UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

La comprensión del concepto de Derivada en el marco de "La Enseñanza para la Comprensión"

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

CARLOS EDUARDO RENDÓN ARCILA

KAREN YULIANA RUIZ RESYTREPO

YEILER CÓRDOBA ASPRILLA

Asesor

Magister RODRIGO ANTONIO RENDÓN RAMÍREZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MEDELLÍN

2014

Facultad de Educación

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN EL MARCO DE "LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN"

AUTORES

Carlos Eduardo Rendon,
juancho8050@hotmail.com

Karen Yuliana Ruiz,
kren_1726@hotmail.com

Yeiler Córdoba Asprilla,
y-coa@hotmail.com

ASESOR
Rodrigo Antonio Rendón Ramírez,

ro.rendon@gmail.com

Centro de Práctica: INSTITUCIÓN EDUCATIVA CONCEJO DE MEDELLÍN

RESUMEN

Este trabajo de Investigación surge de la necesidad que hemos detectado en nuestra experiencia con estudiantes del grado undécimo, mejorar su comprensión del concepto de Derivada, por lo cual pretendemos formular una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, ya que de acuerdo con investigadores como Claudia Salazar (2009) los estudiantes presentan gran dificultad en el análisis de gráficas.

Al hacer énfasis en el análisis y descripción de curvas, buscamos mejorar la integración de los conceptos (tasa de variación media y derivada), a través de la interacción con un software matemático como el GeoGebra, lo cual a la vez contribuye al mejoramiento de la comprensión del concepto de Derivada. Según varios autores, la comprensión permite realizar en forma eficiente ejercicios y explicaciones que resultan costosas y no dejan satisfechos ni a los estudiantes, ni a los docentes, así lo señala Iranzo (2009).

Por tanto nuestra intención es hacer uso de los ordenadores para ofrecer a los estudiantes un enfoque menos formal del concepto de derivada mediante el estudio de sus características, las cuales le permitan al éste desarrollar pensamientos propios a través de la observación y no limitarse a la memorización de los contenidos que el profesor expone.

El trabajo se compone de cinco capítulos en los cuáles mostramos el estado actual del trabajo con derivadas en las aulas, nos apoyamos en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión para proponer una investigación que permita dinamizar la comprensión del concepto con el uso del software Geogebra, y finalmente mostramos nuestros análisis y conclusiones al respecto.

PALABRAS CLAVE:

Enseñanza para la Comprensión, comprensión, tasa de variación media, tasa de variación instantánea, derivada, geogebra

Facultad de Educación

TABLA DE CONTENIDO

Universidad de Antioquia
1803
Facultad de Educación

CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación "la comprensión del concepto de derivada en el marco de "La Enseñanza para la Comprensión", se ha desarrollado en la Institución Educativa "Concejo de Medellín". El estudio se centra en cómo alcanzar una correcta comprensión de los conceptos referidos (tasa de variación media y derivada) haciendo uso de GeoGebra.

El problema que motiva esta investigación, radica en que, en los cursos tradicionales, cantidades significativas de estudiantes no logran comprender los conceptos básicos, en particular la tasa de variación media y la derivada, por lo tanto el objetivo de esta investigación ha sido ha sido identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada. En efecto, nos interesa describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de bachillerato (grado undécimo) del sistema educativo colombiano.

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, algunos estudiantes resuelven muchos problemas y ejercicios y ganan exámenes del área, pero este hecho no garantiza la real comprensión de los conceptos matemáticos utilizados, ya que muchas actividades evaluativas no trascienden lo operativo, lo mecánico o memorístico.

En nuestro propósito hemos adaptado las categorías teóricas y analíticas que proporcionan el marco enseñanza para la comprensión (EpC), llegando a la construcción de la descomposición del concepto de derivada y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas: grafica (visualización de imágenes dinámicas) y analítica (comprensión de los conceptos), las cuales se revisan a partir de los aportes de los resultados obtenidos tanto en la encuesta como en la observación participante. Por lo tanto el estudio se centra en cómo alcanzar una correcta comprensión del concepto derivada haciendo uso del GeoGebra.

El proyecto tiene como objetivo hacer una propuesta de trabajo basada en la utilización de GeoGebra, dado que esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ellos su comprensión. El interés por la utilización de mecanismos tipo visual-geométrico es porque para una correcta comprensión de los contenidos es importante la percepción visual de estos, especialmente en estudiantes "visuales" (Krutrtskii 1976). Por ellos mostramos en este trabajo una clasificación de las imágenes, procesos y habilidades visuales, para analizar la repercusión de la visualización en la enseñanza.

Por último como nos indica Iranzo (2009), es muy conocido que las tecnologías computacionales tienen un fuerte impacto profesional en la práctica de las matemáticas. Destacaremos el uso de GeoGebra, como software libre, de fácil manejo.

Por lo tanto vamos a estudiar como el GeoGebra puede contribuir al aprendizaje de los alumnos ya que las técnicas de este permiten la representación de imágenes dinámicas que facilitan la visualización de los conceptos, con un proceso de razonamiento por parte de los estudiantes.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

- En primera instancia mostramos el marco teórico en el cual basamos nuestro trabajo incluyendo estudios como el papel del GeoGebra y la importancia de la visualización en la enseñanza y el modelo de EpC.

- Seguidamente los objetivos a alcanzar con el desarrollo de la experiencia.
- A continuación se analizan los contenidos matemáticos de nuestro trabajo, sus dificultades de aprendizaje y la organización para una correcta comprensión según del modelo del marco teórico donde se describen los niveles de comprensión.
- Posteriormente se explica las condiciones y el contexto en el que llevamos a cabo nuestra práctica, tales como ejercicios propuestos, datos recogidos y resultados.
- Finalmente las conclusiones obtenidas de acuerdo a los resultados de los análisis realizados.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Desde la historia las matemáticas, han estado ligadas al desarrollo del cálculo por esta razón se puede afirmar la posibilidad de modelar todo lo que nos rodea. Una de las metas que se debe proponer en la educación matemática es el desarrollo de competencias necesarias para comprender el mundo, por consiguiente el reto de esta investigación es la apropiación del concepto de derivada y su aplicación desde las TIC (GeoGebra) como propuesta didáctica. Dado que los jóvenes sienten especial atracción por las tecnologías y tienen fácil acceso a ellas aprovecharemos el gran potencial de las TIC para la principal tarea que tiene que es el aprendizaje.

Por lo tanto la enseñanza de este concepto no puede seguir siendo aquella que se reduce a la presentación formal a partir de una definición como el límite, ya que algunas investigaciones en la educación matemática como lo menciona Lozano (2011) han demostrado que las posibilidades para su comprensión pueden reposar sobre nociones e ideas básicas como el infinito, las aproximaciones y las variaciones.

Desde el ámbito educativo se puede afirmar que la enseñanza del cálculo es donde se presentan los problemas más fuertes en la educación, debido a que la concepción sobre la matemática del cálculo está escrita en la tradición axiomática- deductiva y además los conceptos de limite y derivada no pasan de ser más que un conocimiento algorítmico a lo algebraico, es decir se trabaja más desde la concepción solo operacional escrita, que visual, tal como nos muestra Carno (1995) en sus resultados de sus investigaciones didácticas "*el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, ni lineal, es el resultado del rechazo, de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos.*"

Por lo anterior , se plantea como propósito describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción de limite (definición) y plantear una propuesta didáctica mediante el software libre GeoGebra con la ayuda de actividades que produzcan aprendizajes significativos del concepto de derivada venciendo obstáculos epistemológicos que se presentan en el aula para apropiarse así de un nuevo conocimiento.

En el campo de la investigación de la didáctica de las matemáticas se admite, desde hace décadas, el interés de utilizar software matemáticos, por las ventajas pedagógicas que se observan desde el punto de vista educativo: la gran capacidad de almacenamiento, la propiedad de simular fenómenos naturales difíciles de observar en la realidad, la interactividad con el usuario o la posibilidad de llevar a cabo un proceso de aprendizaje y evaluación individualizada, entre muchas aplicaciones educativas que estos software proporcionan (López, Petris y Peloso, 2005).

1.3 DEFINICION DEL PROBLEMA

Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se reduce a un discurso, en el cual las únicas herramientas que se utilizan son los libros, la tiza y el tablero. Actualmente se viene utilizando herramientas informáticas en el aula, como medio didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje, pero estas no transciende más allá de una proyección de un contenido, que en su medida reemplaza la tiza y el tablero pero la metodología sigue siendo la misma, sin despertar una motivación más en el estudiante, porque, el docente es quien sigue llevando el protagonismo en el aula y el estudiante continua siendo una persona pasiva en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Muchas veces el docente solo se conforma con que el estudiante responda mediante una actividad evaluativa los conceptos que él le ha trasmitido, que en su mayoría son bastante descontextualizado, lo que produce que el estudiante no pueda aplicarlo en su diario vivir y que no haya una reflexión por parte de este. Un ejemplo de esto es la enseñanza de la derivada, la cual es un concepto bastante complejo para los estudiantes, de difícil comprensión, donde en su enseñanza solo se memorizan las reglas de derivación para resolver unos ejercicios planteados.

Con el gran avance que ha tenido la tecnología y la aplicación en el campo educativo, el interés de este proyecto como ya se ha indicado es integrar las TIC (GeoGebra) en el proceso educativo, ya que la sociedad de información o del conocimiento exigen hombres y mujeres competentes en estas tecnologías, no como expertos informáticos ya que las TIC no son prescindibles para la vida humana pero en nuestra época si ofrecen recursos y se exige que respondamos a estos, así que el desarrollo de nuestra pregunta será aportante ya que a través de ella recogeremos conclusiones de estudios realizados por otros autores y nuestra propia actividad docente planteando una propuesta metodológica que afirme nuestra investigación “**El estudio de la comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra (TIC) como herramienta didáctica".**

1.4 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo implementar el marco teórico enseñanza para la comprensión, para mejorar la comprensión del concepto de derivada en un grupo de estudiantes regulares de pre cálculo, utilizando el Geogebra como una herramienta que facilita la visualización y el desarrollo de interacciones dinámicas entre los el estudiante y el concepto?

1.5 OBJETIVO GENERAL

Con la elaboración de este trabajo pretendemos mostrar en que aspectos y de qué manera las TIC ayudan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de una asignatura tradicional. Estudiaremos los beneficios que el GeoGebra supone en las matemáticas.

El objetivo principal es:

- Estructurar una propuesta metodológica y con actividades útiles para el uso del GeoGebra, que con base en los lineamientos del marco teórico enseñanza para la comprensión, resulten eficientes en el estudio del concepto de la derivada en el grado undécimo de educación media y primer año de universidad, con estudiantes que toman cursos regulares de cálculo diferencial.

Adicionalmente, nos proponemos mostrar que el uso de GeoGebra en el aula:

- Ofrecer alternativas para que los docentes acompañen con mayor eficiencia la comprensión de conceptos matemáticos, de los problemas involucrados allí y la capacidad de los estudiantes para analizarlos y resolverlos.

1.6 MARCO TEORICO

Este aparte describe brevemente el concepto de la comprensión sobre el cual se basa el marco de la enseñanza para la comprensión, describe cómo surge, su organización y sus ventajas con respecto al método de la enseñanza tradicional.

El marco conceptual de la enseñanza para la comprensión (EpC), estructura la investigación para ayudar a los maestros a analizar, diseñar, poner en práctica y evaluar prácticas centradas en la comprensión de los alumnos.

El marco de la enseñanza para la comprensión.

Asume que lo que aprenden los estudiantes debe ser interiorizado e útil en muchas circunstancias diferentes dentro y fuera de las aulas de clase.

Definición de comprensión

La capacidad de comprensión de los estudiantes se evidencia en su capacidad para hacer uso productivo de los conceptos, teorías etc. De acuerdo con lo registrado por Stone (1999), el cual dice "*la comprensión es poder realizar una gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema. Por ejemplo, explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías y representarlo de una manera nueva*".

Comprender no solo es tener conocimientos. Es tener la habilidad de utilizar ese conocimiento en forma creativa y competente. Lo que se hace permite ver lo que se comprende, cuando se es capaz de producir, representar, actuar o hacer algo.

Contexto histórico

Según Murnane (1996), el interés en la enseñanza para la comprensión nació a partir de los años 90 en Estados Unidos, como reacción al currículo estrecho y orientado hacia las habilidades que predominan sobre todo en las escuelas, así como la evidencia de que muchos alumnos no están recibiendo una educación que les permita ser críticos, que planeen y resuelvan problemas, es decir, ir más allá de la rutina y vivir productivamente.

A finales del siglo XIX y comienzos del XX Dewey enfatizo en una nueva pedagogía progresista que invita a los docentes a integrar el contenido escolar con las actividades de la vida cotidiana. Además veía la educación como crecimiento en el sentido de la comprensión, la capacidad, el descubrimiento autónomo, el control de los hechos y la habilidad para definir el mundo. En la visión de Dewey, la organización de las materias era especialmente importante. Proponía organizar la enseñanza alrededor de temas con amplias posibilidades, accesibles en muchos niveles de complejidad y con conexiones naturales en otras áreas de contenido. Concepción relacionada con la definición de *tópicos generativos.*

Desde 1967 un grupo de investigadores de la escuela de posgraduados de la universidad de Harvard entre los que se cuenta Howard Gardner, David Perkins (a partir de 1972) y Daniel Wilson, crearon lo que se conoce como Proyecto Cero de Harvard. Ellos estudiaron el desarrollo de la capacidad de utilización en símbolos, observaron de manera empírica y desde una perspectiva psicobiológica, la evolución de dicha capacidad en los niños normales y talentosos, pero también en personas con alguna discapacidad a causa de alguna lesión cerebral. En niños llamados tontos sabio y autistas. El proyecto estaba en realidad comprendido en un proyecto mucho más amplio que tenía como objetivo el estudio del potencial humano, y derivo entre otras secuelas y proyectos con la formulación de la teoría de las inteligencias múltiples, dentro de las nuevas estructuras de la mente y la consolidación teórica de un marco de la enseñanza para la comprensión.

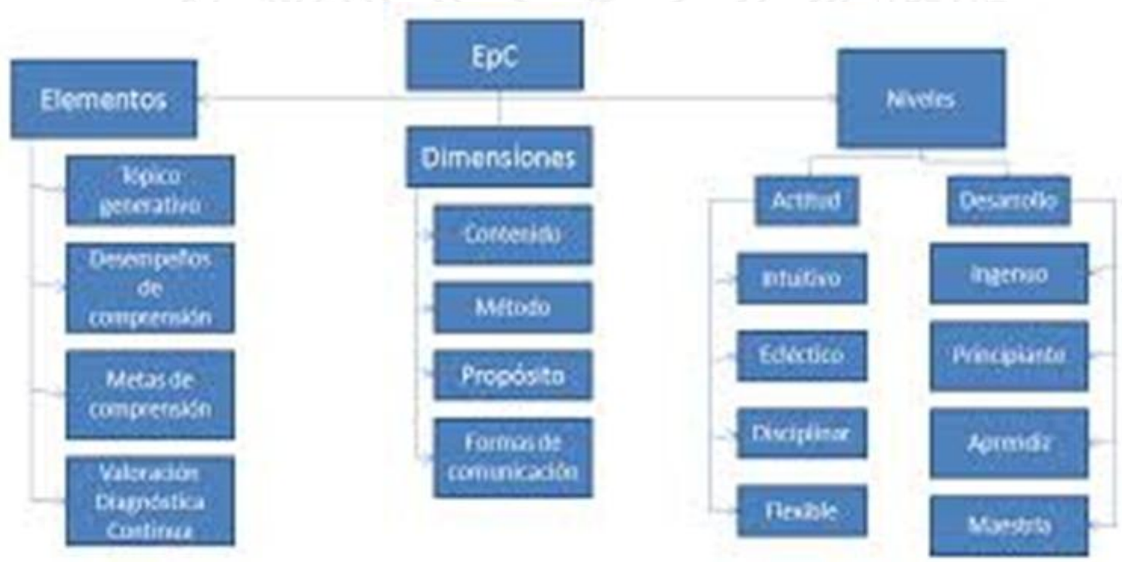
Según Stone (1999) desde 1988 a 1995, el grupo de investigadores de la escuela de graduados de educación de Harvard colaboro con docentes de las escuelas cercanas en una investigación que aborda cuestiones tales como: ¿qué vales la pena comprender? , ¿Qué deben comprender los alumnos?, ¿cómo puede fomentarse la comprensión?, ¿Cómo se puede averiguar lo que comprenden los alumnos?

