaciones de los estudiantes.

4.2. Representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos.

Los Estándares de Calidad descritos por el MEN (2006) indican que la modelación es una construcción material o mental, que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. En este sentido, a partir de este **segundo momento**, se analiza la representación mental o modelo presentado por los participantes.

En relación con el anterior momento, los participantes habían presentado un modelo de bloque de piedra y hormigón y un modelo de silueta de espiral. A continuación, se describe el recorrido para el análisis de estos dos modelos propuestos por los participantes:

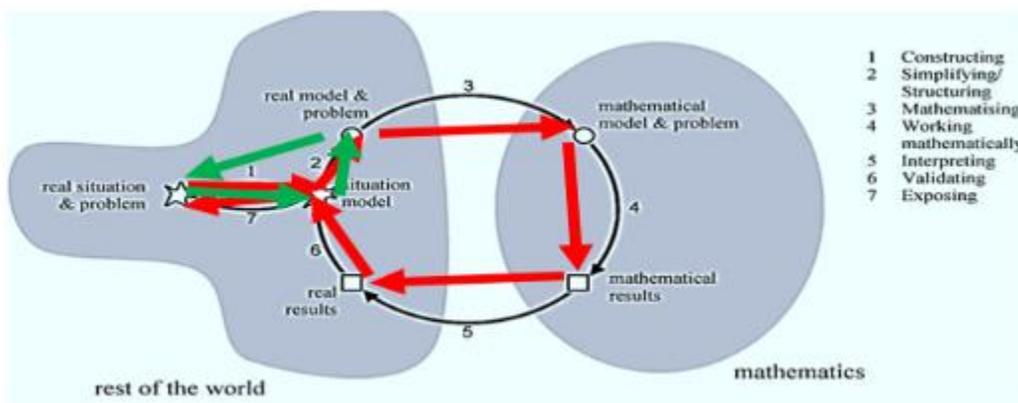


Figura 26: Ruta de dos Subciclo trabajado por los participantes en el primero Momento. Ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009).

En la imagen correspondiente al ciclo de Blum y Borromeo-Ferri (2009), el color rojo corresponde al recorrido del momento en el análisis del modelo de piedra construido por los participantes y el color verde representa el recorrido de un modelo no terminado propuesto por los participantes.

Se procede a un subproceso asociado a la representación de la situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos que posibilite su comprensión.

Debido a la ausencia de dos participantes, se reagruparon en cinco equipos para la continuación de los siguientes momentos. Los participantes representan mentalmente el plano de la placa huella, debido a que ya tienen un contexto particular construido. Cada equipo pretende representar, mediante un dibujo o imagen, la forma y características de la placa huella construida con material reciclable. Esta acción posibilita generar rutas de análisis en este contexto particular. Los cinco equipos formados por 14 participantes detallan el cuadrado como figura geométrica y describen algunas características asociadas a la representación o simulación del plano de la placa huella.

En sus representaciones, cuatro equipos tienen en cuenta la identificación de vigas de 10cm de ancho y, de estos, tres equipos precisan la altura de la viga de 11cm.

Cuatro equipos tomaron en cuenta la descripción de cada superficie acordonada de dos metros por dos metros, manifestando tener una cantidad de 289 bloques de fondos de botellas por cada superficie acordonada. Solo un equipo especifica que las botellas son recicladas y pintadas de varios colores.

La Figura 26 muestra el esquema o dibujo de la situación descrita por cada equipo.

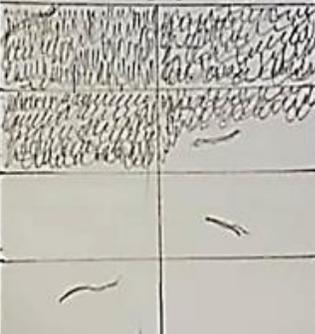
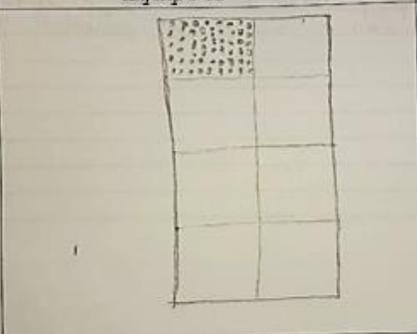
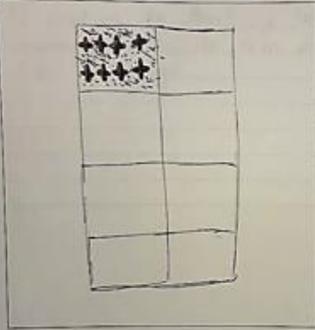
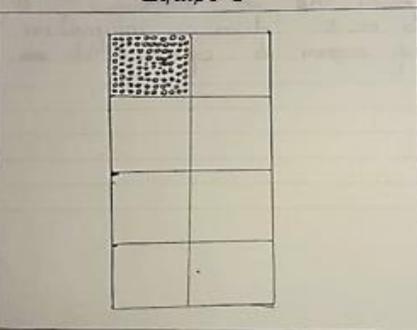
<p>Imagen</p> <p><i>Equipo B</i></p> 	<p>Característica</p> <ul style="list-style-type: none"> Cada superficie mide 2x2 metros La placa huella tiene Tiene 8 superficies cuadradas La viga mide 10cm de ancho y 11cm de alto 	<p>Imagen</p> <p><i>Equipo A</i></p> 	<p>Característica</p> <ul style="list-style-type: none"> Cada superficie mide 2m x 2m La placa huella completa tiene 8 superficies La viga tiene 10cm Cada superficie cuadrada tiene 289 fondos
<p>Imagen</p> <p><i>Equipo D</i></p> 	<p>Característica</p> <ul style="list-style-type: none"> Cada superficie tiene medida de 2m por 2m La placa huella tiene 8 superficies cuadradas La viga tiene 10cm de ancho y 11cm de alto Cada superficie cuadrada tiene 289 adoquines 	<p>Imagen</p> <p><i>Equipo C</i></p> 	<p>Característica</p> <ul style="list-style-type: none"> Cada superficie mide 2m por 2m, la figura completa (Placa huella), tiene 8 superficies cuadradas, la viga tiene 10 cm de ancho, cada superficie cuadrada tiene 289 fondos de botellas o bloques.
<p>Imagen</p> <p><i>Equipo E</i></p> 	<p>Característica</p> <ul style="list-style-type: none"> Forma cuadrada Varios colores Material reciclado 		

Figura 27: Representación mediante un dibujo o imagen de la forma y características de la placa huella (mayo 2019).

Esta representación y caracterización de la placa huella como contexto particular corresponde a lo que describe Blum y Borromeo-Ferri (2009), la “*representación mental de la situación (MRS)*”. Los participantes toman decisiones y filtran información asociada a la situación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos como contexto particular, para trascender al siguiente momento del proceso de modelación.

4.3. Idealización y simplificación de la información en la transformación de una superficie.

“Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (MEN 2006, p. 52). De acuerdo con esta apreciación y a partir de este **tercer momento**, los participantes organizaron y sistematizaron la información suministrada en el momento anterior, para debatir entre ellos y definir cómo poder encontrar objetos matemáticos que sean de su interés y llevarlos a un modelo real, a través de la información abstraída, para identificar algunas regularidades. Esta acción tiene correspondencia con lo que describe Blum y Borromeo-Ferri (2009), asociado al tercer momento del ciclo llamado “idealización de un modelo real”.

Por lo tanto, en los siguientes subprocesos, los participantes describen formas, cantidades y regularidades. Además, estructuran, simplifican y sistematizan la información de este contexto particular.

4.3.1. Formas geométricas descritas en cada superficie acordonada.

Los participantes describen la forma geométrica que tiene cada superficie acordonada y reafirman las dimensiones. En sus hallazgos, todos los cinco equipos de participantes especifican que la placa huella tiene forma rectangular de cuatro metros de ancho con ocho metros de largo y que, a su vez, está formada por ocho superficies cuadradas cada una de dos metros de lado.

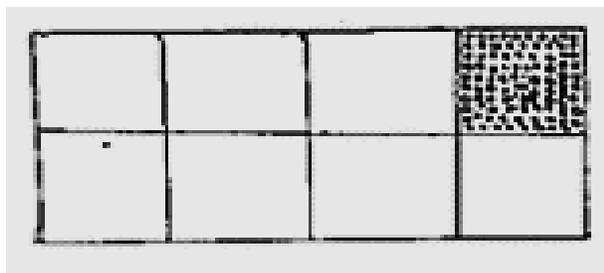


Figura 28: Representación de descripción y forma geométrica de la superficie acordonada Equipo C (mayo 2019).

4.3.2. Cantidad de Bloques de botellas en superficies cuadradas.

En el momento uno descrito con anterioridad, los participantes tuvieron interés por conocer la cantidad de bloques de botellas plásticas recicladas requeridas para cubrir una superficie acordonada y toda la placa huella. Los cinco equipos afirman que la cantidad de bloques de botellas requerida en una superficie acordonada fue de 289, por lo que concluyeron que en toda la placa huella formada por ocho superficies acordonadas con las mismas características, se requiere una cantidad total de 2312 de estos bloques de botellas.

En cuanto a la representación de estas cantidades, los participantes representan esta realidad por medio de una tabla de doble entrada para la sistematización de este contexto particular. Tres equipos de los cinco participantes representaron esta información como se indica en la siguiente imagen.

Número de Espacio	Número de bloques
1	289
2	289
3	289
4	289
5	289
6	289
7	289
8	289
Espacio Total	2312 bloques

En el cuadro o tabla anterior se representa la cantidad de bloques que se lleva por espacio.

Figura 29: Tabla de doble entrada representada por el Equipo D (mayo 2019).

En la imagen, la primera columna representa el número de superficies acordonadas, sabiendo que cada superficie tiene un área de $4m^2$. La segunda columna representa el número de bloques plásticos requeridos en cada superficie acordonada. En esta

representación de un modelo real descrito por los participantes, se evidencia una particularidad en la segunda columna al proponer un valor constante para cada superficie. En este sentido, los participantes transmiten la cantidad de bloques de botellas que hay en cada espacio. Por ejemplo, el *espacio 1* contiene 289 bloques de botellas, el *espacio 2* contiene 289 bloques de botellas, el *espacio 3* contiene 289 bloques de botellas... y el *espacio 8* contiene 289 bloques de botellas, obtienen una cantidad total de 2312 bloques de botellas. Esto acerca a los estudiantes a identificar el valor constante en las superficies acordadas.

Por su parte, dos equipos representaron el modelo real de la siguiente manera:

No. Areas de 4m ²	No. Botellas
1	289
2	578
3	867
4	1156
5	1445
6	1734
7	2023
8	2312

En el cuadro anterior se representa cómo están divididas las áreas y cuántas botellas caben en cierto espacio dado.

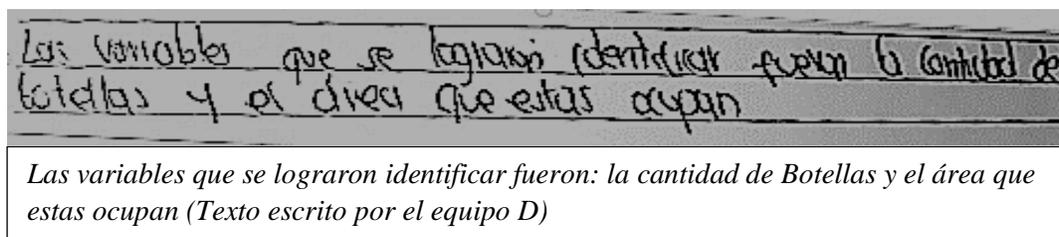
Figura 30: Tabla de doble entrada representada por el Equipo C (mayo 2019).

En esta tabla de doble entrada, los participantes representan en la primera columna la regularidad del área de cada superficie numerada del uno al ocho, además especifican que cada superficie representada equivale a 4m². En la segunda columna se muestra la regularidad de los números de botellas plásticas requeridas en los espacios acordonados.

4.3.3. Representación del modelo real.

En la revisión de documentos escritos por los diferentes equipos, se indaga sobre las regularidades observada en la representación de la situación del contexto en estudio (Placa Huella con residuos plástico) para idear el modelo real. En este orden de ideas, con estos datos organizados y sistematizados, tres equipos han identificado algunas regularidades.

Las regularidades con el área de superficie acordonada y cantidad de bloques diseñados con material reciclable.



Las variables que se lograron identificar fueron: la cantidad de Botellas y el área que estas ocupan (Texto escrito por el equipo D)

Figura 31: Regularidades observadas por el Equipo D (mayo 2019).

Dos equipos consideran que la relación que existe entre los bloques y la superficie acordonada es: con determinada cantidad de bloques de botellas recicladas se puede cubrir cierto espacio de la superficie acordonado. Otros dos equipos consideran que estas dos regularidades son directamente proporcionales porque a medida que aumentan los metros, también aumentan la cantidad de bloques.

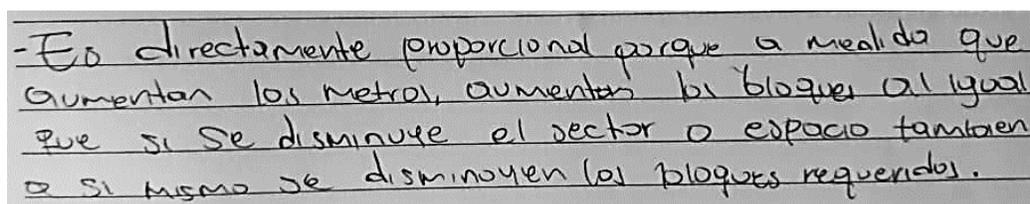


Figura 32: Proporcionalidad directa descrito por el Equipo D (mayo 2019).

En este apartado, los participantes describieron formas, cantidades y regularidades. Esto tiene correspondencia con el ciclo de Blum y Borromeo-Ferri (2009), asociado a un proceso de modelación matemática, idealizado y simplificado por los participantes en la representación del problema en estudio, en torno al momento del “*modelo real (RM)*”. En este sentido, los participantes han podido estructurar, simplificar y sistematizar la información de este contexto particular para identificar las regularidades que emergieron.

4.4. Modelos matemáticos en la transformación de una superficie.

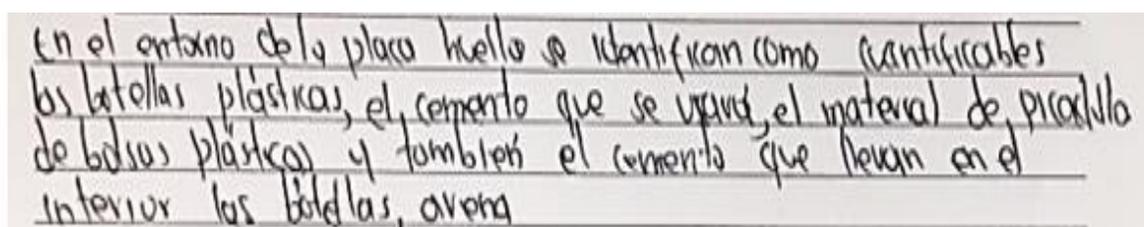
Una vez se sistematizó el modelo real, los participantes trascienden al mundo matemático para determinar en su **cuarto momento** un modelo que avale los resultados obtenidos en el momento anterior. En este sentido, los participantes detectan algunas

regularidades y las matematizan, de manera que se pueda identificar y simbolizar variables en la construcción y aplicación de conceptos de modelos matemáticos que puedan ser determinados de un entorno real, para trascender al entorno matemático. De esta forma se establece una correspondencia, como lo describen Blum y Borromeo-Ferri (2009). Las variables empezarán a jugar un papel importante en el proceso de la modelación procesado por los participantes. Mediante este propósito, los participantes deberán hallar modelos matemáticos a través de una serie de pasos.

