



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL  
PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE  
SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

Autor(es)

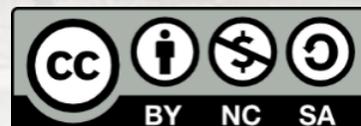
Andrés Esteban Castrillón Salas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ingeniería, Escuela Ambiental

Medellín, Colombia

2021



SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA  
CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN  
DIRECCIÓN VERTICAL

**Andrés Esteban Castrillón Salas**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Ingeniero Civil**

Asesores (a):

Roberto José Marín Sánchez Magister en Ingeniería

Línea de Investigación:

Geotecnia Aplicada

Grupo de Investigación:

Grupo de Investigación en Infraestructura GII

Universidad de Antioquia

Facultad de Ingeniería, Escuela Ambiental

Medellín, Colombia

2021.

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

## Agradecimientos

Quiero expresarles mis agradecimientos a todas aquellas personas que contribuyeron y colaboraron con el desarrollo del presente trabajo de grado, y de manera especial a:

A mis padres, quienes me dieron todo su apoyo para realizar mis estudios de pregrado y emprender un camino en la vida.

A mi director, el Magister Roberto José Marín Sánchez, por guiarme en mi último semestre de pregrado, sus valiosas enseñanzas, consejos y recomendaciones.

A la profesora Nora Elena Villegas Jiménez y a la monitora del Comité de Carrera de la Escuela Ambiental Liliana Macías Echeverri, quienes me brindaron su ayuda incondicional con todos los trámites administrativos propios del trabajo de grado.

A mis amigos Yonnattanth Fernando Pedraza Obando y Holman de Jesús Puerta Castro, quienes me brindaron su apoyo moral y ayuda económica en el momento en que más lo necesite.

Deseo manifestar finalmente toda mi gratitud a la Universidad de Antioquia por comprometerse con la formación integral del talento humano, y aportar a la transformación socioeconómica del país.

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

**Tabla de contenido**

<b>Listado de figuras .....</b>	<b>5</b>
<b>Listado de tablas .....</b>	<b>6</b>
<b>Listado de símbolos y abreviaturas.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Resumen .....</b>	<b>8</b>
<b>2. Introducción .....</b>	<b>9</b>
<b>3. Objetivo general.....</b>	<b>10</b>
<b>3.1. Objetivos específicos .....</b>	<b>10</b>
<b>4. Marco teórico.....</b>	<b>11</b>
<b>4.1. Consolidación de suelos .....</b>	<b>11</b>
4.1.1. Principios de consolidación.....	11
4.1.2. Tasa de consolidación .....	16
<b>4.2. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales.....</b>	<b>20</b>
4.2.1. Conceptos fundamentales .....	21
4.2.2. EDP lineales de segundo orden .....	23
4.2.3. El método de separación de variables (Farlow, 1993) .....	24
<b>4.3. Introducción al método de las diferencias finitas.....</b>	<b>31</b>
4.3.1. Diferencias finitas.....	32
4.3.2. Consistencia .....	37
4.3.3. Estabilidad.....	37
4.3.4. Métodos de discretización .....	45
4.3.4.1. Método Explícito Simple (Smith, 1985).....	46
4.3.4.2. Método Implícito Simple o método de Laasonen (Qin, 2010) .....	48
4.3.4.3. Método de Crank – Nicolson (Qin, 2010) .....	50
4.3.4.4. Método de Dufort – Frankel (Smith, 1985) .....	52
<b>5. Metodología.....</b>	<b>54</b>
<b>6. Descripción del caso de estudio .....</b>	<b>55</b>
<b>7. Resultados y análisis.....</b>	<b>56</b>
<b>7.1. Solución analítica .....</b>	<b>57</b>
<b>7.2. Solución numérica .....</b>	<b>60</b>
7.2.1. Método Explícito Simple.....	60
7.2.2. Método Implícito Simple o método de Laasonen.....	62
7.2.3. Método de Crank - Nicolson.....	65
7.2.4. Método de Dufort - Frankel .....	67
7.2.5. Análisis de la solución numérica .....	69
<b>8. Discusión.....</b>	<b>73</b>
<b>9. Conclusiones.....</b>	<b>75</b>
<b>10. Referencias Bibliográficas .....</b>	<b>77</b>

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

<b>11. Anexos.....</b>	<b>80</b>
11.1. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método explícito simple. ....	80
11.2. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método implícito simple o método de Laasonen. ....	82
11.3. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método de Crank - Nicolson.....	88
11.4. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método de Dufort - Frankel. ....	94

**Listado de figuras**

<b>Figura 1.</b> Modelo cilindro – resorte (Braja, 2015). ....	13
<b>Figura 2.</b> Variación del esfuerzo total, la presión de agua intersticial y el esfuerzo efectivo en una capa.....	16
<b>Figura 3.</b> (a) Capa de arcilla sometida a consolidación (b) Flujo de agua en el punto A durante el proceso de consolidación (Braja, 2015). ....	18
<b>Figura 4.</b> Flujo de calor unidimensional (DiPrima, 2000).....	22
<b>Figura 5.</b> Malla típica en el método de las diferencias finitas (Chung, 2002). ....	32
<b>Figura 6.</b> Variación esquemática del error de redondeo como función de $x$ (Chung, 2002). ....	40
<b>Figura 7.</b> Función seno (Chung, 2002). ....	42
<b>Figura 8.</b> (a) $\lambda = L$ (b) $\lambda = L/2$ (Chung, 2002).....	42
<b>Figura 9.</b> Longitudes de onda máxima y mínima para los componentes de la serie de Fourier del error de redondeo (Chung, 2002). ....	43
<b>Figura 10.</b> Estrato de suelo usado como caso de estudio (Braja, 2015). ....	56
<b>Figura 11.</b> Comportamiento del grado de consolidación en el estrato de suelo, obtenido por medio de la solución analítica. ....	59
<b>Figura 12.</b> Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método explícito simple. ....	62
<b>Figura 13.</b> Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método implícito simple. ....	64
<b>Figura 14.</b> Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método de Crank - Nicolson. ....	67
<b>Figura 15.</b> Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método de Dufort - Frankel.....	69

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

<b>Figura 16.</b> Variación del error relativo porcentual máximo en términos del factor tiempo para cada uno de los métodos de discretización en diferencias finitas. ....	71
<b>Figura 17.</b> Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con la solución analítica y los cuatro métodos de discretización en diferencias finitas para $Tv = 0.1$ . ....	72

### Listado de tablas

<b>Tabla 1.</b> Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio de la solución analítica.....	58
<b>Tabla 2.</b> Grado de consolidación, en %, obtenido por medio de la solución analítica.....	58
<b>Tabla 3.</b> Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método explícito simple. ....	60
<b>Tabla 4.</b> Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método explícito simple.....	61
<b>Tabla 5.</b> Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método explícito simple.....	61
<b>Tabla 6.</b> Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método implícito simple. ....	63
<b>Tabla 7.</b> Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método implícito simple.....	63
<b>Tabla 8.</b> Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método implícito simple.....	64
<b>Tabla 9.</b> Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método de Crank - Nicolson. ....	65
<b>Tabla 10.</b> Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método de Crank - Nicolson.....	66
<b>Tabla 11.</b> Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método de Crank - Nicolson.....	66
<b>Tabla 12.</b> Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método de Dufort - Frankel.....	67
<b>Tabla 13.</b> Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método de Dufort - Frankel. ....	68
<b>Tabla 14.</b> Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método de Dufort - Frankel. ....	68

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

**Listado de símbolos y abreviaturas**

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>	<b>Unidad</b>
$H$	Espesor del estrato de suelo. Máxima trayectoria recorrida por una partícula de agua.	$m$
$\Delta\sigma$	Aumento del esfuerzo total	$kPa$
$\Delta\sigma'$	Aumento del esfuerzo efectivo	$kPa$
$\Delta u$	Aumento de la presión de agua intersticial	$kPa$
$\gamma_w$	Peso unitario del agua	$kN/m^3$
$k_z$	Conductividad hidráulica del estrato de suelo en dirección vertical	$cm/s$
$u$	Presión en exceso de la hidrostática	$kPa$
$e$	relación de vacíos del estrato de suelo	
$V_s$	volumen de sólidos del estrato de suelo	$m^3$
$V_v$	Volumen de vacíos del estrato de suelo	$m^3$
$c_{vz}$	Coeficiente de consolidación vertical	$cm^2/s$
$T_v$	Factor tiempo	
$u(z, t)$	Presión en exceso a la hidrostática a una distancia $z$ en cualquier tiempo $t$ , obtenida por medio de la solución analítica	$kPa$
$U_z^t$	Grado de consolidación a una distancia $z$ en cualquier tiempo $t$ , obtenido por medio de la solución analítica	$\%$
$u_i^t$	Presión en exceso a la hidrostática a una distancia $z$ en cualquier tiempo $t$ , obtenida por medio de la solución numérica	$kPa$
$U_z^{t*}$	Grado de consolidación a una distancia $z$ en cualquier tiempo $t$ , obtenido por medio de la solución numérica	$\%$
EDP	Ecuación diferencial parcial	
BC	Condición de frontera	
IC	Condición inicial	
PVIF	Problema de valor inicial y de frontera	

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

## 1. Resumen

Este trabajo de grado presenta una solución numérica del problema de valor inicial y de frontera (PVIF) que describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical, empleando el método de las diferencias finitas. Se plantearon cuatro esquemas en diferencias finitas para resolver la ecuación diferencial parcial, dos de ellos explícitos (método explícito simple y método de Dufort-Frankel) y los otros dos implícitos (método implícito simple o método de Laasonen y método de Crank-Nicolson). Cada una de las soluciones numéricas obtenidas por los esquemas de diferencias finitas se comparó con la solución analítica del modelo matemático que describe el fenómeno; esta última se obtuvo empleando el método de separación de variables. El esquema de diferencia finita que mejor describe el fenómeno estudiado es el método de Crank – Nicolson.



# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

## 2. Introducción

Toda obra civil (pavimento, edificio, dique, etc.) necesita de un suelo sobre el cual se construirá la cimentación encargada de transmitirle la carga. Toda carga aplicada a un suelo fino genera un proceso de consolidación y asentamiento determinado; que debe ser estimado por parte del ingeniero geotecnista. Para tal fin, es usual aplicar un modelo unidimensional para el cálculo de asentamientos. Sin embargo, el comportamiento real del suelo va más allá de la respuesta unidimensional y las soluciones al problema de asentamiento requieren otro tipo de soluciones que involucren aplicaciones en ingeniería.

La complejidad de los problemas relacionados con suelos, involucra muchas variables inherentes a los suelos, a la estructura que se coloca sobre él y a las condiciones de frontera que se presenten en el caso de estudio. Recientemente, se ha utilizado la modelación numérica como una alternativa de solución para los sistemas con numerosas variables y fronteras, lo que facilita, no solo la resolución de un problema en particular, sino también la posibilidad de estudiar otro tipo de escenarios.

Este trabajo, pretende dar una solución numérica al modelo matemático que describe el fenómeno de consolidación unidimensional de suelos con flujo de agua en dirección vertical usando el método de las diferencias finitas. Una vez encontrada la solución numérica, se aplicará a un problema de drenaje vertical en suelos, y posteriormente se compara con la solución analítica encontrada para este.

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

## 3. Objetivo general

Desarrollar una solución numérica al problema de valor inicial y de frontera (PVIF) que describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical, mediante el método de las diferencias finitas.

### 3.1. Objetivos específicos

- Plantear un modelo matemático y analítico que permita resolver un problema de consolidación unidimensional de suelos con flujo de agua en dirección vertical, a partir de una serie de condiciones iniciales y de frontera.
- Aplicar el método de las diferencias finitas planteada en un caso práctico de la ingeniería, en particular del fenómeno de la consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical, referenciada en la literatura técnica o en alguna fuente académica.
- Analizar el exceso de presión hidrostática y el grado de consolidación en función de la dirección vertical para el estrato de suelo, bajo un tiempo dado, obtenidos de la solución analítica y numérica planteadas.
- Comparar cuantitativamente los esquemas en diferencias finitas con la solución analítica existente del fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical.

## 4. Marco teórico

### 4.1. Consolidación de suelos

Un aumento de esfuerzo causado por la construcción de cimientos u otras cargas comprime las capas de suelo. La compresión es causada principalmente por la deformación de partículas del suelo, la reorientación de estas y la expulsión de aire o agua de los espacios vacíos. En general, el asentamiento del suelo causado por la carga puede dividirse en dos amplias categorías (Biot, 1941):

**1. Asentamiento elástico**, que es causado por la deformación elástica del suelo seco y de los suelos húmedos y saturados sin ningún cambio en el contenido de humedad. Los cálculos de los asentamientos elásticos se basan generalmente en ecuaciones derivadas de la teoría de la elasticidad.

**2. Asentamiento de consolidación**, que es el resultado del cambio de volumen en un suelo cohesivo saturado debido a la expulsión de agua intersticial. El asentamiento de consolidación es dependiente del tiempo.

#### 4.1.1. Principios de consolidación

Cuando una capa de suelo saturado se somete a un aumento del esfuerzo, la presión del agua intersticial se incrementa repentinamente. En los suelos arenosos que son altamente permeables, el drenaje causado por el aumento en la presión de agua intersticial se completa inmediatamente. Este drenaje de agua intersticial se acompaña de una reducción en el volumen de la masa de suelo, lo que se traduce en asentamiento. Debido al rápido drenaje del agua intersticial en suelos arenosos, el asentamiento elástico y de consolidación ocurren simultáneamente (Barron, 1948).

Cuando una capa de arcilla compresible saturada se somete a un aumento del esfuerzo, el asentamiento elástico se produce inmediatamente. Debido a que la conductividad hidráulica de la arcilla es significativamente menor que la de la arena, el exceso de presión de poros generado por la carga se disipa gradualmente durante un largo periodo. Por lo tanto, el cambio de volumen asociado en la arcilla puede continuar por mucho tiempo después del asentamiento elástico. El asentamiento causado por consolidación en arcilla puede ser varias veces mayor que el asentamiento elástico. La deformación dependiente del tiempo de suelo arcilloso saturado puede

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

entenderse mejor teniendo en cuenta un modelo simple que consiste en un cilindro con un resorte en su centro (Terzaghi, 1925).

Sea el área dentro de la sección transversal del cilindro igual a  $A$ . El cilindro está lleno de agua y tiene un pistón impermeable sin fricción unido a un resorte y una válvula, como se muestra en la Figura 1a. En este momento, si colocamos una carga  $P$  sobre el pistón (Figura 1b) y mantenemos la válvula cerrada, toda la carga será tomada por el agua en el cilindro porque el agua es incompresible. El resorte no pasará por ninguna deformación. El exceso de presión hidrostática en este momento se puede dar como

$$\Delta u = \frac{P}{A} \quad (4.1)$$

Este valor se puede observar en el indicador de presión unido al cilindro.

En general, la carga  $P$  que se coloca sobre el pistón se puede expresar como

$$P = P_s + P_w \quad (4.2)$$

donde  $P_s$  corresponde a la carga soportada por el resorte y  $P_w$  a la carga transportada por el agua. De la discusión anterior, podemos ver que cuando la válvula se cierra después de la colocación de la carga  $P$ ,

$$P_s = 0 \text{ y } P_w = P.$$

Ahora, si se abre la válvula, el agua fluirá hacia el exterior (Figura 1c). Este flujo se acompaña de una reducción de la presión hidrostática y un aumento en la compresión del resorte. Por lo tanto, en este momento la ecuación  $P = P_s + P_w$  (4.2) se mantendrá. Sin embargo,

$$P_s > 0 \text{ y } P_w < P.$$

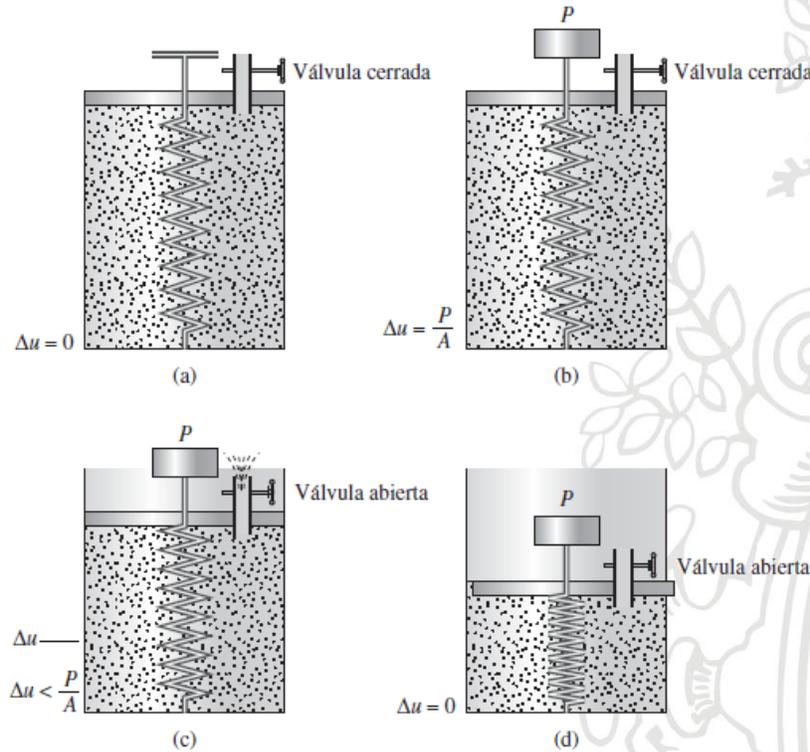
Después de algún tiempo el exceso de presión hidrostática se convertirá en cero y el sistema alcanzará un estado de equilibrio, como se muestra en la Figura 1d. Ahora podemos escribir

$$P_s = P \text{ y } P_w = 0$$

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

y

$$P = P_s + P_w.$$



**Figura 1.** Modelo cilindro – resorte (Braja, 2015).

Con esto en mente, podemos analizar la deformación de una capa de arcilla saturada sometida a un aumento del esfuerzo (Figura 2a). Consideremos el caso en el que una capa de arcilla saturada de espesor  $H$  que está confinada entre dos capas de arena está siendo sometida a un aumento instantáneo del esfuerzo total  $\Delta\sigma$ . Este incremento del esfuerzo total se transmitirá al agua intersticial y a los sólidos del suelo. Esto significa que el esfuerzo total,  $\Delta\sigma$ , se divide en alguna proporción entre el esfuerzo efectivo y la presión en exceso de la hidrostática. El cambio en el comportamiento del esfuerzo efectivo será similar al del resorte en la Figura 1, y el cambio en el comportamiento de la presión del agua intersticial será similar al de la presión en exceso de la hidrostática de la Figura 1. A partir del principio del esfuerzo efectivo, se deduce que

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u \quad (4.3)$$

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

$\Delta\sigma'$  corresponde al aumento del esfuerzo efectivo y  $\Delta u$  al aumento de la presión de agua intersticial o presión en exceso de la hidrostática.

Dado que la arcilla tiene muy baja conductividad hidráulica y el agua es incompresible, en comparación con la estructura del suelo, en el tiempo  $t=0$  todo el aumento del esfuerzo  $\Delta\sigma$  será tomado por el agua, es decir  $\Delta\sigma = \Delta u$  en todas las profundidades (Figura 2b), y ninguno será llevado por la estructura del suelo, por lo que  $\Delta\sigma' = 0$ .

Después de la aplicación del esfuerzo incremental,  $\Delta\sigma$ , a la capa de arcilla, el agua intersticial comenzará a ser exprimida hacia fuera y drenará en ambas direcciones en las capas de arena. Por este proceso, el exceso de presión de agua intersticial a cualquier profundidad en la capa de arcilla disminuirá gradualmente y el esfuerzo transportado por los sólidos del suelo (esfuerzo efectivo) se incrementará. Por lo tanto, en el tiempo  $0 < t < \infty$ ,

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u \quad (\Delta\sigma' > 0 \text{ y } \Delta u < \Delta\sigma).$$

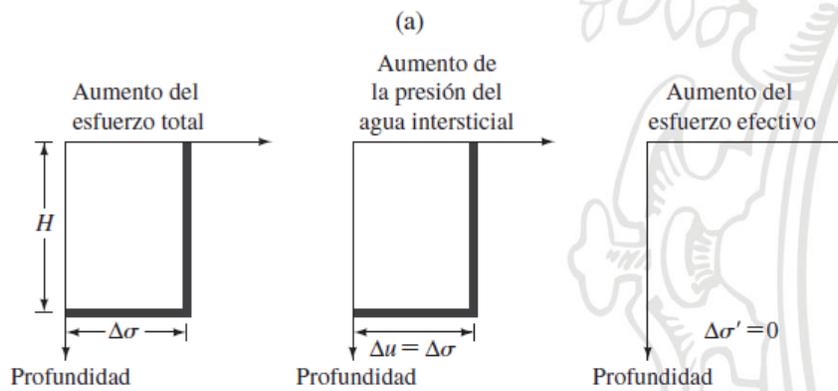
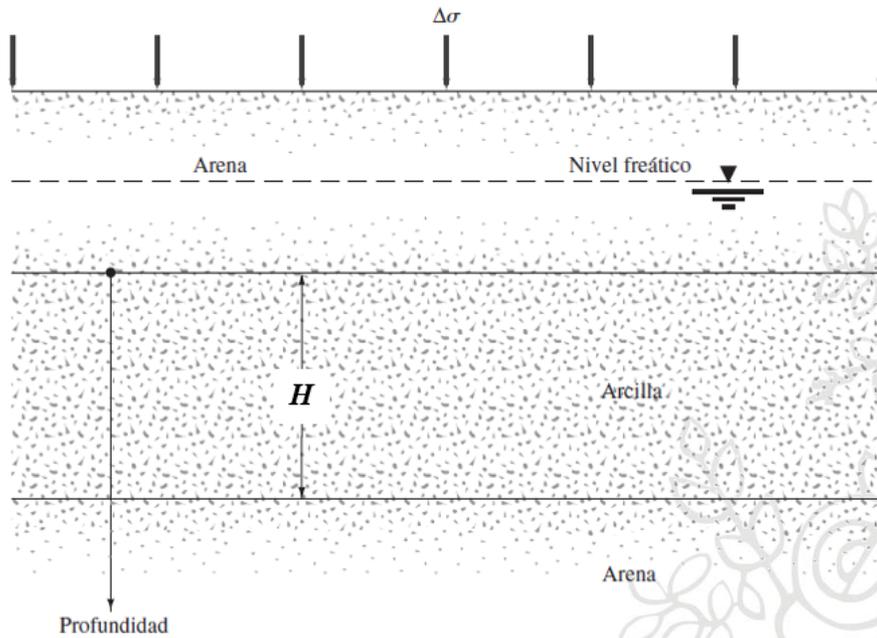
Sin embargo, la magnitud de  $\Delta\sigma'$  y  $\Delta u$  en varias profundidades va a cambiar (Figura 2c), dependiendo de la distancia mínima del patrón de drenaje de la capa de arena superior o inferior.

