

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA DE PREGADO DE MATEMÁTICAS

UN ESTIMADOR DE ERROR A-POSTERIORI PARA UN PROBLEMA DE  
VALORES DE FRONTERA ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE POISSON PARA EL  
CASO 2D.

PRESENTADO POR :  
JAVIER ANDRÉS CAUSIL MARTINEZ  
ESTUDIANTE DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Asesora: Ph.D Catalina Domínguez García  
Profesora del Instituto de Matemáticas  
Universidad de Antioquia

Caucasia

2020

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios de Sobolev . . . . .	3
1.2. Teorema de Lax-Milgram . . . . .	13
<b>2. Ecuación de Poisson (caso bidimensional)</b>	<b>20</b>
2.1. Condición de frontera tipo Dirichlet . . . . .	20
2.1.1. Condición de frontera tipo Dirichlet homogéneo . . . . .	20
2.1.2. Condición de frontera tipo Dirichlet no homogéneo . . . . .	24
2.2. Condición de frontera tipo Neumann . . . . .	27
2.3. Condición de frontera tipo Mixtas . . . . .	30
2.4. El método de Ritz-Galerkin y la formulación discreta . . . . .	33
<b>3. Una cota superior para el error</b>	<b>38</b>
3.1. Método de los elementos finitos (FEM) . . . . .	38
3.2. Estimador de error a-posteriori tipo residual . . . . .	45
3.2.1. Operador Cuasi-interpolador . . . . .	46
3.3. Estimador residual . . . . .	47
3.3.1. La equivalencia de error y residual . . . . .	47
3.3.2. Ortogonalidad de Galerkin . . . . .	48
3.3.3. Una $L^2$ -Representación del residual . . . . .	49
3.3.4. Una cota superior para el error . . . . .	51

3.4. Implementación numérica . . . . .	53
3.4.1. Refinamiento uniforme . . . . .	54
3.4.2. Refinamiento adaptativo . . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Índice de figuras

3.1. Representación de las coordenadas baricentricas y nodos en el 2-símplex . . . . .	39
3.2. Representación de dominios, $\mathcal{T}_h$ que satisface (FEM 1) y $\mathcal{T}$ que no satisface (FEM 1)	40
3.3. Representación de $\omega_e, \tilde{\omega}_e, \tilde{\omega}_T, \omega_N$ se corresponde de izquierda a derecha con las gráficas	41
3.4. Se ilustra una discretización con sus respectivos elementos y funciones bases . . . . .	43
3.5. Se ilustran dos elementos adyacentes, resaltando la normal exterior unitaria sobre un punto del lado en común y la orientación de los lados . . . . .	49
3.6. Representamos el parámetro de discretización $h$ vs $\eta_R$ , error $e = \ u - u_h\ _1$ , con mallas de refinamiento uniforme. . . . .	55
3.7. Representamos el parámetro de discretización vs el error y el estimador tipo residual.	55
3.8. Representamos los resultados de las estrategia adaptativa y uniforme, grados de libertad vs el error y el estimador de error tipo residual. . . . .	57

# Índice de cuadros

3.1. Estimador residual, error, índice de efectividad y tasas de convergencia. . . . .	54
3.2. Estimador residual, error, índice de efectividad y tasas de convergencia. . . . .	56
3.3. Error, estimador residual, índice de efectividad y tasas de convergencia, con parámetro $\xi = 0,9$ . . . . .	57
3.4. Secuencia de refinamiento adaptativo . . . . .	59

# Resumen

En esta monografía, desarrollamos un análisis de error a posteriori tipo residual en dos dimensiones para la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet. Se considera una formulación débil de la formulación clásica de la ecuación de Poisson, por medio del método de Ritz-Galerkin que plantea el problema débil en un espacio de funciones de dimensión finita, aproximando la solución del espacio de funciones de dimensión infinita con una solución del espacio de funciones de dimensión finita y por medio del método de los elementos finitos se realiza la construcción del espacio de funciones de dimensión finita, utilizando como elementos finitos 2-símplex, es decir triángulos. Se analiza una estimación a posteriori tipo residual del error y se comprueba numéricamente usando mallas de refinamiento uniforme la teoría analizada. A su vez, se implementa una estrategia adaptativa de refinamiento calculando indicadores locales de error basados en el estimador en cada elemento con la finalidad de mejorar el orden de convergencia.

# Introducción

En esta monografía se encuentra una cota superior para el error, entre una solución de la formulación variacional asociada a la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet, en un espacio de funciones infinito dimensional y una solución discreta la cual es la mejor aproximación de un espacio de funciones finito dimensional, utilizando un estimador de error a posteriori tipo residual.

Sea realiza una formulación débil, que es una igualdad entre una forma bilineal y un funcional, planteada sobre un subespacio de funciones de dimensión infinita, dicha forma bilineal es elíptica en el subespacio de funciones infinito dimensional, esto permite definir un producto interno a través de la forma bilineal, a su vez induce una norma sobre el subespacio, llamada la norma de la energía y esto nos lleva a tener que el subespacio, es un espacio de Hilbert con la norma de la energía, como el funcional es lineal y continuo, se garantiza que la formulación débil tiene única solución. Hecho de gran importancia ya que al aplicar el método de Ritz-Galerkin se plantea, una formulación discreta a la formulación débil, sobre un subespacio finito dimensional que es un subespacio cerrado del subespacio infinito dimensional, lo que nos permite encontrar la mejor aproximación a la solución de la formulación débil y se garantiza que la formulación discreta tiene única solución, que es la mejor aproximación a la solución, de la formulación débil.

Como se tienen unos datos de la ecuación diferencial parcial y una solución al problema discreto, se plantea un residual equivalente al error entre la solución de la formulación débil y el problema discreto, en la norma de la energía. Se realiza una representación del residual con el producto interno en  $L^2(\Omega)$ , donde  $\Omega$  es un dominio poligonal de  $\mathbb{R}^2$ , dicho residual depende del residual de la solución discreta en la ecuación de Poisson y el residual de lados de los elementos finitos tanto en el interior de  $\Omega$ , como en su frontera. Dicha representación se acota entre una constante positiva por una cantidad, que depende de la suma, en cada elemento del residual de la solución discreta en la ecuación de Poisson, y la suma sobre los lados del residual de lados, corresponde a un estimador de error a posteriori tipo residual global.

A partir del estimador de error a posteriori tipo residual global, se define indicadores locales de error a posteriori tipo residual y estos indicadores se usan en la estrategia adaptativa.

# Agradecimientos

Quiero darle gracias a todos los profesores que hicieron parte de mi proceso académico, desde la formación en los cursos básicos, como la lógica hasta los cursos profesionales de la carrera, en gran medida gracias por introducirme en este mundo de las matemáticas, en especial a la profesora Catalina Domínguez García por mostrarme este mundo del método de los elementos finitos, al profesor Hugo Aduén Muskus, al profesor Jairo Eloy Castellanos, al Profesor Sebastian Builes, al profesor Diego Acosta, a la Profesora Claudia García, al profesor Daniel Muñoz, a todos muchas gracias, por mostrarme este diverso y hermoso mundo de las matemáticas.

Le agradezco a mi familia por ser mi apoyo en este proceso académico y a mis amigos que de cierta manera han hecho parte de este proceso.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se toma un compendio de resultados entre Brenner [1], Braess [2] y con lectura complementaria en Brezis [3] sobre los espacios de Sobolev.

**Definición 1.0.1.** Una métrica sobre un conjunto no vacío  $X$  es una función  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  con las siguientes propiedades.

- (i)  $d(x, y) = 0$  si,  $x = y$ .
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$ .
- (iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z$  en  $X$ .

Si  $d$  es una métrica en  $X$ , entonces el par  $(X, d)$  se denomina espacio métrico.

**Definición 1.0.2.** Dado un espacio vectorial  $V$ , una norma  $\|\cdot\|$ , es una función sobre  $V$  con valores reales no negativos que cumple las siguientes propiedades:

- (i)  $\|v\| \geq 0$ , para todo  $v \in V$ .
- (ii)  $\|v\| = 0$  si, sólo si  $v = 0$ .
- (iii)  $\|cv\| = |c|\|v\|$  para toda  $c \in \mathbb{R}$  y  $v \in V$ .
- (iv)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  para toda  $v, w$  en  $V$ .

Si  $\|\cdot\|$  es una norma en  $V$ , se dice que  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio normado.

**Definición 1.0.3.** Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  se dice convergente si existe  $x \in X$  tal que  $d(x_n, x) = 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definición 1.0.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ . Diremos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy si,  $d(x_n, x_m) = 0$  cuando  $n, m \rightarrow \infty$ .

**Definición 1.0.5.** Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge en  $X$ . Una norma puede ser utilizada para definir la noción de métrica,  $d(v, w) = \|v - w\|$  para todo  $v, w \in V$ , la topología inducida por esta métrica se denomina un espacio lineal normado.

**Definición 1.0.6.** Un espacio lineal normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un Banach si,  $V$  es completo con respecto a la métrica inducida por la norma,  $\|\cdot\|$ .

**Definición 1.0.7.** Un producto interno en un conjunto  $V$  es una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow F$  tal que

- (1).  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2).  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V,$
- (3).  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \alpha \in F.$
- (4).  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad x, y \in V,$

Se denomina a  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno, además se puede definir una norma en  $V$  y el producto interno puede ser utilizado para definir una norma,  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  y se dice que  $(V, \|\cdot\|)$  es el espacio lineal normado asociado a  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Si  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal, simétrica sobre un espacio lineal  $V$  tal que  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , es producto interno sobre el espacio lineal  $V$  si para todo  $v \in V$  se cumple

- (1).  $a(v, v) \geq 0$
- (2).  $a(v, v) = 0$ , si y solo, si  $v = 0$ .

**Proposición 1.0.8** (Identidad del paralelogramo). (Ver [1]) Si  $(H, (\cdot, \cdot))$  un espacio con producto interno, entonces

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

*Demostración.* Sean  $v, w \in V$

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= (v + w, v + w) + (v - w, v - w), \\ &= (v, v) + (v, w) + (w, v) + (w, w) + (v, v) - (v, w) - (w, v) + (w, w), \\ &= 2(v, v) + 2(w, w), \\ &= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \end{aligned}$$

□

**Definición 1.0.9.** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno,  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Hilbert, si su espacio lineal normado asociado  $(V, \|\cdot\|)$  es completo.

**Definición 1.0.10.** Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible en  $\Omega$ , sea

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

y para el caso  $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}\{|f(x)|: x \in \Omega\},$$

se define  $L^p(\Omega)$  como el conjunto de todas las  $f$  que satisfacen  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ .

## 1.1. Espacios de Sobolev

Para la siguiente definición denotamos  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$

**Definición 1.1.1.**  $\alpha$  es un multi-índice si,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ . Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  decimos que  $\alpha \leq \beta$  si,  $\alpha_i \leq \beta_i$ , para toda  $1 \leq i \leq n$ . Denotamos la longitud de  $\alpha$  o norma del multi-índice como  $|\alpha|$  donde

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Para  $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

similarmente, si  $D_j = \partial/\partial x_j$  para  $1 \leq j \leq n$ , entonces

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

denota un operador diferencial de orden  $|\alpha|$ .

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $\alpha = (1, 2, 3)$  y  $x = (-5, 1, 2)$ , tenemos que  $|\alpha| = 6$  y  $x^\alpha = (-5)^1(1)^2(2)^3 = -40$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ ,  $u$  una función continua definida sobre  $\Omega$ . El soporte de  $u$ , que denotamos como  $\text{supp } u$ , es la clausura del conjunto  $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ , es decir :

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Decimos que  $u$  tiene soporte compacto en  $\Omega$  si,  $\text{supp } u \subset \Omega$  es compacto.

**Definición 1.1.4.** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ ,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función. definimos

$$\begin{aligned} C(\Omega) &:= \{u \mid u \text{ es continua en } \Omega\}, \\ C_0(\Omega) &:= \{u \in C(\Omega) \mid \text{supp } u \text{ es un subconjunto compacto de } \Omega\}, \\ C^k(\Omega) &:= \{u \in C(\Omega) \mid \partial^\alpha u \text{ es continua para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \text{ con } |\alpha| \leq k\}, \\ C^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega). \end{aligned}$$

**Definición 1.1.5.** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos el espacio de distribuciones como

$$C_0^\infty(\Omega) := C_0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega).$$

Consideremos a  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  abierto con parte de frontera suave,  $L^2(\Omega)$  el conjunto de todas las funciones  $u$  que son cuadrado integrable sobre  $\Omega$  en el sentido Lebesgue.  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

y su norma correspondiente

$$\|u\|_0 = \sqrt{(u, u)_0}.$$

**Definición 1.1.6.**  $u \in L^2(\Omega)$  posee derivada débil  $v = \partial^\alpha u$  en  $L^2(\Omega)$  si,  $v \in L^2(\Omega)$  y

$$(\phi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi, u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.1)$$

**Definición 1.1.7.** Sea  $H^m(\Omega)$ , con  $m \geq 0$  el conjunto de todas las funciones  $u$  en  $L^2(\Omega)$  que poseen derivada débil  $\partial^\alpha u$  para toda  $|\alpha| \leq m$ . Definimos en  $H^m(\Omega)$  el producto escalar y su norma asociada de la siguiente manera:

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0, \quad (1.2)$$

con norma asociada

$$\|u\|_m = \sqrt{(u, u)_m} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2}, \quad (1.3)$$

y su correspondiente seminorma

$$|u|_m = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Cuando  $m = 1$  obtenemos que

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \text{existen } \partial^\alpha u \text{ para toda } |\alpha| \leq 1\},$$

y el cuadrado de la norma de  $u \in H^1(\Omega)$  esta dada por

$$\|u\|_1^2 = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha u\|_0^2 = \|u\|_0^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_0^2 = \|u\|_0^2 + |u|_1^2. \quad (1.5)$$

El siguiente resultado, es muy importante ya que para una función en  $v$  en  $H_0^1(\Omega)$ , acotar su norma  $\|v\|_0$  con su seminorma  $|v|_1$ .

**Teorema 1.1.8** (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs). (Ver [2]). *Suponga que  $\Omega$  está contenido en un cubo  $n$ -dimensional con longitud de un lado  $s$ . Entonces*

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.6)$$

*Demostración.* Para realizar la demostración probaremos la desigualdad (1.1.8) en  $C_0^\infty(\Omega)$ . Como  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$  aproximaremos una sucesión de  $C_0^\infty(\Omega)$  a un elemento arbitrario de  $H_0^1(\Omega)$ , probando la desigualdad (1.1.8) para  $H_0^1(\Omega)$ .

Consideremos  $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < s, i = 1, 2, \dots, n\}$  con  $\Omega \subset W$  y sea  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  donde  $v = 0$  para toda  $x \in W \setminus \Omega$ . Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(0, x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt,$$

Note que  $v(0, x_2, \dots, x_n) = 0$  ya que  $(0, x_2, \dots, x_n) \in \partial W$  por lo cual

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt,$$

$$|v(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right| dt,$$

Por la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |v(x_1, x_2, \dots, x_n)| &\leq \int_0^{x_1} 1^2 dt \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt, \\ &\leq \int_0^s dt \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt, \\ &= s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt, \end{aligned}$$

integrando con respecto a  $x_1$

$$\begin{aligned} \int_0^s |v(x)|^2 dx_1 &\leq \int_0^s s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}v(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt dx_1, \\ &\leq s \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1 dt, \\ &= s \int_0^s dt \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1, \\ &= s^2 \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx_1. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a las otras variables obtenemos que

$$\int_W |v(x)|^2 dx \leq s^2 \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}v(x) \right|^2 dx \leq s^2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0^2.$$

De la anterior desigualdad obtenemos que  $\|v\|_0 \leq s|v|_1$ , para  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Falta probar que  $\|v\|_0 \leq |v|_1$  se cumple para  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

En efecto, supongamos  $v \in H_0^1(\Omega)$  como  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ , existe una  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $v_n \rightarrow v$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Utilizando (1.1.8) en  $C_0^\infty(\Omega)$  se sigue que

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &= \|v - v_n + v_n\|_0 \leq \|v - v_n\|_0 + \|v_n\|_0 \\ &\leq \|v - v_n\|_0 + s|v_n|_1 \end{aligned}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  se sigue que  $\|v\|_0 \leq s|v|_1$  para  $v \in H_0^1(\Omega)$ . □

El resultado a continuación es de suma importancia ya que para  $v$  en  $H_0^1(\Omega)$ , nos permite acotar su norma  $\|v\|_0$  con la suma del valor absoluto de su media y su seminorma  $|v|_1$ .

**Teorema 1.1.9** (Variante de la desigualdad de Friedrich's). (Ver [2]) Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz que satisface la propiedad del cono. Entonces existe una constante  $c = c(\Omega)$ , tal que

$$\|v\|_0 \leq c(|\bar{v}| + |v|_1), \forall v \in H^1(\Omega) \quad (1.7)$$

*Demostración.* Como  $C^\infty(\Omega)$  es denso en  $H^1(\Omega)$  probaremos la desigualdad para  $v \in C^\infty(\Omega)$ . Asumiéremos que  $\Omega \subset W$ , donde  $W := \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < s\}$ . Por el Teorema fundamental del Cálculo, la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) - v(y_1, y_2) &= v(x_1, x_2) - v(x_1, y_2) + v(x_1, y_2) + v(y_1, y_2), \\ &= \int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) dt_1 + \int_{y_2}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t) dt, \\ |v(x_1, x_2) - v(y_1, y_2)| &\leq \left| \int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) dt_1 + \int_{y_2}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) dt_2 \right|, \\ &\leq \left| \int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) dt_1 \right| + \left| \int_{y_2}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) dt_2 \right|, \\ &\leq \int_{y_1}^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right| dt_1 + \int_{y_2}^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right| dt_2. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad

$$(v(x_1, x_2) - v(y_1, y_2))^2 \leq \left( \int_{y_1}^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right| dt_1 + \int_{y_2}^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right| dt_2 \right)^2,$$

Por la desigualdad de Young  $(a + b)^2 \leq 4(a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned} v^2(x) + v^2(y) - 2v(x)v(y) &\leq 4 \left[ \left( \int_{y_1}^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right| dt_1 \right)^2 + \left( \int_{y_2}^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right| dt_2 \right)^2 \right], \\ &\leq 4 \left[ \left( \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right| dt_1 \right)^2 + \left( \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right| dt_2 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Aplicando Cauchy-Schwarz a uno de los sumandos del lado derecho de la desigualdad y similarmente para el otro sumando obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right| dt_2 \right)^2 &\leq \left[ \left( \int_0^s dt \right)^{1/2} \left( \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right|^2 dt_2 \right)^{1/2} \right]^2, \\ &= s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right|^2 dt_2 \end{aligned}$$

Por lo cual, la desigualdad toma la siguiente forma

$$v^2(x) + v^2(y) - 2v(x)v(y) \leq 4s \left( \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1 + \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right|^2 dt_2 \right) \quad (1.8)$$

Integrando con respecto a  $x_1, x_2$  y  $y_1, y_2$ , la parte izquierda de (1.8)

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_0^s v^2(x) + v^2(y) - 2v(x)v(y) dx &= \int_0^s \int_0^s v^2(x) dx_1 dx_2 + s^2 v^2(y) - 2v(y) \int_0^s \int_0^s v(x) dx, \\ &= \int_W v^2(x) dx + s^2 v^2(y) - 2v(y) \int_W v(x) dx. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $y_1$  y  $y_2$  tenemos que la parte izquierda (1.8) queda

$$s^2 \int_W v^2(x)dx + s^2 \int_W v^2(y)dy - 2 \int_W v(y)dy \int_W v(x)dx. \quad (1.9)$$

Integrando la parte derecha de (1.8), con respecto a  $x_1, x_2$ , después con respecto a  $y_1$  y  $y_2$  obtenemos

$$4s \left[ \int_0^s \int_0^s \left( \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1 + \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right|^2 dt_2 \right) dx \right]$$

$$4s \left( \int_0^s \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1 dx + \int_0^s \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right|^2 dt_2 dx \right)$$

Tratando los sumandos por separado tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_2}(x_1, t_2) \right|^2 dt_2 dx &= \int_0^s \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dt_2 dx_2, \\ &= \int_0^s dt_2 \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2, \\ &= s \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_0^s \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1 dx &= s^2 \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1. \\ s^2 \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1 + s \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (1.10)$$

Integrando con respecto a  $y_1$  y  $y_2$  a (1.10), tenemos que

$$\int_0^s \int_0^s \left( s^2 \int_0^s \left| \frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1, y_2) \right|^2 dt_1 + s \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|^2 dx \right) dy$$

Realizando el proceso anterior se logra siguiente expresión

$$s^3 \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right|^2 dy + s^3 \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|^2 dx, \quad (1.11)$$

por (1.9), (1.11) y haciendo  $x = y$  obtenemos

$$\begin{aligned} s^2 \int_W v^2(x)dx - 2 \left( \int_W v(x)dx \right)^2 &\leq 4s^4 \left( \sum_{i=1}^2 \int_W \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \right), \\ \int_\Omega v^2(x)dx &\leq 2s^2 \left( \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx + \frac{1}{meas(\Omega)} \int_\Omega v(x)dx \right)^2, \\ \|v\|_0^2 &\leq 2s^2 (|v|_1^2 + |\bar{v}|^2), \\ &\leq \sqrt{2}s (|v|_1^2 + |\bar{v}|^2)^{1/2} = \sqrt{2}s (|v|_1^2 + 2|v||\bar{v}| + |\bar{v}|^2 - 2|v||\bar{v}|)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}s ((|v|_1 + |\bar{v}|)^2 - 2|v||\bar{v}|)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}s ((|v|_1 + |\bar{v}|)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por lo cual  $\|v\|_0 \leq c(|\bar{v}| + |v|_1)$ .