A continuación, se indaga en los documentos de los participantes el hilo conductor asociado a elementos o materiales cuantificables en la placa huella, símbolos definidos por los participantes y la representación gráfica de estas regularidades.

4.4.1. Elementos o materiales cuantificables en la placa huella.

Los participantes asumen diferentes posturas acerca de los materiales de la placa huella que se pueden cuantificar. Cuatro equipos comentan que la cantidad de bloques hechos de botellas recicladas se pueden cuantificar. Tres equipos afirman que otro producto cuantificable son las dimensiones de las superficies acordonadas. Dos equipos aseguran la cantidad de cemento también es cuantificable, de igual forma, la arena, el área que ocupa un bloque, la cantidad de picadillo de bolsas plásticas. Un equipo dice que el área de toda la placa huella y la cantidad de pintura utilizada se puede cuantificar.



En el entorno de la placa huella se identifican como cuantificables las botellas plásticas, el cemento que se usará, el material de picadillo de bolsas plásticas y también el cemento que llevan en el interior las botellas, arena

Figura 33: Elementos o materiales cuantificables en la placa huella descritos por el Equipo C (mayo 2019).

En consecuencia, se evidencia una gama de elementos cuantificables, ya que se les da la libertad de escoger regularidades de su interés para proceder en el subproceso desde un entorno o mundo real a un entorno o mundo matemático. Como lo expresa Blum y Borromeo-Ferri (2009), esta acción posibilitará direccionar el hilo conductor de la pregunta

de investigación *¿De qué manera se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media?*

4.4.2. Identificación de regularidades y símbolos.

Los participantes identifican regularidades que se pueden cuantificar matemáticamente en el contexto de la placa huella, deben escribirlas y simbolizarlas. Los cinco equipos deciden trabajar con las regularidades o variables asociadas al número de bloques diseñado con fondos de botellas recicladas y el área de las superficies acordonadas.

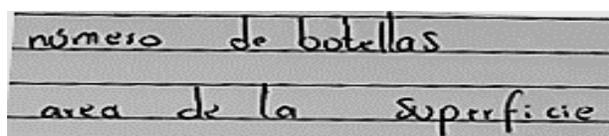


Figura 34: Regularidades asociada al número de bloques diseñado con fondos de botellas recicladas y el área de las superficies acordonadas escrito por el Equipo C (mayo 2019).

Los equipos simbolizan estas regularidades de la siguiente manera:

- Dos equipos simbolizan la cantidad de bloques de botellas con $N^{\circ} B$ y el área de la superficie acordonada con X .
- Dos equipos simbolizan la cantidad de bloques de botellas con Y , y el área de la superficie acordonada con X .
- Un equipo simboliza la cantidad de bloques de botellas por $N^{\circ} B$, y el área de la superficie acordonada con A .

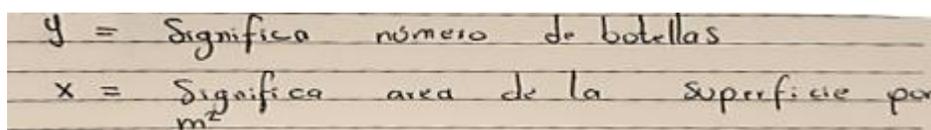


Figura 35: Símbolo de las regularidades descritos por el Equipo C (mayo 2019).

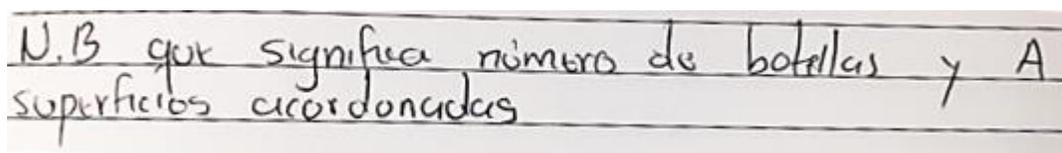


Figura 36: Símbolo de las regularidades descritos por el Equipo D (mayo 2019).

En este sentido, se evidencian dos regularidades y su representación según los diferentes equipos asociados a esta investigación: número de bloques diseñado con fondos de botellas recicladas simbolizado por NB o Y, y el área de la superficie acordonada, simbolizada por X o A.

Una de las maneras para determinar un modelo matemático, es la consideración de los datos sistematizado por el *Equipo D* en la Figura N° 28, donde se revela en la tabla de doble entrada un valor constante (289), con relación a la tabla de doble entrada del *Equipo C* de la Figura 29, se podría establecer un modelo al momento de comparar ambas tablas, tal como lo revela la siguiente Figura:

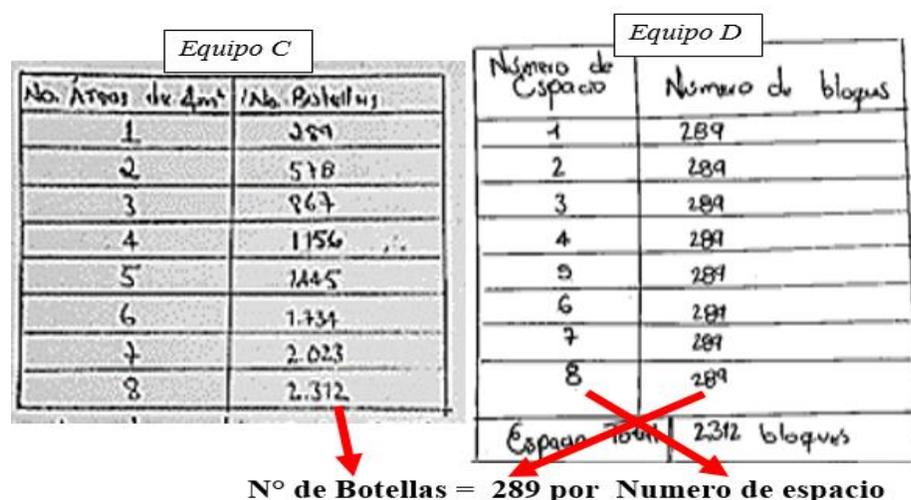


Figura 37: Modelo matemático en la tabla de doble entrada de los equipos C y D (junio 2019).

En este sentido, estas tablas de doble entrada de los equipos C y D permitió determinar una manera para encontrar un modelo matemático a partir de la situación en estudio mediante la relación matemática N° de botellas = 289 por Numero de espacio, evidenciando que la información suministrada en el modelo real fue matematizada por los participantes, se hallaron elementos o materiales cuantificables en la placa huella, se definieron regularidades y símbolos en la representación gráfica de las regularidades seleccionadas. De esta forma, se da cuenta de la utilización y requerimiento del conocimiento extra matemático para la construcción del “modelo matemático (MM)”. Esto tiene correspondencia con lo que expresa Blum y Borromeo-ferri (2009) con respecto al

cuarto momento del ciclo, donde aparecen representaciones externas por dibujos, imágenes o tablas, pero las declaraciones son de nivel matemático.

4.5. Momento donde los participantes trabajan con resultados matemáticos en contexto

Luego de observar el modelo matemático que se determinaron a partir de la matematización en el subproceso anterior, se realizó un análisis, de manera que los participantes evidenciaran conclusiones matemáticas y construyeran soluciones para unificar criterios. Además, en este quinto momento del ciclo, los participantes definen variables de su interés. Por tanto, trabajan con estos resultados, para determinar si matemáticamente cumplen el requisito de modelos. Luego se procede a efectuar un trabajo matemático que posibilite establecer modelos de distintos niveles de complejidad y, de esta forma, hacer predicciones al utilizar procedimientos numéricos, obteniendo unos resultados matemáticos verificables con respecto a las condiciones iniciales. En este sentido, se construyen argumentos de solución.

4.5.1. Representación gráfica de regularidades.

Los participantes sistematizan cantidades e identifican variables con sus respectivos símbolos. Representan esta información para identificar el comportamiento de las regularidades y hacer un análisis de ella.

En la revisión de los documentos escritos por los participantes, un equipo propone replantear su tabla de doble entrada ajustada a las regularidades perfiladas por los participantes, de manera que estas regularidades puedan ser graficadas en un plano cartesiano. Su nueva propuesta es:

Número de Espacio	Número de bloques
1	289
2	289
3	289
4	289
5	289
6	289
7	289
8	289
Espacio Total	2312 bloques



Área(m ²)	Nº de Botellas
4m ²	289
8m ²	578
12m ²	867
16m ²	1156
20m ²	1445
100	DIP

Figura 38: Representación de una tabla de doble entrada descrita por el Equipo D (junio 2019).

En este sentido, los participantes retornan nuevamente al modelo real para realizar ajustes a lo que habían propuesto desde un inicio. Aluden a que la segunda tabla de doble entrada se puede representar en el plano cartesiano.

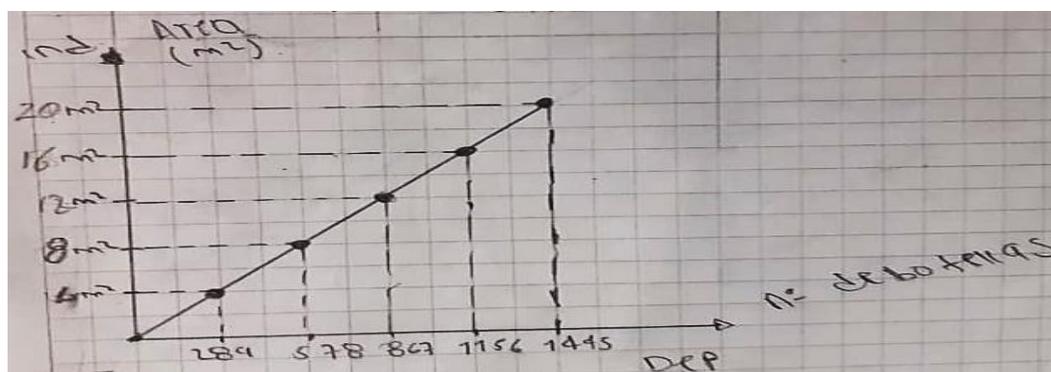


Figura 39: Representación cartesiana descrita por el Equipo D (junio 2019)

La anterior imagen revela informaciones importantes descritas como sigue: en el eje horizontal se ubicó la variable “número de botellas”, que los participantes llamaron variable dependiente; en el eje vertical se ubicó el área de la superficie expresada en m², que consideraron como variable independiente.

De igual manera, el equipo C propone replantear una tabla de doble entrada para poder graficarla en el plano cartesiano. Su nueva propuesta se presenta en la siguiente figura.



No. Áreas de $4m^2$	No. Botellas
1	289
2	578
3	867
4	1156
5	1445
6	1734
7	2023
8	2312

Área m^2 X	Y N. Botellas
4	289
8	578
12	867
16	1156
20	1445

Figura 40: Representación de una tabla de doble entrada descrita por el Equipo C (junio 2019).

Los ajustes significativos que revela esta nueva tabla de doble entrada se relacionan con la simbología de las variables. Proponen representar el área de la superficie con el símbolo X y su unidad en m^2 , además, en esta primera columna el uno lo cambian por cuatro, el dos por ocho y así sucesivamente, aludiendo a que el espacio uno tiene un área superficial de $4m^2$, el espacio dos $8 m^2$ y así sucesivamente. En cuanto a la columna dos, representan la variable por el símbolo Y, correspondiente al número de bloques de botellas correspondientes a cada superficie.

A continuación, dos equipos de participantes representan la información de la siguiente manera:

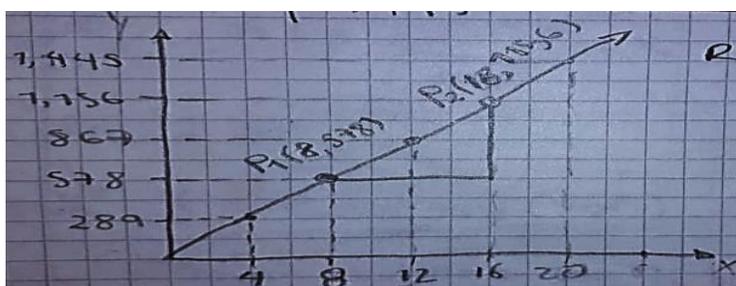


Figura 40: Representación cartesiana descrita por el Equipo C (junio 2019).

En la gráfica anterior se evidencia un modelo matemático representado en el plano cartesiano que difiere del modelo propuesto por el equipo anterior. En este sentido, los participantes ubican la variable X (área de las superficies acordonadas) en el eje horizontal y la variable Y (cantidad de bloques de botellas) en el eje vertical del plano cartesiano.

4.5.2. Relación matemática que les permita calcular la cantidad de bloques que se requiere para cubrir una determinada superficie.

Uno de los participantes pregunta por la cantidad de botellas que se requiere para cubrir una superficie de un metro cuadrado. En consecuencia, deciden en común acuerdo encontrar una relación matemática que les permita calcular la cantidad de bloques que se requiere para cubrir una determinada superficie.

En los documentos escritos por los equipos D y E se argumenta que el número de bloques hechos con botellas recicladas es directamente proporcional al área ocupada por cada superficie acordonada, por lo que establecen una relación que se indica en la siguiente figura.

Handwritten mathematical work on grid paper showing the derivation of a direct proportionality relationship between the number of blocks (N) and the area (A).

The work includes the formula $N \propto A$, boxed equations $\frac{N}{A} = C$ and $N = C \cdot A$, and a calculation for C using five data points:

$$C = \frac{N}{A} = \frac{289B}{4m^2} = \frac{578B}{8m^2} = \frac{867B}{12m^2} = \frac{1156B}{16m^2} = \frac{1445B}{20m^2}$$

The final result is $72.25N = 72 \text{ botellas}$.

Figura 41: Proporcionalidad directa descritos por el Equipo D (agosto 2019).

En este sentido, los participantes evidencian presaberes de proporcionalidad directa. Esta información que fue tenida en cuenta en la revisión del modelo matemático (plano cartesiano) representada por el equipo E, donde concluyen diciendo que el número de botellas (NB) es directamente proporcional al área (A) de cada superficie acordonada, generando una constante (C) equivalente a la cantidad aproximada de 72 bloques por cada metro cuadrado ($C = 72 \frac{B}{m^2}$). En términos generales, el resultado obtenido fue la relación matemática $NB = 72A$.

Se afirma que los participantes, a través de este trabajo matemático, han logrado transversalizar el pensamiento geométrico con los pensamientos numéricos y algebraicos.