Teóricamente, en el tiempo  $t=\infty$  todo el exceso de presión del agua intersticial se disiparía por el drenaje de todos los puntos de la capa de arcilla, dando así  $\Delta u = 0$ . Entonces, el aumento del esfuerzo total  $\Delta\sigma$  se transportaría por la estructura del suelo (Figura 2d), por lo que

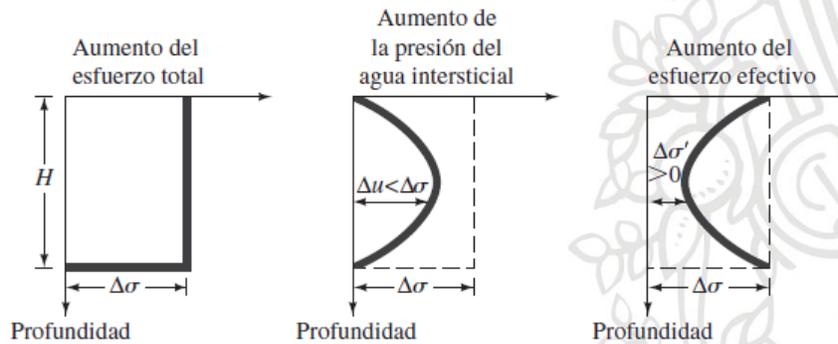
$$\Delta\sigma = \Delta\sigma'$$

Este proceso gradual de drenaje bajo la aplicación de una carga adicional y la transferencia del exceso de presión del agua intersticial asociada al esfuerzo efectivo provoca el asentamiento dependiente del tiempo en la capa de arcilla del suelo (Budhu, 2010).

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

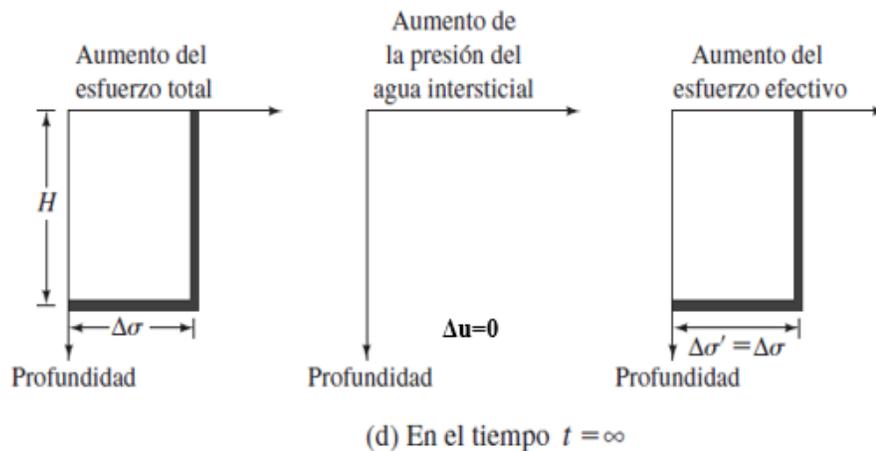


(b) En el tiempo  $t = 0$



(c) En el tiempo  $0 < t < \infty$

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL



**Figura 2.** Variación del esfuerzo total, la presión de agua intersticial y el esfuerzo efectivo en una capa de arcilla drenada en la parte superior y la parte inferior como resultado de un aumento en el esfuerzo total  $\Delta\sigma$  (Brajá, 2015) .

### 4.1.2. Tasa de consolidación

(Terzaghi, 1925) propuso la primera teoría para considerar la tasa de consolidación unidimensional de suelos arcillosos saturados. La deducción del modelo matemático que gobierna este fenómeno se basa en los siguientes supuestos:

1. El sistema arcilla-agua es homogéneo.
2. La saturación es completa.
3. La compresibilidad del agua es insignificante.
4. La compresibilidad de los granos del suelo es insignificante (pero reorganiza los granos del suelo).
5. El flujo de agua es en dirección vertical (es decir, en la dirección de compresión).
6. La ley de Darcy es válida.

La Figura 3a muestra una capa de arcilla de espesor  $H$  situada entre una capa de arena altamente permeable (capa superior) y una capa de roca impermeable (capa inferior). Si la capa de arcilla se somete a un aumento de la presión  $\Delta\sigma$ , la presión del agua intersticial en cualquier punto A en la capa de arcilla se incrementará. Para la consolidación unidimensional, el agua es exprimida en dirección vertical hacia la capa de arena.

La Figura 3b muestra el flujo de agua a través de un elemento diferencial en el punto A. Para el elemento de suelo que se muestra,

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

(tasa de pérdida de agua) – (tasa de afluencia de agua) = (tasa de cambio de volumen)

Por lo tanto,

$$\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz\right) dx dy - v_z dx dy = \frac{\partial V}{\partial t}$$

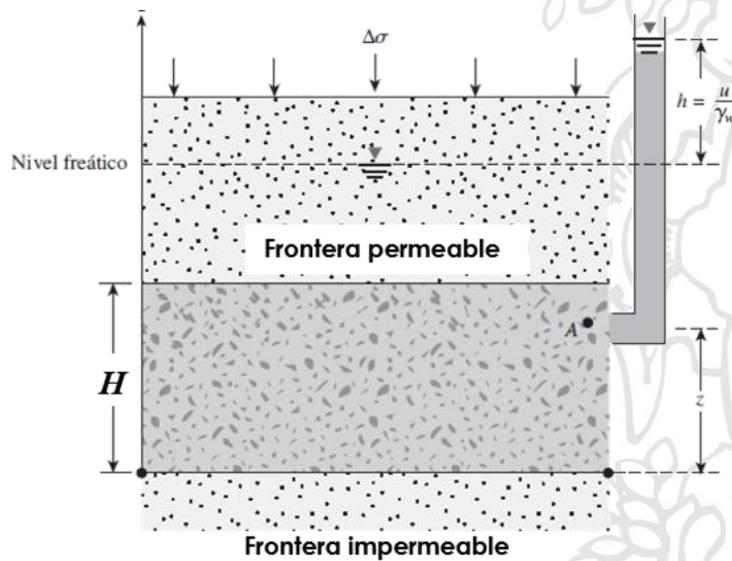
o

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (4.4)$$

donde

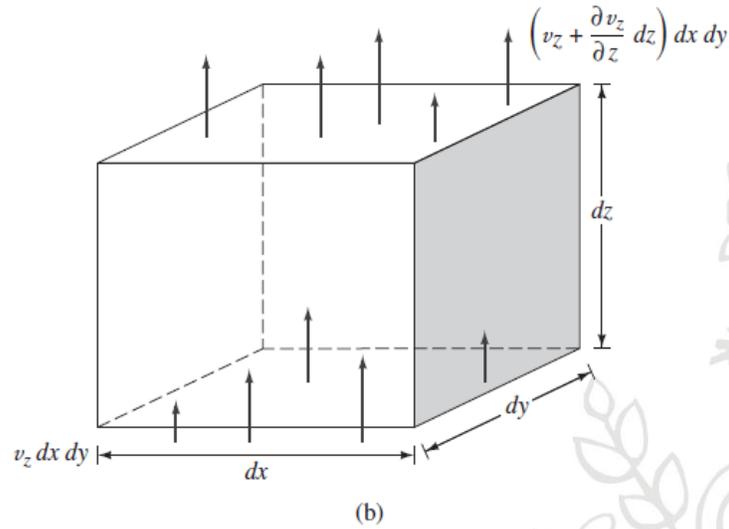
$V$ : volumen del elemento diferencial de suelo

$v_z$ : velocidad del flujo en la dirección vertical (dirección  $z$ ).



(a)

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**



**Figura 3.** (a) Capa de arcilla sometida a consolidación (b) Flujo de agua en el punto A durante el proceso de consolidación (Braja, 2015).

Usando la ley de Darcy, se obtiene

$$v_z = k_z i = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.5)$$

donde

$\gamma_w$ : peso unitario del agua

$k_z$ : conductividad hidráulica del estrato de suelo en dirección vertical

$u$ : presión en exceso de la hidrostática.

De las ecuaciones (4.4) y (4.5) obtenemos

$$-\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (4.6)$$

Durante la consolidación, la tasa de cambio en el volumen del elemento de suelo es igual a la tasa de cambio en el volumen de vacíos. Así

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_v}{\partial t} = \frac{\partial (V_s + eV_s)}{\partial t} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial V_s}{\partial t} \quad (4.7)$$

donde

$e$ : relación de vacíos del estrato de suelo

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

$V_s$ : volumen de sólidos del estrato de suelo

$V_v$ : volumen de vacíos del estrato de suelo.

Debido a que los sólidos del suelo son incompresibles,

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$$

y

$$V_s = \frac{V}{1+e_0} = \frac{dx dy dz}{1+e_0}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la ecuación (4.7) se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1+e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (4.8)$$

donde  $e_0$  corresponde a la relación de vacíos inicial. Combinando las ecuaciones (4.6) y (4.8) se obtiene

$$-\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (4.9)$$

El cambio en la relación de vacíos es causado por el aumento del esfuerzo efectivo (es decir, la disminución de la presión en exceso de la hidrostática). Suponiendo que esos valores están relacionados linealmente (Barron, 1948), tenemos

$$\partial e = a_v \partial(\Delta\sigma') = -a_v \partial u \quad (4.10)$$

$a_v$  se define como el coeficiente de compresibilidad y puede ser considerado constante para un estrecho rango de aumento en la presión efectiva.

Combinando las ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtiene

$$-\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{a_v}{1+e_0} \frac{\partial u}{\partial t} = -m_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.11)$$

La constante  $m_v = \frac{a_v}{1+e_0}$  se define como el coeficiente de compresibilidad del volumen.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

Reemplazando  $c_{vz} = \frac{k_z}{\gamma_w m_v}$  en la ecuación (4.11) se obtiene la ecuación diferencial básica de la teoría de consolidación de Terzaghi, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.12)$$

A la constante  $c_{vz}$  se le denomina el coeficiente de consolidación en dirección vertical o simplemente coeficiente de consolidación, y físicamente permite cuantificar la velocidad a la cual se consolida una masa de suelo sometida a un aumento de presión, en la que no se ha disipado por completo la presión intersticial del agua.

Por lo tanto el modelo matemático de valor inicial y de frontera (PVIF) que gobierna la consolidación de una masa de suelo con flujo de agua en dirección vertical, sometida a un aumento de la carga y drenada solo por la cara superior (fronteras superior permeable e inferior impermeable) viene dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \text{ para } 0 < z < H, t > 0$$

sujeto a

$$\text{Condiciones de frontera (BC): } u(H, t) = 0 \text{ y } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \text{ para } t > 0$$

$$\text{Condición inicial (IC): } u(z, 0) = \Delta\sigma \text{ para } 0 < z < H$$

$u(z, t)$  representa la presión en exceso de la hidrostática en la masa de suelo para una profundidad  $z$  en un tiempo  $t$ . La profundidad  $z$  se mide desde la frontera impermeable ( $z=0$ ) hacia la frontera permeable ( $z=H$ ).

### 4.2. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

Actualmente la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es uno de los campos más importantes de estudio de las matemáticas, ya que estas ecuaciones aparecen frecuentemente en muchas ramas de la física y de la ingeniería, así como de otras ciencias.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

En muchas formulaciones de modelos matemáticos se utilizan derivadas parciales para representar cantidades físicas. Estas derivadas siempre dependen de más de una variable independiente, generalmente las variables espacio  $x$ ,  $y$  o  $z$  y la variable tiempo  $t$ . Tales formulaciones tienen una o más variables dependientes, que son funciones desconocidas de las variables independientes. Las ecuaciones resultantes se llaman ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que junto con condiciones iniciales y de contorno, representan fenómenos físicos.

### 4.2.1. Conceptos fundamentales

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes. Por ejemplo, si  $u$  es una función de las variables independientes  $x$  e  $y$ , toda ecuación que contenga  $\partial u/\partial x$  o  $\partial u/\partial y$ , o derivadas de orden superior, y también a  $u$ ,  $x$  o  $y$ , es una EDP. Algunos ejemplos importantes de las ciencias físicas son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \text{Ecuación unidimensional de onda.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \text{Ecuación unidimensional de calor.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 : \text{Ecuación bidimensional de Laplace.}$$

En las dos primeras EDP, la función incógnita  $u$  es una función de la coordenada  $x$  y del tiempo  $t$ , es decir,  $u = u(x, t)$ , mientras que en la tercera EDP, la función  $u$  depende de las coordenadas  $x$  y  $y$ , es decir,  $u = u(x, y)$ .

Llamamos orden de una EDP a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. En los ejemplos anteriores todas las EDP son de segundo orden.

Una solución de una EDP es una relación explícita o implícita entre las variables que no contiene derivadas y satisface idénticamente la ecuación. En general, la solución de una EDP contiene un cierto número de funciones arbitrarias, a menudo  $n$  funciones para una ecuación de orden  $n$ .

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

La naturaleza de un problema típico que se refiere a una EDP y que se origina en la formulación matemática de algún problema físico consta no solo de la propia ecuación diferencial, sino también de ciertas condiciones complementarias, denominadas condiciones de frontera (BC) y condiciones iniciales (IC). El número y naturaleza de estas condiciones depende de la naturaleza del problema físico originado. La solución del problema ha de satisfacer tanto la ecuación diferencial como las condiciones de frontera e iniciales. En otras palabras, la solución del problema completo es una solución particular de la EDP del problema (DiPrima, 2000).

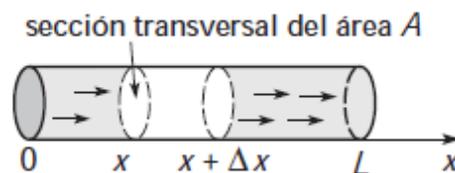
Si  $u$  representa la variable dependiente, en una de las fronteras del problema físico, podemos especificar el valor de uno de los siguientes formatos:

i)  $u$

ii)  $\frac{\partial u}{\partial n}$

Aquí  $\partial u/\partial n$  expresa la derivada normal de  $u$  (la derivada direccional de  $u$  en la dirección perpendicular a la frontera). Una condición de frontera del tipo i) se denomina condición de Dirichlet; una condición de frontera del tipo ii) se llama condición de Neumann.

Por ejemplo en la Figura 4 se muestra una varilla circular delgada de longitud  $L$  la cual tiene área transversal  $A$  y coincide con el eje  $x$  en el intervalo  $[0, L]$ . Supongamos que dentro de la varilla el flujo de calor tiene lugar solo en la dirección  $x$  y la temperatura puede ser descrita por una función  $u(x, t)$ . Por lo tanto, para  $t > 0$ , una condición típica en el extremo izquierdo  $x=0$  de la varilla puede ser  $u(0, t) = u_0$  y una condición de frontera para el extremo derecho  $x=L$  se puede escribir como  $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0$ . La primera de estas condiciones establece que la frontera  $x=0$  se conserva de alguna manera a temperatura constante  $u_0$  y corresponde a una condición de Dirichlet. La segunda de estas condiciones establece que la frontera  $x=L$  está aislada y corresponde a una condición de Neumann.



**Figura 4.** Flujo de calor unidimensional (DiPrima, 2000).

#### 4.2.2. EDP lineales de segundo orden

Si establecemos que  $u$  denota la variable dependiente, y  $x$  y  $y$  las variables independientes, entonces una EDP lineal de segundo orden es una ecuación de la forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (4.13)$$

donde  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  representan funciones de  $x$  y  $y$ . Cuando  $G(x, y) = 0$ , se dice que la EDP es homogénea; de otra forma es no homogénea.

Por ejemplo, las ecuaciones lineales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

Son homogénea y no homogénea, respectivamente.

El principio de superposición establece que si  $u_1, u_2, \dots, u_k$  son las soluciones de una EDP lineal de segundo orden homogénea, entonces la combinación lineal

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k$$

donde las  $c_i, i=1, 2, \dots, k$  son constantes, es también una solución.

De acuerdo con lo anterior, siempre que tengamos un conjunto infinito  $u_1, u_2, u_3, \dots$  de soluciones de una ecuación lineal homogénea, podremos construir otra solución  $u$  formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

donde las  $c_k, k=1, 2, 3, \dots$  son constantes.

Una EDP lineal de segundo orden homogénea en dos variables independientes con puede clasificarse como uno de tres tipos. Esta clasificación surge por su analogía con la ecuación de las cónicas en el

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

plano y depende solamente de las funciones  $A$ ,  $B$  y  $C$  que acompañan a las derivadas de segundo orden.

Supongamos que  $A$ ,  $B$  y  $C$  no se anulan simultáneamente, entonces la EDP lineal de segundo orden homogénea

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

se dice que es

$$\begin{aligned} &\text{hiperbólica si } B^2 - 4AC > 0 \\ &\text{parabólica si } B^2 - 4AC = 0 \\ &\text{elíptica si } B^2 - 4AC < 0 \end{aligned}$$

Por ejemplo en la ecuación unidimensional de calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $A=1$ ,  $B=0$  y  $C=0$ , por lo que  $B^2 - 4AC = 0$ , y por consiguiente la EDP es parabólica.

Esta clasificación puramente matemática se relaciona con una división global de los fenómenos físicos que se describen mediante tales ecuaciones, a saber: procesos vibratorios (ecuaciones hiperbólicas), estacionarios (ecuaciones elípticas), o de difusión (ecuaciones parabólicas). Es por ello que las soluciones de cada uno de los tipos de ecuaciones tienen particularidades que le son específicas. Por ejemplo, las ecuaciones hiperbólicas se caracterizan por poseer soluciones en forma de ondas que se desplazan con una velocidad finita. Las ecuaciones elípticas poseen soluciones suaves (infinitamente diferenciables) y las ecuaciones parabólicas, en cierto sentido, tienen propiedades intermedias entre las hiperbólicas y las elípticas (Farlow, 1993).

### 4.2.3. El método de separación de variables (Farlow, 1993)

Si una EDP con dos o más variables independientes puede reducirse a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), una para cada variable, la ecuación se dice separable. Las soluciones de la EDP son entonces los productos de las soluciones de las EDO.

En esta sección aplicaremos el *método de separación de variables* para obtener una solución analítica al PVIF que gobierna la consolidación de una masa de suelo con flujo de agua en dirección vertical. Este es un método

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

fundamental y potente para obtener soluciones de ciertos problemas que implican EDP, y aunque la clase de problemas a los que se puede aplicar este método es relativamente limitada, incluye no obstante muchos casos de gran interés físico.

El desarrollo del método requiere conectar con dos clases importantes de problemas, que históricamente surgieron precisamente de él. Estos son el problema regular de Sturm-Liouville y el problema de representación de una función en forma de serie trigonométrica, a dichas series trigonométricas se les denomina series de Fourier; el estudio detallado de estos se escapa de los objetivos de este trabajo y el lector interesado en profundizar acerca de tales problemas puede consultar (DiPrima, 2000).

Si suponemos, por ejemplo, una EDP con una sola variable dependiente  $u$  que es una función de dos variables independientes  $x$  e  $y$ , la idea del método consiste en buscar una solución particular de la EDP lineal homogénea de segundo orden en forma del producto de una función de  $x$  y una función de  $y$ , es decir  $u(x, y) = X(x).Y(y)$ .

Con este objetivo en mente, podemos observar, por ejemplo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

donde las primas expresan la diferenciación ordinaria.

En el caso en que sea aplicable este método, su aplicación lleva cuatro pasos:

1. Obtención de las dos EDO.
2. Obtención de la solución de las dos EDO que cumplan las condiciones de frontera.
3. Formulación de una combinación lineal infinita de soluciones para satisfacer las condiciones iniciales del problema. Este paso está sustentado en el principio de superposición.
4. Obtener una solución que sea una serie, aplicándose después las condiciones iniciales del problema.

Se puede demostrar que la solución obtenida a partir del método descrito satisface realmente tanto la EDP como las condiciones iniciales y de frontera, y además es la única solución del PVIF.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

A continuación aplicaremos este método para obtener una solución al PVIF

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \text{ para } 0 < z < H, t > 0 \quad \text{(EDP)}$$

sujeto a

$$\text{Condiciones de frontera (BC): } u(H, t) = 0 \quad \text{(BC1)} \text{ y } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{(BC2)} \text{ para } t > 0$$

$$\text{Condición inicial (IC): } u(z, 0) = \Delta\sigma \quad \text{(IC)} \text{ para } 0 < z < H$$

el cual describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical. Dicho modelo matemático representa una ecuación diferencial parcial parabólica lineal de segundo orden, con condiciones de frontera tipo Dirichlet (BC1) y Neumann (BC2).

Para obtener una solución del PVIF supongamos una solución de la forma  $u(z, t) = Z(z)T(t)$ . Al sustituir esta expresión en la (EDP) obtenemos

$$ZT' = c_{vz}Z''T$$

o bien,

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{T'}{c_{vz}T}$$

Debido a que el miembro izquierdo de la última ecuación es independiente de  $t$  y es igual al miembro derecho, que es independiente de  $z$ , concluimos que ambos miembros de la ecuación son independientes de  $z$  y de  $t$ . En otras palabras, cada miembro de la ecuación deber ser constante. Para fines prácticos, resulta conveniente escribir esta constante como  $-\lambda$ , la cual se denomina constante de separación. Por lo tanto a partir de las dos igualdades,

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{T'}{c_{vz}T} = -\lambda$$

obtenemos las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN  
UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$T' + \lambda c_{vz} T = 0 \quad (4.14)$$

$$Z'' + \lambda Z = 0 \quad (4.15)$$

Ahora bien, la ecuación (4.14) corresponde a una EDO lineal de primer orden, cuyo factor integrante es  $\mu(t) = e^{\lambda c_{vz} t}$ . Multiplicando esta expresión a ambos lados de la EDO se obtiene

$$\frac{d(Te^{\lambda c_{vz} t})}{dt} = 0$$

Integrando ambos lados con respecto a  $t$  se llega finalmente a

$$Te^{\lambda c_{vz} t} = A$$

o bien,

$$T(t) = Ae^{-\lambda c_{vz} t} \quad (4.16)$$

La ecuación (4.16) corresponde a la solución general de la ecuación (4.17).

Por otro lado, aplicando las condiciones de frontera (BC1) y (BC2) en  $u(z, t) = Z(z)T(t)$ , se llega a

$$u(H, t) = Z(H)T(t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = Z'(0)T(t) = 0$$

Como  $T(t) > 0$  para todo  $t > 0$ , entonces se debe cumplir que

$$Z(H) = 0 \quad \text{y} \quad Z'(0) = 0.$$

Estas condiciones de frontera homogéneas (debido a que son iguales a cero), junto con la ecuación diferencial ordinaria homogénea (4.15) constituye un problema regular de Sturm-Liouville,

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(H) = 0, \quad Z'(0) = 0 \quad (4.18)$$

Notemos que la función  $Z(z) = 0$  es una solución para todo  $\lambda$  y, dependiendo de la elección de este valor, esta puede ser la única solución

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

del problema de valor en la frontera (4.17). Así que si se busca una solución no trivial  $Z(z)$ , primero se deben determinar aquellos valores de  $\lambda$  para los cuales el problema (4.17) tiene una solución no trivial. Dichos valores especiales de  $\lambda$  se denominan valores propios, y las correspondientes soluciones no triviales funciones propias.

Para resolver el problema (4.17), se plantea la ecuación auxiliar  $m^2 + \lambda = 0$  asociada a la EDO lineal homogénea de segundo orden y se consideran tres casos:

**Caso 1:**  $\lambda < 0$ . Por conveniencia sea  $\lambda = -\alpha^2$  para algún  $\alpha > 0$ . Las raíces de la ecuación auxiliar son  $m = \pm\alpha$ , de modo que la solución general de la EDO (4.19) es

$$Z(z) = B_1 \cosh(\alpha z) + B_2 \sinh(\alpha z).$$

Para determinar  $B_1$  y  $B_2$ , recurrimos a las condiciones de frontera  $Z(H) = 0$  y  $Z'(0) = 0$ . De la segunda condición, obtenemos

$$Z'(0) = \alpha B_1 \sinh(\alpha 0) + \alpha B_2 \cosh(\alpha 0) = 0$$

de donde  $B_2 = 0$ . De la primera condición y el resultado obtenido, se sigue que

$$Z(H) = B_1 \cosh(\alpha H) = 0,$$

como  $\cosh(\alpha H) \neq 0$  para todo  $\alpha$ , entonces  $B_1 = 0$ . Por lo tanto  $B_1$  y  $B_2$  son iguales a cero y en consecuencia no existe solución no trivial del problema (4.20) para el caso en el cual  $\lambda < 0$ .