Durante el primer año de investigación, los directores del proyecto reunieron docentes de lenguaje, matemáticas, historia y sociales de una escuela media (11 a 13 años) y varias escuelas secundarias (14 a 18 años) de Massachusetts. Se encontraron con un grupo de investigadores interesados en el aprendizaje, la pedagogía, el desarrollo de los docentes y el mejoramiento de la escuela. Un total de aproximadamente 20 docentes y 14 investigadores universitarios (que es su mayoría habían enseñado en escuelas) formaron grupos centrados en materias particulares y comenzaron a preparar casos sobre los mejores esfuerzos realizados por docentes para enseñar ña comprensión dentro de un marco preliminar. Docentes de una gran variedad de escuelas participaron en una serie de reuniones de dos horas durante las cuales se les presento el marco conceptual y se les ayudo a usarlo para diseñar una unidad curricular.

Estos docentes de diversas disciplinas respaldaron el marco conceptual en formación y recomendaron posteriores refinamientos. Durante el tercer año del proyecto, la investigación en el aula con el marco conceptual preliminar demostró que llegar a comprender como enseñar para la comprensión es complejo. Basándose en estos hallazgos, diseñaron un proyecto de investigación intensivo de acción colaborativa con 4 docentes que trabajaban en 4 escuelas de diferentes materias. Este estudio realizado en 1993 y 1994, analizo el proceso de aprendizaje tendiente a enseñar para la comprensión, la naturaleza de la práctica en el aula configurada por este marco conceptual y el trabajo de los alumnos en estas clases.

Estructura del marco enseñanza para la comprensión

En la figura se muestra un esquema del marco de la enseñanza para la comprensión las cuales serán explicadas más adelante. En él se destacan los elementos, dimensiones y niveles tanto en actitud como desarrollo que conforma el marco



Elementos.

Según León y Barrera (2009) los tópicos generativos responden a la pregunta de qué se debe enseñar, apuntan al que quiere el docente que los estudiantes comprendan y está estrechamente relacionado con las disciplinas. Cuenta con varias características claves: son fundamentales para una o más disciplinas. Proveen un contexto para centrar las actividades en los conocimientos, métodos y los propósitos de las disciplinas.

Los tópicos generativos se usan para organizar el estudio de las asignaturas disciplinarias o interdisciplinarias durante el año o semestre.

Las metas de comprensión responden a que vale la pena comprender. Describen las comprensiones que se suponen más importantes para el aprendizaje de los estudiantes. Las metas de comprensión o hilos conductores describen las comprensiones que deberían desarrollar los estudiantes durante un curso. Estas se expresan de manera explícita y se comparten públicamente para enfocar y dirigir la enseñanza a lo que se quiere que los estudiantes comprendan. Pueden ser negociadas y se basa en la disciplina que tenga el maestro.

Las metas de comprensión se pueden expresar como preguntas abiertas o en forma afirmativa.

Para León y Barrera (2009) los desempeños de comprensión constituyen el núcleo del desarrollo de la comprensión. Así pues necesitan estar estrechamente vinculados a las metas de comprensión. Se constituyen en acciones centradas en el pensamiento, mediante las cuales los estudiantes hacen visibles su pensamiento y comprensión ante ellos mismos, ante otros y ante el maestro. Los desempeños de comprensión están diseñados de manera secuencial para que los estudiantes desarrollen la comprensión de las metas de comprensión y de los tópicos generativos, la cual se construye sobre lo que los estudiantes ya saben. La secuencia se constituye de tres etapas: exploración de tópicos, investigación dirigida, y proyectos personales de síntesis.

La valoración diagnostica continua responde al cómo puede saber estudiantes y maestros lo que comprenden los estudiantes y como pueden desarrollar una comprensión más profunda. Las ocasiones de valoración pueden involucrar retroalimentación de parte de los maestros, de los compañeros y la autoevaluación de los estudiantes, es decir, los factores son: criterios públicos, retroalimentación regular y reflexión frecuente durante todo el proceso de aprendizaje.

Dimensiones.

El marco de la enseñanza para la comprensión, trabaja las dimensiones de contenido, métodos, propósitos, y formas de comunicación. Las dimensiones de la comprensión ofrecen una forma de hacer la definición de comprensión más específica y permite identificar 4 aspectos, el marco describe 4 niveles de comprensión: ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría.

La dimensión de contenido evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han traspasado las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones.

La dimensión de los métodos se arraiga en el sano escepticismo, es decir, muestra en qué medida despliegan los estudiantes un sano escepticismo hacia sus propias creencias y hacia el conocimiento presentado en fuentes tales como libros de texto, opiniones de la gente y mensajes de los medios de comunicación. También se arraiga en la construcción de conocimiento dentro del dominio, o sea establece en qué medida usan los estudiantes estrategias, métodos, técnicas y procedimientos para construir un conocimiento confiable similar al usado por los profesional es en el dominio. Y finalmente, se arraiga en la validación del conocimiento en el dominio para establecer si dependen la verdad, el bien y la belleza de afirmaciones autorizadas o más bien de criterios públicamente consensuados tales como usar métodos sistemáticos, ofrecer argumentos racionales, tejer explicaciones coherentes o negociar significados por medio de un dialogo cuidadoso.

Niveles.

De acuerdo con Blythe et all (1999), Las cuatro dimensiones de la comprensión, ilustran su naturaleza multidimensional. Mientras que algunas dimensiones pueden estar más desarrolladas que otras en desempeños específicos, la comprensión profunda entraña la capacidad de usar el conocimiento en todas las dimensiones.

Teniendo en cuenta esta variabilidad dentro de cada dimensión, es necesario distinguir desempeños débiles de otros más profundos. Así, los cuatro niveles de la comprensión se establecen como comprensión por dimensión: ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría.

Los desempeños de comprensión ingenua están basados en el conocimiento intuitivo. Describen la construcción del conocimiento como un proceso no problemático que consiste en captar información que está directamente disponible en el mundo. En estos desempeños, los estudiantes no ven la relación entre lo que aprenden en la escuela y su vida de todos los días; no consideran el propósito y los usos dela construcción del conocimiento. En este nivel, los desempeños no muestran señales de dominio de lo que saben por parte de los estudiantes. Los desempeños de comprensión ingenua son poco reflexivos acerca de las formas en que el conocimiento es expresado o comunicado a los otros. Los desempeños de los estudiantes en un nivel ingenuo tienden a ser descripciones imaginativas pero incorrectas de un proceso. Las bases y los orígenes de tales descripciones siguen sin ser cuestionados.

Los desempeños de comprensión de novatos están predominantemente basados en los rituales y mecanismos de prueba y escolarización. Estos desempeños empiezan destacando algunos conceptos o ideas disciplinarios y estableciendo simples conexiones entre ellas, a menudo ensayadas. Describen la naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento, así como sus formas de expresión y comunicación, como procedimientos mecánicos paso por paso. La convalidación de estos procedimientos depende de la autoridad externa más que de criterios racionalmente consensuados desarrollados dentro de las disciplinas o dominios.

En este nivel, un tema determinado imita al libro de texto, incorporando conceptos de manera ecléctica. Instados a justificar la confiabilidad de su descripción, los estudiantes se refieren a las evaluaciones, calificaciones o libros de textos del docente como fuentes incuestionables de validación. Los ensayos en este nivel siguen una estructura que contiene una introducción, un desarrollo y una conclusión, pero siguen haciéndolo de manera algorítmica, como pasos de un protocolo que deben seguir como esclavos. Cuando se les pregunta acerca de la importancia de comprender sobre un tema determinado, los estudiantes en este nivel tienden a referirse a su impacto en sus calificaciones del cuatrimestre y en puntajes de evaluaciones estandarizadas.

Los desempeños de comprensión de aprendiz se basan en conocimientos y modos de pensar disciplinarios. Demuestran un uso flexible de conceptos o ideas de la disciplina. La construcción del conocimiento se ve como una tarea compleja, que sigue procedimientos y criterios que son prototípicamente usados por expertos en el dominio. Con apoyo, los desempeños en este nivel iluminan la relación entre conocimiento disciplinario y vida cotidiana, examinando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento. Los desempeños en este nivel demuestran una expresión y comunicación de conocimiento flexible y adecuado. Siguiendo con Blythe (1999) Los desempeños de comprensión de maestría son predominantemente integradores, creativos y críticos. En este nivel, los estudiantes son capaces de moverse con flexibilidad entre dimensiones, vinculando los criterios por los cuales se construye y se convalida el conocimiento en una disciplina con la naturaleza de su objeto de estudio o los propósitos de la investigación en el dominio. La construcción del conocimiento se ve como una tarea compleja, impulsada por marcos y cosmovisiones a menudo enfrentados y que surge como consecuencia de la argumentación pública dentro de comunidades de profesionales en diversos dominios. Los estudiantes pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea. El conocimiento es expresado y comunicado a otros de manera creativa. Los desempeños en este nivel a menudo van más allá, demostrando comprensión disciplinaria: pueden reflejar la conciencia crítica de los estudiantes acerca de la construcción del conocimiento en el dominio.

Las inteligencias múltiples y el enfoque de los puntos de entrada

En la década de los 80, el psicólogo Howard Gardner contradijo el concepto de inteligencia que se concebía como una condición del ser humano que podía, ser medida objetivamente reduciéndola a un coeficiente intelectual. Planteo la existencia de 7 inteligencias diversas y posteriormente incluyo una octava; por lo tanto se describirá brevemente su relación con el enfoque del marco enseñanza para la comprensión.

La inteligencia lingüística es la sensibilidad a los sonidos, estructura, significados y funciones de la palabra y el lenguaje. Se aprecia en la facilidad para escribir, leer, contar cuentos o hacer crucigramas.

La inteligencia lógica-matemática es la sensibilidad y capacidad de distinguir patrones lógicos o numéricos y de manejar largos hilos de razonamiento. Se aprecia en el interés en patrones de medida, categorías y relaciones. Hay facilidad para la resolución de problemas aritméticos, juegos de estrategia y experimentos.

La inteligencia corporal y kinésica que es la facilidad para procesar el conocimiento a través de las sensaciones corporales, controlar los movimientos del cuerpo propio y manipular los objetos con destreza. Es común en deportistas, bailarines o actividades manuales como la costura, los trabajos en madera, etc.

La inteligencia visual y espacial es la capacidad para percibir acertadamente el mundo visual y espacial y para realizar transformaciones sobre las percepciones iniciales propias. Los niños piensan en imágenes y dibujos. Tienen facilidad para resolver rompecabezas, dedican el tiempo libre a dibujar, prefieren juegos constructivos, etc.

La inteligencia musical es la habilidad para producir y apreciar el ritmo, tono y timbre, que conforman las formas de expresión musical.

La inteligencia Interpersonal es la capacidad para discernir y responder adecuadamente a los estados de ánimo de los demás.

La inteligencia intra personal está relacionada con la capacidad de un sujeto para conocerse a sí mismo: sus reacciones, emociones y vida interior, junto con sus debilidades y fortalezas.

La inteligencia naturalista es la facilidad de comunicación con la naturaleza. Capacidad de entender los fenómenos naturales y buscar explicaciones relacionadas con ellos.

Si se parte de la teoría de las inteligencias múltiples con el fin de no tener unas directrices rígidas, se pueden encontrar como mínimo seis grandes grupos de puntos de entrada que permiten abordar diversos conceptos y que son:

Pueden contribuir a la presentación de muchos temas importantes que destaquen por su complejidad. Ellos son:

El enfoque narrativo: Es quizá la manera más eficaz de llegar a una gran cantidad de estudiantes. Las narraciones vívidas y espectaculares y los relatos son atractivos para personas de cualquier edad y condición. Y, aunque las narraciones se dirigen 36 principalmente a las inteligencias lingüísticas y personales también es posible presentar una narración empleando otras formas simbólicas, cómo la mímica o el cine, que hacen entrar en acción otras inteligencias. Por ejemplo, si se quiere dar a conocer el tema de la luz, se puede comenzar narrando la historia del bombillo. Para el caso específico del tema de campo eléctrico, se puede narrar la forma como se llegó a construir dicho concepto.

El enfoque lógico cuantitativo: Se puede emplear cuando se tienen estudiantes que disfrutan trabajando con números y relaciones numéricas. En el ejemplo de la luz, se puede plantear que ellos piensen en cómo medir su brillantez. Para el campo eléctrico, que vean cómo se relaciona su intensidad con la distancia y con la magnitud de la carga eléctrica.

El enfoque fundacional: Permite abordar cuestiones profundas sobre la existencia. El tema de la luz, con el enfoque fundacional podría analizar los aspectos filosóficos, del por qué la luz se usa en tantas religiones. O en el caso del campo eléctrico, entender la explicación de por qué los rayos se adoraban como dioses.

El enfoque estético: Las obras de arte se captan en función de su organización, su sentido del equilibrio y su idoneidad, además de otras características más específicas como el color, las sombras, los tonos o la ambigüedad del significado. Nuestro tema puede abordar el Cómo afecta los cambios de luz, en la forma de responder el público en escenas dramáticas. O en el caso del campo eléctrico, relacionarlo con cómo mayores campos eléctricos, producen más corriente y por ende más intensidad luminosa.

El enfoque experiencial: Se adapta a quienes les atrae la oportunidad de trabajar con materiales tangibles. Nuestro tema de la luz puede ser tratado en la forma de cómo se descompone la luz blanca. El campo eléctrico tiene aplicaciones relacionadas con corrientes y circuitos, en donde los estudiantes pueden jugar a construir distintos dispositivos de acuerdo a sus intereses.

*El enfoque social cooperativo: P*ermite que el estudiante aprenda en compañía de otros. A algunos estudiantes les gusta cooperar sin más; otros disfrutan debatiendo, argumentando, presentando alternativas distintas, desempeñando diversos papeles. Nuestro tema puede ser propuesto en este enfoque, donde un estudiante les enseña a otros sobre la luz. O exponiendo a otros interesados los proyectos ideados o consultados por ellos mismos acerca de campo eléctrico.

1.7 LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

La entrevista es una conversación entre un investigador y una persona que responde a preguntas orientadas a obtener la información exigida por los objetivos de un estudio; como técnica de recolección va desde la interrogación estandarizada hasta la conversación libre, en ambos casos se recurre a una guía que puede ser un formulario o esquema de cuestiones que han de orientar la conversación.

Por lo tanto la entrevista es un proceso donde obtengo información de forma directa, no es considerada como una conversación normal, sino una conversación formal, con una intencionalidad, que lleva implícitos unos objetivos englobados en una investigación. A pesar de existir diferentes tipos de entrevistas nuestra investigación estará basada en la *entrevista semiestructurada* la cual definimos a continuación.

En la entrevista semiestructurada se determina cual es la información relevante que se quiere conseguir, se hacen preguntas abiertas dando la oportunidad a recibir más matices de la respuesta, permite ir entrelazando temas, pero requiere de una gran atención por parte del investigador para poder encauzar y estirar los temas.

Para la preparación de la entrevista se debe tener en cuenta:

- Los objetivos de la entrevista.
- Identificar los entrevistados.
- Formular las preguntas y secuenciarlas.
- Preparar el lugar donde se realizara la entrevista.
- Durante la preparación para abordar el tema guion de las preguntas, es interesante tener en cuenta los tipos de pregunta que pueden resultar de los actos del lenguaje llevados a cabo por el entrevistador.

Los tipos de preguntas a realizar pueden ser:

- Declaración: es un acto del habla por el cual el que habla da a conocer su punto de vista y a partir de ahí se genera una pregunta más o menos inquisitorial. Podemos decir que el entrevistador este acto lo puede realizar de dos maneras: desde un registro referencia, en cuyo caso el enuncia simplemente un hecho sin connotaciones ni intención alguna, o de complementación o declaración en la cual también se puede hacer desde un registro modal que indica ya una actitud del locutor respecto a lo que se está refiriendo. Habría un juicio de valor implícito o una postura determinada frente a un hecho, con lo cual estaríamos ante una Interpretación.
- Interrogación: es una pregunta directa que obliga a dar respuesta, son ejemplos muchas de las preguntas de las entrevistas en general, y si las enfocamos desde ambos registros, referencia y modal obtenemos una pregunta bien sobre el contenido o bien sobre la actitud.
- Reiteración: es la repetición de un punto de vista o parte del ya expuesto. Si se hace desde un registro referencial dará como resultado una pregunta eco, donde se toma parte del discurso y se subraya su importancia de manera escueta sin connotaciones. En caso de situarnos

desde un registro referencial tendríamos una respuesta denominada reflejo.