Los participantes de los equipos B y C consideran que, por tratarse de una recta lineal que inicia del origen, toman como referencia dos puntos en el plano para encontrar la

pendiente de esta función lineal, por lo que trabajan con esta cantidad constante, en la utilización de la ecuación lineal para encontrar una relación matemática que les permitiera establecer la cantidad de botellas (Y) que se requieren para cubrir determinada área (X) de una superficie cualquiera.

$$P_1(8, 578) \quad P_2(16, 1156)$$

$$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1156 - 578}{16 - 8} = \frac{578}{8} = 72.25$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - 578 = 72.25(x - 8)$$

$$y - 578 = 72.25x - 578$$

$$y = 72.25x - 578 + 578$$

$$y = 72.25x$$

Figura 42: Análisis geométrico descritos por el Equipo C (agosto 2019).

La Figura 41 evidencia expresiones matemáticas que el equipo B utiliza para determinar una relación matemática que les permita determinar la cantidad de botellas requerida en una superficie dada. El trabajo matemático de este equipo se asocia a conceptos de geometría analítica, tales como el hallazgo de la pendiente de una función lineal y la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. En este orden de saberes vislumbrado por los participantes, utilizan el símbolo Y que representa la cantidad de botellas requeridas en determinada superficie, el símbolo X que representa el área superficial expresada en m^2 , y el símbolo m (pendiente), que corresponde a una cantidad constante. En términos generales, el resultado obtenido fue la relación matemática $Y = 72X$.

Los participantes del equipo A decidieron no utilizar ningún tipo de gráfica para hallar una relación matemática que les permitiera establecer la cantidad de bloques de botellas que se requieren para cubrir determinada área. Consideran que, por tratarse de dos magnitudes directamente proporcionales, con una regla de tres simple podrían establecer esta relación matemática como se representa en la siguiente figura.

En el area de 4m^2 , se usan 289 botellas

$4\text{m}^2 \leftrightarrow 289$

$X = ? \leftrightarrow N^\circ \text{ botellas}$

$$N^\circ = \frac{289 \text{ botellas} \cdot X}{4\text{m}^2}$$

$$N^\circ = 72.25 \frac{\text{botellas}}{\text{m}^2} \cdot X$$

Figura 43: Regla de tres simple por el Equipo A (agosto 2019).

De acuerdo con los momentos del proceso de modelación matemática descritos por Blum y Borromeo-Ferri (2009), el equipo A trabaja por medio de una particularidad a partir de este momento del modelo real, pudieron trascender al trabajo matemático sin tener en cuenta un modelo matemático ideado por ellos que los respalde. En este caso, la imagen representa el concepto matemático proporcionalidad directa, que les permitió encontrar una relación matemática, a través del uso de una regla de tres simple directa cuyas variables fueron simbolizadas por NB (número de bloques botellas requeridas en determinada superficie) y X (m^2) que representa el área superficial. Este equipo encontró la relación matemática $NB = 72X$.

4.5.3. Comparación de relaciones matemáticas.

Los participantes compararon sus hallazgos al trabajar con la información suministrada y los cinco equipos coinciden en decir que cada relación matemática hallada es la misma; lo que diferencia una de la otra es la forma como se representó la cantidad de bloques de botellas y el área de la superficie acordonada.

Relación: al revisar los resultados con mis compañeros notamos que la fórmula o relación matemática encontrada coinciden.

Diferencias encontradas: algunos compañeros utilizaron símbolos diferentes, otros utilizaron temas diferentes.

Diferencias encontradas: algunos compañeros utilizaron símbolos diferentes, otros utilizaron temas diferentes.

Figura 44: Descripción del Equipo C (agosto 2019).

Resultado matemático hallado por los equipos B y C	Resultado matemático hallado por los equipos D y E	Resultado matemático hallado por el equipo A
$y = 72.25x$	$N = C - A$	$10^2 = \frac{72.25 \text{ botellas} \cdot X}{m^2}$

Figura 45: Relaciones matemáticas halladas por los Equipos (agosto 2019).

Los participantes han establecido una relación matemática para calcular la cantidad de bloques que se requieren para cubrir una determinada superficie, a la vez han comparado resultados matemáticos con sus compañeros, concluyendo que es la misma relación matemática. En este sentido, este resultado matemático podría tenerse en cuenta para cualquier construcción ajustada a las condiciones que han propuesto los participantes como situación real. Este trabajo matemático requirió el uso de las competencias matemáticas para obtener los “*resultados matemáticos (MR)*”, como lo describen Blum y Borromeo-Ferri (2009). Por lo tanto, es necesario trascender a la interpretación de estos resultados en el mundo real.

4.6. Validación de resultados obtenidos en un contexto particular

A partir de este momento, el ciclo regresó nuevamente al entorno real, para asociar los resultados matemáticos con resultados reales y validar el cumplimiento de las características y condiciones generales del contexto particular. En este sexto momento, los participantes interpretan resultados reales obtenidos en los modelos matemáticos y los validan para que se corroboren los resultados concernientes a los momentos 2 y 3, de manera que respondan a las inquietudes de los participantes en relación con la producción del contexto particular en el momento 1, del ciclo descrito por Blum y Borromeo-Ferri (2009). El propósito de este momento es integrar los resultados matemáticos con modelos en la solución de resultados reales, para validar el cumplimiento de las características y condiciones generales del contexto particular

A continuación, se analizan las evidencias de este momento.

Los participantes consideran haber hallado un modelo matemático y realizan pruebas algorítmicas de la relación encontrada en el subproceso anterior. Por tanto, se

pregunta ¿qué cantidad de botellas se necesitan para cubrir una superficie de un metro cuadrado?

La respuesta de los participantes fue de 72 unidades. En este sentido, los participantes han redondeado la cantidad 72,25 a 72 ($72,25 \cong 72$) por tratarse de cantidades discretas, porque los modelos de bloques proporcionados no podrán ser cortados o partidos debido a las características particulares en su diseño.

En 1 m^2

$$U = (72,25 \text{ botellas}) (\text{Tr})$$

$$U = 72,25 \text{ botellas} \cong 72 \text{ botellas}$$

$$U = 72 \text{ botellas}$$

Figura 46: Cantidad de bloques de botellas requerida en un m^2 . Descripción del Equipo A (agosto 2019).

La respuesta de los participantes obedece a lo que describen Rico, Coriat y Segovia (1997), quienes afirman que, en el trabajo con las matemáticas, se debe dar paso a una flexibilidad en el trabajo con números y que la pérdida de exactitud se compensa con la ventaja de cálculos sencillos y resultados fiables.

En este sentido, se pretende analizar lo asertivo o no asertivo de la respuesta de los participantes a partir del entorno real. Para este caso, se retoman los hallazgos descritos en los apartados 4.2 y 4.3, donde los participantes iniciaron su producción denotando una superficie cuadrada de 4m^2 que requirió 289 fondos de botellas.

Haciendo un análisis detallado y minucioso de la apreciación de los participantes, se describe su perspectiva de la siguiente manera:

- Es una superficie cuadrada.
- El área de la superficie es de 4m^2 .
- Si el área es de 4m^2 y la figura es cuadrada, significa que las medidas de sus lados son de 2m. por cada lado.
- En la superficie acordonada se necesitó 289 fondos de botellas.

Se afirma que, si en esa superficie cuadrada se ubicaron 289 botellas, significa que cada lado estaría formado por 17 fondos de botellas. Dicho de otra forma, $17 \times 17 = 289$; los lados de la superficie cuadrada que corresponde a 2m. requirió 17 fondos de botellas.

Por simple lógica, en un lado de un metro se necesitaría 8,5 botellas, pero como se trata de cantidades discretas, se puede decir que con un lado de un metro solo se necesitan 8 fondos de botellas. Por lo tanto, en el contexto real, en una superficie de un metro cuadrado solo se podrían ubicar 64 fondos de botellas ($8 \times 8 = 64$).

En el resultado de los participantes se evidencia que en el modelo matemático para una superficie de un metro cuadrado se necesitaría 72 fondos de botellas. Al llevarlos al contexto real, se denota una significativa diferencia de 8 fondos de botellas. Esto es tan solo el análisis de resultado de un metro cuadrado. Podríamos hacer la siguiente pregunta ¿Qué ocurre en una superficie de 2m^2 o 3m^2 o 4m^2 que no sea superficie cuadrada u otro valor?

A continuación, se describe el recorrido focalizado en tres de los equipos que responde a la pregunta de investigación *¿De qué manera se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media?*

El producto del análisis de las maneras para determinar modelos matemáticos que surgió del estudio de los momentos, se enuncian a continuación:

- Situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos, generando un modelo terminado llamado modelo de bloques de botellas y un modelo sin terminar llamado modelo de la silueta de espiral en la construcción de la placa huella.
- Representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos.
- Idealización y simplificación de la información en la transformación de la superficie.
- Modelos matemáticos en la transformación de una superficie.
- *Momento donde los participantes trabajan con resultados matemáticos en contexto*
- Validación de resultados obtenidos en un contexto particular.

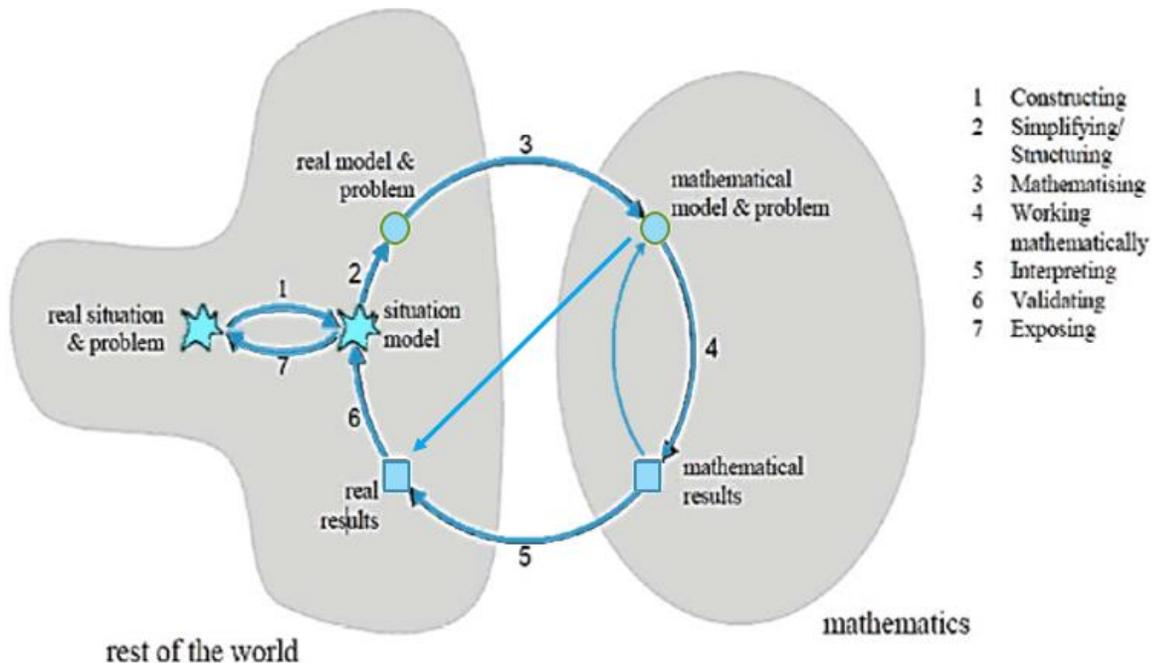


Figura 47: *Rutas del ciclo retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) desarrolladas por los equipos C y D.*

Se valida el modelo de la relación **Número de botellas requerida vs. área de una superficie acordonada** con la siguiente condición: el modelo encontrado por los participantes solo se aplica para superficies cuadradas formadas por múltiplos positivos de cuatro, a partir de la situación en estudio mediante la relación matemática $N^{\circ} \text{ de botellas} = 289 \text{ por Numero de espacio}$. De otra forma, el modelo no se cumple en el contexto real.

El anterior análisis y los resultados de este capítulo evidencian las maneras en que los participantes determinaron modelos matemáticos durante el desarrollo de los diferentes momentos y subprocesos en la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este apartado se exponen las conclusiones en relación con el alcance del objetivo y el proceso de modelación llevado a cabo en el trabajo de campo, de acuerdo con las maneras para determinar modelos matemáticos en contexto de residuos plásticos. La investigación se realizó con estudiantes de educación media, a través de prácticas y actividades realizadas por los participantes en torno a los procesos de modelación planteados por Blum y Borromeo-Ferri (2009).

5.1 Alcance del objetivo

Esta investigación propuso como objetivo *determinar modelos matemáticos mediante la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos con estudiantes de Educación Media*. Para su consecución se plantearon seis momentos que se refieren a continuación: (1) *situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos*, (2) *representación del plano de una placa huella construida con residuos plásticos*, (3) *idealización y simplificación de la información en la transformación de la superficie*, (4) *modelos matemáticos en la transformación de una superficie*, (5) *resultados matemáticos en contexto de la placa huella* y (6) *validación de resultados obtenidos en un contexto particular*.

El proceso de modelación y la validación de modelos mediante la experimentación asociada a este contexto particular comenzó con los intereses de 16 participantes al pretender articular las matemáticas con el contexto escolar. Ellos hicieron uso de material reciclable para transformar una parte del suelo al interior de la Institución Educativa San Pedro de Urabá; esta idea surge en el marco del desarrollo de uno de los proyectos sociales avalado por el consejo académico, configurándose como proyecto transversal.

Esta propuesta pedagógica constituyó un factor importante para que los participantes distinguieran situaciones cercanas a su contexto, factibles de estudiar por la importancia en el aprendizaje formativo. El interés por el caso particular de la construcción de la placa huella con residuos plásticos permitió que los participantes estuvieran atentos a

los encuentros con el investigador y conllevó a un proceso de modelación constituido por momentos de trabajo individual y cooperativo.

En el trabajo de campo los participantes reconocieron algunas situaciones relevantes en el contexto residuos plásticos y, en particular, su interés por la situación de la construcción de una placa huella con residuos plásticos. Además, existe la intención del investigador por describir el proceso realizado por los participantes, analizando los datos a través de los métodos de entrevista, observación y documentación escrita, elementos claves para el alcance del objetivo en la investigación.

Los nuevos conocimientos construidos por los participantes en el contexto escolar y experimentado de manera auténtica, la lectura del fragmento del artículo de Blum y Borromeo-Ferri (2009), y las experiencias previas en planeación y construcción, formaron un compendio de ideas que les permitió relacionar sus conocimientos con el pensamiento geométrico. También se trabajaron otros pensamientos dentro del proceso de modelación con resultados representados en modelos matemáticos de forma simplificada, de manera teórica y de forma experimental en la construcción de la placa huella.

5.2 Etapas en el proceso de modelación en la investigación

Además de evidenciar la relación entre la situación particular, la placa huella con residuos plásticos y la matemática (conocimiento geométrico, numérico, métrico y algebraico), a través de un proceso de modelación, los resultados evidencian dos modelos matemáticos finalizados y un modelo no finalizado que se asocian a los momentos del ciclo de modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) que se describen en el capítulo dos. De esta forma, se analizan las acciones y las interacciones de los participantes en cada momento del proceso de modelación y los subprocesos desarrollados en la investigación. A continuación, se presentan las conclusiones sobre los modelos matemáticos descritos por los participantes.