Supongamos  $v \in H^1(\Omega)$  y  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $C^\infty(\Omega)$  tal que  $v_n \rightarrow v$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así tenemos que

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &\leq \|v - v_n + v_n\|_0 \leq \|v - v_n\|_0 + \|v_n\|_0 \\ &\leq \|v - v_n\|_0 + c(|\bar{v}_n| + |v_n|_1). \end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos que  $\|v\|_0 \leq c(|\bar{v}| + |v|_1)$ .  $\square$

**Teorema 1.1.10.** *Sean  $\Omega$  una región acotada con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ . Dado  $n$  el vector normal unitario sobre  $\partial\Omega$ . Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ . Entonces*

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (1.12)$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$

*Demostración.* Sea  $\Omega$  una región acotada con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ ,  $n$  un vector normal unitario exterior sobre  $\partial\Omega$ ,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  veamos que se cumple (1.12).

Consideremos  $F = (f_1, \dots, f_n)$  donde  $f_j = v \frac{\partial u}{\partial x_j}$  para  $j = 1, \dots, n$  así calculando la divergencia de  $F$  obtenemos :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla \cdot F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( v \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \operatorname{div} F &= v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u \end{aligned}$$

Notemos que  $\partial\Omega$  es una superficie cerrada y  $F$  un campo vectorial suave ( $F \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ) por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx &= \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) ds \\ \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx &= \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) ds \end{aligned} \quad (I)$$

calculemos  $F \cdot n$  donde  $n$  es el vector normal unitario exterior a  $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} F \cdot n &= \left( v \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, v \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot (n_1, \dots, n_n) \\ &= v \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} n_n \right) \\ &= v \nabla u \cdot n \end{aligned} \quad (II)$$

Reemplazando (II) en (I) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx &= \int_{\partial\Omega} (v \nabla u \cdot n) ds \\ \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx &= \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} \cdot n \right) ds \\ - \int_{\Omega} v \Delta u dx &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} \cdot n \right) ds \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es muy importante por que nos permite acotar sobre la frontera a una función de  $L^2(\partial\Omega)$ .

**Teorema 1.1.11 (Teorema de la traza.** Ver ([2])). *Sea  $\Omega$  acotado, que tiene un parte de frontera suave y que satisface la condición del cono. Entonces existe una función lineal acotada*

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma), \quad \|\gamma(v)\|_{0,\Gamma} \leq c \|v\|_{1,\Omega}, \quad (1.13)$$

tal que  $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$  para toda  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\Omega$  es un dominio contenido en  $\mathbb{R}^2$ , con parte de frontera suave, que satisface la condición del cono en los puntos donde la frontera no es suave. Entonces podemos dividir la frontera en partes finitas,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  tal que para cada parte  $\Gamma_i$ , y después de una rotación al sistema de coordenadas tenemos

1. Para alguna función  $\phi = \phi_i \in C^1[y_1, y_2]$ ,

$$\Gamma_i := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \phi(y), \quad y_1 \leq y \leq y_2\}$$

2. El dominio  $\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(y) < x < \phi(y) + r, \quad y_1 < y < y_2\}$  esta contenido en  $\Omega$ , donde  $r > 0$ . Para  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $(x, y) \in \Gamma$  y por el teorema fundamental de Cálculo tenemos que

$$\begin{aligned} v(x, y) &= v(\phi(y), y) = v(\phi(y) + t, y) - v(\phi(y) + t, y) + v(\phi(y), y), \\ v(\phi(y), y) &= v(\phi(y) + t, y) - \int_0^t \partial_1 v(\phi(y) + s, y) ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq r, \\ \int_0^r v(\phi(y), y) dt &= \int_0^r \left[ v(\phi(y) + t, y) - \int_0^t \partial_1 v(\phi(y) + s, y) ds \right] dt, \\ \int_0^r dt v(\phi(y), y) &= \int_0^r v(\phi(y) + t, y) dt - \int_0^r \int_0^t \partial_1 v(\phi(y) + s, y) ds dt, \\ r v(\phi(y), y) &= \int_0^r v(\phi(y) + t, y) dt - \int_0^r \partial_1(r-t) v(\phi(y) + t, y) dt, \\ r^2 v^2(\phi(y), y) &= \left( \int_0^r v(\phi(y) + t, y) dt - \int_0^r (r-t) \partial_1 v(\phi(y) + t, y) dt \right)^2, \end{aligned}$$

Utilizando la inecuación de Young  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ .

$$\begin{aligned}
r^2 v^2(\phi(y), y) &\leq 2 \left( \int_0^r v(\phi(y) + t, y) dt \right)^2 + 2 \left( \int_0^r \partial_1 v(\phi(y) + t, y)(r - t) dt \right)^2, \\
|r^2 v^2(\phi(y), y)| &\leq 2 \left( \int_0^r |v(\phi(y) + t, y)| dt \right)^2 + 2 \left( \int_0^r |\partial_1 v(\phi(y) + t, y)|(r - t) dt \right)^2, \\
r^2 v^2(\phi(y), y) &\leq 2 \left[ \left( \int_0^r dt \right) \left( \int_0^r v^2(\phi(y) + t, y) dt \right) + \int_0^r t^2 dt \int_0^r |\partial_1 v(\phi(y) + t, y)|^2 dt \right], \\
&\leq 2 \left[ r \int_0^r v^2(\phi(y) + t, y) dt + \frac{r^3}{3} \int_0^r |\partial_1 v(\phi(y) + t, y)|^2 dt \right], \\
v^2(\phi(y), y) &\leq 2 \left[ r^{-1} \int_0^r v^2(\phi(y) + t, y) dt + r \int_0^r |\partial v(\phi(y) + t, y)|^2 dt \right]. \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Integrando sobre  $y$  tenemos que

$$\begin{aligned}
r^{-1} \int_{y_1}^{y_2} v^2(\phi(y) + t, y) dt dy &= r^{-1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{\phi(y)}^{\phi(y)+r} v^2(x, y) dx dy, \\
&= r^{-1} \int_{\Omega_i} v^2(x, y) dx dy, \\
r \int_{y_1}^{y_2} |\partial_1 v(\phi(y) + t, y)|^2 dt dy &= r \int_{y_1}^{y_2} \int_{\phi(y)}^{\phi(y)+r} |\partial_1 v(x, y)|^2 dx dy, \\
&= r \int_{\Omega_i} |\partial_1 v(x, y)|^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Reemplazando en 1.14 tenemos que

$$\int_{y_1}^{y_2} v^2(\phi(y), y) dy \leq 2r^{-1} \int_{\Omega_i} v^2 dx dy + r \int_{\Omega_i} |\partial_1 v|^2 dx dy$$

Calculando el diferencias sobre  $\Gamma$  tenemos que

$$ds = \sqrt{\left( \frac{d\phi}{dy}(y) \right)^2 + \left( \frac{d\phi}{dy}(y) \right)^2} = \sqrt{\phi'(y) + 1} dy$$

se sigue que

$$\int_{y_1}^{y_2} v^2(\phi(y), y) \sqrt{\phi'(y) + 1} dy \leq \sqrt{\phi'(y) + 1} \left[ \int_{\Omega_i} v^2 dx dy + r \int_{\Omega_i} |\partial_1 v|^2 dx dy \right]$$

definiendo  $c_i = \max \sqrt{\phi'(y) + 1} \mid y_1 \leq y \leq y_2$  obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_i} v^2 ds &\leq c_i \left[ \frac{2}{r} \int_{\Omega} v^2 dx dy + r \int_{\Omega} |\partial_1 v|^2 dx dy \right], \\
\sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} v^2 ds &\leq \sum_{i=1}^m c_i \left[ \frac{2}{r} \|v\|_0^2 + r \|v\|_1^2 \right], \\
&\leq \sum_{i=1}^m c_i \left[ \left( \frac{2}{r} + r \right) \|v\|_0^2 + \left( \frac{2}{r} + r \right) \|v\|_1^2 \right], \\
\|v\|_{0,\Gamma} &\leq \sum_{i=1}^m c_i \left( \frac{2}{r} + r \right) \|v\|_1^2.
\end{aligned}$$

Considerando  $C = \sum_{i=1}^m c_i((2/r)+r)$  tenemos que  $\|v\|_{0,\Gamma} \leq C\|v\|_1^2$ , de manera que la restricción  $\gamma: H^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$  es una función acotada sobre un conjunto denso, además de la completitud de  $L^2(\Omega)$ , se puede extender a todo  $H^1(\Omega)$  sin ampliar la cota.

□

**Definición 1.1.12.** (i) Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Una forma bilineal  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, si existe  $c > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) Una forma bilineal simétrica continua es  $H$ -elíptica, si existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H. \quad (1.15)$$

Cada forma bilineal  $H$ -elíptica induce una norma

$$\|v\|_E := \sqrt{a(v, v)}. \quad (1.16)$$

Que es llamada la norma de la energía. En efecto veamos que la forma  $H$ -elíptica  $a(\cdot, \cdot)$  induce una norma en  $H$ .

(i).  $a(\cdot, \cdot)$  es producto interno en  $H$ .

(1).  $a(v, v) \geq 0$ ,  $\forall v \in H$ . Dado  $v \in H$  y como  $a(\cdot, \cdot)$  es  $H$ -elíptica existe  $\alpha > 0$  tal que  $a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2$ , como  $\|\cdot\|_H$  es una norma en  $H$ , se sigue que  $a(v, v) \geq 0$ , ya que  $\|v\| \geq 0$ .

(2).  $a(v, v) = 0$  si, y solo si,  $v = 0$ .

Dado  $v \in H$ , tal que  $a(v, v) = 0$  por la propiedad de  $a(\cdot, \cdot)$  ser  $H$ -elíptica existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2 \geq 0,$$

se sigue que  $\|v\|_H = 0$  si, y solo si,  $v = 0$ .

Por lo cual  $a(\cdot, \cdot)$  es un producto interno en  $H$ .

(ii).  $\|\cdot\|_E$  es una norma en  $H$ .

(1). Sea  $v \in H$ , veamos que  $\|v\|_E \geq 0$ . Se tiene que  $\|v\|_E^2 = a(v, v)$ , como  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal  $H$ -elíptica existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2,$$

y como  $\|\cdot\|_H$  es una norma en  $H$ , se tiene que  $a(v, v) \geq 0$ , por lo cual  $\|v\|_E \geq 0$ .

(2).  $\|v\|_E = 0$  si, y solo si,  $v = 0$ .

sea  $v \in H$  tal que  $0 = \|v\|_E^2 = a(v, v)$ , como  $a(\cdot, \cdot)$  es  $H$ -elíptica, existe  $\alpha > 0$  tal que  $a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2$  y como  $\alpha\|v\|_H^2$  es positivo se tiene que  $0 \geq \|v\|_H^2 \geq 0$ , así  $\|v\|_H = 0$  si, y solo si,  $v = 0$ .

Sea  $v = 0$ , como  $a(\cdot, \cdot)$  es un producto interno en  $H$ , se tiene  $a(v, v) \geq 0$ , y de la continuidad de la forma bilineal existe  $c > 0$  tal que  $a(v, v) \leq c\|v\|_H^2$ , y como  $v = 0$  si, y solo si,  $\|v\|_H = 0$ , por lo cual  $a(v, v) = 0$ .

(3).  $\|cv\|_E = |c|\|v\|_E, \forall c \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v \in H.$

Sea  $c \in \mathbb{R}, v \in H$ , se tiene

$$\|cv\|_E = \sqrt{a(cv, cv)} = \sqrt{c^2 a(v, v)} = \sqrt{c^2} \sqrt{a(v, v)} = |c| \|v\|_E.$$

(4).  $\|v + w\|_E \leq \|v\|_E + \|w\|_E, \forall v, w \in H.$

Sean  $v, w \in H$  tal que

$$\begin{aligned} \|v + w\|_E^2 &= a(v + w, v + w), \\ &= a(v, v) + a(v, w) + a(w, v) + a(w, w), \end{aligned}$$

de la simetría de  $a(\cdot, \cdot)$  obtenemos

$$\begin{aligned} &= a(v, v) + 2a(v, w) + a(w, w), \\ &\leq |a(v, v)| + 2|a(v, w)| + |a(w, w)|, \\ &= a(v, v) + 2|a(v, w)| + a(w, w), \end{aligned}$$

por la inecuación de Schwarz, se sigue

$$\begin{aligned} &\leq a(v, v) + 2\sqrt{a(v, v)}\sqrt{a(w, w)} + a(w, w), \\ &= \|v\|_E^2 + 2\|v\|_E\|w\|_E + \|w\|_E^2, \\ &= (\|v\|_E + \|w\|_E)^2. \end{aligned}$$

Por lo cual  $\|v + w\|_E \leq \|v\|_E + \|w\|_E.$

De los items (i) y (ii) se sigue que la norma de la energía,  $\|v\|_E$  es una norma en el espacio  $H$ . La norma de la energía es equivalente a la norma en el espacio  $H$ , en efecto de la continuidad

$$\begin{aligned} |a(v, v)| &\leq C\|v\|_H\|v\|_H, \\ \|v\|_E^2 &\leq C\|v\|_H^2, \\ \|v\|_E &\leq \sqrt{C}\|v\|_H \end{aligned}$$

por se  $H$ -elíptica se sigue

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \alpha\|v\|_H^2, \\ \sqrt{a(v, v)} &\geq \sqrt{\alpha}\|v\|_H, \\ \|v\|_E &\geq \sqrt{\alpha}\|v\|_H, \end{aligned}$$

así  $\|\cdot\|_H$  y  $\|\cdot\|_E$  son equivalentes en  $H$ .

**Teorema 1.1.13.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal, simétrica, acotada y  $V$ -elíptica, entonces  $(V, a(\cdot, \cdot))$  es un espacio de Hilbert.*

*Demostración.* Supongamos  $a(\cdot, \cdot)$  una forma  $V$ -elíptica, por lo cual se tiene la norma de la energía,  $\|v\|_E = (a(v, v))^{1/2}$  y sea  $\{v_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $(V, \|\cdot\|_E)$ , es decir para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que para todo  $m, n > N$  se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha}\|x_m - x_n\|_H &= \sqrt{\alpha} (\|x_m - x_n\|_H^2)^{1/2} \leq (a(x_m - x_n, x_m - x_n))^{1/2}, \\ &= \|x_m - x_n\|_E \leq \epsilon, \end{aligned} \tag{1.17}$$

por lo cual  $\{v_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $(V, \|\cdot\|_H)$  como  $V$  es cerrado en  $H$  se tiene que si  $v_n \rightarrow v$  entonces  $v_n \rightarrow v$ , con  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned}\|v - v_n\|_E &= (a(v - v_n, v - v_n))^{1/2}, \\ &\leq \sqrt{C} (\|v - v_n\|_H \|v - v_n\|_H)^{1/2}, \\ &\leq \sqrt{C} \|v - v_n\|_H,\end{aligned}\tag{1.18}$$

si  $n \rightarrow \infty$  se tiene que  $\|v - v_n\|_H \rightarrow 0$ , por lo cual  $\|v - v_n\|_E \rightarrow 0$ . Así  $v_n \rightarrow v$  en  $(V, \|\cdot\|_E)$ .  $\square$

## 1.2. Teorema de Lax-Milgram

**Teorema 1.2.1 (Teorema de la proyección, ver [1]).** Sean  $M$  un subespacio del espacio  $H$  de Hilbert,  $v \in H \setminus M$  y defina  $\delta := \inf\{\|v - w\| \mid w \in M\}$ , entonces existe un único  $w_0 \in M$  tal que

$$\|v - w_0\| = \delta \text{ y } v - w_0 \in M^\perp.$$

Donde  $M^\perp := \{v \in H \mid (x, v) = 0, \forall x \in M\}$ .

*Demostración.* Veamos que  $\|v - w_0\| = \delta$ .

Como  $\delta := \inf\{\|v - w\| \mid w \in M\}$ , existe una sucesión  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que  $\|v - w_n\| \rightarrow \delta$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Verifiquemos que  $w_n$  es una sucesión de Cauchy. Aplicando la identidad del paralelogramo (Proposición 1.0.8) a  $w_n - v$  y  $w_m - v$  tenemos que

$$\begin{aligned}\|w_n - v + w_m - v\|^2 + \|w_n - v - (w_m - v)\|^2 &= 2(\|w_n - v\|^2 + \|w_m - v\|^2), \\ \|w_n - w_m - 2v\|^2 + \|w_n - v - w_m + v\|^2 &= 2(\|w_n - v\|^2 + \|w_m - v\|^2), \\ 0 \leq \|w_n - w_m\|^2 &= 2(\|w_n - v\|^2 + \|w_m - v\|^2) - \|w_n - w_m - 2v\|^2.\end{aligned}$$

Como  $\|w_n - w_m - (w_m - v)\|^2 = 4\|((w_n - w_m)/2) - v\|^2$ ,  $M$  es cerrado se sigue que  $(w_n - w_m)/2 \in M$  así  $\|((w_n - w_m)/2) - v\| \geq \delta$ , por lo cual

$$\begin{aligned}0 \leq \|w_n - w_m\| &\leq 2\|w_n - v\| + 2\|w_m - v\| - 4\delta^2, \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2, \text{ cuando } n, m \rightarrow \infty, \\ &= 0.\end{aligned}$$

Se sigue que  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es Cauchy. Como  $(M, (\cdot, \cdot))$  es un espacio de Hilbert, existe un  $w_0 \in H$  tal que  $w_n \rightarrow w_0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  y como  $M$  es cerrado,  $w_0 \in M$  de la continuidad de la norma tenemos que  $\delta = \|v - w_0\|$ . Nos falta probar que  $v - w_0 \in M^\perp$  si, para todo  $x \in M$ :  $(x, v - w_0) = 0$  y la unicidad.

