HACIA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA LA INCLUSIÓN ESCOLAR: CONTRIBUCIONES DE UNA PROPUESTA PEDAGÓGICA BASADA EN LA GEOMETRÍA A PARTIR DE LA METODOLOGÍA AULA TALLER.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

CARLOS MAURICIO ARANGO RIOS

JAIME ANDRÉS CARMONA MESA

Asesor

CARLOS JULIO ECHAVARRÍA HINCAPIE

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ARTES

2012

Dedicamos este trabajo a nuestras familias, por su apoyo incondicional y constante. A los maestros que de una u otra forma fueron un gran apoyo para la realización de este proyecto, en especial a nuestro asesor Carlos Julio Echavarría.

Finalmente, a la comunidad educativa del colegio Euskadi que amablemente nos permitió desarrollar este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a Dios, por colmarnos de paciencia y esmero para desarrollar este proyecto.

A todos los maestros que mediante sus sabias palabras nos dieron apoyo y animo en este largo proceso, en especial a nuestro asesor Carlos Julio Echavarría por brindarnos tanta libertad y autonomía en la elaboración del presente proyecto.

A nuestros seres queridos, por el apoyo moral y afectivo, especialmente por creer en nosotros.

A James Stevan Arango Ramírez y Carolina Tamayo Osorio por compartir con nosotros de forma desinteresada su experiencia y conocimientos.

Al colegio Euskadi, en especial a los estudiantes del grado décimo, por brindarnos la oportunidad de enriquecer nuestra formación docente con las experiencias vividas con ellos en este tiempo.

RESUMEN

TÍTULO: HACIA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA LA INCLUSIÓN ESCOLAR: CONTRIBUCIONES DE UNA PROPUESTA PEDAGÓGICA BASADA EN LA GEOMETRÍA A PARTIR DE LA METODOLOGÍA AULA TALLER.

AUTORES:
CARLOS MAURICIO ARANGO RIOS[1]
JAIME ANDRÉS CARMONA MESA

PALABRAS CLAVE: Inclusión escolar, educación matemática, Geometría y aula taller.

Con el presente proyecto, se pretendían identificar algunos aportes del estudio de la Geometría en la escuela a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, entendiendo a la Geometría como una herramienta que articula el mundo real y aquel formado por los conceptos matemáticos, a partir de la metodología aula taller en el contexto de la inclusión educativa, contexto en el que fue posible adentrarse gracias a que el colegio Euskadi en la ciudad de Medellín, abrió sus puertas para el desarrollo de la práctica pedagógica de los autores del presente escrito.

Así, en el actual trabajo se describen algunas experiencias de aula vividas con los estudiantes del grado décimo del colegio en cuestión, en las cuales, partiendo del diseño y aplicación de estrategias que incluyeran a los estudiantes en la construcción de conceptos Matemáticos, se analizaron cualitativamente los procesos de tres de los estudiantes inmersos en el proyecto, cuyas características contrastaban convenientemente, permitiendo estudiar diferentes implicaciones de las estrategias implementadas en sujetos con diferentes motivaciones, realidades sociales y potencialidades. Estos análisis, han sido realizados con base en la observación directa de las actividades aplicadas, la evaluación del desarrollo de guías propuestas y registros audiovisuales; y responden a dos categorías articuladas con los propósitos del proyecto. La primera es “la mediación de la Geometría entre el mundo real y las Matemáticas”, y la segunda es “el aula taller como posibilidad de una metodología activa en un contexto inclusivo”.

Finalmente, y tras reflexionar sobre los resultados obtenidos en el tiempo trabajado, se ha concluido que es posible diseñar estrategias en las cuales los estudiantes establezcan relaciones entre los objetos reales y las abstracciones Matemáticas, donde la Geometría aparece como una herramienta mediadora y aclaradora, permitiendo que cada sujeto progrese en la construcción de su conocimiento con base en sus propias capacidades.

[1] Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física. Universidad de Antioquia.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

CAPITULO 1.

¿CUÁL ES LA IMPORTANCIA DE ESTE TRABAJO?

"(...) es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes." (Guzmán, 1993, p. 6)

Desde la mitad del siglo XX hasta la actualidad, la Geometría tanto tridimensional como bidimensional en relación con la enseñanza de las Matemáticas ha sido ignorada y limitada a un análisis de figuras simples con sus respectivas propiedades. Esta tendencia responde a las directrices de una enseñanza tradicional de la ciencia, las cuales excluyen a un gran número de estudiantes, que bajo esta concepción "carecen" de las capacidades necesarias para la elaboración de un conocimiento matemático. Al respecto, como plantea Rivas (2005) esta concepción pedagógica sobre la enseñanza de las Matemáticas, inspirada en el paradigma positivista y en convivencia con prácticas tradicionales de enseñanza, negando las potencialidades creativo del conocimiento del alumno y va creando hacia los conceptos matemáticos sentimientos aversivos, lo que más tarde se habrá de convertir en uno de los factores endógenos del retraso académico, de la deserción escolar y la exclusión social.

En el marco de dicha situación, este trabajo acoge aportes de Guzmán (1993; 1998) a la enseñanza de las Matemáticas, pues las considera como una construcción lograda mediante la modelización de los fenómenos de la realidad[2], por lo cual es pertinente tomar distancia

[2] Aspecto resaltado por Alsina (2000) *"El mundo real significa el entorno natural, social y cultural donde vivimos"*.

de los procesos memorísticos y mecánicos, desarticulados del contexto educativo y del interés de los alumnos.

Así, la opción de reconocer la importancia de articular la cotidianidad con la enseñanza de las Matemáticas, implica un cambio en la forma en que se presentan los contenidos de esta disciplina, donde los procesos de enseñanza y aprendizaje se fundamenten en un acercamiento a materiales tangibles, involucrando al estudiante en la construcción del conocimiento, desarrollando con ello la creatividad y la capacidad de matematizar las estructuras complejas[3] de la realidad.

Históricamente, el hombre en su constante intención de comprender el mundo, inicialmente exploró estructuras de la realidad relacionadas con la multiplicidad y el espacio, originando la aritmética y la Geometría. Así, el pensamiento matemático surgió y estableció estrechas relaciones con el mundo real. Es por esto que, el enseñar Matemáticas y en particular, el educar geométricamente, debe proporcionar una buena formación para la vida en relación a visualización, exploración, manipulación, experimentación, argumentación, procesos de razonamiento y justificación, entre otros.

Por lo tanto, es necesario diseñar estrategias que faciliten la enseñanza de la Geometría, en las cuales, además de implicar al estudiante en los procesos de construcción del conocimiento, estos procesos tengan un carácter progresivo, partiendo de lo concreto y tangible y finalizando en lo abstracto y complejo. Al respecto, los esposos Van Hiele (1986) proponen un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, compuesto por tres elementos principales: La percepción- *insight*, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. El primer elemento se refiere a la comprensión de los estudiantes acerca de

[3] Guzmán (1998) añade: *"En esta interacción con la realidad, con la estructura de la naturaleza, la matemática va desarrollándose, profundizando y abarcando campos más amplios." (p. 7)*

lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen. El segundo elemento es una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de 5 niveles. Finalmente, el tercer elemento da cuenta de los procesos que conducen al estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente. Se puede considerar entonces, que lo propuesto por los esposos Van Hiele funciona como modelo de enseñanza y evaluación de aprendizajes. En este trabajo solo se acogen los aportes de este modelo relacionados con los procesos de enseñanza, articulando estos con el diseño de las actividades. La caracterización y valoración de los procesos y logros de los estudiantes se realizan mediante otro tipo de herramientas.

Considerando el panorama descrito, se presenta este proyecto, con el cual se pretende analizar las implicaciones de la enseñanza de la Geometría en un contexto de inclusión educativa -el cual resulta pertinente para estudiar los efectos en una población diversa-, bajo la metodología del aula taller[4], en donde se articule la teoría con la práctica, en circunstancias que posibiliten la interacción con materiales tangibles y una progresión en los procesos del pensamiento, de acuerdo con las capacidades particulares de cada sujeto.

La finalidad de este trabajo es entonces, la construcción de algunas estrategias metodológicas para la enseñanza de la Geometría, su implementación en el colegio Euskadi para el grado Décimo y, tras analizar los diferentes procesos desarrollados en ese contexto, se espera conceptualizar en torno al por qué y al cómo debería enseñarse Geometría en la escuela, en relación con el ideal de posibilitar una enseñanza de las Matemáticas que sea

[4] Pasel (1993) define: “Para que el aula se convierta en un taller se requiere una metodología que permita integrar la teoría y la practica, la reflexión y la acción; una metodología que, mediante formas activas de aprendizaje, desarrolle las capacidades de informarse, comprender, analizar, criticar, evaluar para poder realizar una lectura critica de la realidad que posibilite modos de inserción creativos y satisfactorios.” (p. 16)

inclusiva, y que permita participar a cada estudiante del proceso de construcción del conocimiento, reconociendo sus fortalezas y limitaciones.

En este sentido, se plantea la siguiente pregunta orientadora para el trabajo:

¿Cuáles son algunos aportes del estudio de la Geometría en la escuela a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, a partir de la metodología aula taller en el contexto de la inclusión educativa?

En relación a la anterior pregunta, se considera el siguiente propósito educativo:

Identificar algunos aportes del estudio de la Geometría en la escuela a través de la metodología del aula taller, frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje en las Matemáticas inmersos en un contexto inclusivo.

Para ello es fundamental como guías del proyecto, *Diseñar, aplicar y evaluar algunas estrategias didácticas, desarrolladas a partir de la metodología aula taller y direccionadas a una enseñanza activa de la Geometría.*

CAPITULO 2.

OBSERVANDO EL CONTEXTO DONDE SE DESARROLLA ESTE PROYECTO

"Cuando uno estudia con alguien con una condición particular, esa persona se siente incluida y uno aprende mucho de ella." (Estudiante 3, 12 de febrero del 2012)

Al comenzar el desarrollo de este proyecto, surgió la necesidad de indagar acerca de la educación de las Matemáticas en el contexto Colombiano en tiempos recientes, con el propósito de identificar algunas necesidades educativas en este y determinar posibles vías de articulación entre dichas necesidades y los conceptos a estudiar, vinculando así los procesos de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, con las estructuras económicas, sociales y políticas del grupo particular.

De esta forma, un primer aspecto a destacar desde los intereses particulares de este proyecto, fue el hecho de que el sistema educativo en Colombia, como en muchos de los diferentes países del mundo, ha cambiado en función de las tendencias mundiales que a finales del siglo XX lograron concretizar una hegemonía importante, "los procesos de internacionalización de la economía y de democratización de los regímenes políticos y de las sociedades". Estas tendencias en Colombia, han repercutido en el ideal de ciudadano, haciendo que de este se espere que sea una persona preparada para cumplir más eficientemente sus labores, y que posea valores como la tolerancia y el respeto por la diferencia. Es así como las reformas a nivel educativo introducidas por la constitución de

1991, confluyeron en la ley 30 del 92 y la ley 115 del 94, con la intensión de responder a las necesidades de ciudadano planteadas. De este modo, los intereses se centran ahora en aspectos como la calidad en la educación, el proceso de aprendizaje a la par del proceso de enseñanza, y la formación integral de los sujetos. En este sentido, en Colombia se han estado gestando estrategias de enseñanza diferenciadas de las estructuras tradicionales que no dan respuesta a las necesidades que el sistema demanda (Gómez, P. y Valero, P. 1996).

Un segundo aspecto de relevancia es que en el sistema educativo colombiano, una de las principales preocupaciones ha sido brindar oportunidades a estudiantes de cualquier origen y situación social, económica y cultural, surgiendo así, propuestas de incrementar la cobertura en la educación, gratuita en básica y media, priorizando en la población vulnerable:

> “las poblaciones rurales, que por su dispersión resultan de difícil atención, los estudiantes que hacen parte de familias afectadas por la violencia (víctimas de minas, jóvenes reclutados por grupos organizados al margen de la ley, adultos desmovilizados, hijos de los adultos desmovilizados, niños, niñas y jóvenes desvinculados, población en situación de desplazamiento y víctimas de emergencia por conflicto o desastre ambiental), los grupos étnicos minoritarios, los niños con capacidades excepcionales o con discapacidades y la población adulta analfabeta o que requiere completar su ciclo educativo. Para promover el ingreso y permanencia de estos grupos se diseñaron modelos educativos flexibles que respondieran a sus condiciones y necesidades.”(MEN, 2010, pág. 96)

Además, en Colombia referentes como la Constitución de 1991 y las políticas internacionales, han estimulado el surgimiento de nueva legislación que señala y protege los derechos de las personas en situación de discapacidad, resaltando la importancia de garantizar una educación de calidad que responda a las necesidades de estos sujeto, sin importar el nivel educativo en que se encuentren. De esta forma, se han apoyado movimientos de sensibilización y desmitificación, y la formación de docentes y otros profesionales en la inclusión escolar; reconociendo las adaptaciones curriculares, los planes educativos personalizados y las adecuaciones a los procedimientos evaluativos, como medios de inclusión educativa y social (Bernal, 2009).

En relación con lo anterior, y para el caso particular de la educación matemática, los esfuerzos por diseñar nuevas estrategias de enseñanza no escasean en el contexto colombiano, más aún si se tiene en cuenta el hecho de que históricamente las Matemáticas se han impartido en las aulas de clase bajo el paradigma tradicional de la enseñanza de las ciencias, situación que está estrechamente relacionada con los deficientes resultados en los aprendizajes de los conceptos de matemáticos, considerando que “la enseñanza tradicional no permite la manifestación de la variedad de intereses relacionados con el medio natural y sociocultural en el que vive el alumno y bloquea sus necesidades intelectuales, afectivas y de acción” (Pasel, 1993, pág. 14).

Particularizando el contexto en el cual se ha desarrollado el presente proyecto, Medellín (una de las principales ciudades de Colombia), es sede de dicho desarrollo. Esta ciudad, en respuesta a las propuestas que plantea el Sistema Educativo Colombiano, presenta entre 2009 y 2010[5] un aumento en la cobertura de la educación inicial del 46,1% al 64,5%, para casi un 40% de aumento, mientras que en la cobertura en educación media se evidenció un incremento del 56,3% al 58,2% para un crecimiento del 3,4%. Aunque es notorio el incremento en la población que logra acceder a la educación, es latente la preocupación respecto la calidad de esta.

[5] Tomado de: Medellín cómo vamos, *Análisis de la evolución de la calidad de vida en Medellín*, 2008-2011.

En este sentido, los resultados obtenidos en Medellín, dan cuenta que tanto los estudiantes de colegios oficiales como privados, han mejorado su desempeño académico en este periodo de aumento en la cobertura, siendo más notorio el progreso en los colegios privados. Aun así, los resultados en las pruebas revelan que en comprensión lectora en promedio, cuatro de cada diez estudiantes no logran el nivel mínimo de aprendizaje para su edad, cinco de cada diez estudiantes no alcanzan ese estándar en ciencias, y casi cada siete de diez estudiantes no logran el mínimo aceptable en Matemáticas.

La ciudad de Medellín está dividida en 16 comunas, entre las cuales se encuentra El Poblado, ubicado en la zona sur-oriental de la ciudad.

Ilustración 1: Panorámica del Poblado

A mediados del siglo XX, esta zona que en su comienzo fue un sitio de veraneo de los medellinenses, inicio una transformación como fruto de la industrialización de la ribera del río; fue entonces cuando se le retiró a El Poblado su carácter de corregimiento, que con el tiempo, se convirtió en un lugar de residencia de la clase alta y centro de negocios para la ciudad. En las cifras presentadas por la Encuesta Calidad de Vida del 2005, el estrato socioeconómico predomínate en esta comuna es el 6 (alto), con un total de 66.5 % de las viviendas. En segundó lugar el estrato 5 (medio-Alto), con un total 27.5 % de las viviendas.

Existen algunos sectores que presentan un número significativo, el estrato 4 (medio) corresponde al 4.2% y en los estratos 3 (medio-bajo) con el 1.3 % y 2 (bajo) con el 0.5%.

El presente proyecto se desarrolla en el Colegio Euskadi, institución educativa de carácter privado, ubicada en El Poblado, en la Cra10 # 16A Sur 03. La ruta de acceso es a través de las lomas del Tesoro y los Balsos. El ambiente es campestre, rodeado principalmente de árboles y zonas verdes y la contaminación auditiva, visual y por partículas en el aire es muy baja, por lo cual no afecta el normal desarrollo del proceso académico y de las actividades extracurriculares.

Ilustración 2 : Fotografías colegio Euskadi

Los 154 estudiantes del colegio Euskadi son jóvenes que provienen de diferentes sectores de los Municipios de Medellín y Envigado. La población estudiantil de este centro educativo pertenece a los estratos cuatro, cinco y seis, y generalmente hacen parte de familias económicamente bien conformadas, las cuales en su mayoría están ubicadas en El Poblado, Envigado, Laureles y el Estadio. Aunque en este sentido, los estudiantes son privilegiados, también son jóvenes que vivencian diversas problemáticas de orden familiar y social, como la ausencia prolongada de las figuras paternas o la aparente importancia en la necesidad de adquirir dinero en abundancia, factores que en ocasiones modifican sus juicios morales. Este tipo de situaciones, hacen que el comportamiento disciplinario y el rendimiento académico de los estudiantes estén muchas veces, lejanos de lo esperado.

Ilustración 3: Aula de clase del colegio Euskadi

El "formar jóvenes libres en el sentir, en el actuar y en el pensar al servicio de una sociedad"[6], es el mayor reto que se ha propuesto el colegio, que además, integra en su filosofía la labor de la inclusión educativa, permitiendo que en las aulas confluyan estudiantes con una gran diversidad de potencialidades e intereses particulares, e intentando desarrollar adecuadamente procesos educativos con estudiantes en situación de discapacidad. Así en la institución, es posible encontrar estudiantes con dificultades auditivas, trastorno por déficit de atención e hiperactividad, autismo, retardo cognitivo, entre otras características que plantean una gran cantidad de complejos y estimulantes retos al sistema educativo en general del centro de formación.

Una característica particular del colegio es que los grupos de estudio no superan los veintiséis estudiantes, situación que permite al docente establecer con mayor facilidad

[6] Misión del Colegio Euskadi

vínculos con sus estudiantes, y conocer con mayor claridad sus particularidades, hecho que podría facilitar el desarrollo de los procesos educativos en el aula de clase.

Pese a las iniciativas antes descritas implícitas en las directrices de la institución, y aunque el colegio recibe el apoyo de la fundación integrar[7] para capacitar a su personal docente en el desarrollo de estrategias que propicien los procesos educativos en contextos de inclusión escolar, las prácticas de enseñanza predominantes en la institución, responden a estrategias ligadas a posturas tradicionales, en donde el docente se convierte en un transmisor de información, mientras que los alumnos son receptores pasivos de la misma. Este tipo de estrategias, no responden adecuadamente a las necesidades particulares del contexto inclusivo en la institución, por lo cual no resulta extraordinario el dilucidar la importancia de un cambio metodológico.

En el caso particular del desarrollo de este proyecto, se cuenta con la participación de los estudiantes del grado décimo del colegio Euskadi, sumando un total de 20 alumnos vinculados al trabajo, que oscilan en edades entre los 15 y 18 años, y que responden en un alto porcentaje, a las características particulares de la población antes descrita (estudiantes con trastorno por déficit de atención, autismo, retardo cognitivo, trastorno oposicional desafiante, entre otras).

Con la intención de identificar algunas de las nociones de los estudiantes del grado décimo, asociadas a las dinámicas que se presentan en el contexto en el cual estudian, al iniciar este proyecto se realizó un conversatorio con los alumnos. A continuación se relatan algunas de las preguntas planteadas (P) a los estudiantes (E) de dicho grado[8].

---

[7] La Fundación Integrar es una ONG sin ánimo de lucro, que busca la inclusión y bienestar de niños y jóvenes con dificultades en su desarrollo cognitivo.

[8] La transcripción completa de la grabación del conversatorio, se encuentra en los anexos de este trabajo.

P: *¿Ustedes que creen, que los estudiantes con mayores dificultades deberían estar en instituciones especializadas, o deberían estar…?*

> *E: No, porque la idea es que se sientan igual a uno.*
>
> *E: No solo eso, uno aprende mucho. Cuando uno estudia con alguien con una condición particular esa persona se siente incluida y uno aprende mucho de ella.*
>
> *E: Lo bueno de una institución como esta, es que todos pueden aprender de la misma forma*
>
> *E: Eso se da también en los colegios normales, que no sean especiales.*

P: ¿Un colegio normal? ¿Éste no es un colegio normal?

> *E: Este es un colegio normal, pero que recibe gente con problemas. Hay colegios en los que no reciben gente con problemas, acá sí. Y, en este colegio hay gente que tiene más capacidades que uno.*

P: ¿Creen que ustedes pueden ayudar al trabajo con los estudiantes que presentan mayores dificultades?

> *E: Ayudándoles a hacer las tareas.*
>
> *E: … no solo para el aprendizaje, sino para que sepan estar en una sociedad.*
>
> *E: Si, ellos me ayudan para que yo pueda entender mejor.*

A partir de respuestas como estas dadas a las preguntas realizadas en el conversatorio en cuestión, es posible entender que a pesar de que los estudiantes no han estudiado a profundidad conceptos propios de la inclusión escolar, han aprendido de esta empíricamente, puesto que ellos mismos se encuentran inmersos en un contexto inclusivo. Además, con base en estas experiencias, y pese a que entre este grupo de estudiantes se presentan todo tipo de dificultades, han comprendido la importancia por el respeto a la discapacidad y por contribuir con los procesos de sus compañeros, entendiendo que cada quien tienen sus propias potencialidades, y que de estas contribuciones también surgirán aprendizajes para sí mismos.

CAPITULO 3.

ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

> *"Dar significado al aprendizaje de la matemática es dar sentido también a la educación." (Moura, 2011, p. 54)*

En la actualidad, existe una creciente preocupación por los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área de Matemáticas, debido a su importancia para la ciencia, pues permite predecir el futuro en situaciones modeladas[9], y poder pronosticar sucesos que marcarán la historia de una sociedad toma un papel fundamental en cualquier civilización. Es por esto que surgen propuestas que abogan por un cambio curricular, donde la educación matemática se centre en un acercamiento al mundo real del estudiante, pensándose ésta como una construcción social, más que una simple memorización de conocimientos abstractos.

En concordancia con lo anterior, Guzmán (1998) rescata la relevancia de las Matemáticas, en tanto que surgen de la necesidad del hombre por comprender el mundo, y relata: A finales del siglo 6 a. de C. en el auge de la comunidad pitagórica, se gestan dos herramientas conceptuales en la interpretación de la realidad, la aritmética (ciencia del número) y la Geometría (ciencia de la extensión). Surgen así dos mundos, la realidad como el mundo físico y el mundo mental como el universo conceptual que el matemático va construyendo en su relación con la naturaleza.

[9]El MEN (1998) plantea que: *"La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles."*

Siempre se enfrenta a la realidad con curiosidad, con deseos de desvelar lo que está presente en ella, construyendo herramientas conceptuales que ayudan a lograr este objetivo, el cual, por su evidente carácter de infinidad, permitirá una continua interacción entre el mundo y las ideas, lo que posibilitará una evolución continua de estas herramientas, solidificando las bases de un edificio conceptual que con el trascurso del tiempo se irá formalizando. Estas herramientas conceptuales, necesariamente no serán concluyentes, permitiendo un cambio en la concepción matemática, posibilitando el error en un juicio que se suele presentar tan exacto e inequívoco.

Al respecto, en el contexto colombiano se presentan propuestas curriculares que invitan a:

> "aceptar que el conocimiento matemático es un resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento." (MEN, 1998, p. 29)

En esta línea, y teniendo en cuenta que la Geometría es la herramienta que permite al hombre articular la realidad con el concepto matemático, la enseñanza de las Matemáticas debe remitir a una enseñanza de la geométrica, centrada fundamentalmente en la construcción del conocimiento, posibilitando presentarlo de forma más asequible a los estudiantes, donde los contenidos no sean absolutos e irrevocables, abriendo la oportunidad de acercarse a estos por medio de situaciones cotidianas, en un sentido espacial intuitivo. De este modo, se logran visualizar estrategias que recuperan el sentido del quehacer matemático, centrándolo en la construcción de esquemas mentales que tratan de explicar el mundo real.

La Geometría además, adquiere mayor relevancia en tanto que estimula los procesos de exploración, manipulación, visualización, justificación, experimentación, argumentación, y razonamiento, entre otros. Así,

> "la enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones, buscando lograr en los alumnos una amplia experiencia y una perspectiva multifacética de lo que significa, elementos claves para ganar en conocimiento geométrico útil. Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos." (MEN, 2004, p. 2)

Es clara entonces, la importancia de una educación geométrica en la enseñanza de contenidos matemáticos, pero no se establece todavía alguna ruta para desarrollar actividades que permitan establecer dicha relación. No cualquier metodología de enseñanza de la Geometría supone un cambio en la manera en la que tradicionalmente se han presentado los conceptos en esta área. En relación con la finalidad del presente trabajo, un modelo que se ajusta adecuadamente con los objetivos propuestos, es el de los esposos Van Hiele. Este modelo educativo[10] propone los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría euclidiana, describiéndolos como desarrollos que parten desde formas intuitivas hasta una formalización profunda de los conceptos; y puede enunciarse, recurriendo a la representación que proponen Jaime y Gutiérrez (1990), de la siguiente manera:

> "(1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas;
> (2) Un estudiante sólo podrá comprender[11] realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento;

---

[10] Modelo creado en Holanda por los esposos, Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Marie Van Hiele, ambos profesores de Matemáticas, los cuales en sus clases identificaron dificultades en el razonamiento de problemas geométricos.

[11] En este modelo se desarrolla el concepto de comprensión, el propio Pierre (1990) lo describe y afirma que: *"un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes"* (p. 4)

> (3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela;
> (4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma".

Esta perspectiva está compuesta de tres elementos principales: La percepción- insight, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

El primer elemento de este modelo, la percepción-insignt, será el interés original y tema de disertación, esta se logra cuando los estudiantes comprenden claramente lo que hacen, por qué lo están haciendo y cuándo se debe hacer. Además, están en capacidad de aplicar el conocimiento adquirido en la resolución de nuevos problemas (Jaramillo, Monsalve & Esteban).

El segundo elemento de este modelo, los niveles de razonamiento, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles, en los cuales es progresiva la capacidad de razonamiento matemático de los sujetos, desde que están iniciando el proceso de aprendizaje hasta que adquieran un desarrollo intelectual alto, en el campo conceptual trabajado (Jaime y Gutiérrez, 1990).

El tercer elemento de este modelo, las fases del aprendizaje, da cuenta de los procesos que conducen al estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente. Van Hiele (1986) describe la transición de un estudiante de un nivel al siguiente, como la relación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

A estos elementos principales, Van Hiele (1986) le añade cinco estructuras[12], las cuales describe como: la realidad, la mente humana, la mente de la humanidad, el lenguaje y la acción humana. Así pues, el aprendizaje es un proceso que presenta una relación intima con la estructura mental humana y se ve afectado por las modificaciones que se producen en las estructuras mentales que un individuo experimenta en el cambio de un nivel a otro.

Estas estructuras mentales se pueden significar como "redes de relaciones", en donde sus fundamentos son los conceptos asimilados inicialmente y las líneas de conexión, es decir, las relaciones que se logran establecer entre dichos conceptos. En este sentido, solo se produce una nueva red de relación cuando el alumno pasa de un nivel a otro. Este nuevo concepto incorporará al anterior, posibilitando así, generar nuevas redes de relaciones.

El primer modelo enunciado por los esposos Van Hiele describe cinco niveles de razonamiento: básico o nivel 0 y niveles I, II, III y IV, que según concepción de J. Llorens (1994), son:

Nivel 0 (Predescriptivo): Es el nivel básico. Describe todos los conocimientos previos que debe tener un estudiante para comprender un concepto particular.

Nivel I (De reconocimiento visual): En este nivel, se desarrollan descripciones basadas en semejanzas con otros objetos que le son cotidianos. *E*l estudiante, identifica las figuras por su apariencia general, es decir, reconoce la forma física: el color, la forma, el tamaño. Se percibe que las figuras son "objetos individuales" y se le dificulta abstraer propiedades para establecer relaciones con las propiedades de figuras del mismo tipo. (Santa, 2011)

---

[12] Van Hiele (1986) define la construcción de estructuras como: *"un fenómeno que capacita al hombre y al animal para actuar en situaciones que no son exactamente las mismas que conocieron antes"*.

Nivel II (De análisis): A través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características y partes elementales de las figuras, es decir, sus componentes y propiedades. Sin embargo, no se lograra realizar una clasificación de objetos y figuras a partir de sus propiedades. La deducción de las propiedades y la generalización, se hace de manera informal con base en la experiencia y la manipulación.

Nivel III (De clasificación): El estudiante es capaz de establecer relaciones entre unas propiedades y otras. De hecho, puede establecer cuándo unas propiedades se deducen de otras, logrando realizar clasificaciones lógicas correctamente; estableciendo una teoría geométrica mediante un sistema de axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. En este nivel, el educando conseguirá una apropiación del conocimiento, logrando construir, y no sólo memorizar. Se establecen las definiciones de un concepto geométrico de manera formal, aún no tiene la necesidad del rigor y sus argumentaciones se basan en la experiencia.; percibiendo además, la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, estando capacitado para entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes, y distinguiendo entre una afirmación y su recíproca (Jurado y Londoño, 2005).

Nivel IV (De deducción formal): Van Hiele (1986) describe este nivel de razonamiento de tipo teórico, porque es mucho más difícil de discernir que los niveles anteriores. El estudiante en este nivel, logra identificar la existencia de diferentes sistemas axiomáticos, analizándolos y comprobándolos con diferentes Geometrías. Este, es capaz de realizar demostraciones formales sin ninguna ayuda. Además, puede llegar a las mismas conclusiones partiendo de diferentes premisas, utilizando un vocabulario especializado, propio del rigor matemático; logrando identificar y aplicar las propiedades de un sistema deductivo como la consistencia, la independencia y la completitud.

Para asegurar que la clasificación en cada nivel concuerde con el modelo de Van Hiele, es necesario que los descriptores en estos niveles den cuenta de unas determinadas características. De acuerdo con la nomenclatura de Usiskin (1982), estas propiedades son: la primera se denota como *secuencialidad fija*, esto implica que los estudiantes deben progresar en su razonamiento en una secuencia organizada. La segunda , *adyacencia*, se puede interpretar como identificar que el objeto perceptivo del nivel *n-1* se convertirá en el objeto de pensamiento del nivel *n*. D*istinción*, será la tercera propiedad, donde el nivel *n* requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel *n – 1*, el cual se convertirá en la percepción de una nueva estructura. La quinta será, *cada nivel tiene su lenguaje*. Finalmente la sexta, *consecuencia*, describirá el progreso de un nivel al siguiente que se produce de forma gradual.

Las fases de aprendizaje propuestas por los esposos Van Hiele son cinco: la *información*, en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de conocer el tipo de trabajo que van a hacer. La *orientación dirigida*, en donde los estudiantes construirán los elementos fundamentales de la red de relaciones del nuevo nivel, es decir, descubren, comprenden y aprenden los conceptos y propiedades principales de la temática que están estudiando. La *explicitación*, es la fase en la que los estudiantes revisan, socializan y comparan el trabajo. La *orientación libre*, la cual brinda la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en las fases anteriores en otras investigaciones, temas o áreas. Y por ultimo, la *integración*, en la cual se debe condensar los conocimientos que han construido hasta entonces en un todo.

En conclusión, podría resumirse este modelo en un esbozo de forma esquemática y simple en la siguiente tabla[13]:

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras.
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras.	Implicaciones entre propiedades.
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades.	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas.	

Los anteriores aportes teóricos, sustentan la importancia de enseñar Matemáticas mediante estrategias diferenciadas, en donde la Geometría desempeña un rol fundamental como herramienta de articulación, aclaración y profundización del mundo real descrito en el lenguaje de la ciencia. Sin embargo, es necesario además, definir conceptos propios de la inclusión escolar, puesto que la comprensión de dichos conceptos posibilitará un adecuado proceder en el contexto en el cual se desarrolla este proyecto, intentando responder a las necesidades particulares que esa "locación" existan.

La inclusión es un concepto de la pedagogía que surge en los años 90, y hace referencia al modo en que la escuela debe dar respuesta a la diversidad en donde se pretende erradicar la exclusión escolar e integrar a estudiantes de todo tipo de características en una misma comunidad educativa. Estudiantes con grandes virtudes, diferentes capacidades y aspectos

[13] Esta tabla es tomada de las "Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele" (p. 312).

culturales o problemáticas sociales, confluyen en un lugar donde la diferencia no es extraña sino, el más común de los rasgos humanos.

Entender el concepto de inclusión es de suma importancia, y lo es más, aplicarlo correctamente. A propósito, Echeita (2008) señala: "La inclusión no consiste en hacer sentir bien al estudiante, más bien debe entenderse como la preocupación por un aprendizaje y un rendimiento escolar de calidad y exigente con las capacidades de cada estudiante". En este sentido, la inclusión aparece como un ente integrador para la comunidad y cada uno de sus sujetos en el conjunto global que se denomina sociedad, y posibilita que, hasta las personas con mayores dificultades, puedan acceder al conocimiento con el máximo potencial de sus capacidades para aprender, lo cual respondería probablemente a los ideales de todo "buen educador", aunque sin las debidas estrategias y con carencia de herramientas, todo ello simplemente se quede en ideales a cumplir, en una hermosa utopía. Se pretende entonces que los grupos escolares estén conformados tanto por estudiantes "regulares", como aquellos que presentan necesidades educativas especiales.

En la actualidad, se discute el término a usar para referirse a un estudiante que presenta mayores dificultades respecto a sus compañeros, para generar aprendizajes sobre los conceptos que con base en el contexto específico, se consideran pertinentes y acordes para su edad. En estas discusiones se debaten términos como *necesidades educativas especiales*[14] *(NEE)*, o *barreras para el aprendizaje y la participación*[15]. *En este trabajo s*e considera que la importancia no recae tanto en el cómo denominar a estos estudiantes, sino

[14] Al respecto, Aguilera (2004) define: "*Un alumno tiene necesidades educativas especiales cuando presenta dificultades mayores que el resto de sus compañeros para acceder a los aprendizajes que se determinan en el currículo que le corresponde y necesita por su edad.*"
[15] Booth & Ainscow (2000) precisan que: "*Es cuando la condición personal o cultural del estudiante plantea un estilo y un ritmo de aprendizaje propios, para los que el curriculum promedio resulta desfasado o insuficiente.*"

más bien, en las propuestas metodológicas y actividades a desarrollar con el fin de atender convenientemente a las mencionadas necesidades o barreras. Por tanto, no se hace distinción alguna entre ambos conceptos.

En esta línea, se presenta el término de adaptación curricular como un tipo de estrategia educativa generalmente dirigida a alumnos con NEE, que consiste en la adecuación en el currículo de un determinado nivel educativo. La UNESCO, en su temario abierto sobre educación inclusiva comenta: son adaptación curricular "las estrategias y los recursos adicionales que implementan las escuelas con el propósito de facilitar el acceso y progreso de estudiantes con necesidades especiales en el currículo". Dichas regulaciones agregan la condición que, cualquiera sea la adaptación del currículo, éste debe ofrecer a los estudiantes las mismas materias, profundidad y enriquecimiento a que tienen acceso todos los demás estudiantes. Bajo estas circunstancias, cada estudiante podrá recibir una experiencia curricular que se ajusta a sus necesidades, pero dentro del contexto de un marco común y en el aula ordinaria. Es decir, "la satisfacción de dichas necesidades no requiere que los estudiantes sean separados de sus pares o que sean identificados como fracasados para poder seguir un programa individual." Se trata de tener en cuenta las limitaciones del alumno a la hora de planificar la metodología, los contenidos y, sobre todo, la evaluación.

Conseguir entonces que la enseñanza de la Geometría se convierta en una herramienta articuladora entre los conceptos matemáticos y el mundo real, inmersos en un contexto de inclusión educativa, se convierte en una tarea compleja, que requiere de la aplicación de métodos diferenciados de los tradicionalmente aplicados.

Cuando se intentan propiciar espacios y momentos en los cuales desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje, se dispone de una multiplicidad de teorías y metodologías que indican las maneras de proceder y las herramientas disponibles para alcanzar los fines de la educación de un sujeto o grupo en particular. Estos modos de enseñar deben responder a las necesidades de dichos sujetos y a las demandas del contexto en el cual se desarrollan los procesos en cuestión. Situándose en el problema específico del actual proyecto, es evidente la necesidad de metodologías activas[16], que integren al estudiante en la construcción de los conceptos y modifiquen también el rol tradicional del docente como un simple transmisor y del alumno como un receptor pasivo de la información, puesto que las metodologías tradicionales de la enseñanza de las ciencias, no reconocen la diversidad de los potenciales en los estudiantes, y prioriza en procesos como la memoria y la repetición y aleja al estudiante de situaciones que le permitan liberar su creatividad para interactuar con una situación y encontrar las posibles vías de solución, haciendo de las clases muchas veces, espacios tediosos y aburridos, desmotivando al educando y por consiguiente, cerrando las posibilidades de un conocimiento activo, que a su vez sea inquisidor.

Desde luego, hacer de la enseñanza y el aprendizaje procesos activos no es una tarea sencilla, pues se deben crear situaciones que despierten el interés de los estudiantes y evaluar y valorar constantemente cada situación, en la búsqueda continua de las motivaciones particulares de los alumnos y del cómo hacer de un concepto aparentemente poco estimulante y ajeno a la realidad humana (tal es el caso de muchos de los conceptos abordados en las Matemáticas), algo que realmente cautive y capture la atención.

Surge entonces la pregunta del ¿cómo hacer de la enseñanza de los conceptos matemáticos un proceso activo y que integre en la construcción del conocimiento al estudiante? A partir

[16] Esta metodología se fundamenta en una enseñanza más activa, que parta de los intereses de los sujetos y tiene como finalidad la aplicación de los contenidos en su mundo real. Los planteamientos teóricos de Jean Piaget, la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel y la teoría culturista de Lev Semionovich Vygotsky son los principales sustentos para dicha metodología.

de la experiencia de quienes escriben este documento, se cree que una de las posibles y adecuadas vías para encontrar la respuesta a dicha pregunta, está en los planteamientos de la metodología del aula taller.

En la actualidad existen diversos conceptos del significado de aula taller, incluso, erróneamente muchas de las instituciones educativas en nuestro medio dicen tener un aula taller de matemáticas, al dotar un espacio de algunos materiales como: bloques lógicos, reglas y compás, rompecabezas y cuerpos sólidos, pero el aula taller debe ir mucho más allá de ser una simple aula “dotada especialmente”, para convertirse en un lugar en donde se articulen la práctica y la teoría, y donde tanto el docente como los estudiantes modifiquen sus conductas tradicionales. Así, el maestro será el diseñador, guía y evaluador de las actividades realizadas, mientras que los alumnos jugarán un papel fundamental en la construcción del conocimiento, pues se verán movilizados de sus posturas pasivas y a través de la construcción, manipulación y observación directa podrán iniciar ellos mismos la consolidación de los objetos abstractos de las Matemáticas, partiendo siempre de lo concreto y simple, hasta lo más complejo.

Es importante entonces analizar con mayor profundidad los roles mencionados y las herramientas implicadas en la metodología del aula taller. El docente tradicionalmente se ha posicionado en el lugar del único e inequívoco poseedor del conocimiento, el cual mediante la exposición continua y la realización de ejercicios mecánicos reiterativos, puede transmitir a sus estudiantes, los cuales a su vez deben esperar a recibir la información que les es impartida, y almacenarla en su memoria para luego demostrar mediante diversas pruebas lo que han logrado aprender. Además, estos sujetos parecen carecer de motivaciones propias, pues se suponen ritmos y contenidos homogéneos.

Estas situaciones, aunque durante siglos han dado frutos y generaciones enteras han progresado a través de su implementación, suele negar las capacidades singulares y constructivas de cada persona, y en muchas ocasiones excluye a estudiantes con diferentes potencialidades e intereses. Al interior del aula taller y a través de su metodología y con miras en un aprendizaje activo, se pretende que el docente direccione el andar de sus estudiantes, mediante el diseño de actividades que impliquen la participación activa de sus educandos. Para ello el docente puede construir guías de trabajo, las cuales tengas un carácter progresivo en su complejidad conceptual, y debe seleccionar con anterioridad el material tangible con el cual los estudiantes puedan interactuar, y con ello logren establecer del mundo y de los cuerpos, sus propiedades matemáticas, relacionando el concepto abstracto con su objeto real, articulando la teoría con la práctica. Se supone entonces un docente que está dispuesto a aprender de los hechos sucedidos, incluso de sus mismos estudiantes, logrando redireccionar constantemente su proceder; y estudiantes que puedan dudar y errar en el proceso, y que mediante su motivación y la que logre despertar en ellos el desarrollo de las actividades, sean capaces de construir conocimientos más claros y estructurados.

Otro aspecto de relevancia para el proyecto actual sobre la metodología del aula taller, es su dimensión social, pues implica el trabajo en medio de un grupo en constante interacción, indiferente del tipo de actividad desarrollada, sea individual o colectiva. Dicha situación debe ser estimulada y regulada por el docente, permitiendo el intercambio de las ideas que surgen en el camino, y dando espacio para discusiones en donde la opinión de cada estudiante sea valorada y respetada. Además, al establecerse actividades de carácter progresivo en los niveles de complejidad, permite que cada estudiante explore los conceptos de forma particular y acorde con sus propias capacidades. Dichos aspectos permiten que el aula taller se acomode con facilidad a contextos de inclusión educativa, en donde no se pretende simplemente que en un mismo espacio confluyan sujetos de todas las características, sino que además, la enseñanza sea exigente y acorde con sus diversos y singulares gustos y capacidades de aprendizaje.

Sin el animo de indicar los defectos o cualidades de las distintas metodologías de enseñanza existentes o que se hayan mencionado anteriormente, se considera que los modos y herramientas más adecuados para alcanzar el objetivo particular de identificar algunas de las diferentes implicaciones de la enseñanza de la Geometría frente a los procesos de conceptualización en las Matemáticas inmersos en un contexto inclusivo, son aquellos que estén en concordancia con el aprendizaje activo y con los procesos de inclusión del estudiante a la construcción del conocimiento. Por dichas razones se ha optado por la elección de la metodología del aula taller como precursora de los procesos desarrollados en este proyecto.

CAPITULO 4.

LA EXPERIENCIA DEL AULA TALLER EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

> *"¿Cómo debería tener lugar el proceso de aprendizaje matemático a cualquier nivel? De una forma semejante a la que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, (…). (Guzmán, 1993, p. 7)*

En esta experiencia alrededor de la Geometría, y bajo las propuestas ya mencionadas, emergen dos categorías que se rescatan por su valía. La primera es "LA MEDIACIÓN DE LA GEOMETRÍA ENTRE EL MUNDO REAL Y LAS MATEMÁTICAS", y la segunda es "EL AULA TALLER COMO POSIBILIDAD DE UNA METODOLOGÍA ACTIVA EN UN CONTEXTO INCLUSIVO", con las que se apuntó a contribuir en los siguientes retos que permean la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas:

- Generar actitudes positivas frente al aprendizaje de los conceptos matemáticos que se relacionan con el mundo real.
- Convertir a la Geometría en una herramienta clarificadora de los conceptos matemáticos.
- Permitir que cada estudiante logre acceder y construir el conocimiento matemático, partiendo de sus capacidades particulares.

