

**El concepto de función desde un experimento concreto y el programa Modellus: una  
propuesta para su comprensión**



**Trabajo presentado para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas y Física**

**DUVERNEY HUMBERTO ESPINAL ESPINOSA**

**CRISTIAN FERNANDO VELÁSQUEZ CORTÉS**

**Asesor**

**Magister RODRIGO ANTONIO RENDÓN RAMÍREZ**

**UNIVERSIDAD ANTIOQUIA MEDELLÍN**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES.**

**2014**



## **EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE UN EXPERIMENTO CONCRETO Y EL PROGRAMA MODELLUS: UNA PROPUESTA PARA SU COMPRENSIÓN**

**AUTORES**

*DUBERNEY HUMBERTO ESPINAL ESPINOSA,*

*duberney0790@yahoo.es*

*CRISTIAN FERNANDO VELÁSQUEZ CORTÉS,*

*kristes92@hotmail.com*

**ASESOR**

*Rodrigo Antonio Rendón Ramírez,*

*ro.rendon@gmail.com*

Centro de Práctica: INSTITUCIÓN EDUCATIVA CONCEJO DE MEDELLÍN

### **RESUMEN**

En nuestra experiencia con estudiantes del grado 11° de educación media, hemos podido constatar que varios de los conceptos matemáticos no han podido ser comprendidos en forma real y eficiente, ya que en el momento de aplicar dichos conceptos en el análisis de situaciones y en la solución de problemas que no necesariamente se han abordado previamente, se notan dificultades que evidencian una incipiente e incompleta comprensión de los mismos. Uno de ellos, y de gran relevancia, es el concepto de función, el cual se constituye en el motivo de nuestro trabajo de grado.



De acuerdo con el devenir histórico del concepto, éste no surge de las definiciones formales de los rigoristas, sino de aquellas interpretaciones de la naturaleza hechas por grandes personajes como Euler. Nuestra intencionalidad entonces, es utilizar entrevistas semiestructuradas y experimentos con situaciones concretas, para dotar el concepto de función, de un carácter dinámico que permita a los estudiantes acercarse intuitivamente a lo que representa una relación funcional, antes de pasar a su definición formal, la cual por su carácter abstracto, resulta más dificultoso para ellos, cuando se convierte en el primer acercamiento que tienen con el concepto.

Este informe consta de cinco capítulos donde se contextualiza el estudio planteando el problema, objetivos y pregunta de investigación; previo a un recorrido histórico por el concepto, trazamos una metodología para conseguir explicar la comprensión de un grupo de estudiantes de grado 11° frente al concepto de función, en el marco de la teoría de Pirie y Kieren para la comprensión de conceptos matemáticos, y finalmente presentamos análisis de resultados y conclusiones finales.

**PALABRAS CLAVE:**

Función, Comprensión Matemática, Experimentación, Modellus, Pirie y Kieren.

## **CONTENIDO.**

<b><i>CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZACIÓN.</i></b> .....	<b>8</b>
<b>1.1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>8</b>
<b>1.2 JUSTIFICACIÓN.</b> .....	<b>9</b>
<b>1.3 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA</b> .....	<b>11</b>
<b>1.4 OBJETIVOS.</b> .....	<b>15</b>
1.4.1 OBJETIVO GENERAL.....	15
1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	16
<b>1.5 MARCO TEÓRICO.</b> .....	<b>16</b>
1.5.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO. ....	21
<b>1.6 LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA.</b> .....	<b>22</b>
<b><i>CAPÍTULO 2: EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.</i></b> .....	<b>25</b>
<b>2.1 CONCEPCIONES DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN</b> .....	<b>25</b>
<b>2.2 DEFINICIÓN ACEPTADA</b> .....	<b>32</b>
<b>2.3 MECANISMO ELEGIDO.</b> .....	<b>32</b>
<b>2.4 OBSTÁCULOS EN LA COMPRESIÓN EL CONCEPTO</b> .....	<b>33</b>
<b>2.5 EL CONCEPTO EN EL ÁMBITO ESCOLAR COLOMBIANO</b> .....	<b>35</b>
<b><i>CAPÍTULO 3: LA ENTREVISTA.</i></b> .....	<b>44</b>
<b>3.1 LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA DE CARÁCTER SOCRÁTICO.</b> .....	<b>44</b>
<b>3.2 DISCURRIR DE LA ENTREVISTA.</b> .....	<b>45</b>
<b>3.3 EL FORMATO GUION ENTREVISTA.</b> .....	<b>46</b>
3.3.1 DESCRIPTORES: .....	47
<b>3.4 PREGUNTAS GUION ENTREVISTA.</b> .....	<b>49</b>

<b>3.5 MANIFESTACIÓN DEL CONCEPTO EN LA ENTREVISTA.....</b>	<b>61</b>
<b>3.6 EL GUION ENTREVISTA. ....</b>	<b>62</b>
<b><i>CAPÍTULO: 4 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA INFORMACIÓN.....</i></b>	<b>82</b>
<b>4.1 PARADIGMA CUALITATIVO.....</b>	<b>82</b>
4.1.2 CARACTERÍSTICAS DEL PARADIGMA CUALITATIVO. ....	83
<b>4.2 MÉTODO.....</b>	<b>84</b>
<b>4.3 DISEÑO Y SELECCIÓN DE LOS CASOS. ....</b>	<b>84</b>
4.3.1 ELECCIÓN DE LA MUESTRA. ....	84
4.3.2 EL EXPERIMENTO CONCRETO. ....	85
4.3.3 LA SIMULACIÓN.....	86
<b>4.4 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.....</b>	<b>89</b>
4.4.1 LA OBSERVACIÓN.....	89
4.4.2 LA ENTREVISTA. ....	90
4.4.3 EL EXPERIMENTO CONCRETO Y LA SIMULACIÓN.....	90
<b>4.5 ANÁLISIS DE LOS CASOS. ....</b>	<b>90</b>
4.5.1 CASO 1, Andrés. ....	92
4.5.2 CASO 2 Brenito.....	97
4.5.3 CASO 3, Pedro. ....	103
<b><i>CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES. ....</i></b>	<b>109</b>
<b>5.1 ALCANCE DEL OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>109</b>
<b>5.2 SOBRE LA ENTREVISTA.....</b>	<b>110</b>
<b>5.3 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>111</b>
<b>5.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>111</b>
<b>5.5 APOORTE DEL TRABAJO EN EL CAMPO EDUCATIVO.....</b>	<b>112</b>
<b><i>CAPÍTULO 6: ANEXOS. ....</i></b>	<b>113</b>
<b>6.1 ANEXOS PARTICIPACIONES EN EVENTOS. ....</b>	<b>113</b>



<b>6.2 ANEXO EVIDENCIA FOTOGRÁFICA.....</b>	<b>113</b>
<b><i>CAPÍTULO 7: BIBLIOGRAFÍA .....</i></b>	<b><i>114</i></b>
<b>7.1 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS. ....</b>	<b>114</b>
<b>7.2 REFERENCIAS CIBERGRAFÍA.....</b>	<b>116</b>

## TABLA DE ILUSTRACIONES

<b>Ilustración 1:</b> Comparación de la Concepción versus Comprensión Ruiz (1998) .....	10
<b>Ilustración 2:</b> Pregunta sacada de la fuente de datos de las pruebas saber del área de biología. ....	13
<b>Ilustración 3:</b> Pregunta sacada de la fuente de datos de las pruebas saber del área de biología. ....	14
<b>Ilustración 4:</b> Tomado de la base de las pruebas Saber.....	79
<b>Ilustración 5:</b> imagen de las conclusiones sacadas por Andrés sobre el experimento concreto.....	96
<b>Ilustración 6:</b> la dependencia e independencia de los valores obtenidos interpretados por Andrés en dos representaciones.....	96
<b>Ilustración 7:</b> Comparación Experimento concreto simulación por medio de el tipo de representación. ....	97
<b>Ilustración 8:</b> Reflexión que realiza Andrés sobre la gráfica. ....	97
<b>Ilustración 9:</b> factores – variables presentes en el experimento con respecto a Brenito. ....	101
<b>Ilustración 10:</b> Conclusiones del experimento caso Brenito. ....	101
<b>Ilustración 12:</b> Dependencia y/o independencia establecida por Brenito.....	102
<b>Ilustración 11:</b> Importancia del aspecto grafico – visual que muestra Brenito. ....	102
<b>Ilustración 13:</b> La importancia de la simulación por Brenito.....	103
<b>Ilustración 14:</b> Identificación de las variables que se presentaban tanto en la simulación como en el experimento hecho por Brenito. ....	103
<b>Ilustración 15:</b> conclusiones del Experimento realizadas por Pedro.....	106
<b>Ilustración 16:</b> Pedro define que es la función. ....	107
<b>Ilustración 17:</b> identificación de variables en la simulación por parte de Pedro.....	107
<b>Ilustración 18:</b> Conclusiones sobre la Simulación por parte de Pedro.....	108
<b>Ilustración 19:</b> Construcción del cohete.....	113
<b>Ilustración 20:</b> Los cohetes terminados.....	113
<b>Ilustración 21:</b> La animación presentada en Modellus.....	113

## **CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZACIÓN.**

### **1.1 INTRODUCCIÓN**

Este trabajo de investigación trabaja el concepto de función, el cual no es abordado desde una definición formal como la que se establecen en algunos libros de textos tanto escolares como universitarios, sino desde una definición más de carácter interdisciplinario por lo que es necesario tomar aspectos epistemológicos y tecnológicos del momento.

La literatura utilizada en las aulas escolares, pruebas Estatales desarrolladas en el país y las experiencias plasmadas en trabajos anteriores son el punto de partida para este trabajo y el planteamiento del problema, ya que lo encontrado permite hacer un alto y reflexionar sobre lo que usualmente se desarrolla en las aulas de clases donde se imparte un concepto de manera formal, volviéndose para los estudiantes procesos de memorización de algoritmos y repetición de los mismos.

Por lo anterior, el propósito del trabajo de investigación es el de establecer el concepto de función desde ambientes que no son específicamente del área de las matemáticas, mejorando la comprensión del concepto mediante la interpretación en contextos cotidianos y la teoría de Pirie y Kieren donde la descripción que se hace de cada uno de los casos en su evolución de la comprensión se realiza por los niveles que son la base. Además de tener de la mano la entrevista semiestructurada, el experimento concreto y la simulación un complemento dado sus características, con las cuales se permite determinar una serie de conclusiones por medio del uso de las TIC y la interdisciplinariedad inherente de los contextos cotidianos.

Como se ve, la cantidad de información se presenta algo amplia, pero de igual manera se tiene el apoyo de las Tic tanto para el desarrollo de la investigación, como para su clausura. Por tal motivo se hace uso del programa ATLAS.TI versión 7 para el análisis de los datos y redacción de los resultados.





Al final de la investigación se encuentra la concordancia de la teoría, programas y experimentos utilizados, ya que se obtiene una preponderancia a tener la parte visual (gráficas y tablas) como eje fundamental en la comprensión del concepto de función.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN.

Al abordar la literatura acerca del concepto de función y realizar una revisión se pudo encontrar algunos aspectos relevantes con respecto al estudio y la comprensión presente acerca del concepto de función lo cual nos abrió el campo tanto a literatura escolar, como a documentos académicos estatales. Es así como nos fundamentamos en la génesis del concepto, los Textos escolares, los Estándares Curriculares y lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio Nacional de educación colombiana MEN y las pruebas saber 11.

Cuando exploramos la definición epistemológica encontramos diversos trabajos entre los que podemos hacer referencia al trabajo a Ruiz Higuera (1998) donde hay una relevancia por la parte epistemológica mostrada cada vez que cita a Sierpiska quien plantea algunos aspectos presentados de forma resumida en la **Ilustración 1**, observando la importancia de la epistemología del concepto de función. Debido a lo anterior consideramos que el concepto de función como la mayoría de conceptos matemáticos además de tener en cuenta los procesos aritméticos y algebraicos propios del cálculo, debe realizar mayor énfasis en la parte histórica y epistemológica, concepciones que van desde la interpretación de lo cotidiano encaminado a determinar un origen y evolución del concepto.

Dificultades en la concepción del concepto.	Principios relevantes en la comprensión del concepto .
Los objetos variables son aceptados en las ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.	La identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea es un problema práctico para resolver.
Las magnitudes son entendidas cualitativamente diferentes de los números, la proporcionalidad es diferente de la igualdad.	Identificación de regularidades en las relaciones entre los cambios.
Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas .	Identificar los objetos que cambian en el estudio de los cambios.
Lo más importante de la matemática es proveerse de un cálculo poderoso que permita a los científicos resolver problemas.	Discriminación entre las variables dependiente e independiente.

**Ilustración 1: Comparación de la Concepción versus Comprensión Ruiz (1998)**

Otro punto importante en nuestra investigación se da desde lo experimental encaminado a la exploración, al descubrimiento e interpretación desde un experimento concreto y su simulación en un programa de computador. Ya que desde el contexto que rodea a los estudiantes podemos identificar que si bien hay una multitud de conceptos inmersos en muchos fenómenos físicos y problemas cotidianos, que no se logran explotar ni visualizar fácilmente si no que se sigue a luz de un ejemplo plasmado en un libro el cual se debe calcular sin considerar algunos aspectos presentes en la realidad. Espinosa, 1996. Citado por Hernández V. (2005) plantea que hay una importancia relevante a la hora en que un concepto puede ser visualizado ya que se permite llegar a un conocimiento de forma directa.