En efecto supongamos que existe  $x \in M$ ,  $x \neq 0$  tal que  $(x, v - w_0) \neq 0$ , se sigue que  $(x, v - w_0) = t$ , considerando  $z = v - w_0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\begin{aligned}\|z - \alpha x\|^2 &= (z - \alpha x, z - \alpha x), \\ &= (z, z) - \alpha(z, x) - \alpha(x, z) + \alpha^2(x, x), \\ &= \|z\|^2 - \alpha(z, x) - \alpha[(x, z) - \alpha\|x\|^2],\end{aligned}$$

si  $\alpha = (x, z)/\|x\|$  reemplazando tenemos que

$$\|z - \alpha x\|^2 = \|z\|^2 - \frac{(x, z)(x, z)}{\|x\|^2} = \|z\|^2 - \frac{t^2}{\|x\|^2} = \delta^2 - \frac{t^2}{\|x\|^2} < \delta^2.$$

Pero  $\|z - \alpha x\| = \|v - (w_0 + \alpha x)\| \geq \delta$ , ya que  $w_0 + \alpha x \in M$ ; como nuestro conjunto de hipótesis genera inconsistencia, se sigue que  $v - w_0 \in M^\perp$

Unicidad: Sean  $w, z \in M$  tal que  $\|v - w\| = \|v - z\| = \delta$ .

$$0 \leq \|w - z\|^2 = \|w - v - z - v\|^2 = \|w - v - (z - v)\|^2.$$

Aplicando la identidad del paralelogramo (Proposición 1.0.8), a  $w - v$  y  $z - v$  tenemos :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|w - z\|^2 &= 2(\|w - v\|^2 + \|z - v\|^2) - \|w - v + (z - v)\|^2, \\ &= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{w + z}{2} - v\right\|^2. \end{aligned}$$

Como  $(w + z)/2 \in M$  así  $\|(w + z)/2 - v\| \geq \delta$ , se sigue que

$$\|w - z\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Por lo cual  $\|w - z\| = 0$  por la propiedad (ii) de la definición (1.0.2), se sigue que  $w = z$ . □

**Corolario 1.2.2.** (Ver [1]) Sean  $H$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado de  $H$ . Entonces

$$H = M \oplus M^\perp.$$

*Demostración.* Sea  $v \in H$  por la Proposición 1.2.1 □

**Teorema 1.2.3 (Teorema de representación de Riesz, ver [1]).** Sean  $(H, (\cdot, \cdot))$  un espacio de Hilbert y  $L \in H'$  entonces existe un único  $u \in H$  tal que

$$L(v) = (u, v) \quad \forall v \in H.$$

Además  $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$

*Demostración.* Unicidad: Si  $u_1$  y  $u_2$  satisfacen  $L(v) = (u_1, v) = (u_2, v) = L(v)$  para todo  $v \in H$  tenemos que  $(u_1, v) - (u_2, v) = (u_1 - u_2, v) = 0$  para todo  $v \in H$ . En particular si  $v = u_1 - u_2$  entonces  $(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ , por lo cual  $u_1 - u_2 = 0$  se sigue que  $u_1 = u_2$

Existencia: Sea  $M = \ker L$ ,  $M$  es un subespacio cerrado de  $H$  por corolario 1.2.2, se sigue que  $H = M \oplus M^\perp$ .

Si  $M^\perp = \{0\}$  entonces  $M = H$ , así  $L \equiv 0$  por lo cual  $L(v) = (0, v)$ .

Si  $M^\perp \neq \{0\}$ , existe  $z \in M^\perp$ ,  $z \neq 0$  por lo cual  $L(z) \neq 0$  para  $v \in H$  y  $\beta = \frac{L(v)}{L(z)}$ , así  $L(v - \beta z) = L(v) - \beta L(z) = 0$ , como  $v - \beta z \in M$  entonces  $P_M(v) = v - \beta z$ , además  $v = v - \beta z + \beta z$  donde  $v - \beta z \in M$  y  $\beta z \in M^\perp$ , si  $v \in M$  entonces  $\beta = 0$  así  $P_{M^\perp} v = \beta z \in M^\perp$ .

$M^\perp$  tiene dimensión uno,  $M^\perp = \{w \mid w = \beta z\} = \langle z \rangle$ , escogiendo  $u = (L(z)/\|z\|_H^2)(z) \in M^\perp$

$$\begin{aligned} (u, v) &= (u, v - \beta z + \beta z) = (u, v - \beta z) + (u, \beta z), \\ &= (u, \beta z) = \left( \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z, \beta z \right) = \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} \beta(z, z), \\ &= \beta L(z), \\ &= L(v). \end{aligned}$$

Además

$$\|u\|_H = \left\| \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z \right\| = \frac{|L(z)|}{\|z\|_H^2} \|z\|_H = \frac{|L(z)|}{\|z\|_H}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \|L\|_{H'} &= \sup \left\{ \frac{|L(v)|}{\|v\|_H} \mid v \in H, v \neq 0 \right\} = \sup \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|v\|_H} \mid v \in H, v \neq 0 \right\}, \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|u\|_H \|v\|_H}{\|v\|_H} \mid v \in H, v \neq 0 \right\}, \\ &= \|u\|_H, \\ &= \frac{|L(z)|}{\|z\|_H} \leq \|L\|_{H'}. \end{aligned}$$

Por lo cual  $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$ . □

**Lema 1.2.4** (Teorema del punto fijo, ver [1]). *Dado un espacio de Banach  $(V, \|\cdot\|)$  y una aplicación  $T: V \rightarrow V$  que satisface*

$$\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq M\|v_1 - v_2\|,$$

donde  $0 \leq M < 1$ . Entonces existe un único  $u \in V$  tal que  $T(u) = u$ .

*Demostración.* Sean  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $T: V \rightarrow V$  y  $0 \leq M < 1$  que satisface

$$\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq M\|v_1 - v_2\|,$$

mostremos que existe un único  $u \in V$  tal que  $T(u) = u$ .

1. Unicidad: Sea  $u_1, u_2 \in V$  tal que  $T(u_1) = u_1$  y  $T(u_2) = u_2$ , veamos que  $u_1 = u_2$ .

En efecto : supongamos que  $u_1 \neq u_2$  tenemos que  $u_2 - u_1 = T(u_2) - T(u_1)$  por hipótesis existe  $0 \leq M < 1$  tal que

$$\|T(u_2) - T(u_1)\| \leq M\|u_1 - u_2\|,$$

inferimos que  $\|u_1 - u_2\| = \|T(u_2) - T(u_1)\| \leq M\|u_1 - u_2\|$  se sigue que  $M \geq 1$  y como  $M < 1$ , tenemos un conjunto inconsistente de hipótesis por lo cual  $u_1 = u_2$ .

2. Existencia: Dado  $v_0 \in V$ , definimos la sucesión

$$\begin{aligned} v_1 &= T(v_0), \\ v_2 &= T(v_1), \\ &\vdots \\ v_{n+1} &= T(v_n), \end{aligned}$$

notemos que  $\|v_{k+1} - v_k\| = \|T(v_k) - T(v_{k-1})\| \leq M\|v_k - v_{k-1}\|$ .

Afirmación  $\|v_k - v_{k-1}\| \leq M^{k-1}\|v_1 - v_0\|$ .

En efecto: Por inducción sobre  $k \geq 2$  veamos que se cumple la anterior desigualdad.

- Paso base: Sea  $k = 2$  por lo cual

$$\|v_2 - v_1\| = \|T(v_1) - T(v_0)\| \leq M\|v_1 - v_0\|,$$

- Paso inductivo: Sea  $k = n$ , con  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|v_n - v_{n-1}\| \leq M^{n-1}\|v_1 - v_0\|$ , veamos que se cumple para  $k = n + 1$  esto es  $\|v_{n+1} - v_{(n+1)-1}\| \leq M^{(n+1)-1}\|v_1 - v_0\|$ .

$$\|v_{n+1} - v_{(n+1)-1}\| = \|v_{n+1} - v_n\| = \|T(v_n) - T(v_{n-1})\| = M\|v_n - v_{n-1}\|,$$

de la hipótesis inductiva,  $\|v_{n+1} - v_{(n+1)-1}\| = M^{n+1-1}\|v_1 - v_0\|$ , se sigue que la afirmación es cierta para  $k \geq 2$ .

Para cualquier  $N > n$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|v_N - v_n\| &= \|v_N - v_{N-1} + v_{N-1} - v_{N-2} + v_{N-2} - v_{N-3} + \dots + v_{n+1} - v_n\|, \\ &\leq \sum_{k=n}^N \|v_k - v_{k-1}\|, \\ &\leq \sum_{k=n}^N M^{k-1}\|v_1 - v_0\|, \\ &= \|v_1 - v_0\| \sum_{k=n}^N M^{k-1} \leq \|v_1 - v_0\| \frac{M^n}{1 - M}, \end{aligned}$$

así  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, como  $V$  es completo, existe  $v \in V$  tal que  $v_n \rightarrow v$  cuando  $n \rightarrow \infty$  esto es:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n),$$

por la continuidad de  $T$  se sigue

$$v = T(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n) = T(v),$$

por lo cual  $v = T(v)$ .

□

**Teorema 1.2.5 (Lax-Milgram, ver ([1, pag. 60])).** Sean  $(V, (\cdot, \cdot))$  un espacio de Hilbert, una forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  elíptica y  $F \in V'$ , entonces existe un único  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

*Demostración.* Sean  $(V, (\cdot, \cdot))$  un espacio de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal,  $V$ -elíptica y  $F \in V'$ , veamos que existe un único  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = F(v).$$

Definamos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} A: V &\rightarrow V' \\ u &\rightarrow A(u) = A_u: V \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow A_u(v) = a(u, v), \end{aligned}$$

verifiquemos que  $A$  esta bien definida. En efecto :

- Linealidad de  $A_u$ : Sean  $v_1, v_2 \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  mostremos que  $A_u(v_1 + \alpha v_2) = A_u(v_1) + \alpha A_u(v_2)$ .

$$\begin{aligned} A_u(v_1 + \alpha v_2) &= a(u, v_1 + \alpha v_2) = a(u, v_1) + a(u, \alpha v_2), \\ &= a(u, v_1) + \alpha a(u, v_2) = A_u(v_1) + \alpha A_u(v_2). \end{aligned}$$

- Continuidad de  $A_u$ : Veamos que  $\|A_u\|_{V'} < \infty$ .

$$\|A_u\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|A_u(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V},$$

como  $a(\cdot, \cdot)$  es continua, existe  $C < \infty$  tal que  $|a(u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$ , se sigue que

$$\|A_u\|_{V'} \leq C \frac{\|u\|_V\|v\|_V}{\|v\|_V} = C\|u\|_V < \infty,$$

por lo cual  $A_u \in V'$ .

- Linealidad de  $A$ : Sean  $u_1, u_2 \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  veamos que  $A(u_1 + \alpha u_2) = A_{u_1} + \alpha A_{u_2}$ .  
Supongamos  $v \in V$ , se sigue que

$$\begin{aligned} A(u_1 + \alpha u_2)(v) &= a(u_1 + \alpha u_2, v) = a(u_1, v) + \alpha a(u_2, v), \\ &= A_{u_1}(v) + \alpha A_{u_2}(v), \\ &= (A_{u_1} + \alpha A_{u_2})(v), \end{aligned}$$

así  $A$  es lineal.

- Continuidad de  $A$ : Veamos que  $\|A\|_{L(V, V')} < \infty$ .

$$\|A\|_{L(V, V')} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|A(u)\|_{V'}}{\|u\|_V},$$

como  $\|A(u)\|_{V'} \leq C\|u\|_V$  tenemos que

$$\|A\|_{L(V, V')} \leq \frac{C\|u\|_V}{\|u\|_V} = C,$$

por lo cual  $\|A\|_{L(V, V')} < \infty$ , se sigue que  $A$  es continua.

Como  $V$  es un espacio de Hilbert por el Teorema de representación de Riesz (Teorema 1.2.3) tenemos que

$$\exists! \tau : V' \rightarrow V \text{ tal que } \forall \phi \in V' \forall v \in V : (\tau \phi, v) = \phi(v), \|\tau \phi\|_V = \|\phi\|_{V'} \quad (1.19)$$

Tenemos que

$$\forall u \in V: A_u \in V' \text{ por (1.19) se sigue } \forall v \in V: (\tau A_u, v) = A_u(v),$$

Tenemos que encontrar un único  $u \in V$  tal que

$$\forall v \in V \quad A_u(v) = F(v) \quad ; \quad A_u = F \text{ en } V' \quad ; \quad \tau A_u = \tau F \text{ en } V,$$

Consideraremos un operador lineal con el objetivo de utilizar el Teorema del punto fijo (Teorema 1.2.4), ya que este nos garantiza la existencia de un único valor, tal que al evaluarlo en el operador nos da el mismo valor.

Encontraremos  $\rho > 0$  tal que, al definir  $T: V \rightarrow V$  tal que  $T(v): = v - \rho(\tau A_u - \tau F)$  sea una contracción y por el teorema de punto fijo

$$\exists! u \in V \text{ tal que } u = Tu,$$

Como  $u = T(u) = u - \rho(\tau A_u - \tau F)$  de donde se sigue que  $\tau A_u = \tau F$  y con esto terminaremos la prueba.

Verifiquemos que  $T$  es una contracción. Sean  $v_1, v_2 \in V$  veamos que existe un  $0 < M < 1$  tal que  $\|T_{v_1} - T_{v_2}\|_V \leq \|v_1 - v_2\|_V$

$$\begin{aligned} \|T_{v_1} - T_{v_2}\|_V^2 &= \|v_1 - \rho(\tau A_{v_1} - \tau F) - v_2 + \rho(\tau A_{v_2} - \tau F)\|_V^2, \\ &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau A_{v_1} - \tau F - \tau A_{v_2} + \tau F)\|_V^2, \\ &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau A_{v_1} - \tau A_{v_2})\|_V^2, \\ &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau A_{v_1 - v_2})\|_V^2, \\ &= \|v - \rho \tau A_v\|_V^2, \quad \text{donde } v = v_1 - v_2, \\ &= (v - \rho \tau A_v, v - \rho \tau A_v), \\ &= (v - \rho \tau A_v, v) + (v - \rho \tau A_v, -\rho \tau A_v), \\ &= (v, v) + (-\rho \tau A_v, v) + (v, -\rho \tau A_v) + (-\rho \tau A_v, -\rho \tau A_v), \\ &= \|v\|_V^2 - \rho(\tau A_v, v) - \rho(v, \tau A_v) + \rho^2(\tau A_v, \tau A_v), \\ &= \|v\|_V^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau A_v), \\ &= \|v\|_V^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau A_v), \end{aligned}$$

Como  $a(\cdot, \cdot)$  elíptica, existe  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v)$  por lo cual  $-2\rho\alpha \|v\|_V^2 \geq -2\rho a(v, v)$ , de la continuidad de  $a(\cdot, \cdot)$  existe  $C < \infty$  tal que

$$a(v, \tau A_v) \leq C \|v\|_V \|\tau A_v\|_V = C \|v\|_V \|A_v\|_{V'} \leq C^2 \|v\|_V^2,$$

$$\text{así } \|T_{v_1} - T_{v_2}\|_V^2 \leq \|v\|_V^2 - 2\rho\alpha \|v\|_V^2 + \rho^2 C^2 \|v\|_V^2 = (1 - 2\rho\alpha + C^2 \rho^2) \|v_1 - v_2\|_V^2.$$

Sea  $M = 1 - 2\rho\alpha + C^2 \rho^2$  estimemos de tal manera que  $M < 1$  esto es :

De  $1 - 2\rho\alpha + C^2 \rho^2 < 1$  se sigue que  $-2\rho\alpha + C^2 \rho^2 < 0$  por lo cual  $\rho C^2 < 2\alpha$  así  $\rho \in (0, 2\alpha/C^2)$

Con  $\rho \in (0, 2\alpha/C^2)$  tenemos que  $T$  es una contracción, por el teorema de punto fijo existe un único

$u \in V$  tal que

$$\begin{aligned}u = T(u) = u - \rho(\tau A_u - \tau F) &\Leftrightarrow 0 = -\rho(\tau A_u - \tau F), \\ \tau A_u &= \tau F, \\ (\tau A_u, v) &= (\tau F, v) \quad \forall v \in V, \\ A_u(v) &= F(v) \quad \forall v \in V,\end{aligned}$$

por lo cual  $a(u, v) = F(v)$ , para toda  $v \in V$ . □

## Capítulo 2

# Ecuación de Poisson (caso bidimensional)

La siguiente ecuación en derivadas parciales de orden dos

$$-\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.1)$$

es conocida como la ecuación de Poisson, este nombre en honor al matemático Francés Siméon Denis Poisson,  $u$  es la función que se desea encontrar,  $f$  es una función dada,  $\Omega$  un conjunto contenido en  $\mathbb{R}^2$  y  $\Delta$  el operador de Laplace que se define como  $\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ .

La ecuación de Poisson tiene diversas aplicaciones, en Braess [2, p. 47] determina la distribución de temperatura estacionaria en un cuerpo isotrópico, sus aplicaciones abarcan áreas donde se involucre la transmisión de calor, en la electrostática, ingeniería mecánica, etc.

En el desarrollo de las siguientes secciones consideramos la EDP (2.1) sobre un dominio poligonal y en el uso de la notación de Bressis [3] la notación de producto escalar entre un espacio y su dual.

### 2.1. Condición de frontera tipo Dirichlet

En esta sección partiremos de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneo, planteando la formulación débil y verificando las condiciones del Teorema de Lax Milgram (Teorema 1.2.5) que asegura que la forma débil tiene solución única, además en el caso de la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet no homogéneo, se lleva a un problema equivalente con condición de frontera homogéneo.

#### 2.1.1. Condición de frontera tipo Dirichlet homogéneo

Partiremos realizando la formulación clásica de la ecuación de Poisson, esto es:

Dada  $f \in L^2(\Omega)$  encontrar  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv f & \text{en } \Omega, \\ u \equiv 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Para realizar la formulación débil elegimos nuestro espacio de prueba  $H_0^1(\Omega)$ , considerando  $u \in C^2 \cap C(\overline{\Omega})$  y  $v$  una función arbitraria en nuestro espacio de prueba tal que

$$-\Delta u(x_1, x_2)v(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)v(x_1, x_2),$$

e integrando ambos lados sobre  $\Omega$  obtenemos

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} f(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (2.3)$$

utilizando la Identidad de Green (Teorema 1.1.10), en la parte izquierda de (2.3), ya que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  y considerando  $n$  un vector normal unitario exterior a la frontera de  $\Omega$  en  $(x_1, x_2)$ , obtenemos

$$\int_{\Omega} -(\Delta uv)(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \int_{\partial\Omega} v(x_1, x_2)\nabla u(x_1, x_2) \cdot n(x_1, x_2)ds,$$

notemos que sobre  $\partial\Omega$  en (2.2) se tiene la condición  $u \equiv 0$ , así  $\nabla u(x_1, x_2) \cdot n(x_1, x_2)$  se anula sobre la frontera de  $\Omega$ , por lo cual

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (2.4)$$

reemplazando (2.4) en el lado izquierdo de (2.3) se sigue que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} f(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2. \quad (2.5)$$

Dado que  $u \in C(\overline{\Omega})$  e idénticamente cero sobre la frontera tenemos que,  $u \in H_0^1(\Omega)$ , definamos de (2.5)

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \\ \langle l, v \rangle &= \int_{\Omega} f(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

notemos que  $\langle l, v \rangle = (f, v)_0$ , con todo lo anterior tenemos las herramientas para realizar la formulación débil de la formulación clásica (2.2):

Dado  $f \in L^2(\Omega)$  encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

Es “débil” en sentido en que la formulación clásica es de orden dos y en el proceso la formulación que denominamos débil termina de orden uno, entonces la ecuación clásica “pierde” un orden, pero se debe cumplir para toda función  $v$  en el espacio de prueba, lo que hace referencia a la formulación también llamarla formulación variacional.

Ahora garanticemos que la expresión (2.7) tenga solución única, para esto haremos utilidad del Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.5), veamos que  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal  $H_0^1$ -elíptica y el funcional  $\langle l, \cdot \rangle$  es lineal y continuo. En efecto

(a)  $a(\cdot, \cdot)$  es bilineal : Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $u, v, z \in H_0^1(\Omega)$ , verifiquemos que

$$a(\alpha u + \beta v, z) = \alpha a(u, z) + \beta a(v, z) \quad \text{y} \quad a(z, \alpha u + \beta v) = \alpha a(z, u) + \beta a(z, v).$$

De la definición de  $a(\cdot, \cdot)$  y propiedades del gradiente, obtenemos

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, z) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta v)(x_1, x_2) \cdot \nabla z(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla z(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \beta \int_{\Omega} \nabla v(x_1, x_2) \cdot \nabla z(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ &= \alpha a(u, z) + \beta a(v, z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(z, \alpha u + \beta v) &= \int_{\Omega} \nabla z(x_1, x_2) \cdot \nabla(\alpha u + \beta v)(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ &= \int_{\Omega} \nabla z(x_1, x_2) \cdot (\alpha \nabla u(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} \nabla z(x_1, x_2) \cdot (\beta \nabla v(x_1, x_2)) dx_1 dx_2, \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla z(x_1, x_2) \cdot \nabla u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \beta \int_{\Omega} \nabla z(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ &= \alpha a(z, u) + \beta a(z, v), \end{aligned}$$

por lo cual  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal.