Para el análisis de las mencionadas categorías, en el marco de este proyecto se han diseñado y aplicado diversas actividades, todas ellas apuntando en la dirección de articular las Matemáticas con el mundo real. En este escrito solo se describen las experiencias logradas entorno a la conceptualización de las secciones cónicas, pues en dichas experiencias, afloraron elementos de importante reflexión, convirtiéndose en una muestra significativa del trabajo realizado. Los análisis realizados son cualitativos, y para estos, se eligieron tres de los veinte estudiantes que participan del proyecto, que contrastan claramente entre sí, y que permiten estudiar con facilidad los efectos de una actividad ideada para un contexto de inclusión educativa. A continuación, se realiza una caracterización de los estudiantes:

- **Estudiante 1:** Tiene 17 años de edad. Fue diagnosticado con autismo, déficit de atención y retardo cognitivo, lo que lo convierte en uno de los estudiantes con mayores dificultades para el aprendizaje de su grupo. En su niñez, estudió en el colegio Euskadi, pero por sus condiciones particulares, tuvo una gran cantidad de problemáticas de orden académico y social, por lo cual abandono la institución, e inició una transición constante, que lo llevo a estudiar en una gran cantidad de instituciones, en las cuales no encontró un apoyo ni una respuesta oportuna para sus problemáticas particulares. En la actualidad, el estudiante ha retornado a la institución en la cual se realiza la práctica, y son notorios los grandes vacíos conceptuales en todas las áreas del conocimiento, especialmente, en aquellas de corte matemático. Es además, un estudiante muy activo y capaz con el lenguaje, interesado en la actuación y representación de diversos personajes. Económicamente, pertenece a una familia bien conformada, perteneciente al estrato 5, ubicada en el sector de Laureles.
- **Estudiante 2:** Tiene 18 años de edad. Su diagnóstico es TDAH, por lo que suele estar bastante inquieto en las clases y se distrae con gran facilidad. A lo largo de sus historia escolar, ha reprobado dos años, razón por la cual se encuentra atrasado,

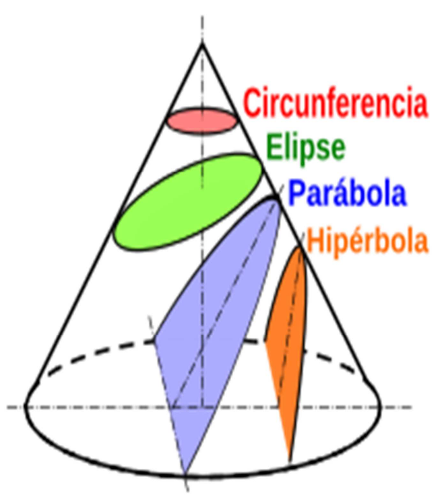
respecto a sus compañeros de grado, que en su mayoría son menores que él. Además, debido a sus comportamientos particulares, dos instituciones educativas en las cuales estudió, decidieron desistir en los intentos por acompañar su proceso, expulsándolo y llevándolo transitar por varios centros de formación. Finalmente, llego hace 3 años al Colegio Euskadi. Actualmente, su desempeño académico es sobresaliente, pues es un estudiante muy activo, que intenta constantemente desarrollar las actividades propuestas, pero se dispersa con facilidad, y sus actitudes enérgicas hacen que suela presentar dificultades a nivel comportamental. Económicamente, este estudiante pertenece a una familia de cuantiosos recursos, la cual está radicada en el sector del alto de las palmas.

- **Estudiante 3:** Tiene 15 años de edad. Ha estudiado en el colegio Euskadi alrededor de 7 años, y conoce los procesos y metodologías de enseñanza que el colegio pretende desarrollar. Tiene grandes capacidades y es a nivel de resultados y promedios, una de las mejores estudiantes de su grupo. Suele estar muy atenta en las clases y demuestra un gran interés por adquirir nuevos conocimientos. En muchos sentidos, es una estudiante ejemplar y genera un ambiente dinámico al interior del aula de clase. En un aspecto socioeconómico, pertenece al estrato 3, considerándose en una situación de clase media. Actualmente, se encuentra becada por la institución.

A continuación se presentan las actividades desarrolladas sobre las secciones cónicas. Cada una de ellas se platea con sus respectivos objetivos, desarrollo del trabajo planteado y algunos análisis realizados relacionados con las categorías emergentes antes descritas. Es importante tener presente que dichos análisis se fundamentan en grabaciones de audio y video, evidencias escritas por parte de los alumnos y las experiencias vividas por parte de los practicantes en el desarrollo de dichas actividades.

Actividad 1: Consta de dos momentos. El primero se centra en identificar el porqué de que curvas como la elipse, la parábola y la hipérbola, reciban el nombre de sección cónica, objetivo que en apariencia se muestra como sencillo y poco determinante, pero que por la obviedad de la situación, suele dejarse pasar por alto, llevando a que el estudiante no comprenda con claridad que estas curvas que se estudian en las Matemáticas se deriven de los cortes específicos realizados a un cono. El segundo, en caracterizar y establecer algunas propiedades generales de las secciones cónicas, mediante el doblado de papel.

Para este trabajo los estudiantes se reunieron en equipos, con la intención de generar discusiones frente a la temática presentada, fortaleciendo la comparación y relación entorno a estas curvas. Esta actividad inició con la entrega de un solido por grupo, acompañado de una pregunta inicial, *¿Por qué esta familia de curvas es llamada secciones cónicas y qué condiciones debe cumplir cada corte, para establecer las diferentes curvas?*



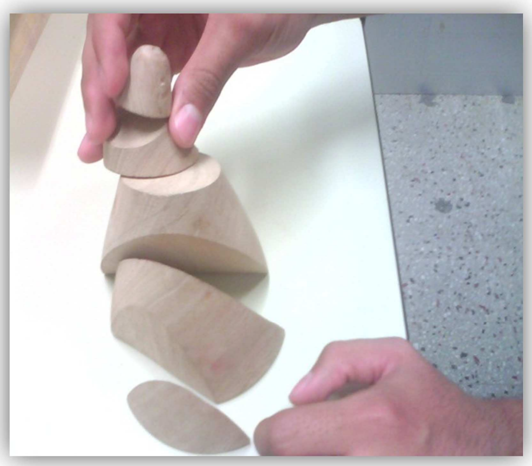


Ilustración 4: Cortes en el cono y solido de sección cónica.

Posteriormente, se presentaron una serie de instrucciones que permitían mediante el doblado de papel generar cada una las cónicas. Estos estaban acompañados de imágenes que representaban las instrucciones descritas. Con la intención de motivar el trabajo de los estudiantes, se dio la posibilidad a cada uno de elegir la curva que le resultase de mayor interés por su forma y características, y al finalizarla, debería compartir con sus compañeros las propiedades que se infirió en dicha construcción.

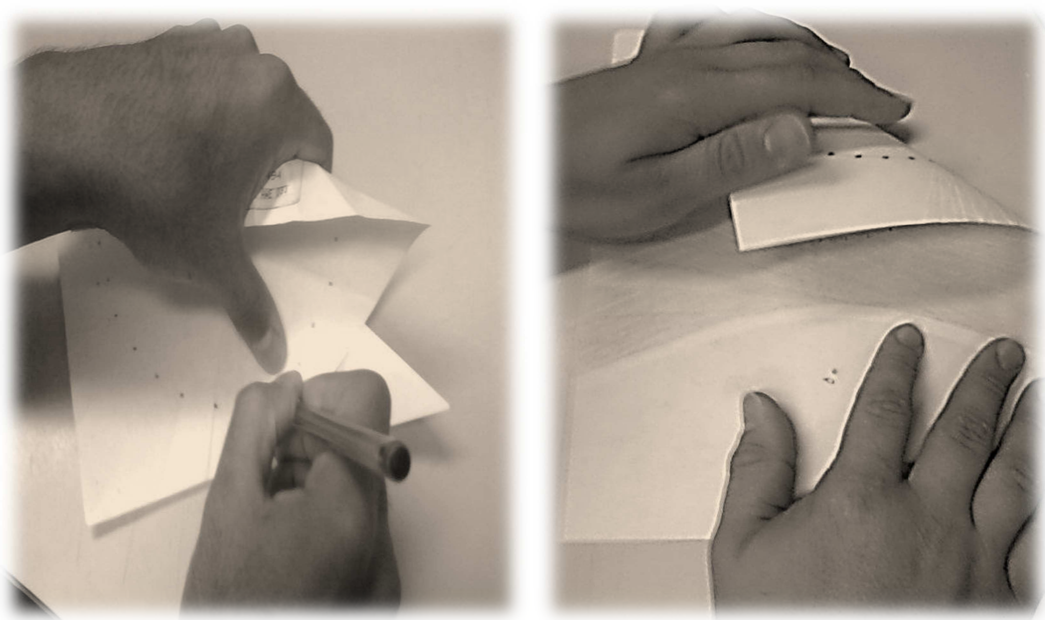


Ilustración 5: Construcciones por medio del doblado de papel.

El desarrollo de estas actividades fue continuo, el interés de los estudiantes y el apoyo que encontraron en sus compañeros permitieron que cada uno de ellos trabajara sin mayores dificultades, logrando alcanzar los objetivos plateados. En particular, el **estudiante 1**, identifico la figura como un cono, asociando además este cuerpo con una "carpa de indio" invertida. Al iniciar el desarme del sólido, a este alumno no le fueron suficientemente claras las figuras formadas, puesto que, por más cortes que se realizaran en este cuerpo, para él siempre era el mismo "cono". Estos obstáculos en el proceso, lograron sortearse luego de realizar un acompañamiento más cercano, posibilitando que el estudiante lograra identificar que en los cortes se generaban ciertas curvas, las cuales se relacionaban por ejemplo con la circunferencia, “solo que unas más anchas que otras” (para el caso de la circunferencia y la elipse). En relación con las otras dos secciones, solo se identificó que la hipérbola parecía estar formada por dos parábolas y además, era similar en su forma a un reloj de arena. Finalizando la actividad el estudiante argumenta que *“las secciones cónicas tienen su nombre por la relación que existe entre ellas y un cono”* pero no comprende con claridad aún que esta relación se encuentra con una estrecha correspondencia con el tipo de corte que se realiza al cono.

En el trabajo realizado con el doblado de papel, el educando solo realizó la actividad relacionada con la construcción de la circunferencia. Esta actividad resultó interesante para él, aunque por sus dificultades motoras se convirtió también en un reto complejo por superar. La actividad con este estudiante se inició entonces, presentándole la necesidad de que la hoja de papel sea cuadrada, a lo que él respondió que la hoja ya era cuadrada, pero cuestionándolo al respecto, se le pregunta al considerar que los cuadrados tiene los lados iguales, si la hoja de papel cumple esa característica, a lo cual afirma que no, puesto que tiene dos lados más largos que los otros dos. Finalmente, comienza a realizar los dobleces descritos en los enunciados, aunque no desde su comprensión lectora, sino desde la observación del proceso de sus compañeros y de los guías de la actividad, logrando desarrollar las bisecciones de los lados solicitados, e infiriendo en el proceso que la curva construida es aproximadamente una circunferencia.

La dificultad más frecuente resulta ser la facilidad con la cual se distrae con lo que sucede a su alrededor, pero con un debido acompañamiento, se puede redireccionar su proceder a la consecución de los objetivos propuestos. En general, los progresos con este alumno son pequeños pero significativos, y en muchas ocasiones estos se relacionan más con sus habilidades referentes a la motricidad fina (la cual resulta no adecuada para una persona de su edad), más incluso que con avances a nivel conceptual, aunque es importante aclarar que mediante estas actividades, el estudiante ha logrado adquirir a través de la observación y manipulación ideas coherentes respecto de los conceptos trabajados, si bien no logra formalizarlas a profundidad.

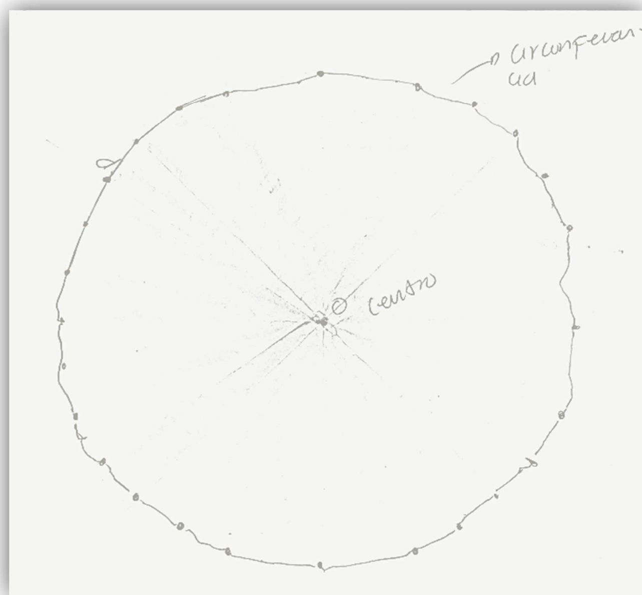
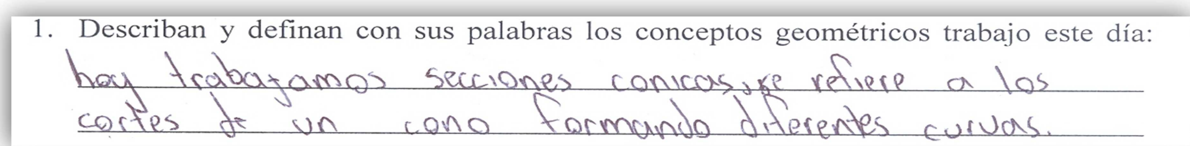


Ilustración 6: Circunferencia por medio del doblado papel (estudiante 1).

Por otro lado, el **estudiante 2** desarrolla las actividades en muy poco tiempo. Mediante la observación del cono seccionado, él identificó con facilidad la relación existente entre cortes que se le realizan al cono y las características de la curva obtenida, y al respecto menciona:



1. Describan y definan con sus palabras los conceptos geométricos trabajo este día:

hoy trabajamos secciones conicas, se refiere a los
cortes de un cono formando diferentes curvas.

Ilustración 7: Descripción de la actividad (estudiante 2).

Posteriormente, el estudiante inició la lectura de las instrucciones para construir las cónicas mediante el doblado de papel. Para este momento de la actividad, él seleccionó la elipse y la hipérbola, pues estas curvas cautivaron su atención. Este alumno, siguió las indicaciones propuestas sin grandes dificultades, generando en el proceso dos construcciones que salvo detalles menores, se aproximaban con gran exactitud a las dos cónicas que inicialmente había elegido. En la construcción de la elipse no le fue suficientemente clara la relación existente entre los puntos de esta y los puntos o y f (focos de la elipse), aunque por las características de la curva, aseveró que debería existir dicha relación. En el desarrollo de la hipérbola, describe que esta aparentemente está conformada por dos parábolas simétricas, con los puntos o y f como focos de estas. Es evidente que aún persisten en el estudiante ideas muy intuitivas a nivel conceptual respecto de estas curvas, las cuales se espera poder profundizar con el desarrollo de las posteriores actividades.

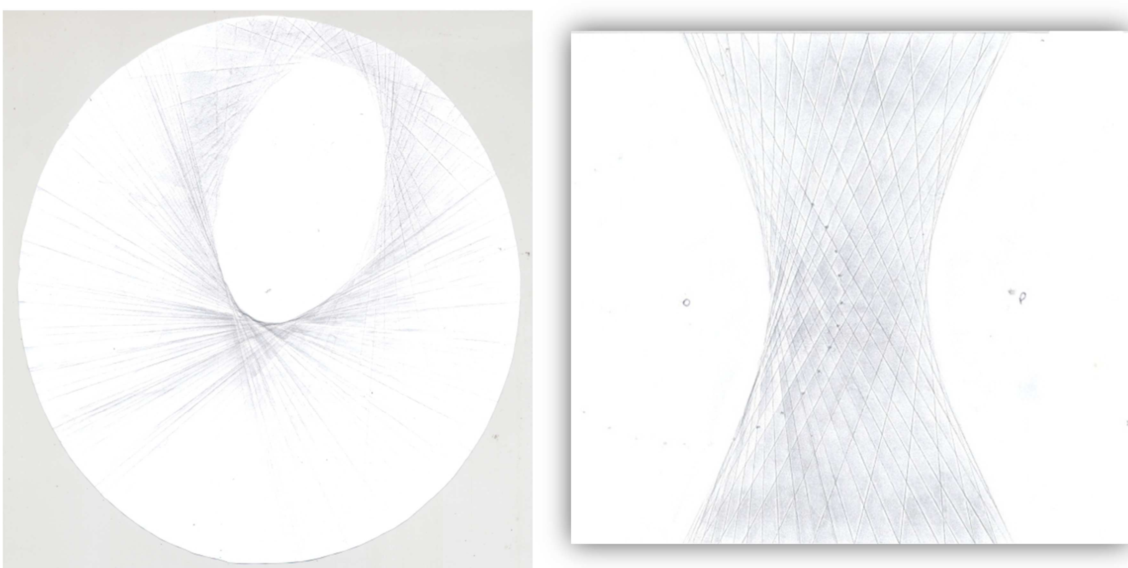
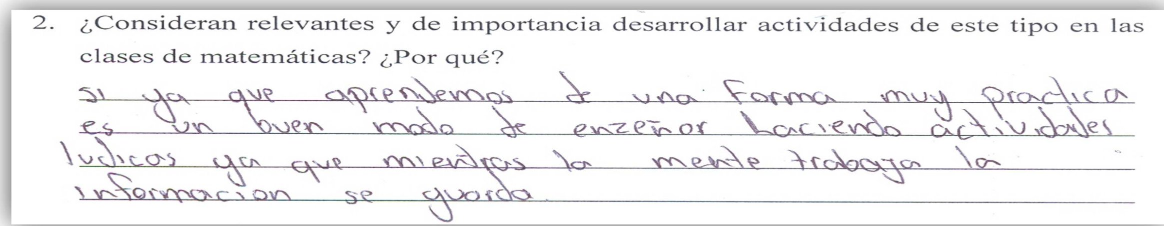


Ilustración 8: Construcción de la elipse e hipérbola por el doblado de papel (estudiante 2).

Este alumno demuestra mucho interés en este tipo de actividades, en las cuales evidencia la energía y dinamismo, cualidades que en ocasiones deben ser reprimidas en las clases regulares. Además, se refiere a este tipo de actividades de una forma interesante, mencionando que en estas, *“mientras la mente trabaja la información se guarda”*. En este sentido se pueden evidenciar la importancia y el valor de una metodología activa, puesto que el estudiante participa de la construcción de los conceptos y no solo se queda como un simple receptor de contenidos, los cuales en muchas ocasiones, no tienen ningún interés para él.



2. ¿Consideran relevantes y de importancia desarrollar actividades de este tipo en las clases de matemáticas? ¿Por qué?

si ya que aprendemos de una Forma muy practica es un buen modo de enzeñar haciendo actividades ludicos ya que mientras la mente trabaja la informacion se guarda.

Ilustración 9: Reflexión de la actividad (estudiante 2).

En contraste con lo anterior, la **estudiante 3** es sobresaliente a la hora de desarrollar los diferentes tipos de actividades que realiza, haciéndolo de forma continua y dando cuenta en el proceso de una interpretación adecuada de los conceptos en cuestión. En primer lugar, esta alumna a través del trabajo con el cono seccionado, logró identificar que *“dependiendo del corte que se realiza al cono se generara una sección cónica, pero, estos cortes deben cumplir con unas características específicas”*. Las características que menciona resultan ser poco claras y estructuradas, debido a que sus experiencias con estas curvas son aún novedosas y generadas solo a partir de la observación y la manipulación del cono. Aun así, comprende que dependiendo de la posición relativa entre el plano que corta y la generatriz o el eje focal, surgen diversas curvas muy diferentes entre sí, haciendo que sus apreciaciones resulten ser muy cercanas a los propósitos de la actividad planteada.

Después de concluir la actividad de manipulación de la superficie de revolución (cono), la estudiante comienza la construcción mediante el doblado de papel de la hipérbola, la cual cautivo su atención a partir de la aparente complejidad en los dobleces presentados en las instrucciones, desde lo cual logra realizar análisis que demuestran conclusiones aún superficiales e intuitivas, en las cuales incluso llega a relacionar la hipérbola con dos parábolas.

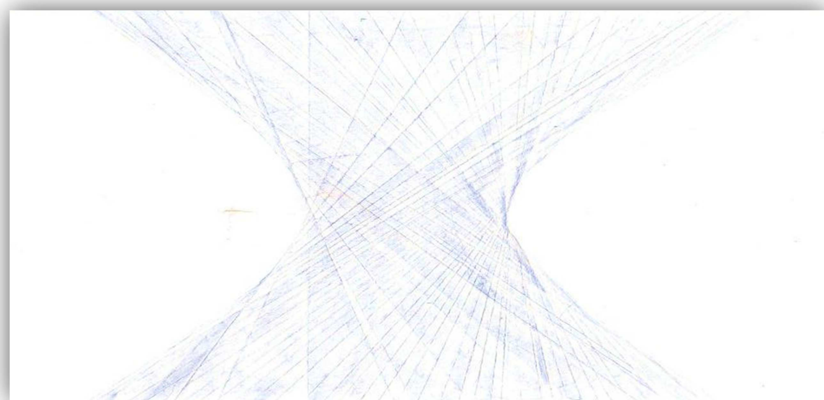
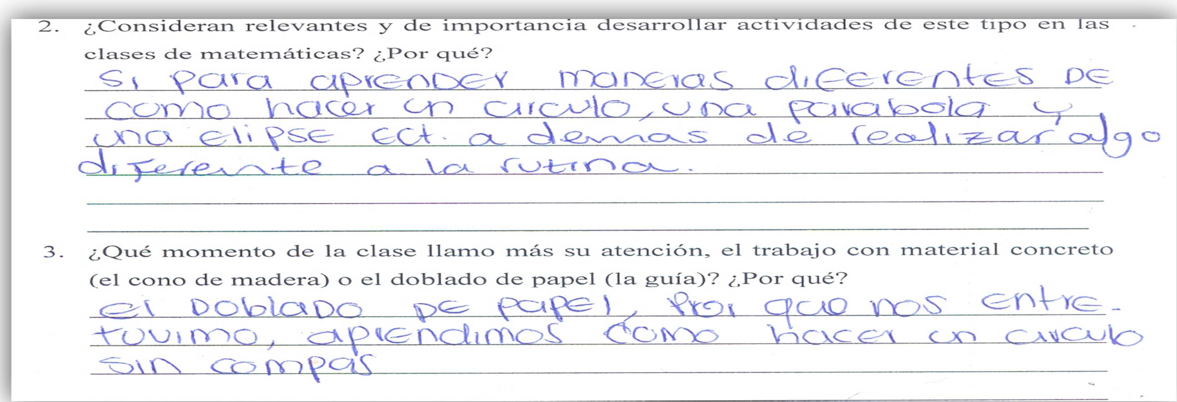


Ilustración 10: Construcción de la hipérbola mediante el doblado de papel (estudiante 3).