CAPITULO 2. EL CONCEPTO DE DERIVADA

2.1 EVOLUCION HISTÓRICA DEL CONCEPTO

Los grandes creadores del cálculo diferencial fueron el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) y Isaac Newton (1642-1727) científicos del siglo XVII y XVIII quienes generalizaron ideas previas para la construcción del cálculo. Ideas vistas desde la antigüedad por lo Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Galileo Galilei (1564-1642).

La creación del cálculo también fue motivada por cuatro problemas escritos por Ángel Ruiz en su libro "*historia y filosofía de las matemáticas*"

El primer problema fue la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo. El segundo fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por superficies. El tercero fue cuando una función alcanza un valor máximo o mínimo y el último problema es asociado a la geometría el cual era calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto.

Para estos problemas Newton y Leibniz demostraron que con métodos infinitesimales se resolvían.

Fermat (1601-1665) en 1638 presento una ecuación algebraica que permitiría hallar máximos y mínimos la cual fue generalizada años más tarde por el Holandés Johannes Hudde. Fermat también descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica “antecedente del concepto de la derivada”. Método que se puede reducir al cálculo del siguiente límite

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

Aproximación a la que Newton y Leibniz desarrollaron posteriormente.

Newton construyo el cálculo diferencial e integral en 1665 a 1666 publicando sus resultados en sus libros

- *de anaysi per aequationes numeroterminorum infinitas* publicado en 1711.
- *methodus fluxionum et serierum infinitorum* publicado en dos idiomas, ingles en 1736 y latin 1742.

Le dio a su cálculo el nombre de teorías de fluxiones a las funciones x, y, z las cual eran fluentes y a las derivadas fluxiones las cuales denoto

$\dot{x}\,,\ \dot{y}, \dot{z} \ldots.$

Newton señalaba "*cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finitamente iguales",* considerando el límite de una función o el de la derivada en su libro *Philosophie naturalis principia mathematica (1687), lema I del libro I, sección I.*

Leibniz bajo la influencia de Huygens, le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas estando seguro que se trataba de un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes a través de sumas. En 1676 Leibniz ofreció las reglas $dx^n = nx^{n-1}$ para un entero o fraccional, en 1677 ofreció las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

El método de Leibniz se trataba más de una aproximación geométrica y no cinemática como la de Newton.

En el siglo XIX la función derivada logra su reconocimiento social, científico y matemático con mayor rigor a partir de Niels Abel (1802 – 1829), Bernhard Bolzano (1781 -1848), Augustin Cauchy (1789 -1857), Karl Weierstrass (1815 – 1897) entre los más reconocidos.

Bolzano (1817) quien definió por primera vez la derivada como un límite: la cantidad f(x) a la que la razón

$$\frac{f(x + \nabla x) - f(x)}{\nabla x}$$

Se aproxima indefinidamente cuando ∇x se aproxima a 0 a través de valores positivos o negativos.

Cauchy describió la derivada en su *libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección "cuando la función* $y = f(x)$ *es* *continua entre dos limites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre dichos limites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente si* $\nabla x = i$*, entonces los dos términos de la razón entre las diferencias serán dos cantidades infinitamente pequeñas. Sin embargo, mientras estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro limite positivo o negativo. Este límite:*

$$\frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Si existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. Así por ejemplo si se toma $f(x)=x^m$*. Siendo m un número entero, entonces la razón entre las diferencias infinitamente pequeña será:*

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \cdots + i^{m-1}$$

Que tendrá por limite la cantidad mx^{m-1}*, es decir una nueva función de la variable x llamada función derivada y se designa por la notación y´o f´(x).*

2.2 PRIMEROS ANTECEDENTES SOBRE LO INFINITAMENTE PEQUEÑO

Pitágoras de Samos (580? – 500? A.C) fue uno de los primeros en definir lo infinito afirmando "*La evolución es la ley de la vida. El número es la ley del universo. La unidad es la ley de Dios*" amarrando el infinito a la divinidad.

Aunque fueron los pitagóricos los primeros en trabajar con el infinito fue Aristóteles el primer teórico del infinito potencial quien lo consideraba como "lo *que no se deja recorrer y carece de límite*"

Años después las teorías matemáticas que permiten manejar el infinito como cantidad es decir; lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande han tenido una larga historia que aún no termina y que actualmente se conoce como "*Matemática no estándar*" por un lado y por otro como "*Geometría Diferencial Sintética"*. Estas teorías iniciaron con Demócrito y Arquímedes quienes afirmaron que la línea estaba constituida por segmentos de longitud infinitamente pequeña. Por ejemplo una circunferencia es un polígono regular cuyos lados son infinitesimales o infinitésimos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

En la edad media Bertrand Rusell citado por F Cajori en *History of mathematics* 1980 sostenía "*A lo largo de toda la Edad Media, casi todos los mejores intelectos se dedicaron a la lógica formal mientras que en el siglo XIX solo una parte infinitesimal del pensamiento de todo el mundo se dedicó a este tema, sin embargo se ha hecho más por su avance en cada una de las décadas que ha seguido a 1850 de lo que se hizo en el periodo que va desde Aristóteles a Leibniz"*

Leibniz consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores de todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son "*incomparables*" porque con respecto a las cantidades finitas son "*como granos de arena con relación al mar".* También creía que las líneas rectas y las curvas eran polígonos con infinito número de lados "*Polígonos infiniláteros*", que las superficies curvas, poliedros de infinitas caras, que el movimiento variado era una sucesión de movimientos uniformes, entre otros ejemplos; de tal forma que las cantidades quedaban descompuestas en elementos más sencillos y por lo tanto más fáciles de captar.

Las ideas de Leibniz sobre las cantidades infinitesimales fueron acogidas por los matemáticos continentales pero no en la misma forma. El Marques de L' Hopital (1661 – 1704), autor del primer texto de cálculo "análisis *de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*" (1696) establece lo siguiente *" se pide que se puedan tomar indistintamente una por otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incrementa ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma*" .

Louis Cauchy (1789 – 1857) en 1829 en su libro *Curso de Análisis* definió:

1. Una infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña, como una variable con cero como límite: "*Se dice que una cantidad variable es infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal forma que converge hacia el valor cero".*

2. El límite : "*cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo hasta acabar diferenciándose muy poco de él, haciéndose tan pequeña [la diferencia] como uno desee, este último (valor fijo) es llamado el límite de todos los otros* "

Bernardo Bolzano (1781 – 1848) en su libro "*las paradojas del Infinito*" se atreve a sostener la existencia del infinito afirmando *"...además de Dios, existen seres creados por contraposición a él, llamados seres finitos, siendo* *posible demostrar a partir de ellos la existencia de algún tipo de infinito, porque en realidad el conjunto mismo de estos seres debe ser infinito, lo mismo que el conjunto de las condiciones que experimenta cada uno de ellos inclusive en el más pequeño de los intervalos de tiempo (que contiene ya un infinito de instantes), etc. Podemos concluir, entonces, que también en la esfera de la realidad es posible constatar la existencia de un infinito''.*

2.3 DEFINICIÓN ACEPTADA

Apóstol en su libro afirma que este método para definir la derivada conduce a la idea geométrica de la tangente a una curva. En la figura 1 se observa una parte de la gráfica de una función *f*. las coordenadas de los puntos P y Q son respectivamente $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$.

En el triángulo rectangular que se forma cuya hipotenusa es el segmento PQ, la altura es $f(x+h)+f(x)$ y representa la diferencia de las ordenadas de los puntos P y Q entonces el cociente de diferencias.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Representa la tangente trigonométrica del ángulo α que forma PQ con la horizontal.

El número real tangente α se denomina pendiente de la curva entre P y Q y da un método para valorar la inclinación de esta línea.

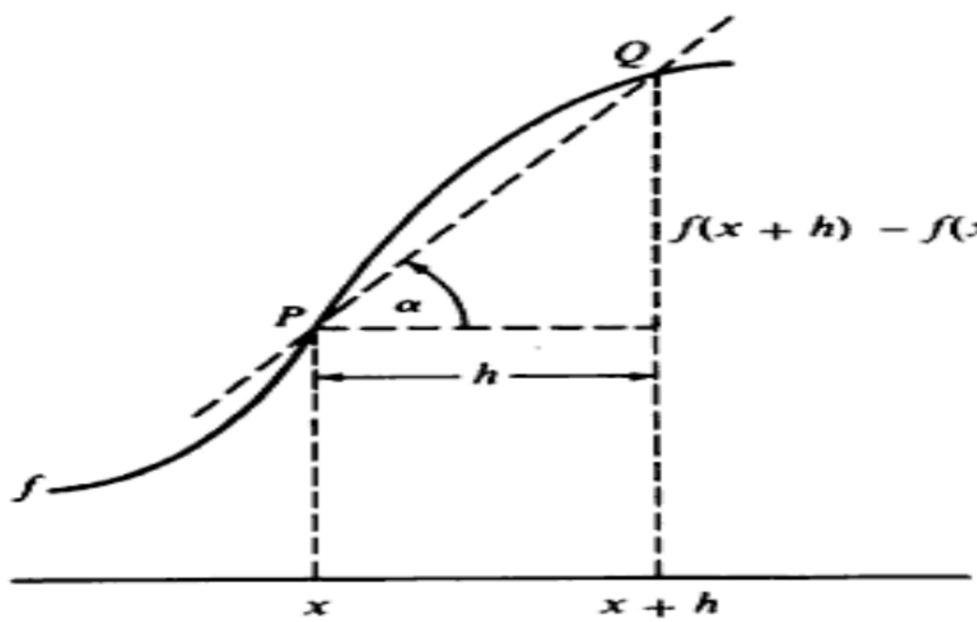


*Figura 1. Interpretación geométrica del cociente de diferencias como tangente de un ángulo α "*Courant R., *pág. 207"*

Sea f una función que tiene derivada en x, por lo que cociente de diferencias tiende a cierto límite f´ (x) cuando h tiende a cero. En la interpretación geométrica al tender h a cero, el punto P permanece fijo pero Q se mueve hacia P a lo largo de la curva y la recta PQ se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo alfa tiende al límite f´(x). Por esta razón parece natural tomar como pendiente de una curva en el punto P el numero f´(x).

2.4 MECANISMO ELEGIDO

La manera como orientaremos el GeoGebra, partirá de manera didáctica para acercar a los estudiantes al concepto de derivada desde un enfoque computacional y geométrico, en los cuales fundamentaremos nuestra observación, la entrevista y el modulo para así llevar al estudiante al concepto.

Por lo tanto describiremos los dos enfoques:

- ***Enfoque computacional*** Los computadores han hecho realidad la posibilidad de la *visualización dinámica* del comportamiento gráfico de las funciones, de observar mediante simulaciones iterativas cómo la sucesión de secantes tiende a la tangente de racionalizar considerablemente el trabajo con los métodos numéricos.
- ***Enfoque aproximación afín local***. Para introducir el concepto de derivada se parte de la idea de coeficiente direccional (pendiente) de la

recta para definir la pendiente de la secante. Para introducir la idea de tangente como el límite de una sucesión de secantes y con ello se establece la noción de aproximación afín.

Este enfoque considera que la tangente *g(x)* es la mejor aproximación lineal de la función *f* en la vecindad de *a*, de manera que *l*, la derivada, es el factor de proporcionalidad entre la diferencia *g(x) - g(a)* y *x - a*. La idea de la recta como mejor aproximación local de una curva es valiosa desde el punto de vista geométrico. Ver Figura 3

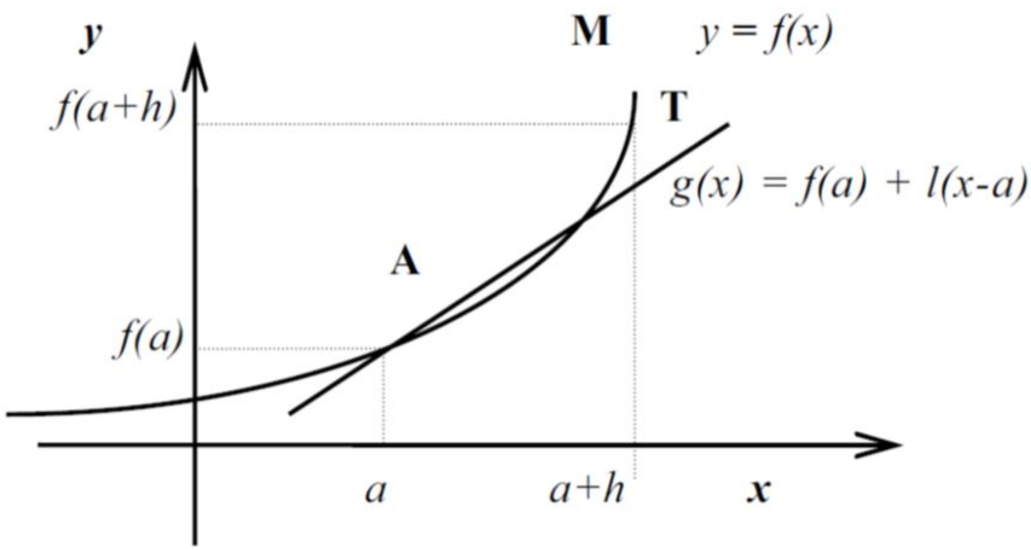


Figura 3. *Mejor aproximación local de una curva* Dolores C *pág. 194.*

- **E*nfoque geométrico*** desde este punto de vista la derivada es la tasa de cambio a la que está cambiando f(x), comparada con respecto a x, es decir, es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el valor x. Puede aproximarse encontrando la pendiente de la secante. Ver figura 4. La cual se puede calcular como:

$$m_{secante} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

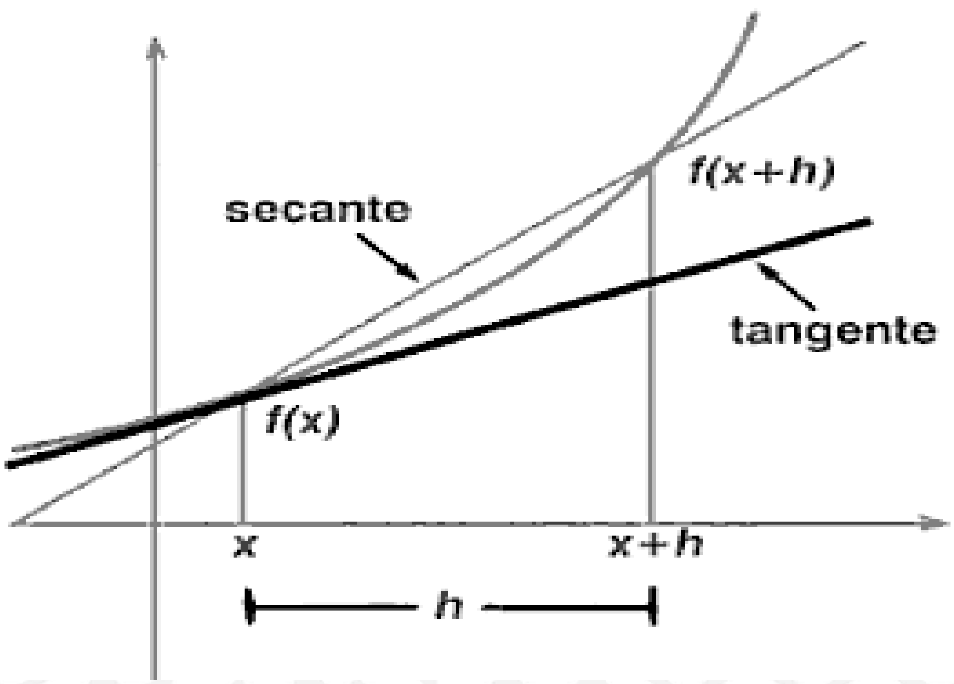


Figura 4. Aproximación geométrica de la derivada.

Supongamos ahora que h se hace muy pequeño. Entonces la secante se aproxima a la tangente a la gráfica en x.

$$m_{tangente} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una de las ventajas de este enfoque radica en que prioriza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas.

2.5 OBSTÁCULOS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se pueden clasificar de acuerdo a su origen en obstáculos de origen ontogénico (son los que sobrevienen de las limitaciones del sujeto), obstáculos de origen didáctico (provocados por el sistema de enseñanza) y obstáculos de origen epistemológico (son aquellos derivados del rol constitutivo del saber mismo). Reconocer que los errores pueden deberse a causas epistemológicas y didácticas y no sólo de tipo cognitivo.

Bachelard (1994) planteó la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de errores. Dicho concepto se refiere a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. La noción de obstáculo epistemológico fue retomada por Brousseau para la didáctica de la matemática. Para él, el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo.