(b) Continuidad de  $a(\cdot, \cdot)$ : Sean  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , verifiquemos que existe  $c$  tal que

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_1 \|v\|_1.$$

Por definición de la forma  $a(\cdot, \cdot)$  y del producto escalar obtenemos

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| = \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \right|,$$

como las derivadas parciales son continuas, se sigue

$$|a(u, v)| = \left| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \right|, \quad (2.8)$$

aplicando la desigualdad triangular, se sigue

$$\left| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \right| \leq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_1 dx_2, \quad (2.9)$$

por la inecuación de Schwarz se sigue

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \leq \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0, \quad (2.10)$$

de la inecuación de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 \leq \left( \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2}, \quad (2.11)$$

así de la ecuación (2.8), las inecuaciones (2.9), (2.10), (2.11) y por la definición de la seminorma  $|\cdot|_1$ , se tiene  $|a(u, v)| \leq |u|_1 |v|_1$  y como  $|u|_1 |v|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$ , se sigue  $a(u, v) \leq \|u\|_1 \|v\|_1$ , por lo cual la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es continua.

(c) Simetría de  $a(\cdot, \cdot)$ : Dados  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , verifiquemos  $a(u, v) = a(v, u)$ .

Por definición

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

por la conmutatividad del producto escalar  $\cdot$ , se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \nabla v(x_1, x_2) \cdot \nabla u(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

por lo cual  $a(u, v) = a(v, u)$ , así  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica.

(d)  $a(\cdot, \cdot)$  es  $H_0^1$ -elíptica: Sea  $u \in H_0^1(\Omega)$ , como  $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + |u|_1^2$  por la inecuación de Poincaré-Friedrichs (Teorema 1.1.8), existe  $s > 0$  tal que  $\|u\|_0 \leq s|u|_1$ , por lo cual

$$\|u\|_1^2 \leq s^2|u|_1^2 + |u|_1^2, \quad (2.12)$$

como  $s^2|u|_1^2 + |u|_1^2 = (1 + s^2)|u|_1^2$  y por (2.12), se tiene  $(1/(1 + s^2))\|u\|_1^2 \leq |u|_1^2$ , por definición de  $a(\cdot, \cdot)$  se sigue

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u(x_1, x_2) \cdot \nabla u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx_1 dx_2 = |u|_1^2,$$

se tiene que

$$a(u, v) \geq \frac{1}{1 + s^2} \|u\|_1^2,$$

por lo cual  $a(\cdot, \cdot)$  es  $H_0^1$ -elíptica.

(e) Linealidad de  $\langle l, \cdot \rangle$ : Dados  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  verifiquemos  $\langle l, u + \alpha v \rangle = \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle$ .

Como  $(\cdot, \cdot)_0$  es un producto interno, se sigue que

$$\langle l, u + \alpha v \rangle = (f, u + \alpha v)_0 = (f, u)_0 + \alpha (f, v)_0 = \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle.$$

(f) Continuidad de  $\langle l, \cdot \rangle$ : Dada  $u \in H_0^1(\Omega)$ , por definición tenemos las siguientes igualdades

$$|\langle l, u \rangle| = |(f, u)_0| = \left| \int_{\Omega} f(x) u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \quad (2.13)$$

del análisis matemático, se sigue que

$$\left| \int_{\Omega} f(x_1, x_2) u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq \int_{\Omega} |f(x_1, x_2) u(x_1, x_2)| dx_1 dx_2, \quad (2.14)$$

por la inecuación de Schwarz

$$\int_{\Omega} |f(x_1, x_2) u(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \|f\|_0 \|u\|_1. \quad (2.15)$$

como  $f \in L^2(\Omega)$  se tiene que  $\|f\|_0 < \infty$  por lo cual  $|\langle l, u \rangle| \leq \|f\|_0 \|u\|_1$ , así  $l$  es un funcional continuo.

Por el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.5) existe un único  $u \in H_0^1(\Omega)$  que satisface (2.7).

Notemos, si  $u$  satisface el PVF (2.2) entonces satisface (2.7).

### 2.1.2. Condición de frontera tipo Dirichlet no homogéneo

Para esta sección los pilares de su desarrollo son [2], [4], en esta sección consideramos la ecuación de Poisson, con condición de frontera Dirichlet no idénticamente cero, por lo anterior se denomina “no homogéneo”, de la forma

Dados  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\partial\Omega)$  encontrar  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv f & \text{en } \Omega, \\ u \equiv g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.16)$$

En este punto de la lectura, surge una pregunta muy natural ¿cómo realizamos la formulación débil?

Primeramente expresemos nuestra formulación clásica (2.16) en una formulación clásica homogénea para esto supongamos una función  $u$  que satisface (2.16), ubiquemos nuestra mirada en la condición de frontera del PVF, analicemos considerando  $w$  como  $u - g$ ,  $w$  se anula sobre  $\partial\Omega$ , pero  $-\Delta w$ , no necesariamente existe, puesto que  $g \in L^2(\partial\Omega)$  así la información de  $g$  es solo sobre  $\partial\Omega$ , es decir si consideramos  $w = u - g$  no es adecuado esta elección, ya que tenemos la condición de frontera homogénea pero el laplaciano de  $w$  no necesariamente existe. En Braess [2, pag 36,42] nos indican que para llevar nuestro PVF (2.16) a condición de frontera tipo homogéneo, se asume una función  $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$  que coincide con  $g$  sobre la frontera de  $\Omega$ , notemos que la función  $u_0$  nos ofrece la información necesaria en  $\Omega$  como en su frontera. De este modo, definimos  $w$  como  $u - u_0$  en vez de elegir  $u - g$  y podemos calcular  $-\Delta w$ , ya que existe.

Como  $u$  tiene derivadas parciales de orden uno, es decir existen y son continuas cuadrado integrables, se tiene que  $u \in H^1(\Omega)$ , por lo cual  $u - u_0$  están en  $H_0^1(\Omega)$ , es decir  $w \in H_0^1(\Omega)$ . En  $\Omega$  tenemos que

$$-\Delta u \equiv -\Delta(w + u_0) \equiv -\Delta w - \Delta u_0, \quad (2.17)$$

se tiene  $-\Delta u \equiv f$  sobre  $\Omega$  y reemplazando en el lado izquierdo en la ultima identidad en (2.17), obtenemos  $f \equiv -\Delta w - \Delta u_0$  despejando  $-\Delta w$  se llega a  $-\Delta w \equiv f + \Delta u_0$ . Así la formulación clásica equivalente con condición de frontera tipo Dirichlet homogéneo a (2.16) es :

Dadas  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Omega)$  encontrar  $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta w \equiv f + \Delta u_0 & \text{en } \Omega, \\ w \equiv 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

Seleccionando el espacio de prueba  $H_0^1(\Omega)$  y multiplicando la EDP en (2.18) por una función arbitraria  $v \in H_0^1(\Omega)$  tenemos

$$-\Delta w(x_1, x_2)v(x_1, x_2) = (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.19)$$

integramos sobre  $\Omega$

$$\int_{\Omega} -\Delta w(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (2.20)$$

considerando  $n$  un vector normal unitario exterior a la frontera de  $\Omega$  en  $(x_1, x_2)$  y por la Identidad de Green (Teorema 1.1.10) aplicada al lado izquierdo de (2.20), se tiene

$$\int_{\Omega} (-\Delta wv)(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \int_{\partial\Omega} (v\nabla w(x_1, x_2)) \cdot n(x_1, x_2)ds,$$

la integral sobre la  $\partial\Omega$  se anula, ya que  $v$  es idénticamente cero en  $\partial\Omega$ , por lo cual la integral toma el valor de cero, por lo tanto

$$\int_{\Omega} -\Delta w(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} \nabla w(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (2.21)$$

por la transitividad de la igualdad entre (2.21) y (2.20) se sigue

$$\int_{\Omega} \nabla w(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2. \quad (2.22)$$

Definamos

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \\ \langle l, v \rangle = (f + \Delta u_0, v)_0.$$

Tenemos  $w \in H_0^1(\Omega)$  y  $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ , procedamos a realizar la formulación débil.

Dadas  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Omega)$  encontrar  $w \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(w, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.23)$$

La formulación débil esta en términos de  $w$ , pero reemplazando  $u - u_0$  en (2.23) se sigue

$$a(w, v) = a(u - u_0, v) = a(u, v) - a(u_0, v) = a(u, v) - \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (2.24)$$

utilizando la Identidad de Green (Teorema 1.1.10) en el último término del lado derecho en la última igualdad anterior y teniendo presente que la integral sobre la frontera de  $\Omega$  al aplicar la Identidad de Green se anula, tenemos

$$- \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} (v\Delta u_0)(x_1, x_2)dx_1dx_2, \\ = (\Delta u_0, v)_0, \quad (2.25)$$

de (2.25) y (2.24) concluimos  $a(w, v) = a(u, v) + (\Delta u_0, v)_0$ ; del lado derecho en la ecuación (2.23) tenemos

$$\langle l, v \rangle = (f + \Delta u_0, v)_0 = (f, v)_0 + (\Delta u_0, v)_0. \quad (2.26)$$

Por la transitividad de la igualdad entre los resultados de (2.24) y (2.23), se sigue

$$\langle l, v \rangle = a(u, v) + (\Delta u_0, v)_0, \quad (2.27)$$

y de (2.26) se cumple

$$a(u, v) + (\Delta u_0, v)_0 = (f, v)_0 + (\Delta u_0, v)_0,$$

eliminando el término  $(\Delta u_0, v)_0$  de la igualdad anterior, la expresión toma la siguiente forma

$$a(u, v) = (f, v)_0,$$

teniendo presente que  $u - u_0 \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , la formulación débil equivalente a (2.23) es:

Dadas  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Omega)$  encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} a(u, v) = \langle f, v \rangle, & \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ u - u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.28)$$

Verifiquemos las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (Teorema (1.2.5)). Como  $u_0 \in C^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(\Omega)$  se sigue que  $f + \Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ .

(1) La de demostración de la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es  $H_0^1(\Omega)$ - elíptica, continua es la misma demostración al caso de frontera tipo Dirichlet homogéneo.

(2)  $\langle l, v \rangle$  es continua: Sea  $v \in H_0^1(\Omega)$  veamos que existe  $c > 0$  tal que  $\langle l, v \rangle \leq c\|v\|_1$ .

Por definición de  $l$  se sigue que

$$|\langle l, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 \right|, \quad (2.29)$$

nosotros sabemos que  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal continua, la idea es expresar la integral del lado derecho de tal manera que aparezca la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ , esto es

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 &= \int_{\Omega} f(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 + \int_{\Omega} (\Delta u_0 v)(x_1, x_2)dx_1dx_2, \\ &= \int_{\Omega} (fv)dx_1dx_2 - \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \nabla v)dx_1dx_2 + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u_0}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

como  $v \in H_0^1(\Omega)$  se sigue que  $v(\partial u_0/\partial n) \equiv 0$  sobre  $\partial\Omega$ , así la integral sobre la frontera de  $\Omega$  desaparece, de esto se sigue

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} fvdx_1dx_2 - \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \nabla v)dx_1dx_2, \quad (2.30)$$

reemplazando (2.30) en (2.29) se sigue

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} fvdx_1dx_2 - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_0 dx_1dx_2 \right|, \\ &\leq \int_{\Omega} |fv|dx_1dx_2 + \left| \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx_1dx_2 \right|, \end{aligned} \quad (2.31)$$

por la inecuación de Schwarz y que  $a(\cdot, \cdot)$  es continua, existe  $C > 0$  tal que  $|a(u_0, v)| \leq C\|u_0\|_1\|v\|_1$  sobre  $H^1(\Omega)$ , además  $\|v\|_0 \leq \|v\|_1$  por lo cual

$$|\langle l, v \rangle| \leq \|f\|_0\|v\|_1 + C\|u_0\|_1\|v\|_1 = (\|f\|_0 + C\|u_0\|_1)\|v\|_1.$$

Tomando  $c = \|f\|_0 + C\|u_0\|_1$  obtenemos que  $l$  es continuo.

(3)  $\langle l, \cdot \rangle$  es lineal: Sean  $v, w \in H_0^1(\Omega)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  veamos  $\langle l, v + \alpha u \rangle = \langle l, v \rangle + \alpha \langle l, u \rangle$ .

Por definición de  $\langle l, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} \langle l, v + \alpha u \rangle &= \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)(v + \alpha u)(x_1, x_2)dx_1dx_2, \\ &= \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 + \alpha \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)u(x_1, x_2)dx_1dx_2, \\ &= \langle l, v \rangle + \alpha \langle l, u \rangle. \end{aligned}$$

Por lo cual  $\langle l, \cdot \rangle$  es lineal.

Por Teorema de Lax-Milgram (Teorema (1.2.5)), existe una única función que satisface el problema débil (2.23).

## 2.2. Condición de frontera tipo Neumann

La ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Neumann, es de la forma

Dados  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\partial\Omega)$ , encontrar  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv f, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \equiv g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.32)$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial n} : \nabla u \cdot n$  se denomina la derivada normal, que corresponde a la componente perpendicular del gradiente de  $u$ , al plano tangente.

El problema (2.32) tiene solución única, salvo suma de constantes, o sea cualquier solución para el PVF se diferencia de si misma por una constante, el conjunto  $\{u + c \mid c \in \mathbb{R}, u \text{ satisface (2.32)}\}$  satisface la formulación clásica, esto es

$$-\Delta(u + c) = -\Delta u = f, \quad \frac{\partial(u + c)}{\partial n} = g,$$

además para garantizar la existencia de la solución única salvo suma de constantes, en Braess [2, pp. 46-47] se afirma que las funciones  $g$  y  $f$  deben satisfacer la siguiente condición

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega} g(x_1, x_2) ds = 0, \quad (2.33)$$

que se denomina, condición de compatibilidad de los datos, que obtenemos integrando la EDP de (2.32) sobre  $\Omega$

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} -\Delta u(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (2.34)$$

como  $-\Delta u(x_1, x_2) = -\nabla \cdot (\nabla u(x_1, x_2))$ , utilizando el Teorema de la divergencia de Gauss, se obtiene

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (\nabla u(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x_1, x_2) ds, \quad (2.35)$$

sobre la frontera de  $\Omega$  tenemos  $\partial u / \partial n \equiv g$ , por lo cual

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x_1, x_2) ds = \int_{\partial\Omega} g(x_1, x_2) ds, \quad (2.36)$$

por la transitividad de la igualdad entre (2.36), (2.35) y (2.34), y pasando a restar al lado izquierdo de la igualdad, se obtiene (2.33), la condición de compatibilidad.

En Braess [2, pag. 46] se afirma que para realizar la formulación débil de (2.32) hay que restringirse al espacio

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0 \right\}, \quad (2.37)$$

si  $u$  es una solución del PVF (2.32), su media se denota como  $\bar{u}$  y esta definida como

$$\bar{u} = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} u(x, y) dx dy, \quad (2.38)$$

donde  $m(\cdot)$  es la medida de Lebesgue, como  $\bar{u}$  es una constante, verifiquemos que  $u - \bar{u}$  esta en el espacio (2.37), esto es

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u - \bar{u} dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} dx_1 dx_2, \\ &= \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \left( \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \int_{\Omega} dx_1 dx_2, \\ &= \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \left( \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) m(\Omega), \\ &= \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que  $u - \bar{u}$  satisface el PVF (2.32) además esta en el espacio  $V$ , es decir que dada una solución particular en el espacio  $H^1(\Omega)$  que satisface (2.32), la resta con su media esta en el espacio (2.37). Considerando una función arbitraria  $v \in V$  y multiplicando por la EDP establecida sobre  $\Omega$  en (2.32), se sigue

$$\begin{aligned} -\Delta u(x_1, x_2) v(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2) v(x_1, x_2), \\ \int_{\Omega} -\Delta u(x_1, x_2) v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega} f(x_1, x_2) v(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aplicando la Identidad de Green (Teorema 1.1.10) en la parte izquierda de (2.39),

$$\int_{\Omega} -(\Delta u v)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega} v(x_1, x_2) (\nabla u \cdot n)(x_1, x_2) ds,$$

reemplazando la anterior igualdad en el lado izquierdo de (2.39), obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) dx dy - \int_{\partial\Omega} v(x, y) \nabla u(x, y) \cdot n ds = \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy,$$

como  $\nabla u \cdot n$  es idénticamente  $g$  sobre la frontera de  $\Omega$  y despejando el primer termino del lado izquierdo de la ecuación anterior, se sigue

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} v(x, y) g(x, y) ds. \quad (2.40)$$

Considerando la expresión (2.40), definimos

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) dx dy, \\ \langle l, v \rangle &= \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} v(x, y) g(x, y) ds. \end{aligned}$$

Notemos que  $\langle l, v \rangle = (f, v)_0 + (g, v)_{0, \partial\Omega}$ , es decir  $\langle l, v \rangle$  lo podemos expresar utilizando el producto interno en  $L^2(\Omega)$ .

Establecemos la formulación débil del problema (2.32).

Dada  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\partial\Omega)$  encontrar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = (f, v)_0 + (g, v)_{0, \partial\Omega}, \quad \forall v \in V. \quad (2.41)$$

Recordemos, si  $w$  satisface (2.32), una función que satisface (2.41) es  $w - \bar{w}$ . Según Braess [2, pag. 47] si la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  y  $\langle l, v \rangle$  satisfacen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.5), obtenemos  $u \in V$  que satisface la formulación débil para todo  $v \in V$  y de la condición de compatibilidad (2.33), el problema débil se cumple para toda  $v$  idénticamente a una constante, y por lo tanto se cumple para toda  $v \in H^1(\Omega)$ . En efecto verifiquemos las condiciones del Teorema de Lax-Milgram

(a)  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica : Sea  $u \in V$ , veamos que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_1^2.$$

Como  $\|u\|_1^2 = |u|_1^2 + \|u\|_0^2$  y por la variante de la desigualdad de Friedrichs (Teorema 1.1.9) tenemos

$$\|u\|_1^2 = |u|_1^2 + \|u\|_0^2 \leq |u|_1^2 + (c(|\bar{u}| + |u|_1))^2,$$

además  $u \in V$ , entonces  $|\bar{u}| = 0$ , ya que  $\int_{\Omega} u dx = 0$ , así

$$|u|_1^2 + (c(|\bar{u}| + |u|_1))^2 = |u|_1^2 + c^2|u|_1^2 = (1 + c^2)|u|_1^2,$$

como  $|u|_1^2 = a(u, u)$  y considerando  $\alpha = (1/(1 + c^2))$  tenemos que  $\alpha \|u\|_1^2 \leq a(u, u)$ , por lo cual  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica.

(b)  $l$  es un funcional lineal :

Sean  $u, v \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  verifiquemos que  $\langle l, u + \alpha v \rangle = \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle l, u + \alpha v \rangle &= (f, u + \alpha v)_0 + (g, u + \alpha v)_{0, \partial\Omega}, \\ &= (f, u)_0 + \alpha(f, v)_0 + (g, u)_{0, \partial\Omega} + \alpha(g, v)_{0, \partial\Omega}, \\ &= (f, u)_0 + (g, u)_{0, \partial\Omega} + \alpha[(f, v)_0 + (g, v)_{0, \partial\Omega}], \\ &= \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo cual  $\langle l, \cdot \rangle$  es lineal.

(c) Continuidad de  $l$ : Sea  $v \in V$  veamos que existe  $c > 0$   $|\langle l, v \rangle| \leq c \|v\|_1$ .