5.2.1 Modelo cartesiano del número de bloques vs. área de superficies acordonadas.

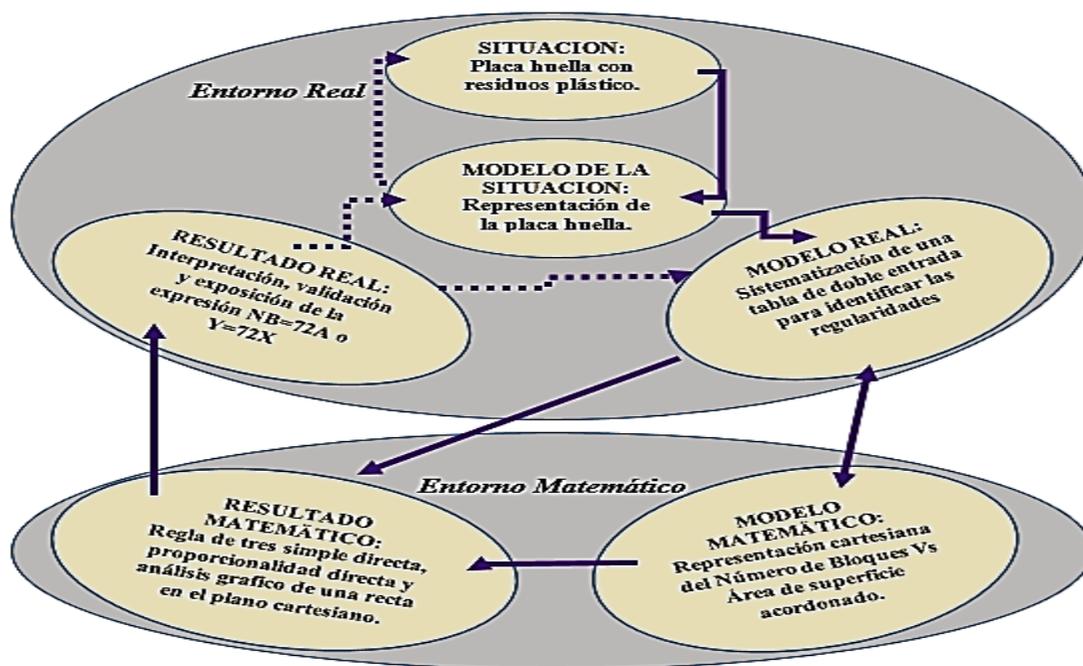


Figura 48: Proceso de modelación de mayor envergadura que surge en la investigación.

Los participantes reconocieron una situación en la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos y se inclinaron por el diseño y construcción de una placa huella con estos materiales residuales. Esta propuesta surge de las reflexiones que se dieron en equipo y las implicaciones de esa situación en la institución educativa.

Su interés por la situación particular conllevó a darle solución al problema, donde el investigador medió a través de preguntas que permitieron establecer los conocimientos matemáticos articulados a sus experiencias en las actividades de la construcción de la placa huella.

En el **primer momento**, *situación en la exploración y preparación de una superficie en contexto de residuos plásticos*, y los cinco subprocesos que se describieron, se direccionó una *situación real*. En este sentido, los participantes reconocen y utilizan distintos sistemas al explorar el entorno del contexto. Esto posibilitó espacios de discusión,

reflexión y trabajo colaborativo con los participantes, las cuales fueron tenidos en cuenta en el reconocimiento de las diferentes variables implicadas en el fenómeno de los residuos plásticos.

Además, los participantes no solo hicieron uso del aula escolar, sino que convirtieron en laboratorio de aprendizaje el entorno de la institución. De esta forma se articuló el pensamiento espacial con los otros pensamientos matemáticos, en torno a la sistematización de un conocimiento práctico que condujo a representaciones e interpretaciones teóricas de modelos matemáticos, favoreciendo el aprendizaje autónomo del interés de los participantes.

La apropiación del espacio físico enriquece sus prácticas de aprendizaje porque no solo observaron, también hicieron parte de un proceso de transformación que involucró la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los participantes buscaron estrategias para nivelar, preparar o transformar el espacio físico a través de la cooperación en relación con el préstamo de herramientas y la ayuda física. Al respecto, una característica peculiar del aprendizaje por proyectos es el aprendizaje colaborativo, entendiendo que la modelación de situaciones en el entorno escolar aporta a este proceso, como se evidencia en esta investigación.

Los participantes consideran que la construcción de la placa huella soluciona un problema referente a épocas de lluvias al interior de la institución y que provee una vista agradable para los visitantes. Por lo tanto, se afirma que las experiencias vividas fueron herramientas de conocimiento empírico que también favorecieron la enseñanza y aprendizaje.

Con respecto a la problemática del manejo de residuos plásticos al interior de la institución, los participantes identificaron y recolectaron residuos no biodegradables producidos por la comunidad educativa. En este sentido, identificaron botellas plásticas de diferentes tamaños, especialmente envases de gaseosa de entre 2,5 a 3 litros, bolsas plásticas, botellas de vidrios, empaque de papas, vasos desechables, palitos de bombón, empaque de yupis y de confites, envoltura de galletas y mecatos. Piensan que estos

elementos pueden usarse para brindar un beneficio y, por tanto, se utilizó gran parte de estos materiales en la construcción de la placa huella. En consecuencia, los participantes manifestaron que las botellas plásticas recicladas de 2,5 a 3 litros sirvieron como estructura o soporte de bloques; las envolturas de mecatos y plástico que desmenuzaron en pequeñas partículas fueron el soporte para evitar grietas en la estructura y evitar filtración de agua en temporadas de lluvia; el interior de los fondos de botellas se rellenó con una piedra que ocupó gran parte del volumen y el resto de los fondos de botellas con hormigón; y pintaron algunas botellas para darle un estilo decorativo a la placa huella.

Los participantes acordonaron un sector con vigas de dimensión 10cm de grosor, estas sobresalieron a una altura de 11cm y, además, acordonaron ocho superficies cuadradas cuyas medidas internas midieron dos metros por dos metros. Las vigas fueron reforzadas con una cercha y superficie llevó una capa de arena nivelada para soportar los bloques.

Las medidas fueron concertadas en conjunto por los participantes, aprovechando el conocimiento empírico (entendido como contacto directo con la realidad o experiencia vivida). De esta forma se articularon saberes empíricos con un proceso de modelación matemática.

En la culminación de la construcción de la placa huella, al relacionar los bloques y picadillos en el producto final de los sectores acordonados, se evidenció tres aspectos importantes: (a) *superficie del suelo acordonado y nivelado con arena*, (b) *Picadillo de plástico distribuido homogéneamente* y (c) *ubicación de los bloques con botellas plásticas recicladas*. Los bloques se ubicaron por colores para resaltar algunas figuras geométricas.

En las estructuras de placa huellas convencionales se realizan construcciones planas, pero en la placa huella se visualiza una estructura ondulada, debido a la textura de cada fondo de las botellas plásticas y de acuerdo con las consideraciones sobre la ubicación y uso del lugar. No obstante, los participantes manifestaron que en sitios concurridos por peatón y en carreteras transitadas por automóviles, no son recomendadas. En este sentido, este tipo de construcciones, según la opinión de estos participantes, puede aplicarse a lugares exclusivos de poca concurrencia de peatones, proporcionando ideas novedosas para futuros ingenieros asociado al uso de estos materiales reciclables. La exploración y preparación de

la superficie, la recolección de residuos, la ubicación y muestra de producto final, enmarcó el inicio de este proceso de acuerdo con Blum y Borromeo-Ferri (2009).

En el **segundo momento**, los participantes representaron y describieron el *modelo de la situación* que permitió generar rutas de análisis en este contexto particular. En otras palabras, plasmaron una imagen asociada a la representación del plano de la placa huella, describiendo el cuadrado como figura geométrica inmersa en ocho superficies cuadradas con medidas de dos metros por dos metros en cada cuadrado de cada superficie acordonada.

Atendiendo al proceso de modelación que corresponde con la “*representación mental de la situación*” de Blum y Borromeo-Ferri (2009), los participantes tomaron decisiones y filtraron información asociada a la situación del plano de una placa huella.

En el **tercer momento**, los participantes idealizaron y simplificaron la información del modelo de la situación a través de diferentes subprocesos. De esta forma, estructuraron, simplificaron y sistematizaron la información para identificar las regularidades encontradas.

Se evidencia la representación de un *modelo real* por medio de una tabla de doble entrada donde sistematizan y reconocen valores y relaciones entre una columna y otra. Por tanto, identifican regularidades en la representación de la situación del contexto en estudio. Estas regularidades identificadas están asociadas al área de cada superficie acordonada y cantidades de bloques diseñado con residuos plástico. En este sentido, se promovieron actividades con variables directamente proporcionales que cobran sentido porque se basan en un *modelo real* en contexto.

En el **cuarto momento** se determinaron modelos matemáticas mediante un contexto particular, a través de la matematización de la información suministrada en el momento anterior. La intención es profundizar en el entorno matemático, para identificar y simbolizar variables relacionadas con el modelo matemático.

Se observa que los participantes establecen que los materiales son susceptibles de medición: cantidad de bloques hechos de botellas recicladas, dimensiones de las superficies acordonadas, cantidad de cemento y arena, área que ocupa un bloque, cantidad de picadillo de bolsas plásticas, área de toda la placa huella y cantidad de pintura. Los estudiantes

matematizan estos elementos en sus acciones asociando varios elementos, hallando regularidades, cuantificando y simbolizando áreas y formas geométricas.

Otro aspecto que se evidencia es la transformación de ideas a partir de la actividad de modelación. Los participantes de un equipo replantearon su modelo real para graficar regularidades en un plano cartesiano. En este sentido, los estudiantes retornar al momento anterior para reorganizar sus ideas y poder encontrar un modelo matemático ajustado a las necesidades.

Al respecto, los modelos matemáticos de cada equipo representaron la información en el gráfico de formas diferentes con respecto a variable dependiente y variable independiente. Estas acciones evidencian ejercicios de modelación matemática relacionados con las percepciones de cada equipo en la construcción de conocimiento.

Los participantes logran hallar elementos o materiales cuantificables en la placa huella, símbolos y representaciones gráficas de estas regularidades seleccionadas, a través de la utilización y requerimiento del conocimiento extramatemático para la construcción del “*modelo matemático*”. Esto tiene correspondencia con lo que expresa Blum y Borromeo-ferri (2009), en su cuarto momento del ciclo, donde aparecen representaciones externas por dibujos, imágenes o tablas, pero las declaraciones son en un nivel matemático.

En el **quinto momento**, los participantes verificaron resultados matemáticos de modelos que emergieron. En este sentido, establecieron relaciones matemáticas para calcular la cantidad de bloques requeridos para cubrir una determinada superficie y compararon resultados matemáticos con sus compañeros. En este sentido, los estudiantes argumentaron sus acciones en relación las representaciones que hicieron, dando cuenta de aprendizajes acerca de gráficas, superficie, proporcionalidad, constante, pendiente de una función lineal, entre otros conceptos.

Estos aspectos evidencian el trabajo matemático asociado a conceptos de geometría analítica: utilizan el símbolo Y que representa la cantidad de botellas requeridas en determinada superficie, el símbolo X que representa el área superficial expresada en m^2 y, por último, utilizan el símbolo m (pendiente), que corresponde a una cantidad constante; en

términos generales, se obtuvo una relación matemática ($Y = 72X$). Un equipo consideró que, por tratarse de magnitudes directamente proporcionales, se podría utilizar una regla de tres simple directa, cuyas variables fueron simbolizadas por NB (número de bloques botellas requeridas en determinada superficie) y X (m^2) que representa el área superficial. Este equipo encontró la relación matemática $NB=72X$.

Se concluye que, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los participantes han logrado transversalizar el pensamiento geométrico con los pensamientos numéricos y algebraicos.

Este trabajo matemático realizado por los participantes también evidencia el uso de las competencias matemáticas para obtener “*resultados matemáticos (MR)*”, como lo describen Blum y Borromeo-Ferri (2009).

En el **sexto momento** se hizo un análisis de resultados reales en este modelo matemático (Representación cartesiana del número de Bloques Vs Área de superficies acordonadas). Al respecto, el momento evidencia tratamiento de cantidades discretas. En este sentido, se da paso a una flexibilidad en el trabajo con números y se observa asertividad frente a conceptos relacionados con la superficie; $4m^2$, figura cuadrada, medidas de lados. El recorrido descrito por los participantes focalizados permitió identificar las *maneras como se determinan modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plásticos*. En esta medida, el producto de este modelo matemático sigue los momentos y subprocesos del ciclo de Blum y Borromeo-Ferri (2009).

5.2.2 Modelo porcentual de piedra y hormigón de un bloque de botella reciclada.

En el aula taller de matemáticas, los participantes experimentaron con algunas técnicas para construir bloques de botellas plásticas. A partir de su creatividad, se diseñó un bloque de fondos de botellas plásticas recicladas consideradas novedosas, económicas y de mejor calidad que un bloque convencional.

El proceso de modelación se refleja en la siguiente figura.

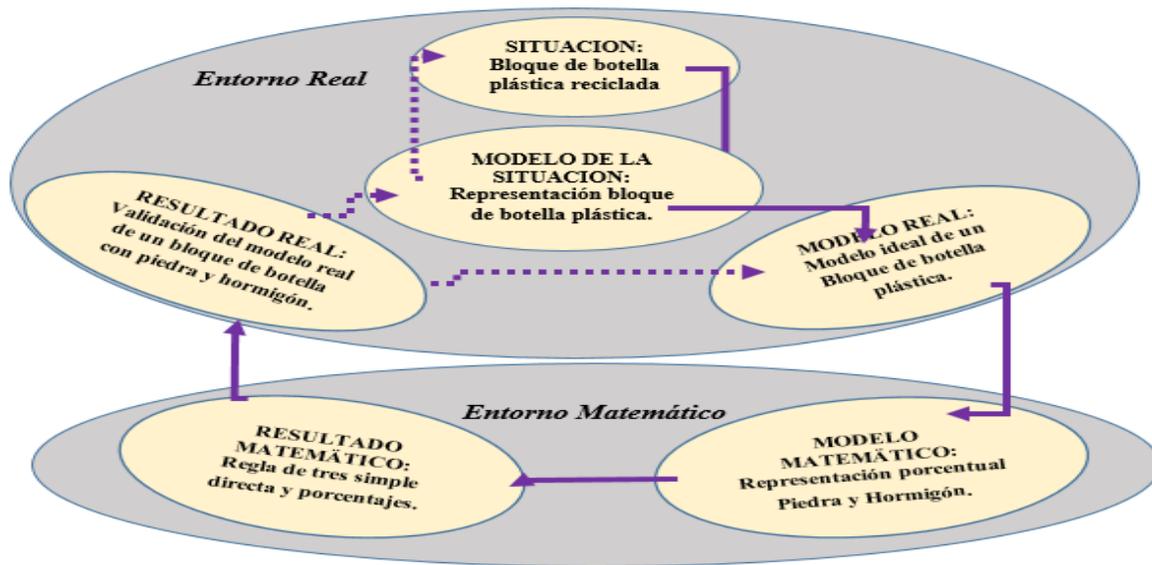


Figura 49: *Proceso del modelo porcentual de piedra y hormigón de un bloque de botella reciclada.*

A través de este proceso de modelación, los participantes demostraron razones para la elección de este bloque y en relación con su bajo costo. La estrategia utilizada fue la de introducir una piedra que cubriera la mayor cantidad de volumen del fondo de la botella sin y que no sobresaliera del envase plástico. En el ciclo de Blum y Borromeo-Ferri (2009), este **primer momento** inicia con una “situación dada en el mundo real”. En este caso, el diseño de un bloque de botellas plásticas es la *situación particular*.