Esta alumna se muestra muy interesada por el desarrollo de este tipo de actividades, y resalta la importancia de *"realizar algo diferente a la rutina"* y menciona frases como *"nos entretuvimos, aprendimos como hacer un circulo sin compas"*, hechos que permiten reflexionar en torno a la importancia permitir que los estudiantes se incluyan y participen activamente de la construcción del conocimiento.



2. ¿Consideran relevantes y de importancia desarrollar actividades de este tipo en las clases de matemáticas? ¿Por qué?

Si para aprender maneras diferentes de como hacer un circulo, una parabola y una elipse ect. a demas de realizar algo diferente a la rutina.

3. ¿Qué momento de la clase llamo más su atención, el trabajo con material concreto (el cono de madera) o el doblado de papel (la guía)? ¿Por qué?

el doblado de papel, por que nos entre-tuvimo, aprendimos como hacer un circulo sin compas

Ilustración 11: Apreciaciones frente al doblado de papel (estudiante 3).

Actividad 2: El objetivo de esta actividad, consiste en el trazado de la parábola, la elipse y la hipérbola, identificando en el proceso de construcción de las mismas sus propiedades fundamentales, articulando estas propiedades de orden geométrico con la representación analítica de estas curvas, conocidas como ecuaciones canónicas. Para los trazos es necesario el uso adecuado de la regla y el compás, para lo cual y con antelación, se han realizado diferentes actividades que permitieron a los estudiantes utilizar las herramientas mencionadas para el trazo de perpendiculares o paralelas, o la bisección de segmentos en partes iguales. La forma en que se planteó la actividad, permitió que cada estudiante construyera de las tres curvas posibles, las que decidiese y alcanzase en el tiempo disponible, de aproximadamente dos horas. Así cada uno podría construir y estudiar sus propias construcciones, siguiendo las indicaciones impresas en las guías para las actividades, y además, observar los hallazgos realizados por sus compañeros.

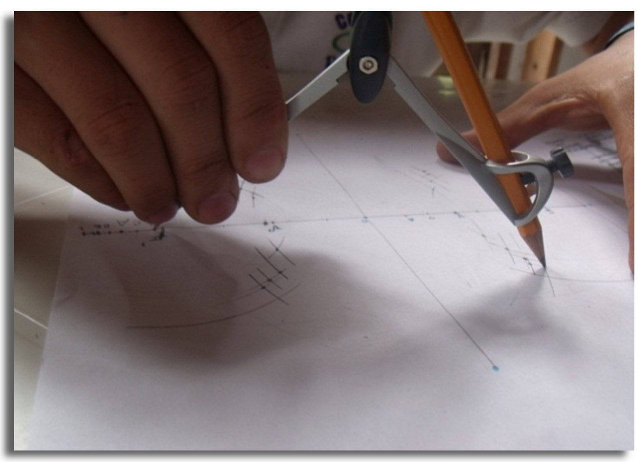


Ilustración 12: Construcción las secciones cónicas con regla y compás.

El **estudiante 1** necesitó para el desarrollo de la actividad, de la presencia constante de los practicantes. Además, dedicó su actividad tan solo al desarrollo de la parábola, aunque evidenció ciertas mejoras en el manejo de instrumentos como la regla y el compás, pese a que por sus dificultades motoras persisten las limitaciones a la hora de desarrollar este tipo de actividades, que de cualquier forma él manifiesta que le son estimulantes. Así, este estudiante construyó con los trazos en el papel una curva similar a la parábola, pese a que esta no cumplía con la propiedad fundamental, (cada uno de los puntos en la curva, equidista de un punto llamado foco y una recta llamada directriz), aunque para él no difería mucho de la curva vista cuando manipuló el cono en secciones días atrás, pero su construcción se asemejaba más a una semi-elipse (como se puede ver en la imagen).

Ilustración 13: Construcción de la parábola (estudiante 1).

Las dificultades para la construcción de este lugar geométrico por parte del estudiante, surgen además, desde un punto de vista conceptual, pues a pesar de los trabajos hechos anteriormente, manifestó no saber trazar ni recordar el significado de líneas perpendiculares, fundamentales para esta construcción, por lo cual fue necesario recordarle el concepto de perpendicularidad. Tras esto, y pese a las indicaciones plasmadas en la guía y dadas por los practicantes, este estudiante apeló a su interpretación de la parábola, y a través de esto construyó esta curva. Estas situaciones, hicieron que el resultado no fuera del todo correcto, en un sentido estricto, pero a partir de ello, el estudiante dedujo ciertas conclusiones, e incluso intento establecer relaciones entre la curva construida y elementos del mundo real.

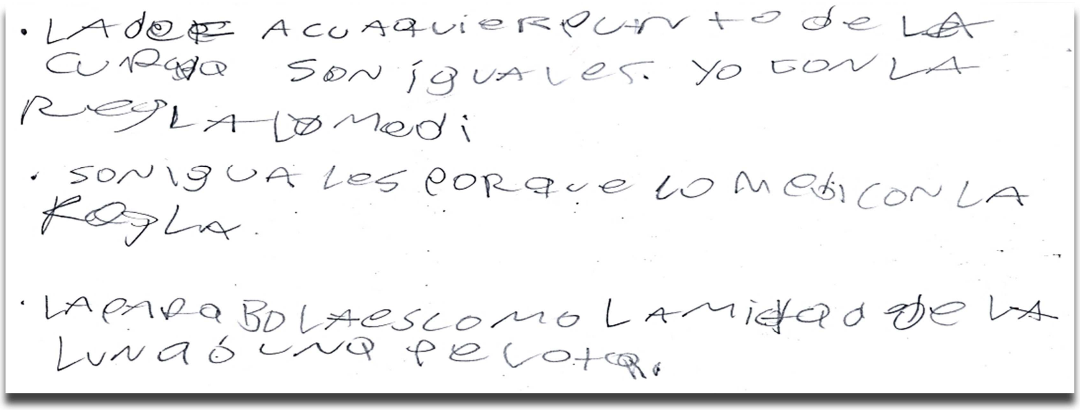

• LA de ACUAQUIER PUNTO de LA CURVA SON IGUALES. YO CON LA REGLA LO MEDI
• SON IGUALES PORQUE LO MEDI CON LA REGLA.
• LA PARABOLA ES COMO LA MITAD DE LA LUNA Ó UNA PELOTA.

Ilustración 14: Conclusiones de la actividad de construcción de parábola (estudiante 1).

Como fuera mencionado antes, evidentemente no son las conclusiones más deseadas al plantear este tipo de actividades, pero teniendo en cuenta las capacidades particulares del estudiante 1, los intentos de establecer ciertas relaciones entre las distancias, y el hecho de relacionar adecuadamente la curva con elementos como media luna o media pelota, resultaron ser bastante interesantes, y sin duda, estas conclusiones por pequeñas que pudieran parecer, difícilmente aparecerían sin la realización de este tipo de actividades, en donde el estudiantes se integre a la construcción, y no todo se reduzca al simple hecho de memorizar algoritmos.

El **estudiante 2** realizó la construcción de la hipérbola y la elipse, demostrando una vez más, todo su dinamismo. En esta ocasión no fue casi necesaria la intervención de los practicantes, pues el estudiante evidenció un claro manejo de la regla y el compás para las construcciones, y siguió con facilidad las instrucciones impresas en las guías de trabajo. Para la construcción de la elipse trazó sin dificultad las rectas perpendiculares pedidas, y ubico con facilidad los focos de la curva. Además, fue reiterativo en la ubicación de puntos de la elipse, con los cuales dar una forma clara a esta sección cónica.

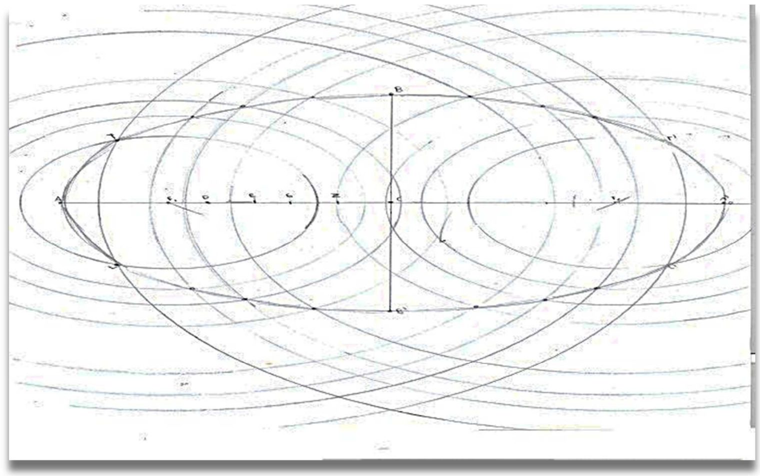


Ilustración 15: Construcción de la elipse (estudiante 2).

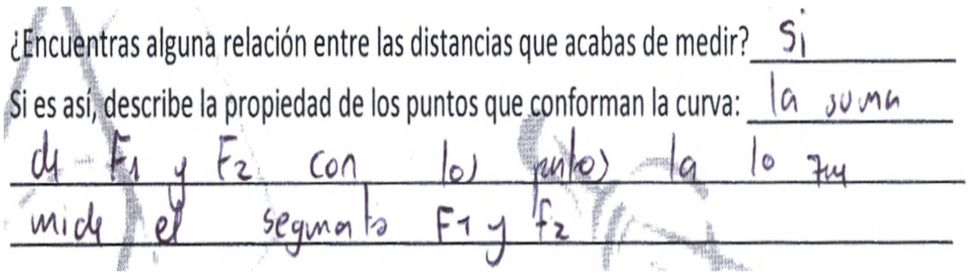
Tras terminar la construcción con la regla y el compás de la elipse, este estudiante continuó con el desarrollo de la actividad, intentando establecer relaciones entre los puntos que la habían conformado. Para ello hizo falta realizar mediciones de las distancias entre los puntos y los focos. Así, plantea lo siguiente:

$d(F_1,T)$	4.2cm
$d(F_2,T)$	14.8 cm
$d(F_1,B)$	9.5cm
$d(F_2,B)$	9.5cm
$d(F_1,A)$	3 cm
$d(F_2,A)$	16 cm

$d(F_1,T) + d(F_2,T)$	19. cm
$d(F_1,B) + d(F_2,B)$	19cm
$d(F_1,A) + d(F_2,A)$	19cm

Ilustración 16: Distancias entre los puntos de la elipse y los focos. Relación entre las distancias (estudiante 2).

Estas medidas, calculadas con el uso las herramientas de construcción, le permitieron al estudiante conceptualizar entorno a la relación entre los puntos que conforman la curva, y describe:



¿Encuentras alguna relación entre las distancias que acabas de medir? Si

Si es así, describe la propiedad de los puntos que conforman la curva: la suma de F1 y F2 con los puntos la lo fu mide el segmento F1 y F2

Ilustración 17: Conclusión actividad de construcción de la elipse. Propiedad de los puntos (estudiante 2).

Esta conclusión, que aunque no es del todo correcta, evidencia cierto acercamiento a la propiedad que cumplen los puntos de la elipse (la suma de las distancias entre los puntos de la elipse y dos puntos llamados focos, es una constante). Es importante señalar que a medida que este estudiante determinaba las distancias, y encontraba ese valor constante de 19, se sorprendía gratamente, pues por él mismo estaba descubriendo propiedades de la curva.

Tras construir la elipse, y mientras que gran parte del grupo aún estaba construyendo su primera sección cónica, el estudiante 2 inició la construcción de la hipérbola. De nuevo, necesitó poco de la intervención de los practicantes e impulsado por las indicaciones en la guía para la construcción de la curva, realizó lo siguiente:

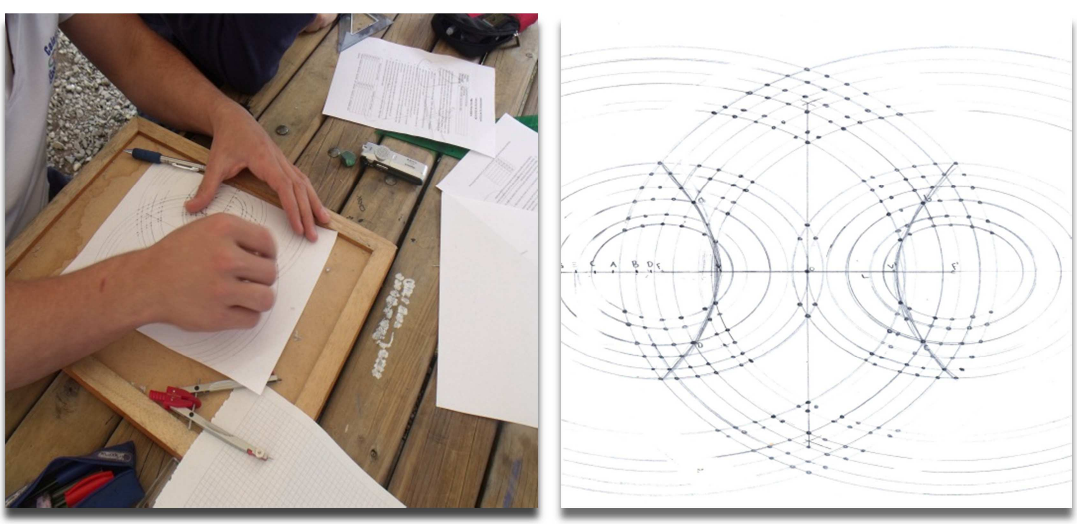


Ilustración 18: Construcción Hipérbola (estudiante 2).

En medio de la construcción, surgieron algunas inquietudes por parte del estudiante interesantes, como por ejemplo, si una hipérbola es la unión de dos parábolas simétricas, a lo cual se le respondió que para ser cierto esto, cada una de las ramas de la hipérbola debía cumplir con las propiedades de una parábola, hecho que comprobó y finalmente su respuesta fue un no, pues al encontrar la directriz (equidistante del vértice respecto del foco), esta no distaba de cada uno de los puntos, lo mismo que estos al foco correspondiente. Después de esta pequeña e interesante desviación, el estudiante retornó a la ruta hacia el objetivo de establecer la propiedad que cumplen los puntos en la hipérbola. Para ello, estudió los puntos de la curva y sus distancias a los puntos llamados focos, datos que consigno como aparece:

Distancia entre F y el Punto		Distancia entre F' y el Punto	
d(F,A) =	1.7 cm	d(F',A) =	11 . 7 cm
d(F,B) =	0.9 cm	d(F',B) =	10 . 9 cm
d(F,C) =	2, 3 cm	d(F',C) =	12 . 3 cm
d(F,D) =	0 . 4 cm	d(F',D) =	10 . 4 cm
d(F,E) =	3 cm	d(F',E) =	13 cm
d(F,G) =	3 . 6 cm	d(F',G) =	13 . 6 cm

Ilustración 19: Distancia entre los puntos de la hipérbola y sus focos (estudiante 2).

Con base en estos datos, y con la indicación de intentar establecer una relación entre las distancias medidas, por ejemplo, calculando la diferencia entre las distancias de un punto a los dos focos, el estudiante respondió lo siguiente a las preguntas orientadoras:

¿Crees que existe alguna relación entre las distancias en los anteriores puntos? Si

Si es así, describe cuál es la relación: la relación es la distancia entre V' y V

Ilustración 20: Relación entre los puntos de la hipérbola (estudiante 2).

A esta respuesta, el estudiante añadió que la relación se encontraba en la distancia entre los vértices, pues la diferencia entre las distancias de un punto de la curva a los dos focos, daba una constante, la cual tenía el mismo valor que la mencionada distancia entre vértices de la hipérbola, aproximándose así, a la propiedad que cumplen los puntos que conforman esta sección cónica.

El desarrollo de esta actividad, permite realizar algunas reflexiones interesantes, respecto del trabajo con estudiantes con características similares a las del estudiante 2, con trastorno por déficit de atención e hiperactividad, pues este estudiante logró enfocar sus condiciones hacia la construcción de varias curvas, y con un adecuado acompañamiento, el estudiante se mantuvo bastante atento al desarrollo de la actividad, teniendo en cuenta que esta además, le resultó estimulante en la medida en que construía y descubría por sí mismo algunas de las propiedades implícitas en las secciones cónicas. De esta forma, el estudiante logró seguir adecuadamente el hilo de la actividad, en contraste con su proceder en las clases regulares de matemáticas y en general, en las diversas áreas en las cuales aún persisten metodologías tradicionales de enseñanza, en las cuales suele estar muy inquieto y desatento.

La **estudiante 3** realizó la construcción de la hipérbola. En los trazos evidenció un manejo adecuado de las herramientas de trabajo, aunque fueron necesarias algunas intervenciones por parte de los practicantes, en los momentos de la construcción de perpendiculares por ejemplo. De esta forma la estudiante construyo tras alrededor de una hora de trabajo la siguiente construcción:

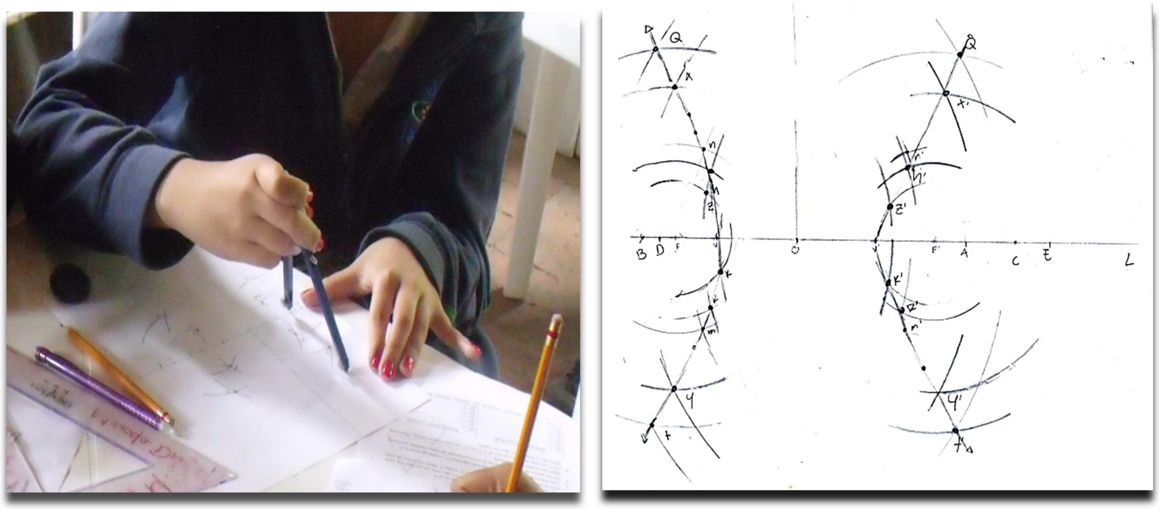


Ilustración 21: Construcción Hipérbola (estudiante 3).

El tiempo mencionado pudiera parecer excesivo, pero es importante señalar que esta alumna suele contribuir activamente con los procesos de sus compañeros. Así, mientras que ella avanzaba en su construcción, ayudaba a sus compañeros a desarrollar las de estos. En este sentido, es importante reflexionar acerca del aspecto social en el trabajo con la metodología del aula taller, pues en el trabajo grupal los estudiantes aportan cada uno sus propias potencialidades al desarrollo de los conceptos, mientras que además afianzan cualidades como el trabajo en equipo, estimulando el establecimiento de relaciones interpersonales y permitiendo que cada estudiante sea “incluido” en su contexto escolar.

Tras construir la hipérbola, esta estudiante comenzó con el análisis de las propiedades que cumplen cada uno de los puntos pertenecientes a la curva. Así, calculo la magnitud de las distancias entre los puntos y los focos, agregando estos valores a la siguiente tabla:

Distancia entre F y el Punto	Distancia entre F' y el Punto
d(F,Q) = 7	d(F',Q) = 14
d(F,X) = 6	d(F',X) = 12
d(F,N) = 4	d(F',N) = 10.5
d(F,h) = 3.8	d(F',h) = 9.8
d(F,Z) = 3	d(F',Z) = 10
d(F,K) = 3	d(F',K) = 9

Ilustración 22: Distancia entre los puntos de la hipérbola y sus focos (estudiante 3).

Con estos valores, la estudiante identificó que al restar la distancia entre los puntos a cada uno de los focos, el valor que resultaba era constante, teniendo presente los errores e imprecisiones propios de este tipo de construcciones, y apuntó:

¿Crees que existe alguna relación entre las distancias en los anteriores puntos? Si
Si es así, describe cuál es la relación: POR que da dapi una constante de medida que es 6.

Ilustración 23: Relación entre los puntos de la hipérbola (estudiante 3).