Por definición de  $\langle l, \cdot \rangle$  y la desigualdad triángular se sigue

$$|\langle l, v \rangle| = |(f, v)_0 + (g, v)_{0, \partial\Omega}| \leq |(f, v)_0| + |(g, v)_{0, \partial\Omega}|, \quad (2.42)$$

por la inecuación de Schwarz

$$\begin{aligned} |(f, v)_0| + |(g, v)_{0, \partial\Omega}| &\leq \|f\|_{0, \Omega} \|v\|_0 + \|g\|_{0, \partial\Omega} \|v\|_{0, \partial\Omega}, \\ &\leq \|f\|_{0, \Omega} \|v\|_{1, \Omega} + \|g\|_{0, \partial\Omega} \|v\|_{0, \partial\Omega}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

En la inecuación (2.43) en la suma del lado derecho aparecen  $\|v\|_{1,\Omega}$  y  $\|v\|_{0,\partial\Omega}$ , nos centramos en estas normas, ya que las normas correspondientes a  $f$  y  $g$  existen, ya que son funciones de  $L^2(\Omega)$  y  $L^2(\partial\Omega)$ , como  $\|v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega}$  surge la siguiente pregunta ¿al término  $\|v\|_{0,\partial\Omega}$  con que lo acotamos? El Teorema de la traza (Teorema 1.1.11) nos garantiza la existencia de una función

$$\begin{aligned}\gamma: H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ w &\rightarrow \gamma(w) = w|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

además existe una constante  $c$  tal que  $\|\gamma(w)\|_{0,\partial\Omega} \leq c\|w\|_{1,\Omega}$ , como  $v \in V$  lo que significa que  $v \in H^1(\Omega)$ , evaluando  $v$  en la función  $\gamma$  obtenemos  $\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq c\|v\|_{1,\Omega}$ , así la expresión (2.43) toma la siguiente forma

$$\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_0 + \|g\|_{0,\partial\Omega}\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq \|f\|_0\|v\|_1 + c\|g\|_{0,\partial\Omega}\|v\|_1, \quad (2.44)$$

considerando  $c_1 = \|f\|_0 + c\|g\|_{0,\partial\Omega}$  y de las inecuaciones (2.44), (2.43) y (2.42) se sigue

$$|\langle l, v \rangle| \leq c_1\|v\|_{1,\Omega},$$

por lo tanto  $l$  es continuo.

La forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  y el funcional  $l$  satisfacen las condiciones que requiere el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.5), por lo cual existe  $u \in V$  que satisface (2.41).

## 2.3. Condición de frontera tipo Mixtas

En esta sección los textos a seguir fueron [4] y [2]. Comenzaremos con la formulación clásica de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Dirichlet-Neumann o mixtas.

Dada  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Gamma_D)$  y  $w \in L^2(\Gamma_N)$  encontrar  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , tal que

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv f \text{ en } \Omega, \\ u \equiv g \text{ sobre } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \equiv w \text{ sobre } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.45)$$

donde  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  y  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . Para realizar la formulación débil de (2.45) elegimos nuestro espacio de prueba  $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$ . Pero antes de proceder a realizar la formulación débil, asumiremos una función  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $u_0$  es idénticamente a  $g$  sobre  $\Gamma_D$  y definimos a  $u_1 := u - u_0$  y reemplazando en (2.45) tenemos  $-\Delta u \equiv -\Delta(u_1 + u_0) \equiv -\Delta u_1 - \Delta u_0$ , por lo cual  $-\Delta u_1 \equiv f + \Delta u_0$  en  $\Omega$ , sobre la  $\Gamma_D$  tenemos que  $u_1 \equiv 0$  y en  $\Gamma_N$  tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial(u_1 + u_0)}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial u_0}{\partial n} = w.$$

Por lo tanto una formulación equivalente a (2.45) es:

Dadas  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_D)$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y  $w \in L^2(\Gamma_N)$ , encontrar  $u_1 \in V$

$$\begin{cases} -\Delta u_1 \equiv f + \Delta u_0 \text{ en } \Omega, \\ u_1 \equiv 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} \equiv w - \frac{\partial u_0}{\partial n} \text{ sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.46)$$

Sean  $v \in V$  y  $u_1$  una función que satisface (2.46) multiplicando la primera ecuación en (2.46) por  $v$ , e integrando sobre  $\Omega$ , tenemos

$$\int_{\Omega} -\Delta u_1(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (2.47)$$

aplicando la identidad de Green (Teorema 1.1.10) en la parte izquierda de (2.47) obtenemos

$$\int_{\Omega} -\Delta u_1(x_1, x_2)v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \int_{\partial\Omega} v(x_1, x_2)\frac{\partial u_1}{\partial n}(x_1, x_2)ds,$$

reemplazando la anterior igualdad en el lado izquierdo de la ecuación (2.47) obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \int_{\partial\Omega} (v(\nabla u_1 \cdot n))(x_1, x_2)ds = \int_{\Omega} ((f + \Delta u_0)v)(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

pasando el segundo término del lado izquierdo al lado derecho obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} ((f + \Delta u_0)v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 + \int_{\partial\Omega} (v\nabla u_1 \cdot n)(x_1, x_2)ds. \quad (2.48)$$

Analicemos los términos del lado derecho en (2.48) de forma independiente, inicialmente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + \Delta u_0)vdx_1dx_2 &= \int_{\Omega} fvdx_1dx_2 + \int_{\Omega} v\Delta u_0dx_1dx_2, \\ &= \int_{\Omega} fvdx_1dx_2 - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla vdx_1dx_2 + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u_0}{\partial n}dx_1dx_2, \end{aligned} \quad (2.49)$$

el segundo término satisface

$$\int_{\partial\Omega} (v\nabla u_1 \cdot n)ds = \int_{\partial\Omega} vwdx_1dx_2 - \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u_0}{\partial n}dx_1dx_2. \quad (2.50)$$

Al sumar las ecuaciones (2.49) y (2.50) obtenemos, que el lado izquierdo en (2.48) se puede expresar de la siguiente manera

$$\int_{\Omega} fvdx_1dx_2 - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla vdx_1dx_2 + \int_{\partial\Omega} vwdx_1dx_2. \quad (2.51)$$

Puesto que  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  el tercer término de la expresión (2.51) se puede expresar como una suma entre la integral sobre  $\Gamma_N$  y la integral sobre  $\Gamma_D$ , pero la integral sobre  $\Gamma_D$  se anula, ya que  $v \equiv 0$ , así tenemos que (2.48) se puede expresar como

$$\int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v)(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\Omega} fvdx_1dx_2 - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla vdx_1dx_2 + \int_{\Gamma_N} vwdx_1dx_2.$$

Definiendo

$$a(u_1, v) = \int_{\Omega} \nabla u_1(x_1, x_2) \cdot \nabla v(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$$\langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N} v w dx_1 dx_2.$$

Expresando a  $l$ , con el producto interno en  $L^2(\Omega)$  se sigue  $\langle l, v \rangle = (f, v)_0 - a(u_0, v) + (v, w)_{0, \Gamma_N}$ .

Así la formulación débil de (2.46) es:

Dadas  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_D)$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y  $w \in L^2(\Gamma_N)$ , encontrar  $u_1 \in V$  tal que

$$a(u_1, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (2.52)$$

donde  $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$ ; verifiquemos las condiciones del Teorema de Lax-Milgram (Teorema (1.2.5)), en efecto

- (a) En Gockenbach [4, p. 47] se afirma que  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica note que la inecuación de Poincaré-Friedrichs (Teorema (1.1.8)), es para  $H_0^1(\Omega)$  y notemos que las funciones de  $V$  solo se anulan sobre una parte de la frontera de  $\Omega$ , es decir para poder aplicar Poincaré-Friedrichs necesitamos que la función se anule sobre  $\partial\Omega$ .

**Lema 2.3.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, conexo y acotado, con frontera Lipschitz y  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N = \emptyset$  de medida positiva, entonces existe  $C = C(n, \Omega)$  tal que*

$$\|u\|_0 \leq C \|u\|_1 \quad \forall u \in V. \quad (2.53)$$

- (b)  $l$  es un funcional lineal :

Sean  $u, v \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  verifiquemos que  $\langle l, u + \alpha v \rangle = \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle l, u + \alpha v \rangle &= (f, u + \alpha v)_0 + (g, u + \alpha v)_{0, \partial\Omega}, \\ &= (f, u)_0 + \alpha (f, v)_0 + (g, u)_{0, \partial\Omega} + \alpha (g, v)_{0, \partial\Omega}, \\ &= (f, u)_0 + (g, u)_{0, \partial\Omega} + \alpha [(f, v)_0 + (g, v)_{0, \partial\Omega}], \\ &= \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo cual  $\langle l, \cdot \rangle$  es lineal.

- (c) Continuidad de  $l$ : Sea  $v \in V$  veamos que existe  $c > 0$   $|\langle l, v \rangle| \leq c \|v\|_1$ .

Por definición de  $\langle l, \cdot \rangle$  y la desigualdad triángular se sigue

$$|\langle l, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} f v dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N} v w dx_1 dx_2 \right|, \quad (2.54)$$

por la desigualdad triangular en la parte derecha de (2.54), obtenemos que es menor o igual a la siguiente expresión

$$\left| \int_{\Omega} f v dx_1 dx_2 \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx_1 dx_2 \right| + \left| \int_{\Gamma_N} v w dx_1 dx_2 \right|, \quad (2.55)$$

a su vez (2.55) es menor igual a la siguiente expresión

$$\int_{\Omega} |fv| dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} |\nabla u_0 \cdot \nabla v| dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N} |vwdx_1| dx_2, \quad (2.56)$$

por la inecuación de Schwarz la expresión y la continuidad de  $a(\cdot, \cdot)$  en  $H^1(\Omega)$ , (2.56) es menor o igual a la siguiente expresión

$$\|f\|_0 \|v\|_0 + \|u_0\|_1 \|v\|_1 + \|v\|_{0,\Gamma_N} \|w\|_{0,\Gamma_N}, \quad (2.57)$$

como  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega)$   $w \in L^2(\Gamma_N)$  se tiene que sus respectivas normas son finitas, ahora sabemos que  $\|v\|_0 \leq \|v\|_1$ , pero utilizaremos el Teorema de la traza (Teorema 1.1.11) para saber la cota de  $\|v\|_{0,\Gamma_N}$ , El teorema nos garantiza la existencia de una función

$$\begin{aligned} \gamma: H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ w &\rightarrow \gamma(w) = w|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (2.58)$$

además existe una constante  $c$  tal que  $\|\gamma(w)\|_{0,\partial\Omega} \leq c\|w\|_{1,\Omega}$ , como  $v \in V$  lo que significa que  $v \in H^1(\Omega)$ , evaluando  $v$  en la función  $\gamma$  obtenemos  $\gamma(v) = v|_{\partial\Omega}$  tal que

$$\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq c\|v\|_{1,\Omega} \quad (2.59)$$

pero  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ , por lo cual  $\|v\|_{0,\partial\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Gamma_D}^2 + \|v\|_{0,\Gamma_N}^2$ , como  $v \equiv 0$  sobre  $\Gamma_D$ , se cumple  $\|v\|_{0,\partial\Omega} \geq \|v\|_{0,\Gamma_N}$ , así  $\|v\|_{0,\Gamma_N} \leq c\|v\|_{1,\Omega}$ , entonces la expresión (2.57) sería menor igual a la siguiente expresión

$$\|f\|_0 \|v\|_1 + \|u_0\|_1 \|v\|_1 + c\|v\|_1 \|w\|_1, \quad (2.60)$$

considerando  $c_1 = \|f\|_0 + \|u_0\|_1 + c\|w\|_{0,\Gamma_N}$ , por lo cual obtenemos

$$|\langle l, v \rangle| \leq c_1 \|v\|_{1,\Omega},$$

por lo tanto  $l$  es continuo.

## 2.4. El método de Ritz-Galerkin y la formulación discreta

Esta sección se tuvo presente Braess [2, pag. 53-55] y Ciarlet [5, pag. 37].

Las formulaciones clásicas (2.2), (2.16), (2.32) y (2.45) se han llevado a formulaciones débiles (2.7), (2.23), (2.41) y (2.52) respectivamente, dependiendo el caso ya sea, la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet, tipo Neumann o Mixtas el problema débil sería, dadas unas funciones  $f$ ,  $g$  o  $u_0$  que satisfacen cierta condición o están en cierto espacio, es encontrar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (2.61)$$

donde  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica que induce un producto interno en  $V$ , a su vez la norma de la energía y  $\langle l, \cdot \rangle$  es un funcional lineal continuo sobre  $V$ .

Asumiremos un subespacio  $S_h$  de dimensión finita de  $V$ , donde  $h$  se denomina el parámetro de discretización. Asumimos  $S_h$  con el fin de aproximar la solución  $u \in V$ , entonces ¿tenemos una herramienta que nos permite saber que elemento es más próximo a  $u$ , desde  $S_h$ ? El resultado que nos permite relacionar las distancias entre los elementos de  $V$  y los elementos de  $S_h$ , es el Teorema de la proyección (Teorema 1.2.1), el cual afirma que existe  $u_h \in S_h$  tal que

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|u - u_h\|_E = \inf\{\|v - u_h\|_E \mid v \in S_h\}, \\ \text{(ii)} \quad & a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in S_h, \end{aligned} \tag{2.62}$$

lo que indica que  $u_h$  es la mejor aproximación a  $u$  de  $S_h$ .

Como  $S_h$  es de dimensión finita tenemos del álgebra lineal que existe un conjunto  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$  que es base de  $S_h$ , por cual  $u_h$  se puede representar como una combinación lineal de  $B$ , esto es

$$u_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x_1, x_2), \tag{2.63}$$

de (ii) en (2.62) se sigue que

$$0 = a(u - u_h, v) = a(u, v) - a(u_h, v),$$

por lo cual  $a(u, v) = a(u_h, v)$  y reemplazando en (2.61), además estableciendo la ecuación en  $S_h$  obtenemos la formulación discreta de (2.61):

Encontrar  $u_h \in S_h$  tal que

$$a(u_h, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in S_h. \tag{2.64}$$

Puesto que  $B$  es una base de  $S_h$ , observe que la ecuación (2.64) se puede establecer solo para los elementos de  $B$ , o sea para  $v = \varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  y reemplazando (2.63) en (2.64) se sigue que

$$a\left(\sum_{i=1}^N c_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \langle l, \varphi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, N,$$

por la bilinealidad de  $a(\cdot, \cdot)$  se sigue

$$\sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \langle l, \varphi_j \rangle \quad j = 1, \dots, N. \tag{2.65}$$

En (2.65) solo se desconocen las constantes  $c_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,

ahora para  $j = 1$  se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \varphi_1) &= \langle l, \varphi_1 \rangle, \\ c_1 a(\varphi_1, \varphi_1) + c_2 a(\varphi_2, \varphi_1) + \dots + c_n a(\varphi_n, \varphi_1) &= \langle l, \varphi_1 \rangle, \end{aligned} \tag{2.66}$$

para  $j = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \varphi_2) &= \langle l, \varphi_2 \rangle, \\ c_1 a(\varphi_1, \varphi_2) + c_2 a(\varphi_2, \varphi_2) + \dots + c_n a(\varphi_n, \varphi_2) &= \langle l, \varphi_2 \rangle, \end{aligned} \tag{2.67}$$

⋮

para  $j = N$

$$\sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \varphi_n) = \langle l, \varphi_n \rangle, \quad (2.68)$$

$$c_1 a(\varphi_1, \varphi_n) + c_2 a(\varphi_2, \varphi_n) + \cdots + c_n a(\varphi_n, \varphi_n) = \langle l, \varphi_n \rangle.$$

De las ecuaciones (2.66) hasta (2.68), obtenemos el siguiente sistema matricial

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & a(\varphi_2, \varphi_N) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle l, \varphi_1 \rangle \\ \langle l, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle l, \varphi_N \rangle \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$RU = F,$$

donde  $R$  es una matriz cuadrada de  $N \times N$  y cada componente esta determinada por

$$R_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

El vector  $F$  con dimensión  $N$ , cada componente esta determinada como

$$F_j = \langle l, \varphi_j \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

El vector incógnita  $U$  contiene  $c_i$  para  $i = 1, \dots, N$ . La matriz  $R$  se le suele llamar la matriz de de Rigidez o la matriz de la energía y a  $F$  el vector de carga.

Si solucionamos el sistema (2.69), obtenemos las constantes que determinan a  $u_h$  en (2.63), que es la mejor aproximación para  $u$  de  $S_h$ . De (2.69) ya se puede proceder a realizar la implementación numérica, pero antes notemos que la propiedad (i) en (2.62) estima el error  $u - u_h$  con la norma de la energía, pero no lo hemos establecido con la norma  $\|\cdot\|_m$ , el siguiente teorema hace esta relación.

**Teorema 2.4.1 (Teorema de Céa, (ver [2])).** *Si  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal  $V$ -elíptica con  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ ,  $u$  y  $u_h$  soluciones del problema débil en  $V$  y  $S_h$  subespacio  $V$  respectivamente, Entonces*

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{C}{\alpha} \inf\{\|u - v_h\|_m \mid v_h \in S_h\}.$$

*Demostración.* Supongamos la forma forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$   $V$ -elíptica y  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$  y  $u$ ,  $u_h$  soluciones de los problemas débiles en  $V$  y  $S_h$  respectivamente, además  $S_h$  un subespacio de  $V$ , de esto se sigue

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \\ a(u_h, w) &= \langle l, w \rangle \quad \forall w \in S_h. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Restando las ecuaciones en (2.70) obtenemos

$$a(u, v) - a(u_h, w) = \langle l, v \rangle - \langle l, w \rangle, \quad (2.71)$$

como  $S_h \subset V$ , para  $v \in S_h$  que reemplazamos con la letra  $w$ , o sea donde está  $v$  sustituimos con  $w$  en (2.71) y por la bilinealidad de  $a(\cdot, \cdot)$ , la igualdad (2.71) toma la siguiente forma

$$a(u - u_h, w) = 0, \quad \forall w \in S_h. \quad (2.72)$$

la expresión (2.72) se conoce como la Ortogonalidad de Galerkin. Ahora consideremos un elemento arbitrario  $v_h \in S_h$  tal que  $w = v_h - u_h$ , como  $S_h$  es un subespacio de  $V$  se sigue que  $w \in S_h$ , como  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_m^2, \quad (2.73)$$

expresando a  $u - u_h = u - v_h + v_h - u_h$ , se sigue

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h), \end{aligned}$$

por la ortogonalidad de Galerkin obtenemos  $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ , ya que  $v_h - u_h \in S_h$ , por lo cual

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h), \quad (2.74)$$

por la continuidad de  $a(\cdot, \cdot)$  existe  $C > 0$  tal que

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq C \|u - u_h\|_m \|u - v_h\|_m \quad (2.75)$$

se sigue de (2.75), (2.74) y (2.73) se tiene que

$$\alpha \|u - u_h\|_m^2 \leq C \|u - u_h\|_m \|u - v_h\|_m, \quad (2.76)$$

como  $u - u_h \neq 0$ , entonces  $\|u - u_h\|_m \neq 0$ , podemos dividir (2.76) entre  $\|u - u_h\|_m$ , se sigue que

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{C}{\alpha} \inf\{\|u - v_h\|_m \mid v_h \in S_h\}. \quad (2.77)$$

□

Por el Teorema de Lax-Milgram (Teorema (1.2.5)), el problema variacional (2.64), tiene solución única, en el caso de frontera tipo Neumann es salvo suma de constantes, ¿qué nos falta para que el problema este bien planteado?

Jacques Hadamard (1865-1963) afirma que un problema esta bien definido, si se garantiza, la existencia de la solución, la unicidad de la solución y la estabilidad del problema, en nuestro caso nos falta garantizar la estabilidad.

**Lema 2.4.2** (ver [2, pag. 55]). *Si  $u_h$  satisface (2.64) entonces*

$$\|u_h\|_m \leq \alpha^{-1} \|l\| \quad (2.78)$$

*Demostración.* Sea  $u_h$  una solución de la formulación discreta (2.64) tal que

$$a(u_h, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in S_h. \quad (2.79)$$

como  $u_h \in S_h \subset V$ , donde  $S_h$  es el espacio discreto donde se formula (2.64), y  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma  $V$ -elíptica se obtiene  $a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u\|_m^2$ , y como  $\langle l, u_h \rangle \leq \|l\| \|u_h\|_m$  obtenemos

$$\alpha \|u\|_m^2 \leq a(u_h, u_h) = \langle l, u_h \rangle \leq \|l\| \|u_h\|_m,$$

si  $u_h = 0$ , se cumple (2.78) y si  $u_h \neq 0$ , dividiendo por  $\alpha \|u\|_m$  la expresión  $\alpha \|u\|_m^2 \leq \|l\| \|u_h\|_m$  obtenemos

$$\|u_h\|_m \leq \alpha^{-1} \|l\|.$$

□

## Capítulo 3

# Una cota superior para el error

El objetivo principal es encontrar una cota superior para el error  $\|u - u_h\|_1$ , que dependa de los datos dados de la ecuación diferencia clásica y la solución  $u_h$  del problema discreto, para llevar acabo nuestro objetivo nos hemos guiado de Verfürth [6, pp. 1-12] que muestra una cota superior para el problema clásico con condición de frontera tipo mixta, con cierto énfasis de Braess [2, pp. 172-175] particularizando para el problema clásico con condición de frontera tipo Dirichlet. De [5] hacemos un breve repaso del método de los elementos finitos, para lograr una afinidad en la construcción de los espacios de dimensión finita que tienen un rol muy importante en lo que resta de la monografía.