**Caso 2:**  $\lambda = 0$ . La única raíz de la ecuación auxiliar es  $m = 0$ , de multiplicidad dos. Entonces la solución general de la EDO (4.21) es

$$Z(z) = B_1 + B_2 z.$$

Aplicando la condición de frontera  $Z'(0) = 0$  se obtiene

$$Z'(0) = B_2 = 0.$$

Usando el resultado anterior y la condición de frontera  $Z(H) = 0$ , se sigue que

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$Z(H) = B_1 = 0$$

Por lo tanto  $B_1$  y  $B_2$  son iguales a cero y por consiguiente no existe solución no trivial del problema (4.22) para el caso en el cual  $\lambda = 0$ .

**Caso 3:**  $\lambda > 0$ . Por conveniencia sea  $\lambda = \alpha^2$  para algún  $\alpha > 0$ . Las raíces de la ecuación auxiliar son  $m = \pm \alpha i$ , siendo  $i$  la unidad imaginaria, de modo que la solución general de la EDO es

$$Z(z) = B_1 \cos(\alpha z) + B_2 \operatorname{sen}(\alpha z).$$

De acuerdo con la condición de frontera  $Z'(0) = 0$ , se obtiene

$$Z'(0) = -\alpha B_1 \operatorname{sen}(\alpha 0) + \alpha B_2 \cos(\alpha 0) = 0,$$

de donde  $B_2 = 0$ .

Ahora bien, aplicando la condición de frontera  $Z(H) = 0$  y el resultado obtenido, se sigue que

$$Z(H) = B_1 \cos(\alpha H) = 0,$$

Para obtener una solución no trivial del problema, requerimos que  $B_1 \neq 0$  y

$$\cos(\alpha H) = 0,$$

lo cual se cumple cuando

$$\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2H} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por consiguiente, el problema regular de Sturm-Liouville tiene una solución no trivial cuando  $\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4H^2}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , por lo que las funciones propias (soluciones no triviales) correspondientes al valor propio  $\lambda_n$  están dadas por

$$Z_n(z) = B_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right) \quad (4.23)$$

Combinando las soluciones generales (4.16) y (4.18), se obtiene la función

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$u_n(z, t) = C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4H^2} c_{vz} t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde  $C_n$  es una constante arbitraria. Señalemos que cada de estas funciones  $u_n$  satisface tanto la (EDP) como las dos condiciones de contorno (BC1) y (BC2) para todo valor de la constante  $C_n$ .

Ahora hemos de encontrar una solución particular del PVIF (hallar el valor de la constante  $C_n$ , para ello debemos satisfacer la condición inicial (IC), es decir

$$u_n(z, 0) = C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right) = \Delta\sigma \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

y lo anterior evidentemente imposible, a menos que  $\Delta\sigma$  sea función cosenoidal, lo cual evidentemente no se cumple. Por lo tanto de acuerdo con el principio de superposición y suponiendo la convergencia apropiada, una serie infinita de soluciones de la EDP del problema original también es una solución. Formamos entonces una serie infinita de las soluciones  $u_n(z, t)$

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4H^2} c_{vz} t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right) \quad (4.24)$$

Aplicamos ahora la condición inicial a la solución (4.19)

$$u(z, 0) = \Delta\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right)$$

Se puede reconocer que esta última expresión corresponde a una serie cosenoidal de Fourier (DiPrima, 2000). Los valores de  $C_n$  vienen dados por

$$C_n = \frac{2}{H} \int_0^H \Delta\sigma \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right) dz$$

o bien,

$$C_n = \frac{4\Delta\sigma}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

Concluimos que la solución analítica al PVIF el cual describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical está dada por la serie infinita

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\Delta\sigma}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} z\right) e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4H^2}c_v z t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H} z\right)$$

la cual se puede escribir como

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Delta\sigma}{M} e^{-M^2 T_v} \operatorname{sen}\left(M\left(1 - \frac{z}{H}\right)\right) \quad (4.25)$$

donde  $M = \frac{(2n+1)\pi}{2}$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , y  $T_v = \frac{c_v z t}{H^2}$  es una constante adimensional que depende de las cantidades físicas del complejo suelo-agua que determinan el proceso de consolidación y se denomina factor tiempo.

Debido a que la consolidación avanza por la disipación de la presión en exceso de la hidrostática, el grado de consolidación a una distancia  $z$  en cualquier tiempo  $t$  es

$$U_z^t = \frac{\Delta\sigma - u(z, t)}{\Delta\sigma}$$

y usando la solución (4.26), se llega finalmente a

$$U_z^t = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M} e^{-M^2 T_v} \operatorname{sen}\left(M\left(1 - \frac{z}{H}\right)\right) \quad (4.27)$$

### 4.3. Introducción al método de las diferencias finitas

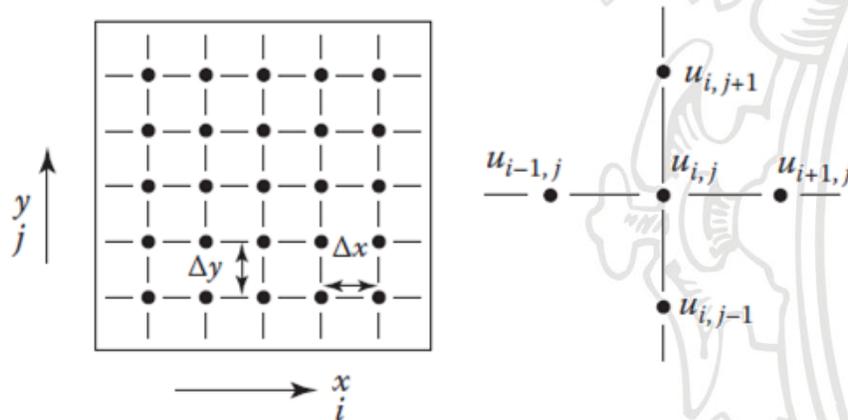
En análisis numérico, discretización es el proceso por medio del cual una expresión matemática tal como una función o una ecuación diferencial o integral, todas las cuales se consideran toman un conjunto infinito de valores a lo largo de algún dominio, se aproximan por medio de expresiones algebraicas análogas las cuales prescriben valores solo en un número finito de puntos discretos. En el método de las diferencias finitas, el dominio del problema continuo es discretizado, por lo que las variables dependientes se consideran que solo existen en puntos discretos. Las derivadas son aproximadas por cocientes en diferencias divididas, resultando en una representación algebraica de la ecuación diferencial parcial (EDP). Por lo

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

tanto un problema que pertenece al campo continuo, o al análisis real, se transforma en un problema algebraico (Smith, 1985).

### 4.3.1. Diferencias finitas

Uno de los primeros pasos que se deben considerar para resolver una EDP por medio del método de las diferencias finitas es reemplazar el dominio del problema continuo por una malla o cuadrícula conformada por un conjunto finito de puntos (malla de diferencias finitas). Como ejemplo, supongamos que deseamos resolver una EDP para la cual  $u(x,y)$  es la variable dependiente en el dominio cuadrado  $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Establezcamos una malla sobre este dominio reemplazando  $u(x,y)$  por  $u(i\Delta x, i\Delta y)$ . Los puntos son localizados de acuerdo a los valores de  $i$  y  $j$ , por lo que las ecuaciones en diferencias son escritas usualmente en términos del punto general  $(i,j)$  y sus vecinos. Lo anterior se ilustra en la Figura 5.



**Figura 5.** Malla típica en el método de las diferencias finitas (Chung, 2002).

Por lo tanto, si pensamos en  $u_{i,j}$  como  $u(x_0, y_0)$ , entonces

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, y_0 + \Delta y)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, y_0)$$

$$u_{i,j-1} = u(x_0, y_0 - \Delta y).$$

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

A menudo en el tratamiento de problemas que dependen del tiempo, la variación de la coordenada temporal es indicada por un superíndice, tal como  $u_j^{t+1}$ , más que un subíndice. Muchas representaciones son posibles para una EDP dada, y es usualmente imposible establecer la mejor sobre una base absoluta. Primero, la exactitud de un esquema en diferencia finita puede depender de la forma exacta de la ecuación y el problema a resolver, y segundo, nuestra selección de un mejor esquema será influenciada por el procedimiento que se está intentando optimizar, estos es, exactitud, economía y simplicidad computacional (Mudge et al., 2000).

La idea de una representación en diferencia finita para una derivada puede ser introducida si recordamos la definición de la derivada parcial con respecto a  $x$  para la función  $u(x, y)$  en el punto  $x = x_0, y = y_0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Si  $u$  es continua, esperaríamos que  $\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}$  sea una aproximación razonablemente buena de  $\partial u / \partial x$  para un valor  $\Delta x$  suficientemente pequeña pero finito. De hecho, el teorema del valor medio nos asegura que la representación en diferencia es exacta para algún punto dentro del intervalo  $\Delta x$ . La aproximación por medio de un cociente en diferencia se puede presentar de manera formal a partir del uso de la expansión en series de Taylor o la fórmula de Taylor con residuo. Desarrollando una expansión en series de Taylor para  $u(x_0 + \Delta x, y_0)$  alrededor del punto  $(x_0, y_0)$  obtenemos

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right|_0 \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{\xi} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (4.28)$$

$$\text{con } x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x$$

El último término de la expansión anterior puede ser identificado como el residuo. Reorganizando la expresión anterior, la diferencia dividida hacia adelante queda dada por

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0 \frac{\Delta x}{2!} - \dots$$

Cambiando a la notación  $i, j$  por simplicidad, se obtiene

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + T.E.$$

donde  $\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$  es la representación en diferencia finita hacia delante para  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$ . La diferencia entre la derivada parcial y su representación en diferencia finita se denomina error de truncamiento (T.E.). Podemos caracterizar el comportamiento límite de T.E. usando la notación de orden ( $O$ ), por lo cual escribimos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

donde  $O(\Delta x)$  tiene un significado matemático preciso. Aquí, cuando el T.E. es escrito como  $O(\Delta x)$ , queremos decir que  $|T.E.| \leq K|\Delta x|$  para  $\Delta x \rightarrow 0$  (suficientemente pequeño), y  $K$  una constante real positiva. En la práctica, el orden de T.E. en este caso corresponde a la potencia más grande de  $\Delta x$  que es común a todos los términos en el T.E. (Peaceman & Rachford, Jr., 1955).

Para dar una definición más general de la  $O$  notación, cuando establecemos que  $f(x) = O[\phi(x)]$ , queremos decir que existe una constante positiva  $K$ , independiente de  $x$ , tal que  $|f(x)| \leq K|\phi(x)|$  para todo  $x$  en  $S$ , donde  $f$  y  $\phi$  son funciones de variable real o compleja definidas en  $S$ . Podemos notar que  $O(\Delta x)$  no nos dice nada acerca del tamaño exacto del T.E., sino cómo se comporta este cuando  $\Delta x$  tiende a cero. Más detalles acerca de la  $O$  notación pueden ser encontrados en (Chung, 2002).

Por otro lado desarrollando una expansión en series de Taylor para  $u(x_0 - \Delta x, y_0)$  alrededor del punto  $(x_0, y_0)$  obtenemos

$$u(x_0 - \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_0 \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (4.29)$$

y así la diferencia dividida hacia atrás queda dada por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Si sustraemos la ecuación (4.23) de la ecuación (4.22), y reorganizando, obtenemos la diferencia dividida central

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

Si adicionamos las ecuaciones (4.23) y (4.22), y reorganizando, obtenemos una la diferencia dividida central para la segunda derivada

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

Lo anterior representa solo algunos ejemplos en los cuales la primera y segunda derivada puede ser aproximada. Es conveniente utilizar operadores en diferencia para representar diferencias finitas que son usadas con bastante frecuencia. Definimos la primera diferencia hacia adelante de  $u_{i,j}$  con respecto a  $x$  en el punto  $i, j$  como

$$\Delta_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}$$

Por lo tanto podemos expresar la diferencia finita hacia adelante como aproximación a la primera derivada así

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{\Delta_x u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.30)$$

Similarmente, derivadas con respecto a otras variables tales como  $y$  se pueden representar como

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta x) = \frac{\Delta_y u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

La primera diferencia hacia atrás de  $u_{i,j}$  con respecto a  $x$  en el punto  $i, j$  se define como

$$\nabla_x u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j}$$

Se sigue que la diferencia finita hacia atrás como aproximación a la primera derivada queda dada por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{\nabla_x u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.31)$$

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

Los operadores centrales de diferencia  $\bar{\delta}$ ,  $\delta$  y  $\delta^2$  se definen como

$$\bar{\delta}_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i-1,j}$$

$$\delta_x u_{i,j} = u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\delta^2_x u_{i,j} = \delta_x(\delta_x u_{i,j}) = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}$$

y un operador promedio  $\mu$  como

$$\mu_x u_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{2}$$

Usando los operadores recién definidos, la diferencia finita central como aproximación a la primera derivada se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] = \frac{\bar{\delta}_x u_{i,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.32)$$

y la diferencia finita central como aproximación a la segunda derivada queda dada por

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] = \frac{\delta^2_x u_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.33)$$

Los operadores en diferencia de orden superior hacia adelante y hacia atrás se definen como

$$\Delta^n_x u_{i,j} = \Delta_x(\Delta^{n-1}_x u_{i,j})$$

$$\nabla^n_x u_{i,j} = \nabla_x(\nabla^{n-1}_x u_{i,j})$$

Como un ejemplo, una aproximación hacia adelante de segundo orden queda dado por

$$\Delta^2_x u_{i,j} = \Delta_x(\Delta_x u_{i,j}) = \Delta_x(u_{i+1,j} - u_{i,j}) = u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}$$

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

Se puede demostrar que las diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás como aproximaciones a las derivadas de cualquier orden se pueden obtener como

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{i,j} = \frac{\Delta^n_x u_{i,j}}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x)$$

y

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{i,j} = \frac{\nabla^n_x u_{i,j}}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x)$$

Representaciones en diferencias finitas centrales para derivadas mayores a segundo orden pueden ser expresadas en términos de  $\Delta$  y  $\nabla$  o  $\delta$ . Un tratado más completo sobre el uso de los operadores en diferencias puede ser consultado en (Smith, 1985).

### 4.3.2. Consistencia

La consistencia se refiere a la medida en que un esquema de diferencia finita se aproxima a la EDP. La diferencia entre la EDP y la aproximación en diferencia finita ha sido definida como error de truncamiento (T.E.). Una representación en diferencia finita de una EDP es consistente si el error de truncamiento tiende a cero a medida que la malla se vuelve más fina, es decir,  $\lim_{\text{malla} \rightarrow 0} (TE) = 0$ . Este será siempre el caso si el orden del error de truncamiento tiende a cero a medida que la malla se vuelve más fina (Qin, 2010).

### 4.3.3. Estabilidad

La estabilidad numérica de un esquema en diferencia finita solo es aplicable para aquellos problemas que dependen del tiempo. Un esquema numérico estable es uno para el cual los errores de cualquier tipo no crecen a medida que el cálculo numérico procede de un tiempo a otro. Generalmente, la consistencia es fácil de verificar, y muchos esquemas en diferencias finitas que se tratarán más adelante serán consistentes, debido al orden del error de truncamiento obtenido en su desarrollo. La estabilidad es mucho más sutil y normalmente se requiere un poco de trabajo duro para establecer analíticamente que un esquema es estable (Fairweather & Mitchell, 1967).

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

El método general que se muestra a continuación se denomina el método de estabilidad de Von Neumann (Dehghan, 2002) y es usado para analizar la estabilidad de un esquema en diferencias finitas obtenido para una EDP lineal.

Para ilustrar este método, consideremos la ecuación de calor unidimensional  $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Aproximando la derivada temporal por medio de un esquema en diferencia finita hacia adelante, y la segunda derivada espacial por medio de un esquema en diferencia finita central, se obtiene

$$\frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \quad (4.34)$$

La solución numérica de la EDP es influenciada por dos tipos de error, a saber:

El error de discretización (Fairweather & Mitchell, 1967), el cual corresponde a la diferencia entre la solución analítica exacta de la EDP y la solución exacta de la correspondiente ecuación en diferencias (libre de errores de redondeo).

El error de redondeo (Fairweather & Mitchell, 1967), el cual corresponde al error introducido después de un número repetitivo de cálculos en el cual el computador está constantemente redondeando los números a una cifra significativa.

Sea

$A$ : Solución analítica de la EDP.

$D$ : Solución exacta de la ecuación en diferencias.

$N$ : Solución numérica obtenida en un computador real con exactitud finita.

Entonces

$$\text{Error de discretización} = A - D$$

$$\text{Error de redondeo} = \varepsilon = N - D$$

De acuerdo con lo anterior,

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$N = D + \varepsilon$$

De ahora en adelante, y en aras de la brevedad, llamaremos a  $\varepsilon$  simplemente error. La solución numérica  $N$  debe satisfacer la ecuación en diferencias; esto se debe a que el computador es programado para resolver la ecuación en diferencias, en nuestro ejemplo, este es programado para resolver la ecuación (4.28), aunque la respuesta viene con un error de redondeo. Desde la ecuación (4.28) se obtiene

$$\frac{D_i^{t+1} + \varepsilon_i^{t+1} - D_i^t - \varepsilon_i^t}{\alpha \Delta t} = \frac{D_{i+1}^t + \varepsilon_{i+1}^t - 2D_i^t - 2\varepsilon_i^t + D_{i-1}^t + \varepsilon_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \quad (4.35)$$

Por definición,  $D$  es la solución exacta de la ecuación en diferencias, por lo que esta satisface la ecuación en diferencias. Por lo tanto,

$$\frac{D_i^{t+1} - D_i^t}{\alpha \Delta t} = \frac{D_{i+1}^t - 2D_i^t + D_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \quad (4.36)$$

Si sustraemos la ecuación (4.30) de (4.29), se obtiene

$$\frac{\varepsilon_i^{t+1} - \varepsilon_i^t}{\alpha \Delta t} = \frac{\varepsilon_{i+1}^t - 2\varepsilon_i^t + \varepsilon_{i-1}^t}{(\Delta x)^2} \quad (4.37)$$

De la ecuación (4.31) podemos notar que  $\varepsilon$  también satisface la ecuación en diferencias. Si los errores están presentes en alguna etapa de la solución de esta ecuación (como sucede en cualquier computador real), entonces la solución será estable si  $\varepsilon$  disminuye a medida que la solución progresa de un tiempo  $t$  a uno  $t+1$  (Mudge et al., 2000); por otro lado, si el error crece durante el progreso del cálculo de la solución de un tiempo  $t$  a uno  $t+1$ , entonces la solución será inestable. Por consiguiente, la solución será estable si

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{t+1}}{\varepsilon_i^t} \right| \leq 1 \quad (4.38)$$

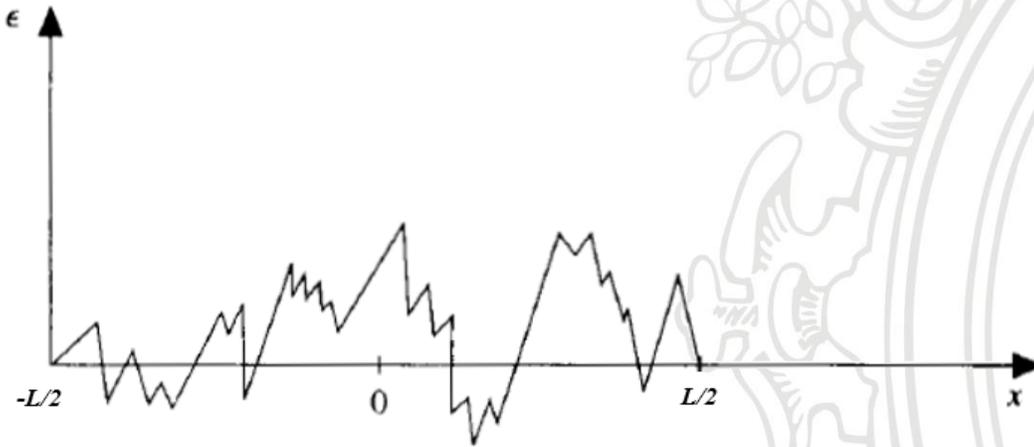
Desde la ecuación (4.28), examinemos bajo qué condiciones se cumple la ecuación (4.32).

Antes que nada, examinemos el comportamiento gráfico del error. Para un modelo no estacionario, tal como la ecuación unidimensional del calor, el error puede ser representado en función de la posición  $x$  para cualquier

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

tiempo dado  $t$ , tal como se muestra en la Figura 6. Aquí asumimos que la longitud del dominio sobre el cual la ecuación está siendo resuelta se denota como  $L$ . Por conveniencia indicaremos el origen como el punto medio del dominio, por lo que la frontera izquierda se localiza en  $-L/2$  y la frontera derecha en  $L/2$ . La distribución de  $\varepsilon$  a lo largo del eje  $x$  se representa por la distribución aleatoria que se muestra en la Figura 6. Notemos que  $\varepsilon = 0$  en  $x = -L/2$  y  $x = L/2$ , pues hay valores especificados en ambos extremos del dominio y por ende no se produce algún error en la solución numérica. En cualquier tiempo, la variación aleatoria del error  $\varepsilon$  con la posición  $x$  puede ser expresado analíticamente por una serie de Fourier como sigue (Pletcher et al., 2012)

$$\varepsilon(x) = \sum_m A_m e^{ik_m x} \quad (4.39)$$



**Figura 6.** Variación esquemática del error de redondeo como función de  $x$  (Chung, 2002).

La ecuación (4.33) representa una serie de seno y coseno, debido a que  $e^{ik_m x} = \cos(k_m x) + i \operatorname{sen}(k_m x)$ . Aquí,  $k_m$  se denomina el número de onda. La parte real de la ecuación (4.33) representa el error. Examinemos el significado gráfico y matemático del número de onda. Por simplicidad, consideremos la función seno que se muestra en la Figura 7. Por definición, la longitud de onda  $\lambda$  es el intervalo sobre  $x$  que contiene una longitud de onda completa. Una expresión matemática para esta función seno es (Peaceman & Rachford, Jr., 1955)

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

En la notación del número de onda, la ecuación anterior se puede escribir como

$$y = \text{sen}(k_m x) \quad (4.40)$$

De acuerdo con lo anterior, se sigue que

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.41)$$

En la ecuación (4.35), el número de onda contiene un subíndice  $m$ , este valor se refiere al número de ondas que se encuentran dentro de un intervalo dado. Considere un intervalo a lo largo del eje  $x$  de longitud  $L$ , tal como se muestra en la Figura 8. Si una onda senoidal está completamente contenida dentro del intervalo, entonces  $\lambda = L$ , tal como se muestra en la Figura 8(a). Para este caso, el número de onda  $k_1$  es igual a  $k_1 = \frac{2\pi}{L}$  y la onda senoidal queda dada por  $y = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ . Ahora examinemos el caso de dos ondas senoidales que se encuentran dentro del intervalo  $L$ , tal como se muestra en la Figura 8(b). La longitud de onda para este nuevo caso es  $\lambda = L/2$ , por lo que el número de onda  $k_2$  es igual a  $k_2 = 2\left(\frac{2\pi}{L}\right)$  y la onda senoidal queda dada por  $y = \text{sen}\left(2\left(\frac{2\pi}{L}\right)x\right)$ . Generalizando la idea anterior, podemos escribir el número de onda para  $m$  ondas senoidales contenidas dentro del intervalo  $L$  cada una con longitudes de onda iguales a  $\lambda = L/m$ , como (Dehghan, 2002)

$$k_m = m\left(\frac{2\pi}{L}\right) \quad (4.42)$$

Por lo tanto el subíndice  $m$  sobre el número de onda es igual a la cantidad de ondas que se encuentran dentro del intervalo  $L$ . De acuerdo con la ecuación (4.36), el número de onda es proporcional a la cantidad de ondas que se encuentran dentro de un intervalo dado; el número de onda es mayor entre más ondas se encuentren dentro del intervalo.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

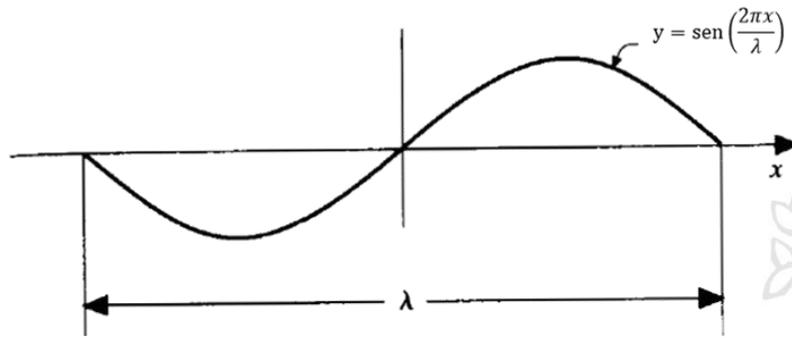


Figura 7. Función seno (Chung, 2002).