En la mayoría de las ocasiones, las matemáticas se enseñan y estudian desde la aplicación o el uso de reglas, métodos y procesos que llevan a una solución determina, guiada desde el tema en cuestión, donde el estudiante debe identificar símbolos matemáticos sin comprender la mayoría de las veces lo que hace, ni por qué lo hace o para qué lo hace, volviéndose un proceso mecanicista donde un resultado incorrecto producto de un concepto puntual como lo son los signos u otros, producen en muchas ocasiones sentimientos cercanos al fracaso y frustración. (Hernández V. 2005) debido a él no saber en qué, cómo y por qué se equivocó.



A la hora de plantear el uso de un programa de computador lo que se quiere es complementar el experimento concreto, donde se tiene en cuenta que Bishop (1989) citado por Hernández V. (2005) establece que “El poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental e incluso la comprensión de ideas algebraicas, que además se deben enfatizar en las representaciones visuales en todos los aspectos de las matemáticas escolares” (p 1 ).Por tanto establecemos así la importancia de la interacción del estudiante con material concreto, lo experimental y el uso de las tecnologías para facilitar la comprensión del concepto de función.

### **1.3 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA**

Los conceptos matemáticos han surgido de interpretaciones del comportamiento de la naturaleza, en especial aquellos que tienen un amplio uso como complemento o base para otros conceptos que están en nuestro contexto. Bajo esta idea analizamos aquellos conceptos que se presentan en el cálculo por su alto contenido de interpretación y aplicabilidad, donde la función, el límite y la derivada son algunos de los conceptos que encontramos que presentan una gran carga epistemológica y geométrica en sus definiciones y aparte de esto son utilizados frecuentemente en estudios superiores en un amplio número de carreras.

Cuando se analiza el concepto de función se explora la definición desde diferentes perspectivas. Es así como encontramos una definición antigua sobre el concepto de función de Euler (1755) citado por García, Ángel (2011) “Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las ultimas, las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas” (p.8) donde lo que se considera como “función” viene desde la interpretación del contexto y las cantidades que este presenta, más no parte de una consideración matemática formal, donde se utiliza una serie de símbolos, operaciones y demostraciones.

Luego, revisamos algunos libros guía o textos escolares, literatura colombiana que comprende a los textos guías de la educación básica y media en Colombia entre los cuales se identificaron algunos que presentaban elementos de importancia para el concepto de función y

otros que solo lo mencionan mediante una definición puntual o formal. A continuación presentamos algunas definiciones del concepto de función que carecen de la aplicación en el contexto, donde los términos tales como variable, cantidades, dependencia e independencia no toman el carácter interdisciplinario presente en la definición histórica hallada previamente, estas son:

- Una función, en los números  $\mathbf{R}$ , es una regla que hace corresponder a cada elemento de un subconjunto del conjunto de números reales un único número  $\mathbf{R}$ . (Buitrago et al.p.234)
- Correspondencia o regla que asocia a cada elemento  $\mathbf{x}$  de un conjunto  $\mathbf{X}$  con un único elemento y de otro conjunto  $\mathbf{Y}$ . (Stella et al.p.256)
- Dados dos subconjuntos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de números reales, una función  $\mathbf{f}$  de  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  es una correspondencia que asocia a cada número  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{A}$  un único número en  $\mathbf{B}$ .(Ardila Rebolledo et al.p.42)

Otro punto analizado y revisado con respecto al concepto de función fue frente a las capacidades o competencias que demandan en nuestro país las pruebas saber 11, anteriormente conocidas como pruebas ICFES.

Las pruebas Saber 11<sup>1</sup> en Colombia como en varios países son pruebas genéricas de evaluación a la educación, donde se determina los conocimientos adquiridos por parte de los estudiantes en las instituciones y por ende la educación en el país. En Colombia desde hace pocos años se empezó a evaluar por competencias, donde el ICFES es el estamento encargado en Colombia de realizarla y es una evaluación necesaria para acceder a un estudio superior en las Instituciones de Educación Superior. Adicional a esto apoyar el proceso de autoevaluación y mejoramiento de las instituciones educativas e Informar al estudiante sobre el estado de sus competencias.

---

<sup>1</sup> Las pruebas saber 11: son las pruebas de estado realizadas en todo el país a estudiantes del último grado de bachillerato, la cual entre otros aspectos evalúa las competencias en conocimientos de las matemáticas. Esta prueba es elaborada por Instituto colombiano de formación educación superior (ICFES)

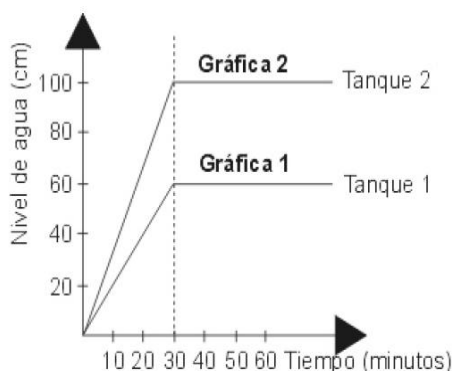
Teniendo en cuenta la importancia de esta evaluación analizamos como éstas pruebas están vinculadas con el concepto de función, encontrando que está presente en la parte de la interpretación de datos y gráficas presentes en los problemas que se plantean en las áreas de biología, ciencias sociales, y especialmente en matemáticas y física. Este descubrimiento fue producto del análisis de una base de datos de estas pruebas, donde se hallaron preguntas del áreas del núcleo común (matemáticas, física, biología y ciencias sociales) que corresponden a la interpretación de gráficas y datos producto de las relaciones de dependencia e independencia presentadas entre las variables, lo cual nos lleva a tomar un concepto de función que acoja a las áreas comunes sin discriminar ni centrarse netamente en matemáticas y física siendo más amplio.

A continuación ilustramos algunas preguntas donde encontramos que la función es más que una relación entre conjuntos de números reales.

### Ejemplo 1:

17. Dos tanques de forma cilíndrica están siendo llenados de tal manera que a cada tanque entra la misma cantidad de agua en cada minuto.

Las gráficas 1 y 2 muestran la variación del nivel del agua de cada tanque



¿La inclinación de cada grafica depende de la medida del radio de cada tanque?

- A. no, porque al utilizar un tanque de radio mayor el nivel del agua crece más rápidamente
- B. sí, porque al utilizar un tanque de radio menor, el nivel del agua crece más rápidamente
- C. sí, porque la inclinación de las rectas depende también del flujo constante de agua
- D. no, porque la inclinación de las rectas depende solamente de la altura de cada tanque

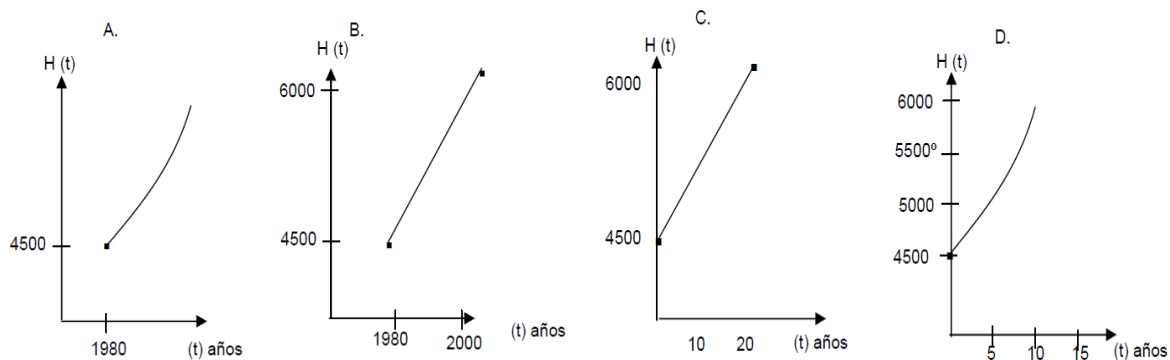
**Ilustración 2: Pregunta sacada de la fuente de datos de las pruebas saber del área de biología.**

### Ejemplo 2:

En 1980, 4.500 millones de habitantes poblaban la Tierra y se observaba un crecimiento de cerca del 2% anual, encontrándose que la expresión que proporcionaba la información del número de millones de habitantes en la Tierra después de  $t$ -años a partir de ese año era:

$$H(f) = 4.500e^{0,02t}$$

3. De las siguientes gráficas ¿cuál describe el crecimiento de la población en  $t$  años?



**Ilustración 3: Pregunta sacada de la fuente de datos de las pruebas saber del área de biología.**

Teniendo en cuenta que estas pruebas son basadas en los contenidos que son enseñados en todas las instituciones educativas colombianas, las cuales fundamentan sus planes de estudio en los estándares y lineamientos curriculares, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional por lo que los Estándares Curriculares y lineamientos Curriculares (MEN<sup>2</sup>) fueron tenidos en cuenta en la revisión ya que se analizó la propuesta que estos traen respecto al concepto de función, encontrando elementos que por tener alguna relación nos permitieran acercarnos al concepto encontrando que:

- “Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas” (MEN. Estándares Curriculares, p.87)
- “la función como dependencia y modelos de función” (MEN. Lineamientos Curriculares p.51)

<sup>2</sup> Ministerio de Educación Nacional



Así, tomamos estos elementos presentados por los documentos con respecto al concepto de función, permiten constatar la gran relevancia que tiene el concepto por lo que se identifica que la dirección que plantea el MEN al respecto del concepto es a una comprensión y aplicación del concepto diferente de cómo se presenta en algunos de los libros o textos escolares abordados. El MEN direcciona el concepto de función a una capacidad ligada a la identificación y modelación de funciones específicas y situaciones reales.

Teniendo en cuenta las fuentes revisadas previamente, presentamos un problema formulado frente al concepto, el cual consiste en:

El estudio del concepto de función se presenta de forma general, dando más relevancia a los procesos aritméticos y graficas en relación con ellas; lo que resta importancia a la fundamentación del concepto en diversas situaciones: como fenómenos físicos, químicos y biológicos, modelación de situaciones sociales y contextos cotidianos, que permitan a los estudiantes solucionar problemas.

De acuerdo a lo anterior planteamos una pregunta guía de investigación: ¿Cómo mejorar la comprensión del concepto de función para que este tome sentido en otras áreas del saber en estudiantes del grado once, a partir de un experimento concreto y su respectiva modelación en el simulador virtual Modellus? en esta pregunta consideramos que se abordan factores importantes como lo es la tecnología y la experimentación.

## **1.4 OBJETIVOS.**

### **1.4.1 OBJETIVO GENERAL.**

Construir un experimento concreto y su respectiva modelación virtual en el simulador Modellus, para mejorar la comprensión del concepto de función de acuerdo con los niveles del modelo de Piere y Kieren, en un grupo de estudiantes de grado undécimo.

#### **1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.**

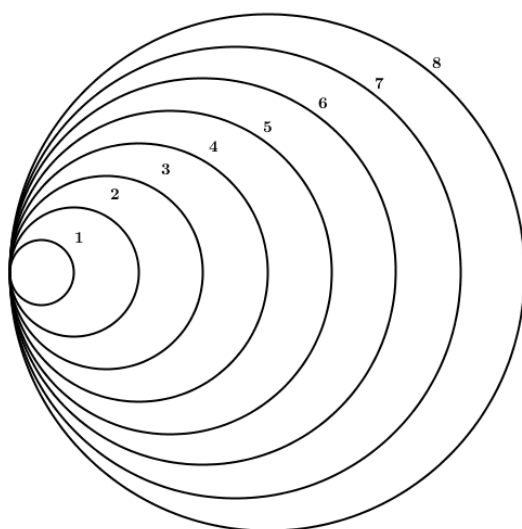
Justificar la importancia de las TIC en la modelación y análisis de experimentos concretos, como estrategia para mejorar la comprensión del concepto de función y generar habilidades en la selección de variables y en la interpretación de dependencias entre ellas.

#### **1.5 MARCO TEÓRICO.**

El marco utilizado en este trabajo tiene que ver con la “comprensión” donde se presenta un número amplio de teorías que están basadas con este término, a pesar de esto se ha escogido la teoría de Pirie y Kieren teniendo en cuenta las características que presenta y la relación con respecto al área de las matemáticas. Antes de proseguir con la explicación de esta teoría, presentaremos la definición sobre “comprensión” que fue adoptada desde el principio del trabajo la cual no es tomada como sinónimo de conocimiento, por lo que tomamos la definición dada por Pirie y Kieren (1989) citada por Meel (2003). “La comprensión matemática se puede definir como ascendente y estructurada pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia de niveles de sofisticación” (p.13).

Tenemos así que la teoría de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática es la implementa en este trabajo. En la teoría se presenta un modelo ascendente y estructurado conformado por 7 niveles (Meel, 2003). Al ser un modelo ascendente presenta un primer nivel el cual va ser la base del proceso y a partir del cual se comienza a avanzar tal y como lo ilustra la **Figura 1**.