Y continuando con la indagación, dio respuesta a la siguiente pregunta:

Mide la distancia que existe entre los puntos V y V'. ¿Cómo es con respecto a las distancias antes medidas? despues de la resta entre F y F' da una constante que es la distancia entre V y V'

Ilustración 24: Relación entre la distancia entre los vértices y la constante en la hipérbola (estudiante 3).

De esta forma, este estudiante logró aproximarse a la propiedad formal que cumplen los puntos que conforman a la hipérbola (la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos focos es constante), a través de la exploración, manipulación y observación directa de los conceptos trabajados.

Actividad 3: Esta última experiencia planteada en relación con el estudio de las secciones cónicas, tiene el objetivo de establecer las ecuaciones que representan analíticamente a estas curvas, las cuales deben surgir con base en las actividades antes desarrolladas, donde se establecieron las propiedades que cumplen los puntos que conforman a cada sección. Para el desarrollo del trabajo propuesto es necesario además, el uso de las propiedades del algebra, la potenciación, la radicación, y de diversas herramientas matemáticas.

Para el **estudiante 1**, la realización de esta actividad no fue satisfactoria, hasta el punto de poder afirmar que este no alcanzó los objetivos básicos propuestos. Las dificultades surgieron desde el primer momento en el cual este alumno intentó comprender lo que debía hacer, a pesar de que había llegado a comprender algunas de las características de las curvas a través de la observación y manipulación de las mismas.

En este sentido, los avances más significativos del estudiante surgieron cuando se le explicó que las curvas que él podía apreciar, podían ser representadas de una forma diferente a la gráfica, en forma de las expresiones analíticas que la guía de trabajo describía. Así, aunque no comprendiera estas expresiones, pudo conocer el origen de las mismas.

De este modo, el trabajo del estudiante se centró en retomar algunas de las propiedades de las secciones, y en intentar establecer relaciones entre estas y el mundo real, reiterando sus ejemplos de "la parábola es similar a una media luna" o "la hipérbola se parece a un reloj de arena". De esta manera, el estudiante 1 en su proceso de conceptualización en torno a las secciones cónicas, observó, manipuló y estableció algunas relaciones entre los conceptos y el mundo real, pero no alcanzó procesos más complejos como los de abstracción y formalización, situación que está directamente relacionada con sus condiciones y potencialidades particulares, y con los vacíos que en su conocimiento matemático se han generado a lo largo de su historial académico.

El **estudiante 2**, logró identificar expresiones analíticas que representaban a las secciones cónicas, a través del desarrollo de la actividad propuesta. Inició entonces con la parábola, para ello partió de la propiedad que cumplen los puntos que conforman la curva, la cual, aunque había sido trabajada en días anteriores, era reiterada en la guía de trabajo como sigue:

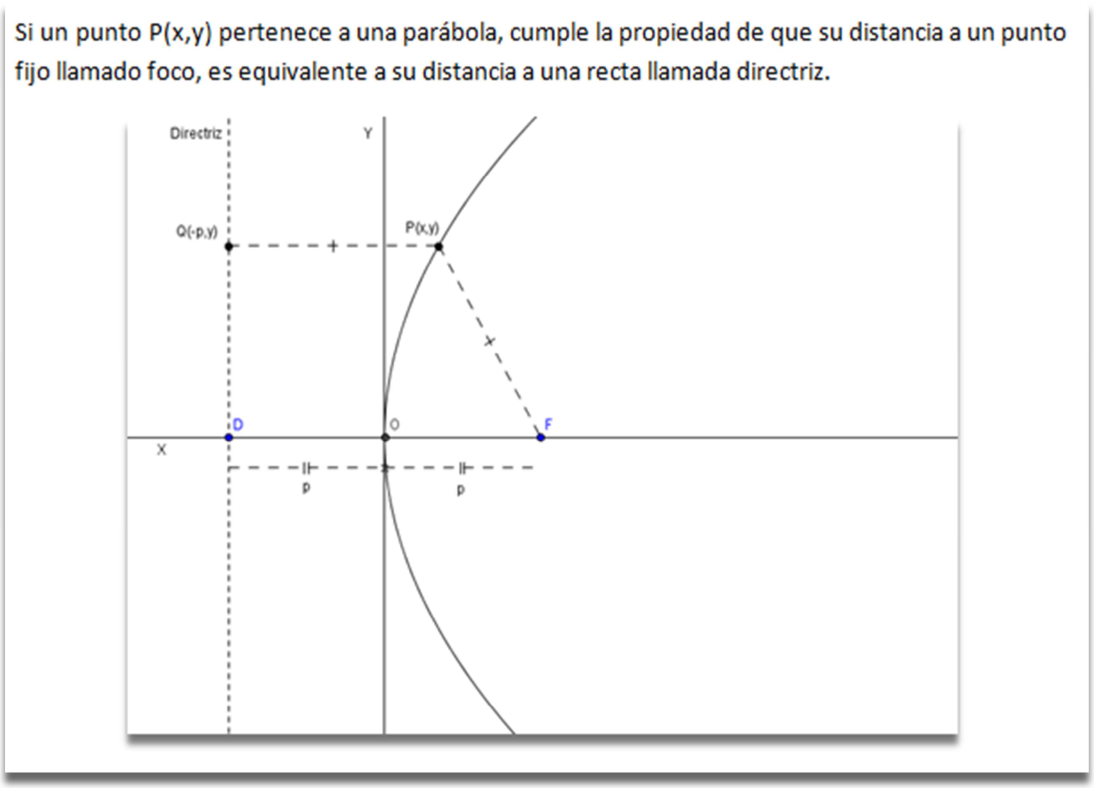


Ilustración 25: La parábola y sus propiedades.

A partir de esto, y utilizando diferentes herramientas matemáticas para resolver y simplificar expresiones, el alumno logró completar en la guía de trabajo la siguiente tabla, concluyendo una expresión para la parábola:

1. $\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$	Por la definición de parábola
2. $(x-p)^2+(y-0)^2 =$ $(x+p)^2+0$	Elevando al cuadrado a ambos lados
3. $x^2-2px+p^2+y^2 =$ $2px+x^2+p^2$	Resolviendo los cuadrados
4. $x^2-2px+p^2+y^2-x^2-p^2 = 2px$	¿Por qué?
5. $-2px+y^2$ $= 2px$	Simplificando términos semejantes
6. $y^2 = 2px + 2px$	Despejando el término y^2
7. $y^2 =$ $4px$	**Ecuación canónica de la parábola**

Ilustración 26: La ecuación de la parábola (estudiante 2).

Como se nota en la ilustración anterior, la guía “otorga ciertas facilidades al estudiante” a la hora de determinar la ecuación de la cónica, puesto que lo importante no es tanto verificar la cantidad de algoritmos y propiedades que el alumno conozca, sino que este comprenda que todas las ecuaciones y expresiones analíticas que en algún momento ha estudiado, surgen a partir de procesos similares al que se está siguiendo en estas actividades, donde a través de la observación y la manipulación de objetos reales, se pueden encontrar formas de expresar esos objetos a través del lenguaje mismo de las Matemáticas.

De una manera similar, este estudiante determinó la ecuación de la elipse, partiendo de nuevo de una imagen de esta curva caracterizada por la propiedad que cumplen los puntos que la conforman:

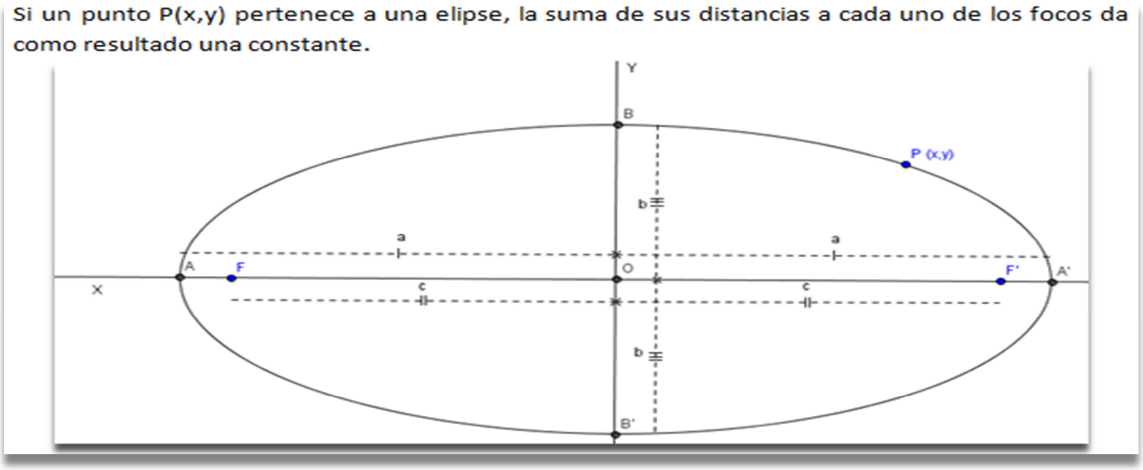


Ilustración 27: La elipse y sus propiedades.

De nuevo, partiendo de las propiedades geométricas que cumplen los puntos, y siguiendo procedimientos similares a los usados en la parábola, el estudiante 2 determinó lo siguiente:

1. $d(P,F) + d(P,F') = 2a$	Definición de la elipse
2. $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$	Distancia entre puntos
3. $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$	Despejando el primer término
4. $(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \cancel{+} 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$	¿Por qué? elevamos al cuadrado ambos lados
5. $(x+c)^2+y^2-4a^2-(x-c)^2-y^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$	Despejando el termino radical
6. $\cancel{Ka}(x+c)^2-(x-c)^2-4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$	Elevando al cuadrado los polinomios
7. $4xc-4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$	Simplificando términos semejantes
8. $(xc-a^2)^2 = a^2[(x-c)^2+y^2]$	¿Por qué? se restan los términos semejantes
9. $x^2c^2-2a^2xc+a^4 = a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$	Elevando al cuadrado los polinomios
10. $x^2c^2-2a^2xc+a^4 = a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$	Aplicando la propiedad distributiva
11. $a^4-a^2c^2 = a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2$	¿Por qué?
12. $a^2(a^2-c^2) = x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$	Factorizando
13. $a^2 = x^2+\frac{a^2y^2}{a^2-c^2}$	¿Por qué? se despeja a^2
14. $1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)}$	Dividiendo por a^2
15. $1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}$	Simplificando la expresión $(a^2-c^2=b^2)$ ¿Por qué?
16. $1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	**Ecuación canónica de la elipse**

Ilustración 34: La ecuación de la elipse (estudiante 2).

Es importante rescatar al respecto del proceso de este alumno, que encontró varios errores en las guías de trabajo (algunos signos o símbolos faltantes o palabras repetidas), mientras que otros muchos de sus compañeros pasaron por alto esos aspectos. Además, este estudiante en particular, no requirió un acompañamiento reiterado, demostrando un adecuado dominio de las herramientas y algoritmos matemáticos implicados en la actividad. Otra situación de interés, fue el hecho de que si bien este educando realizó todas las actividades planteadas, no lo hizo con la misma motivación que en ocasiones pasadas, demostrando un cierto disgusto con trabajos más algorítmicos y mecánicos.

Finalmente, el estudiante 2 concluyó la actividad determinando la ecuación canónica de la hipérbola.

Ilustración 28: Actividad ecuación de la hipérbola (estudiante 2).

Para lograr determinar esta ecuación, de nuevo partió de las propiedades geométricas de la curva, acompañadas de una imagen aclaradora, como a continuación aparece:

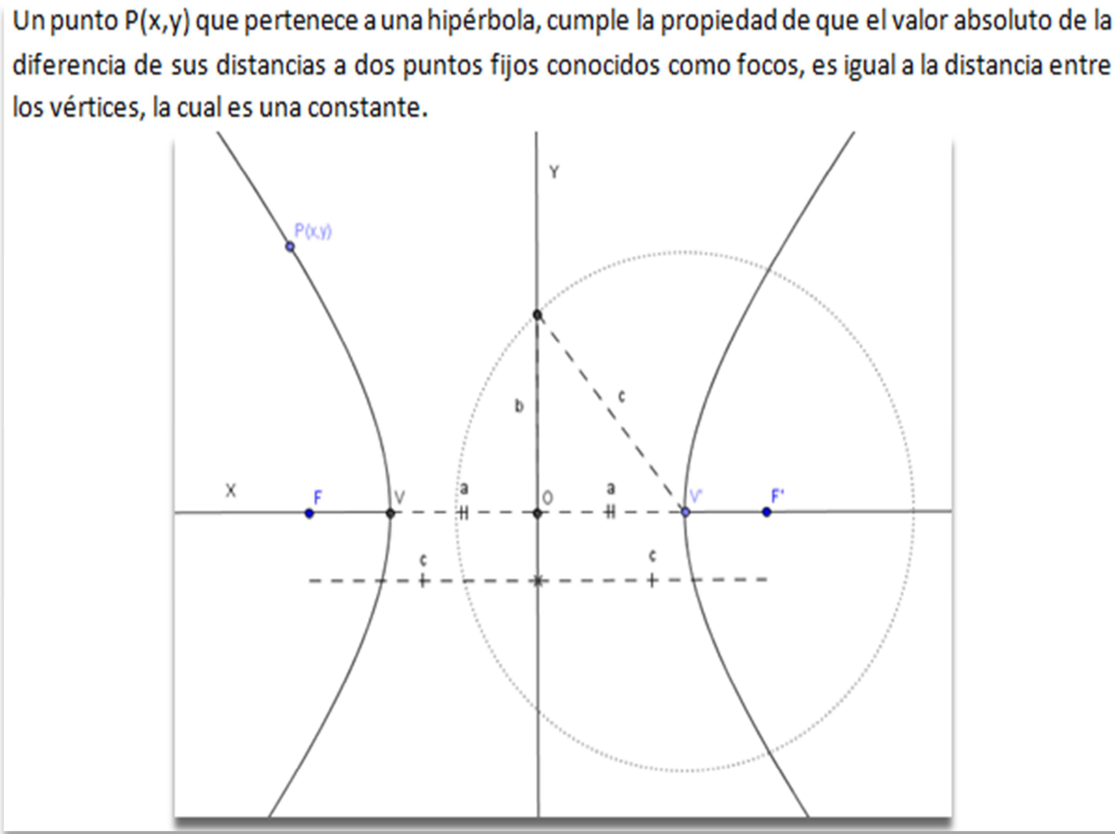


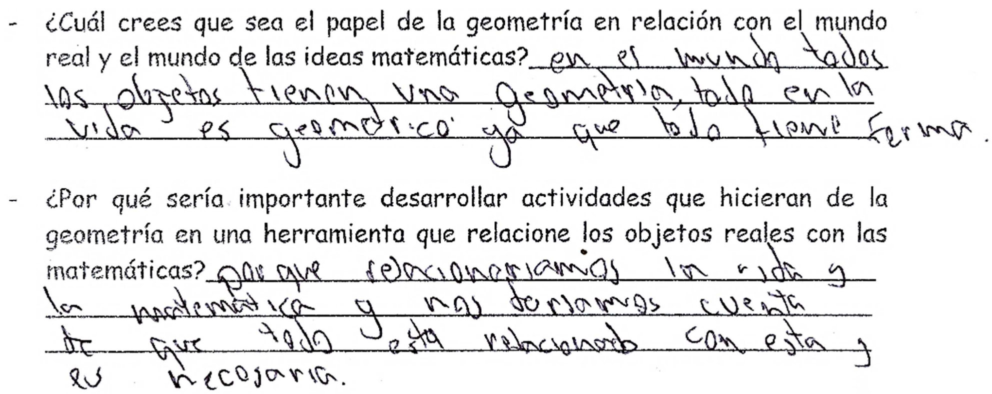
Ilustración 29: La hipérbola y sus propiedades.

De lo anterior, y con base también en las experiencias logradas a partir de la manipulación del cono seccionado y las construcciones de tales secciones, este alumno siguió el siguiente proceso para determinar cuál es la ecuación que representa a la hipérbola:

1. $d(P,F) - d(P,F') = 2a$	Por la definición de hipérbola
2. $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$	Por definición de distancia
3. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Despejando el término de la izquierda
4. $(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$	Elevando al cuadrado
5. $(x+c)^2 + y^2 =$ $4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$	Desarrollando los cuadrados
6. $\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} +$ $\cancel{y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2}$	Desarrollando de nuevo los cuadrados
7. $2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc$	Simplificación de términos semejantes
8. $4xc - 4a^2 =$ $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Despejando el término en la derecha
9. $(xc - a^2)^2 = a^2(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$	Dividiendo por 4 y elevando al cuadrado
10. $x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 =$ $a^2((x-c)^2 + y^2)$	Desarrollando los cuadrados
11. $a^4 - a^2c^2 = x^2a^2 + a^2y^2 - x^2c^2$	Reducción de términos semejantes
12. $a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$	Factorizando
13. $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$	Dividiendo por el término $a^2(a^2 - c^2)$
14. Pero $a^2 - c^2 = -b^2$	Por el teorema de Pitágoras
15. $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	**Ecuación canónica de la hipérbola**

Ilustración 30: La ecuación de la hipérbola (estudiante 2).

En esta última actividad, el estudiante necesitó hacer un par de correcciones en sus procedimientos, antes de poder llegar con claridad a determinar expresiones analíticas de la curva, pero finalmente, logró establecer las ecuaciones canónicas para las secciones cónicas, siguiendo un proceso que lo llevo de la observación y manipulación de material tangible, hasta la construcción de las curvas por medio de trazos en el papel, para luego poder formalizar sus conclusiones, dejando las siguientes anotaciones de interés para el presente análisis:



- ¿Cuál crees que sea el papel de la geometría en relación con el mundo real y el mundo de las ideas matemáticas? en el mundo todos los objetos tienen una geometría, todo en la vida es geométrico ya que todo tiene forma.
- ¿Por qué sería importante desarrollar actividades que hicieran de la geometría en una herramienta que relacione los objetos reales con las matemáticas? porque relacionaríamos la vida y la matemática y nos daríamos cuenta de que todo esta relacionado con esta y es necesaria.

Ilustración 31: Conclusiones estudiante 2.

Si bien el estudiante no responde con claridad a las preguntas planteadas, señala que todos los objetos en el mundo real tienen una forma que puede ser estudiada desde la Geometría, desde donde se pueden establecer las propiedades que se observan y se perciben, traduciendo estas al lenguaje matemático, entendiendo así la verdadera razón e importancia del conocimiento geométrico.

La **estudiante 3**, determinó expresiones analíticas para la parábola y la hipérbola, llevando un proceso similar al del alumno antes analizado. Inicialmente y para familiarizarse con el tipo de trabajo que estaba a punto de abordar, comenzó con la parábola, actividad cuyo desarrollo le resultaba menos extenso y algo “más sencillo”. Así, completando la siguiente tabla, determinó la ecuación canónica de la curva en cuestión:

1. $\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$	Por la definición de parábola
2. $(x-p)^2+(y-0)^2 =$ $(x+p)^2+(y-y)^2$	Elevando al cuadrado a ambos lados
3. $x^2-2px+p^2+y^2 =$ $2px+x^2+p^2$	Resolviendo los cuadrados
4. $x^2-2px+p^2+y^2-x^2-p^2 = 2px$	¿Por qué?
5. $2px+y^2$ $= 2px$	Simplificando términos semejantes
6. $y^2 = 2px+2px$	Despejando el término y^2
7. $y^2 =$ $4px$	Ecuación canónica de la parábola

Ilustración 32: La ecuación de la parábola (estudiante 3).

En esta primera experiencia, la estudiante necesitó que le fueran recordados algunos de los algoritmos usados en productos notables y ciertas propiedades de la radicación, con lo cual pudo completar sin más complicaciones la tabla, identificando la expresión con la cual se podría representar a una parábola. Es claro que esta alumna también partió desde las propiedades geométricas que cumplen los puntos de la parábola (ver ilustración 32), las cuales formalizó en expresiones matemáticas.

Luego de concluir esa primera actividad, la estudiante 3 comenzó su trabajo con la hipérbola, curva que en días anteriores había construido con regla y compás, construcción desde la cual pudo inferir las propiedades que cumplen los puntos, que además, eran reiteradas en la guía propuesta para el trabajo (ver imagen 36).

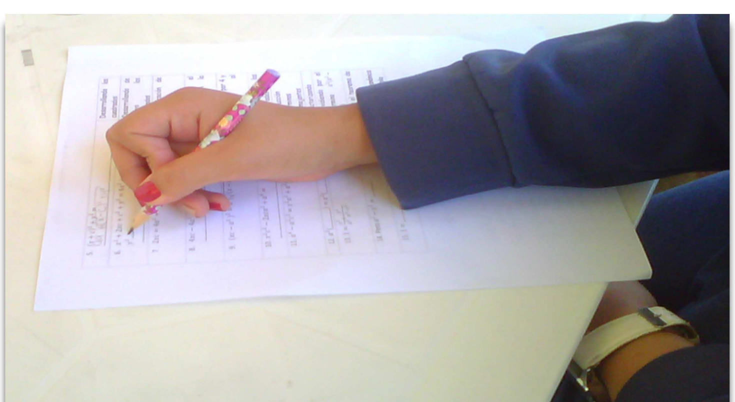


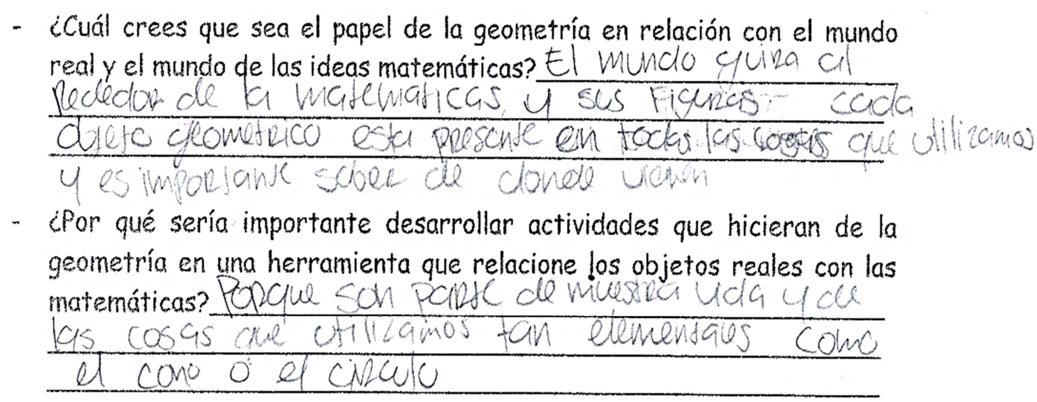
Ilustración 33: Actividad ecuación de la hipérbola (estudiante 3).