En el **segundo momento** descrito por Blum y Borromeo-Ferri (2009), los participantes realizan una *representación mental* de un bloque de fondo de botellas con piedra. Ellos reconocen la piedra como material importante en la construcción local que proporciona resistencia y ahorro de hormigón.

En el **tercer momento**, los participantes, a través de prueba de laboratorio, idearon un bloque de fondos de botella. De esta forma involucraron temas matemáticos relacionados con un fondo de botella de gaseosa de tres litros, con capacidad promedio de 900 cm^3 de volumen, cinco piedras de un tamaño apropiado para ocupar el mayor volumen posible sin deformar el fondo de la botella, un matraz y agua.

En el **cuarto momento**, los participantes registraron valores en una correspondientes a la cantidad de agua desalojada en el recipiente. Este *modelo matemático* evidencia acciones relacionadas con volumen y variables en una tabla de doble entrada.

En el **quinto momento**, definido por Blum y Borromeo-Ferri (2009) como el trabajo matemático necesario en las competencias matemáticas del modelador, para obtenerlos “**resultados matemáticos**”, se evidencia el uso de la regla de tres simple directa para determinar los porcentajes de cada piedra.

Al respecto, validan esta información argumentando que, en términos generales, el porcentaje promedio de piedra es del 50% y el de hormigón es del 50%. Este *resultado real* les dio seguridad de expresar que sus bloques reducen costo en relación con los bloques convencionales. En el **sexto momento**, denominado por Blum y Borromeo-Ferri (2009) “**resultados reales**”, los participantes validaron estos resultados con base en su conocimiento y demostraciones.

A continuación, se representa la información de los promedios de porcentaje del volumen de las piedras y promedio de porcentajes del volumen ocupado por el hormigón para demostrar si las conclusiones de los participantes son certeras.

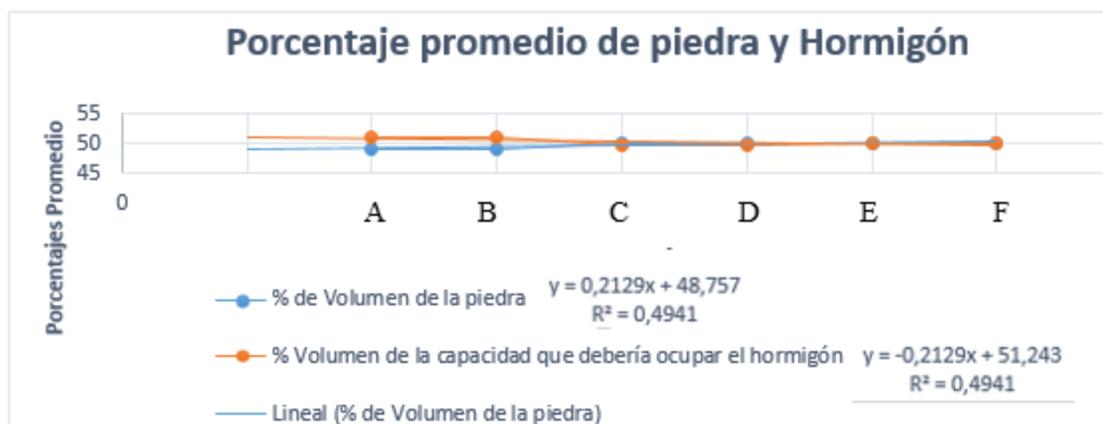


Figura 50: Gráfica de los promedios de piedra y hormigón en la construcción de un bloque con este material (junio 2020).

Fuente proporcionada por el autor con el uso de la herramienta Excel.

La gráfica muestra dos funciones lineales. La de color azul representa el porcentaje promedio del volumen de 30 piedras, generando una función $f(x)=0,2129x+48,8$, y el color naranja representa el porcentaje del volumen de hormigón que se requiere para cada bloque, dicho resultado fue una función $f(x)=-0,2129x+51,2$.

En el análisis de la pendiente de las funciones, esta cantidad (0,2129) es un valor cercano a cero por lo que la función lineal está cerca de una función constante. Si la pendiente se hace igual a cero, se concluye que el porcentaje de piedra sería de aproximadamente 49% y el de hormigón de aproximadamente 51%. Por tanto, se puede concluir que la hipótesis de los participantes sobre reducción de costo a un 50% se puede validar como resultado aproximado.

Al respecto, los participantes presentan conclusiones como las siguientes: los bloques de botellas plásticas son un modelo novedoso, económico y de mejor calidad que un bloque convencional la calidad la podemos apreciar en la manera que al introducir un objeto compacto cómo lo es una piedra, el modelo que se obtiene es de una firmeza mayor, este modelo es novedoso y al tener en cuenta las proporciones de 50% piedra y 50% concreto, nos facilita el ahorro de cemento.

Con relación al tamaño de las botellas plásticas recicladas, consideran se necesitaría mayor cantidad de botellas si hubiesen sido de menor tamaño, evocando así el concepto de una proporcionalidad inversa. En otras palabras, comprender que en la variable “*botellas de menor tamaño* se requieren *mayor cantidad* para cubrir un espacio determinado”, evidencia una situación matemática que apunta a la solución del problema relacionado con una situación en contexto de residuos plásticos.

También se evidencia el concepto de proporcionalidad directa, cuando toman como referencia las variables “*botellas de mayor volumen, cubren mayor superficie*”. Se señala de nuevo que una situación contextual permite a los participantes el razonamiento y justificación de sus puntos de vista aplicada a conocimientos de las matemáticas.

5.2.3 Modelo en espiral.

Uno de los principales fines en la construcción de la placa huella fue evidenciar las maneras para determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie al interior de la institución. Al respecto, el siguiente proceso de modelación refiere el modelo de la silueta espiral de un sector acordonado.

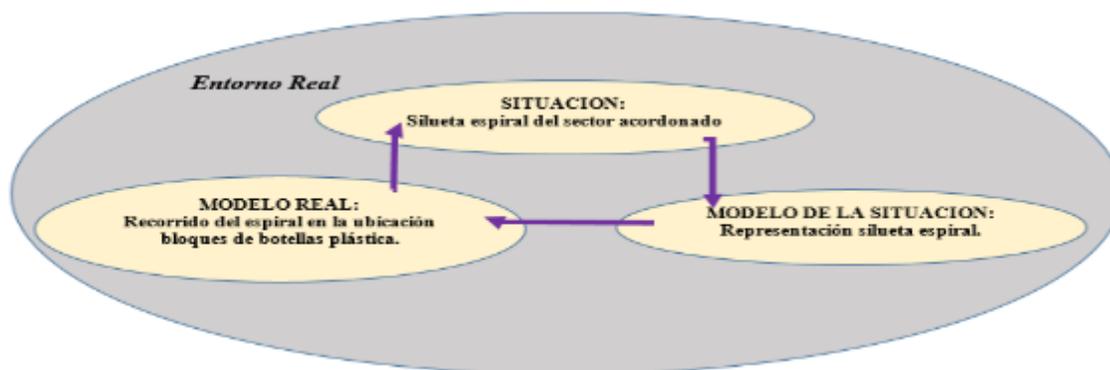


Figura 50: El modelo de la silueta espiral de un sector acordonado.

A partir de las preguntas realizadas por el investigador, los participantes hallan figuras geométricas en el producto terminado de la placa huella; estas figuras son cuadrados de colores y en espiral. En el primer momento, los participantes observan la silueta espiral en el sector acordonado. En el segundo momento, se representa la silueta espiral. En el tercer momento los participantes justifican que esta espiral fue el recorrido correspondiente a la ubicación de cada bloque en el sector acordonado. A partir de este proceso, se propone realizar futuras investigaciones en torno a este modelo descrito por los participantes, ya que el proceso solo abordó una descripción visual y una justificación transicional de la *idealización de un modelo real*.

5.3 Aportes de la investigación para los docentes sobre la implementación de la modelación matemática en el aula de clase

Tomando algunas consideraciones de esta investigación, se propone motivar al estudiante a involucrarse en un proceso de modelación matemática en contexto de residuos plásticos como una situación particular, espacio que permitiría la producción de modelos matemáticos asociados a una transformación de superficie.

Estas acciones permiten el desarrollo de competencias y habilidades para pensar en distintas relaciones asociadas a las matemáticas con los fenómenos cercanos. El docente debe realizar diferentes acciones relacionadas con los intereses de los estudiantes. De este modo, se provee una alternativa para que los estudiantes se aproximen al uso y construcción de su propio conocimiento.

Esta investigación describió un proceso de modelación donde se relacionaron conceptos geométricos, procesos métricos, aritméticos y algebraicos, con conocimientos extraescolares de interés de los participantes. También se observó dentro del proceso de modelación como el maestro debe direccionar los procesos mediante la implementación de las técnicas de recolección de datos. Se sugiere que la recolección de información sea coherente con el análisis de modelos que puedan emerger, para que las reflexiones que surjan permitan a los investigadores percibir otras preguntas y actividades que conlleven a acercar a los participantes en la transferencia de elementos matemáticos aprendidos en clase. Se debe articular una situación de contexto escolar que permita construir modelos matemáticos.

5.4 Futuras líneas de investigación

Con esta investigación, basada en el determinación de modelos matemáticos mediante la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media, se hace una contribución a las líneas de investigación en modelación matemática, con el propósito de que este proceso sea puesto en práctica en las aulas escolares, invitando a estudiar objetos o conceptos matemáticos a partir de la implementación de estrategias metodológicas y pedagógicas en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, permitiendo vincular y aplicar las matemáticas en situaciones de contextos reales.

En este sentido, se invita a los docentes encargados del área a implementar actividades de modelación en las aulas de los niveles de Básica y Media académica, puesto que para realizar este proceso matemático es fundamental en el proceso de formación de los estudiantes, determinar diferentes maneras de modelos matemáticos en relación con la vida cotidiana de ellos. Además, se propone a futuros investigadores, ir más allá de lo que

plantea los Referentes Curriculares en Colombia, en busca de alcanzar el perfil del estudiante que se pretende formar.

Ahora bien, iniciar con un proceso de modelación tomada del entorno del estudiante como situación vivencial, permite encontrar diversidad de maneras para determinar modelos matemáticos, la cual permite incitar interacciones entre conceptos matemáticos y realidad. Aspecto que promueve el desarrollo de habilidades y destrezas necesarias para resolver problemas de la cotidianidad de los estudiantes.

Posibles investigaciones que pueden orientar a implementar la modelación matemática en las instituciones educativas: ¿Cómo abordar aspectos metodológicos en el aula que promuevan la modelación matemática, fomentar la autonomía en los estudiantes e implementar evaluación formativa en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes? ¿Cuáles son los elementos constitutivos que se usan en la modelación de fenómenos ambientales para explicar conceptos matemáticos? ¿Cómo son las rutas de aprendizaje en los subprocesos y momentos del ciclo de modelación matemática? ¿Cuál es la naturaleza de modelos matemáticos en la perspectiva realística y educativa? ¿Qué propuestas y marcos de enseñanza aportarían a la implementación de procesos de modelación matemática en el aula de educación básica y media?

Finalmente, esta investigación deja el camino abierto a futuros investigadores para que puedan explorar acerca de otras maneras para determinar modelos matemáticos en el uso de residuos plásticos en diferentes instituciones educativas de nuestro país, así mismo ofrece elementos importantes para innovar en nuevas propuestas de estudio de la modelación matemática en otros ámbitos escolares.

5.5 Divulgaciones

Esta investigación fue presentada en: XV CIAEM-IACME. Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Medellín-Colombia, 2019.

“Modelos matemáticos emergentes en transformaciones de superficies con reciclables”.

<https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/249/88>

6 REFERENCIAS

- Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(21), 35-44. <http://doi.org/10.1007/97803872982212>
- Aravena, M., Caamaño, C. y Giménez, J. (2008) *MODELOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE PROYECTOS*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, pp 49-92.
- Bassanezi, R., y Biembengut, M. (1994). Modelación Matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, pp.13-25
- Biembengut, M., y Hein, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. México: Grupo Santillana.
- Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, pp. 45-58.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., y Niss, M. (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education. *The 14th ICMI Study*. New York: Springer.
- Bossio, J. (2014). *Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes del grado décimo al generar modelos lineales*. Urabá, Antioquia. p. 34.
- Bossio, J., Londoño, S., y Jaramillo, C. (2018). *Proceso de modelación en el contexto del cultivo del plátano: una producción escolar relacionada con modelos lineales*. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Cardona, A.; Martínez, A.; Ocampo, M. y Parra, M. (2015). Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de modelación. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM, México, 10.
file:///G:/Downloads/Consumodebolsasplasticas.Unaexperienciademodelacin.pdf
- Castro, E., Flores, P., y Segovia, I. (1997). *Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas*. España: Universidad de Granada, pp. 5-6.
- Chakravarty, S. (1966). *La lógica de la planificación de inversiones*. Madrid, España: Ed. Tecno.

- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. (Tesis doctoral), Universidad de Valencia, España.
- Fandiño, M., y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.
- Henríquez, A. (2007). Documentos escritos en la enseñanza de la historia. *Revista Historia e Imagen*.
- Huinchahue, J., Borromeo-Ferri, R., y Mena-Lorca, J. (2018). *El conocimiento de la Modelación Matemática desde la reflexión en la formación*. p.100
- Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396–404). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_101
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38 (3), 302-310.
- Magnani, L., Nersessian, N.J., Thagard, P. Gier, R. (1999). Using models to represent reality. In *Model-Based Reasoning in Scientific Discovery*; Eds. Springer: Boston, MA, USA; pp. 41–57
- Maino, M., Pittet, J., y Kóbrich, C. (1991) *Modelos matemáticos en medicina veterinaria. Monografías de Medicina Veterinaria*. Universidad de Chile, Facultad de ciencias Veterinaria y pecuaria, Chile
- Manzuela, J. Machado, E., y Blanco, R. (2018). El desarrollo de la competencia modelar problemas de programación lineal como requisito en la formación del ingeniero informático. *Mikarimin. Revista Científica Multidisciplinaria*.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), Matemática*. Primera edición. Bogotá, Colombia.
- MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), Matemática*. Segunda edición. Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Colombia. pp.56-78
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

- Moreira, M., y Greca, I. (2011). Modelos mentales y modelos conceptuales en la enseñanza & aprendizaje de las ciencias. *Revista Brasileira de Investigaçãõ em Educaçãõ em Ciências*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/255662238_Modelos_mentales_y_modelos_conceptuales_en_la_ensenanza_aprendizaje_de_las_ciencias
- Mujica, N., y Rincón, S. (2011). *Consideraciones teórico-epistémicas acerca del concepto de modelo*. Mujica /Artículos.
- Obando, J., y Sánchez, J. (2014). *Construcción de Modelos Matemáticos en un contexto cafetero*. Universidad de Antioquia, Colombia.
- Orobio, A., Orobio, C. (2015). Pavimentos con placa huella de concreto simple: Análisis con elementos finitos 3D. *Revista BDigital. Portal de revista UN*. Recuperado de revistaunal.edu.co
- Parra-Zapata, M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática*. Maestría tesis, Universidad de Antioquia.
- Rivera, Q. (2014). *Medida de área y volumen en contextos Auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática*. Caucaasia, Colombia.
- Rojas, B. (2010). *Investigación Cualitativa. Fundamentos y Praxis*. Caracas: Fedeupel.
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-Pluriversidad*, 19(2), 161–183.
<https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09>
- Rosas, D. (2008). Los números figurados. En Universidad Nacional I.P.A.R.M. 9º *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Valledupar, Colombia. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/953/1/22Taller.pdf>.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Uni-Pluriversidad*, 19(2), 80–102.
<https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.04>
- Sepúlveda, E., González-Gómez, D., & Villa-Ochoa, J. A. (2020). Analysis of a Mathematical Model. Opportunities for the Training of Food Engineering Students. *Mathematics*, 8(8), 1339. <https://doi.org/10.3390/math8081339>

- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la Matemática en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (cap. 5, pp.125-154). Barcelona: Horsori.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata. S.L. Mejía Lequerica, 12.28004
- Torres, M. (2015). *Los reyes de la pasarela, modelos matemáticos en las ciencias*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Fundación de Historia Natural Félix de Azara.
- Valle, C. (2013). *Utilización de botellas plásticas tipo pet como unidad estructural para la mampostería liviana*. Riobamba- Ecuador.
- Villa-Ochoa, J. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/12341478.pdf>
- Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz, M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, 27, 1–21.
- Yupanqui, M. (2014). *Reciclaje de desechos plásticos y su aporte como material didáctico en la Escuela Particular René Descartes de la provincia de Pichincha*. Ambato – Ecuador.
- Zapata-Grajales, F. N., Cano-Velásquez, N. A., y Villa-Ochoa, J. A. (2018). Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 585–603. <https://doi.org/10.12973/ejmste/76958>.

7 ANEXOS

Anexo 1: Consentimiento de participación

Yo _____ estoy de acuerdo en participar en el trabajo investigativo “maneras para determinar modelos matemáticos en la transformación de una superficie mediante un contexto de residuos plástico con estudiantes de educación media” el cual es desarrollado por el profesor Evelio Marcial Plaza Montes, estudiante de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa San Pedro de Urabá. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar, o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. De igual forma, puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o destruida.

Propósito de la investigación: el propósito de esta investigación es determinar modelos matemáticos mediante la transformación de una superficie en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media.

Procedimiento: Como participante de esta investigación, seré observado en clase y extraclase, en ocasiones me grabaran audios y videos, y también podría ser encuestado.

Riesgos: no existen riesgos asociados a la participación en esta investigación.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identidad del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso de la información bajo la supervisión del investigador y solo para fines académicos. Toda información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán utilizados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: El investigador responderá cualquier pregunta relacionada con esta investigación, a través del correo evelio12plaza@gmail.com

Consentimiento del participante: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte en esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación. (Horario por definir)

_____ Nombre del investigador	_____ Firma	_____ Fecha
_____ Nombre del participante	_____ Firma	_____ Fecha
_____ Nombre del padre de familia	_____ Firma	_____ Fecha

Anexo 2: GUÍA N°1. Explorando el espacio de un contexto

MOMENTO N° 1.1

Participantes: _____

Fecha: _____

Propósito: Identificar características del lugar físico, el cual, se pretende transformar, para la construcción de la placa huella con material reciclable, tales como: forma irregular del lugar, dimensiones y otras características descritas por los participantes.

1. Con los estudiantes de educación media de la profundización Matemática y Ciencias Naturales involucrados en la investigación y el profesor de matemáticas, se hizo una visita de campo, las cuales, plantearon algunas descripciones del lugar donde se pretende construir la placa huella con material reciclable. **A continuación, un grupo de participantes describen la situación de la siguiente manera:**

2. En esta visita de campo, tres grupos de participantes involucrados en la investigación muestran, mediante un dibujo o imagen, las características de la superficie que se pretende transformar.

Imagen

3. Los participantes saben que necesitan nivelar el terreno o lugar donde se pretende construir la placa huella, para que el lugar quede totalmente plano, por lo tanto, se generaron la siguiente pregunta: ¿qué estrategia podrías utilizar para que este lugar irregular, se pueda transformar en un lugar plano?

Anexo 3: GUÍA N° 2. Preparando un contexto particular

MOMENTO N° 1.2

Participantes: _____

Fecha: _____

Propósito: Identificar y recolectar los materiales no biodegradables que puedan ser utilizados para diseñar bloques en el marco de la construcción de la placa huella, a partir de la transformación y acordonamiento de un lugar físico de la institución.

1. Luego de las observaciones y acciones realizadas en el subproceso anterior, los participantes involucrados en la investigación, procedieron a identificar y recolectar materiales no biodegradables producidos por la comunidad educativa. Todo esto conllevó a preguntarles. **¿qué materiales no biodegradables puedes encontrar en el establecimiento escolar?, ¿Cuáles podrían ser útiles para la construcción de la placa huella?**

Las respuestas de los participantes son:

2. Una vez identificado y recolectado los materiales no biodegradables, los participantes quieren **explicar la función que cumplirá cada uno de estos materiales en el diseño de la placa huella**. Las respuestas escritas por los participantes son:

3. Algunos participantes están interesados en conocer las **dimensiones de los fondos de botellas plásticas recicladas**, aseguran que es muy importante, porque con estas desean construir los bloques. Los avances al respecto son:

4. En el aula taller de matemáticas, los participantes experimentaron algunas técnicas para construir bloques de botellas plásticas. A partir de su expectativa y creatividad, deciden realizar un diseño que sea novedoso, económico y de mejor calidad que un bloque convencional.

La estrategia que se utilizó fue la de introducir una piedra que cubriera la mayor cantidad de volumen del fondo de la botella, sin deformar dicho fondo y, además, que la piedra no sobresalga.

[Anexar imagen con la estrategia anterior](#)

Los participantes al notar que las piedras son sólidos que no tienen forma definida, deciden utilizar un recipiente y agua para calcular el volumen de ellas. A partir de sus saberes, determinan el volumen del agua que se desaloja al introducir la piedra en el envase que contenía este líquido. El deseo de los participantes es establecer **el porcentaje promedio de hormigón y porcentaje promedio de roca sólida o piedra en el diseño de los bloques**. A continuación se evidencian los resultados de cinco bloques con piedras diferentes:

1	
2	
3	
4	
5	

5. Luego de experimentar con el diseño y construcción de los bloques elaborados por los participantes, deciden **explicar las ventajas y desventajas que tiene este tipo de bloque o adoquín no convencional con relación al convencional**. A continuación explican los participantes:

6. Algunos equipos de trabajo integrado por los participantes involucrados en la investigación, comentan que es necesario acordonar con bases o bigas, el lugar físico ya nivelado por ellos, para poder ubicar los bloques de forma compacta. A partir de este comentario, un equipo asegura que ninguno de los que están en los grupos conocen técnicas de construcción, por lo que proponen conseguir un oficial con su respectivo ayudante, quienes se encargan de construir estas bases acordonadas con especificaciones acordadas por los participantes. **Las especificaciones son las siguientes:**

7. A partir de una visita de campo, luego de estar construida las bases acordonadas, los participantes explican **cómo ubicar los residuos sólidos reciclados y cuál sería su función en la construcción de la placa huella**. Sus propuestas al respecto son:

8. En este sentido, y teniendo en cuenta a la pregunta anterior, los participantes dan sugerencias de **cómo ubicar los bloques o adoquines**. Estas son:

Anexo 4: GUIA N°3. Representando el plano de la placa huella

MOMENTO N° 2

Participantes: _____

Fecha: _____

Propósito: Representar la imagen de la placa huella construida por los participantes.

Los participantes han avanzado, porque ya tienen un contexto particular construidos por ellos. En este sentido, pretenden representar mediante un dibujo o imagen la forma y características de la placa huella construida con material reciclable, que les posibilite, de algún modo, generar rutas de análisis de este contexto. A partir de este momento, se le preguntará a los participantes, ¿Cómo podrías representar este contexto particular?, deberán hacer una descripción a partir de sus representaciones.

Imagen	Característica

Anexo 5: GUIA N° 4. Sistematizando la información

MOMENTO N° 3

Participantes: _____

Fecha: _____

Propósito: sistematizar la información del contexto particular (placa huella) representada por los participantes, para poder identificar algunas regularidades.

1. Una vez realizado el subproceso anterior, los participantes quieren sistematizar la información suministrada, para identificar regularidades que puedan emerjan, En este sentido, por iniciativa de ellos, desean **describir la forma geométrica que tiene cada superficie acordonada, incluyendo sus respectivas dimensiones.** Estos fueron los hallazgos:

2. En el subproceso 1,2 pregunta N°8 de la producción escrita por los participantes, se les notó el interés por conocer la cantidad de bloques de botellas plásticas recicladas, requeridas para cubrir cada superficie acordonada. Por lo que se genera la siguiente pregunta: **¿Cuál fue la cantidad de bloques que observaron en un sector o una superficie acordonada? ¿Cómo podrías relacionar esta cantidad hallada con cada sector acordonado, para establecer la cantidad de bloques requeridos en toda la construcción de la placa huella?** Los participantes respondieron lo siguiente:

3. Algunos participantes quieren representar estas cantidades consignadas en la pregunta anterior. Por iniciativa de ellos, se genera la siguiente pregunta: **¿cómo se podría representar esta información? Explique con tus propias palabras, esta representación.** Esto respondieron los participantes:

4. Los participantes de algún modo, con los datos sistematizados, han identificado algunas regularidades. Por lo que se les preguntó: ¿Qué variables podrías identificar en la sistematización de la información? ¿Qué relación tiene los bloques de botellas con el sector o espacio acordonado? Esto respondieron los participantes:

Anexo 6: GUIA N° 5. Generando maneras para determinar modelos matemáticos

MOMENTO N°4

Participantes: _____

Fecha: _____

Propósito: Matematizar la información suministrada en el subproceso anterior, de tal manera que les permita a los participantes identificar y simbolizar variables, en la construcción y aplicación de conceptos de modelos matemáticos que emerjan del entorno real.

1. Los participantes tienen información importante a partir de lo que ya se ha sistematizado del entorno real. Ahora entrarán en el entorno matemático, por lo cual, deben responder la siguiente pregunta: ¿Matemáticamente qué se puede cuantificar de la placa huella? Si fueras ingeniero, ¿Qué tendrías en cuenta para construir la placa huella?

2. Ya has encontrado algunas regularidades que se pueden cuantificar matemáticamente en el contexto de la placa huella. Identifica esas regularidades o variables y simbolízalas. Esplique porque quieres simbolizarla de esa forma. Esto respondieron los participantes:

3. Los participantes ya han sistematizado algunas cantidades, así mismo, han identificado algunas variables con sus respectivos símbolos. En este sentido, por iniciativa de algunos participantes, desean representar esta información para identificar el comportamiento de las regularidades y poder hacer un análisis de ella. Esto respondieron:

Anexo 7: GUIA N° 6. Trabajando con resultados matemáticos

MOMENTO N°5

Participantes: _____

Fecha: _____

Propósito: Trabajar con los resultados matemáticos hallado en el subproceso anterior, para validar maneras que determinan modelos matemáticos, de tal manera que permita a los participantes evidenciar conclusiones y construir argumentos de solución.

1. Uno de los participantes preguntó por la cantidad de botellas que se requieren para cubrir una superficie de un metro cuadrado. Por lo que todos deciden en común acuerdo, encontrar una relación matemática, que les permita calcular la cantidad de bloques que se requiere para cubrir una determinada superficie. Esto se evidenció de la siguiente manera:

2. Luego que los participantes encontraron una expresión matemática que generalice las cantidades de botellas que se requieran para cubrir determinada superficie, deberán comparar los resultados entre ellos mismos. Una vez que hayas revisado estos resultados, establece relaciones y/o diferencias de sus hallazgos. Esto concluyeron los participantes:

3. Los participantes han encontrado algunos resultados matemáticos, y unificaron criterios entre sí, además, han definido dos variables de su interés, por lo que han decidido trabajar con el resultado hallado, para determinar si matemáticamente, cumple el requisito como modelo. Por tal motivo, se pedirá a los participantes que trabajen y verifiquen con diversos valores numéricos. En este sentido, se hace la siguiente pregunta: de acuerdo con los resultados hallados, ¿puedes concluir que la relación matemática encontrada, podría dar solución al modelo matemático? Ellos deberán explicar su conclusión:

Anexo 8: GUIA N° 7. Validando resultados reales

MOMENTO N°6

Integrantes: _____

Fecha: _____

Propósito: Integrar los resultados matemáticos con modelos en la solución de resultados reales, para validar el cumplimiento de las características y condiciones generales del contexto particular.

1. Los participantes consideran haber hallado un modelo matemático, y de algún modo han realizado algunas pruebas algorítmicas de la relación encontrada en el subproceso anterior. Por lo que se les preguntará, ¿qué cantidad de botellas se necesitan para cubrir una superficie de un metro cuadrado?, esto respondieron ellos:

2. En una salida de campo con los participantes, en el lugar donde fue construida la placa huella, deberán corroborar si los resultados matemáticos coinciden con los resultados de este contexto particular, por lo que deberán llevar cinta métrica para medir una superficie cuadrada de un metro cuadrado. En uno de los resultados del subproceso anterior concluyeron que en una superficie cuadrada de un metro cuadrado se requieren 72 bloques de botellas para cubrir esa superficie. En este sentido, los participantes deberán comparar estos resultados con el contexto particular. Luego de verificar estos resultados se les pregunta, ¿Coinciden los resultados? ¿Hay alguna diferencia? Ellos deberán explicar sus conclusiones:

3. En este orden de ideas, se les pregunta a los participantes si ¿la relación hallada se podría considerar como solución al modelo matemático hallado? ¿Por qué?, esto respondieron los participantes:

4. Los participantes han integrado resultados matemáticos con resultados reales, de alguna manera han interpretado estos resultados. Por lo que se les hace la siguiente pregunta: ¿Podrías mencionar algún listado de condiciones para que el modelo matemático sea válido en el entorno real?