- 1 *Primitive Knowing*
- 2 *Image Making*
- 3 *Image Having*
- 4 *Property Noticing*
- 5 *Formalising*
- 6 *Observing*
- 7 *Structuring*
- 8 *Inventising*

**Figura 1: Diagrama del modelo para la comprensión de Pirie y Kieren.**

El diagrama mostrado anteriormente es una ilustración de lo que Pirie y Kieren (1994) afirman sobre el modelo “In an effort to convey this visually, we have presented the model as a sequence of nested circles or layers, thus emphasising the fact that each layer contains all previous layers and is embedded in all succeeding layers” (p,172). Esta es una justificación desde las características de ser un modelo estructurado, ascendente y la complementariedad de los niveles mostrados y explicados a continuación.

### **Nivel 1: “Primitive Knowing” (Conocimientos Primitivos)**

El primer nivel considerado como un nivel básico el cual cuando se hace referencia a un nivel básico no se refieren a conocimientos débiles o elementales en matemáticas, sino todo lo contrario conocimientos que están bien estructurados con un lenguaje formal, reglas, axiomas, entre otros tal como lo expresan Pirie y Kieren (1994) “we noted that primitive knowing was the background mathematical understanding needed to build an understanding of some particular concept” (p,172). Además, Meel(2003) da a entender que el término de básico o primitivo hace

referencia al conjunto de conocimientos que se toman como punto de partida, la base del crecimiento de la comprensión del concepto.

### **Nivel 2: “Image Marking” (Creación de la imagen)**

Al continuar en el proceso nos encontramos con el segundo nivel de comprensión donde el estudiante realiza acciones mentales o físicas para obtener idea del concepto, haciendo uso del lenguaje del concepto con la acción y transformando éstas en imágenes mentales, al igual que realizar distinción con conocimientos anteriores (Meel, 2003). A lo anterior tenemos que Villa (2011) expresa que “La intención del trabajo en este estrato radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en su forma mental, verbal, escrita o física” (p,46 p,55).

### **Nivel 3: “Image Having” (Comprensión de la imagen)**

Lo concerniente al tercer nivel es donde se realiza el análisis de las imágenes mentales, relacionándolas con las distintas características y propiedades globales presentadas entre sí, lo cual lleva a diferenciarlas pero al mismo tiempo construir una imagen mental producto del conjunto de imágenes surgidas de una actividad (Meel, 2003). De esta forma se tiene que tal como lo expresan los autores “At the level of image having a person can use a mental construct about a topic without having to do the particular activities which brought it about” (Pirie & Kieren, 1994, p, 170) la construcción no se produce por medio de la actividad física si no de forma mental.

### **Nivel 4: “Property Noticing” (La observación de las propiedades)**

En el cuarto nivel encontramos las propiedades identificadas anteriormente a las cuales le sumaremos las internas, lo que posibilita encontrar vínculos, distinciones o posibles combinaciones entre imágenes, para así construir definiciones sobre el concepto (Mell, 2003). Es así como comienza a encontrar las relaciones de las imágenes creadas con respecto a las actividades realizadas “A fourth level or mode of understanding occurs when one can manipulate

or combine aspects of ones images to construct context specific, relevant properties” (Pirie & Kieren, 1994, p, 170). Al llegar a este punto Pirie y Kieren (1994) establecen de manera sucinta la forma en que los niveles siguen una estructura “At the following level of understanding, formalising. The person abstracts a method or common quantity from the previous image dependent know how which characterised her noticed properties” (Pirie &Kieren, 1994, pp, 170, 171).

Hay que aclarar que se tiene una diferencia entre **Image Having** y **Property Noticing**, ya que una cosa es la capacidad de observar las conexiones entre las imágenes y otra es la de explicar la forma en que se comprueba dicha conexión (Mell 2003).

#### **Nivel 5: “Formalising” (La formalización)**

El quinto nivel presenta el comienzo de construcciones o definiciones matemáticas complejas, Pirie y Kieren (1994) lo definen con respecto al trabajo hecho con una estudiante donde “...would be ready for, and capable of enunciating and appreciating a formal mathematical definition or algorithm –in this case for addition” (p, 171).Mell (2003) afirma que el uso de un lenguaje formal no es usual a pesar de que las características dadas deben de ser adecuadas matemáticamente.

#### **Nivel 6: “Observing” (La observación)**

El nivel 6 tenemos que “el estudiante posee la habilidad para considerar y consultar su propio razonamiento (aspecto metacognitivo) formal” (Villa, 2011). Presenta la capacidad de identificar, combinar y reflexionar sobre los procesos de formalización realizados tal como lo afirman Pirie y Kieren (1994) “A person who is formalising is also in a position to reflect on and coordinate such formal activity and express such coordinations as theorems” (p, 171). Para esta instancia es notorio el cambio producido en el lenguaje, el cual tiene un progreso debido a la formalización del concepto.

#### **Nivel 7: “Estructuración” (Structuring).**

Al tener concepciones formales y jerarquizadas se procede a determinar la veracidad de la misma, estableciéndose todo un sistema de axiomas (Mell, 2003). Es aquí donde se está en la capacidad de precisar sobre el concepto, por lo que se llega a producir pruebas sobre sus propiedades, acciones y relaciones concernientes al concepto.

*“Structuring occurs when one attempts to think about ones formal observations as a theory. This means that the person is aware of how a collection of theorems is inter-related and calls for justification or verification of statement through logical or meta-mathematical argument”* (Pirie & Kieren, 1994, p, 171).

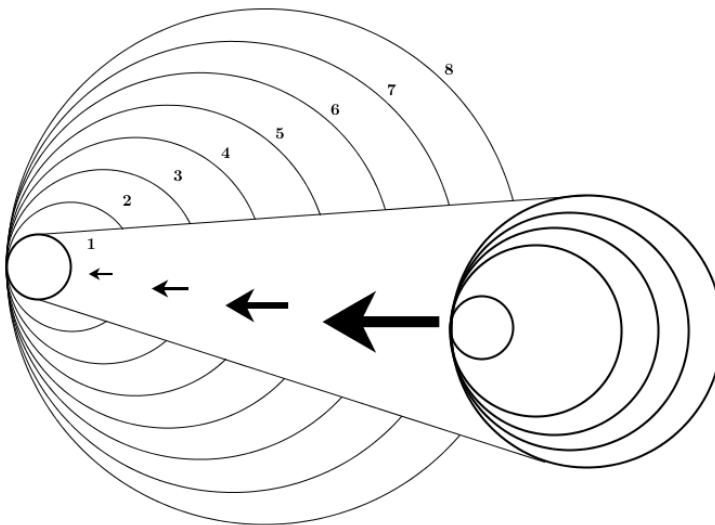
#### **Nivel 8: “Inventising” (invención)**

Y finalmente el modelo termina en un nivel superior catalogado el nivel de “*invención*” el cual es descrito por Pirie y Kieren así:

*“...the outermost level of the eight in our model we call the level of *inventising*. Within a given topic a person at this level has a full structured understanding and may therefore be able to break away from the preconceptions which brought about this understanding and create new questions which might grown into a totally new concept”* (p, 171).

Lo podemos interpretar como el nivel de experto donde surgen nuevas ideas, para dar pasó a un nuevo concepto.

Al culminar todo la ascensión en el proceso de comprensión de manera parcial o total del concepto, proporciona que este sea la base para un nuevo concepto, es decir, el Primitive Knowing de un siguiente concepto ilustrado en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**



**Figura 2:** Diagrama sobre el carácter FRACTAL del modelo para la comprensión de Pirie y Kieren.

### 1.5.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO.

Una de las características por las cuales se utilizó la teoría de Pirie y Kieren fue la mencionada anteriormente (**Figura 2**), además, se presentan algunas otras características que hacen más dinámico el modelo.

- a) **La Fractalidad:** El carácter fractal del modelo establece que el centro del modelo presenta la capacidad de estar conformado por modelos cercanos a la totalidad por lo que se recalca la importancia de la información que contiene el primer nivel (Mell, 2003). Es así, como se rectifica las cualidades de los conocimientos manejados en este primer nivel para comenzar a crecer en la comprensión en este modelo.
  
- b) **El Foldin Back:** En español es también conocido como redoblado, el cual es definido como el proceso que cada sujeto realiza a medida que asciende por cada nivel y necesita retornar a un nivel anterior debido a que no encuentra una solución de manera inmediata. Es quizás la característica que permite el dinamismo del modelo según Mell (2003). El proceso de ir atrás en un nivel interior se puede producir en cualquier nivel y siempre tiene la misma finalidad la cual corresponde a tomar información puntual, necesaria para la comprensión de un concepto y seguir

avanzando a los niveles exteriores, adicional a esto es de iniciativa de cada sujeto tal como lo expresan Pirie y Kieren (1994) “This returned- to, inner level activity, however, is not identical to the original inner level actions; it is now informed and shaped by outer level interest and understanding” (p, 173). La razón es que esta se hace de manera más consiente surgida de una necesidad.

- c) **Los límites de necesidad:** son fronteras que se presentan dentro del modelo las cuales consisten de delimitar ciertas zonas con el propósito de expresar los puntos donde no hay necesidad de retornar o devolverse a comprensiones internas generadoras de ideas externas, por lo que Pirie y Kieren (1994) expresan como “We simply point to the fact that one does not need to be constantly aware of inner levels of understanding” (p, 173).

Estos límites de necesidad se encuentran ubicados entre los niveles 2 y 3, los niveles 4 y 5, y el tercero se encuentra ubicado entre los niveles 6 y 7.

## **1.6 LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA.**

La entrevista es un instrumento utilizado tanto para investigación de tipo cuantitativo como para las de tipo cualitativo ajustándose al proceso que se lleva en la investigación. Para nuestro caso vamos a utilizar la entrevista no como una aplicación de un cuestionario de algún contexto o tema en particular sino más bien como la interacción entre dos personas de forma espontánea y flexible (Hernández, Fernández & Baptista 2010).

Entre las entrevistas, tenemos las entrevistas estructuradas, entrevistas semiestructuradas y entrevistas abiertas. La entrevista aplicada es la catalogada como entrevista semiestructurada, donde se tiene un guion con el que se va a desarrollar la entrevista tal como se hace en la entrevista estructurada, pero con la diferencia que no es un derrotero absoluto de la entrevista. A diferencia de la estructurada, tenemos que la semiestructurada permite al entrevistador traer preguntas que no se tienen en el guion y realizarlas para obtener mayor información y precisión sobre el tema o concepto que se está hablando (Hernández et al., 2010). Las preguntas no

predeterminadas, son la característica general, que es la que permite la flexibilidad del discurso de la persona que está siendo entrevistada, teniendo como resultado lo que sabe, o cree saber sobre algo.

La posibilidad de que la entrevista semiestructurada se ajuste al tipo de estudio realizado, es decir se adecua a los participantes, el contexto y el lenguaje que son considerados por Hernández et al., (2010) como algunos elementos que son esenciales de acuerdo con Rogers y Bouney (2005) y Willing (2008).

La capacidad de comunicar un conocimiento mediante el dialogo es un ejercicio que va desde la forma en que se hace una pregunta hasta el tipo de pregunta. Son aspectos que se deben tener en cuenta ya que la forma en que se dice una palabra o se realiza una pregunta, dará la posibilidad de interpretar y dar una respuesta por parte del entrevistado. Es así como el entrevistador debe tener ciertas aptitudes como actitudes para realizar y dirigir la entrevista, además de presentarse en el guion una serie de preguntas que permiten que el acto de la entrevista sea más ameno y las respuestas sean más naturales, estableciéndose más como una plática que no como un interrogatorio.

Para que la entrevista se tome más como una plática tenemos sugerencias sobre el tipo de preguntas usadas en las investigaciones cualitativa donde Hernández et al (2010) traen a Grinnell, Williams y Unrau (2009) con sus sugerencias de las preguntas a realizar en la entrevista.

Tenemos como primero las **preguntas generales** que “parten de planteamientos globales para dirigirse al tema que interesa al entrevistador” (Hernández et al., 2010, p 419) donde las preguntas son abiertas y más dirigidas a opiniones percepciones del entrevistado. Adicional, son propias de cualquier tipo de entrevista o investigación. Mientras que las **preguntas de estructura o estructurales** son más dirigidas a algo en particular como lo son un concepto o situación donde está inmerso la persona entrevistada.

Queda establecido que en la entrevista hay preguntas globales y particulares, pero ¿qué pasa si no se consiguen gran información con estas preguntas debido a la comprensión que se



realiza de las mismas? Es allí cuando tenemos **preguntas para ejemplificar** las cuales permiten al entrevistado expresar su comprensión mediante una analogía o ejemplo, el cual es pedido previamente. Pero los ejemplos podrían ser un aporte donde el entrevistado aún no tiene mucha claridad, saliéndose un poco de la intención del estudio, por lo que es necesario traerlo nuevamente por medio de las preguntas de contraste, donde “al entrevistado se le cuestiona sobre similitudes y diferencias respecto a símbolos o tópicos...” (Hernández et al., 2010, p, 420). Estas sugerencias sobre las preguntas que tiene una entrevista de tipo cualitativa no son las únicas. Pero si tienen ciertos aspectos que hay que tener en cuenta como lo son las opiniones, conocimientos y sentimientos propios del entrevistado.