### 3.1. Método de los elementos finitos (FEM)

En el capítulo anterior los problemas clásicos de la ecuación de Poisson, se ha podido formular en un sistema matricial, el cual resolveremos sobre espacios de funciones de dimensión finita utilizando el método de elementos finitos.

El método de los elementos finitos según Ciarlet [5, pp. 55-60], en su forma más simple es un proceso específico de construcción de subespacios  $S_h$ , que se denomina espacio de elementos finitos, esta construcción es caracterizada por tres aspectos básicos, que son (FEM 1), (FEM 2) y (FEM 3).

**Definición 3.1.1.** Un  $n$ -simplex es la envoltura convexa de un conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  de  $(n + 1)$  puntos independientes, definidos como  $N_i = (N_{i,j})_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$  con  $1 \leq i \leq n + 1$ , son llamados los vértices del  $n$ -simplex. Para cualquier entero  $m$  con  $0 \leq m \leq n$ , una  $m$ -cara del  $n$ -simplex  $K$ , es un  $m$ -simplex, cuyos  $m + 1$  vértices son también vértices de  $K$ . En particular una  $(n - 1)$ -cara es simplemente llamada una cara y 1-cara es simplemente llamado borde o lado. Definimos el siguiente arreglo matricial

$$CN = \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,n} & 1 \\ N_{2,1} & N_{2,2} & \dots & N_{2,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 1 \\ N_{n+1,1} & N_{n+1,2} & \dots & N_{n+1,n} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

cada fila de  $CN$  hasta la columna  $n$ , son las coordenadas de los vértices del  $n$ -simplex.

Las coordenadas baricentricas, son funciones  $\lambda_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definidas en cada vértice del  $n$ -

simplex tal que

$$\lambda_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n b_{j,i} x_j + b_{n+1,i}, \quad \text{con } 1 \leq i \leq n+1, \quad (3.2)$$

$$\lambda_i(N_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{con } 1 \leq i, j \leq n+1,$$

donde  $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n+1}$  es la matriz inversa de  $CN$ .

Consideremos el espacio  $\mathbb{R}^n$  con su base canónica  $(e_i)_{i=1}^n$  y definimos el espacio  $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) := \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid p \text{ es un polinomio con } \text{grad}(p) \leq k\}$ , un  $p \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$  tiene la siguiente forma

$$p : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha| \leq k} \rho_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (3.3)$$

la dimensión de  $\mathcal{P}_k$  es

$$\dim \mathcal{P}_k = \binom{n+k}{k}$$

**Ejemplo 3.1.2.** Considerando  $k = 1$  y  $n = 2$  determinemos  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$ , el 2-simplex con vértices  $N_1 = (0, 0)$ ,  $N_2 = (1, 0)$ ,  $N_3 = (1/2, 1)$  y las coordenadas baricentricas.

para determinar la forma de  $p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$ , es decir el polinomio  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , los posibles  $\rho$  son  $\rho = (0, 0)$ ,  $\rho = (1, 0)$  y  $\rho = (0, 1)$ , en cada caso  $|\alpha| \leq 1$  así

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \sum_{|\rho| \leq 1} \rho_1 \rho_2 x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2}, \\ &= \rho_1 \rho_0 x_1^0 x_2^0 + \rho_1 \rho_1 x_1 x_2^0 + \rho_0 \rho_1 x_1^0 x_2^1, \end{aligned}$$

consideremos  $\gamma = \rho_0 \rho_1$ ,  $\alpha = \rho_1 \rho_0$  y  $\beta = \rho_0 \rho_1$ , así

$$\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2) := \{\alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i \mid \gamma_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$$

El 2-simplex :

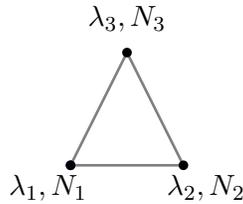


Figura 3.1: Representación de las coordenadas baricentricas y nodos en el 2-simplex

La matrices  $CN$  y  $B$  son

$$CN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

las coordenadas baricentricas son

$$\begin{aligned}\lambda_1(x_1, x_2) &= -x_1 - 0,5x_2 + 1, \\ \lambda_2(x_1, x_2) &= x_1 - 0,5x_2 + 0, \\ \lambda_3(x_1, x_2) &= 0x_1 + x_2 + 0.\end{aligned}$$

Notemos que los coeficientes de cada coordenada baricentrica corresponde a una columna de  $B$ .

Para la construcción de los espacios  $S_h$  en la formulación discreta (2.64), en esta monografía utilizamos 2-símplex, particularmente triángulos rectángulos isósceles.

(FEM 1) En esta etapa del proceso, se establece una partición o subdivisión de  $\bar{\Omega}$  que llamamos  $\mathcal{T}_h$ , que tiene un número finito de subconjuntos  $T$ , que se denominan elementos finitos.  $\mathcal{T}_h$  se elige de tal manera que satisface las siguientes propiedades:

- (1)  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ .
- (2) Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $T$  es cerrado y  $int(T) \neq \emptyset$ .
- (3) Para cada  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  distintos, se tiene que  $int(T_1) \cap int(T_2) = \emptyset$ .
- (4) Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $\partial T$  es Lipschitz-continua.
- (5) Para cada  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  distintos, son adyacentes si  $T_1 \cap T_2$  es una cara, que es la misma cara para ambos o adyacentes a la frontera  $\partial\Omega$  cuando al menos una cara hace parte de  $\partial\Omega$ .

Las siguientes figuras son ejemplos de una subdivisión en un conjunto  $\Omega$ .

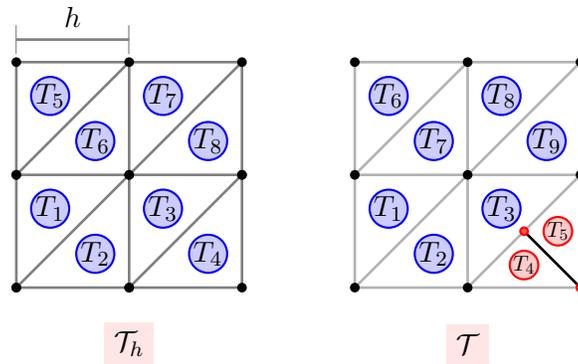


Figura 3.2: Representación de dominios,  $\mathcal{T}_h$  que satisface (FEM 1) y  $\mathcal{T}$  que no satisface (FEM 1)

Notemos que la figura 3.1 la triangulación en la parte derecha no se cumple la propiedad 5 de (FEM 1), mientras que la triangulación de la parte izquierda, si cumple todas las propiedades de (FEM 1).

De Verfűth [6] asociamos la siguiente notación. Para la subdivisión o partición  $\mathcal{T}_h$  asociamos el conjunto  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{E}$  de todos los vėrtices y lados, respectivamente de todos los elementos en  $\mathcal{T}_h$ . Un subíndice  $T, \Omega, \Gamma, \Gamma_D$ , o  $\Gamma_N$  a  $\mathcal{N}$  o  $\mathcal{E}$  indica que solo se toman los vėrtices o lados que estan contenidos

en el conjunto del subíndice, respectivamente. Similarmente  $\mathcal{N}_e$  denota el conjunto de los vértices de un lado  $E$ . La unión de todos los lados en  $\mathcal{E}$  es denotada por  $\mathcal{E}_\Sigma$  y es llamado el esqueleto de  $\mathcal{T}_h$ .

Con cada elemento  $T$ , cada lado  $e$ , y cada vértice  $N$  asociamos los siguientes conjuntos.

$$\begin{aligned}\omega_e &= \bigcup \{T' \mid e \in \mathcal{E}_{T'}\} & \tilde{\omega}_T &= \bigcup \{T' \mid \mathcal{N}_e \cap \mathcal{N}_{T'}\}, \\ \omega_N &= \bigcup \{T' \mid N \in \mathcal{N}_{T'}\} & \tilde{\omega}_e &= \bigcup \{T' \mid \mathcal{N}_e \cap \mathcal{N}_{T'} \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

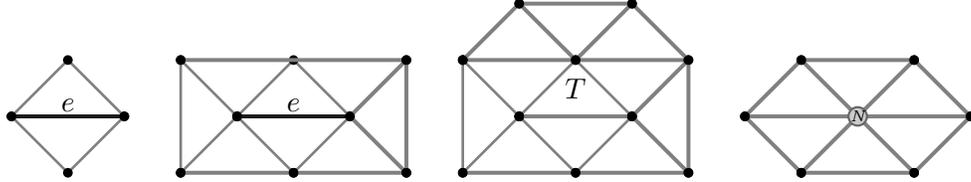


Figura 3.3: Representación de  $\omega_e$ ,  $\tilde{\omega}_e$ ,  $\tilde{\omega}_T$ ,  $\omega_N$  se corresponde de izquierda a derecha con las gráficas

En la subdivisión  $\mathcal{T}_h$  se define un espacio de elementos finitos  $S_h$ , que se especifica en el proceso, por ejemplo para los problemas discretos, el espacio de elementos finitos, cuando tenemos la condición de frontera tipo Dirichlet no homogéneo y Neumann es

$$S_h^1 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.4)$$

para el caso tipo Dirichlet homogéneo, y mixtas tenemos

$$S_{0h}^1 = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_{\Gamma_D} \equiv 0\}.$$

(FEM 2) El segundo aspecto del método de los elementos finitos es la construcción de los espacios de elementos finitos como espacios de funciones de polinomios, este hecho tiene una gran importancia ya que al realizar la implementación computacional los cálculos de los coeficientes del sistema (2.69) son mas simples.

En Ciarlet [5, p. 78] nos presenta una definición más general de elemento finito que se enfoca en el espacio de funciones y las funciones base locales del elemento finito, ya que hasta ahora en (FEM 1) el elemento finito solo se ve como al objeto geométrico elegido para hacer la subdivisión o partición de  $\Omega$ .

**Definición 3.1.3.** Un elemento finito en  $\mathbb{R}^n$  es una tripleta  $(T, P, \Sigma)$  donde :

- (i)  $T$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  con  $int(T) \neq \emptyset$  y frontera Lipschitz-continua.
- (ii)  $P$  es un espacio de funciones real-valuadas definidas sobre el conjunto  $T$ .
- (iii)  $\Sigma$  es un conjunto finito de funciones linealmente independiente  $\phi_i$ , con  $1 \leq i \leq n+1$ , sobre  $P$ .

**Ejemplo 3.1.4.** Considerando  $T$  como el 2-símplex en el ejemplo (3.1.2), se tiene que  $p = \mathcal{P}_1(T)$  y  $\Sigma$  esta conformado por las funciones de las coordenadas baricentricas, es decir  $\Sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ , así el elemento finito es la tripleta  $(T, P, \Sigma)$

**Definición 3.1.5.** Dos elementos finitos  $(T, P, \Sigma)$  y  $(\widehat{T}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ , son equivalentes-afín, si existe una función invertible  $F: \widehat{T} \rightarrow T$ , tal que las siguientes relaciones se cumplen

- (i)  $T = F(\widehat{T})$ ,
- (ii)  $P = \{p: T \rightarrow \mathbb{R} \mid p \equiv \widehat{p} \circ F^{-1}, \quad \widehat{p} \in \widehat{P}\}$ ,
- (iii)  $N_i = F(\widehat{N}_i)$  para  $1 \leq i \leq n + 1$ ,
- (iv)  $\Sigma = \{\phi_i(F(\widehat{N}_i)) \mid 1 \leq i \leq n + 1\}$ .

Una familia de elementos finitos  $\mathcal{T}_h$  se denomina familia afín, si todos sus elementos finitos son afín-equivalentes a un solo elemento finito no necesariamente contenido en la familia de elementos finitos  $\mathcal{T}_h$ , que se llama el elemento finito de referencia de la familia  $\mathcal{T}_h$ .

**Ejemplo 3.1.6.** Dada una familia de elementos finitos simpliciales en  $\mathbb{R}^n$ , es muy común elegir como elemento de referencia a la unidad  $n$ -símplex con vértices

$$\begin{aligned}\widehat{N}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \widehat{N}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \widehat{N}_n &= (0, 0, \dots, 1), \\ \widehat{N}_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0),\end{aligned}$$

con coordenadas baricentricas

$$\lambda_i = x_i, \quad 1 \leq i \leq n \text{ y } \lambda_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n x_i,$$

en caso de una familia afín rectangular de elementos finitos, usualmente se elige el elemento de referencia como el hipercubo unitario  $[0, 1]^n$  o el hipercubo  $[-1, 1]^n$ .

El concepto de familia afín es importante ya que en la practica, la mayor parte del trabajo involucrado en los cálculos de los coeficientes del sistema (2.69) se realiza en elementos finitos de referencia y no en los elementos finitos de la familia.

(FEM 3) El tercer aspecto del método de elementos finitos es que existe al menos una base canónica en el espacio  $S_h$ , cuyas funciones base correspondientes tienen soporte lo mas pequeño.

Hasta ahora de (FEM1) y (FEM2) tenemos localmente para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , el espacio de funciones  $P$  y el conjunto de funciones bases local  $\Sigma$ . Ahora definamos

$$\mathcal{N}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}_T,$$

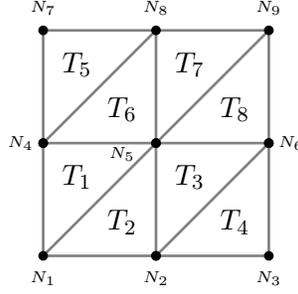


Figura 3.4: Se ilustra una discretización con sus respectivos elementos y funciones bases

son los nodos o vértices de  $\mathcal{T}_h$ . El conjunto del número de grados de libertad del espacio de elementos finitos es el conjunto

$$\Sigma_h = \{\varphi(N) \mid N \in \mathcal{N}_h\},$$

donde  $\varphi(N)$  es la función base global correspondiente al nodo  $N$ , el conjunto  $\Sigma_h$  se llama el conjunto de grados de libertad del espacio de elementos finitos.

Cuando tengamos una familia de elementos finitos a las funciones bases  $\varphi_i \in \Sigma_h$  al restringirla en cada elemento finito la denotaremos como  $\phi_i^j$ , donde  $i$  hace referencia al nodo  $N_i$  y el superíndice  $j$  hace referencia al subíndice del elemento finito.

En el gráfico anterior  $\mathcal{N}_h = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9\}$ , para los  $N \in \mathcal{N}_h \setminus \{N_7, N_9\}$  las funciones bases globales correspondientes tienen contribución de varias funciones bases locales de mas un elemento finito (en el sentido de (FEM 1) los triángulos), en particular  $N_1$ , la función base global correspondiente a este nodo es

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (\varphi_1|_{T_1}(x_1, x_2), \varphi_1|_{T_2}(x_1, x_2), \varphi_1|_{T_3}(x_1, x_2), \dots, \varphi_1|_{T_8}(x_1, x_2)) = (\phi_1^1, \phi_1^3, \phi_1^2, \dots, \phi_1^8),$$

notemos que  $\phi_1^j$  con  $1 \leq j \leq 8$  son coordenadas baricentricas es decir que al evaluarlas en su nodo correspondiente nos da 1, así

$$\begin{aligned} \varphi_1(N_1) &= (\phi_1^1(N_1), \phi_1^3(N_1), \phi_1^2(N_1), \dots, \phi_1^8(N_1)), \\ &= (1, 1, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

podemos observar que el soporte compacto de  $\varphi_1$  es  $T_1$  y  $T_2$ , en forma general es decir depende de las función base local en el elemento finito  $T_i$  que corresponde al nodo  $N_1$  con  $1 \leq i \leq 2$ , notemos que  $\text{supp } \varphi_1 = T_1 \cup T_2$ .

Así  $\varphi_i$  es una  $n$ -tupla con  $n = \text{card}(\mathcal{T}_h)$  tal que

$$\varphi_i|_T(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

notemos que si  $\varphi_i|_T(N_j) = 1$  necesariamente  $N_j \in \mathcal{N}_T$ .

**Lema 3.1.7.** *las funciones  $\varphi \in \Sigma_h$  tienen las siguientes propiedades*

- (i)  $0 \leq \varphi_j \leq 1$  con  $1 \leq j \leq n_l$ ,  $n_l = \text{card}(\Sigma_h)$ .

- (ii)  $\sum_{N \in \mathcal{N}_T} \varphi(N) = 1.$
- (iii)  $\text{supp}(\varphi(N)) = \omega_N$

*Demostración.* (i) Para verificar (i) veamos que  $\forall N \in \mathcal{N} \forall T \in \mathcal{T}_h$  se cumple que  $0 \leq \varphi_j|_T(N) \leq 1.$  consideremos  $n_l = \text{card}(\Sigma_h), N_i \in \mathcal{N}$  con  $1 \leq i \leq n_l,$  y  $\varphi_j \in \Sigma_h$  con  $1 \leq j \leq n_l$  por definición tenemos sobre  $T_k$  que

$$\varphi_j|_T(N_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.5)$$

por lo cual  $0 \leq \varphi_j \leq 1$

- (ii) veamos que  $\sum_{N \in \mathcal{N}_T} \varphi(N) = 1,$  verifiquemos que para todo  $N_i \sum_{j=1}^{n_l} \varphi_j|_T(N_i),$  con  $j = 1, \dots, n_l$  con  $n_l = \text{card}(\mathcal{N}_T).$  Veamos que para  $i = 1, \dots, n_l$  se cumple  $\sum_{j=1}^{n_l} \varphi_j(N_i) = 1$  para  $i = 1, \dots, n_l.$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_l} \varphi_j(N_1) &= \varphi_1(N_1) + \varphi_2(N_1) + \dots + \varphi_{n_l}(N_1), \\ &= 1 + 0 + \dots + 0 = 1, \\ \sum_{j=1}^{n_l} \varphi_j(N_2) &= \varphi_1(N_2) + \varphi_2(N_2) + \dots + \varphi_{n_l}(N_2), \\ &= 0 + 1 + \dots + 0 = 1, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^{n_l} \varphi_j(N_{n_l}) &= \varphi_1(N_{n_l}) + \varphi_2(N_{n_l}) + \dots + \varphi_{n_l}(N_{n_l}), \\ &= 0 + 0 + \dots + 1 = 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

por lo cual  $\sum_{N \in \mathcal{N}_T} \varphi(N) = 1.$

- (iii) Veamos que  $\text{supp}(\varphi(N)) = \omega_N.$  Para  $j = 1, \dots, n_l, n_l = \text{card}(\Sigma_h)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\varphi(N_j)) &= \text{supp}(\varphi_j), \\ &= \{N_i \in \mathcal{N} \mid \varphi_j(N_i) \neq 0\}, \\ &= \{N_i \in \mathcal{N} \mid \exists 1 \leq k \leq n_l \text{ tal que } \varphi_j|_{T_k}(N_j) = 1\}, \\ &= \{T_k \in \mathcal{T}_h \mid \varphi_j|_{T_k}(N_j) = 1\}, \\ &= \{T_k \in \mathcal{T}_h \mid N_j \in \mathcal{N}_{T_k}\}, \\ &= \omega_{N_j}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

□

Definimos el espacio de funciones de elementos finitos como

$$\begin{aligned} S_h^k(\mathcal{T}_h) &:= \left\{ v = (v|_T)_{T \in \mathcal{T}_h} : (v|_T)_{T \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_k(T) \right\} \\ S_{0h}^k(\mathcal{T}_h) &:= \{v \in S_h^k(\mathcal{T}_h) : v|_{\Gamma_D} \equiv 0\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2. Estimador de error a-posteriori tipo residual

En Verfürth [6, pp. 1-2] en la solución de problemas numéricos prácticos en física o ingeniería, a menudo se encuentran la dificultad de que la precisión general de la aproximación numérica se deteriora por la singularidades locales que surgen. Una solución es refinar la discretización cerca de las regiones críticas. La pregunta entonces es cómo obtener un buen equilibrio entre las regiones refinadas y no refinadas de manera que la precisión general sea óptima. Otro problema estrechamente relacionado es el de obtener estimaciones fiables de la precisión de la solución numérica calculada. Las estimaciones de error a priori, como las proporciona el análisis de error estándar para los métodos de elementos finitos, a menudo son insuficientes, ya que solo proporcionan información sobre el comportamiento asintótico del error y requieren propiedades de regularidad de la solución que no se satisfacen en presencia de singularidades.