Con base en los aspectos antes mencionados, comenzó a determinar la ecuación de esta sección cónica, de nuevo completando la tabla destinada para ello:

1. $d(P,F) - d(P,F') = 2a$	Por la definición de hipérbola
2. $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$	Por definición de distancia
3. $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$	Despejando el término de la izquierda
4. $(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$	Elevando al cuadrado
5. $(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$	Desarrollando los cuadrados
6. $\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$	Desarrollando de nuevo los cuadrados
7. $2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2xc$	Simplificación de términos semejantes
8. $4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$	Despejando el término en la derecha
9. $(xc - a^2)^2 = a^2(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$	Dividiendo por 4 y elevando al cuadrado
10. $x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2+y^2]$	Desarrollando los cuadrados
11. $a^4 - a^2c^2 = x^2a^2 + a^2y^2 - x^2c^2$	Reducción de términos semejantes
12. $a^2(a^2-c^2) = x^2(a^2-c^2) + a^2y^2$	Factorizando
13. $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2}$	Dividiendo por el término $a^2(a^2-c^2)$
14. Pero $a^2 - c^2 = -b^2$	Por el teorema de Pitágoras
15. $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	**Ecuación canónica de la hipérbola**

Ilustración 34: La ecuación de la hipérbola (estudiante 3).

De este modo, la estudiante logró identificar expresiones analíticas para dos de las secciones cónicas, durante lo cual se encontró con diversas dificultades, relacionadas en su mayoría con el hecho de que había olvidado algunas propiedades necesarias para la solución, las cuales pudo superar mediante un acompañamiento adecuado, redireccionando cuando fuese necesario su proceder, culminado de esta manera la actividad propuesta para el desarrollo conceptual de las secciones cónicas, que como a sus compañeros, la llevo por procesos de observación y manipulación, de medición y establecimiento de relaciones y propiedades, en las cuales veía como progresivamente "aumentan los niveles de complejidad", hasta finalmente poder formalizar sus apreciaciones. Desde estos procesos, esta alumna logró concluir algunas ideas, desde lo cual responde a lo siguiente:



- ¿Cuál crees que sea el papel de la geometría en relación con el mundo real y el mundo de las ideas matemáticas? El mundo gira al rededor de la matematicas, y sus figuras - cada objeto geometrico esta presente en todas las cosas que utilizamos y es importante saber de donde vienen
- ¿Por qué sería importante desarrollar actividades que hicieran de la geometría en una herramienta que relacione los objetos reales con las matemáticas? Porque son parte de nuestra vida y de las cosas que utilizamos tan elementales como el cono o el circulo

Ilustración 35: Conclusiones estudiante 3.

De nuevo, las respuestas dadas a las preguntas no son del todo adecuadas, pero una vez más se evidencian ciertas relaciones establecidas entre las Matemáticas y el mundo real, con la Geometría jugando un papel fundamental en este tipo de relaciones, donde los conceptos escritos en el lenguaje matemático se alejan un poco de sus carácter abstracto y adquieren uno más familiar, más cercano.

Es importante finalmente, considerar que más allá de la “cantidad” de aprendizajes que los estudiantes lograron generar en el desarrollo de las actividades aquí analizadas, la importancia está en la “calidad” de estos, en la existencia de una verdadera y clara comprensión conceptual, en la posibilidad de que los alumnos logren articular las ideas trabajadas en clase con el mundo que los rodea. En estas actividades, algunos lograron acceder a una gran cantidad de conocimientos, otros en cambio no tanto, aquellos que en muchas ocasiones no pudieron continuar profundizando y complejizando sus aprendizajes. Pero por encima de estos aspectos, está el hecho de que cada estudiante recorrió los caminos propuestos hasta donde su interés y capacidad lo permitió. Si bien el objetivo radicaba en la comprensión y estudio de las secciones cónicas, cada sujeto en el aula taller pudo o no estudiar todas las propiedades fundamentales de estas curvas, pero sí que logró aportar en su medida al desarrollo de los conocimientos y se vio incluido en los procesos de construcción de las ideas en la clase, desarrollando habilidades mentales y sociales, lo cual se convierte en una contribución clara a los fines mismos una educación incluyente.

CONSIDERACIONES FINALES

Las experiencias antes descritas, se refieren a los procesos a través de los cuales, estudiantes conceptualizaron en torno a las secciones cónicas. Para ello se diseñaron actividades que se han considerado entrelazadas, en el sentido en que iban cimentando una tras otra las bases del desarrollo de la siguiente. Es por esto que, el trabajo realizado se distanció de procedimientos y mecánicas tradicionales, y permitió a los alumnos establecer por sí mismos (con un adecuado acompañamiento), significados para los conceptos relacionados con estas curvas y comprender formas desde las cuales el hombre representa en un lenguaje matemático, algunos objetos del mundo real.

Como fuera dicho, las actividades aquí mencionadas giraron en torno al caso específico del estudio de las secciones cónicas, pero a partir de estas, se han concluido ciertas cuestiones generales respecto de la enseñanza de las Matemáticas, que han surgido del reflexionar continuo en el camino de "*identificar algunos aportes del estudio de la Geometría en la escuela a través de la metodología del aula taller, frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje en las Matemáticas inmersos en un contexto inclusivo*".

En primer lugar es fundamental reconocer la importancia de considerar las potencialidades e intereses de los estudiantes al momento de diseñar actividades en relación con los conceptos matemáticos, puesto que cada estudiante realiza la construcción de su conocimiento con base en sus propias particularidades.

En segundo lugar, y considerando que existen diversas estrategias para la enseñanza de las ciencias, el aula taller ha brindado a este proyecto posibilidades como el cambio en la actitud de los alumnos, al implicarlos en procesos de construcción conceptual que intentan cautivar su interés y estimular tanto su independencia como su trabajo grupal. Así mismo, se presenta al Maestro la oportunidad de modificar su rol, el cual será el de guía y diseñador de actividades, que respondan a las necesidades y particularidades de sus alumnos. Es importante reiterar que el aula taller, más allá de ser una simple ubicación espacial dotada de diversas herramientas, es un lugar en donde la teoría se articula con la práctica, y es desde esa concepción donde este proyecto ha encontrado los mayores aportes de esta metodología de enseñanza y aprendizaje, al posibilitarse en ello que el estudiante comprenda la relación que existe entre los concepto abstractos y aquellos objetos, formas y propiedades que puede observar en su entorno. Además, desde la perspectiva de aula taller trabajada, las actividades propuestas se fundamentan en la manipulación de material concreto mediado por guías escritas, las cuales son elaboradas pensando en que el desarrollo en cada momento debe ser progresivo en sus niveles de complejidad, permitiendo que cada estudiante avance en conformidad con sus particularidades.

El diseño de guías de trabajo, además de ser un aporte a la comprensión lectora de los estudiantes, permite que los estudiantes realicen su trabajo con un alto grado de independencia respecto al docente, y que aquellos más rezagados encuentren en sus compañeros más adelantados un soporte para su propio procesos, lo cual posibilita a su vez que el maestro focalice su acompañamiento en los estudiantes que más lo necesitan. Es por esto que la metodología aula taller se ha convertido en una muy importante herramienta en el propósito de hacer de las Matemáticas un área más incluyente.

Desde la opinión de quienes han vivido las experiencias en el marco de este trabajo, y con base en estas mismas, para que los procesos de enseñanza y aprendizaje desde esta metodología se desarrollen convenientemente, es importante que exista un docente guía por cada 10 estudiantes (número que varía según el contexto) y que los tiempo destinados para las actividades no superen las dos horas de trabajo, con el fin de mantener vivo el interés de los estudiantes.

Es importante además, rescatar el rol que la Geometría ha desempeñado en este trabajo. Desde un principio, se ha planteado la preocupación por el cómo se ha estado enseñando Geometría en las aulas de clase, hasta incluso haberla dejado relegada al olvido. Esta situación ha hecho que el aprender Matemáticas en las escuelas, se haga de una manera diferente a la cual el hombre históricamente ha seguido, partiendo de la observación de su entorno, para luego formalizar y abstraer los conceptos que son traducidos al lenguaje matemático. En este sentido, el olvidar la Geometría, implica absolutamente un desarticulamiento entre los conceptos de la ciencia en cuestión y el mundo que día tras día podemos apreciar, razón por la cual las Matemáticas muchas veces son la ciencia de lo extraño y de lo no real, cuando verdaderamente son del carácter de lo humano, al responder a su necesidad por entender y conocer su entorno. Así, la Geometría se presenta no solo fundamental para este proyecto, sino para todo intento de enseñar Matemáticas.

Finalmente, es importante recordar que la inclusión es una de las preocupaciones más relevantes en el marco de la educación actual. Cada docente desde su área de conocimiento, está llamado a atender dichas preocupaciones, de forma que en las aulas del mundo puedan confluir personas de todas las características, desde el respeto por sus condiciones particulares. “Esta es entonces, nuestra pequeña contribución”.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Alsina, C. (2000). Geometría y realidad. Recuperado de http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/documents/geometria_realidad.pdf

- Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Educación y Pedagogía*, *23*, 47-57.

- Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31- 48.

- Cruz, L., y Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Educación*, *97*, 14 – 21.

- Czwienczek, F. (2009). Estudio de la Elipse con Plegado de Papel. *Iberoamericana de Educación Matemática*, *18*, 150 – 155.

- Del Río, J. (1996). Lugares geométricos. Cónicas. España: Síntesis S.A.

- Echeita, G. (2008) Inclusión y exclusión educativa. "Voz y quebranto". *Revista electrónica Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, *6* (2), 9-18.

- Echavarría, C. y Gonzales, U. (2000). Construcción de cónicas con regla y compás.

- Esteban, P. (2003). Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de Van Hiele. Universidad Politécnica de Valencia, España

- Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 217 – 226.

-Gomez, P., Valero, P. La potenciación sistema de educación matemática en Colombia. Recuperado de funes.unidades.edu.co/312/1/Gomez p25-17.pdf

- Guzman, M. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. Recuperado de http://www.oei.es/edumat.htm.

- Guzman, M. (1998). Matemáticas y estructura de la naturaleza. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/sites/default/files/mguzman/03alfondo/matyestructura/matyest.htm

- Hatori, Koshiro (2003). Origami Construction. Recuperado de http://origami.ousaan.com/library/conste.html

- Ibáñez, R. (2002). Secciones cónicas. *Sigma*, *20,* 12 – 38.

- Johnson, D. (1975). Matemáticas más fáciles doblando papel. España: Distein.

- Jaime, A y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez, Teoría y Práctica en Educación Matemática. España: Alfar.

- Jaramillo, C. (2003). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele. Universidad Politécnica de Valencia, España.

- Jaramillo, C y Campillo, P. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del Modelo de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9* (1), 65 – 84.

- Jaramillo, C., y Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Educación y Pedagogía*, *17*, 109 - 118.

- Jurado, F. y Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia-

- Lang, R. (2004 – 2010). Huzita Axioms. Recuperado de: http://www.langorigami.com/science/hha/hha.php4

- Larios, V., y González, N. (1994). Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría euclidiana en el nivel medio básico. Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera", México.

- Llorens, J. (1994). Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. Universidad de Valencia, España.

- López, A. (2007). Las fases de Van Hiele para el teorema de Pitágoras. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

-López, C. Mesa, I. Sánchez, C. (2008). El aula taller: una metodología para la enseñanza de las matemáticas en los grados sexto y séptimo del colegio de la universidad pontificia bolivariana. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares en Matemáticas. Bogotá. Versión digital en pdf. 280

- -------- (2004). Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

- -------- (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá. Versión digital en pdf.

- Monsalve, O., y Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Educación y Pedagogía*, *15*, 11 – 25.

- Santa, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van hiele. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

- Santa, Z., Bedoya, D., y Jiménez, O. (2007). Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

- Santa Ramírez, Z. M. y Jaramillo López, C. M. Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *31*.

- Moura, M. Educar con matemáticas: saber específico y saber pedagógico. *Educación y Pedagogía*, *23*, 47-57.

- Pasel, S. (1993). Aula taller. Buenos Aires: Aique grupo editor.

- Parrilla, A. ¿Compañeros de pupitre? Clave para el trabajo inclusivo en el aula. Recuperado de http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB4Q

FjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.zarauzgune.com%2Fprestakuntza%2Fformakuntza%2Fmoduloen%2520dokumentuak%2Felkarbizitza%2Fdocuments%2Fparrillacas.doc&ei=MNOLUOLqCISA9QTnroDoDw&usg=AFQjCNF7brmDzQNWbRZ9mORKXVSv9nof8A

- UNESCO. Temario abierto sobre educación inclusiva. Materiales de apoyo para responsables de políticas educativas. Tema 6: El desarrollo de un currículo inclusivo. Pág. 110-111

- Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievements in Secondary School Geometry. University of Chicago: CRRSSG Report.

- Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight. A theory of Mathematics Education. London: Academic Press.

- Van Hiele, P. (1990). El problema de la comprensión. (A. Gutiérrez, traducción). Proyecto de investigación: Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.

- Zapata, S. y Sucerquia, E. (2009). Módulo de Instrucción en el Marco del Modelo Educativo de Van Hiele para el concepto de convergencia de una serie infinita". Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

ANEXOS

ANEXO 1: LAS SECCIONES CÓNICAS

"Los planetas en su movimiento alrededor del Sol describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol" (Primera Ley de Kepler, 1609)

A continuación, se presenta una unidad didáctica diseñada para la enseñanza de las secciones cónicas a partir del uso de material concreto, el doblado de papel, y trazos posibilitados por la regla y el compás. La finalidad de esta unidad es posibilitar una más fácil y adecuada comprensión de lo que significan lugares geométricos como la elipse, la parábola y la hipérbola, motivando al estudiante a desplazarse de su posición pasiva y haciéndolo participe de la construcción de ideas, que irá elaborando conforme puede interactuar con los conceptos implícitos en las actividades propuestas.

La unidad didáctica soporta su desarrollo en el uso de guías que han sido diseñadas con el fin de mediar los caminos que los estudiantes transitan cuando intentan comprender conceptos nuevos. Así, estas guías delimitan el proceder de los estudiantes sin negar sus capacidades creativas y de intervención en la construcción y observación de los conceptos matemáticos, dando espacio a la exploración libre y posibilitando que el estudiante interactúe con los conceptos hasta donde su interés y capacidad particular se lo permitan, siempre intentando alcanzar al menos unos objetivos básicos propuestos, que son los de generar una claridad conceptual adecuada, por encima del carácter algorítmico y del uso de procedimientos mecánicos.

En medio del contexto del proyecto “hacia una educación matemática para la inclusión escolar: contribuciones de una propuesta pedagógica basada en la metodología aula taller”, en donde la principal preocupación es articular la teoría matemática con objetos del mundo real, a través de la manipulación de elementos tangibles, en medio de un espacio en el cual se pueda interactuar con semejantes para hacer de ese conocimiento desarrollado, una construcción con carácter social. Además, la propuesta metodológica implica un desarrollo de los conceptos con un carácter evolutivo en los niveles de complejidad, permitiendo que cada actividad sea exigente y acorde con las capacidades particulares de cada uno de los estudiantes. Es importante señalar también, el papel fundamental que los conceptos geométricos toman en el transcurso de los diferentes momentos en los cuales se desarrolla la actual unidad didáctica, pues se considera a esta disciplina como la herramienta que articula los conceptos matemáticos con el mundo real y cotidiano para los estudiantes. En este sentido, será el desarrollo de los conceptos geométricos lo que posibilite una adecuada comprensión de las ideas que en este caso particular, estarán relacionadas con las secciones cónicas y las propiedades que estas curvas cumplen, intentando establecer la relación entre el concepto geométrico y las ecuaciones canónicas de las secciones cónicas, interpretando las aplicaciones que estas han tenido en la vida práctica.

El cono y las secciones cónicas

A continuación se presenta el orden esquemático en el cual ha sido planteada la unidad didáctica. Un primer momento de la actividad uno, está destinado a la manipulación de un cono de madera y a la observación de sus diversas secciones. El objetivo de esta actividad es identificar el porqué de que curvas como la elipse, la parábola y la hipérbola, reciban el nombre de sección cónica, objetivo que en apariencia se muestra como sencillo y poco determinante, pero que por la obviedad de la situación, suele dejarse pasar por alto, llevando a que el estudiante no comprenda con claridad que estas curvas que se estudian en las Matemáticas se deriven de los cortes específicos realizados a un cono.

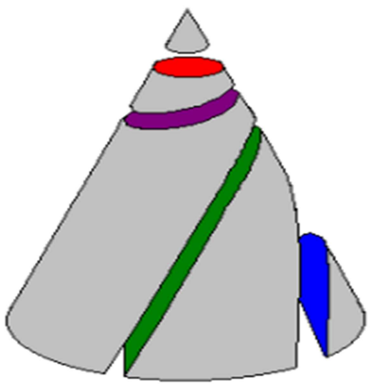
Puesto que se trata de una actividad que sirve de preámbulo para profundizar en la observación de las propiedades de las secciones cónicas, no se estipula una gran inversión de tiempo en ella, pero se recomienda dividir al grupo en subgrupos de 4 a 5 estudiantes (dependiendo de la cantidad de conos disponibles), y facilitar a cada uno de dichos subgrupos los conos previamente cortados. Se dará un espacio para que los estudiantes aprecien las características del material entregado mientras que el docente enuncia los elementos del cono, como el significado del vértice, del eje y de la generatriz, y del como aparece el cono como la rotación de un triángulo rectángulo, con uno de sus catetos como eje de rotación, y el segundo como generatriz del cono.

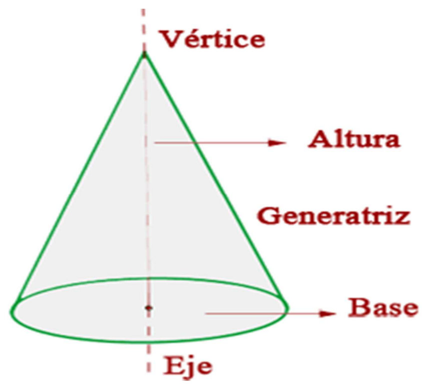
Finalmente, se mencionan las características que deben tener los cortes en el cono para generar cada una de las secciones cónicas, apuntando que los cortes realizados de manera perpendicular al eje del cono tendrá como sección cónica resultante una circunferencia, mientras que si el corte se realiza de forma oblicua con respecto al eje, la sección generada será la elipse. Los cortes paralelos a la generatriz serán parábolas, y los cortes perpendiculares al eje serán hipérbolas siempre que pensemos en el cono como un bicono.

Para el desarrollo de la actividad se presenta la siguiente ficha descriptiva:

Tema:	El cono y las secciones cónicas
Materiales:	Cono en secciones

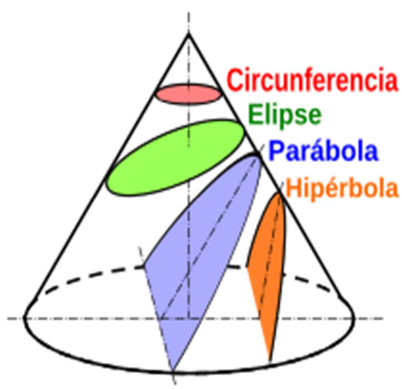
Observa el material que se te ha entregado. Se trata de un cono que ha sido cortado en varias secciones, las cuales tienen la forma de algunas curvas que podrías conocer. El cono es un sólido de revolución, es decir, es un cuerpo que se obtiene al hacer rotar una figura bajo cierto eje fijo. En este caso particular, la figura que rota es un triángulo rectángulo, y el eje del cono o eje de rotación es uno de los catetos, mientras que el otro se convierte en lo que denominamos generatriz. A continuación aparece el cono marcado con las secciones realizadas y con sus elementos descritos.





Las secciones cónicas se clasifican como sigue:

- Circunferencias: cortes realizados de manera perpendicular al eje del cono.
- Elipses: cortes realizados de forma oblicua con respecto al eje del cono.
- Parábolas: cortes realizados de forma paralela a la generatriz.
- Hipérbolas: cortes realizados de forma paralela al eje del cono.



Un segundo momento de esta actividad inicial se enfoca en caracterizar y establecer algunas propiedades generales de las secciones cónicas, mediante una serie de instrucciones, que por medio del doblado de papel, permiten construir las cuatro curvas antes descritas. Este trabajo será un complemento del realizado con el cono y se trabajará en la misma clase. La serie de enunciados están acompañados de imágenes que representaban las instrucciones descritas en cada uno de ellos. Estos, se presentan de forma que cada alumno seleccioné la construcción que desee o le parezca más interesante, generando desde el inicio del trabajo, una motivación en el educando.

Al finalizar el desarrollo de la actividad, es importante generar un espacio donde los alumnos desde sus experiencias, compartan con sus compañeros algunas de las propiedades que han logrado establecer, sin importar si son erradas o no, pues lo importante es generar un debate que permita construir los conceptos a partir de las experiencias vividas en esta actividad. Es importante plantear preguntas que direccionen el debate, las cuales deben responder a las necesidades e intereses particulares de cada contexto.