## CAPÍTULO 2: EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

En este capítulo trata el concepto de función considerando su evolución en las matemáticas a través de la historia, rescatando aspectos contextuales que han dado lugar al concepto y a la relevancia del mismo en diferentes etapas del constructo del conocimiento matemático a través de la historia del hombre.

El capítulo es apoyado de diferentes fuentes como libros, monografías y artículos de revista; tales como Dubinsky y G Harel (1992), Higuera (1998), Campillo H. (1998) respectivamente, además de sitios web, que nos permiten reconocer el concepto desde todas las perspectivas donde se fundamenta nuestro trabajo y por el cual se encamina nuestro objetivo, la comprensión del concepto de función en el ámbito escolar.

### 2.1 CONCEPCIONES DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Vamos a empezar desde la época de los babilonios; cuando se hace referencia a tablas con diferentes codificaciones que inducían a la concepción del concepto, tablas con información de regularidades observadas en aquella época referente distintos eventos inmersos en su cotidianidad, en la naturaleza. Tablas similares a las tablas de valores utilizadas hoy en día por nuestros estudiantes para una función  $f(x)$  Ruiz H. (1998). Estas tablas no hacen alusión a una función en particular ni mucho menos a una expresión matemática formal, por lo que son un punto de partida para nuestro objetivo de comprensión de función. Es así como desde la definición que da Euler (1755) citado por García (2011) donde se expresa que “Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas, las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas”<sup>3</sup>. Se comienza a buscar sobre la evolución del concepto antes y después de esta definición encontrando datos

---

<sup>3</sup><http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo1.htm>. Monografía presentada al seminario Historia de la Matemática como requisito para optar por el título de licenciado en Matemática/UNIVERSIDAD DE PANAMÁ/CENTRO REGIONAL UNIVERITARIO DE VERAGUAS/FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS/ESCUELA DE MATEMÁTICA/2011



interesantes que no tienen que ver necesariamente con una definición formal, es aquí donde cada concepto comienza a tomar sentido para la investigación, desde la historia.

Concepción de la función que surge en el siglo XVIII a partir de los estudios de Jean Bernoulli, Leonhard Euler, Nicolás Condorcet Joseph y L. Lagrange. Pues como menciona Pedersen (1974) citado por Ruiz H. (1998) “los babilónicos poseyeron un auténtico instinto de funcionalidad, ya que la función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos y esto si está presente en las tablas de los babilonios” (p 107), vemos entonces como desde la época de los babilonios el concepto función apuntaba a la comprensión de situaciones de variación y regularidades. Al tiempo, los griegos de gran trabajo en la construcción del conocimiento humano; al respecto del concepto de función entraban en grandes dilemas por convicciones fundamentadas en la idea de número y magnitud, por lo que la idea de función en los griegos era abordada desde nociones de cambio y relación variables.

Basado en lo anterior, también hubo varios aspectos de carácter ideológico y filosófico planteados por grandes pensadores como Aristóteles, Euclides, Pitágoras, Zenón entre otros que indujeron el concepto de función a una especie de estancamiento, ya que se pensaba en las concepciones de inconmensurabilidad y proporcionalidad. Algunos autores sin embargo consideran que esto permitió avanzar la comprensión del concepto de función.

Pasamos a la Edad Media, una época relevante para el concepto de función ya que se concibe la función desde la física, específicamente en la cinemática. Donde la observación de fenómenos hacía referencia al cambio y la variación, elemento importante para el concepto. Es importante destacar además que para esta época gracias a los avances de los árabes en las matemáticas, se logra hablar ya de álgebra y trigonometría por separado, lo que impulsaría la notación de la función que se trabajaría más adelante.

Para los periodos de los siglos XIV, XVI y XVII, el concepto de función toma varias directrices; ya que “se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre “variable” de una función e “incógnita” de una ecuación” (p 490) tal como lo afirma Ruiz, (1998) citado por Farfán & García



(2005), que significaría la estructuración de la noción de función. Además en éste periodo se produce una concepción del concepto de función a partir de la idea de dependencia funcional desde los trabajos en física que describían claramente cambios físicos en las concepciones de velocidad y aceleración, trabajos como los de Johannes Kepler y Galileo Galilei. (Campillo, 1998).

Entre los siglos XVIII y XIX el concepto de función pasaría a ser un elemento relevante en la evolución de las matemáticas y la física desde el análisis de fenómenos físicos, donde la función entra a ser un regulador de la modelización del fenómeno.

Se retomara los estudios de Newton del método de las fluxiones y Leibniz sobre las ideas infinitesimalistas; es decir la función desde el análisis matemático con la participación de diferentes matemáticos y físicos de la época. Jean Bernoulli por ejemplo, para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, que conduce pronto al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica, como expresa Ruiz (1998) citada por Farfán et al (2005). Leonhard Euler evoluciona la notación de la función, a través de la estructuración del cálculo de donde surge el análisis matemático para el estudio de procesos infinitos; además de Nicolás Condorcet Joseph y L. Lagrange.

En éste periodo también debemos de resaltar los trabajos de G. L. Dirichlet, Bernard Riemann y Karl Weierstrass, quienes aportaron considerablemente la definición de función tal y como la conocemos hoy en día, la cual se convirtió en la base de la terminología de los libros de texto. Concibieron también la formula por primera vez del concepto moderno de función  $y = f(x)$  de una variable independiente en un intervalo  $a < x < b$ ; complementada con la introducción de los espacios métricos y la topología, que determinan las propiedades de una función y establecen la dependencia de una estructura de conjunto sobre la cual se define con las variables que toma. Se concibió en este punto los conceptos de dominio y rango de una función, no bastando con ello ampliaron y profundizaron al respecto de la teoría moderna de funciones, sobre variable compleja.

Siglos XX y XXI, época actual donde la matemática está bastante consolidada, se considera el concepto de función desde definiciones que hacen referencia a unos valores “X” y “Y” en los cuales hay una correspondencia, donde tenemos que Farfán et al (2005) introduce el uso pleno y la exploración minuciosa del concepto en la noción general de función; donde ya se ha reconocido que “El concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad” desde Spivak (1978) citado por Farfán et al (2005) pág. 493. Pero sin duda la definición más actual surge cuando se introduce el concepto o idea de conjunto y es allí donde las BOURBAKI establecen que “Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto” García (2011). Definición que instaurada en la mayoría de libros de texto de análisis matemático de la actualidad.

Hablamos entonces de unos Antecedentes del concepto función que resumimos en el **Cuadro 1.**

Génesis del concepto de función – Línea del tiempo		
Época	Protagonistas	Concepción del Concepto
Antigüedad	Unas de las Primeras civilizaciones: Griegos y Babilonios	Griegos: Estudiaron el cambio y el movimiento buscando regularidades, relacionaron incógnitas y variables.  Babilonios lo pensaron desde en el movimiento de los astros, estableciendo una relación entre diferentes objetos.
Edad Media	Galileo Galilei entre otros...	Las mayores investigaciones y preocupaciones giraban alrededor del estudio de fenómenos físicos que estuvieran sujetos

		<p>al cambio, como el movimiento de los planetas.</p> <p>Más tarde aparece el concepto de cantidad variable al estudiar estos fenómenos de forma cuantitativa.</p>
Siglo XIV	Nicolás Oresme Thomas B.	<p>Aparecen unas nociones preliminares al respecto del concepto de función.</p> <p>Especialmente cuando se empieza a estudiar la velocidad y el tiempo respecto al movimiento. Aquí se utilizó unos ejes coordenados parecidos a los sistemas de coordenadas que se utilizan hoy con el plano cartesiano.</p> <p>Una primera noción que se da en este tiempo fue que se acercaba al concepto fue:</p> <p>“Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento” Oresme.</p>
Siglo XVI-XVII	René Descartes Isaac Newton Gottfried Leibniz	<p>Se empiezan a reconocer curvas por medio de ecuaciones, se introduce así la dependencia entre dos cantidades variables.</p>

		Se acepta la relación entre variables, esto desde el comienzo ya del cálculo.
Siglo XVIII	Jean Bernoulli Leonhard Euler Nicolás Condorcet Joseph L. Lagrange.	<p>Se fundamenta la primera definición muy acertada por aparte de L. Euler (1755) citado por García, Ángel (2011) “Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las ultimas, las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas”</p> <p>Pero ya desde el cálculo se hacen trabajos en una definición analítica del concepto de función inicialmente por Jean Bernoulli, la cual en este mismo tiempo seria modificada por L. Euler quien además cambia la notación de Bernoulli <math>\langle\langle fx \rangle\rangle</math> por <math>f(x)</math>.</p>
Siglo XIX	G. L. Dirichlet Bernard Riemann Karl Weierstrass	<p>Dirichlet a partir del trabajo de su maestro Fourie en 1837 establece la definición de función tal y como la conocemos hoy en día, la cual se convirtió en la base de la terminología de los libros de texto.</p> <p>En 1829, Dirichlet, llega a formular por primera vez el concepto moderno de función <math>y = f(x)</math> de una variable independiente en un intervalo <math>a &lt; x &lt; b</math>.</p>

		<p>Pero aun esta definición le faltaba otra modificación que llega con la introducción de los espacios métricos y la topología, donde establece que las propiedades de una función dependen de la estructura del conjunto sobre la cual se define y las variables que toma; en este punto ya se referían a los conceptos de dominio y rango de una función.</p> <p>Ya Rieman y Wejerstrass ampliaron y profundizaron al respecto de la teoría moderna de funciones, sobre variable compleja.</p>
<p>Siglo XX y XXI</p>	<p>Édouard Goursat H. León Lebesgue M. René Frechet Grupo de Matemáticos llamado: NICOLÁS BOURBAKI</p>	<p>En este punto se reconoce todo el trabajo realizado al respecto del concepto de función por estos matemáticos, donde a partir de la teoría de análisis realizan definiciones donde en general se habla de unos valores X e Y de una correspondencia entre ambos.</p> <p>Pero sin duda la definición más actual surge cuando se introduce el concepto o idea de conjunto y es allí donde las BOURBAKI establecen que “Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un</p>

		<p>elemento del segundo conjunto”</p> <p>Definición que instaurada en la mayoría de libros de texto de análisis matemático.</p>
--	--	---

**Cuadro 1: Resumen tomado desde García (2011) y Farfán & García (2005).**

## **2.2 DEFINICIÓN ACEPTADA**

Definición antigua sobre el concepto de función de Euler (1755) citado por García (2011) “Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las ultimas, las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas” (p,8) donde lo que se considera como “función” viene desde la interpretación del contexto y las cantidades que este presenta, más no parte de una consideración matemática formal, donde se utiliza una serie de símbolos, operaciones y demostraciones.

## **2.3 MECANISMO ELEGIDO**

En este punto determinamos los elementos que encaminarían los estudiantes a la comprensión del concepto de función; iniciando desde la estructuración de la entrevista hasta la construcción del experimento concreto y la simulación, enfocados a la fundamentación visual geométrica del concepto de función, además de la definición aceptada para alcanzar la comprensión del concepto de función.

En la entrevista, a partir del análisis de gráficas, tablas y situaciones, determinamos elementos que apoyados en el carácter socrático de la entrevista llevara al estudiante a identificar desde lo visual el concepto de función, partiendo fundamentalmente desde la relación y correspondencia de variables, donde la identificación de ejes coordenados permitiera establecer dependencia o independencia entre variable. Además orientamos cuestiones que permitieran a los estudiantes extraer conclusiones al respecto de los análisis previos para encaminar la comprensión del concepto de función.

En los experimentos, concreto y simulación, consideramos aspectos prácticos, que apoyados en la visualización de cambios y variaciones, permitieran al estudiante identificar y



reconocer la relación de variables al establecer la correspondencia entre las mismas, ya fuera desde la independencia o dependencia. Específicamente en el experimento concreto buscamos que el estudiante a partir de la construcción de un cohete analizara el concepto de función desde variables como la presión y la cantidad de agua respecto del tiempo de vuelo y la distancia o altura alcanzada por el cohete, es decir, que el estudiante fuera consciente de variables dependientes e independientes. Ahora, para la simulación en Modellus, buscamos establecer fundamentalmente una relación entre el experimento real y la simulación respecto de posibilidades frente al análisis mismo del experimento, de tal forma que los estudiantes pudieran reconocer las ventajas frente al uso de la simulación y lograr que se acercaran más a la comprensión del concepto de función, pues ya en este punto tenían la posibilidad de verificar ideas e hipótesis respecto de las variaciones y correspondencia entre variables.

## **2.4 OBSTÁCULOS EN LA COMPRENSIÓN EL CONCEPTO**

En este apartado trataremos aspectos importantes como lo son las dificultades u obstáculos en la concepción del concepto de función, es decir que factores han influenciado en la comprensión del concepto; lo que nos permitirá hacer un mejor estudio al respecto de los elementos fundamentales en la comprensión del mismo.