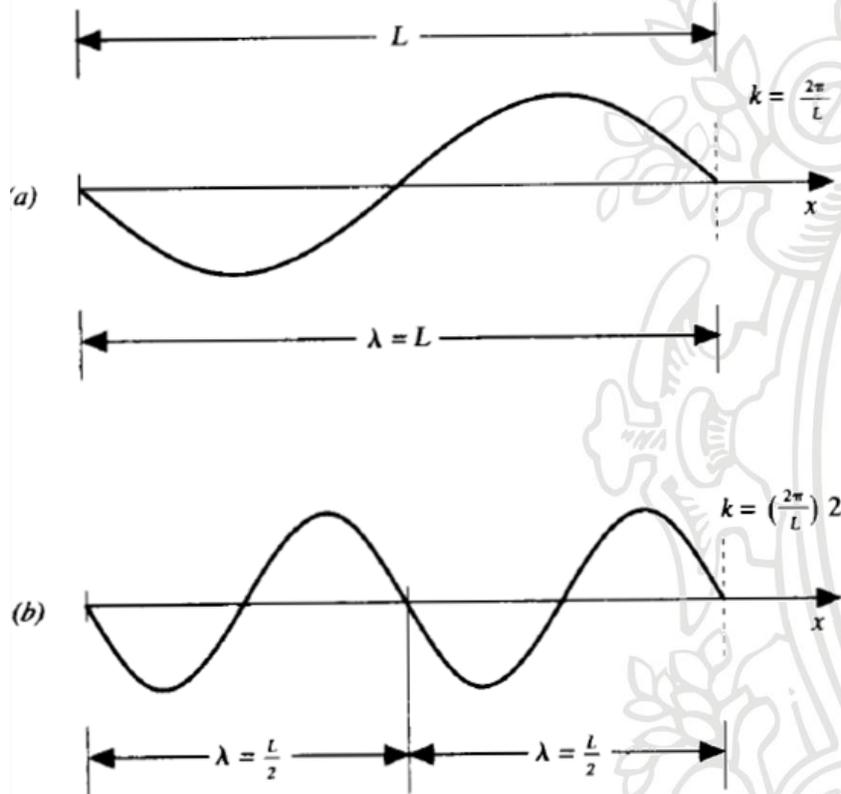


Figura 8. (a)  $\lambda = L$  (b)  $\lambda = L/2$  (Chung, 2002).

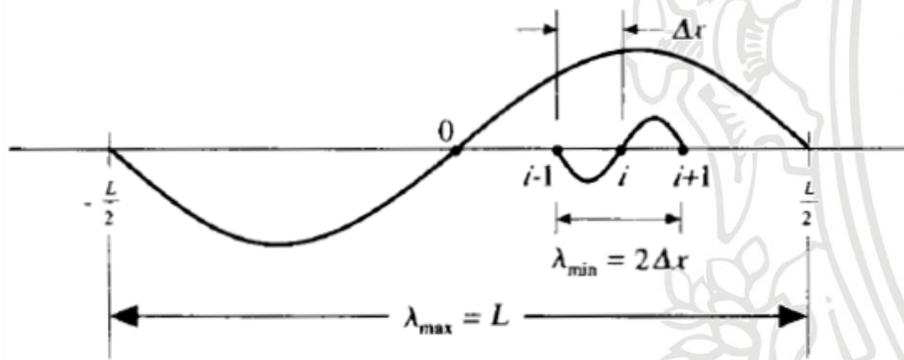
Ahora estamos en una mejor posición para entender la ecuación (4.33), donde la suma sobre el índice  $m$  denota la adición secuencial de funciones seno y coseno con incrementos secuenciales de números de onda. Esto es, la ecuación (4.33) es una suma de términos, cada uno representando un armónico más alto. Al tomar una cantidad infinita de términos, la ecuación (4.33) puede representar una variación continua del error  $\varepsilon$  como función de  $x$ , tal como se muestra en la Figura 6. Sin embargo, con respecto a una

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

solución numérica practica que involucra solo un número finito de puntos distribuidos en una malla, hay una restricción impuesta sobre el número de términos en la ecuación (4.33). Para ver esto más claramente, consideremos la Figura 9, la cual muestra el intervalo  $L$  sobre el cual los cálculos numéricos se están realizando. La longitud de onda permitida más larga es  $\lambda_{max} = L$ ; esta es la longitud de onda para el primer término en la ecuación (4.33) y corresponde a  $m=1$ . La longitud de onda permitida más pequeña es aquella para la cual la función seno (o coseno) tiene tres ceros que pasan por tres puntos adyacentes en la malla, como se muestra en la Figura 9. Por lo tanto, la longitud de onda permitida más pequeña es  $\lambda_{min} = 2\Delta x$ . Si hay  $N+1$  puntos distribuidos sobre el intervalo  $L$ , hay  $N$  intervalos entre los puntos de la malla, y por consiguiente  $\Delta x = \frac{L}{N}$ . Así  $\lambda_{min} = 2\frac{L}{N}$ . De acuerdo con la ecuación (4.35),

$$k_m = \frac{2\pi}{2L/N} = \frac{2\pi N}{L} \quad (4.43)$$

Si comparamos las ecuaciones (4.36) y (4.37),  $m$  es igual a  $N/2$ . Este es el armónico de mayor orden permitido en la ecuación (4.33).



**Figura 9.** Longitudes de onda máxima y mínima para los componentes de la serie de Fourier del error de redondeo (Chung, 2002).

De acuerdo con la ecuación (4.33), tenemos para una malla formada por  $N+1$  puntos,

$$\varepsilon(x) = \sum_{m=1}^{N/2} A_m(t) e^{ik_m x} \quad (4.44)$$

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

Para una evaluación de la estabilidad numérica, podríamos extender la ecuación (4.38), asumiendo que la amplitud  $A_m$  es una función del tiempo, como

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{N/2} A_m(t) e^{ik_m x} \quad (4.45)$$

Más aun, es razonable asumir una variación exponencial con el tiempo, pues los errores tienden a crecer o a disminuir con el tiempo (Chung, 2002).

Por lo tanto escribimos (Mudge et al., 2000)

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{N/2} e^{at} e^{ik_m x} \quad (4.46)$$

donde  $a$  es una constante. La ecuación (4.40) representa una forma razonable para la variación del error de redondeo en el espacio y el tiempo.

Después de todo este trabajo para construir  $\varepsilon$  en términos de una serie de Fourier truncada con amplitudes variando exponencialmente con el tiempo, hacemos la siguiente observación. Debido a que la ecuación de diferencias original (4.28) es lineal y debido a que el error de redondeo satisface la misma ecuación de diferencias tal como se probó en la ecuación (4.31), entonces cuando la ecuación (4.40) es sustituida en (4.31), el comportamiento de cada término de la serie es el mismo que el de la serie en sí mismo. Por lo tanto, trataremos solo con un término de la serie y escribimos (Qin, 2010)

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x} \quad (4.47)$$

Sin pérdida de generalidad, las características de estabilidad se pueden analizar usando justo esta forma para  $\varepsilon$ . Ahora procedemos a encontrar como varía  $\varepsilon$  en términos del cambio en el tiempo para así hallar la condición que debe satisfacer  $\Delta t$  tal que se satisfaga la ecuación (4.32).

Al sustituir la ecuación (4.41) en (4.31), se obtiene

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\alpha \Delta t} = \frac{e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2} \quad (4.48)$$

Dividiendo la ecuación (4.42) entre  $e^{at} e^{ik_m x}$ ,

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$e^{a\Delta t} = 1 + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x} - 2) \quad (4.49)$$

Después de simplificar (4.43), se sigue que

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right) \quad (4.50)$$

Combinando (4.32) y (4.44), obtenemos

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{t+1}}{\varepsilon_i^t} \right| = \left| \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_mx}}{e^{at} e^{ik_mx}} \right| = |e^{a\Delta t}| = \left| 1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right) \right| \leq 1 \quad (4.51)$$

En la ecuación (4.45), el factor  $\left| 1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right) \right|$  se denomina factor de amplificación y se denota como  $G$ . La desigualdad en (4.45) se cumple cuando (Fairweather & Mitchell, 1967)

$$\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.52)$$

La ecuación (4.46) da el requerimiento para que la solución dada por la ecuación en diferencias finitas (4.28) sea estable.

#### 4.3.4. Métodos de discretización

El problema de valores iniciales y de frontera (PVIF) que solucionaremos empleando el método de las diferencias finitas será,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \text{ para } 0 < z < H, t > 0 \quad \text{(EDP)}$$

sujeto a

**Condiciones de frontera (BC):**  $u(H, t) = 0$  (BC1) y  $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$  (BC2) para  $t > 0$

**Condición inicial (IC):**  $u(z, 0) = \Delta\sigma$  (IC) para  $0 < z < H$

A continuación mostraremos cuatro métodos de discretización que posteriormente se emplean para obtener una solución de dicho problema. Denotamos con el subíndice  $i$  a la dimensión espacial y con el superíndice  $t$  a la dimensión temporal, donde  $i=0$  ( $z=0$ ) representa la frontera inferior del estrato de suelo e  $i=H$  ( $z=H$ ) la frontera superior, además  $t=0$  denota el

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

tiempo inicial. Por tanto  $0 \leq i \leq H$  y  $0 \leq t \leq T$ , siendo  $T$  el tiempo total hasta el cual se obtiene la solución del modelo matemático. Así  $u_i^t$  representa la presión en exceso de la hidrostática en la masa de suelo para una profundidad  $i$  en un tiempo  $t$ . Cabe señalar que las variables  $i$  y  $t$  toman solo valores enteros en estos intervalos.

De acuerdo con el PVIF planteado, (BC1) corresponde a una condición de frontera tipo Dirichlet, mientras que (BC2) corresponde a una condición de frontera tipo Neumann.

Finalmente, para cada uno de los métodos que se muestran a continuación, se emplea el método de estabilidad de Von Neumann para obtener el factor de amplificación  $G$ , y así evaluar bajo qué condiciones el método es estable.

### 4.3.4.1. Método Explícito Simple (Smith, 1985)

Representando la segunda derivada espacial por medio de una diferencia dividida finita central y la primera derivada temporal a partir de una diferencia dividida finita hacia adelante, se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i,t} = \frac{u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} + O[(\Delta z)^2]$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,t} = \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Sustituyendo las ecuaciones en diferencias finitas divididas en la EDP se obtiene

$$u_i^{t+1} = u_i^t + \lambda(u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t) \quad (4.53)$$

$$\lambda = \frac{c_{vz} \Delta t}{(\Delta z)^2}$$

La ecuación (4.47) describe el proceso de consolidación para todos los nodos interiores del estrato de suelo, la cual tiene un error de truncamiento de orden  $O[(\Delta z)^2, \Delta t]$ . Dicha ecuación proporciona un medio explícito para calcular los valores en cada nodo para un tiempo posterior, basándose en los valores presente del nodo y sus vecinos.

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

En la frontera superior ( $i=H$ ), (BC1) se puede escribir como

$$u_H^{t+1} = 0 \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.54)$$

Desarrollando la ecuación (4.47) para la frontera inferior ( $i=0$ ), obtenemos

$$u_0^{t+1} = u_0^t + \lambda(u_1^t - 2u_0^t + u_{-1}^t) \quad (4.55)$$

Aproximando la derivada espacial  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$  por medio de una diferencia dividida finita central, se sigue que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{0,t} = \frac{u_1^t - u_{-1}^t}{2\Delta z} + O[(\Delta z)^2] \quad (4.56)$$

Despejando  $u_{-1}^t$  de (4.50) y reemplazando este valor en (4.49), obtenemos la ecuación en diferencias finitas para la frontera inferior

$$u_0^{t+1} = u_0^t + 2\lambda \left( u_1^t - u_0^t - \Delta z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \right)$$

Debido a que  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ , entonces

$$u_0^{t+1} = u_0^t + 2\lambda(u_1^t - u_0^t) \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.57)$$

La condición inicial se puede representar como

$$u_i^0 = \Delta \sigma \text{ para todo } 0 \leq i \leq H \quad (4.58)$$

El factor de amplificación  $G$  para la solución en diferencias finitas dada por el método explícito simple está dado por (Peaceman & Rachford, Jr., 1955)

$$G = \left| 1 - 4\lambda \text{sen}^2 \left( \frac{k_m \Delta x}{2} \right) \right|$$

el cual es estable siempre que se cumpla

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \quad (4.59)$$

Las ecuaciones (4.47), (4.48), (4.51), (4.52) y (4.53) describen la solución en diferencias finitas del PVIF empleando el método explícito simple.

#### 4.3.4.2. Método Implícito Simple o método de Laasonen (Qin, 2010)

Representando la segunda derivada espacial por medio de una diferencia dividida finita central y la primera derivada temporal a partir de una diferencia dividida finita hacia adelante, se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i,t+1} = \frac{u_{i+1}^{t+1} - 2u_i^{t+1} + u_{i-1}^{t+1}}{(\Delta z)^2} + O[(\Delta z)^2]$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,t} = \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Sustituyendo las ecuaciones en diferencias finitas divididas en la EDP se obtiene

$$-\lambda u_{i-1}^{t+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{t+1} - \lambda u_{i+1}^{t+1} = u_i^t \quad (4.60)$$

$$\lambda = \frac{c_{vz} \Delta t}{(\Delta z)^2}$$

La ecuación (4.54) describe el proceso de consolidación para todos los nodos interiores del estrato de suelo, excepto para el último de los nodos interiores, el cual debe modificarse para considerar la condición de frontera (BC1). Esta ecuación en diferencias finitas tiene un error de truncamiento de orden  $O[(\Delta z)^2, \Delta t]$ . Cuando esta relación se sustituye en la EDP original, la ecuación en diferencias resultante contiene varias incógnitas. Así, no puede resolverse explícitamente mediante simples manipulaciones algebraicas, en lugar de esto, el sistema completo de ecuaciones debe resolverse simultáneamente. Esto es posible debido a que, junto con las condiciones de frontera, las formulaciones implícitas dan como resultado un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas con el mismo número de incógnitas. Por lo tanto, el método se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas en cada punto en el tiempo (Pletcher et al., 2012).

Desarrollando la ecuación (4.54) para el último nodo interior ( $i=H-1$ ), se obtiene

$$-\lambda u_{H-2}^{t+1} + (1 + 2\lambda)u_{H-1}^{t+1} = u_{H-1}^t + \lambda u_H^{t+1} \quad (4.61)$$

En la frontera superior ( $i=H$ ), (BC1) se puede escribir como

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$u_H^{t+1} = 0 \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.62)$$

Desarrollando la ecuación (4.54) para la frontera inferior ( $i=0$ ), obtenemos

$$-\lambda u_{-1}^{t+1} + (1 + 2\lambda)u_0^{t+1} - \lambda u_1^{t+1} = u_0^t \quad (4.63)$$

Aproximando la derivada espacial  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$  por medio de una diferencia dividida finita central, se sigue que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{0,t+1} = \frac{u_1^{t+1} - u_{-1}^{t+1}}{2\Delta z} + O[(\Delta z)^2] \quad (4.64)$$

Despejando  $u_{-1}^{t+1}$  de (4.58) y reemplazando este valor en (4.57), obtenemos la ecuación en diferencias finitas para la frontera inferior

$$(1 + 2\lambda)u_0^{t+1} - 2\lambda u_1^{t+1} = u_0^t + 2\lambda \Delta z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Debido a que  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ , entonces

$$(1 + 2\lambda)u_0^{t+1} - 2\lambda u_1^{t+1} = u_0^t \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.65)$$

La condición inicial se puede representar como

$$u_i^0 = \Delta \sigma \text{ para todo } 0 \leq i \leq H \quad (4.66)$$

El factor de amplificación  $G$  para la solución en diferencias finitas dada por el método implícito simple está dado por (Peaceman & Rachford, Jr., 1955)

$$G = \left| \frac{1}{1 + 2\lambda[1 - \cos(k_m \Delta x)]} \right|$$

el cual es estable siempre que se cumpla

$$\lambda \geq 0 \quad (4.67)$$

De acuerdo con lo anterior, el método implícito simple es incondicionalmente estable.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

Las ecuaciones (4.54), (4.55), (4.56), (4.59), (4.60) y (4.61) describen la solución en diferencias finitas del PVIF empleando el método implícito simple.

### 4.3.4.3. Método de Crank – Nicolson (Qin, 2010)

Representando la segunda derivada espacial como el promedio en los tiempos  $t$  y  $t+1$  de una diferencia dividida finita central y la primera derivada temporal a partir de una diferencia dividida finita hacia adelante, se obtiene

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{i,t+1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{t+1} - 2u_i^{t+1} + u_{i-1}^{t+1}}{(\Delta z)^2} + \frac{u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} \right) + O[(\Delta z)^2]$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,t+1/2} = \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2]$$

Sustituyendo las ecuaciones en diferencias finitas divididas en la EDP se obtiene

$$-\lambda u_{i-1}^{t+1} + 2(1 + \lambda)u_i^{t+1} - \lambda u_{i+1}^{t+1} = \lambda u_{i-1}^t + 2(1 - \lambda)u_i^t + \lambda u_{i+1}^{t+1} \quad (4.68)$$

$$\lambda = \frac{c_{vz} \Delta t}{(\Delta z)^2}$$

La ecuación (4.62) describe el proceso de consolidación para todos los nodos interiores del estrato de suelo, excepto para el último de los nodos interiores, el cual debe modificarse para considerar la condición de frontera (BC1). Esta ecuación en diferencias finitas tiene un error de truncamiento de orden  $O[(\Delta z)^2, (\Delta t)^2]$ . Similar al método implícito simple, cuando esta relación se sustituye en la EDP original, la ecuación en diferencias resultante contiene varias incógnitas. Así, no puede resolverse explícitamente mediante simples manipulaciones algebraicas, en lugar de esto, el sistema completo de ecuaciones debe resolverse simultáneamente. Esto es posible debido a que, junto con las condiciones de frontera, las formulaciones implícitas dan como resultado un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas con el mismo número de incógnitas. Por lo tanto, el método se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas en cada punto en el tiempo (Pletcher et al., 2012).

Desarrollando la ecuación (4.62) para el último nodo interior ( $i=H-1$ ), se obtiene

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

$$-\lambda u_{H-2}^{t+1} + 2(1 + \lambda)u_{H-1}^{t+1} = \lambda u_{H-2}^t + 2(1 - \lambda)u_{H-1}^t + \lambda u_H^t + \lambda u_H^{t+1} \quad (4.69)$$

En la frontera superior ( $i=H$ ), (BC1) se puede escribir como

$$u_H^{t+1} = 0 \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.70)$$

Desarrollando la ecuación (4.62) para la frontera inferior ( $i=0$ ), obtenemos

$$-\lambda u_{-1}^{t+1} + 2(1 + \lambda)u_0^{t+1} - \lambda u_1^{t+1} = \lambda u_{-1}^t + 2(1 - \lambda)u_0^t + \lambda u_1^t \quad (4.71)$$

Aproximando la derivada espacial  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$  como el promedio en los tiempos  $t$  y  $t+1$  de una diferencia dividida finita central, se sigue que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{0,t+1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^{t+1} - u_{-1}^{t+1}}{2\Delta z} + \frac{u_1^t - u_{-1}^t}{2\Delta z} \right) + O[(\Delta z)^2] \quad (4.72)$$

Despejando  $u_{-1}^{t+1} + u_1^{t+1}$  de (4.66) y reemplazando este valor en (4.65), obtenemos la ecuación en diferencias finitas para la frontera inferior

$$2(1 + \lambda)u_0^{t+1} - 2\lambda u_1^{t+1} = 2(1 - \lambda)u_0^t + 2\lambda u_1^t - 4\lambda \Delta z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Debido a que  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ , entonces

$$2(1 + \lambda)u_0^{t+1} - 2\lambda u_1^{t+1} = 2(1 - \lambda)u_0^t + 2\lambda u_1^t \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.73)$$

La condición inicial se puede representar como

$$u_i^0 = \Delta \sigma \text{ para todo } 0 \leq i \leq H \quad (4.74)$$

El factor de amplificación  $G$  para la solución en diferencias finitas dada por el método de Crank - Nicolson está dado por (Peaceman & Rachford, Jr., 1955)

$$G = \left| \frac{1 - \lambda[1 - \cos(k_m \Delta x)]}{1 + \lambda[1 - \cos(k_m \Delta x)]} \right|$$

el cual es estable siempre que se cumpla

$$\lambda \geq 0 \quad (4.75)$$

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

De acuerdo con lo anterior, el método de Crank - Nicolson es incondicionalmente estable.

Las ecuaciones (4.62), (4.63), (4.64), (4.67), (4.68) y (4.69) describen la solución en diferencias finitas del PVIF empleando el método de Crank - Nicolson.

**4.3.4.4. Método de Dufort – Frankel (Smith, 1985)**

Representando la segunda derivada espacial y la primera derivada temporal por medio de una diferencia dividida finita central, se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i,t} = \frac{u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} + O[(\Delta z)^2]$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,t} = \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2]$$

Reemplazando en la segunda derivada espacial el término  $u_i^t$  por  $u_i^t = \frac{u_i^{t+1} + u_i^{t-1}}{2}$ , se sigue que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i,t} = \frac{u_{i+1}^t - u_i^{t+1} - u_i^{t-1} + u_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} + O[(\Delta z)^2]$$

Sustituyendo las ecuaciones en diferencias finitas divididas en la EDP se obtiene

$$u_i^{t+1} = \left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\right) u_i^{t-1} + \left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right) (u_{i+1}^t + u_{i-1}^t) \quad (4.76)$$

$$\lambda = \frac{c_{vz} \Delta t}{(\Delta z)^2}$$

La ecuación (4.70) describe el proceso de consolidación para todos los nodos interiores del estrato de suelo, la cual tiene un error de truncamiento de orden  $O[(\Delta z)^2, (\Delta t)^2]$ . Dicha ecuación proporciona un medio explícito para calcular los valores en cada nodo para todo tiempo  $t \geq 2$ , basándose en los valores presente del nodo y sus vecinos. Cuando  $t = 1$ , se emplea el método explícito simple (Pletcher et al., 2012).