Orton (1980) en su investigación basada en una entrevista a 110 estudiantes de 16 a 22 años menciona una clasificación de los errores de los estudiantes al manipular la derivada clasificándolos en:

1. Errores estructurales. Se relacionan con los conceptos esenciales implicados.

2. Errores arbitrarios. No se tienen en cuenta los datos del problema para su solución.

3. Errores ejecutivos. Errores en la manipulación de los conceptos implicados.

Así mismo, los estudiantes manifiestan un buen nivel en la manipulación algebraica que aparece en los cálculos de funciones derivadas. Pero a su vez mostraron dificultad significativa en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada, manifestando así los obstáculos cognitivos inherentes al concepto de límite.

Cornu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos referentes al concepto de límite:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Azcarate (1990), demuestra las dificultades y los errores conceptuales y de técnicas de cálculo que aparecen cuando los estudiantes trabajan con los conceptos básicos que constituyen lo que podríamos denominar el pre cálculo:

a. Velocidad.

b. Pendiente de una recta.

c. Tasa de variación.

Así mismo Afirma *"¿Cómo se pretende definir la derivada como un límite de la función cociente incremental cuando los estudiantes no dominan estas ideas básicas?" "No tiene sentido avanzar en el concepto de derivada efectuando el paso al límite sin que se haya consolidado las ideas y habilidades del pre cálculo".*

CAPÍTULO 3. LA ENTREVISTA DE CARÁCTER SOCRÁTICO

3.1. CONSOLIDACIÓN DEL GUIÓN ENTREVISTA

La entrevista esta dividida en 3 bloques:

3.1.1 Primer bloque

Este primer bloque tiene como objetivo, conocer en el entrevistado el dominio que tiene sobre el manejo de saberes previos acerca del concepto de derivada con preguntas concretas y a la vez generar condiciones que disminuyan la presión propia de una entrevista.

Los conceptos previos que se pretenden trabajar en este bloque son:

- Recta tangente y recta secante
- Pendiente de una recta

- Función.
- Continuidad de una función
- Límite de una función

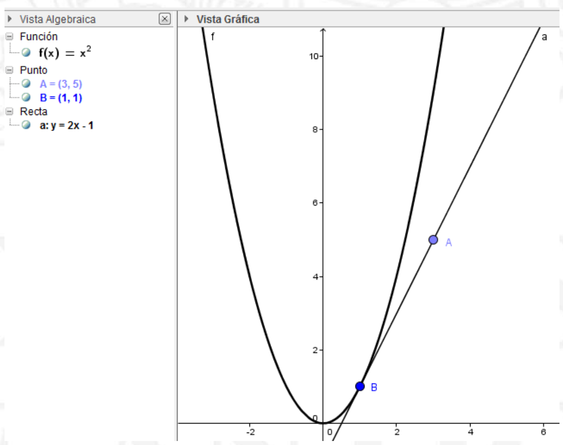
Las preguntas que corresponde a este bloque son:

1. Cuál es el valor de la pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones :

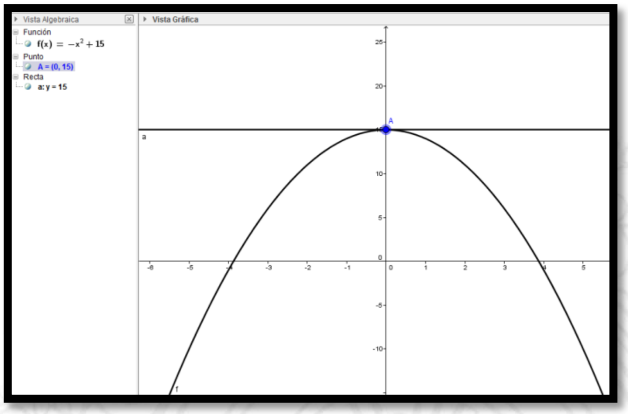
a. pasa por los puntos

- $P_1(3,2)$ y $P_2(7,0)$
- $P_5(3,5)$ y $P_6(3,5)$

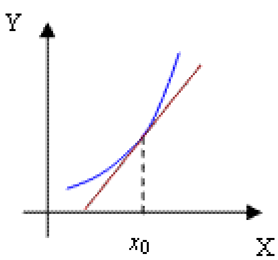
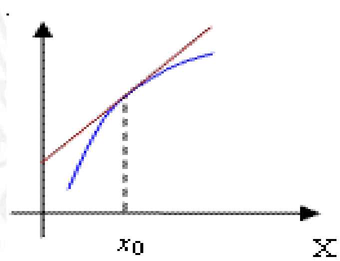
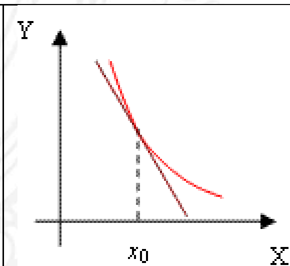
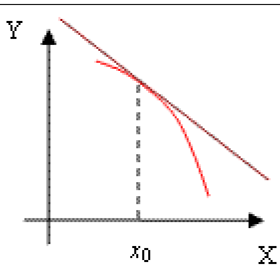
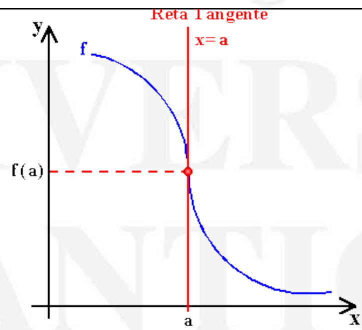
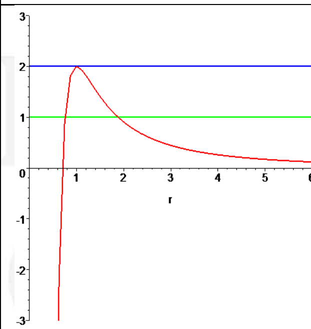
b. Pasa por los puntos A y B(usa la gráfica para identificarlos) :



¿Conoces otra forma para encontrar la pendiente de una curva sin usar los puntos?



2. De las siguientes imágenes identifica cuando la pendiente es negativa, positiva, cero y cuando no existe.

PENDIENTE DE UNA CURVA		
 **(a)**	 **(b)**	 **(c)**
 **(d)**		

3. De acuerdo con los puntos anteriores ¿Que entiendes por pendiente de una recta?

4. Con las rectas de la pregunta dos, cuándo identificas que ellas son:

   a. Negativa

   b. Positiva

   c. Cero

   d. No existe.

5. ¿Qué entiendes por recta tangente y recta secante?

Aporte de información: *Consideremos que una recta tangente es aquella que toca a una curva en un solo punto y la recta secante es la recta que toca a la curva en dos puntos.*

.

6. De éstas imágenes identifica cuales son rectas tangentes y cuáles son rectas secantes.

RECTAS SECANTES Y TANGENTES

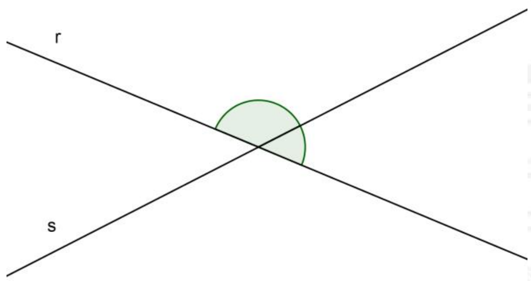


Imagen #1

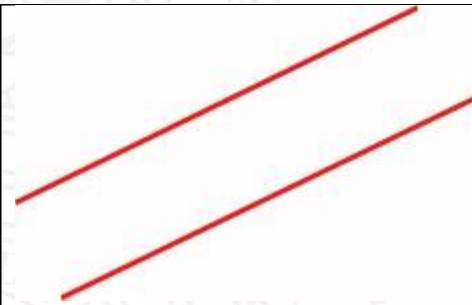
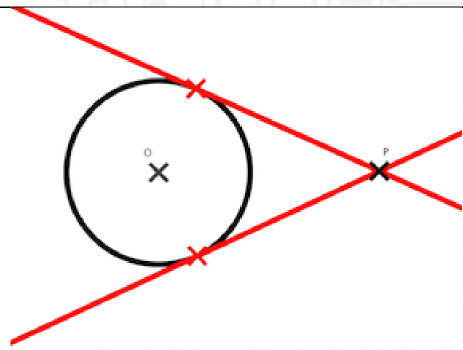


Imagen #2



Imagen#3

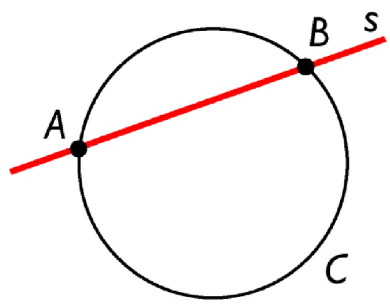
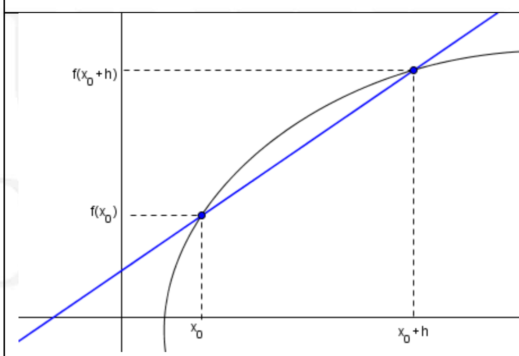


Imagen # 4



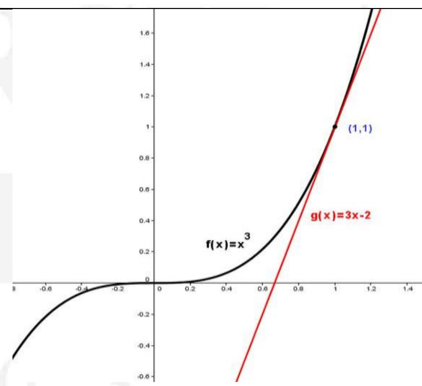
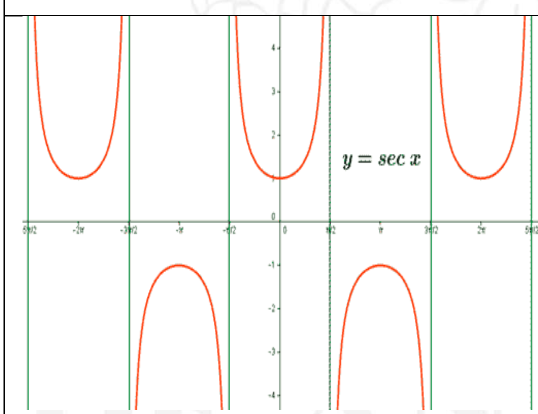
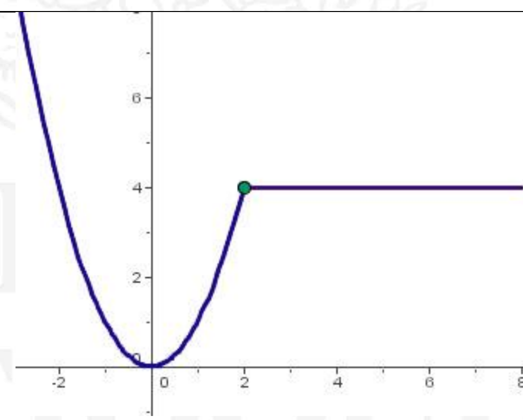
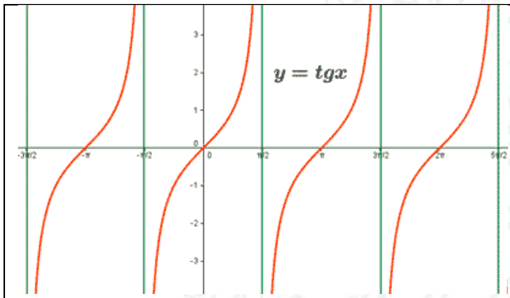


Imagen # 6

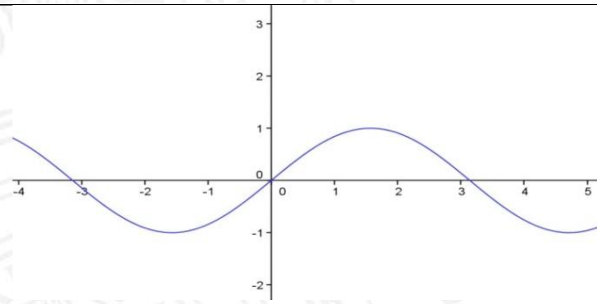
Imagen # 5	

7. Identifica cuales de las siguientes curvas son continuas. Justifica tu repuesta

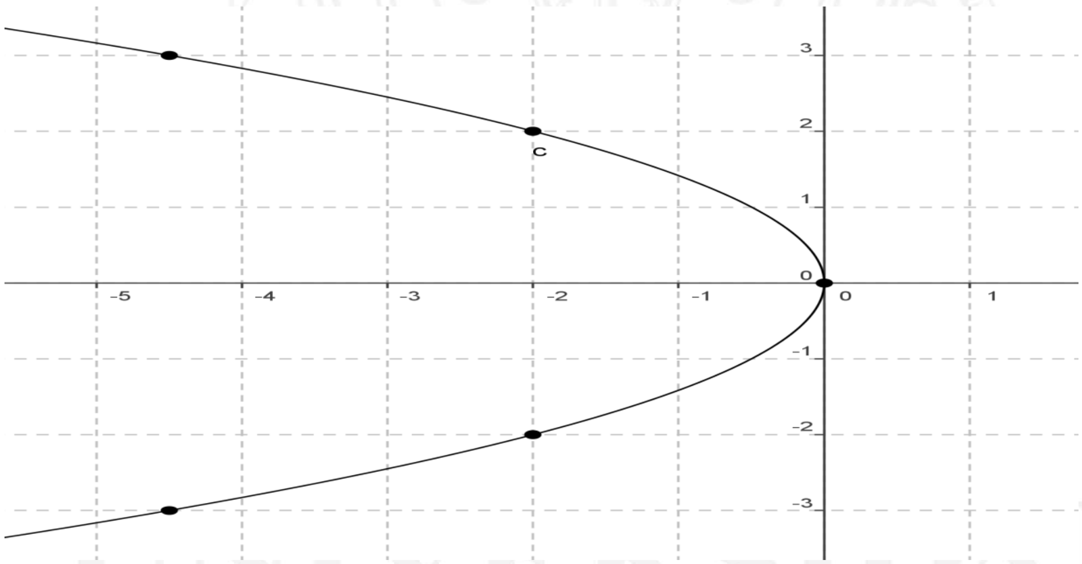
 **Curva #1**	 **Curva #2**



Curva #3



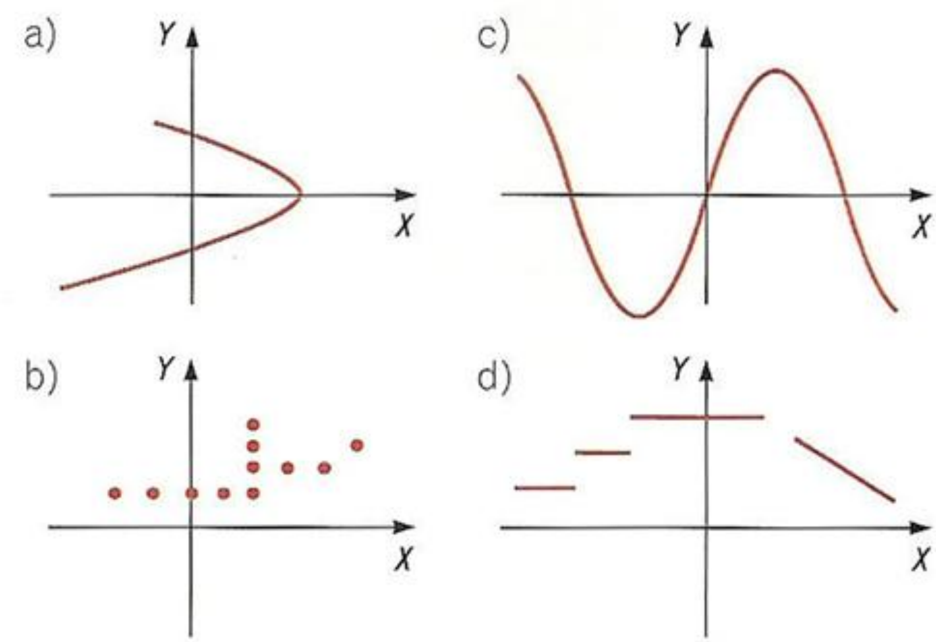
Curva #4

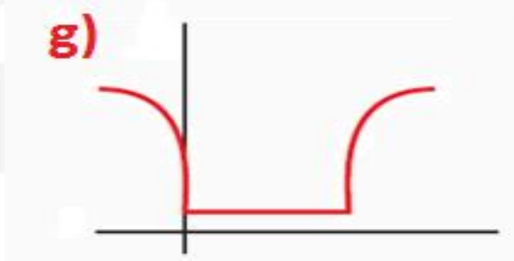


Curva #5

8. Observa las siguientes curvas:

¿Cuáles son funciones y cuales son relaciones? ¿Cuál es la razón de tu elección?