Algunos obstáculos son los que plantea Sierpinska citada por Ruiz (1998) donde presenta qué:

- “1. Los objetos variables son aceptados en ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.
2. Las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números, la proporcionalidad es diferente de la igualdad.
3. Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas.
4. Lo más importante de las matemáticas es proveerse de un Cálculo poderoso que permita a los científicos resolver problemas.

5. Los objetos geométricos son tomados implícitamente como un todo que contiene en él mismo sus longitudes, su área o su volumen.” (p, 62)

Podemos notar que se hace referencia a cuestiones que tienen que ver específicamente a como se trabaja el concepto y las convicciones que hay frente al mismo, lo que establece un punto de partida para plantear consideraciones metodológicas que nos permitan acercarnos a la comprensión del concepto.

Al retomar a Sierpinska citada por Ruiz (1998), se encuentra que plantea parámetros generales para el trabajo con el concepto de función que van desde la motivación, los contextos, la comprensión de nociones sobre el concepto, representaciones, definiciones y metodologías; elementos que al ser tenidos en cuenta permitirán acercarnos a la comprensión del concepto.

Identificamos además que en la comprensión del concepto es importante identificar y reconocer la evolución del concepto de función a través de la historia, para entender como se ha entendido el concepto de las diferentes etapas de la matemática, es decir que debemos considerar como se han generado obstáculos en la comprensión del concepto. Como establece Ruiz (1998) que la concepción estática del concepto referente a ideas primitivas sobre las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables, a la disociación existente entre magnitudes y números, la razón o proporción que no se conciba como una igualdad, la homogeneidad en las proporciones que impidió reconocer las dependencias entre variables, la concepción geométrica de las variables al respecto del producto de segmentos que no se podía concebir, la concepción algebraica donde solo se permitía el análisis de relaciones descritas por el álgebra y por último la concepción mecánica de curva donde las curvas no eran consideradas gráficos funcionales.

Desde lo anterior identificamos y reconocemos aspectos relevantes en la comprensión del concepto de función, lo que nos permitió orientar más idóneamente nuestro proyecto de investigación con miras a alcanzar el objetivo trazado.

## 2.5 EL CONCEPTO EN EL ÁMBITO ESCOLAR COLOMBIANO

Es importante reconocer el concepto de función desde el contexto Colombiano. En este sentido fundamentamos una revisión a textos escolares referentes al concepto de función, ya que esto nos permitirá identificar la concepción de algunos autores del concepto y en esa dirección la concepción de los estudiantes frente a estas definiciones; es decir que podremos acercarnos a la fenómenos didácticos de la enseñanza que se vinculan en la transposición de saberes (Laborde (1988) citado por Ruiz (1998)). Lo que abrirá caminos para entender de cierta forma como ven los estudiantes el concepto de función y así posibilitar herramientas que lleven a la comprensión del concepto de función y pueda ser retomado en la situaciones de la vida práctica.

En la revisión se abordaron algunos textos donde se hablara o definiera el concepto de función y nos permitirán entonces acercarnos a considerar como se está abordando el concepto y que relevancia estaba teniendo en las matemáticas tanto desde lo conceptual, como lo teórico-práctico en las aulas de clase. Frente a lo anterior se presenta el siguiente **Cuadro 2** que sintetiza lo que encontramos:

Textos Escolares			
Editorial	Nombre y grado	Concepción del concepto	Observaciones: diferencias y similitudes respecto a la propuesta “El concepto de función y la importancia de su comprensión para interpretar las relaciones entre variables que se presentan en la vida”
Grupo editorial Norma, 2004 p 400. Autor	Espiral 8: serie de matemáticas para secundaria y	Una función, en los números $R$ , es una regla que hace corresponder a	Se empieza por plantear un logro “comprender el concepto de función; identificar las

<p>Alberto Castro Buitrago y otros</p>	<p>media (con estándares y competencias)</p>	<p>cada elemento de un subconjunto del conjunto de números reales un único número R. p-234</p>	<p>funciones como modelos para describir cambios en un fenómeno”; luego a través de varios ejemplos establecen el fundamento del concepto, haciendo referencia a las relaciones de dependencia entre variables; hasta llegar a la definición del concepto.</p> <p>Es importante notar que en el texto, constantemente se hace una relación entre la parte matemática y ejemplos de la aplicación del concepto de función.</p> <p>Además, se hace referencia a la importancia de la representación gráfica en el plano coordenado de una función para la comprensión del concepto.</p> <p>El texto contiene un aparte histórico donde se hace referencia a la evolución del concepto p-273; es importante</p>
--	--	--	--

			<p>en la medida que permite entender la importancia del concepto de función en la matemática.</p>
<p>Escuelas del Futuro, S. A 2007. P-348 Autor, Luz Stella Alfonzo y Luisa Fernanda Nivia</p>	<p>Matemáticas. Estándares básicos de calidad. Educación básica secundaria 8°</p>	<p>Correspondencia o regla que asocia a cada elemento <math>x</math> de un conjunto <math>X</math> con un único elemento <math>y</math> de otro conjunto <math>Y</math>. P- 256</p>	<p>Se plantea la comprensión del concepto desde un ejemplo: la relación entre la edad y la estatura, estableciendo que son magnitudes variables y que existe una dependencia entre ambas, la estatura depende de la edad.</p> <p>Luego se hace una relación entre el concepto de función y la parte matemática del mismo, simbología, notación y pronunciación; seguido se explica el dominio y rango de una función.</p> <p>Finalmente se hace referencia al plano cartesiano (se plantea una definición) para expresar gráficamente una función.</p> <p>Seguido en el texto se propone</p>

			<p>aplicar lo aprendido; se establecen varios ejemplos donde habría que identificar la variable dependiente e independiente, además de otros ejemplos desde lo gráfico y lo numérico (tablas) para identificar cuando es o no función.</p>
<p>Voluntad S. A. 2006. P-344: II (símbolos). Autor, Rodríguez Sánchez, Luisa Carolina y otros</p>	<p>Símbolos 9. Matemática aplicada.  Estándares básicos de competencias. MEN, mayo 2003</p>	<p>Dados dos conjuntos A y B, una función es un correspondencia que asigna a cada elemento de <math>x \in A</math> exactamente un único elemento de <math>y \in B</math>; donde A es el dominio y B es el recorrido. P-72</p>	<p>El texto empieza a trabajar la función de forma general; inicialmente lo relaciona con la física, con el movimiento; con la mecánica: cinemática, dinámica y estática. Platea varios ejemplos para explicar la relación de las funciones con la mecánica.</p> <p>Luego se plantea una definición de la función de forma general. Antes es importante notar el logro plantado para alcanzar “modelar situaciones de variancia con funciones polinómicas”.</p> <p>Se hace referencia a la</p>

			<p>notación, a la escritura o simbología de las funciones, además se establece el diagrama sagital y el plano cartesiano como herramientas para expresar de forma gráfica una función, donde se empieza a hablar del dominio y el rango de la función.</p> <p>Concepción de función: maquina o proceso de la función. Podemos concebir la máquina de una función como un aparato que produce exactamente un valor de salida (rango) por cada valor de entrada (dominio).</p> <p>Por último es importante notar que se plantean varios ejemplos para entender la función desde la relación con aspectos de la vida cotidiana.</p>
<p>Grupo editorial Norma, 2005 p 342. Autor, Ardila</p>	<p>Espiral 11: serie de matemáticas para secundaria y media (con</p>	<p>Dados dos subconjuntos A y B de números reales, una función <math>f</math> de A en B es una correspondencia</p>	<p>Se presentan las funciones inicialmente desde un ejemplo a partir de una situación cotidiana “el gasto de teléfono</p>

<p>Rebolledo, Raquel y otros</p>	<p>estándares y competencias)</p>	<p>que asocia a cada número <math>x</math> en A un único número <math>y</math> en B. P-42</p>	<p>en una cuenta de servicios”.</p> <p>Es importante notar que el texto presenta antes de seguir con el estudio de las funciones unos estándares, respecto al pensamiento espacial y el pensamiento variacional, además plantea desarrollo de unos procesos que se alcanzaran en la medida que se comprendan las funciones. P-41</p> <p>Seguido en el texto se plantea un logro para alcanzar “identificar una función y hallar su dominio; reconocer cuando dos funciones son iguales”.</p> <p>Es importante notar que en el texto se establece: “la importancia del concepto de función en las matemáticas y la utilidad del mismo en la explicación, descripción y predicción del comportamiento</p>
--------------------------------------	---------------------------------------	---	---



			<p>de los fenómenos del mundo real”.</p> <p>Por último se hace referencia al plano cartesiano para expresar una función y se plantean varios ejemplos para explicar las funciones.</p>
<p>Editorial Marín Vieco Ltda. Uros editores. Autor, Julio Alberto Uribe Cálad</p>	<p>Matemática experimental 11</p>	<p>Definición de función: dados dos conjuntos no vacíos A y B, una <b>FUNCIÓN</b> f de A en B, de notada por <math>f: A \rightarrow B</math>.</p> <p>Es una relación que cumple las dos relaciones siguientes:</p> <p>TODO de A tiene una imagen en B CADA elemento de A TIENE UNA Y SOLO UNA imagen de B. P-138</p>	<p>El texto empieza el tema de funciones por el concepto de función, pero no lo define como tal si no que comienza por hablar del concepto en términos generales; reconoce la importancia del concepto pues establece que “sin lugar a dudas el concepto de función es uno de los más importantes en el estudio de la matemática. Numerosas situaciones de la vida diaria, matemática y de otras ciencias están ligadas con la palabra función”. P-137. Además plantea varios ejemplos donde propone evidenciar el concepto, algunos de ellos es:</p>

		<p>El salario de una persona está en FUNCIÓN (depende) del número de horas trabajadas</p> <p>La distancia que recorre un cuerpo está en función(depende) del tiempo</p> <p>En el texto se proponen varios ejemplos, no solo en palabras escritas sino que también a partir de lo gráfico, inicialmente con el diagrama sagital y luego en el plano cartesiano, en los que se puede identificar el concepto de función.</p> <p>Para entender el concepto de función en el texto se propone: no solo como una asociación o relación muy particular entre los elementos de dos conjuntos, sino como algo que modifica que transforma.</p> <p>Luego se sigue en el texto con el estudio de las funciones, desde la notación pasando por el álgebra de las funciones y</p>
--	--	---

			en general el estudio particular de cada función y de sus elementos.
--	--	--	--

**Cuadro 2: Resumen de lo encontrado en algunos libros de textos.**

## **CAPÍTULO 3: LA ENTREVISTA.**

### **3.1 LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA DE CARÁCTER SOCRÁTICO.**

Cuando hablamos de carácter Socrático no se está relacionado con una postura filosófica como tal, ni mucho menos refiriendo al personaje en pro de defensa o agravio por lo acontecido en 399 a.C cuando fue juzgado y condenado a muerte bajo la ingesta de un veneno llamado Cicuta en la ciudad de Atenas. Su juzgamiento fue producido por la acusación de “no creer en la religión del Estado y de corromper a la juventud enseñándole a no reconocer los dioses de la República” (de la Torre 2003 p, 100).

Dejando de lado los aspectos filosóficos, nos centramos en el carácter Socrático que se presenta en la entrevista en relación con las preguntas. El carácter Socrático afirma Campillo (1998): “...obliga a prever las funciones de las respuestas, a entorpecer en algunos momentos para provocar la readaptación del concepto personal que tiene el alumno” (p.95). Con esta intención es que nuestra postura frente a al carácter como tal, proviene de la forma en que Sócrates preguntaba y con la intención que lo hacía.

El propósito de Sócrates, tal como se perfila en los Diálogos de Platón, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, sea este la inmortalidad del alma o la belleza o la virtud, pero no como un resultado de la enseñanza de Sócrates sino por propia reflexión.(de la Torre, 2003, p.100)

En la construcción de la entrevista se tuvo en cuenta el trabajo de Jurado & Londoño (2005) donde se realizó un análisis al dialogo presente entre Sócrates y un esclavo de Menon que respondía al nombre de Anito. De dicho dialogo que está presente en libro de la República surge como producto lo que los autores han catalogado como el **Decálogo de la entrevista socrática**, el cual consiste en diez condiciones o características sobre las cuales se deben crear las preguntas para que estas presenten la intencionalidad que Sócrates tenia al preguntar. A continuación se presenta las consideraciones que conforman el decálogo de la entrevista socrática.

1. La intencionalidad de la entrevista
2. El lenguaje
3. Los conceptos básicos
4. Las experiencias previas del entrevistado
5. El diálogo inquisitivo
6. La movilización del pensamiento
7. El aporte de información
8. La problematización con las ideas
9. El paso por los tres momentos
10. La red de relaciones

### **3.2 DISCURRIR DE LA ENTREVISTA.**

La entrevista está compuesta por tres bloques de preguntas donde se encuentran consignadas las preguntas que van desde los conocimientos previos hasta preguntas relacionadas con el concepto de función y sus elementos.