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

En la frontera superior ( $i=H$ ), (BC1) se puede escribir como

$$u_H^{t+1} = 0 \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.77)$$

Desarrollando la ecuación (4.70) para la frontera inferior ( $i=0$ ), obtenemos

$$u_0^{t+1} = \left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\right) u_0^{t-1} + \left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right) (u_1^t + u_{-1}^t) \quad (4.78)$$

Aproximando la derivada espacial  $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$  por medio de una diferencia dividida finita central, se sigue que

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{0,t} = \frac{u_1^t - u_{-1}^t}{2\Delta z} + O[(\Delta z)^2] \quad (4.79)$$

Despejando  $u_{-1}^t$  de (4.73) y reemplazando este valor en (4.72), obtenemos la ecuación en diferencias finitas para la frontera inferior

$$u_0^{t+1} = \left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\right) u_0^{t-1} + \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda}\right) \left(u_1^t - \Delta z \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}\right)$$

Debido a que  $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$ , entonces

$$u_0^{t+1} = \left(\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\right) u_0^{t-1} + \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda}\right) u_1^t \text{ para todo } t \geq 1 \quad (4.80)$$

Para  $t = 0$ , se emplea la ecuación (4.51).

La condición inicial se puede representar como

$$u_i^0 = \Delta \sigma \text{ para todo } 0 \leq i \leq H \quad (4.81)$$

El factor de amplificación  $G$  para la solución en diferencias finitas dada por el método de Dufort - Frankel está dado por (Dehghan, 2002)

$$G = \left| \frac{2\lambda \cos(k_m \Delta x) \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 \sin^2(k_m \Delta x)}}{1 + 2\lambda} \right|$$

el cual es estable siempre que se cumpla

$$\lambda \geq 0 \quad (4.82)$$

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

De acuerdo con lo anterior, el método de Dufort - Frankel es incondicionalmente estable.

Las ecuaciones (4.70), (4.71), (4.74), (4.75) y (4.76) describen la solución en diferencias finitas del PVIF empleando el método de Dufort - Frankel.

### 5. Metodología

De acuerdo con los aspectos teóricos planteados se determinó la presión en exceso a la hidrostática y el grado de consolidación para un estrato de suelo saturado (arcilla) con un coeficiente de consolidación determinado, a partir de una solución analítica y métodos de discretización por diferencias finitas. El modelo geotécnico fue extraído de la literatura especializada en este propósito (Braja, 2015).

La metodología empleada en el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática y el grado de consolidación se muestra a continuación.

- I. Inicialmente se establecen los fundamentos teóricos correspondientes al fenómeno de consolidación unidimensional de suelos con flujo de agua vertical, para así comprender desde el punto de vista geotécnico todas sus condiciones e implicaciones que este tiene para un estrato de suelo particular bajo una serie de parámetros iniciales determinados. Por tal motivo se consultan referencias bibliográficas recomendadas para tal fin.
- II. El fenómeno de consolidación unidimensional de suelos viene descrito, matemáticamente, a partir de un problema de valor inicial y de frontera (PVIF) por tal motivo es indispensable comprender los fundamentos teóricos correspondientes a la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. Por tal motivo se efectúa una revisión bibliográfica para alcanzar dicho fin.
- III. Se obtuvo una solución analítica del PVIF que describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical, empleando el método de separación de variables.
- IV. A partir de la solución analítica, se obtuvo la presión en exceso a la hidrostática y el grado de consolidación para diferentes profundidades en el estrato de suelo en distintos tiempos.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

- V. El análisis numérico para este caso se hace indispensable en la aplicación del método de las diferencias finitas, por tal motivo se efectuó una revisión bibliográfica de los fundamentos de programación (básicos y avanzados) aplicables para nuestro caso. Cabe resaltar que dicha modelación numérica se realizó empleando el lenguaje VBA para Microsoft Excel (Visual Basic for Applications).
- VI. Se efectuó una revisión bibliográfica de los aspectos teóricos que describen el método de las diferencias finitas.
- VII. Se plantearon cuatro métodos de discretización en diferencias finitas para solucionar el PVIF que describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical. Estos métodos fueron: método explícito simple, método implícito simple o método de Laasonen, método de Crank – Nicolson y método de Dufort – Frankel.
- VIII. Se obtuvo una solución numérica del PVIF que describe el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical, empleando los cuatro métodos de discretización en diferencias finitas mencionados con anterioridad. Los algoritmos computacionales empleados para los cuatro métodos se escribieron en el lenguaje VBA para Microsoft Excel (Visual Basic for Applications).
- IX. Se efectuó una comparación cuantitativa y gráfica entre el grado de consolidación obtenido por medio de la solución analítica con aquel obtenido a partir de los cuatro métodos de discretización en diferencias finitas. Se empleó el error relativo porcentual máximo obtenido en cada uno de los métodos numéricos con el fin de verificar cuál de estos se ajustaba mejor al fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical

Nota: los algoritmos computacionales correspondientes a cada uno de los métodos de discretización en diferencias finitas se muestran en los anexos.

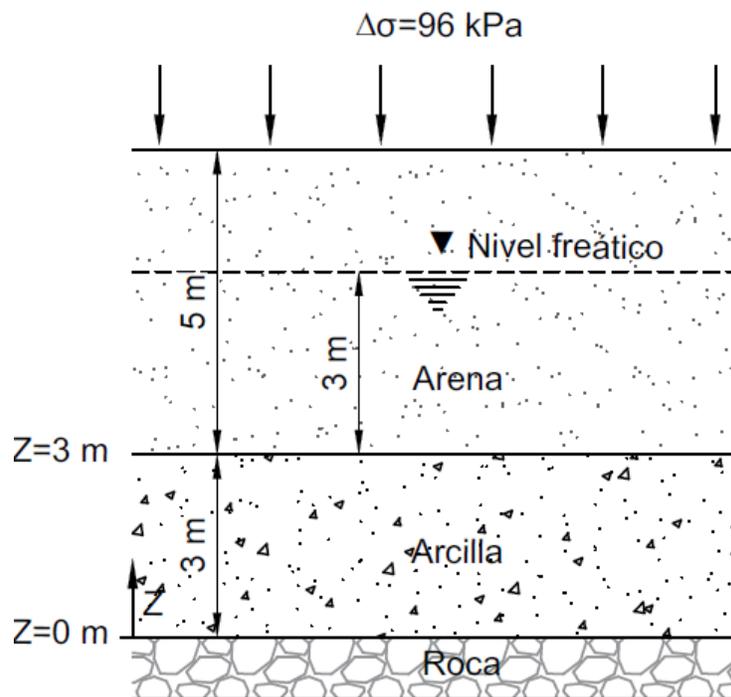
### 6. Descripción del caso de estudio

El caso de estudio atendido en este trabajo de grado corresponde a un ejercicio de cálculo extraído del libro Fundamentos de Ingeniería Geotécnica (Braja, 2015). El estrato de suelo corresponde a una arcilla

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

saturada de **3 m** confinada entre dos capas, una de ellas corresponde a un estrato de roca impermeable ubicada en la parte inferior, la otra corresponde a un estrato de arena permeable de **5 m** ubicada en la parte superior. El nivel freático se ubica a **2 m** medidos desde la parte superior de estrato de arena. El estrato de arcilla tiene un coeficiente de consolidación vertical igual a **0.0035 cm<sup>2</sup>/s**; sobre la superficie del suelo se aplica una sobrecarga de **96 kPa**.

A continuación se muestra una gráfica que ilustra el modelo geotécnico descrito como caso de estudio.



**Figura 10.** Estrato de suelo usado como caso de estudio (Braja, 2015).

### 7. Resultados y análisis

Para obtener la solución analítica y numérica del fenómeno de consolidación en el estrato de suelo considerado, se tomó un cambio en la profundidad de  $\Delta z = 0.3 \text{ m}$ , donde  $z = 0 \text{ m}$  corresponde a la parte inferior impermeable del estrato de suelo (roca) y  $z = 3 \text{ m}$  corresponde a la parte superior permeable del mismo (arena). La relación  $z/H$  varía desde **0.0** ( $z = 0 \text{ m}$ ) hasta **1.0** ( $z = 3 \text{ m}$ ), de donde  $\Delta z/H = 0.1 \text{ m}$ . El cambio en el tiempo corresponde a  $\Delta t = 30 \text{ días}$ , y el factor tiempo varía desde **0.0** ( $t = 0 \text{ días}$ ) hasta **1.2** ( $t = 360 \text{ días}$ ), por consiguiente  $\Delta T_v = 0.1$ .

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

La condición inicial (IC) está determinada por una presión en exceso a la hidrostática de  $\Delta\sigma = 96 \text{ kPa}$ , la cual se considera constante a lo largo de toda la profundidad del estrato de suelo. Lo anterior se expresa como  $u(z, 0) = 96 \text{ kPa}$  para  $0 \leq z \leq H$ . Las condiciones de frontera establecen que, en el límite inferior del estrato de suelo no hay flujo de agua a través de este, es decir  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$  (BC2), en el límite superior, la presión en exceso a la hidrostática es nula, por lo que toda el agua es expulsada a través de este, lo anterior se representa como  $u(H, t) = 0$  (BC1). Estas dos últimas condiciones se cumplen para todo tiempo  $t > 0$ .

El factor  $\lambda$  del cual dependen los diferentes modelos de discretización en diferencias finitas empleados es igual a  $\lambda = 0.333$ . Este valor, junto con los parámetros elegidos para el cambio en la dimensión espacial y temporal ( $\Delta z$  y  $\Delta t$ ), permite establecer que estos modelos son consistentes y estables desde el punto de vista numérico.

El grado de consolidación y el error relativo porcentual a una distancia  $z$  en cualquier tiempo  $t$  para cada uno de los métodos de discretización en diferencias finitas empleados se calculan, respectivamente, como

$$U_z^{t*} = 1 - \frac{u_i^t}{\Delta\sigma} \quad (4.83)$$

$$\varepsilon_z^t = \left| \frac{U_z^t - U_z^{t*}}{U_z^t} \right| \quad (4.84)$$

$u_i^t$  corresponde a la presión en exceso a la hidrostática obtenida por medio de alguno de los métodos numéricos empleados;  $U_z^t$  y  $U_z^{t*}$  representan respectivamente el grado de consolidación obtenidos por medio de la solución analítica y numérica. Se multiplican los valores anteriores por 100 para expresarlos en porcentaje.

Para los métodos numéricos implícitos (método implícito simple y método de Crank – Nicolson) es necesario solucionar un sistema de ecuaciones lineales para cada tiempo considerado; debido a que la matriz asociada a tal sistema es tridiagonal, se emplea el algoritmo de Thomas para obtener su solución. Este método se basa en la descomposición LU y los siguientes tres pasos: descomposición, sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás (Farlow, 1993).

### 7.1. Solución analítica

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

Empleando la ecuación (4.20), se obtiene la solución analítica para la presión en exceso a la hidrostática en el estrato de suelo considerado.

**Tabla 1.** Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio de la solución analítica.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	96.000	91.133	74.142	58.253	45.551	35.595	27.812	21.731	16.979	13.267	10.366	8.099	6.328
0.1	0.3	96.000	90.425	73.275	57.541	44.991	35.156	27.470	21.463	16.770	13.103	10.238	8.000	6.250
0.2	0.6	96.000	88.231	70.687	55.421	43.323	33.853	26.451	20.667	16.148	12.617	9.858	7.703	6.019
0.3	0.9	96.000	84.367	66.413	51.942	40.590	31.716	24.781	19.362	15.129	11.821	9.236	7.216	5.639
0.4	1.2	96.000	78.580	60.519	47.186	36.858	28.797	22.501	17.581	13.736	10.733	8.386	6.552	5.120
0.5	1.5	96.000	70.623	53.105	41.265	32.217	25.170	19.666	15.366	12.006	9.381	7.330	5.727	4.475
0.6	1.8	96.000	60.342	44.318	34.321	26.783	20.923	16.348	12.773	9.980	7.798	6.093	4.761	3.720
0.7	2.1	96.000	47.762	34.352	26.521	20.688	16.161	12.627	9.866	7.708	6.023	4.706	3.677	2.873
0.8	2.4	96.000	33.141	23.448	18.059	14.082	11.000	8.594	6.715	5.247	4.100	3.203	2.503	1.956
0.9	2.7	96.000	16.984	11.891	9.145	7.129	5.569	4.351	3.399	2.656	2.075	1.622	1.267	0.990
1.0	3.0	96.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

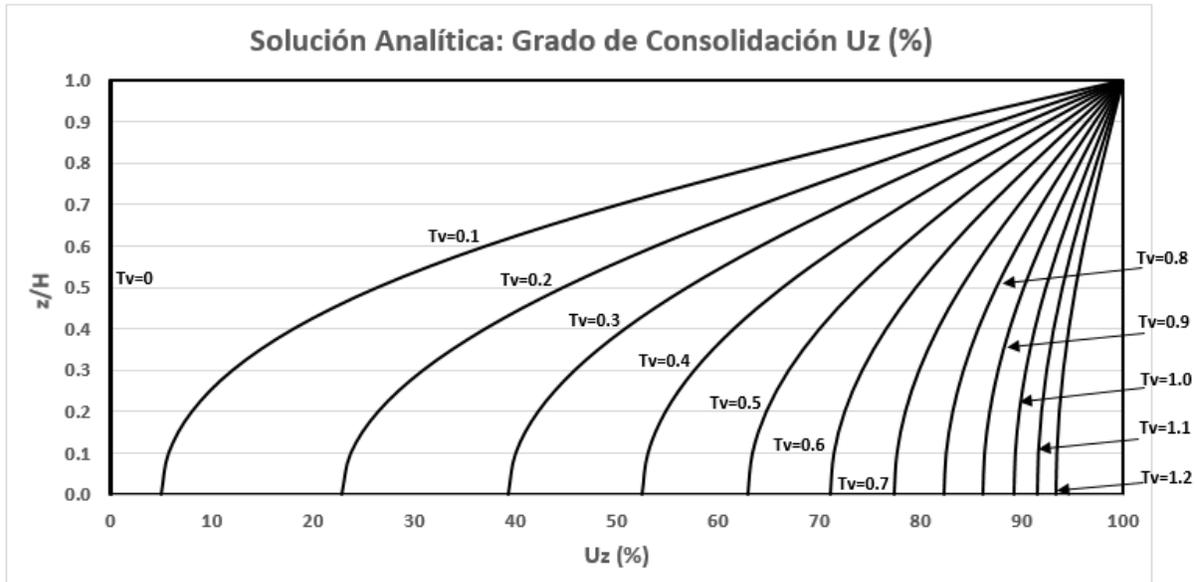
De acuerdo con los resultados obtenidos para la presión en exceso a la hidrostática, y aplicando la ecuación (4.21), se obtiene la solución analítica para el grado de consolidación en el estrato de suelo considerado.

**Tabla 2.** Grado de consolidación, en %, obtenido por medio de la solución analítica.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	5.069	22.769	39.320	52.551	62.922	71.029	77.364	82.313	86.181	89.202	91.563	93.408
0.1	0.3	0.000	5.808	23.671	40.061	53.135	63.379	71.386	77.642	82.531	86.351	89.335	91.667	93.489
0.2	0.6	0.000	8.093	26.367	42.270	54.871	64.737	72.447	78.472	83.179	86.857	89.731	91.976	93.731
0.3	0.9	0.000	12.118	30.819	45.894	57.719	66.963	74.187	79.831	84.241	87.687	90.379	92.483	94.127
0.4	1.2	0.000	18.146	36.960	50.848	61.607	70.003	76.562	81.687	85.691	88.820	91.264	93.175	94.667
0.5	1.5	0.000	26.435	44.682	57.016	66.440	73.781	79.514	83.994	87.494	90.228	92.365	94.034	95.339
0.6	1.8	0.000	37.144	53.835	64.249	72.101	78.205	82.971	86.695	89.604	91.877	93.653	95.041	96.125
0.7	2.1	0.000	50.248	64.217	72.373	78.450	83.166	86.847	89.723	91.970	93.726	95.098	96.170	97.007
0.8	2.4	0.000	65.478	75.575	81.188	85.331	88.542	91.047	93.005	94.535	95.730	96.663	97.393	97.963
0.9	2.7	0.000	82.308	87.613	90.474	92.574	94.199	95.468	96.459	97.233	97.838	98.311	98.680	98.969
1.0	3.0	0.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

A continuación se muestra la gráfica que ilustra la variación del grado de consolidación en términos de la relación  $z/H$  para cada factor de tiempo  $T_v$ , obtenido de la solución analítica.



**Figura 11.** Comportamiento del grado de consolidación en el estrato de suelo, obtenido por medio de la solución analítica.

De acuerdo con los resultados obtenidos, la presión en exceso a la hidrostática tiene un comportamiento inverso al grado de consolidación, es decir, entre mayor sea la presión en exceso a la hidrostática menor será el grado de consolidación y viceversa; lo anterior se cumple para cada profundidad y tiempo considerado.

Para un factor de tiempo específico, a mayor profundidad, o entre más cerca se considere un punto de la superficie permeable, mayor será el grado de consolidación y por ende menor será la presión en exceso a la hidrostática. Caso contrario se cumple al tomar un punto cercano a la superficie impermeable, es decir el grado de consolidación disminuye y la presión en exceso a la hidrostática aumenta. Por ejemplo, si se considera  $T_v = 0.4$ , de acuerdo con la Tabla 1, la presión en exceso a la hidrostática pasa de 58.253 kPa en  $z=0$  m (frontera impermeable) a 7.129 kPa en  $z=2.7$  m, punto ubicado a 0.3 m de la frontera permeable. Por otro, de acuerdo con la Tabla 2, el grado de consolidación pasa de 52.551% en  $z=0$  m (frontera impermeable) a 92.574% en  $z=2.7$  m.

Al tomar una profundidad determinada en el estrato de suelo, entre más días transcurran, o entre mayor sea el valor del factor tiempo, mayor será el

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

grado de consolidación, y por consiguiente menor la presión en exceso a la hidrostática. Por ejemplo, si se considera  $z = 0.6 \text{ m}$ , de acuerdo con la Tabla 1, la presión en exceso a la hidrostática pasa de 60.342 kPa en 30 días ( $T_v = 0.1$ ) a 3.720 kPa en 360 días ( $T_v = 1.2$ ). Por otro, de acuerdo con la Tabla 2, el grado de consolidación pasa de 37.144% en 30 días ( $T_v = 0.1$ ) a 96.125% en 360 días ( $T_v = 1.2$ ).

Las observaciones anteriores permiten establecer que la solución analítica, dada por las ecuaciones (4.20) y (4.21), describe de manera adecuada el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical.

### 7.2. Solución numérica

A continuación se muestran los resultados para la presión en exceso a la hidrostática, el grado de consolidación y el error relativo porcentual obtenidos con los cuatro métodos de discretización en diferencias finitas.

#### 7.2.1. Método Explícito Simple

Empleando las ecuaciones (4.47), (4.48), (4.51), (4.52) y (4.53) se obtiene la solución en diferencias finitas para la presión en exceso a la hidrostática empleando el método explícito simple.

**Tabla 3.** Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método explícito simple.

z/H	Tv	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
	z(m)/Días	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	96.000	91.605	74.542	58.529	45.741	35.724	27.899	21.788	17.015	13.288	10.377	8.104	6.329
0.1	0.3	96.000	90.899	73.669	57.813	45.178	35.285	27.556	21.520	16.806	13.124	10.249	8.004	6.251
0.2	0.6	96.000	88.710	71.063	55.682	43.504	33.976	26.534	20.721	16.182	12.638	9.869	7.707	6.019
0.3	0.9	96.000	84.847	66.760	52.185	40.759	31.831	24.858	19.413	15.161	11.840	9.246	7.221	5.639
0.4	1.2	96.000	79.048	60.827	47.405	37.011	28.902	22.571	17.627	13.766	10.750	8.395	6.556	5.120
0.5	1.5	96.000	71.058	53.369	41.455	32.351	25.262	19.728	15.406	12.031	9.396	7.338	5.730	4.475
0.6	1.8	96.000	60.721	44.532	34.477	26.893	20.999	16.399	12.807	10.001	7.810	6.100	4.763	3.720
0.7	2.1	96.000	48.065	34.514	26.641	20.773	16.219	12.666	9.891	7.725	6.033	4.711	3.679	2.873
0.8	2.4	96.000	33.352	23.556	18.141	14.140	11.040	8.621	6.733	5.258	4.106	3.207	2.504	1.956
0.9	2.7	96.000	17.092	11.946	9.186	7.158	5.589	4.364	3.408	2.662	2.079	1.623	1.268	0.990
1.0	3.0	96.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

De acuerdo con los resultados obtenidos para la presión en exceso a la hidrostática, y aplicando las ecuaciones (4.77) y (4.78), se obtiene el grado de consolidación en el estrato de suelo y el error relativo porcentual con el método explícito simple.

**Tabla 4.** Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método explícito simple.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	4.578	22.353	39.033	52.353	62.787	70.938	77.304	82.276	86.158	89.191	91.558	93.408
0.1	0.3	0.000	5.314	23.262	39.778	52.940	63.245	71.296	77.584	82.494	86.329	89.324	91.662	93.489
0.2	0.6	0.000	7.593	25.976	41.998	54.684	64.608	72.361	78.415	83.143	86.836	89.720	91.972	93.730
0.3	0.9	0.000	11.617	30.459	45.640	57.543	66.843	74.106	79.778	84.208	87.667	90.369	92.478	94.126
0.4	1.2	0.000	17.658	36.639	50.620	61.447	69.893	76.489	81.639	85.661	88.802	91.255	93.171	94.667
0.5	1.5	0.000	25.982	44.408	56.818	66.301	73.686	79.450	83.952	87.467	90.213	92.357	94.031	95.338
0.6	1.8	0.000	36.748	53.612	64.086	71.986	78.126	82.918	86.660	89.582	91.864	93.646	95.038	96.125
0.7	2.1	0.000	49.932	64.048	72.248	78.361	83.105	86.806	89.696	91.953	93.716	95.093	96.168	97.007
0.8	2.4	0.000	65.258	75.462	81.103	85.271	88.500	91.019	92.987	94.523	95.723	96.660	97.391	97.963
0.9	2.7	0.000	82.196	87.557	90.432	92.543	94.178	95.454	96.450	97.227	97.835	98.309	98.679	98.969
1.0	3.0	0.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

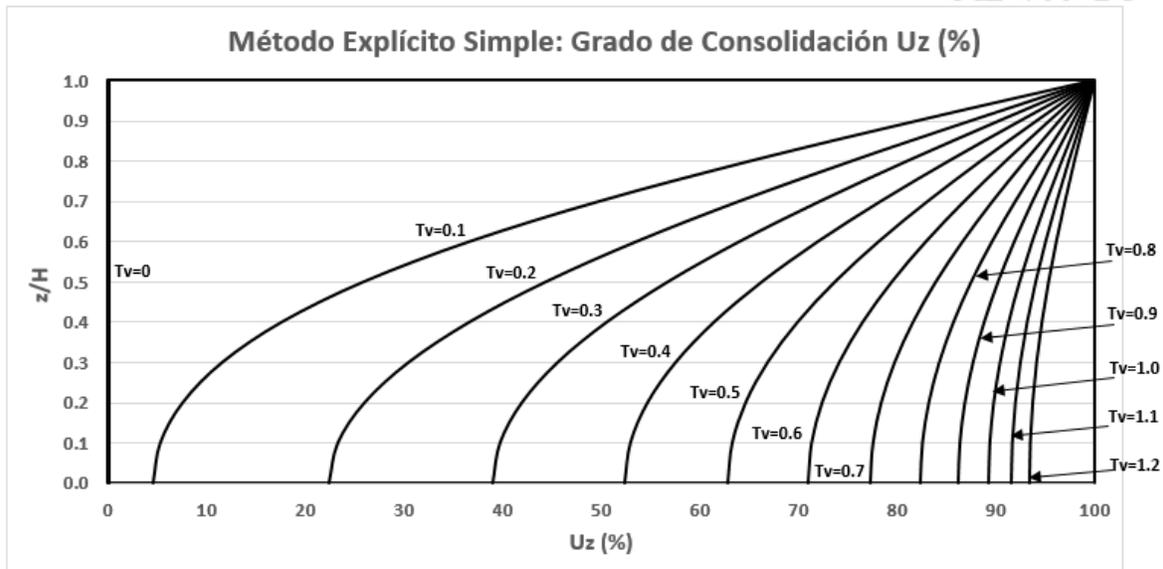
**Tabla 5.** Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método explícito simple.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	9.687	1.829	0.730	0.376	0.215	0.128	0.077	0.045	0.026	0.013	0.005	0.001
0.1	0.3	0.000	8.504	1.732	0.707	0.368	0.211	0.126	0.075	0.045	0.025	0.013	0.005	0.001
0.2	0.6	0.000	6.172	1.483	0.643	0.342	0.199	0.119	0.072	0.043	0.024	0.012	0.005	0.000
0.3	0.9	0.000	4.129	1.171	0.551	0.305	0.180	0.109	0.066	0.039	0.022	0.012	0.005	0.000
0.4	1.2	0.000	2.685	0.869	0.449	0.259	0.156	0.096	0.059	0.035	0.020	0.010	0.004	0.000
0.5	1.5	0.000	1.715	0.615	0.347	0.209	0.129	0.081	0.050	0.030	0.017	0.009	0.004	0.000
0.6	1.8	0.000	1.065	0.415	0.254	0.160	0.101	0.064	0.040	0.024	0.014	0.007	0.003	0.000
0.7	2.1	0.000	0.628	0.263	0.173	0.113	0.074	0.047	0.030	0.018	0.011	0.006	0.002	0.000
0.8	2.4	0.000	0.335	0.150	0.104	0.071	0.047	0.031	0.020	0.012	0.007	0.004	0.002	0.000
0.9	2.7	0.000	0.136	0.065	0.047	0.033	0.022	0.015	0.010	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000
1.0	3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	<b>Max</b>		9.687	1.829	0.730	0.376	0.215	0.128	0.077	0.045	0.026	0.013	0.005	0.001

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

La última fila representa el máximo error porcentual que se obtiene en cada factor tiempo.