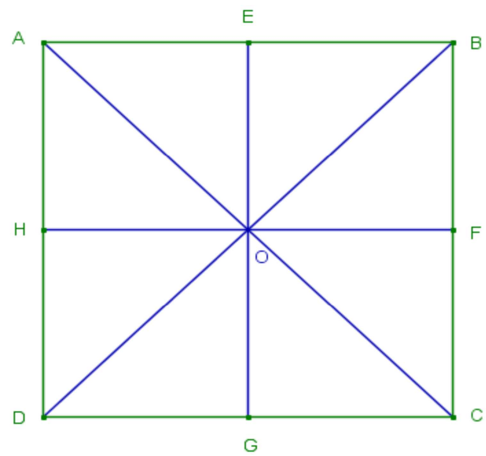
Secciones cónicas por medio del doblado de papel

A continuación se presenta una serie de instrucciones a través de las cuales, los estudiantes pueden lograr construir mediante el doblado de papel las secciones cónicas. Esta actividad es una adaptación de lo propuesto por Santa (2011, p. 85) en su disertación de maestría titulada *"la elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van hiele"*. Las actividades solo requieren del uso del papel y lápiz, y permiten realizar acercamientos conceptuales a las curvas en las secciones mediante la observación y construcción de las mismas, lo cual resulta pertinente si se tienen en cuenta los propósitos de este trabajo.

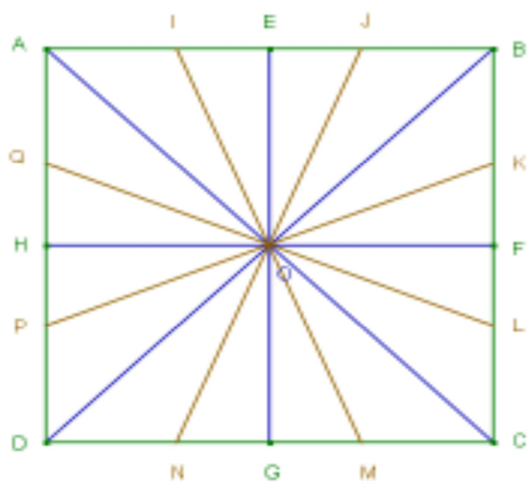
La actividad se presenta a continuación en diferentes recuadros:

Circunferencia

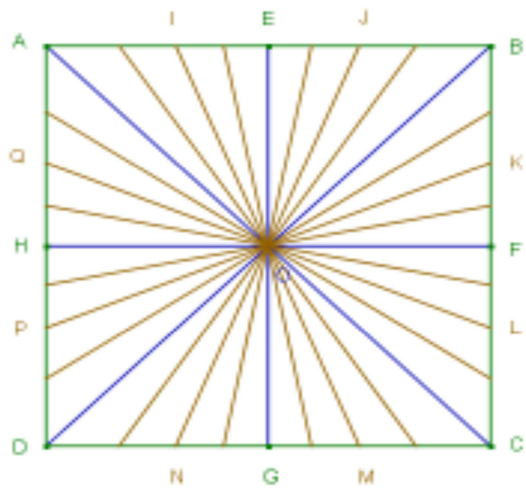
Recortamos un cuadrado y se construyen sus dos diagonales; luego, con cada par de lados paralelos de dicho cuadrado, se construyen paralelas que equidisten de los lados opuestos respectivamente, es decir, los segmentos EG y HF. Esto, generara cuatro dobleces que convergen en el punto O.



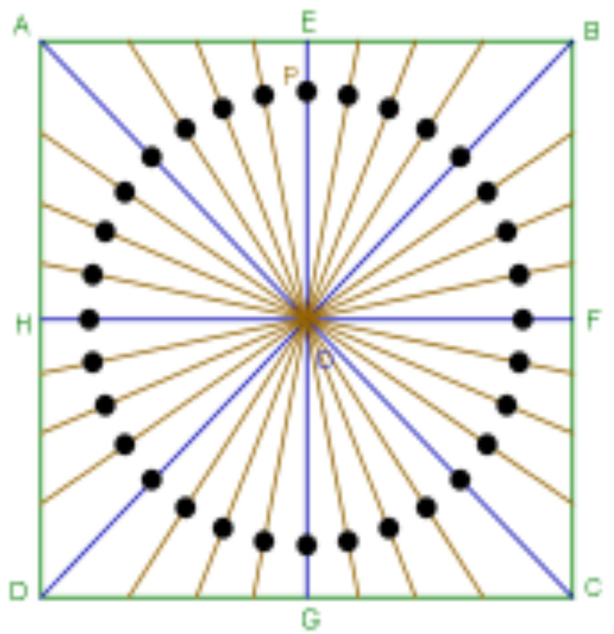
Posteriormente, llevando el doblez AC sobre el doblez EG, para bisecar los ángulos ∠AOE y ∠GOC. Usando el mismo procedimiento, se bisecan todos los demás ángulos interiores.



Luego, con dos dobleces consecutivos, se bisecarán los 16 ángulos interiores que se formaron en el punto O.

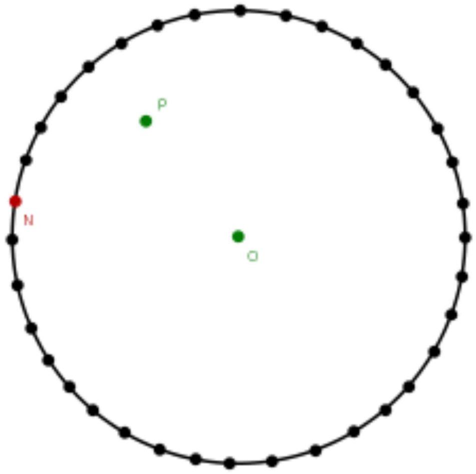


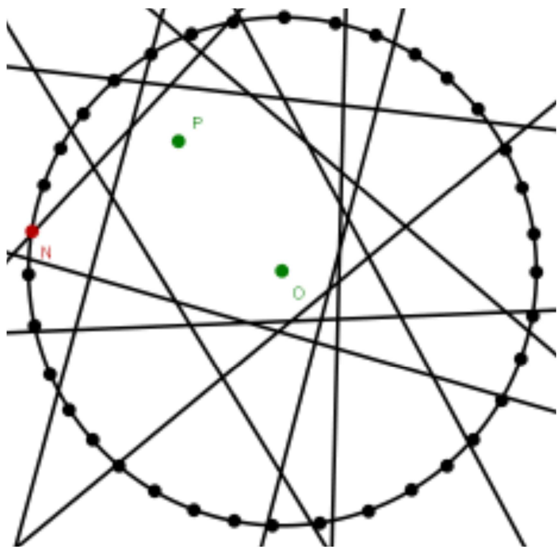
Se dibuja un punto P en uno de los dobleces (diferente del punto O) cerca al borde de la hoja y se traslada a los dobleces siguientes. Este proceso de traslación de dicho punto a los dobleces consecutivos, va a garantizar que se conserva la misma distancia al punto O.



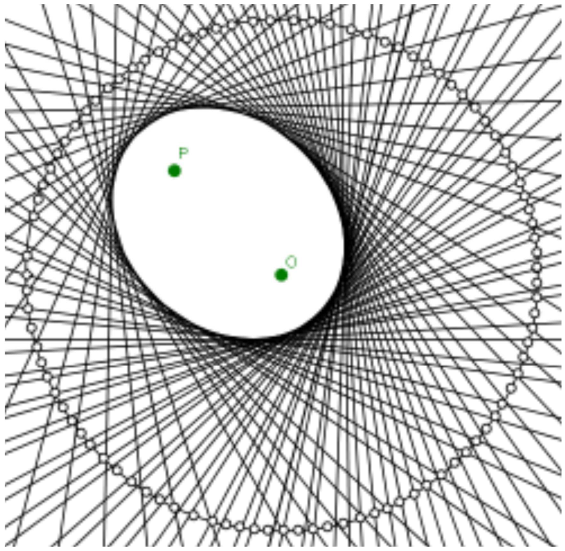
Elipse

La construcción de la elipse inicia con el dibujo de una circunferencia con centro O y radio r, en una hoja de papel de forma rectangular. Posteriormente, se ubica un punto P, diferente de O, en la región delimitada por dicha circunferencia y se realizan dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre el punto P



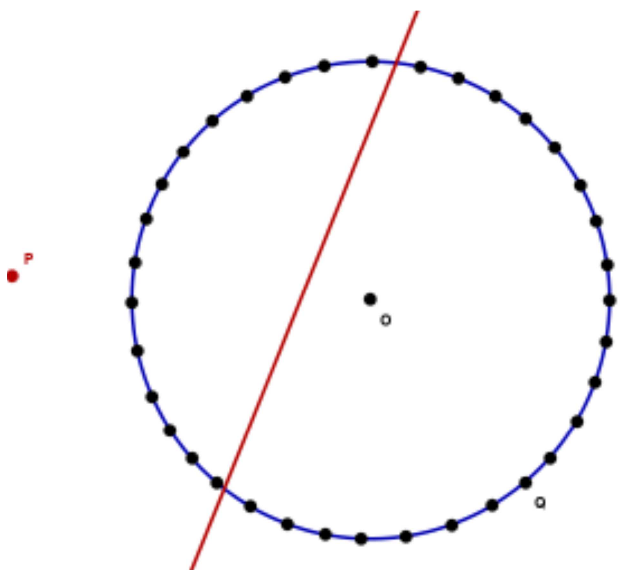


Cuando se finalizan todos los dobleces, se puede, afirma que la elipse se forma como la envolvente de una familia a de rectas. Así:

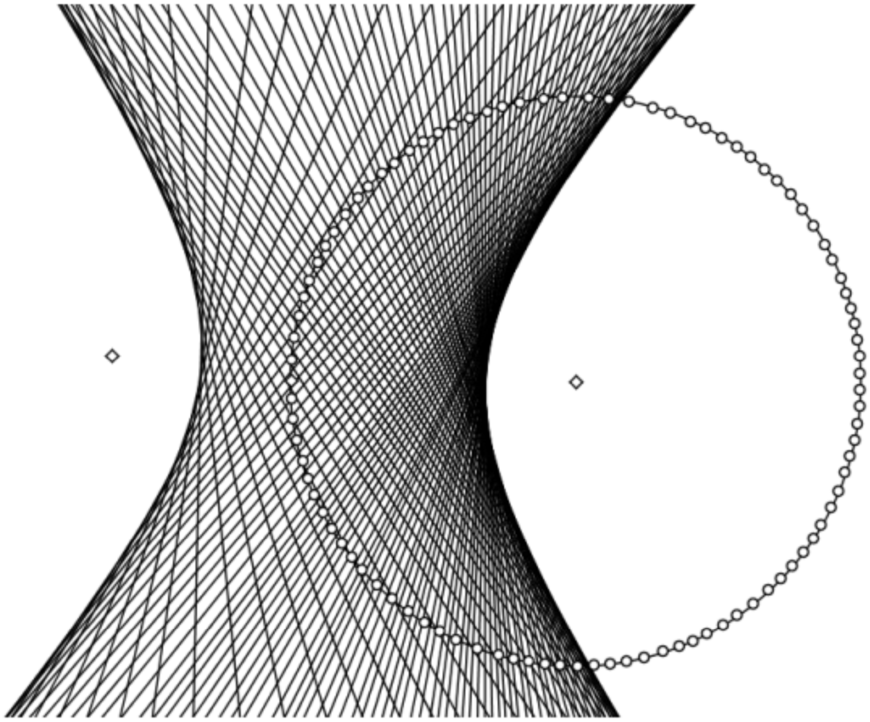


Hipérbola

La construcción de la hipérbola inicia con el dibujo de una circunferencia con centro O y radio r, en una hoja de papel de forma rectangular. Posteriormente, se ubica un punto P, diferente de O, exterior a dicha circunferencia y se realizan dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre el punto P.

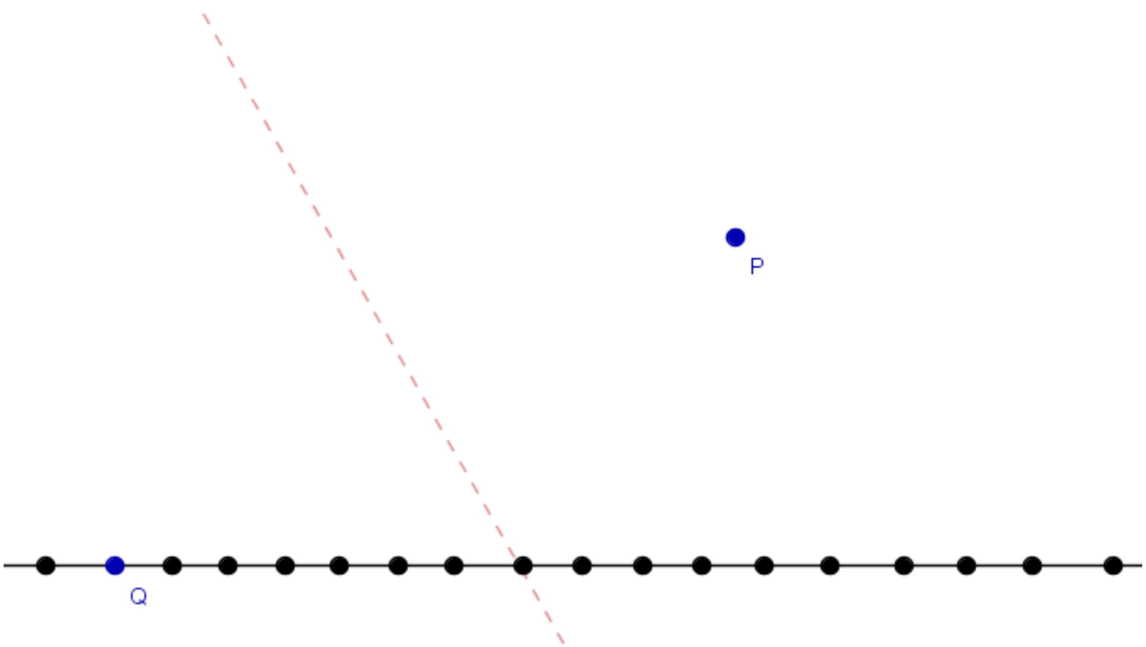


Cuando se finalizan todos los dobleces, la hipérbola se forma como la envolvente de una familia de rectas tangentes. Así:

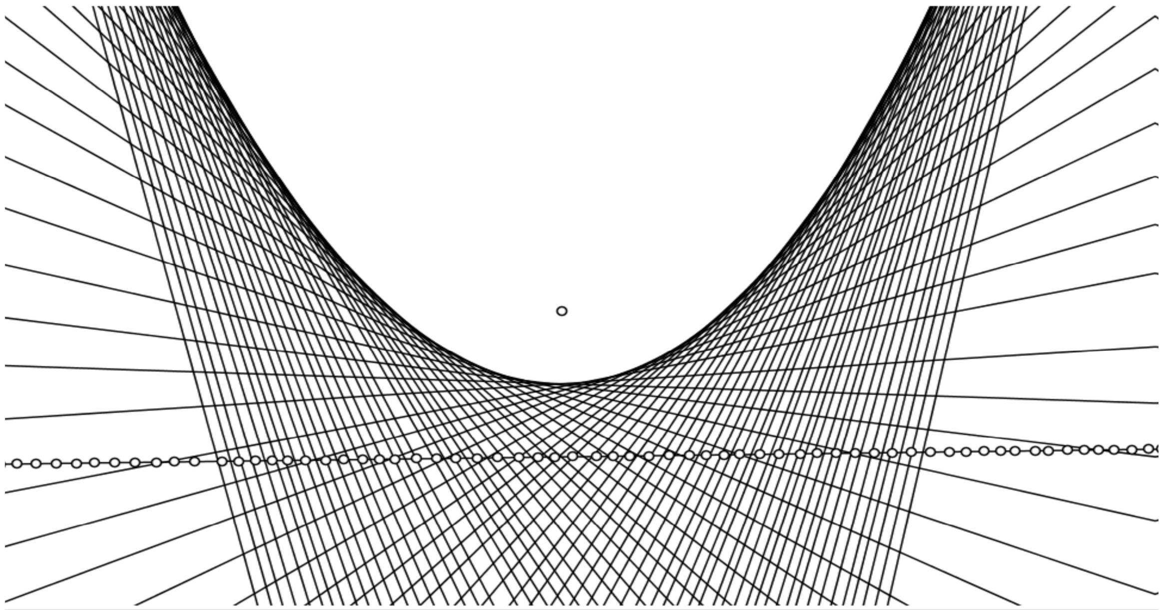


Parábola

Su construcción inicia con la realización de un doblez L, y de la ubicación de un punto P, exterior a este. Posteriormente, se realizan dobleces que surgen de llevar puntos de la recta sobre el punto P.



Cuando se finalizan todos los dobleces, la parábola se forma como la envolvente de una familia de rectas tangentes. Así:



Las secciones cónicas mediante regla y compas

En segundo lugar, se presenta la actividad número dos, el objetivo de esta se centra en el trazado de la parábola, la elipse y la hipérbola, identificando en el proceso de construcción de las mismas sus prop iedades fundamentales, articulando estas propiedades de orden geométrico con la representación analítica de estas curvas, conocidas como ecuaciones canónicas. Para los trazos es necesario el uso adecuado de la regla y el compás, para lo cual, es importante realizar actividades que le permitan a los estudiantes utilizar las herramientas mencionadas para el trazo de perpendiculares o paralelas, o la bisección de segmentos en partes iguales. La forma en que se plantea este trabajo, permite que cada estudiante construya las tres curvas posibles, las que él decida y alcanzase en el tiempo disponible, de aproximadamente dos horas. Así cada uno podrá desarrollar y estudiar sus propias construcciones, siguiendo las indicaciones impresas en las guías[17] para las actividades, y además, observar los hallazgos realizados por sus compañeros.

Tema:	La elipse
Materiales:	Regla, compás, hoja de block, lápiz

La elipse es otra de las curvas más conocidas y estudiadas por los Matemáticos. Tiene diversas aplicaciones, entre las cuales se destaca probablemente el movimiento planetario, el cual los físicos durante siglos consideraron como circular, aunque ahora sabemos que se aproxima más a un movimiento con trayectorias en forma de elipse. La elipse es otra de las secciones cónicas que ahora mismo estamos por construir, si sigues atentamente las siguientes instrucciones:

1. Traza dos segmentos perpendiculares entre sí de longitud diferente. Al punto de corte denomínalo C.
2. Sobre los extremos del segmento más largo ubica los puntos A y A'.
3. Sobre los extremos del otro segmento ubica los puntos B y B'.
4. Toma el compás y con radio AC y centro en B traza dos arcos que corten al segmento AA' en los puntos F_1 y F_2.
5. Ubica un punto D que se encuentre entre los puntos F_1 y F_2, y con centro en F_2 y radio AD traza dos arcos, uno a cada lado del segmento AA'. Repite este paso pero haciendo centro en F_1 en vez de F_2.

[17] Adaptación de las guías propuestas por Carlos Julio Echavarría y Uriel Gonzales Montoya tituladas: *"Construcción de cónicas con regla y compás"*.

6. Con radio DA' y centro en F_2, traza dos arcos. Estos deberían cortar a uno de los pares de arcos trazados en el paso 5. Nómbralos T y L. Repite este paso pero haciendo centro en F_1 en vez de F_2. Estos deberían cortar al otro par de arcos trazados en el paso 5. Nómbralos T' y L'.
7. Continúa ubicando puntos entre F_1 y F_2 al menos tres veces más. Con estos puntos repite los pasos 5 y 6.
8. Une los puntos de intercepción entre los arcos que acabas de hallar mediante una curva. Según sus características nómbrala:________________________________
9. Desde los puntos F_1 y F_2 traza segmentos que se unan en los puntos de la curva. Mide la longitud de estos segmentos y anota tus mediciones en la siguiente tabla:

$d(F_1,T)$	
$d(F_2,T)$	
$d(F_1,B)$	
$d(F_2,B)$	
$d(F_1,A)$	
$d(F_2,A)$	

Calcula las distancias que quieras entre los puntos F_1 y F_2 a los puntos de la curva.

10. Suma las siguientes distancias:

$d(F_1,T) + d(F_2,T)$	
$d(F_1,B) + d(F_2,B)$	
$d(F_1,A) + d(F_2,A)$	

Del mismo modo suma las distancias de los puntos en la curva a los puntos F_1 y F_2 que quieras.

11. ¿Encuentras alguna relación entre las distancias que acabas de medir?____

Si es así, describe la propiedad de los puntos que conforman la curva: ____

Tema:	La Parábola
Materiales:	Regla, compás, hoja de block, lápiz

La parábola es una de las curvas más conocidas y trabajadas en el área de las Matemáticas. Sus aplicaciones para el movimiento de proyectiles, o su aparente aparición cotidiana en la disposición de ciertos materiales como cables telefónicos, han hecho de esta sección cónica algo interesante y estimulante para estudiar.

Realicemos la siguiente construcción. Para ello, debes seguir atentamente las instrucciones que aparecen a continuación.