Antes de comenzar a formular las preguntas del **bloque uno**, se realizan preguntas que nos permiten generar el ambiente de plática plena y fluida de forma natural. Estas preguntas son óptimas para bajar la tensión por parte del o los entrevistados a la hora de dar una declaración, ya que de una u otra forma los casos estudiados presentaron nervios al inicio de las preguntas por la inquietud que surge en cada uno de ellos, manifestando que “por no saber sobre las preguntas que se les va a realizar se produce algo de ansiedad o susto a pesar de saber el tema” Estas preguntas están ubicadas justamente al inicio de la entrevista más no hacen parte de guion, por lo tanto son generadoras de un ambiente de discusión más no aportan información al estudio. Las preguntas iniciales son más para preparar y ajustar el entorno, equipos como filmadoras y otros equipos de grabación.

Luego tenemos lo concerniente a las preguntas sobre los conocimientos previos que conforman el **bloque uno**, entre las cuales tenemos las preguntas número 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 12,13, 23. Estas preguntas nos permiten indagar por aquellos conocimientos que son la base para

la comprensión del nuevo conocimiento, donde se encuentra la información sobre temas y conceptos tales como dominio, rango, plano cartesiano, entre otros.

Las preguntas del **bloque dos** están ligadas con el objeto matemático en el cual se centra el estudio. Por tal motivo se enfatiza en aspectos como lo son la dependencia e independencia entre variables y así pasar a interpretar una relación como una función. Las preguntas que constituyen este bloque son las preguntas del número 6, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 26, 27.

Y finalmente el **bloque 3** son preguntas que están encaminadas a concluir, por lo que son aquellas preguntas que permiten dar cuenta de la interpretación, reflexión y comprensión del concepto. Estas preguntas son las de las numerales 19, 20, 22, 24, 25, 28, 29, 30.

El bloque uno se presenta en la primer parte de la entrevista mientras que las del bloque tres se encontrarían al final del guion, pero las preguntas se encuentran mezcladas a pesar que conforman bloques diferentes, producto del carácter Socrático presente en la entrevista el cual ya fue explicado anteriormente.

### **3.3EL FORMATO GUION ENTREVISTA.**

A pesar de que la entrevista semiestructurada no se limita a un formato, se tiene una guía de preguntas establecidas que van a dar partida y un orden a la entrevista teniendo en cuenta que estas no son absolutas y que en el transcurso de la entrevista pueden surgir preguntas que no estaban predeterminadas en el guion. Las ilustraciones que se utilizaron en el guion fueron construcciones propias realizadas él en programa Geogebra, programa de acceso gratuito, además del uso del Modellus 4.1 el cual es otro programa de acceso gratuito, con la aplicación de simulaciones y animaciones referentes a algunas preguntas.

Las preguntas fueron formuladas teniendo en cuenta los niveles de comprensión en el modelo de Pirie y Kieren, donde se establecieron algunas características que llamaremos descriptores, los cuales se presentan a continuación.

### 3.3.1 DESCRIPTORES:

Como ya se dijo anteriormente se plantean los descriptores con los cuales se podrá evidenciar la comprensión en cada nivel; hay que aclarar que desarrollaremos los primeros cuatro niveles ya que nuestra pretensión es de dar pautas sobre cómo comprenden el concepto mediante una visualización analítica geométrica.

#### Nivel 1: Primitive Knowing

En este caso vamos a tener como conocimientos primitivos a un conjunto de conocimientos que son utilizados en la solución de problemas, los cuales son **Concepto Relación, Operaciones básicas, hablamos de suma, resta, multiplicación y división**, que son propios del sujeto, pero con lo cual no se quiere referir a que sean con un contenido bajo en matemáticas si no al contrario; son conocimiento fundamentales en este primer nivel.

Estos descriptores son:

- Encuentra las variables y los datos presentes en un problema dado.
- Logra establecer relaciones entre los variables y los datos presentados en problemas.
- Relaciona las variables y los datos de un problema y expresa a partir de las operaciones básicas posibles soluciones del problema.
- No logra relacionar los valores, ni los datos inmersos en un problema dado.

#### Nivel 2: Image Making

Para este nivel se forman imágenes mentales, las cuales no son ilustraciones puramente dichas, si no que en cambio servirán para transmitir información y realizar distinción frente algunos de los elementos anteriormente adquiridos en el primer nivel para resolver un problema dado. En este nivel consideramos algunos elementos como son **Relación Operaciones básicas, Plano cartesiano (dependencia-independencia)** en los se fundamenta de cierta forma el nivel de comprensión.

Por lo que tenemos los siguientes descriptores.

- Relacionan y representa valores de un problema en el plano cartesiano.
- Interpreta graficas que representan situaciones cotidianas.
- Identifica en una gráfica sus diferentes características.
- No comprende la relación dependencia o independencia entre las variables del problema.

### **Nivel 3: Image Having**

En este nivel nos encontramos que se debe establecer una imagen teniendo en cuenta un proceso, donde los elementos que se tenían presentes para resolver un problema comienzan a unificarse. Unos conocimientos importantes en este nivel son **Relaciones, Plano cartesiano, variación y cambio.**

Ahora tenemos los descriptores para este nivel.

- Establece las condiciones de dependencia o independencia entre los ejes X e Y
- Encuentra las condiciones que relacionan las situaciones presentes en fenómeno.
- Propone hipótesis para explicar las circunstancias que generan las variaciones en un fenómeno.
- No logra entender las circunstancias que producen las variaciones inmersas en un fenómeno.

### **Nivel 4: Property Noticing**

Con todo un conjunto de imágenes creadas, se comienzan a establecer conexiones que permiten la visualización de condiciones, características que se presentan entre ellas, ya hablamos de un nivel más avanzado en la comprensión del concepto. En la misma línea consideramos algunos conocimientos que se deben manejar como el **Plano cartesiano, variación-cambio, propiedades de la aritmética, variable-constante, propiedades algebra;** de tal forma que se pueda responder a los siguientes descriptores:



- Representa gráficamente una expresión algebraica dada.
- Diferencia y caracteriza las relaciones entre variables que corresponde a funciones.
- Calcula y verifica la información obtenida de los experimentos para determinar las condiciones que generan una función.

### 3.4 PREGUNTAS GUIÓN ENTREVISTA.

Las preguntas que componen el guión de la entrevista serán mostradas a continuación, estas preguntas fueron desarrolladas después de algunas sugerencias y comentarios planteadas a los entrevistados, con el objetivo que se diera un dialogo fluido.

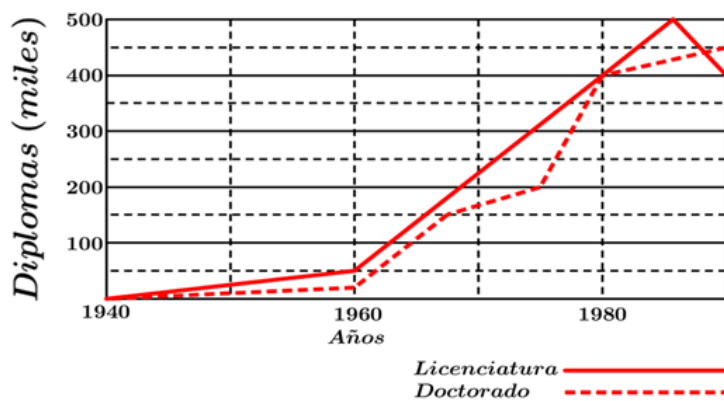
1. En tu salón van a hacer una colecta para recoger los fondos necesarios para una salida recreativa. De 45 estudiantes, sólo 15 tienen dinero para aportar a la causa, lo cual equivale a 50 mil pesos de los 200 mil que cuesta la salida. Si la condición para realizar la actividad es que asistan todos, ¿qué harías para recolectar el resto del dinero?, ¿qué se tendría en cuenta?
2. Se tiene dos lazos de 600 m cada uno. Uno de los lazos tiene unas franjas de color rojo cada 4 metros y el otro cada 5 metros, ¿Cuáles franjas coinciden y cuántas son?
3. En una lotería local, el premio de 42 millones de pesos se lo ganó un hombre que quiere repartir con su esposa este dinero. Si la esposa recibe la mitad de la parte con la que se queda su esposo ¿cuánto le correspondió a cada uno?
4. Si en una operación con números Reales tenemos sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciaciones y radicaciones, ¿en qué orden realizarías dichas operaciones?
5. Soluciona el siguiente ejercicio.

$$7 + 2 \cdot 12 - 45 - 3 \cdot 56 \div 7 - 9 - 48 - 6 + 45 + 6 \cdot 84 + 2 \div 2$$

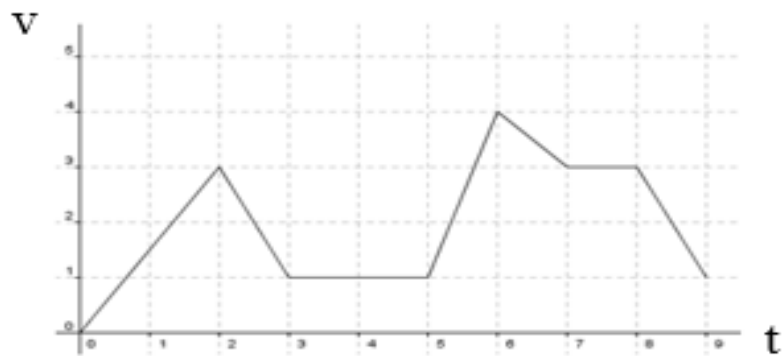
¿Por qué elegiste este orden para realizar la operación?, ¿cambiaría la respuesta si empiezas a solucionarla en otro orden?

6. De las siguientes curvas ¿cuáles corresponden a una relación y por qué?

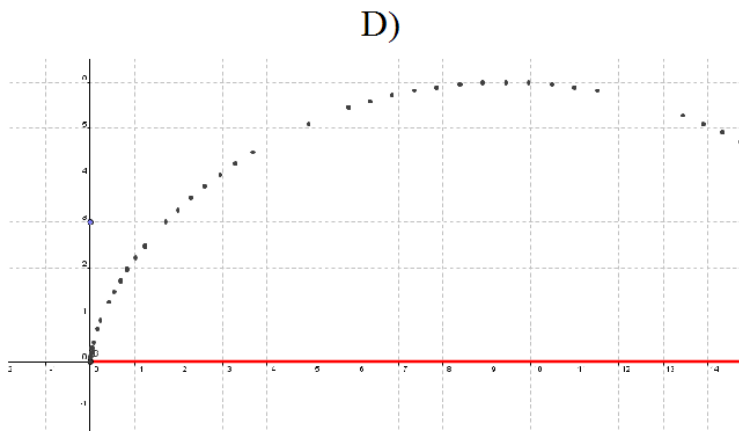
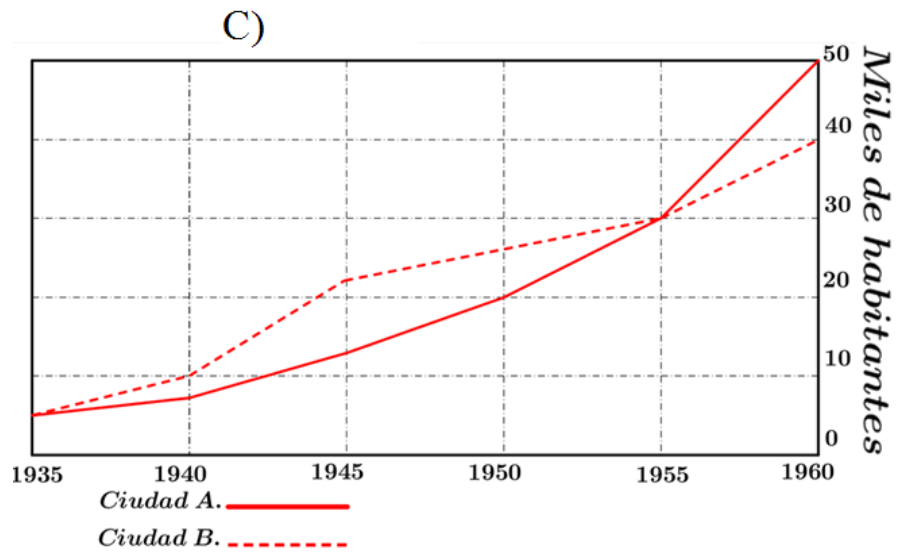
A)



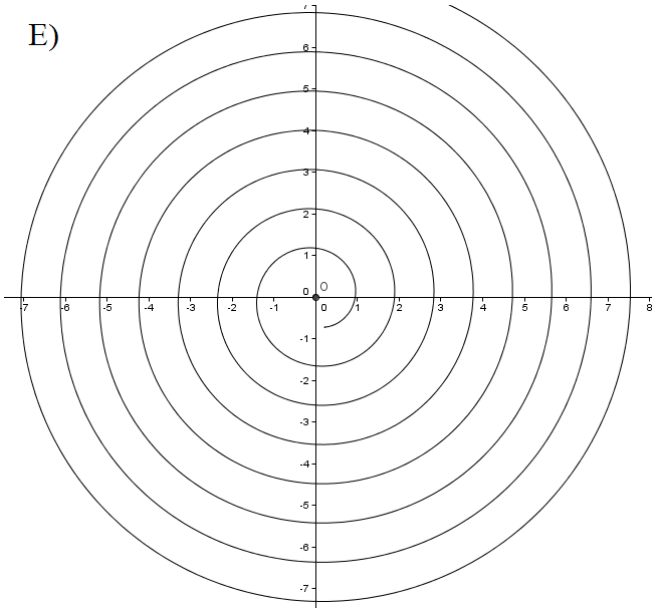
B)



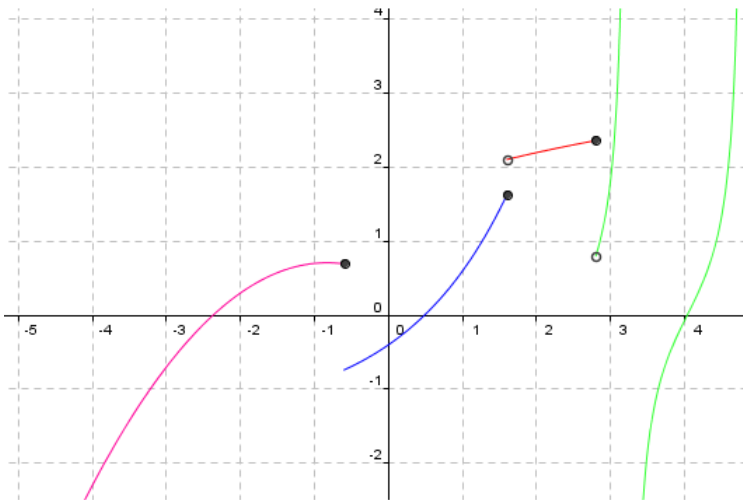
Tiempo Vs Velocidad.