A continuación se muestra la gráfica que ilustra la variación del grado de consolidación en términos de la relación  $z/H$  para cada factor de tiempo  $Tv$ , obtenido con el método explícito simple.



**Figura 12.** Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método explícito simple.

### 7.2.2. Método Implícito Simple o método de Laasonen

Empleando las ecuaciones (4.54), (4.55), (4.56), (4.59), (4.60) y (4.61) se obtiene la solución en diferencias finitas para la presión en exceso a la hidrostática empleando el método implícito simple.

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

**Tabla 6.** Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método implícito simple.

z/H	Tv	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
	z(m)/Días	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	96.000	90.685	74.100	58.377	45.730	35.791	28.008	21.917	17.151	13.421	10.502	8.218	6.431
0.1	0.3	96.000	90.010	73.245	57.666	45.168	35.350	27.663	21.647	16.939	13.255	10.373	8.117	6.352
0.2	0.6	96.000	87.915	70.689	55.546	43.495	34.039	26.637	20.844	16.311	12.764	9.988	7.816	6.116
0.3	0.9	96.000	84.209	66.459	52.068	40.752	31.890	24.955	19.528	15.281	11.958	9.357	7.322	5.730
0.4	1.2	96.000	78.620	60.612	47.309	37.006	28.956	22.659	17.731	13.875	10.858	8.496	6.649	5.203
0.5	1.5	96.000	70.864	53.236	41.382	32.348	25.309	19.805	15.498	12.127	9.490	7.426	5.811	4.547
0.6	1.8	96.000	60.741	44.469	34.425	26.893	21.039	16.463	12.882	10.081	7.889	6.173	4.831	3.780
0.7	2.1	96.000	48.227	34.498	26.607	20.774	16.250	12.715	9.950	7.786	6.093	4.768	3.731	2.920
0.8	2.4	96.000	33.552	23.563	18.121	14.141	11.061	8.655	6.773	5.300	4.147	3.245	2.540	1.987
0.9	2.7	96.000	17.224	11.955	9.176	7.159	5.600	4.381	3.429	2.683	2.099	1.643	1.286	1.006
1.0	3.0	96.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

De acuerdo con los resultados obtenidos para la presión en exceso a la hidrostática, y aplicando las ecuaciones (4.77) y (4.78), se obtiene el grado de consolidación en el estrato de suelo y el error relativo porcentual con el método implícito simple.

**Tabla 7.** Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método implícito simple.

z/H	Tv	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
	z(m)/Días	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	5.536	22.813	39.190	52.365	62.718	70.825	77.170	82.135	86.020	89.060	91.439	93.301
0.1	0.3	0.000	6.240	23.703	39.932	52.950	63.177	71.184	77.451	82.355	86.192	89.195	91.545	93.384
0.2	0.6	0.000	8.421	26.366	42.139	54.693	64.543	72.253	78.287	83.009	86.704	89.596	91.858	93.629
0.3	0.9	0.000	12.282	30.772	45.763	57.550	66.781	74.005	79.658	84.082	87.544	90.253	92.372	94.031
0.4	1.2	0.000	18.105	36.863	50.719	61.452	69.837	76.397	81.530	85.547	88.690	91.150	93.074	94.581
0.5	1.5	0.000	26.184	44.545	56.894	66.304	73.636	79.370	83.857	87.367	90.115	92.264	93.947	95.263
0.6	1.8	0.000	36.728	53.678	64.141	71.987	78.085	82.851	86.581	89.499	91.783	93.570	94.968	96.063
0.7	2.1	0.000	49.763	64.065	72.284	78.361	83.073	86.755	89.635	91.889	93.653	95.034	96.114	96.959
0.8	2.4	0.000	65.050	75.455	81.124	85.270	88.478	90.984	92.945	94.479	95.680	96.619	97.355	97.930
0.9	2.7	0.000	82.058	87.547	90.441	92.543	94.167	95.436	96.429	97.205	97.813	98.289	98.661	98.952
1.0	3.0	0.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

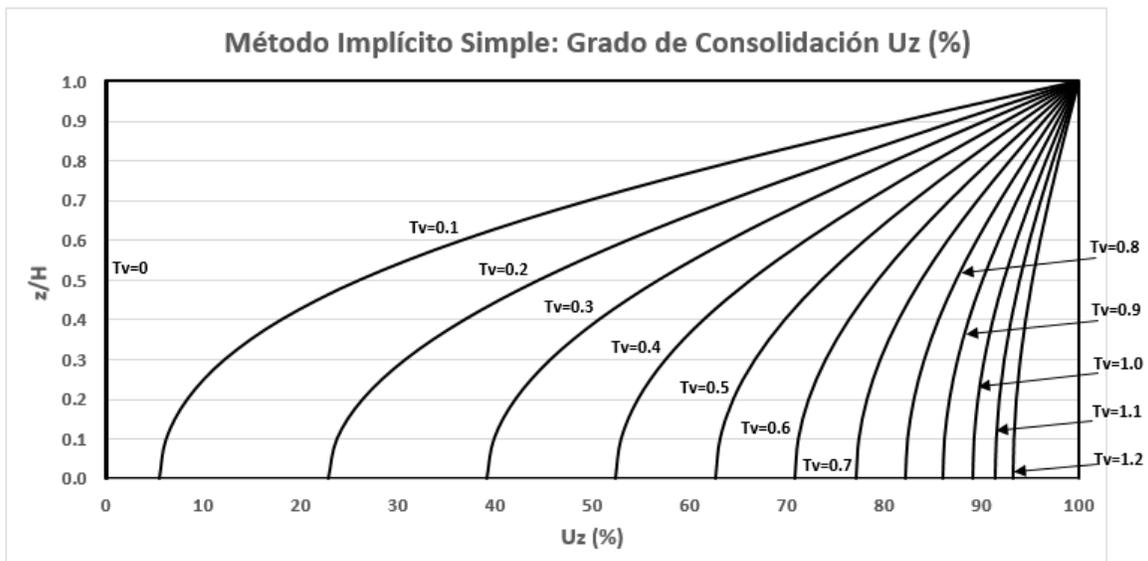
## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

**Tabla 8.** Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método implícito simple.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	9.209	0.192	0.329	0.355	0.324	0.287	0.250	0.217	0.186	0.159	0.135	0.114
0.1	0.3	0.000	7.437	0.135	0.324	0.347	0.318	0.282	0.247	0.214	0.184	0.157	0.133	0.113
0.2	0.6	0.000	4.060	0.005	0.309	0.325	0.300	0.268	0.235	0.204	0.176	0.150	0.128	0.108
0.3	0.9	0.000	1.356	0.155	0.285	0.292	0.272	0.245	0.216	0.189	0.163	0.140	0.119	0.101
0.4	1.2	0.000	0.227	0.263	0.253	0.251	0.237	0.215	0.192	0.168	0.146	0.126	0.108	0.091
0.5	1.5	0.000	0.950	0.307	0.213	0.205	0.196	0.181	0.163	0.144	0.126	0.109	0.093	0.079
0.6	1.8	0.000	1.120	0.293	0.169	0.159	0.154	0.145	0.131	0.117	0.103	0.089	0.077	0.065
0.7	2.1	0.000	0.965	0.237	0.123	0.114	0.112	0.107	0.098	0.088	0.078	0.068	0.058	0.050
0.8	2.4	0.000	0.653	0.159	0.078	0.072	0.072	0.069	0.064	0.058	0.052	0.045	0.039	0.034
0.9	2.7	0.000	0.304	0.076	0.037	0.034	0.034	0.033	0.031	0.029	0.026	0.023	0.020	0.017
1.0	3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	<b>Max</b>		9.209	0.307	0.329	0.355	0.324	0.287	0.250	0.217	0.186	0.159	0.135	0.114

La última fila representa el máximo error porcentual que se obtiene en cada factor tiempo.

A continuación se muestra la gráfica que ilustra la variación del grado de consolidación en términos de la relación  $z/H$  para cada factor de tiempo  $Tv$ , obtenido con el método implícito simple.



**Figura 13.** Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método implícito simple.

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

**7.2.3. Método de Crank - Nicolson**

Empleando las ecuaciones (4.62), (4.63), (4.64), (4.67), (4.68) y (4.69) se obtiene la solución en diferencias finitas para la presión en exceso a la hidrostática empleando el método de Crank - Nicolson.

**Tabla 9.** Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método de Crank - Nicolson.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	96.000	91.134	74.322	58.454	45.736	35.758	27.954	21.853	17.083	13.355	10.4397	8.161	6.380
0.1	0.3	96.000	90.445	73.458	57.740	45.173	35.318	27.610	21.584	16.873	13.190	10.3112	8.061	6.301
0.2	0.6	96.000	88.308	70.876	55.615	43.500	34.008	26.586	20.783	16.247	12.701	9.9288	7.762	6.068
0.3	0.9	96.000	84.529	66.610	52.127	40.756	31.861	24.907	19.471	15.221	11.899	9.3019	7.272	5.685
0.4	1.2	96.000	78.839	60.719	47.357	37.009	28.930	22.615	17.679	13.821	10.804	8.4459	6.603	5.161
0.5	1.5	96.000	70.968	53.302	41.418	32.350	25.286	19.766	15.452	12.080	9.443	7.3820	5.771	4.511
0.6	1.8	96.000	60.737	44.500	34.450	26.893	21.019	16.431	12.845	10.041	7.850	6.1363	4.797	3.750
0.7	2.1	96.000	48.149	34.505	26.624	20.773	16.235	12.691	9.921	7.756	6.063	4.7395	3.705	2.896
0.8	2.4	96.000	33.452	23.559	18.130	14.141	11.051	8.638	6.753	5.279	4.127	3.2261	2.522	1.971
0.9	2.7	96.000	17.157	11.950	9.181	7.159	5.594	4.373	3.419	2.672	2.089	1.6331	1.277	0.998
1.0	3.0	96.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.000

De acuerdo con los resultados obtenidos para la presión en exceso a la hidrostática, y aplicando las ecuaciones (4.77) y (4.78), se obtiene el grado de consolidación en el estrato de suelo y el error relativo porcentual con el método de Crank - Nicolson.

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

**Tabla 10.** Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método de Crank - Nicolson.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	5.069	22.582	39.110	52.359	62.752	70.881	77.237	82.205	86.089	89.125	91.499	93.354
0.1	0.3	0.000	5.786	23.482	39.854	52.944	63.211	71.240	77.517	82.424	86.260	89.259	91.603	93.436
0.2	0.6	0.000	8.012	26.171	42.068	54.688	64.575	72.307	78.351	83.076	86.770	89.658	91.915	93.680
0.3	0.9	0.000	11.949	30.615	45.701	57.546	66.811	74.055	79.718	84.145	87.605	90.311	92.425	94.079
0.4	1.2	0.000	17.876	36.751	50.670	61.449	69.865	76.442	81.584	85.604	88.746	91.202	93.122	94.623
0.5	1.5	0.000	26.075	44.477	56.856	66.303	73.661	79.410	83.904	87.417	90.163	92.310	93.989	95.301
0.6	1.8	0.000	36.732	53.646	64.114	71.986	78.105	82.884	86.620	89.540	91.823	93.608	95.003	96.094
0.7	2.1	0.000	49.845	64.058	72.267	78.361	83.089	86.780	89.666	91.921	93.685	95.063	96.141	96.983
0.8	2.4	0.000	65.154	75.460	81.114	85.270	88.489	91.002	92.966	94.501	95.701	96.640	97.373	97.946
0.9	2.7	0.000	82.128	87.552	90.437	92.543	94.173	95.445	96.439	97.216	97.824	98.299	98.670	98.960
1.0	3.0	0.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

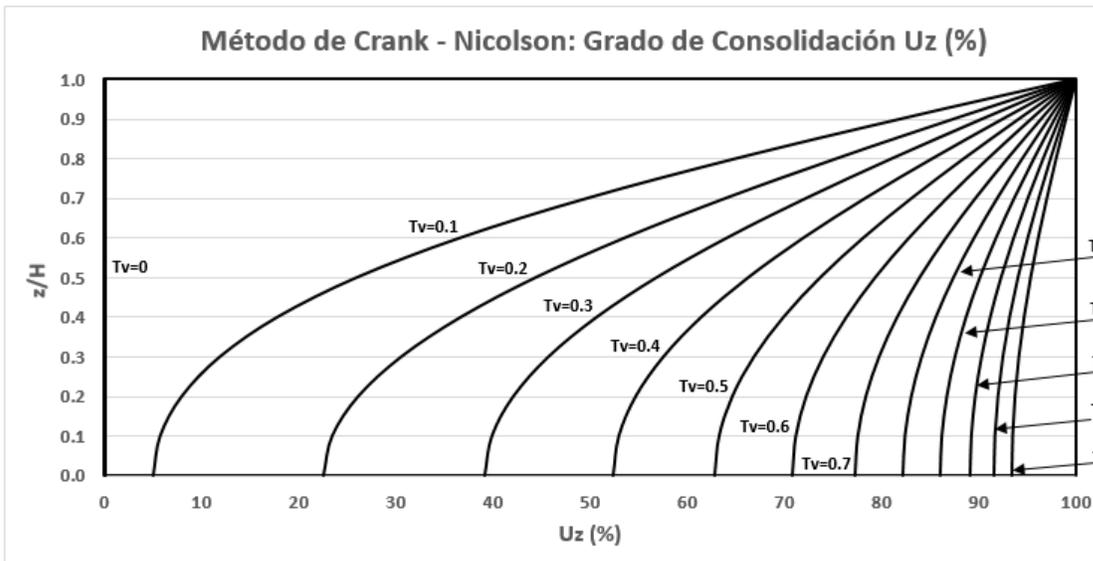
**Tabla 11.** Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método de Crank - Nicolson.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	0.017	0.822	0.532	0.367	0.270	0.208	0.164	0.131	0.106	0.086	0.070	0.058
0.1	0.3	0.000	0.370	0.802	0.518	0.358	0.265	0.204	0.161	0.129	0.105	0.085	0.069	0.057
0.2	0.6	0.000	0.996	0.746	0.478	0.335	0.250	0.194	0.154	0.124	0.100	0.082	0.067	0.055
0.3	0.9	0.000	1.394	0.663	0.419	0.299	0.226	0.177	0.142	0.114	0.093	0.076	0.062	0.051
0.4	1.2	0.000	1.486	0.565	0.350	0.255	0.197	0.156	0.126	0.102	0.083	0.068	0.056	0.046
0.5	1.5	0.000	1.360	0.459	0.279	0.207	0.163	0.131	0.107	0.087	0.072	0.059	0.048	0.040
0.6	1.8	0.000	1.108	0.351	0.211	0.159	0.128	0.105	0.086	0.071	0.059	0.048	0.040	0.033
0.7	2.1	0.000	0.802	0.248	0.147	0.114	0.093	0.077	0.064	0.053	0.044	0.037	0.030	0.025
0.8	2.4	0.000	0.494	0.153	0.091	0.071	0.060	0.050	0.042	0.035	0.030	0.025	0.020	0.017
0.9	2.7	0.000	0.219	0.069	0.042	0.033	0.028	0.024	0.021	0.017	0.015	0.012	0.010	0.008
1.0	3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	<b>Max</b>		1.486	0.822	0.532	0.367	0.270	0.208	0.164	0.131	0.106	0.086	0.070	0.058

La última fila representa el máximo error porcentual que se obtiene en cada factor tiempo.

A continuación se muestra la gráfica que ilustra la variación del grado de consolidación en términos de la relación  $z/H$  para cada factor de tiempo  $Tv$ , obtenido con el método de Crank - Nicolson.

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**



**Figura 14.** Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método de Crank - Nicolson.

**7.2.4. Método de Dufort - Frankel**

Empleando las ecuaciones (4.70), (4.71), (4.74), (4.75) y (4.76) se obtiene la solución en diferencias finitas para la presión en exceso a la hidrostática empleando el método de Dufort - Frankel.

**Tabla 12.** Presión en exceso a la hidrostática, en kPa, obtenida por medio del método de Dufort - Frankel.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	96.000	91.675	74.757	58.742	45.927	35.882	28.032	21.899	17.108	13.365	10.441	8.157	6.372
0.1	0.3	96.000	90.501	73.308	57.552	44.990	35.150	27.460	21.452	16.759	13.092	10.228	7.990	6.242
0.2	0.6	96.000	88.849	71.282	55.887	43.681	34.126	26.660	20.827	16.271	12.711	9.930	7.757	6.060
0.3	0.9	96.000	84.418	66.437	51.951	40.590	31.710	24.772	19.352	15.118	11.811	9.227	7.208	5.631
0.4	1.2	96.000	79.343	61.045	47.584	37.162	29.030	22.679	17.717	13.841	10.812	8.447	6.599	5.155
0.5	1.5	96.000	70.632	53.115	41.270	32.217	25.166	19.659	15.358	11.998	9.373	7.322	5.720	4.469
0.6	1.8	96.000	61.121	44.720	34.611	27.004	21.092	16.477	12.872	10.056	7.856	6.137	4.794	3.745
0.7	2.1	96.000	47.744	34.353	26.524	20.687	16.158	12.622	9.861	7.703	6.018	4.701	3.673	2.869
0.8	2.4	96.000	33.651	23.667	18.213	14.199	11.089	8.663	6.767	5.287	4.130	3.226	2.521	1.969
0.9	2.7	96.000	16.972	11.891	9.145	7.129	5.568	4.349	3.398	2.654	2.074	1.620	1.266	0.989
1.0	3.0	96.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

De acuerdo con los resultados obtenidos para la presión en exceso a la hidrostática, y aplicando las ecuaciones (4.77) y (4.78), se obtiene el grado de consolidación en el estrato de suelo y el error relativo porcentual con el método de Dufort - Frankel.

**Tabla 13.** Grado de consolidación, en %, obtenido por medio del método de Dufort - Frankel.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	4.505	22.128	38.810	52.160	62.622	70.800	77.188	82.179	86.078	89.124	91.504	93.363
0.1	0.3	0.000	5.728	23.637	40.050	53.135	63.385	71.396	77.654	82.543	86.362	89.346	91.677	93.498
0.2	0.6	0.000	7.449	25.748	41.785	54.499	64.452	72.229	78.305	83.051	86.760	89.656	91.919	93.687
0.3	0.9	0.000	12.065	30.795	45.885	57.719	66.969	74.196	79.841	84.252	87.697	90.389	92.492	94.134
0.4	1.2	0.000	17.351	36.411	50.433	61.290	69.760	76.376	81.545	85.583	88.737	91.201	93.126	94.630
0.5	1.5	0.000	26.425	44.672	57.010	66.441	73.786	79.521	84.002	87.502	90.236	92.373	94.041	95.345
0.6	1.8	0.000	36.333	53.417	63.947	71.871	78.029	82.836	86.592	89.525	91.817	93.607	95.006	96.099
0.7	2.1	0.000	50.267	64.216	72.371	78.451	83.169	86.852	89.729	91.976	93.731	95.103	96.174	97.011
0.8	2.4	0.000	64.947	75.347	81.028	85.210	88.449	90.977	92.951	94.493	95.698	96.639	97.374	97.949
0.9	2.7	0.000	82.321	87.614	90.474	92.574	94.200	95.469	96.461	97.235	97.840	98.313	98.682	98.970
1.0	3.0	0.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

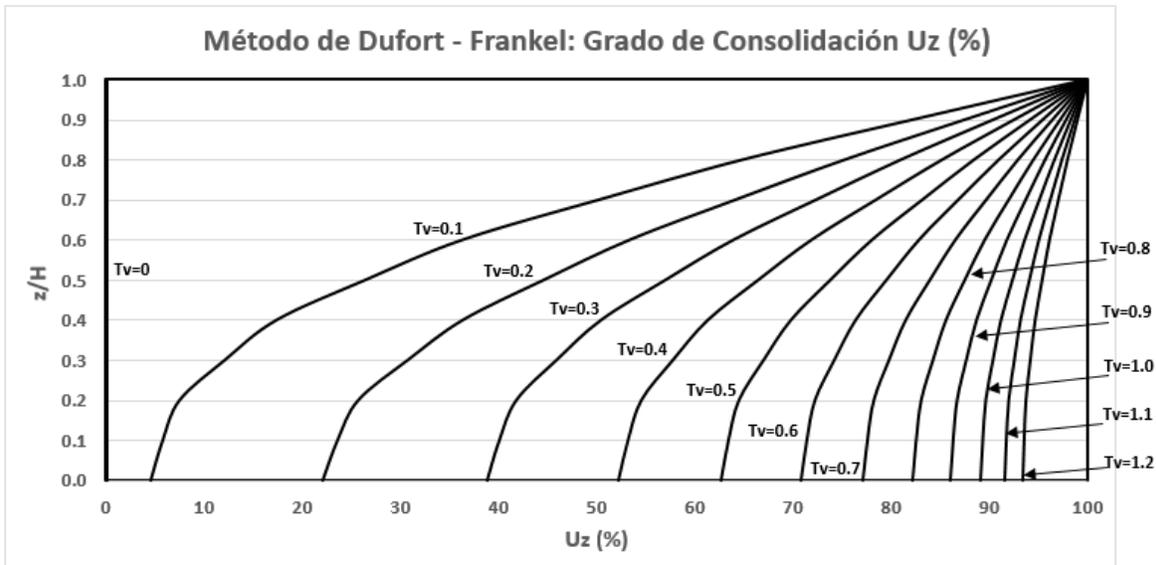
**Tabla 14.** Error relativo porcentual, en %, obtenido por medio del método de Dufort - Frankel.