Estas consideraciones muestran la necesidad de indicadores de error que puedan extraerse a posteriori de la solución numérica calculada y de los datos dados por el problema. Por supuesto, el cálculo del indicador de error a posteriori debería ser mucho menos costoso que el cálculo de la solución numérica. Además, la estimación del error a posteriori debe ser local y debe producir una cota superior e inferior confiable para el error verdadero en una norma especificada por el usuario. En este contexto, cabe señalar que las cotas superiores son suficientes para obtener una solución numérica con una precisión por debajo de una tolerancia prescrita. Las cotas inferiores locales, son necesarias para asegurar que la cuadrícula se refine correctamente de modo que se obtenga una solución numérica con una tolerancia prescrita utilizando un número mínimo de puntos en la malla.

El estimador residual es el error de la solución numérica calculada por una norma adecuada de su residual con respecto a la ecuación diferencial en la forma clásica.

Consideremos el siguiente planteamiento general con respecto a los problemas clásicos en el capítulo 2.

Sea  $\Omega$  un dominio poligonal en  $\mathbb{R}^2$ .

Dados  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_D)$  y  $w \in L^2(\Gamma_N)$ , encontrar  $u \in W$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv f \text{ en } \Omega, \\ u \equiv g \text{ sobre } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \equiv w \text{ sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.9)$$

donde  $\Gamma := \partial\Omega$  y  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , con  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ .

Si tenemos que :

- (1) Si  $W = C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  y  $\Gamma_N = \emptyset$ , entonces (3.9) es un problema de valores de frontera tipo Dirichlet.
- (2) Si  $W = C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  y  $\Gamma_D = \emptyset$ , se tiene que (3.9) es un problema de valores de frontera tipo Neumann.
- (3) Si  $W = C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\Gamma_N \neq \emptyset$  y  $\Gamma_D \neq \emptyset$ , se sigue que (3.9) es un problema de valores de frontera tipo mixtas.

Consideremos la formulación equivalente (2.46) del caso (3) y llamamos  $f_1 = f + \Delta u_0$  en  $\Omega$ ,  $w_1 = w - ((\partial u_0)/(\partial n))$ , se tiene que  $u_1 = u - u_0$  donde  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  e idénticamente a  $g$  sobre  $\Gamma_D$ , además tenemos el espacio de prueba  $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \equiv 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$ , así obtenemos la siguiente formulación clásica

Dados  $f_1 \in L^2(\Omega)$  y  $w_1 \in L^2(\Gamma_N)$ , encontrar  $u_1 \in V$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 \equiv f_1 \text{ en } \Omega, \\ u_1 \equiv 0 \text{ sobre } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} \equiv w_1 \text{ sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.10)$$

Observemos en (3.10), si  $\Gamma_N = \emptyset$  se tienen los problemas clásicos (2.32) y (2.2). Utilizaremos la Identidad de Green (Teorema (1.1.10)) en el funcional  $l$  para expresar la formulación débil asociada a (3.10) en términos de  $u_1$  y  $w_1$ , esto es

$$\begin{aligned} \langle l, v \rangle &= (f, v)_{0,\Omega} - a(u_0, v) + (w, v)_{0,\Gamma_N}, \\ &= (f, v)_{0,\Omega} + (\Delta u_0, v)_{0,\Omega} - \left( \frac{\partial u_0}{\partial n}, v \right)_{0,\Gamma_N} + (w, v)_{0,\Gamma_N}, \\ &= (f + \Delta u_0, v)_{0,\Omega} - \left( w - \frac{\partial u_0}{\partial n}, v \right)_{0,\Gamma_N}, \\ &= (f_1, v)_{0,\Omega} - (w_1, v)_{0,\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Así la formulación débil asociada a (3.10) es :

Dados  $f_1 \in L^2(\Omega)$  y  $w_1 \in L^2(\Gamma_N)$ , encontrar  $u_1 \in V$  tal que

$$a(u_1, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.11)$$

La formulación discreta del problema débil es :

Encontrar  $u_h \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h)$  tal que

$$a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h), \quad (3.12)$$

donde  $\mathcal{T}_h$  es una partición afín de  $\Omega$ .

### 3.2.1. Operador Cuasi-interpolador

Para cada conjunto medible  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  con medida positiva y para cada función integrable  $v$  se tiene la media de  $v$  sobre  $\omega$  como

$$\bar{v}_\omega = \frac{1}{\mu_2(\omega)} \int_\omega v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

donde  $\mu_2$  denota la medida estándar de Lebesgue en  $\mathbb{R}^2$ , así definimos un operador cuasi-interpolador como

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{T}_h} v: H_0^1(\Omega) &\rightarrow V_h \\ v &\rightarrow I_{\mathcal{T}_h} v = \sum_{N \in \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_{\Gamma_N}} \bar{v}_{\omega_N} \varphi_N. \end{aligned} \quad (3.13)$$

El operador  $I_{\mathcal{T}_h}$  tiene la siguiente propiedad de aproximación

**Proposición 3.2.1** (Ver ([6])). *El siguiente estimador de error para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , todo  $e \in \mathcal{E}$ , y toda función  $v \in V$ ,*

$$\begin{aligned}\|v - I_h v\|_{0,T} &\leq C_1 h_T \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}, \\ \|v - I_h v\|_{0,e} &\leq C_2 h_e^{1/2} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}.\end{aligned}$$

Las constante  $C_1$  y  $C_2$  solo dependen de la forma del parámetro de  $\mathcal{T}_h$ .

Ver demostración en Verfürth [6, pag 108].

### 3.3. Estimador residual

Sea  $u_1 \in V$  y  $u_h \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h)$  soluciones del problema débil (3.11) y el problema discreto (3.12) respectivamente. La estrategia es acotar el error  $\|u - u_h\|_E$  superiormente, por una cantidad que solo involucre  $u_h$  y los datos del problema del PVF (3.10) que son  $f_1$  y  $w_1$ .

#### 3.3.1. La equivalencia de error y residual

Para toda  $v \in V$  se tiene

$$a(u_1, v) = \langle l, v \rangle, \tag{3.14}$$

restando a ambos lados  $a(u_h, v)$  tenemos

$$a(u_1, v) - a(u_h, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v), \tag{3.15}$$

se sigue que

$$a(u_1 - u_h, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v). \tag{3.16}$$

Definimos el residual  $R: V \rightarrow \mathbb{R}$  de  $u_h$ , como

$$\langle R, v \rangle = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad \forall v \in V.$$

verifiquemos que  $R$  esta en el espacio dual de  $V$ .

(i)  $\langle R, \cdot \rangle$  es lineal: Sean  $v_1, v_2 \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  veamos que  $\langle R, v_1 + \alpha v_2 \rangle = \langle R, v_1 \rangle + \alpha \langle R, v_2 \rangle$ .

$$\begin{aligned}\langle R, v_1 + \alpha v_2 \rangle &= \langle l, v_1 + \alpha v_2 \rangle - a(u_h, v_1 + \alpha v_2), \\ &= \langle l, v_1 \rangle + \alpha \langle l, v_2 \rangle - a(u_h, v_1) - \alpha a(u_h, v_2), \\ &= \langle l, v_1 \rangle - a(u_h, v_1) + \alpha (\langle l, v_2 \rangle - a(u_h, v_2)), \\ &= \langle R, v_1 \rangle + \alpha \langle R, v_2 \rangle.\end{aligned}$$

(ii)  $\langle R, v \rangle$  es acotado: Dado  $v \in V$  veamos que existe  $c$  tal que  $|\langle R, v \rangle| \leq c\|v\|_1$ .

$$\begin{aligned} |\langle R, \cdot \rangle| &= |\langle l, v \rangle - a(u_h, v)|, \\ &\leq |\langle l, v \rangle| + |a(u_h, v)|, \\ &\leq c_1\|v\|_1 + \|u_h\|_1\|v\|_1, \\ &\leq (c_1 + \|u_h\|_1)\|v\|_1, \end{aligned}$$

si tomamos  $c = c_1 + \|u_h\|_1$  tenemos que  $|\langle R, v \rangle| \leq c\|v\|_1$ .

así tenemos que

$$a(u_1 - u_h, v) = \langle R, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.17)$$

Notemos que  $(V, \|\cdot\|_E)$  es un espacio de Hilbert y  $R \in V$  por Teorema de Representación de Riesz (Teorema (1.2.3)) tenemos que

$$\|u_1\|_E = \|l\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle l, v \rangle|}{\|v\|_E}$$

por lo cual

$$\|u_1\|_E = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(u_1, v)|}{\|v\|_E}, \quad (3.18)$$

de (3.18) y (3.17) tenemos que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E &= \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(u - u_h, v)|}{\|v\|_E}, \\ &= \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle R, v \rangle|}{\|v\|_E}, \\ &= \|R\|_{V'}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Así tenemos que la norma del error en  $V$  es igual a la norma del Residual en  $V'$ .

### 3.3.2. Ortogonalidad de Galerkin

Primero observemos que,  $S_{0h}^1(\mathcal{T}_h) \subset V$ , por (2.62) tenemos que

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h),$$

por lo cual

$$\langle R, v \rangle = 0 \quad \forall v \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h), \quad (3.20)$$

es decir que el espacio discreto  $S_{0h}^1(\mathcal{T}_h)$  esta contenido en el kernel de  $R$ . La ecuación (3.20) refleja el hecho que la discretización  $S_{0h}^1(\mathcal{T}_h)$  es consistente y que no se introducen errores adicionales por integración numérica o por solución inexacta del problema discreto.

### 3.3.3. Una $L^2$ -Representación del residual

Para toda  $v \in V$  se tiene que

$$\begin{aligned}\langle R, v \rangle &= \langle l, v \rangle - a(u_h, v), \\ &= (f_1, v)_{0,\Omega} + (w_1, v)_{0,\Gamma_N} - a(u_h, v),\end{aligned}$$

sabemos que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ , además  $\Gamma_N = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma_N}} e$ , se sigue que

$$\langle R, v \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f_1, v)_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma_N}} (w_1, v)_{0,e} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a(u_h|_T, v), \quad (3.21)$$

analizando el tercer término del lado derecho en la ecuación (3.21) se sigue

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} a(u_h|_T, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[ \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0,\partial T} - (\Delta u_h|_T, v)_{0,T} \right],$$

reemplazando en (3.21) tenemos

$$\begin{aligned}\langle R, v \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f_1, v)_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma_N}} (w_1, v)_{0,e} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\Delta u_h|_T, v)_{0,T} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0,\partial T}, \\ \langle R, v \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f_1 + \Delta u_h|_T, v)_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma_N}} (w_1, v)_{0,e} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0,\partial T},\end{aligned} \quad (3.22)$$

analicemos el tercer término del lado derecho de la ecuación (3.22)

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0,\partial T} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0,\partial T \setminus \Gamma_N} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma_N}} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0,e}, \quad (3.23)$$

analicemos el lado derecho el primer término en la ecuación (3.23), para esto consideremos  $T_i$  y  $T_j$  dos elementos adyacentes arbitrarios de  $\mathcal{T}_h$ , es decir  $T_i$  y  $T_j$  tiene un lado en común.

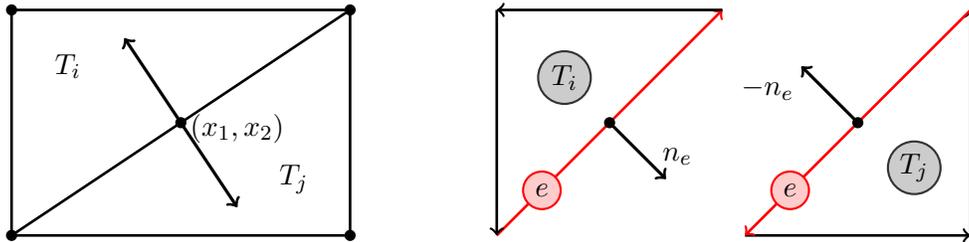


Figura 3.5: Se ilustran dos elementos adyacentes, resaltando la normal exterior unitaria sobre un punto del lado en común y la orientación de los lados

donde  $n_e$  es un vector normal unitario exterior a  $e$  en  $T_i$  en el punto  $(x_1, x_2)$  y  $-n_e$  es un vector

normal unitario exterior a  $e$  en  $T_j$  en el punto  $(x_1, x_2)$ , por lo cual

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0, \partial T \setminus \Gamma_N} &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial u_h|_{T_i}}{\partial n_e}, v \right)_{0,e} + \left( -\frac{\partial u_h|_{T_j}}{\partial n_e}, v \right)_{0,e} \right], \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma\Omega}} \left( \frac{\partial u_h|_{T_i}}{\partial n_e} - \frac{\partial u_h|_{T_j}}{\partial n_e}, v \right)_{0,e}, \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma\Omega}} \left( (\nabla u_h|_{T_i} - \nabla u_h|_{T_j}) \cdot n_e, v \right)_{0,e}, \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma\Omega}} ([\nabla u_h] \cdot n_e, v)_{0,e}, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

donde  $[\cdot]$  se llama la función salto, note que la calculamos sobre elementos adyacentes. Reemplacemos (3.24) en (3.23), esto es

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\partial u_h|_T}{\partial n}, v \right)_{0, \partial T} = \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma\Omega}} ([\nabla u_h] \cdot n_e, v)_{0,e} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma N}} (\nabla u_h|_{T,e} \cdot n, v)_{0,e}, \tag{3.25}$$

donde  $\nabla u_h|_{T,e}$  es el gradiente de  $u_h$  restringida al elemento que tiene como lado a  $e$ , así reemplazando (3.25) en (3.22) tenemos

$$\langle R, v \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f_1 + \Delta u_h|_T, v)_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma N}} (w_1 - \nabla u_h|_{T,e} \cdot n, v)_{0,e} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Omega}} (-[\nabla u_h] \cdot n_e, v)_{0,e}. \tag{3.26}$$

Definimos el residual por elementos y el residual por lados como  $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $j: \mathcal{E}_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$  respectivamente, tal que

$$r|_T = f_1 + \Delta u_h,$$

$$j|_e = \begin{cases} -[\nabla u_h] \cdot n_e & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Omega}, \\ w_1 - \nabla u_h|_{T,e} \cdot n & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma N}, \\ 0 & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma D}. \end{cases}$$

Notemos que  $\Delta u_h \equiv 0$  sobre cada elemento finito, ya que  $u_h|_T \in \mathcal{P}_1(T)$ . Así la siguiente  $L^2$ -representación del residual  $R$

$$\langle R, v \rangle = (r, v)_{0,\Omega} + (j, v)_{0,\mathcal{E}_{\Sigma}}, \quad \forall v \in V.$$

Por la ortogonalidad de Galerkin tenemos que  $\langle R, v_h \rangle = 0$ , además para toda  $v_h \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h)$  y toda  $v \in V$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\langle R, v \rangle &= (r, v)_{0,\Omega} + (j, v)_{0,\mathcal{E}_{\Sigma}} + \langle R, v_h \rangle, \\
&= (r, v)_{0,\Omega} + (j, v)_{0,\mathcal{E}_{\Sigma}} + (r, v_h)_{0,\Omega} + (j, v_h)_{0,\mathcal{E}_{\Sigma}}, \\
&= (r, v - v_h)_{0,\Omega} + (j, v - v_h)_{0,\mathcal{E}_{\Sigma}}, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

### 3.3.4. Una cota superior para el error

Sea  $v \in V$  una función arbitraria, así por el operador cuasi-interpolador elegimos  $v_h$  tal que  $v_h = I_{\mathcal{T}_h}(v)$ , por lo cual de (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle R, v \rangle| &= |(r_T, v - v_h)_{0,\Omega} + (j_e, v - v_h)_{0,\mathcal{E}_\Sigma}|, \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (r_T, v - I_{\mathcal{T}_h}(v))_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}} (j_e, v - I_{\mathcal{T}_h}(v))_{0,e} \right|, \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |(r_T, v - I_{\mathcal{T}_h}(v))_{0,T}| + \sum_{e \in \mathcal{E}} |(j_e, v - I_{\mathcal{T}_h}(v))_{0,e}|, \end{aligned} \quad (3.28)$$

por la inecuación de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |(r_T, v - I_{\mathcal{T}_h}(v))_{0,T}| + \sum_{e \in \mathcal{E}} |(j_e, v - I_{\mathcal{T}_h}(v))_{0,e}| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|r_T\|_{0,T} \|v - I_{\mathcal{T}_h}(v)\|_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \|j_e\|_{0,e} \|v - I_{\mathcal{T}_h}(v)\|_{0,e} \quad (3.29)$$

por la propiedad de aproximación del operador cuasi-interpolador (3.2.1), existen  $C_1$  y  $C_2$  tal que

$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{0,T} &\leq C_1 h_T \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}, \\ \|v - I_h v\|_{0,e} &\leq C_2 h_e^{1/2} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

de (3.30) y del lado derecho de la inecuación (3.29) se sigue

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|r_T\|_{0,T} \|v - I_{\mathcal{T}_h}(v)\|_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \|j_e\|_{0,e} \|v - I_{\mathcal{T}_h}(v)\|_{0,e} \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|r_T\|_{0,T} C_1 h_T \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \|j_e\|_{0,e} C_2 h_e^{1/2} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}, \quad (3.31)$$

aplicando la inecuación de Cauchy-Schwarz para sumas a lado derecho de (3.31) se sigue

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|r_T\|_{0,T} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T} &\leq C_1 \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}^2 \right)^{1/2}, \\ C_2 \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e^{1/2} \|j_e\|_{0,e} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e} &\leq C_2 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

tomando  $C = \max\{C_1, C_2\}$ , tenemos que el lado izquierdo de (3.31) es mayor o igual a  $|\langle R, v \rangle|$ , además del lado derecho de (3.31) y (3.32), obtenemos

$$|\langle R, v \rangle| \leq C \left[ \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}^2 \right)^{1/2} \right] \quad (3.33)$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que  $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , con  $i = 1, 2$ , así considerando

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}, & b_1 &= \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}^2 \right)^{1/2}, \\ a_2 &= \left( \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, & b_2 &= \left( \sum_{e \in \mathcal{E}} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$|\langle R, v \rangle| \leq C \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Debido a la forma regular de  $\mathcal{T}_h$ , el diámetro de cualquier conjunto puede ser acotado por un múltiplo del diámetro de cualquier elemento o lado contenido en el conjunto, donde la constante solo depende de la forma del parámetro  $h$ , es decir existen constantes  $A_1, A_2$

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}^2 &\leq A_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E,T} = A_1 \|v\|_{E,\Omega}, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}^2 &\leq A_2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E,T} = A_2 \|v\|_{E,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

del tercer término de la multiplicación al lado derecho de (3.34), de (3.35) y eligiendo  $C_{\mathcal{T}_h} = \max\{A_1, A_2\}$  obtenemos

$$\left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \|v\|_{E, \tilde{\omega}_e}^2 \right]^{1/2} \leq C_{\mathcal{T}_h} \|v\|_{E,\Omega}, \quad (3.36)$$

eligiendo  $c = C_1 C_{\mathcal{T}_h}$ , de (3.34) y (3.36) se sigue

$$|\langle R, v \rangle| \leq c \|v\|_{E,\Omega} \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.37)$$

para toda  $v \in V \setminus \{0\}$  se tiene

$$\frac{|\langle R, v \rangle|}{\|v\|_E} \leq c \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.38)$$

de (3.19) y de (3.38) se tiene

$$\|u - u_h\|_E \leq c \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.39)$$

como  $V$  es un espacio de Hilbert, las norma en  $V$ ,  $\|\cdot\|_V$  es equivalente a la norma  $\|\cdot\|_E$ , entonces la cota superior también es cota para el error  $\|u - u_h\|_1$ .

por la construcción del resultado (3.39), tenemos el siguiente teorema

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación que satisface las condiciones de (FEM 1), entonces existe una constante  $c$  positiva tal que*

$$\|u - u_h\|_1 \leq c \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.40)$$

### 3.4. Implementación numérica

El objetivo de esta implementación numérica es verificar que se cumple el Teorema (3.3.1), implementando mallas con refinamiento uniforme y con refinamiento adaptativo, sobre dominios poligonales con formados por 2-símplex isósceles con un ángulo recto.