Anexo 9: PÓSTER






CERTIFIES THAT:

EVELIO PLAZA MONTES

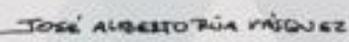
was the authored of a Poster, Modelos matemáticos emergentes en transformaciones de superficies con reciclables, that was presented at the

**XV Inter-American Conference on Mathematics Education
(XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática)**

held in Medellín, Antioquia, Colombia, from May 5 to 10, 2019 (46 hours).

Medellin, Colombia, May 10, 2019


Ángel Ruiz President
IACME-CIAEM


José Alberto Rúa Vasquez
Decano Facultad Ciencias Básicas






CERTIFIES THAT:

EVELIO MARCIAL PLAZA MONTES
D.I. 98598053

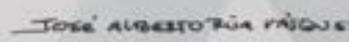
participated in the

**XV Inter-American Conference on Mathematics Education
(XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática)**

held in Medellín, Antioquia, Colombia, from May 5 to 10, 2019 (46 hours).

Medellin, Colombia, May 10, 2019


Ángel Ruiz President
IACME-CIAEM


José Alberto Rúa Vasquez
Decano Facultad Ciencias Básicas

Anexo 10: Entrevista semiestructurada. Momento uno

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

1.1 ¿Qué los motivó a elegir ese lugar, existiendo otros lugares con mayor visibilidad en la institución?

CORREA: porque se realizó en un lugar con visibilidad externa, por lo tanto, es llamativo ante la mirada no solo de los estudiantes que están dentro de la institución, sino que también llama la atención a todo aquel que pasa fuera del establecimiento porque se encuentra en frente del entorno de la institución que en este caso corresponde a la zona donde parquean motos y bicicletas al lado de la entrada principal. Esto hace que la construcción de la placa huella o el proyecto sea llamativo, por eso decidimos hacerlo en este lugar.

VANESA: la idea desde un inicio era escoger un lugar dentro de la institución para realizar nuestro proyecto, un espacio libre y que no tuviera algún inconveniente para realizar el trabajo en dicho terreno. El lugar o espacio que se seleccionó ya tenía una previa utilización como parqueadero de bicicletas, pero habría serias dificultades por la forma irregular del suelo. Teniendo presente que es un parqueadero y que la zona tenía buen espacio, ante el consejo académico de la institución pedimos el usar este lugar para nuestro proyecto.

MIRANDA: mi motivación a escoger ese lugar fue porque es un espacio dentro de la institución la cual nadie se ha preocupado para organizarlo para ponerlo en buenas condiciones y cómo ha estado muy abandonado todo el tiempo que he estudiado en el establecimiento, entonces creo que no fue una mala idea de seleccionar ese lugar para la construcción de la placa huella, porque es un lugar donde los compañeros guardan sus bicicletas, y siempre que llueve, el suelo se torna pantanoso. Entonces creo que no es mala idea porque se estaría evitando el barro, y le daría una mejor presentación al establecimiento en lo que respecta al espacio donde se desea construir la placa huella. Este es un espacio que nunca se han renovado desde que yo estoy estudiando en la institución.

1.2 ¿Por qué decidieron construir una placa huella? ¿planearon en la construcción en lo que respecta a planos, costos y otros detalles?

VANESA: se decidió construir una placa huella porque siempre que lloviznaba, las motos y bicicletas tenían dificultad para salir. Por eso, se pensó en las personas que dejaban sus

vehículos en ese espacio, por eso se pensó en la construcción de la placa huella para tener facilidad en la entrada y salida estando el suelo con mejor firmeza.

Con relación a planos, costos y materiales a utilizar, si se tuvo en cuenta. La idea era que todo lo que se hiciera, no tuviera costos elevados. En cuanto a los planos, se tuvo en cuenta la forma (planos) de la placa huella, la medición de distancias en su contorno para facilitarnos el trabajo y se pensó en materiales que cumpliera un rol importante en lo que respecta a decoración y acabados en la placa huella.

MIRANDA: la placa huella se decidió construir porque había una problemática en espacio donde se estacionaban las bicicletas y motos de los estudiantes y profesores, debido a que, en época de lluvias, este espacio es pantanoso, por lo que se le dificulta poder entrar y salir en esta temporada de lluvia debido a que los zapatos no podían salir limpios. En cambio, con esta placa huella, se buscó atacar este problema para que los estudiantes y profesores pudieran entrar y salir tranquilamente sin miedo a que el uniforme pueda ensuciar.

En cuanto a planeación, nos sentamos a dialogar analizando los posibles costos de los materiales, y además, el uso de materiales con que podríamos hacer la placa huella.

DUBERNEY: decidimos construir en la placa huella porque teníamos la intención de realizar un proyecto donde la institución, en su entrada, tuviera una vista agradable ante los visitantes, y además, con esta construcción podríamos adquirir conocimiento para nuestra vida.

En cuanto a planos, costos y otros detalles si nos reunimos a planificar y de entrada, notamos un suelo totalmente desnivelado, la cual decidimos nivelar el terreno para poder seguir con la

PATIÑO: La decidimos construir precisamente porque no había un sector donde los profesores y los estudiantes pudieran dejar su vehículo en un espacio seguro, también se tuvo en cuenta que en ese espacio, al momento de llover, se volvía de difícil acceder a dicho lugar.

Sí, se tuvo en cuenta esos temas para la construcción ya que desde un principio se pensó en cómo sería que materiales usaríamos y con qué medidas se podría trabajar para cubrir el espacio asignado para tal obra, y obtener la máxima eficiencia

TAMARA: Lo que respecta a planos costos y otros detalles, sí fue planeada, con la ayuda de nuestros maestros y personal que nos colaboró en la construcción. Se pensó en el uso de

materiales, el costo de los materiales tales como el cemento entre otros, todo esto lo tuvimos en cuenta, la idea es tener todo organizado para no improvisar.

Con relación a la construcción de la placa huella, esta se hizo con el objetivo de darle una mejor consistencia al suelo para tener facilidad al momento de parquear motos y bicicletas para que probablemente no se cayeran estos vehículos.

1.3 ¿Consideraron buscar ayuda para nivelar el terreno?

VANESA: nadie nos ayudó a nivelar el sector acordonado, cada quien medimos una superficie de dos metros cuadrado y procedimos a nivelar utilizando herramientas tradicionales y locales tales como: palas, picas, palines, entre otras herramientas, todo eso lo que hicimos para remover la parte superficial del suelo, y luego la compactamos para que el suelo quedara totalmente plano.

MIRANDA: de considerarlo prácticamente no porque en el grupo de los chicos que estuvimos trabajando en la placa huella, algunos teníamos conocimientos de como nivelar el suelo. Así que no vimos la necesidad de buscar ayuda para nivelar este terreno, solamente lo hicimos con la ayuda del profesor y los estudiantes que sabíamos.

DUBERNEY: de buscar ayuda para nivelar el terreno, sí lo consideramos, pero en conjunto tomamos el acuerdo de hacerlo nosotros mismos, ahorrar costos ya que eran pocos los que teníamos conocimientos sobre cómo nivelar el suelo para que al final nos quedara totalmente plano

PATIÑO: No, todo lo hicimos nosotros con las palas y las demás herramientas, nos repartimos la zona en espacios iguales para remover pasto, basuras, impurezas y finalmente nivelar el suelo para que la construcción fuera uniforme.

1.4 ¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron?

VANESA: ¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? Lo que sucedía con el reciclaje en la institución era que nadie lo utilizaba. Siempre terminaba desechado en el basurero y no se le daba un uso eficiente en beneficio para el medio ambiente. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? Porque de algún modo se podía utilizar

para beneficio dentro de la institución, y si no se usaba este material, no podríamos asumir costos en la construcción de la placa huella, en cambio con este material reciclable lo que se hizo fue hacer uso de algo que no tenía ninguna utilidad dentro de la institución y que también fuera económico. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? no consideramos algunos reciclables biodegradables tal como lo son el papel y el cartón porque con el agua se descompone, tampoco consideramos el uso de vidrios por su fragilidad.

MIRANDA: ¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? nosotros tuvimos investigación sobre el uso del reciclaje en la institución, y prácticamente concluimos que todo este reciclaje se iba a la basura como cualquier otra basura no reciclable. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? A partir de este proyecto, consideramos utilizar el uso de estos materiales reciclables, tales como: envases de gaseosa, bolsas de papitas, entre otros materiales, y de esta manera será más fácil o más viable trabajar con este material reciclable conseguidos en la misma institución la cual nos ahorraría costos. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? Las opciones que no consideramos fue el uso de botellas plásticas pequeñas porque es más complejo para rellenar y además necesitaríamos mayor cantidad. Otra opción que no consideramos fue el uso de cartón y papel porque se desintegra con mayor rapidez y otros materiales que no lo utilizamos para nuestro propósito.

DUBERNEY: ¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? El material que se podría reciclar en la institución se perdía en el basurero donde los vehículos encargado de recolectarlo se los llevaban. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? Decidimos utilizar este material en la construcción de la placa huella, para contribuir con la conservación del medio ambiente. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? quizás sí podrían existir otras opciones, pero sólo decidimos hacerlo con hormigón y con piedra y además el uso de material reciclable porque ayudaba a mejorar la institución y a nuestro planeta.

PATÍÑO: ¿Qué pasaba con el reciclaje en la institución? Con el reciclaje no se hacía nada en la institución, todo termina a en las canecas de la basura. ¿Por qué consideraron el uso de materiales reciclable para la placa huella? Se consideró su uso por qué nadie más lo usaba, se colabora con el medio ambiente y también se ahorra dinero, además que percibimos que

podría ser un buen material para trabajar en la placa huella. ¿Cuáles fueron las opciones que no consideraron? Las opciones que no se consideraron fueron la de usar papel, cartón, vidrio y otras.

1.5 ¿Existe alguna prueba sobre el uso de este material que evite fallas geológicas?

VANESA: se tiene muy presente que estos materiales no son biodegradables, y la descomposición de ellas tarda centenas de años, por lo que deduzco que será resistente para soportar fallas geológicas de suelos inestables.

MIRANDA: lo que se hizo con los bloques de botellas recicladas, fue reemplazar los materiales convencionales tales como bloques y arena. Por lo tanto, este picadillo de material reciclable cumple un rol de mayor durabilidad que la misma arena porque queda con doble resistencia, tal como lo es la capa de arena más la capa de picadillo para luego ubicar los adoquines hechos de botellas plásticas recicladas. En cuanto a si existe alguna prueba que evite fallas geológicas, no tengo prueba de eso, pero estoy más que seguro reduce cualquier falla geológica por la contextura de la capa de picadillo plástico.

DUBERNEY: las botellas plásticas y el picadillo de bolsas de mecatos, poseen un periodo de descomposición larga por sus composiciones químicas, además es un recurso fácil de conseguir en la institución por lo tanto es un componente extra y novedoso a la hora de construir placa huella, los que nos hace creer a nosotros que este material es resistente y además creemos que evitará filtraciones de agua.

1.6 ¿Por qué decidieron trabajar con botellas de tres o 2,5 litros?

VANESA: decidimos hacer uso de las botellas plásticas de entre 2.5 a 3 litros porque considero que son las más grandes que se encontraban en el mercado y también las que venden en la tienda. Si hubiéramos hecho uso de botellas de menor tamaño, entonces necesitaríamos mayor cantidad de botella para poder rellenar el espacio acordonado en la placa huella.

MIRANDA: escogimos estas botellas ya observando los diferentes tamaños de botellas plásticas desechadas en la institución, llegamos a la conclusión que entre más grande sea la botella más espacio ocupa a la hora de rellenar el cuadro acordonado.

DUBERNEY: respecto a esto, decidimos trabajar con este tipo de botellas porque sus medidas eran apropiadas con las vigas acordonadas que ya se habían hecho y a la hora de ubicar las botellas obteníamos un producto justo y ordenado.

PATIÑO: Las botellas de 2.5 a 3 litro tienen mayor capacidad de almacenamiento y son las de mayor comercialización en la institución, por tanto, nos era de mucha utilidad usar esas botellas que nadie utilizaba. Con esta propuesta, se está contribuyendo al mejoramiento del medio ambiente.

1.7 ¿Qué criterios tuvieron en cuenta para el corte de los fondos de botellas?

VANESA: se tuvo en cuenta porque si era muy alta por ejemplo unos 20 centímetros quedaría muy elevado el terreno y era difícil para que los vehículos pudieran subir ahí. Y si estaba por bajo del nivel del suelo, entonces el espacio podría inundarse.

MIRANDA: el criterio que tuvimos en cuenta para cortar los fondos de botellas plásticas fueron: primero tuvimos midiendo la altura de la base acordonada del sector que cubre todo el cuadro de la placa huella, de alto tenía una medida de 11 cm y por eso recortamos la botella a una altura de 11 cm para poder rellenar y quedara totalmente nivelada.

DUBERNEY: con base al corte de las botellas tuvimos en cuenta varias cosas, entre estas tenemos por ejemplo el ahorro del hormigón y la altura de las vigas ubicadas en la zona acordonada.

PATIÑO: El tamaño fue fundamental. Si estos fondos de botellas fueran muy elevados, se corre el riesgo de que quede se requiera mayor cantidad de materiales tales como hormigos y piedra. Y si es lo contrario, o sea, fondos de botellas pequeñas en estatura, esta placa huella se podría inundar y llegar a ser más un problema que una solución.

1.8 ¿Por qué decidieron introducir piedra a los fondos de botellas o tuviste en cuneta otra opción diferente a piedra?

VANESA: la piedra es un elemento útil en la construcción con capacidad para ser resistente y si es de un tamaño considerable que ocupe el mayor volumen posible, al introducirlo en los fondos de estas botellas plásticas, se podría ahorrar material de hormigón.

MIRANDA: estuvimos pensando eso antes de realizarlo ya que, si se dejaba solamente la botella sin la piedra, habría más gasto de hormigón. En cambio, sí se echaba la piedra, esto generaría menos gasto de hormigón y a la vez más resistencia porque la piedra es sólida.

DUBERNEY: decidimos colocar una piedra en el fondo de la botella plástica para ahorrarnos el 50% del hormigón y el bloque quedaba más resistente que bloques convencionales.

PATIÑO: La piedra en los bloques renovables la elegimos de entre otros materiales o inclusive de entre otro tipos de piedra por el simple hecho de la experimentación, En cuanto a construcción hicimos varios modelos de bloques , estudiando su resistencia, Ahorro de materiales como el concreto, y al final llegamos a la conclusión de que el bloque con una piedra de tamaño considerable nos producía un ahorro en costos, además da una mayor resistencia que contribuye a la durabilidad de la placa huella.

1.9 ¿Por qué se introdujo en el resto de fondos de botellas hormigón? ¿había otros materiales que podrían tenerse en cuenta diferente al hormigón para mitigar costo?

VANESA: el hormigón es un material reconocido para la construcción en comparación con los otros materiales más rústicos no convencionales en lo que tiene que ver con la construcción de bloques, por tal razón, las botellas plásticas con un tamaño adecuado y las piedras, más el componente de hormigón estos bloques nos quedarían más compactas y con la seguridad de que no se van a dañar tan rápido con el tiempo.

MIRANDA: Desde mi punto de vista el bloque convencional a los pocos años o al tiempo se va deteriorando o desmenuzando porque está compuesto por más arena que cemento. En cambio, con las botellas pueden durar más ya que están hechas de hormigón y piedra por eso duraría más tiempo.