	<b>Tv</b>	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
<b>z/H</b>	<b>z(m)/Días</b>	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
0.0	0.0	0.000	11.138	2.813	1.295	0.745	0.476	0.323	0.227	0.163	0.119	0.088	0.065	0.049
0.1	0.3	0.000	1.379	0.145	0.028	0.000	0.010	0.014	0.015	0.014	0.013	0.012	0.011	0.009
0.2	0.6	0.000	7.961	2.348	1.148	0.679	0.440	0.301	0.213	0.153	0.112	0.083	0.062	0.046
0.3	0.9	0.000	0.435	0.079	0.019	0.001	0.009	0.012	0.013	0.013	0.012	0.011	0.010	0.008
0.4	1.2	0.000	4.381	1.485	0.815	0.515	0.347	0.242	0.174	0.127	0.093	0.069	0.052	0.039
0.5	1.5	0.000	0.039	0.024	0.010	0.001	0.006	0.009	0.010	0.010	0.009	0.008	0.007	0.007
0.6	1.8	0.000	2.184	0.778	0.471	0.320	0.225	0.162	0.119	0.088	0.066	0.049	0.037	0.028
0.7	2.1	0.000	0.037	0.002	0.004	0.001	0.004	0.005	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004
0.8	2.4	0.000	0.811	0.303	0.197	0.142	0.105	0.078	0.058	0.044	0.033	0.025	0.019	0.014
0.9	2.7	0.000	0.015	0.001	0.001	0.000	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001
1.0	3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	<b>Max</b>		11.138	2.813	1.295	0.745	0.476	0.323	0.227	0.163	0.119	0.088	0.065	0.049

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

La última fila representa el máximo error porcentual que se obtiene en cada factor tiempo.

A continuación se muestra la gráfica que ilustra la variación del grado de consolidación en términos de la relación  $z/H$  para cada factor de tiempo  $Tv$ , obtenido con el método de Dufort - Frankel.



**Figura 15.** Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con el método de Dufort - Frankel.

### 7.2.5. Análisis de la solución numérica

De acuerdo con los resultados obtenidos en cada uno de los cuatro métodos de discretización por diferencias finitas, el comportamiento físico del fenómeno de consolidación es muy similar al descrito con la solución analítica, es decir,

- I. La presión en exceso a la hidrostática se comporta de manera inversa al grado de consolidación, es decir, entre mayor sea la presión en exceso a la hidrostática menor será el grado de consolidación y viceversa; lo anterior se cumple para cada profundidad y tiempo considerado.
- II. Para un factor de tiempo específico, a mayor profundidad, o entre más cerca se considere un punto de la superficie permeable, mayor será el grado de consolidación y por ende menor será la presión en

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

exceso a la hidrostática. Caso contrario se cumple al tomar un punto cercano a la superficie impermeable, es decir el grado de consolidación disminuye y la presión en exceso a la hidrostática aumenta.

- III. Al tomar una profundidad determinada en el estrato de suelo, entre más días transcurran, o entre mayor sea el valor del factor tiempo, mayor será el grado de consolidación, y por consiguiente menor la presión en exceso a la hidrostática.

Lo anterior indica que cada uno de los métodos de discretización en diferencias finitas empleados describe de manera adecuada, desde un punto de vista físico, el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua vertical.

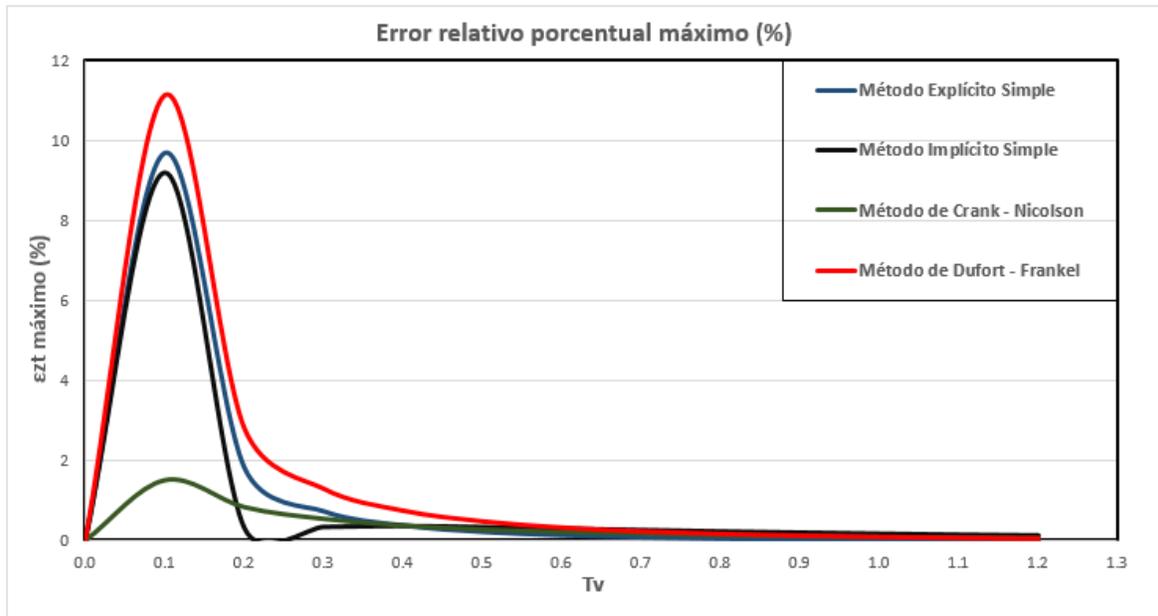
Ahora bien, con respecto al error relativo porcentual, para un factor de tiempo específico, a mayor profundidad, o entre más cerca se considere un punto de la superficie permeable, mayor será el valor de este. Caso contrario se cumple al tomar un punto cercano a la superficie impermeable, es decir, el error relativo porcentual disminuye. Lo anterior se debe en gran medida a la aproximación en diferencias finitas empleada para la primera derivada  $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$  en cada uno de los métodos de discretización, la cual surge de la condición de frontera (BC2). Esta condición permite obtener el valor de la presión en exceso la hidrostática en la frontera impermeable ( $i = 0$ ).

Por otro lado, al tomar una profundidad determinada en el estrato de suelo, entre más días transcurran, o entre mayor sea el valor del factor tiempo, menor será el error relativo porcentual. Esto se debe a que los métodos en diferencias finitas empleados cumplen las condiciones matemáticas de estabilidad, consistencia y convergencia, lo cual se puede representar como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_z^{t*} = U_z^t$$

A continuación se muestra una gráfica que ilustra la variación del error relativo porcentual máximo en términos del factor tiempo, para cada uno de los cuatro métodos de discretización empleados.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL



**Figura 16.** Variación del error relativo porcentual máximo en términos del factor tiempo para cada uno de los métodos de discretización en diferencias finitas.

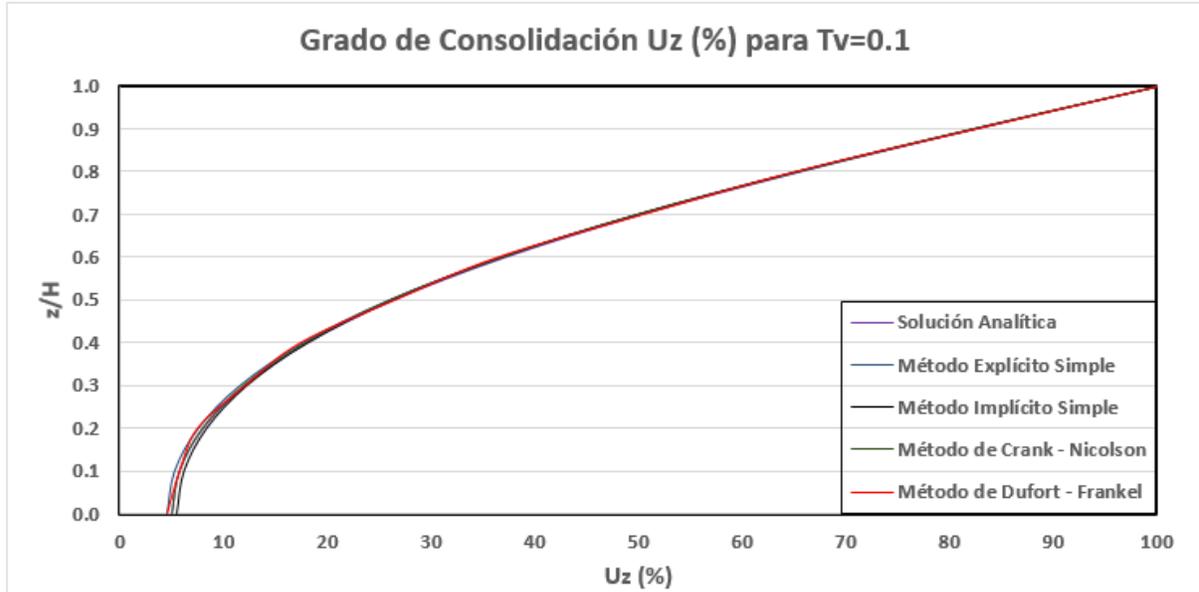
De acuerdo con la Figura 16, el error relativo porcentual máximo para cada uno de los métodos de discretización presenta un comportamiento similar, es decir, crece de manera casi lineal hasta alcanzar el punto máximo en  $T_v=0.1$ , y a medida que aumenta el valor del factor tiempo, disminuye de manera asintótica acercándose cada vez más a cero (efecto de atenuación). Podemos notar además que la gráfica con el pico más alto corresponde al método de Dufort – Frankel, con un valor igual a 11.138%, mientras que la que presenta el pico más bajo corresponde al método de Crank– Nicolson, con un valor de 1.486%; sumado a lo anterior, la serie de datos que presenta una tendencia homogénea y estrictamente decreciente, con respecto al error relativo porcentual máximo, a medida que aumenta el factor tiempo corresponde al método de Crank – Nicolson.

Cabe señalar que a medida que transcurre el tiempo, los valores del error relativo porcentual máximo obtenidos de los métodos de discretización son muy similares. Lo anterior representa un argumento adicional para establecer que la solución numérica converge a la analítica a medida que transcurre el tiempo de consolidación del estrato de suelo.

A continuación se muestra la gráfica que ilustra el grado de consolidación en el estrato de suelo para  $T_v = 0.1$  (tiempo de 30 días) obtenido a partir de la solución analítica y los cuatro métodos de discretización en diferencias

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

finitas. Este tiempo se tomó como referencia debido a que, según se muestra en la Figura 16, es aquel en el cual se presenta el error relativo porcentual máximo para cada uno de los métodos numéricos considerados.



**Figura 17.** Grado de consolidación en el estrato de suelo obtenido con la solución analítica y los cuatro métodos de discretización en diferencias finitas para  $T_v = 0.1$ .

De acuerdo con la Figura 17, las diferentes soluciones numéricas están muy próximas a la solución analítica, como lo anterior sucede para el tiempo en el cual se presenta el valor máximo del error relativo porcentual, esto nos permite afirmar que cada una de las cuatro soluciones numéricas permiten estimar, con un nivel de incertidumbre bajo, las variables físicas involucradas en el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua vertical, en particular, la presión en exceso a la hidrostática y el grado de consolidación.

Sin embargo, desde un punto de vista analítico, los resultados obtenidos con el método de Dufort – Frankel no son precisos, pues aunque el error de truncamiento es de segundo orden para la variable espacial y temporal  $O[(\Delta z)^2, (\Delta t)^2]$ , de acuerdo con la Figura 15, la curva que representa el grado de consolidación no es continua en todo su dominio (la curva presenta algunos “quebres”) para valores del factor tiempo entre 0.1 y 0.5. Lo anterior se debe en gran medida a que para  $T_v = 0.1$  se emplea el método explícito simple para calcular la presión en exceso a la hidrostática en el estrato de suelo.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

Por otro lado, el método explícito simple, de acuerdo con la ecuación (4.59), es inestable para valores altos de  $\lambda$ . Dicha inestabilidad no se manifiesta en ningún método implícito (método implícito simple y método de Crank – Nicolson). El método de Crank – Nicolson converge más rápidamente conforme  $\lambda$  decrece, y proporciona resultados de exactitud moderada aun cuando  $\lambda$  sea relativamente alta; esto es de esperarse, ya que el método de Crank – Nicolson es implícito, tiene una exactitud de segundo orden con respecto a ambas variables independientes, y si se comparan las ecuaciones en diferencias para cada uno de métodos, el de Crank – Nicolson es el que más puntos del estrato de suelo involucra al efectuar el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática.

Teniendo en cuenta lo anterior y el argumento matemático descrito justo después de la Figura 16, establecemos que el método de discretización en diferencias finitas que mejor describe el fenómeno analizado, desde un punto de vista físico, matemático y práctico en la ingeniería, es el método de **Crank – Nicolson**.

### 8. Discusión

Este trabajo de grado pretende ser un punto de partida que muestre la importancia que tienen hoy en día los modelos matemáticos computacionales en el desarrollo de la ingeniería, los cuales permiten explicar y entender el comportamiento físico de un fenómeno en la práctica, en particular, el fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical.

El fenómeno de consolidación de suelos puede ser tan complejo como se desee, pues existen diferentes alternativas por medio de las cuales, desde una perspectiva práctica, se puede consolidar una masa de suelo. Algunas son aquellas en las cuales la carga que soporta el suelo es variable con la posición y el tiempo (Abbasi et al., 2007; Biot, 1941; Carrillo, 1942); otras incluyen drenes verticales instalados en el estrato de suelo hacia los cuales drena el agua (Barron, 1948; Basu & Madhav, 2000; Covo-Torres et al., 2015; Hansbo, 1981; Hawlader et al., 2002; Tang et al., 2013), algunas otras incluyen ambos, carga variable y drenes verticales, por lo que es necesario considerar tres variables independientes en el modelo matemático, la variable tiempo, la dirección vertical y la dirección radial (Biot, 1941; Carrillo, 1942; Walker, 2011), finalmente algunas incluyen drenes verticales y precarga por vacío (B. Indraratna et al., 2005; Buddhima Indraratna et al., 2005).

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

Teniendo en cuenta la complejidad matemática que trae consigo plantear una solución analítica para las diferentes alternativas mencionadas, se hace menester considerar modelos computacionales (Fairweather & Mitchell, 1965, 1967; Peaceman & Rachford, Jr., 1955; Qin, 2010) que permitan predecir con cierto grado de exactitud el comportamiento físico del fenómeno considerado; en este trabajo de grado se ilustra dicha situación, pues los modelos en diferencias finitas considerados en este proyecto y que permiten obtener la solución numérica del fenómeno de consolidación de suelos con flujo de agua en dirección vertical, se pueden modificar y adaptar para considerar todas las posibles variables involucradas en los procesos de consolidación antes descritos, y así obtener una solución satisfactoria que permita dar respuesta a los procesos actuales propios del desarrollo de la ingeniería.

Finalmente, los trabajos de investigación consultados (Dehghan, 2002; Fairweather & Mitchell, 1965, 1967; Peaceman & Rachford, Jr., 1955; Qin, 2010) concluyen que los métodos de discretización en diferencias finitas que aproximan con un grado menor de incertidumbre los fenómenos en ingeniería descritos por un PVIF tipo parabólico (problemas tipo difusivo) son los métodos implícitos. Lo anterior concuerda con uno de los resultados obtenidos en este trabajo, el cual establece que el método de discretización en diferencias finitas que mejor describe el fenómeno analizado, desde un punto de vista físico, matemático y práctico en la ingeniería, es el método de Crank – Nicolson.

## 9. Conclusiones

- Este trabajo de grado da una respuesta satisfactoria tanto al objetivo general como a los objetivos específicos planteados; se llega a que el método de discretización en diferencias finitas que mejor describe el fenómeno analizado, desde un punto de vista físico, matemático y práctico en la ingeniería, es el método de Crank – Nicolson.
- Los métodos implícitos en diferencias finitas generalmente ofrecen un grado menor de incertidumbre cuando se resuelve un PVIF tipo parabólico (Dehghan, 2002; Fairweather & Mitchell, 1965, 1967; Peaceman & Rachford, Jr., 1955; Qin, 2010), ya que incluyen una mayor cantidad de nodos de la malla que define el problema particular, con respecto a los métodos explícitos.
- El método explícito simple es inestable para valores altos de  $\lambda$  (Peaceman & Rachford, Jr., 1955). Dicha inestabilidad no se manifiesta en ningún método implícito (método implícito simple y método de Crank – Nicolson). El método de Crank – Nicolson converge más rápidamente conforme  $\lambda$  decrece, y proporciona resultados de exactitud moderada aun cuando  $\lambda$  sea relativamente alta (Fairweather & Mitchell, 1967); esto es de esperarse, ya que el método de Crank – Nicolson es implícito, tiene una exactitud de segundo orden con respecto a ambas variables independientes, y si se comparan las ecuaciones en diferencias para cada uno de métodos, el de Crank – Nicolson es el que más puntos del estrato de suelo involucra al efectuar el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática.
- El método de Crank-Nicolson se emplea con frecuencia para resolver EDP parabólicas en una dimensión espacial. Las ventajas del método se aprecian cuando se presentan problemas más complicados, como aquellos en los que se tienen mallas irregularmente espaciadas. Tal espaciado no uniforme a menudo es ventajoso cuando se tiene un conocimiento previo de que la solución varía rápidamente en porciones locales del sistema (Pletcher et al., 2012).

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

- Este trabajo de grado representa una simple aplicación de lo práctico que llegan a ser los métodos numéricos, en particular el método de discretización en diferencias finitas, para la resolución de un problema específico en ingeniería. Aún quedan muchas otras cuestiones abiertas con respecto al fenómeno de consolidación de suelos, las cuales son tema de investigación hoy en día, y que valen la pena resolver, no solo para el desarrollo de la investigación académica sino también para fortalecer aún más la ingeniería práctica, en particular el campo de la geotecnia aplicada, tanto a nivel local como internacional. Se extiende la invitación a la Facultad de ingeniería de la Universidad de Antioquia, en especial a la Escuela Ambiental, incluir dentro de los planes de estudio de los diferentes programas académicos ofertados una amplia variedad de cursos (obligatorios y electivos) que propicien el fortalecimiento de la matemática computacional aplicada a la ingeniería, para así dar respuesta a muchos problemas que surgen actualmente en la práctica de la misma, los cuales por la complejidad que revisten, no admiten una solución analítica, y requieren un grado adecuado de comprensión y aproximación. Esto no solo permite el fortalecimiento académico y reconocimiento institucional, a nivel local e internacional, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia, sino también el grado de preparación y aceptación, desde el punto de vista laboral, a partir del cual es considerado un egresado de dicha facultad.

## 10. Referencias Bibliográficas

- Abbasi, N., Rahimi, H., Javadi, A. A., & Fakher, A. (2007). Finite difference approach for consolidation with variable compressibility and permeability. *Computers and Geotechnics*, 34(1). <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2006.09.003>
- Barron, R. A. (1948). Consolidation of Fine-Grained Soils by Drain Wells by Drain Wells. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 113(1). <https://doi.org/10.1061/taceat.0006098>
- Basu, D., & Madhav, M. R. (2000). Effect of prefabricated vertical drain clogging on the rate of consolidation: A numerical study. *Geosynthetics International*, 7(3). <https://doi.org/10.1680/gein.7.0172>
- Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12(2). <https://doi.org/10.1063/1.1712886>
- Braja, M. Das. (2015). *Fundamentos de ingeniería geotécnica* (Cuarta edi). Cengage Learning.
- Budhu, M. (2010). *Soil Mechanics and Foundations*, 3rd Edition. In John Wiley & Sons, Incorporated.
- Carrillo, N. (1942). Simple Two and Three Dimensional Case in the Theory of Consolidation of Soils. *Journal of Mathematics and Physics*, 21(1-4). <https://doi.org/10.1002/sapm19422111>
- Chung, T. (2002). *Computational Fluid Dynamics* (Primera ed). Cambridge University Press.
- Covo-Torres, Á., Eljaiek-Urzola, M., & Vivas-Reyes, R. (2015). Radial Consolidation for equal strain with resistance in the vertical drain. *Soil and Tillage Research*, 145. <https://doi.org/10.1016/j.still.2014.08.008>
- Dehghan, M. (2002). A new ADI technique for two-dimensional parabolic

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

equation with an integral condition. *Computers and Mathematics with Applications*, 43(12). [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00113-X](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00113-X)

DiPrima, B. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (Cuarta ed.). Limusa - Willey.

Fairweather, G., & Mitchell, A. R. (1965). A New Alternating Direction Method for Parabolic Equations in Three Space Variables. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 13(4). <https://doi.org/10.1137/0113063>

Fairweather, G., & Mitchell, A. R. (1967). A New Computational Procedure for A.D.I. Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 4(2). <https://doi.org/10.1137/0704016>

Farlow, S. (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (Primera ed.). Dover Publications.

Hansbo, S. (1981). CONSOLIDATION OF FINE-GRAINED SOILS BY PREFABRICATED DRAINS. *Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 3. [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(84\)91874-6](https://doi.org/10.1016/0148-9062(84)91874-6)

Hawladar, B. C., Imai, G., & Muhunthan, B. (2002). Numerical study of the factors affecting the consolidation of clay with vertical drains. *Geotextiles and Geomembranes*, 20(4). [https://doi.org/10.1016/S0266-1144\(02\)00012-2](https://doi.org/10.1016/S0266-1144(02)00012-2)

Indraratna, B., Sathananthan, I., Rujikiatkamjorn, C., & Balasubramaniam, A. S. (2005). Analytical and Numerical Modeling of Soft Soil Stabilized by Prefabricated Vertical Drains Incorporating Vacuum Preloading. *International Journal of Geomechanics*, 5(2). [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1532-3641\(2005\)5:2\(114\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1532-3641(2005)5:2(114))

Indraratna, Buddhima, Rujikiatkamjorn, C., & Sathananthan, I. (2005). Analytical and numerical solutions for a single vertical drain including the effects of vacuum preloading. *Canadian Geotechnical Journal*, 42(4). <https://doi.org/10.1139/t05-029>

Mudge, M. R., Lapidus, L., & Pinder, G. F. (2000). Numerical Solution of Partial

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

Differential Equations in Science and Engineering. *The Mathematical Gazette*, 84(499). <https://doi.org/10.2307/3621561>

Peaceman, D. W., & Rachford, Jr., H. H. (1955). The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 3(1). <https://doi.org/10.1137/0103003>

Pletcher, R. H., Tannehill, J. C., & Anderson, D. A. (2012). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Tercera ed). CRC Press.

Qin, J. (2010). The new alternating direction implicit difference methods for solving three-dimensional parabolic equations. *Applied Mathematical Modelling*, 34(4), 890–897. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.07.006>

Smith, G. D. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (Tercera ed). Oxford University Press.

Tang, X., Niu, B., Cheng, G., & Shen, H. (2013). Closed-form solution for consolidation of three-layer soil with a vertical drain system. *Geotextiles and Geomembranes*, 36. <https://doi.org/10.1016/j.geotexmem.2012.12.002>

Terzaghi, K. (1925). Principles of Soil Mechanics: IV-Settlement and Consolidation of Clay. *Engineering News-Record*, 95(22).