1. Por la mitad de una hoja de block, traza una línea de la longitud que desees.
2. Sobre el extremo izquierdo de la línea ubica el punto D y traza una perpendicular a la línea en D. Luego 3 cm a la derecha de D y sobre la línea, ubica el punto V, del cual 3 cm a la derecha y también sobre la recta, ubicarás el punto F.
3. Ubica un punto A sobre la recta a la derecha de F y traza un perpendicular sobre este. Luego con radio AD y centro en F corta la perpendicular recién trazada en dos puntos.
4. Ubica un punto B entre V y F, trazando una perpendicular por este. Luego con radio BD y centro en F, corta la perpendicular recién trazada en dos puntos.
5. Repite los pasos 3 y 4 al menos dos veces más.
6. Une los puntos de corte de las perpendiculares por medio de una curva. Según sus características nómbrala:____

7. Une F con cada uno de los puntos de corte en las perpendiculares, y desde estos traza perpendiculares a la recta perpendicular que pasa por D. Mide estas distancias y compáralas. ¿Existe alguna relación?___________________________________
8. ¿Crees que las otras distancias medidas de F a los puntos de corte en las perpendiculares y desde estos puntos hasta la recta perpendicular en D tendrán el mismo valor?____
9. Si has encontrado alguna relación entre las distancias medidas, describe la propiedad que cumplen los puntos: ______________________________________

Tema:	La hipérbola
Materiales:	Regla, compás, hoja de block, lápiz

La hipérbola es una de las llamadas secciones cónicas, y como curva es una de las más estudiadas por los matemáticos. A pesar de su aparente extrañeza, es importante en distintos campos, y sus aplicaciones se relacionan por mencionar algunos ejemplos, con el diseño de espejos, o con sistemas de navegación por radioemisión. A continuación podrás construir la hipérbola si atiendes las siguientes instrucciones:

1. Traza un segmento de recta y denomínalo L. Sobre L ubica los puntos F y F’ separados unos 10 cm.
2. Traza una perpendicular a L que pase por la mitad de F y F’. Al punto de intersección de las perpendiculares denomínalo O de origen.
3. Sobre L marca los Puntos V y V’ que equidisten del origen, ubicándolos a lado y lado de este. Los puntos V y V’ pueden estar a una distancia aproximada de 6 cm.
4. Marca un punto A sobre L y que esté por fuera del segmento limitado por F y F’.

5. Con el compás traza arcos a lado y lado de L con centro en F y radio VA. Con el mismo radio traza arcos a lado y lado de L haciendo centro esta vez en F'.
6. Ahora traza arcos a lado y lado de L con centro en F y F' pero esta vez con radio V'A. Estos arcos deberían cortar a los arcos antes trazados en el paso 5. Marca los puntos de corte entre los arcos.
7. Toma al menos 5 puntos más sobre L fuera del segmento FF', y repite los pasos 5 y 6.
8. Une los puntos de intercepción entre los arcos que acabas de hallar mediante una curva. Según sus características nómbrala:________________________________
9. Une F con cada uno de los puntos de su curva y F' con estos mismos puntos. Mide estas distancias y anótalas en el siguiente cuadro:

Distancia entre F y el Punto	Distancia entre F' y el Punto
d(F,_) =	d(F',_) =
d(F,_) =	d(F',_) =
d(F,_) =	d(F',_) =
d(F,_) =	d(F',_) =
d(F,_) =	d(F',_) =
d(F,_) =	d(F',_) =

Intentan establecer diferentes relaciones, por ejemplo, restando las cantidades que aparecen.

¿Crees que existe alguna relación entre las distancias en los anteriores puntos?____

Si es así, describe cuál es la relación: ____________________________________

Mide la distancia que existe entre los puntos V y V'. ¿Cómo es con respecto a las distancias antes medidas?____

Con base en las relaciones que lograste obtener, intenta establecer la propiedad que cumplen los puntos que conforman a la curva. Ten en cuenta los trazos seguidos en la construcción y las relaciones entre las longitudes medidas: __________________

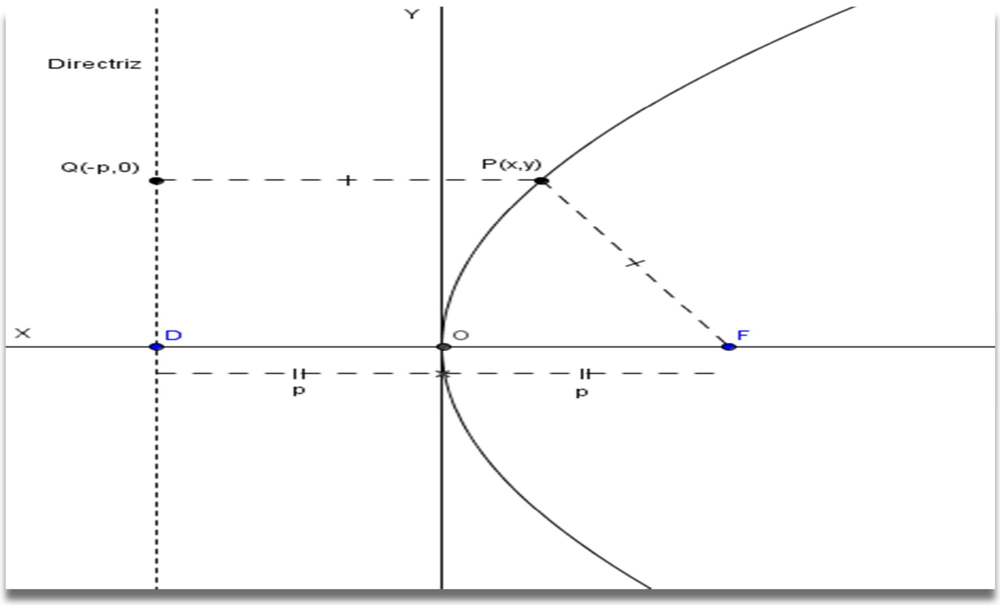
¿Qué ocurriría si se realizara el mismo procedimiento sobre la otra rama de la hipérbola?____

En tercer lugar, se presenta la actividad número tres, el objetivo de esta se centra en la interpretación de las ecuaciones canónicas de la parábola, la elipse y la hipérbola, identificando el procedimiento algorítmico necesario para llegar a ellas. Luego de desarrollar estos pasos se plantea identificar relaciones entre estas curvas y fenómenos de la naturaleza, permitiendo dar sentido a dichas ecuaciones. La forma en que se plantea este trabajo, permite que cada estudiante construya la demostración deseada, las que él decida y alcanzase en el tiempo disponible, de aproximadamente dos horas.

Las secciones cónicas y sus ecuaciones

En las Matemáticas, los lugares geométricos tienen además de su representación gráfica, una representación analítica, la cual se conoce como ecuación. Las secciones cónicas son representadas a través de ecuaciones canónicas de las mismas. Intentaremos a continuación, establecer estas ecuaciones, partiendo desde las propiedades que cumplen los puntos que conforman dichas curvas.

Iniciemos con la parábola. Partamos del hecho de que si un punto un punto P(x,y) pertenece a una parábola, cumple la propiedad de que su distancia a un punto fijo llamado foco, es equivalente a su distancia a una recta llamada directriz.



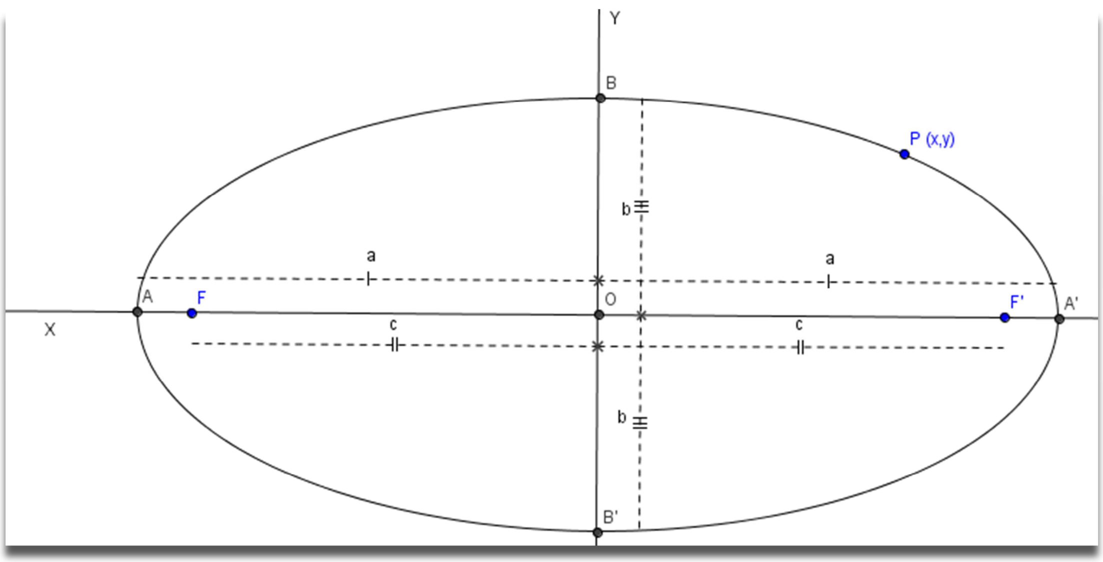
Para la anterior parábola, se cumple que:

1. $d(P,F) = d(P,Q)$
2. $d(D,O) = d(F,O) = p$
3. Las coordenadas del punto Q son $(-p, 0)$ …. ¿Por qué?
4. Las coordenadas del punto F son $(p, 0)$ …. ¿Por qué?

Con base en esta información, completa la siguiente tabla:

1. $\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$	Por la definición de parábola
2. $(x-p)^2+(y-0)^2 =$ ____________________	Elevando al cuadrado a ambos lados
3. $x^2-2px+p^2+y^2 =$ ____________________	Resolviendo los cuadrados
4. $x^2-2px+p^2+y^2-x^2-p^2 = 2px$	¿Por qué?
5. _________________________$= 2px$	Simplificando términos semejantes
6. $y^2 = 2px+2px$	Despejando el término y^2
7. $y^2 =$_____________	Ecuación canónica de la parábola

De manera similar, determinemos ahora, una expresión analítica para la Elipse. Partimos de nuevo de la propiedad que cumplen los puntos que conforman a la curva. Si un punto P(x,y) pertenece a una elipse, la suma de sus distancias a cada uno de los focos da como resultado una constante.



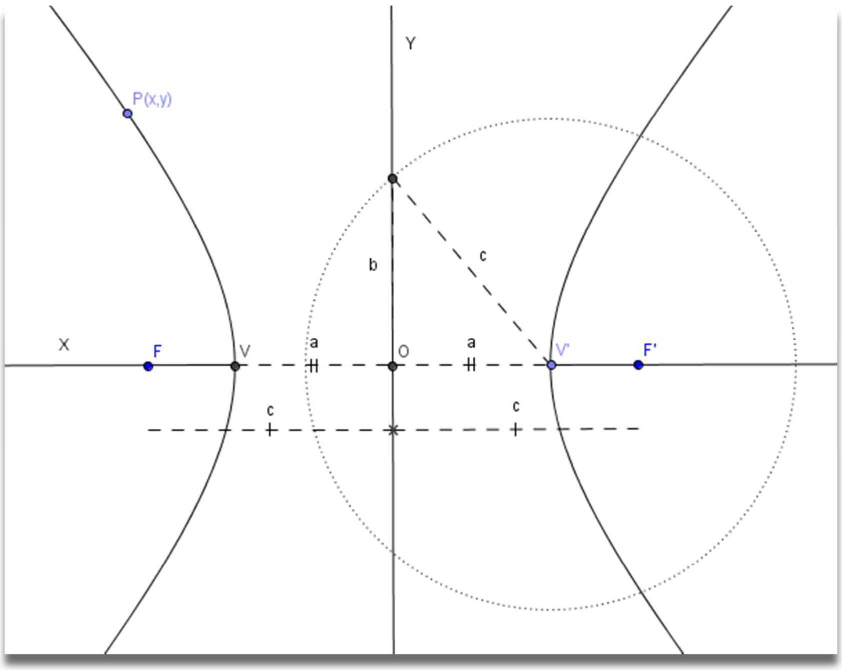
Para la anterior elipse, se cumple que:

1. $d(P,F) + d(P,F') = Constante$
2. $d(A,F) + d(A',F') = Constante$
3. $d(A,F) = a - c \quad y \quad d(A,F') = a + c$
4. Por tanto, $Constante = a - c + a + c = 2a$
5. Luego, $d(P,F) + d(P,F') = 2a$

Con base en esta información, completa la siguiente tabla:

1. $d(P,F) + d(P,F') = 2a$	Definición de la elipse
2. $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$	Distancia entre puntos
3. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ =________________________________	Despejando el primer término
4. $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$	¿Por qué?
5. $(x+c)^2 + y^2 - 4a^2 - (x-c)^2 - y^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Despejando el termino radical
6. ________________________________= $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Elevando al cuadrado los polinomios
7. $4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Simplificando términos semejantes
8. $(xc - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$	¿Por qué?
9. $x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$	Elevando al cuadrado los polinomios
10. $x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 =$ ________________________________	Aplicando la propiedad distributiva
11. $a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$	¿Por qué?
12. $a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$	Factorizando
13. $a^2 = x^2 + \frac{a^2y^2}{a^2-c^2}$	¿Por qué?
14. $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)}$	Dividiendo por a^2
15. $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)}$	Simplificando la expresión $(a^2 - c^2 = b^2)$ ¿Por qué?
16. $1 =$ __________	Ecuación canónica de la elipse

Determinemos ahora, una expresión analítica para la hipérbola, para lo cual, nuevamente partimos de la definición de la sección. Recordemos que un punto P(x,y) de la hipérbola cumple la propiedad de que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos conocidos como focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante.



Para la hipérbola anterior, y suponiendo que los vértices se encuentran a una distancia “a” del origen “o”, y que de este último, los focos distan “c”, se cumple que:

1. $d(P,F) - d(P,F') = d(V,V')$
2. $d(V,V') = 2a$
3. Por tanto, $d(P,F) - d(P,F') = 2a$
4. Las coordenadas de los focos son $F(-c,0)\ y\ F'(c,0)$
5. $a, b\ y\ c$ son una terna pitagórica (conforman los lados de un triángulo rectángulo)

De acuerdo con lo anterior, completa la siguiente tabla:

1. $d(P,F) - d(P,F') = 2a$	Por la definición de hipérbola
2. $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} -$ ______________________ $= 2a$	Por definición de distancia
3. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	Despejando el término de la izquierda
4. $(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$	Elevando al cuadrado a ambos lados
5. $(x+c)^2 + y^2 =$ ____	Desarrollando los cuadrados
6. $x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + y^2$_______ ___________________________	Desarrollando de nuevo los cuadrados
7. $2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc$	Simplificación de términos semejantes
8. $4xc - 4a^2 =$ ____	Despejando el término en la derecha
9. $(xc - a^2)^2 = a^2(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$	Dividiendo por 4 y elevando al cuadrado
10. $x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 =$ _____________________________________	Desarrollando los cuadrados
11. $a^4 - a^2c^2 = x^2a^2 + a^2y^2 - x^2c^2$	Reducción de términos semejantes
12. a^2(_______) $= x^2$(_______) $+ a^2y^2$	Factorizando
13. $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$	Dividiendo por el término $a^2(a^2 - c^2)$
14. Pero $a^2 - c^2 =$ _______	Por el teorema de Pitágoras
15. $1 =$ ______________	Ecuación canónica de la hipérbola

ANEXO 2: MISIÓN, VISIÓN Y PRINCIPIOS DEL COLEGIO EUSKADI

MISIÓN

El COLEGIO EUSKADI es una Institución de carácter privado y naturaleza autónoma, que presta un servicio público cultural en Educación, con metodología presencial creado por NARCISO LARREA LOPEZ DE LUZURIAGA como centro humanístico, para la generación y comunicación del conocimiento en la perspectiva de intervenir la problemática que afecta la calidad de vida de la niñez y de la juventud, para el fomento de la convivencia armónica familiar y social.

VISIÓN

Esta Institución será reconocida como un centro líder en formación personalizada, fortaleciendo la autoestima y el ser trascendental de los niños y de los jóvenes, para contribuir de esta manera a mejorar su calidad de vida y el de la sociedad. NUESTRA METODOLOGIA Implementaremos una metodología de trabajo grupal pedagógica interdisciplinario, centrado en la necesidad y mejoramiento de la calidad de vida del niño y del joven.

PRINCIPIOS

Respeto por la persona, respeto por la diferencia, flexibilidad, interdisciplinariedad. Personalización.

ANEXO 3: CONVERSATORIO CON ESTUDIANTES

Fecha: 12 de febrero del 2012

P: ¿Qué es la inclusión escolar?

E: Participar en todas la actividades.

E: No, no sabemos. Defina qué es inclusión.

P: En la historia de la educación a nivel internacional, a algunos estudiantes con dificultades particulares eran excluidos de los sistemas de educación, no todos podían estar en las mismas instituciones, porque se pensaba que no podían acceder a la educación, entonces no eran mencionados, no se les enseñaba, eran excluidos. Cuando se habla de inclusión, se está hablando de que todos tenemos los mismos derechos a estar bajo un mismo contexto, que si bien, todos tenemos diferentes capacidades, todos tenemos el derecho de estar en la escuela, a ser educado, y que en ella se exploten las potencialidades y capacidades de cada estudiante a su máximo exponente. Cuando se separa a los estudiantes que tienen mayores dificultades para que asistan a lugares particulares se está hablando de exclusión.

E: O sea que deben existir sitios especiales para los estudiantes que tienen mas…

P: En realidad, la inclusión escolar habla estar todos en un mismo sitio y que a todos se les explote sus capacidades.

E: Juntarlos. Eso es lo que hace este colegio.

P: ¿Qué son necesidades educativas especiales (NEE)? ¿Cuándo una persona tiene NEE?

E: Cuando tiene déficit de atención, tiene dificultades de aprendizaje.

P: ¿Eso quiere decir que no todos tienen NEE?

E: No todo el mundo tiene problemas, hay gente que tiene problemas y necesita de…

P: Entonces solo algunos tienen problemas.

E: *No se logra realizar la transcripción*

P: Lo correcto es que todos tenemos diferentes capacidades, no estamos en las mismas condiciones.

E: usted sabe que yo tengo… es una dificultad que… falta (Estudiante con Asperger)

P: Entiendo de lo que hablas. Pero, ¿crees que eso es una dificultad?

E: Cuando yo era pequeño me dijeron que eso era una dificultad para falta.

P: Y, ¿cómo te sientes en la institución? ¿Te sientes incluido?

E: *No se logra realizar la transcripción*

E: *No se logra realizar la transcripción*

P: Y, ¿cómo te has sentido acá en el colegio?

E: Me siento bien. Charlamos, jugamos.

P: Ustedes que creen, que los estudiantes con mayores dificultades deberían estar en instituciones especializadas, o deberían estar…

E: No, porque la idea es que se sientan igual a uno (estudiante con TDAH).

E: Cuando uno estudia con una persona con una condición particular esa persona se siente incluida y uno aprende mucho de ella.

E: Lo bueno de una institución como esta, es que todos pueden aprender de la misma forma.

P: ¿Todos podemos llegar a los mismos conocimientos?

E: Unos mas que otros, pero se puede llegar.

E: No, pero…

P: ¿Creen que todos los colegios deberían estar preparados para trabajar estudiantes que presentas mayores dificultades? O, eso no es responsabilidad de los colegios.

E: Deberían estar capacitados, porque no todos tienen la capacidad de entender a un mismo ritmo.

P: Entonces, consideran que aquí hay estudiantes con mayores o menores capacidades que cada uno de ustedes.

E: *No se logra realizar la transcripción*

P: Y, ¿eso se da en cualquier contexto?

E: Eso se da también en los colegios normales, que no sean especiales.

P: ¿Un colegio normal? ¿Éste no es un colegio normal?

E: Este es un colegio normal, pero que recibe gente con problemas. Hay colegios en los que no reciben gente con problemas, acá sí. Y, en este colegio hay gente que tiene más capacidades que uno.

P: A ese tipo de colegios los llamamos excluyentes, porque no reciben a todo tipo de estudiantes porque son muy exigentes y hay un currículo que no permite que se pueda acceder al conocimiento.

¿Cómo creen que la institución está contribuyendo a que todos los estudiantes puedan acceder al conocimiento?

E: Esto es un colegio personalizado… Para que los niños con problemas puedan entender más y puedan tener una atención del profesor. Por ejemplo, en un grupo de 40 niños cómo le van a poner atención a un niño con problemas

E: Y hay colegios especializados para niños así.

P: *No se logra realizar la transcripción*

E: Es que hay colegios que solo recibe gente con problemas y hay colegios en los que solo se recibe gente que no tenga problemas.

E: *No se logra realizar la transcripción*

E: Para mejorar el aprendizaje.

P: Una estrategia que se está usando acá es la educación personalizada, tener grupos reducidos, ¿qué otras estrategias han visto que usen los profesores y que hayan funcionado?

E: Pues, que los profesores le explican primero a todo el grupo y después van a donde y le explican a él solo.

E: Obvio, porque ellos no entienden algunas cosas, por eso no les ponen los mismos trabajos.

P: Trabajos diferenciados.

E: A mi me parece que debería haber capacitación para los profesores.

P: Entonces, ¿consideran que los profesores están bien capacitados?

E: No.

P: ¿Por qué pueden afirmar esto?

E: Uno no sabe quienes están capacitados y quienes no.

E: A mi me parece que no están bien… los tienen que apoyar los profesor y el grupo y a veces no saben como tratar al estudiante…

P: ¿Creen que ustedes pueden ayudar al trabajo con los estudiantes que presentan mayores dificultades?

E: Tratar de socializar con ellos. Por ejemplo, entró ______ y entró ____ y yo les hablo, somos amigos, uno se relaciona con ellos.

P: Eso es en la parte social, ¿y en lo académico?

E: Ayudándoles a hacer las tareas.

E: … no solo para el aprendizaje, sino para que sepan estar en una sociedad.

P: ¿Crees que los compañeros te pueden colaborar?

E: Si, ellos me ayudan para que yo pueda entender mejor.

P: Ahora, si un estudiante con NEE no alcanza los logros o los objetivos del año escolar, ¿creen que debería ser promovido al siguiente año?

E: Pues, si. Si esta persona se esforzó por hacer las tareas, lo pueden pasar de año, no importa que estuvieran malas. El profesor al final del año le puede hacer un refuerzo de los temas que no entendió.

E: Pero, si es un estudiante con dificultades y no hizo nada durante el año, a ese que no lo pasen.

P: ¿Cómo se sienten ustedes ante esa situación?

E: A uno le da envidia, pero si fue alguien que se esforzó, no importa que lo pasen