1.10 En algunos grupos de participantes, a la hora de preguntarle qué cantidades pueden ser medibles en el uso de los fondos de botellas plásticas, tuvieron en cuenta **la pintura** con que se pintó los fondos de botellas como cantidad cuantificable ¿Qué opinas al respecto? ¿podrías considerar la pintura de estos fondos como una cantidad medible?

VANESA: en nuestro proyecto, la pintura fue utilizada para darle un estilo creativo a la placa huella y si considero a la pintura como una cantidad que puede ser medible porque a mayor cantidad de botellas, mayor uso de pintura.

MIRANDA: la pintura se utiliza en este proceso más que todo para adornar la placa huella para que tenga más vida y no se vea sólo de un solo color, o sea gris, que es el color del cemento.

DUBERNEY: las botellas tenían una medida exacta y se necesitaba una respectiva cantidad de pintura para cada botella. Por lo tanto, se podría considerar la pintura como una cantidad medible para cada fondo de botella por tratarse de una medida Regular o exacta a la hora de pintar estos fondos de botella.

PATIÑO: La pintura sí es una cantidad medible, de hecho, es directamente proporcional porque a mayor número de botellas empleadas, mayor pintura por cada botella con lo cual calculando cuanta pintura se lleva un fondo de botella podemos saber cuánta pintura será requerida por un numero de fondo determinados y en consecuencia por metro cuadrado de superficie porque recordemos que sólo son los fondos externos

1.11 ¿Justifique por qué razón, los bloques construidos con fondos de botellas plásticas son novedosos, económicos y de mejor calidad que un bloque convencional?

VANESA: precisamente con este tipo de bloques de botellas plásticas no he visto que se haya hecho o utilizado en otra construcción, son muy económicas, fácil de conseguir, la piedra no genera ningún costo y en cuanto a la durabilidad se refiere, yo diría que es de mejor calidad que un bloque que comúnmente se utiliza.

DUBERNEY: Respecto a los bloques convencionales, la creación de estos bloques hechos por nosotros son mejores que los bloques comunes ya que se ahorra recursos y trabajo a la hora de hacerlos.

PATIÑO: El bloque es un invento novedoso por el hecho de utilizar algo tan común para la comunidad estudiantil cómo lo son los tarros de gaseosa que prácticamente nadie se había preguntado que se hace con esos tarros después, o que impacto genera en el medio ambiente, el consumirlas en masa y no preocuparse por los envases plásticos después. Además de ser novedoso podemos ver su factor económico y es que al reciclar las botellas como moldes , recolectar piedras que se encuentran en cualquier lugar y hacer un

revestimiento de concreto guardando unas proporciones de 50% la Piedra-50% concreto, con lo cual el ahorro de cemento es mucho, La calidad la podemos apreciar en la manera que al incluir un objeto tan macizo como lo es una piedra, en serio la construcción que se obtiene es de una firmeza mayor, además de utilizar el picadillo que ayuda en cierta medida a la durabilidad y el agrietamiento.

1.12 Por lo general en las construcciones de las placas huellas, la estructura queda totalmente Plana, mientras que con el uso de estos bloques la estructura queda ondulada ¿podrías considerar esto como una ventaja o desventaja? ¿Por qué?

VANESA: al tener una placa huella de forma ondulada, tiene sus ventajas o desventajas. Desventaja porque en terrenos concurridos, alguien que no tuviera cuidado podría tener algún tipo de accidente. Como ventaja, esta podría servir como sitio específico para ubicar vehículos.

MIRANDA: los fondos de la botella tienen una ondulación, es decir no son planas, eso significa que la placa huella no va a quedar totalmente plana entonces va a tener ondulaciones en su estructura creando así la posibilidad de que cuando camines, podrías caer o tropezar con una de estas ondulaciones.

DUBERNEY: la estructura queda totalmente plana mediante el uso de bloques convencionales, pero con nuestra propuesta de trabajar con bloques hechos de fondos de botellas plásticas recicladas, la estructura queda con pequeñas ondulaciones y como toda construcción conlleva tener ventaja y desventaja, nuestra placa huella no es la excepción porque posee ambas. Pero más sin embargo, esta forma puede ser más ventajosa porque permite tener una mejor estabilidad a la hora de ubicar los vehículos.

PATIÑO: La verdad es que no quede lisa completamente la superficie dependiendo del contexto puede ser una ventaja o una desventaja, Si miramos la placa huella y le damos la utilidad de parqueadero o caminos transitables de instituciones para estudiantes, Vemos que esto no resulta como un problema de hecho vemos ventaja en la afinidad cuando hay lluvias o barro, que en una superficie lisa puede ser peligroso, caso contrario tendríamos en una carretera donde estas superficies si serían ineficientes para el tránsito de automóviles

1.13 En cuanto a los sectores acordonados en la construcción de la placa huella, ¿Cómo determinaron las medidas?

VANESA: las medidas que se tuvieron en cuenta mirando el tamaño de la placa huella y también algunas expresiones matemáticas, se pudo obtener cantidades precisas a la hora de construir la placa huella.

MIRANDA: cuando empezamos la construcción, lo primero que se hizo fue distribuirnos el espacio a todos los participantes dándole a cada un sector de un metro de ancho con dos metros de largo para poder nivelar el terreno, luego acordonamos superficies en forma cuadrada de dos metros por cada lado, creando así unas superficies acordonadas de 4 metros cuadrados y así la construcción quedaría totalmente cuadrada.

PATIÑO: Para tomar las medidas y acordonar el sector utilizamos la medición del sector total y de ahí partimos a utilizar expresiones y modelos matemáticos para dividir las zonas uniformemente a cada estudiante.

1.14 Con relación al ancho y altura de las vigas en la construcción de la placa huella, ¿Qué criterios tuvieron en cuenta para realizarlo con esas cantidades?

VANESA: la decisión de trabajar con esas medidas se consideró en conjunto con los compañeros, aprovechando el conocimiento de uno de nuestros compañeros que de alguna manera tenía conocimiento empírico con relación a construcciones, por lo que se decidió que por condiciones de suelo estas vigas tuvieran una altura de 11 cm y por economía decidimos que el ancho de estas vigas fuera de 10 cm.

MIRANDA: para construir las vigas, tuvimos en cuenta el ancho de las varillas o la estructura de las varillas para que estas quedaran totalmente cubierta, y así tuviera la mejor fijación en el suelo quedando un producto finalizado de una estructura de 11 cm de alto por 10 cm de ancho.

DUBERNEY: con relación al ancho y altura de las vigas tuvimos la asesoría de una persona externa que nos ayudara hacerlo y que la vez nos economizara costos. Y por otro lado, las botellas de tres litros venían con una circunferencia en su molde a 11cm de su fondo, nos pusimos de acuerdo que la viga también tuviera 11cm para que ajustara con los fondos de botellas.

PATÍÑO: Primero que todo tuvimos el criterio de la altura respecto a una malla que estaba rodeando el sector y la altura de los fondos de botella para que quedaran a un nivel adecuado también que no quedara muy alto respecto a los sectores circundantes porque se podían inundar y un principal objetivo de placa huella es lidiar con el barro y el agua acumulada que generaba el desnivel e inseguridad al Entrar/salir del parqueadero

1.15 En la finalización de esta construcción, ¿Qué formas geométricas representan? ¿Qué análisis se puede hacer desde lo espacial?

VANESA: con la placa huella se tuvo en cuenta que nuestra creatividad saliera a la luz. La forma que uno puede notar en esa construcción es la forma de espiral de los fondos de botellas, y la idea era darle un tono creativo y llamativo, pero también que los colores estuvieran bien combinados para que no se viera muy brusco o contrastado

MIRANDA: uno de los principales fines a la hora de construir la placa huella era para deducir expresiones matemáticas en su creación, otro fin fue observar regularidades relevantes que se pudieran observar, otro fin fue la creación y observación de figuras geométricas encontrada en la placa huella, tales como: los cuadrados de colores, formas rectangulares y espirales. Esas son las figuras geométricas que se reflejan en la placa huella.

DUBERNEY: lo que se puede ver en esta construcción de la placa huella, desde mi punto de vista se observan tres figuras geométricas que son: el entorno de la placa huella acordonadas con vigas tienen forma de cuadrado, otros sectores acordonados quedaron en forma de rectángulo ya que el espacio se redujo en un sector de la placa huella y la última fue el orden de las botellas plásticas puestas dentro de los actores acordonados, estos tenían formas de triángulos

PATÍÑO: Podemos apreciar figuras como Espirales, Cuadrados, algunas más, Qué se forman como ilustración al pintar la superficie sobresaliente de los fondos de botella

Anexo 11: Tabla para analizar los momentos en el ciclo

Momentos	Nombre de los momentos. Según el investigador	Propósito Principal	Propósito por categorías	Ciclo 1 (Categorías)	Códigos encontrados en el Ciclo 1 (x es la frecuencia)
M1	Construcción de un contexto particular (Placa huella con material reciclable)	Identificar, recolectar, construir	Describir	Características iniciales	Parqueo de vehículos (Motos y bicicletas) xxxx, terreno irregular xxxx, totalmente desnivelado xxxxx, lomitas pequeñas xxx, raíces de árboles xxxx, piedras xx, algunos desechos xx, hierba en todo el terreno xx pequeñas zanjas xx, en épocas de lluvias se llena de charcos x.
			Transformar (Preparar)	Estrategia para nivelar	Nos repartimos la zona xx, a cada uno nos tocó de 2m ² para nivelar xxxxx, utilizamos: pala xxxxx, aplanador (pisón) xxxxx, palín xxxxx, machete xxxx, metro (una cinta métrica) xxx, pica xxxx, barra de hierro x, el terreno deberá quedar totalmente plano x. trabajar en la jornada contraria x. se picó los montículos x, los huecos se rellenaron x
			Identificar Y Recolectar	Materiales no biodegradables	Materiales encontrados: botellas plásticas xxxxx y de vidrio xxxxx, empaque de papas xxx, yupis xx, galletas x, bolsas plásticas xxxxx, palitos de bombón xxx, vasos plásticos xx, empaques de confites xx, otros mecatos x. Las que son útiles: envases de gaseosas de 2,5 y 3 litros xxxxx, bolsas plásticas xxxxx, envolturas de dulces xx y papitas xx
			Determinar	función de los materiales	Las botellas plásticas recicladas serán recortadas por su fondo con una altura de 11cmxxxx para ser la estructura o soporte del bloque xxxxx, dentro de esta se rellena con una piedra que ocupe la gran mayoría de espacio xx y el resto con cemento (hormigón) xxx, las envolturas de mecatos se hicieron picadillos xxx para soportar el bloque xxx y así evitar grietas en el suelo xxxxx o alguna filtración de agua xxx. Las botellas se pintarán xx para darle decoración a la placa huella.
			Conocer	dimensiones de los bloques	Las botellas de ente 2,5 y 3 litros, se tomarán su fondo cuyas dimensiones: altura de 11 cm xxxxx y un diámetro de 11 cm x. una piedra deberá ocupar el mayor volumen posible

					xxxx, se utilizar tres colores para pintar los fondos de botellas xx
			Determinar	porcentaje de piedra	Cada fondo de botellas en la construcción de los bloques se introdujo una piedra que ocurra la mayor cantidad de volumen posible. este porcentaje promedio fue: piedra (entre 49, a 49,4) y hormigón (entre 50,6 a 51) xx piedra (entre 50 a 50,5) y hormigón (entre 49 a 49,5) x piedra (entre 49,5 a 49,9) y hormigón (entre 50,1 a 50,5) xxx
			Explicar	bloques de botellas plásticas reciclada	La ventaja que tienen estos bloques de botellas plásticas, piedras y hormigón: amigables con el medio ambiente xx, fácil de conseguir xxxx, son económicos x. La desventaja que encontraron fueron las siguientes: cortar los fondos de botellas y pintarlas lleva mucho tiempo xxxx, esfuerzo x .
			Acordonar	sector de la placa huella	Descripción de los participantes: Cada biga hizo con un ancho de 10 cm, de tal manera que esta biga, sobre salga con una altura de 11cm. Las vigas acordonaron superficies cuadradas de 2m por 2m, dando como resultado 8 de estas superficies cuadradas.
			Ubicar	Bloques de botellas y picadillos	Los participantes dicen que lo primero que se hizo fue distribuir homogéneamente el picadillo de bolsas de mecatos en una superficie acordonada de tal manera que quedó totalmente nivelada, ellos creen que este material evitará cualquier falla geológica que pueda ocurrir en dicha construcción de la placa huella. Luego se ubicaron los adoquines hechos con botellas plásticas recicladas, por lo que se decidió colocarlo en colores que permita resaltar algunas figuras geométricas.
M2	Imagen y característica de la placa huella	Representar	Describir	Imagen y características	La placa huella esta acordonada con 8 superficies cuadradas de 2m por 2mxx Tiene varios colores xx está hecha con botellas recicladas xx cada sector acordonado tuene 289 bloques de fondos de botellas x

M3	Información sistematizada de un contexto particular	Sistematizar	Describir	formar geométricas y dimensiones	cada superficie acordonada tiene figura cuadrada de 2m por 2m las cuales conforman en términos generales un rectángulo de 4m de ancho por 8m de largo																		
			Encontrar	Cantidad de adoquines	En una superficie acordonada se llevó 289 adoquines. Los participantes dicen que si en una superficie acordonada se llevó 289 bloques entonces en las 8 superficies cuadradas se llevaría 2312																		
			Representar		En los sectores acordonados por cada superficie cuadrada se podría representarlo en una tabla con las siguientes características <table border="1"> <thead> <tr> <th>N° de superficie</th> <th>N° de bloques</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>289</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>578</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>867</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1156</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>1445</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>1734</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>2023</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>2312</td> </tr> </tbody> </table>	N° de superficie	N° de bloques	1	289	2	578	3	867	4	1156	5	1445	6	1734	7	2023	8	2312
N° de superficie	N° de bloques																						
1	289																						
2	578																						
3	867																						
4	1156																						
5	1445																						
6	1734																						
7	2023																						
8	2312																						
			Identificar	Regularidades	Las regularidades perfiladas por los estudiantes fueron: Área de superficie acordonada y cantidades de bloques diseñado con material reciclable																		
M4	Modelos matemáticos	Matematizar	Cuantificar	Construcción de la placa huella	Cantidad de: cemento x, arena x, dimensiones de la superficie acordonada x, bloques botellas x, masa del picadillo de bolsas de mecatos x, pintura utilizada																		
			Simbolizar	Regularidades o variables	Números de bloques diseñado con botellas plásticas recicladas (N°B o Y), área de superficies acordonados (A o X),																		
			Representar																				

			Encontrar	Relación matemática	
M5	Hallazgos de resultados matemáticos	Trabajar	Verificar	Modelos Matemáticos	
			Validar	Resultados de estos modelos matemáticos	
M6	Interpretación de resultados reales	Validar	Integrar	Modelos en la solución del problema	
			Interpretar	Resultados matemáticos	
				Modelo real y su aplicación	