Walker, R. T. (2011). Vertical drain consolidation analysis in one, two and three dimensions. *Computers and Geotechnics*, 38(8). <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2011.07.006>

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

## 11. Anexos

### 11.1. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método explícito simple.

```
Attribute VB_Name = "MetodoExplicitoSuelos"
Sub MetodoExplicitoSuelos()
    constlamb = Range("C10")
    ltotal = Range("C5")
    tttotal = Range("C7")
    deltat = Range("C8")
    deltax = Range("C9")
    valorinicial = Range("C19")
    frontera1 = Range("C15")
    frontera2 = Range("C16")
    valorfrontera1 = Range("D15")
    valorfrontera2 = Range("D16")
    filax = 5
    columnax = 8
    colultx = Range("H5").End(xlToRight).Column
    Range(Cells(filax, columnax + 1), Cells(filax, colultx)).Select
    With Selection
        .ClearContents
        .Borders.LineStyle = xlNone
        .Font.Bold = False
    End With
    nx = ltotal / deltax
    For m = 1 To nx
        Cells(filax, columnax + m) = Cells(filax, columnax + m - 1) + deltax
        Cells(filax, columnax + m).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
            .Font.Bold = True
        End With
    Next
    filat = 6
    columnat = 7
    filaultt = Range("G5").End(xlDown).Row
    Range(Cells(filat + 1, columnat), Cells(filaultt, columnat)).Select
    With Selection
        .ClearContents
        .Borders.LineStyle = xlNone
        .Font.Bold = False
    End With
    nt = tttotal / deltat
    For m = 1 To nt
        Cells(filat + m, columnat) = Cells(filat + m - 1, columnat) + deltat
        Cells(filat + m, columnat).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```

        .HorizontalAlignment = xlCenter
        .Font.Bold = True
    End With
Next
Range(Cells(filax + 1, columnax), Cells(filaultt, colultx)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
For t = 1 To nt + 1
    For i = 1 To nx + 1
'Condición Inicial
    If t = 1 Then
        If i = 1 And frontera1 = "Dirichlet" Then
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfronteral
        ElseIf i = 1 And frontera1 = "Neumann" Then
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
        End If
        If i = nx + 1 And frontera2 = "Dirichlet" Then
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
        ElseIf i = nx + 1 And frontera2 = "Neumann" Then
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
        End If
        If i <> 1 And i <> nx + 1 Then
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
        End If
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    End If
'Condición de Frontera Extremo Izquierdo
    If i = 1 And t <> 1 Then
        'Frontera Dirichlet
        If frontera1 = "Dirichlet" Then
            Cells(filat + t - 1, columnax) = valorfronteral
        'Frontera Neumann
        ElseIf frontera1 = "Neumann" Then
            Cells(filat + t - 1, columnax) = Cells(filat + t - 2,
columnax) + ((2 * constlamb) * (Cells(filat + t - 2, columnax + 1) -
Cells(filat + t - 2, columnax) - (deltax * valorfronteral)))
        End If
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    End If
'Condición de Frontera Extremo Derecho

```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```
If i = nx + 1 And t <> 1 Then
'Frontera Dirichlet
  If frontera2 = "Dirichlet" Then
    Cells(filat + t - 1, columnax + nx) = valorfrontera2
'Frontera Neumann
  ElseIf frontera2 = "Neumann" Then
    Cells(filat + t - 1, columnax + nx) = Cells(filat + t - 2, columnax + nx) + ((2 * constlamb) * (Cells(filat + t - 2, columnax + nx) - Cells(filat + t - 2, columnax + nx) + (deltax * valorfrontera2)))
  End If
  Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
  Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
  With Selection
    .Borders.LineStyle = xlContinuous
    .HorizontalAlignment = xlCenter
  End With
End If
'Puntos Internos
If i <> 1 And i <> nx + 1 And t <> 1 Then
  Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + ((constlamb) * (Cells(filat + t - 2, columnax + i) - 2 * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + Cells(filat + t - 2, columnax + i - 2)))
  Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
  Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
  With Selection
    .Borders.LineStyle = xlContinuous
    .HorizontalAlignment = xlCenter
  End With
End If
Next
End Sub
```

### 11.2. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método implícito simple o método de Laasonen.

```
Attribute VB_Name = "MetodoImplicitoSuelos"
Sub MetodoImplicitoSuelos()
Dim valoresr(1000) As Double
Dim coefe(1000) As Double
Dim coeff(1000) As Double
Dim coefg(1000) As Double
Dim coefr(1000) As Double
Dim coefx(1000) As Double
constlamb = Range("C10")
ltotal = Range("C5")
ttotal = Range("C7")
deltat = Range("C8")
deltax = Range("C9")
valorinicial = Range("C19")
```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```
frontera1 = Range("C15")
frontera2 = Range("C16")
valorfrontera1 = Range("D15")
valorfrontera2 = Range("D16")
filax = 5
columnax = 8
colultx = Range("H5").End(xlToRight).Column
Range(Cells(filax, columnax + 1), Cells(filax, colultx)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
nx = ltotal / deltax
For m = 1 To nx
    Cells(filax, columnax + m) = Cells(filax, columnax + m - 1) + deltax
    Cells(filax, columnax + m).Select
    With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
        .Font.Bold = True
    End With
Next
filat = 6
columnat = 7
filaultt = Range("G5").End(xlDown).Row
Range(Cells(filat + 1, columnat), Cells(filaultt, columnat)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
nt = tttotal / deltat
For m = 1 To nt
    Cells(filat + m, columnat) = Cells(filat + m - 1, columnat) + deltat
    Cells(filat + m, columnat).Select
    With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
        .Font.Bold = True
    End With
Next
Range(Cells(filax + 1, columnax), Cells(filaultt, colultx)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
If frontera1 = "Neumann" Then
    gradol = 1
ElseIf frontera1 = "Dirichlet" Then
    gradol = 0
End If
```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

If frontera2 = "Neumann" Then
    grado2 = 1
ElseIf frontera2 = "Dirichlet" Then
    grado2 = 0
End If
For t = 1 To nt + 1
    For i = 1 To nx + 1
'Condición Inicial
        'Extremo Izquierdo
        If t = 1 Then
            If i = 1 And fronteral = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfronteral
            ElseIf i = 1 And fronteral = "Neumann" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            'Extremo Derecho
            If i = nx + 1 And frontera2 = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            ElseIf i = nx + 1 And frontera2 = "Neumann" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            'Puntos Interiores
            If i <> 1 And i <> nx + 1 Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
            With Selection
                .Borders.LineStyle = xlContinuous
                .HorizontalAlignment = xlCenter
            End With
        End If
'Ambas fronteras Dirichlet
        If t <> 1 And grado1 = 0 And grado2 = 0 Then
            'Extremo Izquierdo
            If i = 1 Then
                Cells(filat + t - 1, columnax) = valorfronteral
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
                With Selection
                    .Borders.LineStyle = xlContinuous
                    .HorizontalAlignment = xlCenter
                End With
            End If
            'Extremo Derecho
            If i = nx + 1 Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfrontera2
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
                With Selection
                    .Borders.LineStyle = xlContinuous

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

        .HorizontalAlignment = xlCenter
    End With
End If
'Primer Nodo Interior
If i = 2 Then
    valoresr(i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) +
((constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 2))
End If
'Último Nodo Interior
If i = nx Then
    valoresr(i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) +
((constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
End If
'Puntos Interiores
If i <> 1 And i <> 2 And i <> nx And i <> nx + 1 Then
    valoresr(i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1)
End If
End If
'Frontera Izquierda Neumann y Frontera Derecha Dirichlet
If t <> 1 And grado1 = 1 And grado2 = 0 Then
    'Extremo Izquierdo
    If i = 1 Then
        valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + (2 *
((constlamb) * deltax * valorfronteral)
    End If
    'Extremo Derecho
    If i = nx + 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfrontera2
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    End If
    'Último Nodo Interior
    If i = nx Then
        If t = 2 Then
            valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) +
((constlamb) * valorfrontera2)
        Else
            valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) +
((constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
        End If
    End If
    'Puntos Interiores
    If i <> 1 And i <> nx And i <> nx + 1 Then
        valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1)
    End If
End If
'Frontera Izquierda Dirichlet y Frontera Derecha Neumann
If t <> 1 And grado1 = 0 And grado2 = 1 Then

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

'Extremo Izquierdo
If i = 1 Then
    Cells(filat + t - 1, columnax) = valorfronteral
    Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
    Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
    With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
    End With
End If
'Extremo Derecho
If i = nx + 1 Then
    valoresr(i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) +
(2 * (constlamb) * deltax * valorfrontera2)
End If
'Primer Nodo Interior
If i = 2 Then
    valoresr(i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) +
((constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 2))
End If
'Puntos Interiores
If i <> 1 And i <> 2 And i <> nx + 1 Then
    valoresr(i - 1) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1)
End If
End If
'Ambas Fronteras Neumann
If t <> 1 And grado1 = 1 And grado2 = 1 Then
'Extremo Izquierdo
If i = 1 Then
    valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + (2 *
(constlamb) * deltax * valorfronteral)
End If
'Extremo Derecho
If i = nx + 1 Then
    valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + (2 *
(constlamb) * deltax * valorfrontera2)
End If
'Puntos Interiores
If i <> 1 And i <> nx + 1 Then
    valoresr(i) = Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1)
End If
End If
Next
'Resolver Sistema Tridiagonal
If t <> 1 Then
    n = nx - 1 + grado1 + grado2
    For m = 2 To n
        coefe(m) = -constlamb
        If grado2 = 1 And m = n Then
            coefe(m) = -2 * constlamb
        End If
    Next

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

For m = 1 To n - 1
    coefg(m) = -constlamb
    If gradol = 1 And m = 1 Then
        coefg(m) = -2 * constlamb
    End If
Next
For p = 1 To n
    coeff(p) = (2 * constlamb) + 1
    coefr(p) = valoresr(p)
Next
'Descomposición
For k = 2 To n
    coefe(k) = coefe(k) / coeff(k - 1)
    coeff(k) = coeff(k) - (coefe(k) * coefg(k - 1))
Next
'Sustitución hacia adelante
For k = 2 To n
    coefr(k) = coefr(k) - (coefe(k) * coefr(k - 1))
Next
'Sustitución hacia atras
coefx(n) = coefr(n) / coeff(n)
For k = n - 1 To 1 Step -1
    coefx(k) = (coefr(k) - (coefg(k) * coefx(k + 1))) / coeff(k)
Next
'Solución
For k = 1 To n
    If gradol = 0 And grado2 = 0 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    ElseIf gradol = 1 And grado2 = 0 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    ElseIf gradol = 0 And grado2 = 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    ElseIf gradol = 1 And grado2 = 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).NumberFormat = "0.0000"
    End If
Next

```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```
Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).Select
With Selection
    .Borders.LineStyle = xlContinuous
    .HorizontalAlignment = xlCenter
End With
End If
Next
End If
Next
End Sub
```

### 11.3. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método de Crank - Nicolson.

```
Attribute VB_Name = "MetodoCrankNicolsonSuelos"
Sub MetodoCrankNicolsonSuelos()
Dim valoresr(1000) As Double
Dim coefe(1000) As Double
Dim coeff(1000) As Double
Dim coefg(1000) As Double
Dim coefr(1000) As Double
Dim coefx(1000) As Double
constlamb = Range("C10")
ltotal = Range("C5")
ttotal = Range("C7")
deltat = Range("C8")
deltax = Range("C9")
valorinicial = Range("C19")
frontera1 = Range("C15")
frontera2 = Range("C16")
valorfrontera1 = Range("D15")
valorfrontera2 = Range("D16")
filax = 5
columnax = 8
colultx = Range("H5").End(xlToRight).Column
Range(Cells(filax, columnax + 1), Cells(filax, colultx)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
nx = ltotal / deltax
For m = 1 To nx
Cells(filax, columnax + m) = Cells(filax, columnax + m - 1) + deltax
Cells(filax, columnax + m).Select
With Selection
    .Borders.LineStyle = xlContinuous
    .HorizontalAlignment = xlCenter
    .Font.Bold = True
End With
Next
```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```
filat = 6
columnat = 7
filaultt = Range("G5").End(xlDown).Row
Range(Cells(filat + 1, columnat), Cells(filaultt, columnat)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
nt = tttotal / deltat
For m = 1 To nt
    Cells(filat + m, columnat) = Cells(filat + m - 1, columnat) + deltat
    Cells(filat + m, columnat).Select
    With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
        .Font.Bold = True
    End With
Next
Range(Cells(filax + 1, columnax), Cells(filaultt, colultx)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
If frontera1 = "Neumann" Then
    gradol = 1
ElseIf frontera1 = "Dirichlet" Then
    gradol = 0
End If
If frontera2 = "Neumann" Then
    grado2 = 1
ElseIf frontera2 = "Dirichlet" Then
    grado2 = 0
End If
For t = 1 To nt + 1
    For i = 1 To nx + 1
    'Condición Inicial
        'Extremo Izquierdo
        If t = 1 Then
            If i = 1 And frontera1 = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfronteral
            ElseIf i = 1 And frontera1 = "Neumann" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            'Extremo Derecho
            If i = nx + 1 And frontera2 = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            ElseIf i = nx + 1 And frontera2 = "Neumann" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            'Puntos Interiores
            If i <> 1 And i <> nx + 1 Then
```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
    End If
    Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
    Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
    With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
    End With
End If
'Ambas fronteras Dirichlet
If t <> 1 And grado1 = 0 And grado2 = 0 Then
    'Extremo Izquierdo
    If i = 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax) = valorfronteral
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    End If
    'Extremo Derecho
    If i = nx + 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfrontera2
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    End If
    'Primer Nodo Interior
    If i = 2 Then
        valoresr(i - 1) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i)) + (constlamb *
Cells(filat + t - 2, columnax + i - 2))
    End If
    'Último Nodo Interior
    If i = nx Then
        valoresr(i - 1) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i)) + (constlamb *
Cells(filat + t - 2, columnax + i))
    End If
    'Puntos Interiores
    If i <> 1 And i <> 2 And i <> nx And i <> nx + 1 Then
        valoresr(i - 1) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
    End If

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

End If
'Frontera Izquierda Neumann y Frontera Derecha Dirichlet
  If t <> 1 And grado1 = 1 And grado2 = 0 Then
    'Extremo Izquierdo
    If i = 1 Then
      valoresr(i) = (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2,
columnax + i - 1)) + (2 * constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
- (4 * (constlamb) * deltax * valorfronteral)
    End If
    'Extremo Derecho
    If i = nx + 1 Then
      Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfrontera2
      Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
      Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
      With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
      End With
    End If
    'Último Nodo Interior
    If i = nx Then
      If t = 2 Then
        valoresr(i) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i)) + (constlamb *
valorfrontera2)
      Else
        valoresr(i) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i)) + (constlamb *
Cells(filat + t - 2, columnax + i))
      End If
    End If
    'Puntos Interiores
    If i <> 1 And i <> nx And i <> nx + 1 Then
      valoresr(i) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i
- 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1)) +
(constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
    End If
  End If
'Frontera Izquierda Dirichlet y Frontera Derecha Neumann
  If t <> 1 And grado1 = 0 And grado2 = 1 Then
    'Extremo Izquierdo
    If i = 1 Then
      Cells(filat + t - 1, columnax) = valorfronteral
      Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat =
"0.0000"
      Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
      With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
      End With

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

End If
'Extremo Derecho
If i = nx + 1 Then
    valoresr(i - 1) = (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t -
2, columnax + i - 1)) + (2 * constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i
- 2)) + (4 * (constlamb) * deltax * valorfrontera2)
End If
'Primer Nodo Interior
If i = 2 Then
    valoresr(i - 1) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i)) + (constlamb *
Cells(filat + t - 2, columnax + i - 2))
End If
'Puntos Interiores
If i <> 1 And i <> 2 And i <> nx + 1 Then
    valoresr(i - 1) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1))
+ (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
End If
End If
'Ambas Fronteras Neumann
If t <> 1 And grado1 = 1 And grado2 = 1 Then
'Extremo Izquierdo
If i = 1 Then
    valoresr(i) = (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2,
columnax + i - 1)) + (2 * constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
- (4 * (constlamb) * deltax * valorfrontera1)
End If
'Extremo Derecho
If i = nx + 1 Then
    valoresr(i) = (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2,
columnax + i - 1)) + (2 * constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i -
2)) + (4 * (constlamb) * deltax * valorfrontera2)
End If
'Puntos Interiores
If i <> 1 And i <> nx + 1 Then
    valoresr(i) = (constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i
- 2)) + (2 * (1 - constlamb) * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1)) +
(constlamb * Cells(filat + t - 2, columnax + i))
End If
End If
Next
'Resolver Sistema Tridiagonal
If t <> 1 Then
    n = nx - 1 + grado1 + grado2
    For m = 2 To n
        coefe(m) = -constlamb
        If grado2 = 1 And m = n Then
            coefe(m) = -2 * constlamb
        End If
    Next
    For m = 1 To n - 1

```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```

    coefg(m) = -constlamb
    If gradol = 1 And m = 1 Then
        coefg(m) = -2 * constlamb
    End If
Next
For p = 1 To n
    coeff(p) = (2 * (1 + constlamb))
    coefr(p) = valoresr(p)
Next
'Descomposición
For k = 2 To n
    coefe(k) = coefe(k) / coeff(k - 1)
    coefr(k) = coefr(k) - (coefe(k) * coefg(k - 1))
Next
'Sustitución hacia adelante
For k = 2 To n
    coefr(k) = coefr(k) - (coefe(k) * coefr(k - 1))
Next
'Sustitución hacia atras
coefx(n) = coefr(n) / coeff(n)
For k = n - 1 To 1 Step -1
    coefx(k) = (coefr(k) - (coefg(k) * coefx(k + 1))) / coeff(k)
Next
'Solución
For k = 1 To n
    If gradol = 0 And grado2 = 0 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    ElseIf gradol = 1 And grado2 = 0 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    ElseIf gradol = 0 And grado2 = 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    ElseIf gradol = 1 And grado2 = 1 Then
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1) = coefx(k)
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).NumberFormat = "0.0000"
        Cells(filat + t - 1, columnax + k - 1).Select
    End If
Next

```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
        End With
    End If
Next
End If
Next
End Sub
```

### 11.4. Algoritmo implementado en VBA Microsoft Excel (Visual Basic Applications) para el cálculo de la presión en exceso a la hidrostática por el método de Dufort - Frankel.

```
Attribute VB_Name = "MetodoDufortFrankelSuelos"
Sub MetodoDufortFrankelSuelos()
    constlamb = Range("C10")
    ltotal = Range("C5")
    tttotal = Range("C7")
    deltat = Range("C8")
    deltax = Range("C9")
    valorinicial = Range("C19")
    frontera1 = Range("C15")
    frontera2 = Range("C16")
    valorfrontera1 = Range("D15")
    valorfrontera2 = Range("D16")
    filax = 5
    columnax = 8
    colultx = Range("H5").End(xlToRight).Column
    Range(Cells(filax, columnax + 1), Cells(filax, colultx)).Select
    With Selection
        .ClearContents
        .Borders.LineStyle = xlNone
        .Font.Bold = False
    End With
    nx = ltotal / deltax
    For m = 1 To nx
        Cells(filax, columnax + m) = Cells(filax, columnax + m - 1) + deltax
        Cells(filax, columnax + m).Select
        With Selection
            .Borders.LineStyle = xlContinuous
            .HorizontalAlignment = xlCenter
            .Font.Bold = True
        End With
    Next
    filat = 6
    columnat = 7
    filaultt = Range("G5").End(xlDown).Row
    Range(Cells(filat + 1, columnat), Cells(filaultt, columnat)).Select
    With Selection
        .ClearContents
        .Borders.LineStyle = xlNone
    End With
End Sub
```

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL

```

.Font.Bold = False
End With
nt = tttotal / deltat
For m = 1 To nt
    Cells(filat + m, columnat) = Cells(filat + m - 1, columnat) + deltat
    Cells(filat + m, columnat).Select
    With Selection
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .HorizontalAlignment = xlCenter
        .Font.Bold = True
    End With
Next
Range(Cells(filax + 1, columnax), Cells(filaultt, colultx)).Select
With Selection
    .ClearContents
    .Borders.LineStyle = xlNone
    .Font.Bold = False
End With
consta = (1 - (2 * constlamb)) / (1 + (2 * constlamb))
constb = (2 * constlamb) / (1 + (2 * constlamb))
For t = 1 To nt + 1
    For i = 1 To nx + 1
        'Condición Inicial
        If t = 1 Then
            If i = 1 And frontera1 = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfronteral
            ElseIf i = 1 And frontera1 = "Neumann" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            If i = nx + 1 And frontera2 = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfrontera2 +
valorinicial
            ElseIf i = nx + 1 And frontera2 = "Neumann" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            If i <> 1 And i <> nx + 1 Then
                Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorinicial
            End If
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
            Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
            With Selection
                .Borders.LineStyle = xlContinuous
                .HorizontalAlignment = xlCenter
            End With
        End If
        'Condición de Frontera Extremo Izquierdo
        If i = 1 And t <> 1 Then
            'Frontera Dirichlet
            If frontera1 = "Dirichlet" Then
                Cells(filat + t - 1, columnax) = valorfronteral
            End If
            'Frontera Neumann
            If frontera1 = "Neumann" And t = 2 Then 'Método Explícito

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```

Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = Cells(filat + t
- 2, columnax + i - 1) + ((2 * constlamb) * (Cells(filat + t - 2, columnax
+ i) - Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) - (deltax *
valorfronteral)))
End If
If fronteral = "Neumann" And t > 2 Then 'Método Dufort Frankel
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = (consta *
Cells(filat + t - 3, columnax + i - 1)) + ((2 * constb) * (Cells(filat + t
- 2, columnax + i) - (deltax * valorfronteral)))
End If
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
With Selection
.Borders.LineStyle = xlContinuous
.HorizontalAlignment = xlCenter
End With
End If
'Condición de Frontera Extremo Derecho
If i = nx + 1 And t <> 1 Then
'Frontera Dirichlet
If frontera2 = "Dirichlet" Then
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = valorfrontera2
End If
'Frontera Neumann
If frontera2 = "Neumann" And t = 2 Then 'Método Explícito
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = Cells(filat + t
- 2, columnax + i - 1) + ((2 * constlamb) * (Cells(filat + t - 2, columnax
+ i - 2) - Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + (deltax *
valorfrontera2)))
End If
If frontera2 = "Neumann" And t > 2 Then 'Método Dufort Frankel
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = (consta *
Cells(filat + t - 3, columnax + i - 1)) + ((2 * constb) * (Cells(filat + t
- 2, columnax + i - 2) + (deltax * valorfrontera2)))
End If
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select
With Selection
.Borders.LineStyle = xlContinuous
.HorizontalAlignment = xlCenter
End With
End If
'Puntos Internos
If i <> 1 And i <> nx + 1 And t <> 1 Then
If t = 2 Then 'Método Explícito
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = Cells(filat + t -
2, columnax + i - 1) + ((constlamb) * (Cells(filat + t - 2, columnax + i)
- 2 * Cells(filat + t - 2, columnax + i - 1) + Cells(filat + t - 2,
columnax + i - 2)))
End If
If t > 2 Then 'Método Dufort Frankel

```

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL DE SUELOS CON FLUJO DE AGUA EN DIRECCIÓN VERTICAL**

```
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1) = (consta *  
Cells(filat + t - 3, columnax + i - 1)) + ((constb) * (Cells(filat + t -  
2, columnax + i) + Cells(filat + t - 2, columnax + i - 2)))  
End If  
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).NumberFormat = "0.0000"  
Cells(filat + t - 1, columnax + i - 1).Select  
With Selection  
    .Borders.LineStyle = xlContinuous  
    .HorizontalAlignment = xlCenter  
End With  
End If  
Next  
Next  
End Sub
```