9. De las curvas que son funciones en la pregunta 8 ¿Cuáles corresponden a funciones continuas? Justifica tu elección

Aporte de información: *Una función es una Relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde uno y sólo un valor del Recorrido.*

Intuitivamente, una función es continua en un punto, cuando no presenta huecos, picos, ni saltos en dicho punto, es decir, se puede hacer de un solo trazo sin levantar el lápiz.

10. ¿Qué es para ti una función?

11. ¿Cuándo una función es continua?

12. Observa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función $f(x)= x^2-3x$:

	X tiende a -1 por la izquierda					X tiende a -1 por la derecha			
x	-1,01	-1,001	-1,0001	…	**-1**	…	-0.9999	-0,999	-0,99
F(x)	4,0501	4,005001	4,00050001	…	**?**	…	3,99950001	3,995001	3,9501

13. ¿Cómo se comportan los valores de la función en las cercanías de x = -1?

14. ¿Qué sucede con la función f(x) cuando x se acerca a –1?

3.1.2 Segundo bloque

En este segundo bloque se pretende identificar en el entrevistado el dominio sobre la tasa de variación media de una función en un intervalo dado, relacionando la pendiente de la recta secante con la tasa variación media a través de algoritmos y manipulación de applets en Geogebra.

Los conceptos a desarrollar en este bloque son:

- Tasa de variación media
- Pendiente de la recta secante

Las preguntas correspondientes a este bloque son:

Situación problema: Un auto escolar se mueve describiendo esta trayectoria

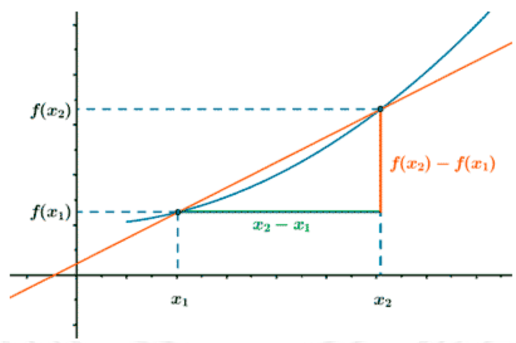
$\mathbf{y = x^3 + 2x}$, al cabo de 1 hora presenta una velocidad de 3km/h. A partir de allí comienza acelerar alcanzando una velocidad de 33 km/h al cabo de 2 horas.

15¿Presenta el auto una velocidad constante? Explica.

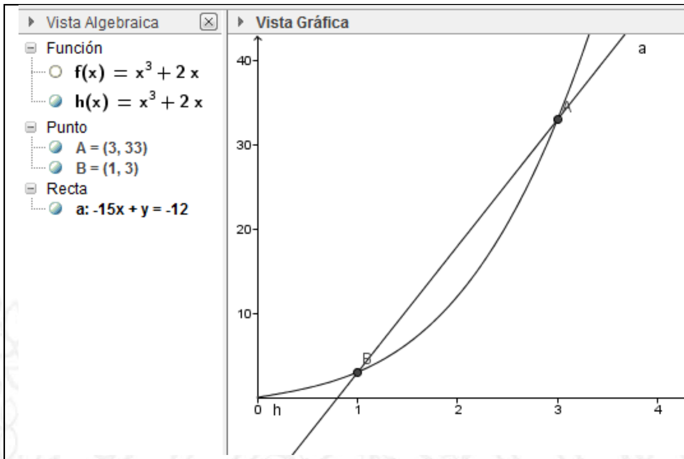
16 Si presenta algún cambio ¿Cuál es?

Aporte de información: Definimos la **TASA DE VARIACIÓN MEDIA** de una función f(x) en un intervalo [x_1, x_2] como:

$$TVM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



La siguiente gráfica describe la trayectoria del móvil:



Grafica #1

17. Encuentra la tasa de variación media del auto escolar.

18. Encuentra la pendiente de la recta secante trazada a la curva (***Gráfica#1).***

19.¿Qué relación encuentras entre la pendiente de la recta secante y la tasa de variación media?

Observa y manipula el siguiente applet (tasa de variación media).

20. De acuerdo a lo observado en el applet, ¿qué relación encuentras entre la tasa de variación media y la pendiente de la recta secante?.

21. Teniendo en cuenta la relación que en contrastes en el punto anterior, ¿Qué es la tasa de variación media?

3.1.3 Tercer bloque

Respondiendo a la secuencia que se ha venido trabajando con los dos bloques anteriores, en este tercer y último bloque haciendo uso y manipulación de simuladores y/o applets, pretendemos ofrecer a los estudiantes un enfoque menos formal del concepto de derivada, que permita al alumno desarrollar pensamientos propios a través de la observación y el análisis. Para que así el estudiante estableciendo el paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea comprenda el concepto de derivada y establezca las condiciones necesarias para dicha comprensión.

Los conceptos a trabajar en este bloque son:

- Tasa de variación instantánea
- Relación entre tasa de variación media y tasa de variación instantánea
- Paso de recta secante a recta tangente
- Condiciones para la existencia de la derivada

Las preguntas de último bloque son:

Manipula y observa el siguiente applet (Derivada)

22. ¿Qué observas al mover el deslizador?

23. Cuando mueves el deslizador acercándote a cero ¿Qué ocurre con la recta secante?

24. ¿Qué ocurre con los ángulos α y β al mover el deslizador?

25. ¿Encuentras alguna relación entre el acercamiento a cero y el comportamiento de la recta y los ángulos?

Aporte de Información: Tasa de variación Instantánea es el número que representa el valor que toma la tasa de variación media, cuando la distancia x_2-x_1 se hace tan cercana a cero como sea posible.

26. De acuerdo con el aporte de Información anterior, ¿encuentras alguna relación entre la tasa de variación instantánea y la tasa de variación media?

27. Hacer que el deslizador se acerque a cero tanto como sea posible, qué efecto causa sobre la recta secante?

28. Los cambios en los ángulos α y β, están relacionados con los cambios ocurridos con la recta secante?

29. Los cambios en los ángulos α y β, están relacionados con los cambios ocurridos con la tasa de variación media?

30.¿Podrías establecer qué condiciones debe cumplir una curva para que sea posible transformar en ella la recta secante en tangente, si conocemos el punto de corte de la recta con la curva?

31.¿Podrías establecer qué condiciones debe cumplir una curva para que sea posible pasar en ella de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea?.

32.¿Cómo interpretarías en general la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea en una función?

3.2 NIVELES Y DESCRIPTORES

3.2.1. **Niveles**

El marco de la enseñanza para la comprensión, trabaja las dimensiones de contenido, métodos, propósitos, y formas de comunicación. Las dimensiones de la comprensión ofrecen una forma de hacer la definición de comprensión más específica y permite identificar 4 aspectos, el marco describe 4 niveles de comprensión:

- ❖ **Comprensión ingenua**: está conformado por las experiencias en las situaciones reales, ideas y concepciones del individuo donde se realizan acciones físicas o mentales con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto.
- ❖ **Comprensión principiante**: el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas con una sola actividad por una imagen mental además el estudiante la examina y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de una imagen específica, además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales.
- ❖ **Comprensión aprendiz**: el estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas además utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además de que es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.

❖ **Comprensión maestría**: el estudiante es capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático y es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

Es importante resaltar que en este trabajo nos centraremos en la dimensión de contenido ya que esta evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han traspasado las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual puede moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones.

NIVELES			
Comprensión ingenua	**Comprensión principiante**	**Comprensión aprendiz**	**Comprensión maestría**
• Reconoce y diferencia, relaciones y funciones; estableciendo	• Interpreta la tasa de variación media, como un cociente de incrementos que	• Relaciona el imite de una función con la pendiente de la recta	• Establece condiciones para el paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea como un

las variables involucradas, y sus condiciones de existencia. • Calcula pendientes de rectas, utilizando representaciones gráficas, tablas y situaciones concretas. • Establece diferencias entre rectas tangentes y secantes a una curva y puede leer las pendientes de ambas, de acuerdo con los puntos de	no necesariamente está asociado con la pendiente de una recta. • Establece el límite de una función dada como un proceso infinito en el cual la diferencia $x_2 - x_1$ se acerca suficientemente a 0. • Relaciona geométricamente la pendiente de la secante con la pendiente de la tangente, cuando el intervalo $h = x_2 - x_1$ se acerca suficientemente a 0.	tangente a la curva en un punto. • Identifica la tasa de variación instantánea como el caso limite en el cual el intervalo $h = x_2 - x_1$ se a cerco suficientemente a 0. • Puede concluir que la tasa de variación instantánea, representa la pendiente de la recta tangente a la curva y se construye de forma similar a dicha pendiente.	aplicación del concepto de límite que está libre de la concepción geométrica. • Relaciona la derivada de una función con la tasa de variación instantánea y tiene claro que esta representa el proceso de obtención de un límite. • Relaciona la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto con la tasa de variación instantánea. • Identifica la tasa de variación instantánea como la situación límite entre un cociente de

corte, entre la recta y la curva. • Tiene dificultades para identificar la pendiente de la tangente como una consecuencia en la pendiente de la secante al hacer, que la diferencia $x_2 - x_1$ diminuta hasta valores cercanos a 0.	• Relaciona la tasa de variación media con la pendiente de la recta secante a una curva y establece que la disminución en el intervalo $h = x_2 - x_1$ ocasiona que la recta secante se mueva hasta convertirse en una recta tangente a la curva.		variaciones, que puede tener aplicaciones en diferentes áreas de la ciencias.

3.2.2 Descriptores

- ❖ Aplicar la tasa de variación media en funciones.
- ❖ Introducir el concepto tasa de variación media con problemas aplicados
- ❖ Crear ejemplos numéricos concretos de la tasa de variación media.
- ❖ Ser capaces de generalizar los ejemplos.
- ❖ Calcular la pendiente de la recta secante representada en un intervalo concreto y luego general.
- ❖ Relacionar entre la pendiente de la recta secante y la tasa de variación media.
- ❖ Introducir la interpretación geométrica de la derivada.

- Realizar semejanza entre lo que ocurre con la recta secante, al reducir la amplitud de un intervalo dado.
- deducir que ocurre con la pendiente de la recta secante, conforme se reduce la amplitud de un intervalo dado.
- establecer una relación entre la interpretación geométrica de la tasa de variación y la recta secante.
- Establecer condiciones para pasar de la tasa de variación media a la instantánea en una curva y llegar así a la comprensión de la derivada, llevando al estudiante a que estableciera una definición para cada una. Seguidamente se trabajó el concepto de continuidad y función para así construir el concepto de función continua apoyado en el análisis de varias gráficas y definiciones, para llegar a la definición de limite y estudiarla observando los comportamientos que suceden en F(x), en las proximidades de un punto X.

Luego se estudió el concepto de variación a través de un problema de aplicación donde se observaron unos cambios de velocidades, para introducir la noción de tasa de variación media mediante el cálculo algebraico de la tasa de variación media y la pendiente de la recta secante, para establecer la relación de igualdad que existe entre estas. Mediante la manipulación de un applet el estudiante verificará dicha relación.

Finalmente el estudiante manipula otro Applet en el que primero observo como una recta secante se convierte en tangente al reducir el intervalo existente entre los puntos de corte en la curva, y es aquí donde la tasa de variación media se convierte o pasa a ser una tasa de variación instantánea, cuando dicho intervalo se aproxima tanto a cero, es decir, es el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media. Y esto precisamente nos lleva al concepto de derivada en un punto; la variación instantánea en un punto.

3.3 ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS

3.3.1 Intencionalidad de preguntas.

1.

- **a.** En esta pregunta se pretende que los estudiantes recuerden y apliquen la fórmula de la pendiente de una recta, dado dos puntos para hallar el valor numérico de esta.
- **b.** Se busca que los estudiantes hallen el valor de la pendiente de una recta dada, empleando otra forma diferente a la anterior apoyándose ahora en la gráfica o utilizando el mismo procedimiento.

c. Se pretende que los estudiantes utilicen otra forma de hallar la pendiente de una recta, diferente a la de aplicar la formula (punto pendiente)

2. . A partir de la observación de varias curvas con sus respectivas rectas tangentes, el estudiante concluirá que c y d son negativas; a y b son positivas; e no existe; f es nula.

3. . Con esta pregunta pretendemos que los estudiantes de forma verbal den a conocer los conocimientos intuitivos sobre el concepto de pendiente de una recta; como el valor que representa el cambio en el eje y de acuerdo a las variaciones en el eje x determinando así la inclinación de dicha recta. Concepto que es de vital importancia para llegar al concepto de derivada.

4. En este interrogante afianzaremos los conocimientos de los estudiantes acerca del concepto de pendiente, a través de los diferentes tipos de pendiente. El estudiante con lo observado y manifestado en los puntos anteriores debe responder cuando una pendiente es negativa, positiva, cero, cuando no existe.

   a. Negativa: Cuando la recta es decreciente, es decir, a medida que se avanza en el eje x positivo, toma valores negativos en el eje y

   b. Positiva: Cuando la recta es creciente

c. Cero: cuando la recta es completamente horizontal o paralela al eje x, es decir, no presenta ninguna inclinación

d. No existe: cuando la recta es completamente vertical o paralela al eje y

5. Identificar los conocimientos que los estudiantes tienen acerca del concepto de recta tangente y recta cesanteen una curva.
   - Recta tangente: Es aquella que toca a una curva en un solo punto.
   - Recta secante: Es la recta que toca a la curva en dos puntos.
6. A partir del aporte de información, pretendemos que el estudiante identifique las imágenes #1, #3, #4 y #5 son secantes, mientras que las imágenes #5 y #6 son tangentes a las curvas.
7. Mediante la observación y el análisis de algunas curvas, el estudiante determine que las curvas #4 y # 5 son continuas porque no presentan saltos y se pueden hacer de un solo trazo, y las curvas # 1, #2, #3 son discontinuas porque tienen asíntotas o presentan huecos.
8. Desde la observación de algunas curvas, el estudiante identifique que las gráficas: c,d,e son funciones y a,b,f, g son relaciones, porque si trazamos rectas perpendiculares a la función (regla de rectas verticales) se puede notar que a las que son funciones la corta en un solo punto y a las que son relaciones en dos o más puntos.

9. Las gráficas que son funciones continuas son: c y e. porque estas graficas se pueden hacer de un solo trazo.

10. Pretendemos que el estudiante se acerque a que una función es una Relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde uno y sólo un valor del Recorrido.

11. Se pretende aquí que Intuitivamente, el estudiante responda que una función es continua en un punto, cuando no presenta huecos, picos, ni saltos en dicho punto, es decir, se puede hacer de un solo trazo sin levantar el lápiz.

12. Observe de forma detallada los cambios que ocurren en los alrededores de x y la función F(x)

13. Por la izquierda se acerca de forma creciente a -1 y por la derecha se acerca de forma decreciente a -1.

14. Por la izquierda se aproxima de forma decreciente a 4 y por la derecha de forma creciente.

15. No, porque hay una variación de la velocidad.

16. Presenta un cambio de velocidad de 30km/h

17. Utilizando la tasa de variación media dada en el aporte de información de la pregunta 16, hallar el valor de esta con los datos del problema que da como resultado una TVM de 15

18. Utilizando la ecuación punto pendiente u otro método, hallar el valor de la pendiente que da como resultado 15.

19. Teniendo en cuenta los dos puntos anteriores podemos concluir que la pendiente de la recta secante a una curva es igual a la TVM.

20. independientemente de cual sea el valor de la pendiente de la recta secante, va a ser igual a la TVM.

21. La TVM es la pendiente de la recta secante a la curva.

22. Se mueve la recta sobre la curva y el ángulo β cambia de posición en el eje x

23. Tiende a convertirse en una recta tangente a la curva.

24. El ángulo β cambia de posición sobre el eje x y sigue siendo igual al ángulo α.

25. La recta secante tiene a convertirse en una recta tangente a la curva y los ángulos disminuyen

26. cuando hacemos h tender a cero en la tasa de variación media, llegamos al concepto de tasa de variación instantánea.