Considerando el (1), es decir el PVF tipo Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv f & \text{en } \Omega, \\ u \equiv g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\partial\Omega)$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , con formulación discreta:

Dado  $u_{0h} \in S_h^1(\mathcal{T}_h)$ , encontrar  $u_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h)$  tal que

$$\begin{cases} u_h \in u_{0h} + S_{0h}^1(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h) : (v_h - u_{0h}) \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h)\}, \\ a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \forall v_h \in S_{0h}^1(\mathcal{T}_h). \end{cases} \quad (3.41)$$

Tenemos que  $\Gamma_D = \emptyset$  por lo cual los residuales por elemento y por lado son

$$\begin{aligned} r_T &= f, \\ j_e &= \begin{cases} -\llbracket \nabla u_h \rrbracket \cdot n_e & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Omega, \\ 0 & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma_D}, \end{cases} \end{aligned}$$

respectivamente. Definimos el estimador tipo residual global

$$\eta_R := \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.42)$$

y un indicador global de los elementos, un indicador global de los lados, como

$$\text{IdE}_g := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 \quad \text{y} \quad \text{IdL}_g := \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2,$$

calculando  $\text{IdE}_g$  y  $\text{IdL}_g$  podemos llevar acabo la implementación numérica para la estrategia de refinamiento uniforme.

Para desarrollar la estrategia de refinamiento adaptativo debemos tener unos indicadores locales, para esto consideremos  $n = \text{card}(\mathcal{T}_h)$  y  $m = \text{card}(\mathcal{E}_{\Gamma_\Omega})$

$$\begin{aligned} \eta_R &= \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right]^{1/2}, \\ &= \left[ h_{T_1}^2 \|r_{T_1}\|_{0,T_1}^2 + \dots + h_{T_n}^2 \|r_{T_n}\|_{0,T_n}^2 + h_{e_1} \|j_{e_1}\|_{0,e_1}^2 + \dots + h_{e_m} \|j_{e_m}\|_{0,e_m}^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

tenemos que para cada lado  $e \in \mathcal{E}_\Omega$  le corresponden dos triángulos adyacentes, así para tener un indicador local, sedemos la mitad de  $h_{e_m} \|j_{e_m}\|_{0,e_m}^2$  a cada elemento adyacente correspondiente, es decir

$$\eta_R = \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (3.44)$$

definimos el indicador por elementos como

$$\eta_{R,T} = \left( h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} h_e \|j_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.45)$$

de donde obtenemos un indicador de elemento local y un indicador de lado local como

$$\text{IdE}_c := h_T^2 \|r_T\|_{0,T}^2 \quad \text{y} \quad \text{IdL}_c := \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} h_e \|j_e\|_{0,e}^2.$$

Solo nos queda verificar el Teorema (3.3.1) con los correspondientes refinamientos.

### 3.4.1. Refinamiento uniforme

Comenzaremos enunciando el pseudocódigo para calcular el error y el residual.

---

**Algoritmo 3.1:** (Algoritmo uniforme)

---

**Data:** Los datos de la ecuación diferencial parcial y  $m$  números de mallas.

**Result:** Por cada malla una solución numérica  $u_h$ , el error entre la solución real y la solución numérica en la norma  $\|\cdot\|_1$  y  $\eta_R$ .

- 1 Para  $k = 0$ .
  - 2 Calculamos la solución numérica  $u_h$  en el espacio  $\mathcal{T}_h^k$ .
  - 3 Calculamos el error entre  $u$  y  $u_h$ .
  - 4 Calculamos  $\eta_R$ .
  - 5 **if**  $k = m$  **then**
  - 6 |    Términe;
  - 7 **else**
  - 8 |    **return**  $k + 1$  y retomar el paso (2)
- 

Considerando refinamientos uniformes sobre el dominio  $[-1, 1]^2$  con

$$u(x_1, x_2) = \exp(x_1) \cos(\pi x_2) \quad \text{y} \quad f(x_1, x_2) = (\pi^2 - 1) \exp(x_1) \cos(\pi x_2),$$

al aplicar el algoritmo 1 obtenemos los resultados del cuadro 8 y comparando los resultados numéricos del error  $\|u - u_h\|_1$  y el  $\eta_R$  obtenemos la figura 3.6.

h	$\eta_R$	$e$	$\theta = \eta_R/e$	$\theta_1$	$\theta_2$
2	47,7765	7,74207	6,1710		
1	27,3769	3,95809	6,9167	-0,8034	-0,968
1/2	14,4157	3,07471	4,6885	-0,9254	-0,3644
1/4	7,9129	1,59392	4,9644	-0,8654	-0,9479
1/8	4,1099	0,80442	5,1091	-0,9452	-0,9866
1/16	2,0865	0,40315	5,1755	-0,9781	-0,9967

Cuadro 3.1: Estimador residual, error, índice de efectividad y tasas de convergencia.

donde  $\theta_1 = (\log(\eta_R(i+1, 1)/\eta_R(i, 1)))/(\log(h(i+1, 1)/h(i, 1)))$ ,  $\theta_2 = (\log(e(i+1, 1)/e(i, 1)))/(\log(h(i+1, 1)/h(i, 1)))$ .

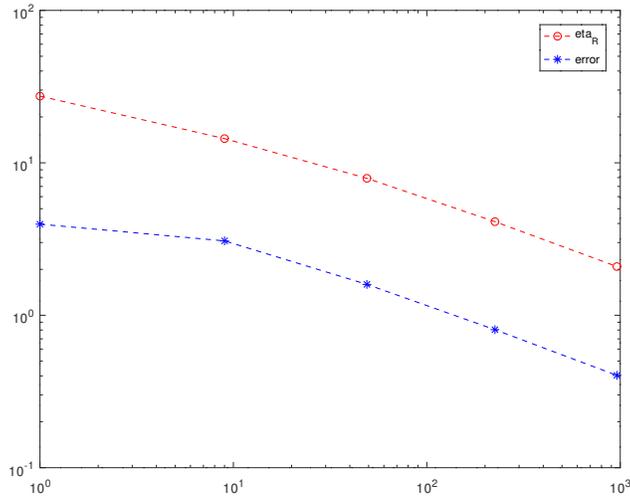


Figura 3.6: Representamos el parámetro de discretización  $h$  vs  $\eta_R$ , error  $e = \|u - u_h\|_1$ , con mallas de refinamiento uniforme.

Al aplicar el algoritmo 1 con refinamiento uniforme sobre el dominio  $L = [-1, 0] \times [-1, 1] \cup [0, 1] \times [0, 1]$ , con las funciones

$$u(r, \theta) = r^{2/3} \sin((2\theta)/3) \text{ y } f = 0,$$

donde  $r$  y  $\theta$  son coordenadas polares, obtenemos los resultados en la tabla 8 y la figura 3.7 de comparar el error y el estimador residual.

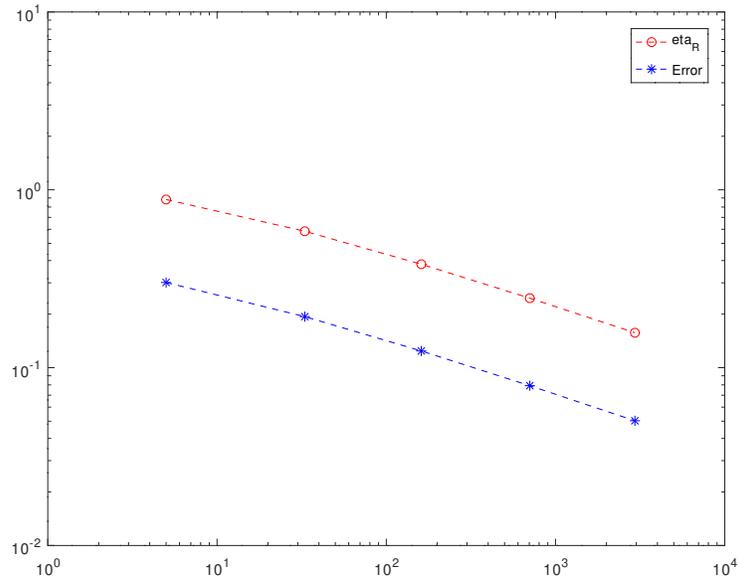


Figura 3.7: Representamos el parámetro de discretización vs el error y el estimador tipo residual.

De cuadros 3.1 y 3.2 se puede observar que a medida que el parámetro de discretización  $h$  se acerca

N	h	$\eta_R$	$e$	$\theta = \eta_R/e$	$\theta_1$	$\theta_2$
0	1	1,2837	0,4787	2,6817		
5	1/2	0,8822	0,3013	2,9282	-0,5412	-0,6680
33	1/4	0,5848	0,1937	3,0200	-0,5932	-0,6374
161	1/8	0,3817	0,1242	3,0747	-0,6156	-0,6412
705	1/16	0,2459	0,0792	3,1064	-0,6344	-0,6491
2945	1/32	0,1572	0,0503	3,1251	-0,6455	-0,6550

Cuadro 3.2: Estimador residual, error, índice de efectividad y tasas de convergencia.

acero o va disminuyendo a la mitad, se evidencia en los refinamientos uniformes en el dominio  $L$  y el dominio  $[-1, 1]^2$ , que el error es proporcional al estimador tipo residual, lo que es una evidencia numérica que el Teorema 3.3.1 se cumple, como podemos observar en las gráficas 3.6 y 3.7, además los indicadores de efectividad van dejando la evidencia de la existencia de la constante involucrada en el teorema 3.3.1.

### 3.4.2. Refinamiento adaptativo

Para desarrollar la estrategia adaptativa, hemos utilizado el siguiente pseudocódigo

---

**Algoritmo 3.2:** (Algoritmo adaptativo)

---

**Data:** Tol = Tolerancia del error,  $\xi$  = parametro de refinamieto.  
**Result:** Por cada refinamiento el error en la norma  $\|\cdot\|_1$  y  $\eta_R$ .

- 1 Para  $k = 1$
- 2 Cargue una malla inicial  $\Gamma_k$ .
- 3 Calculamos la solución numérica  $u_h$  en el espacio  $\mathcal{T}_k$ .
- 4 Calculamos el error entre  $u$  y  $u_h$  en la norma  $\|\cdot\|_1$ .
- 5 Calculamos  $\eta_{R,T}$  para todo  $T \in \mathcal{T}_k$ .
- 6 Calculamos  $\eta_R$ .
- 7 **if**  $\eta_R \leq Tol$  **then**
- 8 | Términe;
- 9 **else**
- 10 | **return** Calculamos  $\eta_{max} = \max\{\eta_{R,T} \mid T \in \mathcal{T}_k\}$ , refine cualquier  $T \in \mathcal{T}_k$  tal que  $\eta_{R,T} > \xi \cdot \eta_{max}$ , sea  $k = k + 1$  y retomar el paso (2).

---

Aplicamos el pseudocódigo 2 con la función  $u(r, \theta) = r^{2/3} \sin((2\theta)/3)$  y  $f = 0$  y comparando los resultados numéricos del error  $e = \|u - u_h\|_1$  y  $\eta_R$  obtenemos la figura 3.8

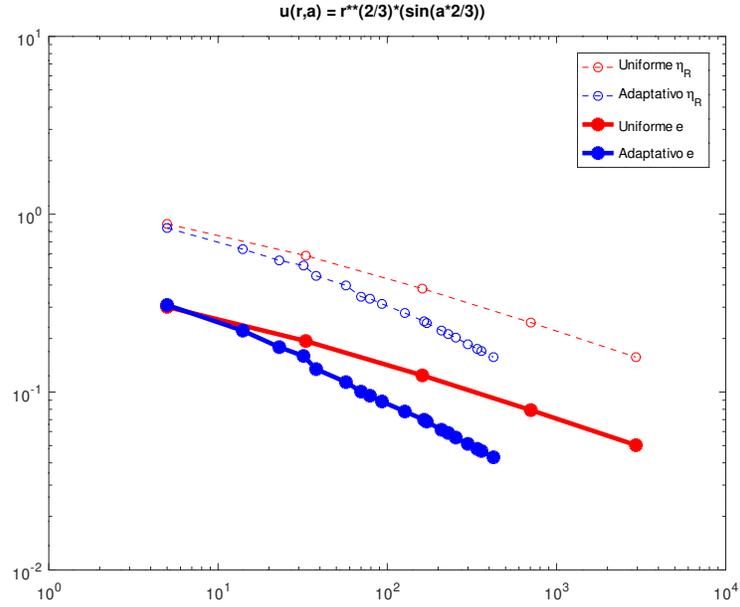


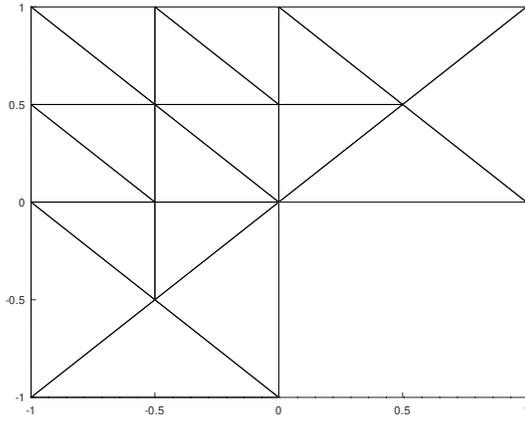
Figura 3.8: Representamos los resultados de las estrategia adaptativa y uniforme, grados de libertad vs el error y el estimador de error tipo residual.

N	$e$	$\eta_R$	$\theta = \eta_R/e$	$\theta_1$	$\theta_2$
5	0,3088	0,8369	2,7105		
14	0,2215	0,6362	2,8726	0,2664	0,3228
23	0,1789	0,5146	3,2259	0,2010	0,3457
38	0,1346	0,4503	3,3454	0,7767	0,9914
57	0,1138	0,3977	3,4958	0,3064	0,4141
70	0,1006	0,3436	3,4166	0,7118	0,6002
79	0,0954	0,3350	3,5121	0,2096	0,4388
93	0,0886	0,3132	3,5369	0,4125	0,4533
127	0,0778	0,2784	3,5809	0,3781	0,4172
165	0,0699	0,2500	3,5779	0,4111	0,4091
171	0,0683	0,2443	3,5820	0,6458	0,6483
209	0,0614	0,2218	3,6124	0,4815	0,5308
229	0,0590	0,2120	3,5979	0,4945	0,4363
254	0,0555	0,2025	3,6493	0,4425	0,5903
299	0,0512	0,1857	3,6301	0,5310	0,4945
340	0,0480	0,1750	3,6477	0,4619	0,5023
360	0,0467	0,1701	3,6456	0,4969	0,4804
424	0,0430	0,1572	3,6563	0,4820	0,5045

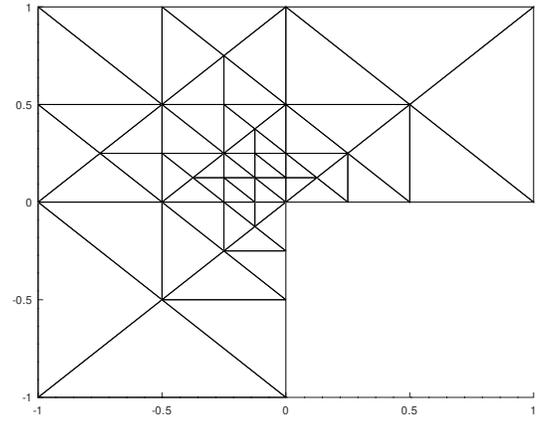
Cuadro 3.3: Error, estimador residual, índice de efectividad y tasas de convergencia, con parámetro  $\xi = 0,9$ .

Analicemos la figura 3.8, primeramente observemos el  $\eta_R$  obtenido por las estrategias de refinamiento uniforme y adaptativa, si nos centramos en la parte inferior de la gráfica entre el intervalo de 10 y 50 nodos, podemos ver que la estrategia adaptativa esta siendo muy similar a la estrategia uniforme,

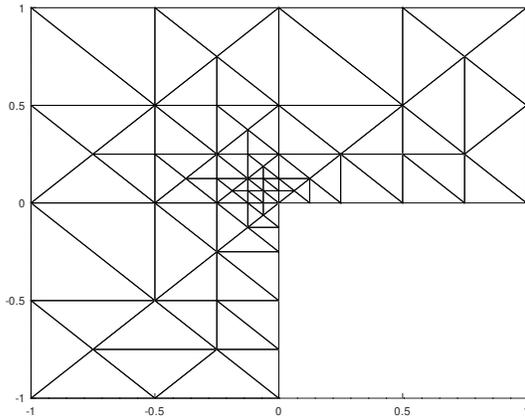
es decir necesitan casi la misma cantidad de grados de libertad, mientras que en el intervalo de 50 y 3000 grados de libertad se comienza a notar una gran diferencia entre ambas estrategias, ya que la estrategia adaptativa esta necesitando una cantidad de grados de libertad muy pequeña en comparación con la estrategia uniforme, observando los cuadros 3.2 y 3.3 con 424 grados de libertad o nodos libres la estrategia adaptativa da un  $\eta_R$  significativamente próximo a 0.1572 y la estrategia uniforme necesita 2945 grados de libertad para alcanzar un valor muy significativamente próximo a 0,1572, lo que va dejando gran evidencia, de que la estrategia adaptativa es más eficiente para estimar el valor de  $\eta_R$ . Ahora fijemos la mirada en el error obtenido por las estrategias adaptativa y uniforme, a simple vista las estrategias comienzan muy similares, pero a medida que se va refinando, la estrategia adaptativa muestra una mayor eficiencia. De la tabla 3.3 en las columnas correspondientes al valor de  $e$  y  $\eta_R$  se evidencia numéricamente que el estimador residual es paralelo al error  $e$ , mostrando un coeficiente de efectividad creciente en cada refinamiento, es decir se evidencia la constante  $c$  del Teorema 3.3.1, por cual podemos afirmar que numéricamente se cumple el Teorema 3.3.1.



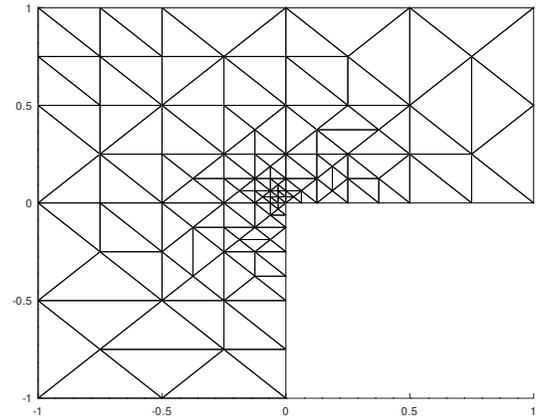
(i)  $N=5$



(ii)  $N=23$



(i)  $N=57$



(ii)  $N=79$

Cuadro 3.4: Secuencia de refinamiento adaptativo

En las secuencias anteriores podemos notar la selección de los elementos a refinar donde  $\eta_{R,T} > \xi \cdot \eta_{max}$ , de (i) a (ii) se pasa de 18 a 58 elementos, de (ii) a (iii) se pasa de 58 a 96 elementos y de (iii) a (iv) se pasa de 96 a 166 elementos acercándose cada vez mas a la singularidad de la función  $u(r, \theta)$ .

# Bibliografía

- [1] S.C. Brenner, L.R. Scott *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3<sup>a</sup> ed., USA: Springer, 2008.
- [2] D. Braess, *FINITE ELEMENTS Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory*, 3<sup>a</sup> ed., USA: Cambridge University Press, 2007.
- [3] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, New York: Springer, 2011.
- [4] M.S. Gockenbach, *Understanding and implementing the finite element method*, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2006.
- [5] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.
- [6] R. Verfürth, *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*, Oxford: Oxford University Press, 2013.