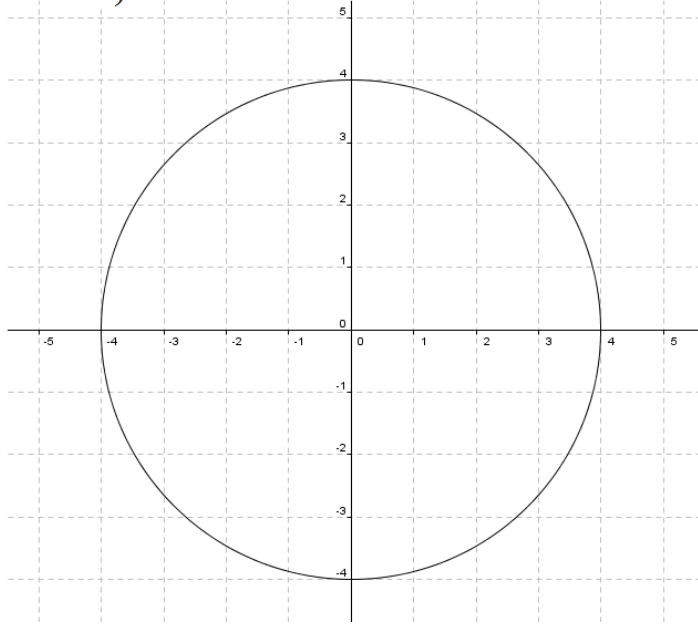
E)



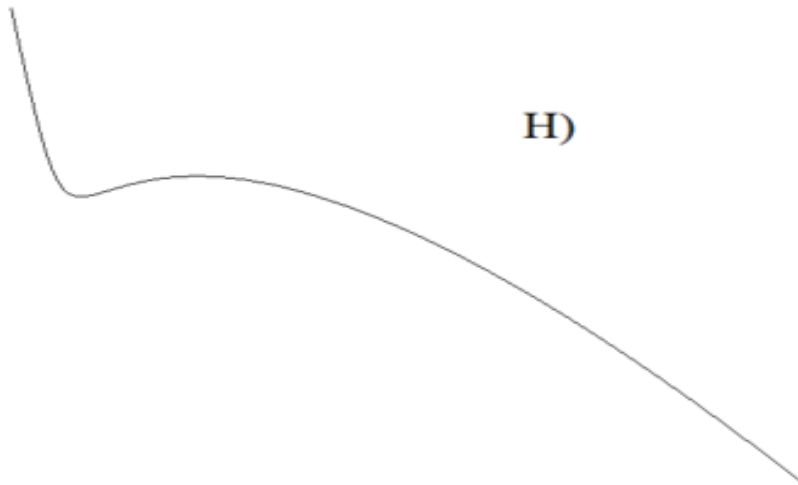
F)



G)



H)



I)



7. De acuerdo con la respuesta de la pregunta anterior, escribe el dominio y el rango respectivamente de las curvas A, B, C D E F y G.
8. Observa los valores de las siguientes tablas, ¿cuáles corresponden a relaciones y cuáles no?

a)

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8
$y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-10	10	11	12	13

b)

$x$	-10	-9	-8	-6	-4	-2	-1	0	2	4	6	8	10	11
$y$	-50	-45	-40	-30	-20	-10	-5	0	10	20	30	40	50	55

c)

$x$	-15	-12	-9	-7	-5	-4	-2	0	1	3	5	7	9	10
$y$	-27	-21	-15	-11	-7	-5	-1	3	5	9	13	17	21	23

d)

$x$	-14	-12	-9	-8	-2	-2	-1	0	2	5	5	7	8	9
$y$	7	6	4	4	1	3	2	1	5	6	7	9	10	14

### Aporte de información # 1.

Llamaremos dominio de la relación, al conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable independiente  $x$ , y llamaremos Rango de la relación al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente  $y$ , en la pareja ordenada.

9. Determina el dominio y el rango en las tablas en las cuales se presenta una relación en la pregunta 8.

**Aporte de información # 2.**

Vamos a llamar relación, a una regla o condición que permite establecer una dependencia entre el primero y el segundo elemento en una pareja ordenada, de tal forma que dicha regla la cumplen todas las otras parejas.

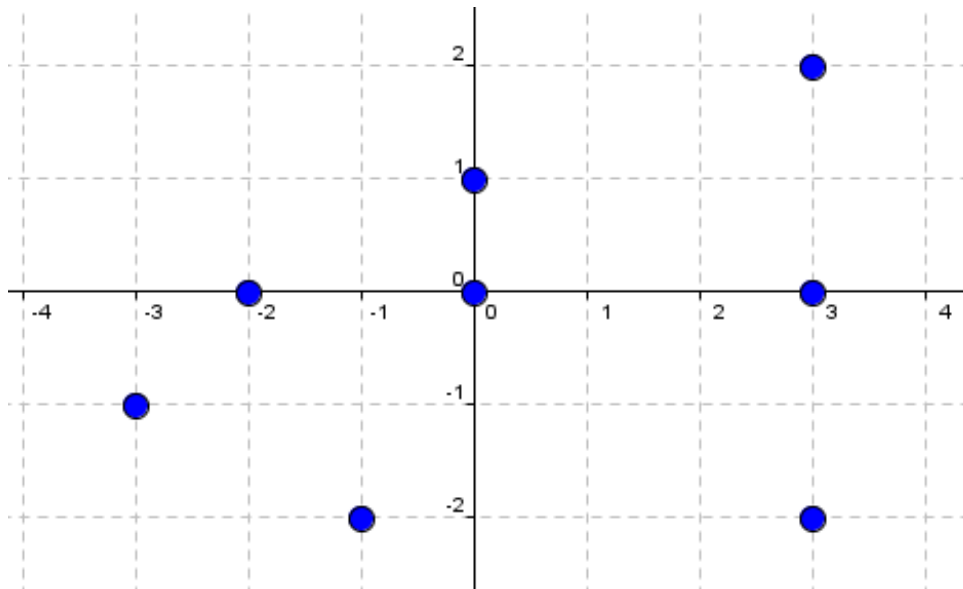
10. Si observas las respuestas 6 y 7, ¿Estas son consecuentes con el aporte de información anterior? ¿debes modificar alguna?

11. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano.

$P -5, -1$  ;  $Q -9, -4$  ;  $E -6, -2$  ;  $T -7, -5$  ;  $G -5, -3$

$O -3, -5$  ;  $W -4, -2$  ;  $R -1, -4$

12. De acuerdo con los puntos en la gráfica, encuentra las coordenadas de cada uno de ellos.

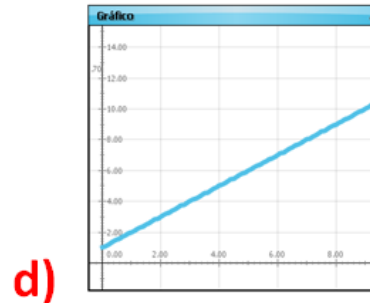
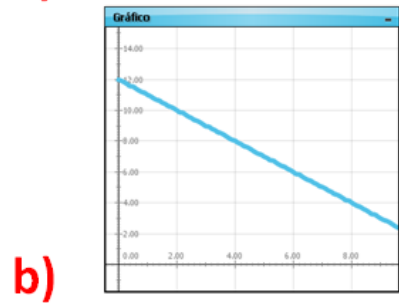
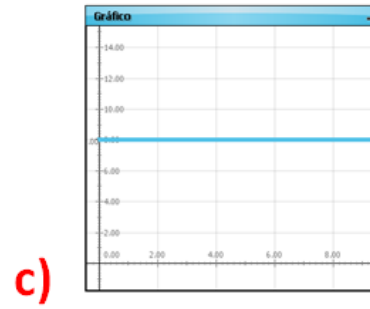
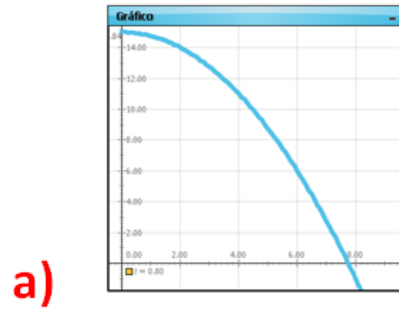


**13.** ¿Cuándo crees que los puntos que corresponden a una relación, deban unirse?

**14.** Se realizó una encuesta durante cuatro años consecutivos al respecto de las elecciones, donde se indagaba por la inclinación a votar o no votar.

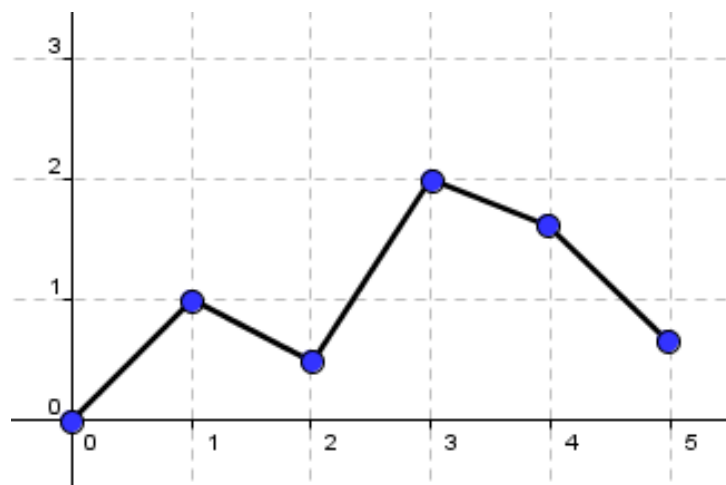
En las gráficas siguientes el eje horizontal representa los años y el vertical representa el número de las personas que piensan votar.





¿Cuál de las anteriores gráficas muestra un descenso en la intención de voto de los colombianos en las elecciones? ¿Por qué?

15. La siguiente gráfica representa las ventas realizadas por la tienda del colegio en una semana. ¿Qué se puede decir de dichas ventas?



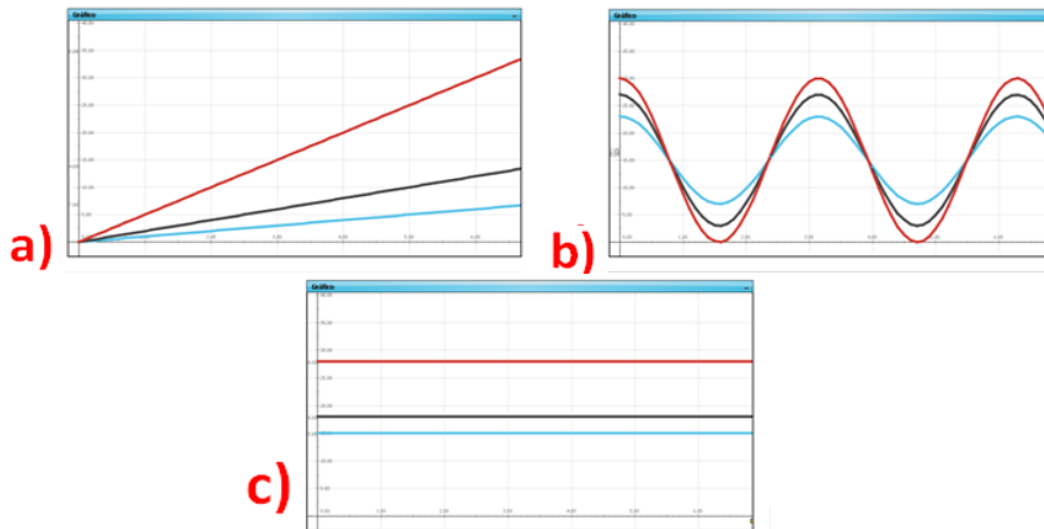
16. En una pista atlética se presentan un corredor, un perro y un auto; si estos llevan velocidades constantes, ¿Cuál sería la gráfica que representa la distancia recorrida en los primeros minutos?