27. Tiende a convertirse en una recta tangente a la curva.

28. Sí, porque a medida que la recta secante tiene a ser recta tangente los ángulos α y β van disminuyendo.

29. Cuando TVM aumenta los ángulos aumentan

30. Se pretende que en la tasa de variación media el intervalo se reduzca a tal manera que los puntos de corte se convierta en un solo punto de tangencia.

31. Pretendemos que el estudiante establezca que con la reducción del intervalo x2-x1 tendiendo a 0 la recta pasa de ser secante a tangente por ende la tasa de variación ya no es media si no instantánea.

32. Se pretende que interprete la tasa de variación media en una función como la variación que ocurre en un intervalo de dicha función y la tasa de variación instantánea como el límite cuando h (intervalo) tiende a cero de la tasa de variación media, en definitiva como la derivada de la función.

4. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA INFORMACIÓN

4.1 PARADIGMA

En este proyecto se hace referencia al paradigma cualitativo el cual orienta el proceso de investigación. Este modelo es pertinente al tema de estudio, pues pretende facilitar la visualización de imágenes dinámicas y la comprensión de los conceptos (tasa de variación media, derivada, monotonía, extremos y concavidad) que conllevan al conocimiento de los puntos en donde una función es derivable.

El paradigma cualitativo "Se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)". Postula que la realidad se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades. De este modo convergen varias "realidades", por lo menos la de los participantes, la del investigador y la que se produce mediante la interacción de todos los actores. Además son realidades que van modificándose conforme transcurre el estudio y son las fuentes de datos (Hernández, Fernández y Baptista 2006).

4.2 MÉTODO: ESTUDIO DE CASOS

El estudio de casos es un método de investigación de gran relevancia para el desarrollo de las ciencias humanas y sociales que implica un proceso de indagación caracterizado por el examen sistemático y en profundidad de casos de entidades sociales o entidades educativas únicas.

El estudio de casos constituye un campo privilegiado para comprender en profundidad los fenómenos educativos aunque también el estudio de casos se ha utilizado desde un enfoque nomotético. Desde esta perspectiva, el estudio de casos sigue una vía metodológica común a la etnografía aunque quizás la diferencias en relación al método etnográfico reside en su uso, debido a que la finalidad del estudio de casos es conocer cómo funcionan todas las partes del caso para crear hipótesis, atreviéndose a alcanzar niveles explicativos de supuestas relaciones causales encontradas entre ellas, en un contexto natural concreto y dentro de un proceso dado.

Para algunos autores el estudio de casos no es una metodología con entidad propia sino que constituye una estrategia de diseño de la investigación que permite seleccionar el objeto/sujeto del estudio y el escenario real.

4.2.1 Definición, objetivos y características.

El estudio de casos es un método de investigación cualitativa que se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad social y educativa.

- Para Yin (1989) el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas.

- Para Stake (1998) es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad es circunstancias concretas.

La particularidad más característica de ese método es el estudio intensivo y profundo de un/os caso/s o una situación con cierta intensidad, entiendo éste como un “sistema acotado” por los límites que precisa el objeto de estudio, pero enmarcado en el contexto global donde se produce (Muñoz y Muñoz, 2001).Para ser más concreto, llamamos casos a aquellas situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés de investigación. Así, por ejemplo en educación, un aula, un alumno autista o un programa de enseñanza pueden considerarse un caso.

En virtud de esta definición, es necesario precisar que el estudio de casos pude incluir tanto estudios de un solo caso como de múltiples casos (según sea una o varias las unidades de análisis) pero su propósito fundamental es comprender la particularidad del caso, en el intento de conocer cómo funcionan todas las partes que los componen y las relaciones entre ellas para formar un todo (Muñoz y Serván, 2001).

Latorre et al (1996: 237) señalan las siguientes ventajas del uso socioeducativo del estudio de casos:

- Pueden ser una manera de profundizar en un proceso de investigación a partir de unos primeros datos analizados.
- Es apropia para investigaciones a pequeña escala, en un marco limitado de tiempo, espacio y recursos.
- Es un método abierto a retomar otras condiciones personales o instituciones diferentes.
- Es de gran utilidad para el profesorado que participa en la investigación. Favorece el trabajo cooperativo y la incorporación de distintas ópticas profesionales a través del trabajo interdisciplinar; además, contribuye al desarrollo profesional.
- Lleva a la toma de decisiones, a implicarse, a desenmascarar prejuicios o preconcepciones, etc.

Yin (1989) distingue tres tipos de objetivos diferentes:

- Exploratorio: cuyos resultados pueden ser usados como base para formular preguntas de investigación.
- Descriptivo: intenta describir lo que sucede en un caso particular.
- Explicativo: facilita la interpretación.

Pérez Serrano (1994) señala las siguientes características del estudio de caso:

- Es particularista: Se caracteriza por un enfoque claramente ideográfico, orientado a comprender la realidad singular. El cometido real del estudio de casos es la particularización no la generalización. Esta característica le hace especialmente útil para descubrir y analizar situaciones únicas. En el ámbito educativo nos encontramos con la necesidad de analizar y profundizar en situaciones peculiares.
- Es descriptivo: Como producto final de un estudio de casos se obtiene una rica descripción de tipo cualitativo. La descripción final implica siempre la consideración del contexto y las variables que definen la situación, estas características dotan al estudio de casos de la capacidad que ofrece para aplicar los resultados.
- Es Heurística: porque puede descubrirle nuevos significados, ampliar su experiencia o bien confirmar lo que ya sabe, es una estrategia encaminada a la toma de decisiones.
- Es Inductivo: se basa en el razonamiento inductivo para generar hipótesis y descubrir relaciones y conceptos a partir del sistema minucioso donde tiene lugar el caso. Los observaciones detalladas permiten estudiar múltiples y variados aspectos, examinarlos en relación con los otros y al tiempo verlos dentro de sus ambientes.

Una de las principales críticas del estudio de casos se encuentra en que este no permite hacer generalizaciones a partir de una singularidad.

4.2.2 Modalidades de Estudios de Casos

Los estudios de casos pueden clasificarse a partir de diferentes criterios.

Atendiendo al objetivo fundamental que persiguen Stake identifica tres modalidades:

- El estudio intrínseco de casos: su propósito básico es alcanzar la mayor compresión del caso en si mismo. Queremos aprender de el en si mismo sin generar ninguna teoría ni generalizar los datos. El producto final es un informe básicamente descriptivo. (ejemplo: un profesor llama a un asesor o investigador para resolver un problema en el aula)
- El estudio instrumental de casos: su propósito es analizar para obtener una mayor claridad sobre un tema o aspecto teórico (el caso concreto seria secundario). El caso es el instrumento para conseguir otros fines indagatorios (ejemplo: en el caso anterior del problema en el aula nos interesaría el porque se produce dicho problema en el aula)

- El estudio colectivo de casos: el interés se centra en indagar un fenómeno, población o condición general a partir del estudio intensivo de varios casos. El investigador elige varios casos de situaciones extremas de un contexto de objeto de estudio. Al maximizar sus diferencias, se hace que afloren las dimensiones del problema de forma clara. Este tipo de selección se llama múltiple: se trata de buscar casos muy diferentes en su análisis pero que al menos al principio sena relevantes.

Los estudios de casos en educación se agrupan en tres tipologías diferentes según la naturaleza del informe final. (Merriam)

- Estudio de casos descriptivo. Este, presenta un informe detallado del caso eminentemente descriptivo, sin fundamentación teórica ni hipótesis previas. Aporta información básica generalmente sobre programas y prácticas innovadoras.
- Estudio de casos interpretativo. Aporta descripciones densas y ricas con el propósito de interpretar y teorizar sobre el caso. El modelo de análisis es inductivo para desarrollar categorías conceptuales que ilustren, ratifiquen o desafíen presupuestos teóricos difundidos antes de la obtención de la información.

- Estudio de casos evaluativo. Este estudio describe y explica pero además se orienta a la formulación de juicios de valor que constituyan la base para tomar decisiones.

4.2.3 El proceso de investigación de un estudio de casos

Stake (1998) señala que por sus características, el estudio de casos es difícil de estructurar con unos pasos delimitados pero la propuesta de Montero y León (2002) desarrolla este método en cinco fases:

1º La selección y definición del caso.

2º Elaboración de una lista de preguntas.

3º L localización de las fuentes de datos.

4º El análisis e interpretación.

5º La elaboración del informe.

1. La selección y definición del caso: Se trata de seleccionar el caso apropiado y además definirlo. Se deben identificar los ámbitos en los que es relevante el estudio, los sujetos que pueden ser fuente de información, el problema y los objetivos de investigación.
2. Elaboración de una lista de preguntas: Después de identificar el problema, es fundamental realizar un conjunto de preguntas para guiar al

investigador. Tras los primeros contactos con el caso, es conveniente realizar una pregunta global y desglosarla en preguntas más variadas, para orientar la recogida de datos.

3. Localización de las fuentes de datos:

Los datos se obtienen mirando, preguntando o examinando. En este apartado se seleccionan las estrategias para la obtención de los datos, es decir, los sujetos a examinar, las entrevistas, el estudio de documentos personales y la observación, entre otras. Todo ello desde la perspectiva del investigador y la del caso.

4. Análisis e interpretación: Se sigue la lógica de los análisis cualitativos. Tras establecer una correlación entre los contenidos y los personajes, tareas, situaciones, etc., de nuestro análisis; cabe la posibilidad de plantearse su generalización o su exportación a otros casos.
5. Elaboración del informe: Se debe contar de manera cronológica, con descripciones minuciosas de los eventos y situaciones más relevantes. Además se debe explicar cómo se ha conseguido toda la información (recogida de datos, elaboración de las preguntas, etc.). Todo ello para trasladar al lector a la situación que se cuenta y provocar su reflexión sobre el caso.

4.3 DISEÑO Y SELECCIÓN DE LOS CASOS

En nuestra investigación utilizamos un estudio de casos, el cual se realiza de una forma directa a personas o grupos durante un cierto periodo, en nuestro caso será un grupo de tres a cuatro estudiantes de primer año universitario, los cuales fueron seleccionados de acuerdo a ciertas características particulares como: que no fuesen tímidos, facilidad para comunicarse, espontaneidad.

Posteriormente estos estudiantes fueron sometidos a las tres fuentes de recolección de información y de esa manera mediante el análisis de los resultados se generaron los casos.

4.4 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Como fuentes de recolección de información utilizaremos: Entrevista semiestructurada, Observaciones, módulo de trabajo.

La entrevista semiestructurada determina de antemano cual es la información relevante que se quiere conseguir. Se hacen preguntas abiertas dando oportunidad a recibir más matices de la respuesta, permite ir entrelazando temas, pero requiere de una gran atención por parte del investigador para poder encauzar y estirar los temas. (Actitud de escucha). El objetivo de esta entrevista es identificar los conocimientos y las falencias que los estudiantes tienen acerca del objeto de estudio, para determinar la viabilidad de aplicación de nuestro proyecto.

La entrevista se va a distribuir en tres bloques, donde cada bloque tendrá aproximadamente 10 preguntas; en el primer bloque nuestro objetivo es conocer en el entrevistado el dominio que tiene sobre el manejo de programas matemáticos y los saberes previos acerca del concepto de derivada con preguntas "suaves" que disminuyan la presión que genera una entrevista. En él según y tercer bloque son preguntas un poco más complejas dejando a un lado lo introductorio, donde el entrevistado pueda dar evidencias sobre los conocimientos que tiene acerca del objeto de estudio.

De acuerdo a nuestro marco la Observación se realizara de una forma participativa, es decir, donde el investigador comparte más con los investigados, su contexto y experiencia para conocer directamente toda la información que poseen los sujetos de estudio sobre su propia realidad, es decir, desde el interior del mismo. Observaremos comportamientos, destrezas que los estudiantes tengan con las actividades propuestas (manejo de applet, visualización grafica) y la aplicabilidad que los estudiantes le den.

El trabajo escrito consiste en un conjunto de applet interactivos específicos para cada uno de los conceptos que son objeto de estudio, a partir de este se realizaran las observaciones descritas anteriormente.

4.5 TRABAJO DE CAMPO: CASO 1….CQASO2…

Para la selección de los casos se crearon unas categorías apriorísticas, a partir de los descriptores y direccionadas hacia la pregunta de investigación. Luego se realizó el proceso de codificación de acuerdo a lo respondido en la entrevista por los estudiantes. Los códigos se ubicaron en las categorías que le correspondían de acuerdo a los temas tratados.

A continuación se presentan los códigos y la ubicación de estos en sus respectivas categorías:

Códigos:

Pendiente, recta tangente, recta tangente, continuidad, función, relación, aproximaciones laterales, variaciones, tasa de variación media, tasa de variación instantánea derivable, Pendientes no indeterminadas, limites laterales, rango restringido, complemento de gráfica, acercamientos laterales, tendencias laterales.

Categorías y sus códigos:

- **Relaciones y funciones:** continuidad, función y relación, rango restringido, complemento de gráfica.
- **Pendientes:** pendiente
- **Diferencia entre recta tangente y recta secante:** recta secante y recta tangente
- **Tasa de variación media:** variaciones y tasa de variación media
- **Tasa de variación instantánea:** tasa de variación instantánea
- **Concepto de límite:** aproximaciones y acercamientos laterales.
- **Interpretación geométrica de tasa de variación media y tasa de variación instantánea:** tasa de variación media y tasa de variación instantánea
- **Condiciones para pasar de tasa de variación media a tasa de variación instantánea:** limites laterales, pendientes no indeterminadas**,** continuidad y ser derivable.
- **Concepto de derivada**

Teniendo en cuenta las categorías y los códigos se realizó el siguiente análisis de cada estudiante con cada una de las categorías:

Estudiante 1

Categoría 1: relaciones y funciones

Códigos: continuidad, función y relación

Establece las condiciones que debe cumplir una curva para ser función y por ende identifica en curvas cuales son funciones y cuales son relaciones, además entiende una función continua como aquella que no presenta asíntotas, picos etc.

Categoría 2: pendientes

Códigos: pendiente

Identifica correctamente las coordenadas de un punto, pero aplica de manera incorrecta la formula y por ende llega a resultados incorrectos, sin embargo identifica correctamente cuando una pendiente es negativa, positiva, cero o no existe.

Categoría 3: diferencia entre recta tangente y recta secante

Códigos: recta tangente y recta secante

Comprende gráficamente cuando una recta es tangente y cuando es secante y por ende las diferencia correctamente y las define correctamente.

Categoría 4: tasa de variación media

Códigos: variaciones y tasa de variación media y pendiente de una recta secante.

Entiende el concepto de variación como un cambio de una variable dependiente con respecto a otra independiente, define la tasa de variación media como: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ y además con la manipulación del applet llego a la conclusión de que la tasa de variación es la misma pendiente de la recta secante.

Categoría 5: tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación instantánea

Entiende la tasa de variación instantánea como una variación en un instante dado, pero no establece una relación con la tasa de variación media y reducción del intervalo.

Categoría 6: concepto de límite.

Códigos: Tendencias y acercamientos laterales.

Entiende correctamente los comportamientos en los alrededores de una función f(x) y los denomina como tendencias y acercamientos.

Categoría 7: interpretación geométrica de tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Aplica la fórmula de la tasa de variación media incorrectamente por ende no llega a la relación con la pendiente de la recta tangente. Además no le da una interpretación geométrica ni a la tasa de variación media ni a la tasa de variación instantánea.

Categoría 8: condiciones para pasar de tasa de variación media a tasa de variación instantánea.

Códigos: función continúa y derivable.

El estudiante identifica que con la reducción del intervalo la recta secante a la curva se va convirtiendo en una recta tangente, y plantea dos condiciones (continua y derivable) para el paso de tasa de variación media a tasa de variación instantánea pero sin ninguna clase de argumentos.

Categoría 9: concepto de derivada.

Códigos: no hay códigos

Para esta categoría el estudiante no plateo ninguna idea al respecto.

Estudiante 2

Categoría 1: relaciones y funciones

Códigos: continuidad, función, relación y rango restringido.

Se apoya gráficamente para diferenciar una función de una relación, además entiende una función continua como aquella que tiene un rango no restringido y que se puede hacer de un solo trazo sin levantar el lápiz.

Categoría 2: pendientes

Códigos: pendiente

Identifica correctamente las coordenadas de un punto, pero aplica de manera incorrecta la formula y por ende llega a resultados incorrectos, sin embargo identifica correctamente cuando una pendiente es negativa, positiva, cero y cuando no existe.

Categoría 3: diferencia entre recta tangente y recta secante

Códigos: recta tangente y recta secante

Comprende gráficamente cuando una recta es tangente y cuando es secante y por ende las diferencia correctamente, sin embrago se confunde al definir la recta tangente.

Categoría 4: tasa de variación media.

Códigos: variaciones y tasa de variación media y pendiente de una recta secante.

Entiende el concepto de variación como un cambio de una variable con respecto a otra, define la tasa de variación media tal y como está en el aporte de información y además con la manipulación del applet llego a la conclusión de que la tasa de variación es la misma pendiente de la recta secante.

Categoría 5: tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación instantánea

Entiende la tasa de variación instantánea como una variación en un punto o un instante concreto, pero no establece una relación con la tasa de variación media y reducción del intervalo.

Categoría 6: concepto de límite. .

Códigos: acercamientos y tendencias laterales.

Entiende correctamente los comportamientos en los alrededores de una función f(x) y los denomina como tendencias y acercamientos.

Categoría 7: interpretación geométrica de tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Aplica la fórmula de la tasa de variación media incorrectamente por ende no llega a la relación con la pendiente de la recta tangente. Además no le da una interpretación geométrica ni a la tasa de variación media ni a la tasa de variación instantánea.

Categoría 8: condiciones para pasar de tasa de variación media a tasa de variación instantánea.

Códigos: limites laterales y función continúa y pendiente no indeterminada.

El estudiante identifica que con la reducción del intervalo la recta secante a la curva se va convirtiendo en una recta tangente, y plantea dos condiciones (continua, limites laterales tendiendo a un mismo número y pendientes no indeterminadas) para el paso de tasa de variación media a tasa de variación instantánea pero sin ninguna clase de argumentos.

Categoría 9: concepto de derivada.

Códigos: no hay códigos

Para esta categoría el estudiante no plateo ninguna idea al respecto.

Estudiante #3

Categoría 1: relaciones y funciones.

Códigos: continuidad, función y relación

Establece las condiciones que debe cumplir una curva para ser función y por ende identifica en cuales son funciones y cuales son relaciones, además entiende una función continua como aquella donde los puntos existen y están unidos entre si etc.

Categoría 2: pendientes

Códigos: pendiente.

No muestra procedimientos o forma que utilizo para calcular la pendiente de una curva, realizó el cálculo de forma incorrecta, sin embargo identifica correctamente cuando una pendiente es negativa, positiva, pero tiene dificultades para identificar cuando es cero o cuando no existe.

Categoría 3: diferencia entre recta tangente y recta secante .

Códigos: recta tangente y recta secante

Define y diferencia de forma acertada el concepto de recta tangente y recta secante pero se confunde al identificarlas gráficamente.

Categoría 4: tasa de variación media .

Códigos: variaciones y tasa de variación media y pendiente de una recta secante.

Entiende el concepto de variación como un cambio, y define la tasa de variación media como la disminución y aumento en la variable, además con la manipulación del applet llego a la conclusión de que la tasa de variación es la misma pendiente de la recta secante.

Categoría 5: tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación instantánea

Entiende la tasa de variación instantánea como la misma tasa de variación media, además si la recta secante se toma en un punto se encuentra la instantánea

Categoría 6: concepto de límite.

Códigos: acercamientos laterales.

Entiende correctamente los comportamientos en los alrededores de una función f(x) y los denomina como acercamientos.

Categoría 7: interpretación geométrica de tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Aplica la fórmula de la tasa de variación media incorrectamente por ende no llega a la relación con la pendiente de la recta tangente. Además no le da una interpretación geométrica ni a la tasa de variación media ni a la tasa de variación instantánea.

Categoría 8: condiciones para pasar de tasa de variación media a tasa de variación instantánea.

Códigos: reducción de intervalo,

El estudiante no identifica, que con la reducción del intervalo la recta secante a la curva se va convirtiendo en una recta tangente, y no plantea ninguna condición para el paso de tasa de variación media a tasa de variación instantánea.

Categoría 9: concepto de derivada.

Códigos: no hay códigos

Para esta categoría el estudiante no plateo ninguna idea al respecto.

Estudiante 4

Categoría 1: relaciones y funciones

Códigos: continuidad, función.

Enuncia que una función no puede tener dos imágenes, y la define como un modelo para expresar comportamientos y entiende una función continua como aquella que no tiene cambios bruscos, sin embargo gráficamente no las diferencia

Categoría 2: pendientes

Códigos: pendiente.

Identifica correctamente las coordenadas de un punto, pero aplica de manera incorrecta la formula y por ende llega a resultados incorrectos, identifica correctamente cuando una pendiente es cero , cuando no existe pero posee dificultades para identificar cuando es negativa y positiva gráficamente.

Categoría 3: diferencia entre recta tangente y recta secante

Códigos: recta tangente y recta secante.

Comprende gráficamente cuando una recta es tangente y cuando es secante y por ende la diferencia correctamente, pero no tiene una definición clara del concepto de recta tangente y recta secante.

Categoría 4: tasa de variación media.

Códigos: variaciones, tasa de variación media y pendiente.

Entiende la variación como un cambio y define la TVM como una pendiente. (Falta argumentar y especificar más)

Categoría 5: tasa de variación instantánea.

Códigos: tasa de variación instantánea

El estudiante para esta categoría no muestra conocimiento alguno, pues no se evidencia ninguna idea referente al concepto de tasa de variación instantánea.

Categoría 6: concepto de límite.

Códigos: Tendencias laterales.

Entiende de forma errónea los comportamientos en los alrededores de una función f(x) y los denomina como tendencias.

Categoría 7: interpretación geométrica de tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Códigos: tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Aplica la fórmula de la tasa de variación media incorrectamente por ende no llega a la relación con la pendiente de la recta tangente. Además no le da una interpretación geométrica ni a la tasa de variación media ni a la tasa de variación instantánea.

Categoría 8: condiciones para pasar de tasa de variación media a tasa de variación instantánea.

Códigos: alteración de ángulos,

El estudiante identifica que con la reducción del intervalo la recta secante a la curva se va convirtiendo en una recta tangente, y plantea que para el paso de tasa de variación media a tasa de variación instantánea, la condición es : que se alteren los ángulos(pero sin ninguna clase de argumentos).

Categoría 9: concepto de derivada.

Códigos: no hay códigos

Para esta categoría el estudiante no plateo ninguna idea al respecto.

Partiendo de los resultados obtenidos en cada uno de los estudiantes para cada categoría, nos permitió ubicar a cada estudiante en un nivel de comprensión de acuerdo a los descriptores, obteniendo como resultado:

- Dos estudiantes en el nivel de compresión ingenua; con estos los cuáles vamos a formar un caso al que vamos a llamar Caso: BRAMON
- Dos estudiantes en el nivel de principiante; con los cuáles vamos a formar un caso al que vamos a llamar Caso: MAOS

Caso: BRAMON

Este caso hace parte de la comprensión ingenua, porque los estudiantes presentan un lenguaje muy coloquial raras ocasiones usan términos geométricos y matemáticos, carecen de argumentos para sustentar sus repuestas, presentan dificultades en el manejo y aplicaciones de fórmulas para realizar cálculos matemáticos, gráficamente identifican ciertos concepto pero presentan dificultades a la hora de definirlos, presentan concepciones de carácter muy intuitivo, tienen dominio en ciertas temáticas indispensable para el desarrollo del concepto de derivada pero al establecer relaciones fundamentales para llegar a la compresión del concepto de derivada esta se les torna algo difícil, lo que muestra falencias en algunas interpretaciones de los conceptos. Durante el desarrollo de la entrevista sus repuestas eran muy puntuales, cerradas y aunque se les realizaban relacionadas con el mismo tema para que argumentaran en su repuesta estas seguían siendo cerradas.

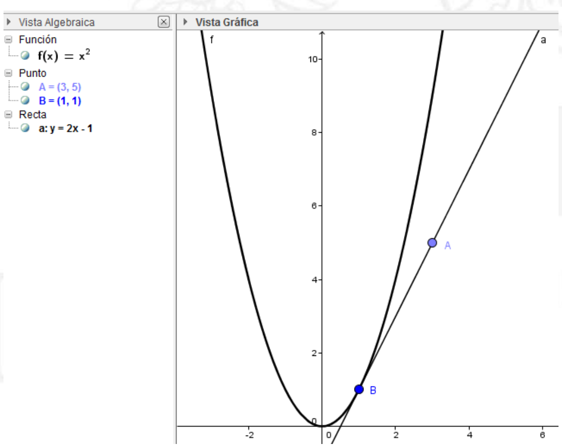
Evidencias:

Cuál es el valor de la pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones:

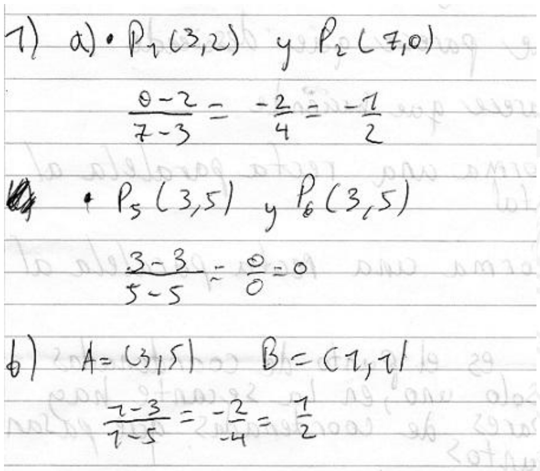
a. pasa por los puntos

- $P_1(3,2)$ y $P_2(7,0)$
- $P_5(3,5)$ y $P_6(3,5)$

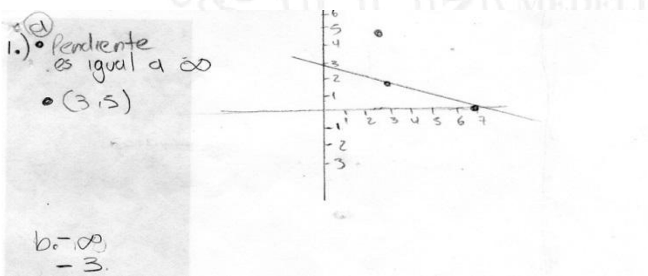
b. Pasa por los puntos A y B(usa la gráfica para identificarlos) :



ESTUDIANTE 1



ESTUDIANTE 2



De acuerdo con los puntos anteriores ¿Que entiendes por pendiente de una recta?

Estudiante #1: “*La pendiente de una recta es la que nos dice si la recta es perpendicular, es diagonal, horizontal etc.”*

Estudiante #2: *“La pendiente es la recta que toca a un solo punto de la gráfica****”***

¿Cuándo una función es continua?

Estudiante #1: *"Una función es continua en todo los puntos que pertenecen a esta"*

Estudiante #2: "*Cuando no tiene cambios bruscos"*

Encuentra la tasa de variación media del auto escolar.

ESTUDIANTE 1

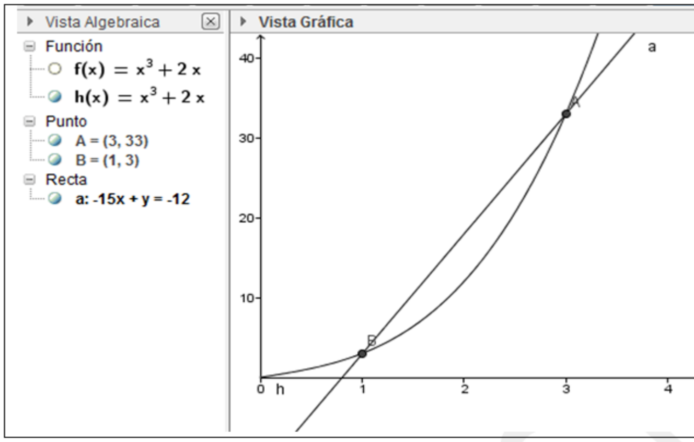
17) $\frac{3-33}{1-2} = \frac{-30}{-1} = 30$

ESTUDIANTE 2

$TV = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

15. $\frac{(33)-(3)}{(3)-(1)} = 15$

Encuentra la pendiente de la recta secante trazada a la curva (Gráfica#1).



Grafica #1

ESTUDIANTE 1

18) $\frac{33-3}{3-1} = \frac{30}{2} = 15$

ESTUDIANTE 2

16. 5.

Teniendo en cuenta la relación que en contrastes en el punto anterior, ¿Qué es la tasa de variación media?

Estudiante #1: *"Tasa de variación media es la disminución o aumento en la variable"*

Estudiante #2: *"La tasa de variación media es una pendiente"*

De acuerdo con el aporte de Información anterior, ¿encuentras alguna relación entre la tasa de variación instantánea y la tasa de variación media?

Estudiante #1: " *Si* ***"***

Estudiante #2: *" Si que las dos pueden tener comportamientos iguales, aproximándose a una pendiente"*

Caso: MAOS

Este caso está ubicado en el nivel de compresión principiante, porque pese a que los estudiantes presentan algunas de las falencias descritas en el caso anterior como: dificultades en el manejo y aplicaciones de fórmulas para realizar cálculos matemáticos, concepciones de carácter muy intuitivo, sin embargo se apoyan gráficamente, utilizan una mejor simbología matemática para describir sus concepciones, se acercan medianamente a los conceptos que son fundamentales para la comprensión de la derivada, logrando establecer de forma superficial relaciones para la existencia de la derivada

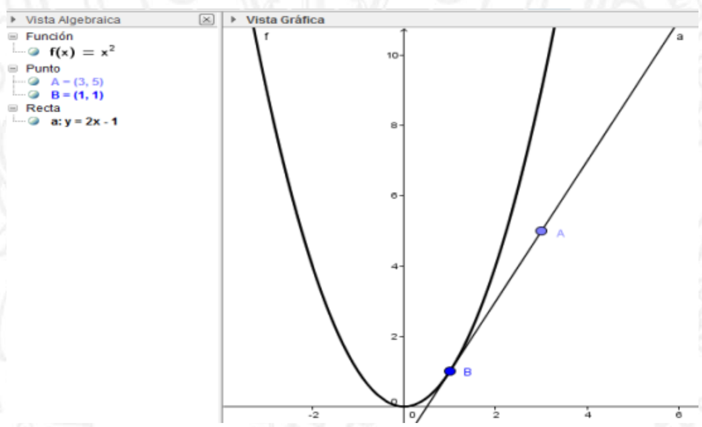
Evidencias:

Cuál es el valor de la pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones:

a. pasa por los puntos

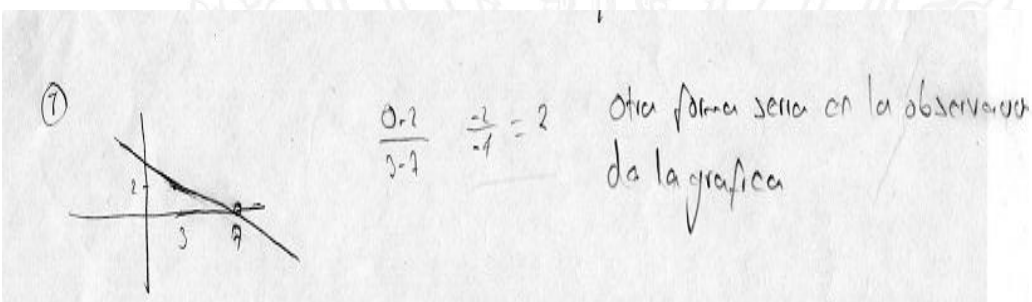
- $P_1(3,2)$ y $P_2(7,0)$
- $P_5(3,5)$ y $P_6(3,5)$

b. Pasa por los puntos A y B(usa la gráfica para identificarlos) :



Estudiante #3

Estudiante #4



- ***De acuerdo con los puntos anteriores ¿Que entiendes por pendiente de una recta?***

Estudiante #3: *"No me queda muy claro"*

Estudiante #4: *"Es la cantidad de verdades que corre una función en el eje y cuando en el eje x se recorre una unidad. También se puede definir como una recta tangente que pasa por un punto de una curva"*

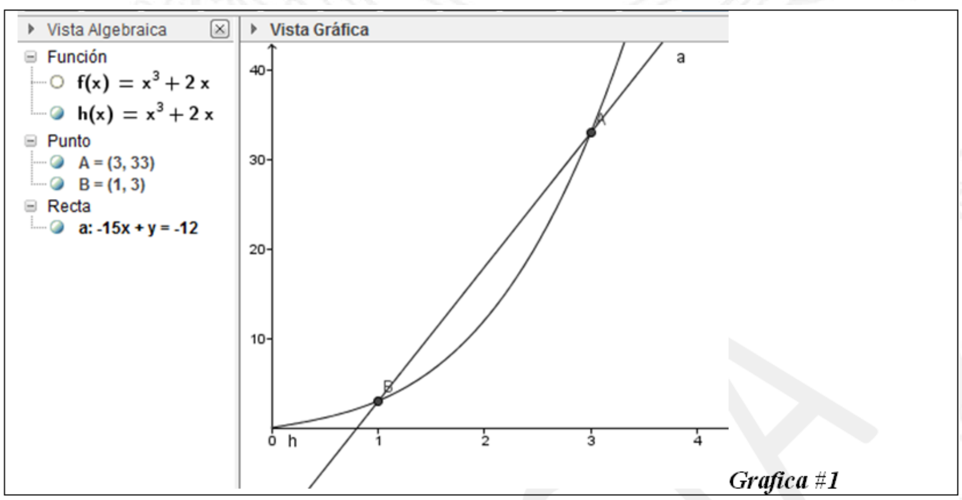
- ***¿Cuándo una función es continua?***

Estudiante #3: *“Cuando no presenta cambios bruscos en su forma”*

Estudiante #4: ***“****Cuando se pueden tomar todos los valores en la componente x y cuando trazamos la gráfica no hay necesidad de levantar el lápiz para dibujarla”*

Encuentra la tasa de variación media del auto escolar.

Encuentra la pendiente de la recta secante trazada a la curva (Gráfica#1).



Grafica #1

ESTUDIANTE 3

17)

$$TV = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow TV = \frac{33-3}{2-1} = -30$$

19)

$$m = -30.$$

ESTUDIANTE 4

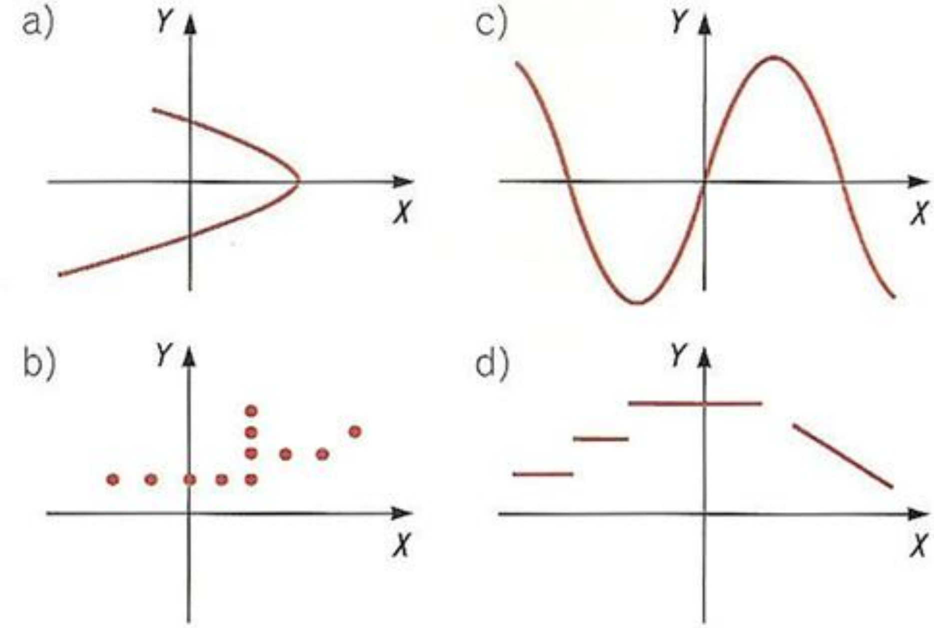
$$\frac{f(2)-f(7)}{2-7} = \frac{12-3}{7} = 9$$ la pendiente es de 9 y

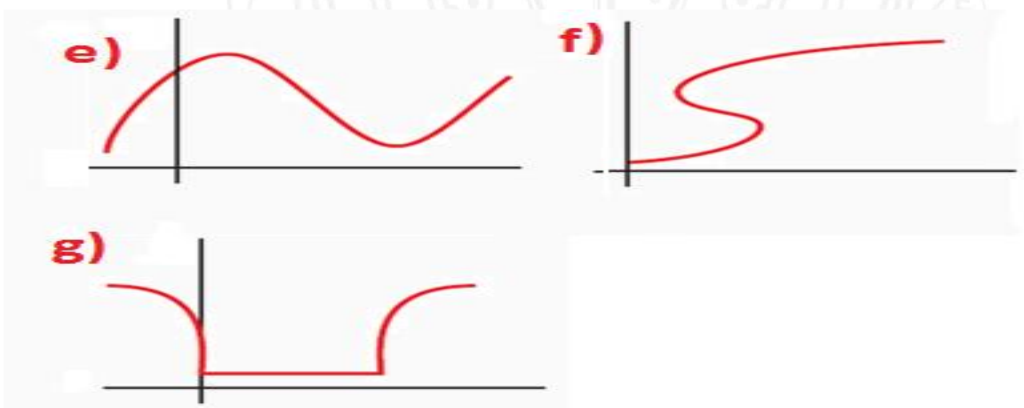
17) además es igual a la tasa de variación media

$$\frac{f(2)-f(7)}{2-7} = 9$$

Observa las siguientes curvas:

- **¿Cuáles son funciones y cuales son relaciones? ¿Cuál es la razón de tu elección?**



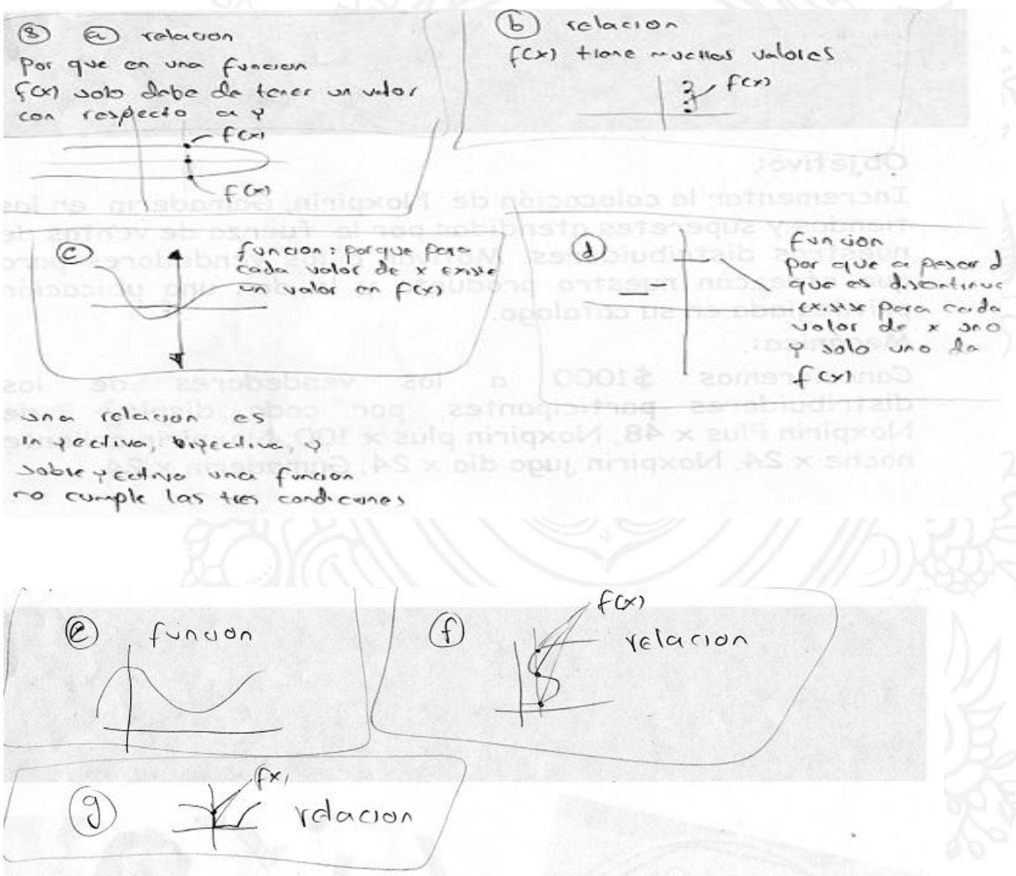


Estudiante #3:

a) Relación b) Relación c) función d) funcione) f)relación g)función h)función

"Para cada punto del dominio debe pertenecer uno y solo un punto del codominio para ser una función"

Estudiante #4:



- **Teniendo en cuenta la relación que en contrastes en el punto anterior, ¿Qué es la tasa de variación media?**

Estudiante #3: *"Es el cambio en* $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$*"*

Estudiante #4: *"pienso que son las unidades que varía el eje y cuando el eje x también varía; es un aumento o disminución dela función al variar la componente x"*

- **De acuerdo con el aporte de Información anterior, ¿encuentras alguna relación entre la tasa de variación instantánea y la tasa de variación media?**

  Estudiante #3: *" La tasa de variación instantánea se usa para un instante dado, la tasa de variación media se usa para un promedio?*

  Estudiante #4: *" la tasa de variación media se da en el cambio de un punto a otro y la instantánea es la variación en un unto un instante en concreto"*

- **¿Podrías establecer qué condiciones debe cumplir una curva para que sea posible transformar en ella la recta secante en tangente, si conocemos el punto de corte de la recta con la curva?**

  Estudiante #3: "*No, no podría tal vez que fuera derivable continua etc."*

Estudiante #4: *"Que sea continua y no tenga picos, que los limites laterales en los puntos tiendan al mismo punto ya que con esto las pendientes no son indeterminadas"*

5. CONCLUSIONES

5.1 ALCANCE DEL OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

En el desarrollo de la investigación se evidenció que la herramienta Geogebra se constituyó como un aspecto relevante en los procesos de enseñanza y comprensión del concepto de derivada, porque generó gran interés en los estudiantes al desarrollar el trabajo. La herramienta virtual permite concebir procesos dinámicos como el de la derivada, y establecer las relaciones fundamentales para llegar a la comprensión de este concepto.

Las simulaciones trabajadas en el programa geogebra, les permitió a los estudiantes desarrollar y comprender con más facilidad conceptos que por su carácter dinámico y la idea de movimiento que involucran, se hacen de dificultosa comprensión mediante procedimientos de escritura que por su propio carácter son estáticos; cabe anotar, que aunque ninguno de los estudiantes llego al nivel de maestría, se evidenció en los resultados obtenidos mediante la triangulación, que ellos mostraron progresos notables en la comprensión del concepto de derivada.

Frente a la consecución de nuestro objetivo de investigación, en el cual pretendíamos:

•Estructurar una propuesta metodológica y con actividades útiles para el uso del GeoGebra, que con base en los lineamientos del marco teórico enseñanza para la comprensión, resulten eficientes en el estudio del concepto de la derivada en el grado undécimo de educación media y primer año de universidad, con estudiantes que toman cursos regulares de cálculo diferencial.

• Ofrecer alternativas para que los docentes acompañen con mayor eficiencia la comprensión de conceptos matemáticos, de los problemas involucrados allí y la capacidad de los estudiantes para analizarlos y resolverlos.

5.2 SOBRE LA ENTREVISTA

La entrevista semiestructurada de carácter socrático, fue un instrumento de mucha importancia, pues con su estructura secuencial que permitía el desarrollo y construcción de los conceptos, se logró evidenciar progresos en la comprensión del concepto de derivada, por lo cual se constituyó no sólo como un instrumento de recolección de información, si no como una herramienta metodológica efectiva en la superación de algunas dificultades de comprensión.

Al tener en cuenta el decálogo para la elaboración de las preguntas y la pertinencia de ellas para detectar evidencias de comprensión mediante la utilización de los descriptores de nivel, se evidenció el estado inicial o de carácter ingenuo en la comprensión de la derivada que presentaban los estudiantes, y posteriormente fueron apareciendo signos de madurez conceptual como la utilización de un lenguaje más técnico, mejores capacidades en el análisis de situaciones propias del cálculo y el desarrollo de actitudes críticas y reflexivas frente al planteamiento de preguntas y la presentación de alternativas de solución.

5.3 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A nuestra pregunta de investigación: ¿Cómo implementar el marco teórico enseñanza para la comprensión, para mejorar la comprensión del concepto de derivada en un grupo de estudiantes regulares de pre cálculo, utilizando el Geogebra como una herramienta que facilita la visualización y el desarrollo de interacciones dinámicas entre los estudiantes y el concepto?; se le fue dando respuesta en el transcurso del trabajo de investigación, tanto desde las sesiones presenciales desarrolladas en la práctica como en la implementación de los instrumentos diseñados para tal fin. La manipulación de los applets permitió a los estudiantes comprender mejor los conceptos y las relaciones existentes entre ellos, además la utilización de ordenadores y un programa con entorno "amigable" como Geogebra generó un interés creciente en el trabajo con el concepto y la posibilidad de conocer sus estructuras y propiedades.

Finalmente pudimos constatar que la utilización de entornos virtuales en la presentación de conceptos matemáticos se convierte en una alternativa real para el trabajo del docente y los estudiantes en las aulas.

5.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En nuestro trabajo de investigación abordamos la comprensión del concepto de derivada, mediante la interacción y el análisis de entornos visuales y geométricos, quepermitenn un primer acercamiento intuitivo a la derivada y poniendo en marcha las fases iniciales de la propuesta de enseñanza para la comprensión como fue desarrollada en el proyecto Zero. Frente a esta perspectiva, quedan abiertas líneas de investigación así:

- Desarrollo del marco teórico

Implementación del marco teórico enseñanza para la comprensión como estrategia metodológica de docentes para mejorar la comprensión y aplicación del concepto de derivada en estudiantes.

- Abandono de la parte visual geométrica a lo formal y abstracto

Desarrollo del concepto de derivada dejando a un lado la parte visual geométrica y centrándose en la parte formal y abstracta que conlleva dicho concepto.

- Supere la visión intuitiva

Desarrollo del concepto de derivada superando la visión intuitiva y logrando una comprensión más formal de dicho concepto.

- Utilización de otras herramientas

Implementación de otras herramientas informáticas para mejorar la comprensión del concepto de derivada en estudiantes.

Desarrollo del concepto de derivada en la vida cotidiana utilizando como herramientas de simulación las TIC.

5.5 APORTE DEL TRABAJO EN EL CAMPO EDUCATIVO

Los aportes de nuestra investigación en el campo de la educación matemática y en la física, se concentran en la utilización de recursos tecnológicos (TIC) como herramientas didácticas y dinamizadoras de los procesos de enseñanza:

proponemos la exploración de applets, más que la construcción de los mismos, como excelente alternativa para movilizar procesos de comprensión.

La utilización de la entrevista semiestructurada como herramienta de enseñanza y aprendizaje, muestra evidentes ventajas, pues ésta se convierte en un diálogo inquisitivo donde el conocimiento sobre un concepto matemático se pone en discusión, se comparte y se cuestiona; lo cual permite mejorar, revaluar y transformar si es necesario las concepciones previas y no necesariamente correctas que se tengan sobre el concepto en cuestión.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

BIBLIOGRAFIA

- Cantoral, R., Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis LaGrange, al diseño de una situación didáctica. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 3 (003), 265-292.
- Sánchez, G., García, M., Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2), 267-296.
- Sánchez, G., García, M., Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. enseñanza de las ciencias, 24(1), 85–98.
- Salazar, C., Díaz, H., Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. Tecné, Episteme y Didaxis No. 26.
- ARIZA, A.; LLINARES, S. (2009) Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económico en estudiantes de

Facultad de Educación

bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*. 27(1), pp. 121-136. Universidad de Alicante.

- BALLARD, C.L., JOHNSON, M.F. (2004). Basic Math Skills and Performance in an Introductory Economics Class. The *Journal of Economic Education.* 35(1), pp.3-23
- BISHOP, A.J. (1989) Review of reseach on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol 11.1, pp. 7-16
- CONTRERAS, M. (2012) Apuntes de clase de Análisis del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria*. Universidad de Valencia.
- DA SILVA, T. (2010) El estudio de las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales con la ayuda del GeoGebra. *Trabajo de Fin de Máster*. Capítulo I, pp. 5-8. Universidad de Valencia.
- DEL GRANDE, J. (1990) Spatial sense, *Arithmetic Teacher*. Vol. 37.6, pp. 14-20.
- DOLORES, C. (2000) Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Capítulo V, pp. 155-181. (Actas de ICME-8 Sevilla) Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.

- FREUDENTHAL, H. (1983) El lenguaje algebraico. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Traducción de Luis Puig en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Capítulo 6. CINESTAV, 2001. México.
- GUTIÉRREZ, A. (1991) Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias de 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Capítulo I, PP. 44-47. Universidad de Valencia.