**Nota:** Cada color representa a uno de los participantes.

Rojo: carro

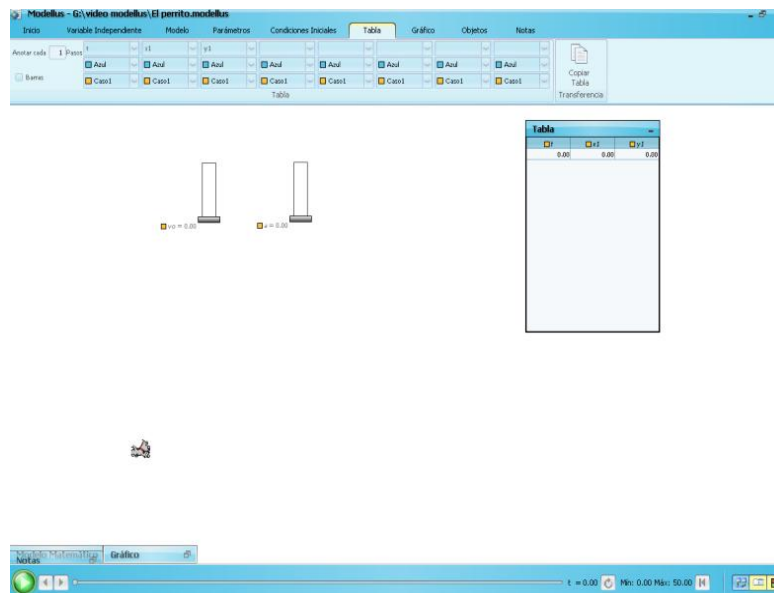
Azul: perro

Negro: corredor



Para las preguntas 17 a 21 ten en cuenta esta información:

En la siguiente simulación se presenta un curioso perrito que va a saltar y a seguir su camino, adicional a esto se presenta una tabla de valores y dos pequeños controladores, el azul es el nivel de la velocidad y el rojo es el del ángulo de elevación con el que va a saltar el perro.



17. ¿Qué sucede si sólo se cambia el nivel de un controlador?

18. ¿De qué manera, el nivel de los controladores interfiere en el movimiento?

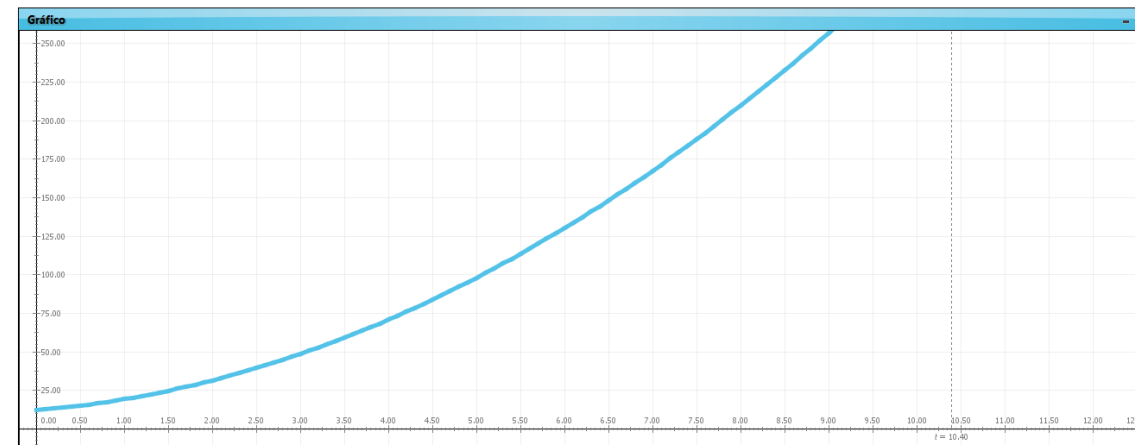
19. ¿El tamaño del salto depende del tiempo? ¿De qué forma?

20. ¿Cuáles son las variables que intervienen en este experimento?

21. Visualizando la tabla de valores, ¿Se puede hallar alguna relación entre las variables del experimento?

Para las preguntas 22 a 25 ten en cuenta esta información:

La simulación presenta una gráfica donde el eje horizontal representa el tiempo en meses y el eje vertical representa el crecimiento de un capital puesto a interés en un banco.



22. ¿Cuál crees que sea la razón por la que el capital aumenta más rápidamente con el paso del tiempo?
23. De acuerdo con el crecimiento del capital, ¿Conoces alguna expresión matemática que represente esta situación?
24. ¿La situación anterior representa una relación o una función matemática?
25. ¿Podrías establecer algunas condiciones para la existencia de una función matemática?

Ahora: dados dos tanques de forma cilíndrica que están siendo llenados de tal manera que a cada tanque entra la misma cantidad de agua en cada minuto.

Tanques Cilíndricos



**26.** ¿Qué relación hay entre el volumen de agua que contiene cada tanque y la altura del agua en cada tanque?

Al realizar una variación en uno de los grifos, a uno de los tanques le ingresa la mitad de agua que al otro

**27.** ¿Cómo influye esto en el tiempo que se necesita para llenar los dos tanques?

**28.** ¿Cuándo podríamos hablar de una relación entre variables?

**29.** ¿Qué condiciones debe cumplir una relación entre variables para considerarse función?

**30.** Podrías enunciar algunos casos de funciones entre variables que se presenten en la cotidianidad.

### **3.5 MANIFESTACIÓN DEL CONCEPTO EN LA ENTREVISTA**

Se establecido ya en la entrevista los argumentos desde su diseño hasta su construcción. A hora vamos a hacer referencia al concepto de función inmerso en el guión de la entrevista construido.

La función no se trabajó desde el punto algorítmico, formal o simbólico como por ejemplo hablar  $y = f(x)$ , por el contrario se tomó la definición de Euler desde la interdependencia, a la correlación entre las cantidades o datos presentes en un problema, definición en la que está fundamentado éste trabajo. La cual se puede evidenciar en los bloques

del guión entrevista, donde en general podemos encontrar preguntas que en su forma establecen como identificar de manera visual el concepto de función al ir desarrollando el guión. Además como ya se ha explicado previamente, algunas preguntas son sobre los conocimientos considerados la base del concepto, por tal motivo el identificar cantidades, valores, soluciones y demás, nos permite encontrar patrones entre las situaciones de variación presentadas. Es así como la identificación de todos los factores mencionados anteriormente se vuelve un elemento relevante para comenzar un acercamiento a la comprensión del concepto de función en problemas, referentes a situaciones usuales o cotidianas para los estudiantes.

A pesar de la importancia que tiene la lectura de un problema mediante las cantidades y/o valores que estén presentes, la otra componente importante de la entrevista respecto al concepto de función, es la parte visual-geométrica que es donde entra las gráficas con respecto a conceptos previos como lo es el concepto de relación, dependencia, independencia, plano cartesiano, basados en situaciones tales como una venta, crecimientos de poblaciones, actividades físicas, entre otros, que den una idea más incluyente al tener el propósito de contextualizar bajo un concepto. En este punto es cuando tenemos que el concepto desde sus múltiples representaciones podría apuntar a contextos diferentes pero significados similares, donde la interdependencia de las cantidades representadas ya sea desde la parte visual y operativa o de un problema planteado sobre alguna situación, van a estar presentes las cantidades sujetas a variación o cambio.

### **3.6 EL GUION ENTREVISTA.**

Las preguntas del guion como ya se estableció previamente son una guía del entrevistador más no son las únicas preguntas que se realizaron en la entrevista como tal. Sin embargo, las preguntas del guion tienen una intencionalidad la cual mencionaremos a continuación.

- 1. En tu salón van a hacer una colecta para recoger los fondos necesarios para una salida recreativa. De 45 estudiantes, sólo 15 tienen dinero para aportar a la causa, lo cual equivale a 50 mil pesos de los 200 mil que cuesta la salida. Si**

**la condición para realizar la actividad es que asistan todos, ¿qué harías para recolectar el resto del dinero?, ¿qué se tendría en cuenta?**

El objetivo de esta pregunta es de identificar las estrategias para solucionar un problema cotidiano y la implicación de las matemáticas que usa. Además de comenzar con preguntas donde se tiene el dominio de la situación aparentemente, de tal forma que no haya una predisposición frente a la entrevista, por lo que el dialogo entre el entrevistado y el entrevistador sea fluido y de forma natural.

**2. Se tiene dos lazos de 600 m cada uno. Uno de los lazos tiene unas franjas de color rojo cada 4 metros y el otro cada 5 metros, ¿Cuáles franjas coinciden y cuántas son?**

La pregunta número dos tiene el propósito de comenzar a subir en la identificación de conceptos básicos como lo es el mínimo común múltiplo, y operaciones básicas como suma multiplicación y división, al igual que la estrategia para resolver el problema.

**3. En una lotería local, el premio de 42 millones de pesos se lo ganó un hombre que quiere repartir con su esposa este dinero. Si la esposa recibe la mitad de la parte con la que se queda su esposo ¿cuánto le correspondió a cada uno?**

En esta pregunta se sigue trabajando problemas cotidianos donde se va presentando un nivel un poco más alto con respecto al lenguaje utilizado. La interpretación de los datos e información en general fue el propósito de esta pregunta.

**4. Si en una operación con números Reales tenemos sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciaciones y radicaciones, ¿en qué orden realizarías dichas operaciones?**

La pregunta cambia el sentido de ser cotidiano a pasar a ser un poco más conceptual, donde el objetivo está orientado a identificar la jerarquía que hay entre las operaciones y como el

estudiante reconoce o no dicha jerarquía u orden, con lo que se esperaba que comenzara establecer una serie de condiciones como el tipo de problema, o uso de signos de agrupación.

**5. Soluciona el siguiente ejercicio.**

$$7 + 2 \cdot 12 - 45 - 3 \cdot 56 \div 7 - 9 - 48 - 6 + 45 + 6 \cdot 84 + 2 \div 2$$

Es un ejercicio con el cual se corrobora lo dicho anteriormente mediante un proceso más de carácter aritmético y manejo conceptual sobre las operaciones con signos de agrupación, el orden, y operaciones a realizar.

**¿Por qué elegiste este orden para realizar la operación?, ¿cambiaría la respuesta si empiezas a solucionarla en otro orden?**

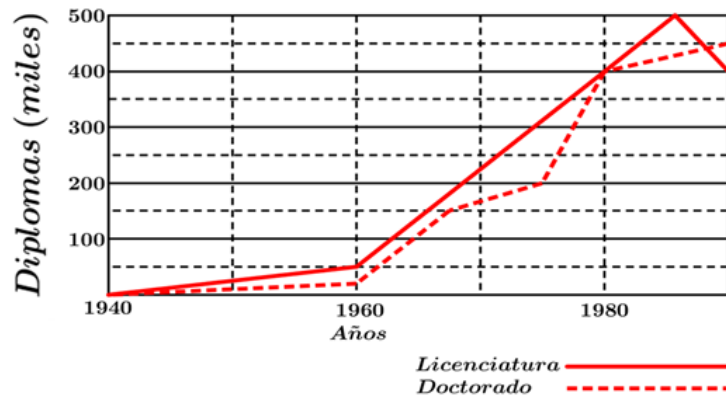
Con ésta pregunta busca encontrar relación entre las respuestas de preguntas anteriores, específicamente la pregunta número cuatro, donde habíamos indagado desde lo conceptual, ahora desde lo procedimental por la dependencia entre operaciones y agrupaciones (paréntesis, corchetes y llaves).

**6. De las siguientes curvas ¿cuáles corresponden a una relación y por qué?**

Aquí la pregunta busca que los estudiantes desde la parte gráfica se acercaran al concepto de relación y puedan identificar además los conceptos de dependencia e independencia; para esta pregunta se plantearon varias gráficas donde hubiera diversos factores que permitieran que los estudiantes fueran cuestionados en todos los aspectos posibles respecto a una relación gráficamente.

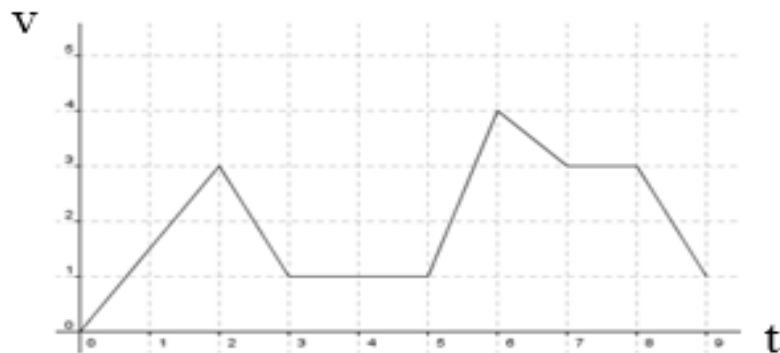


A)



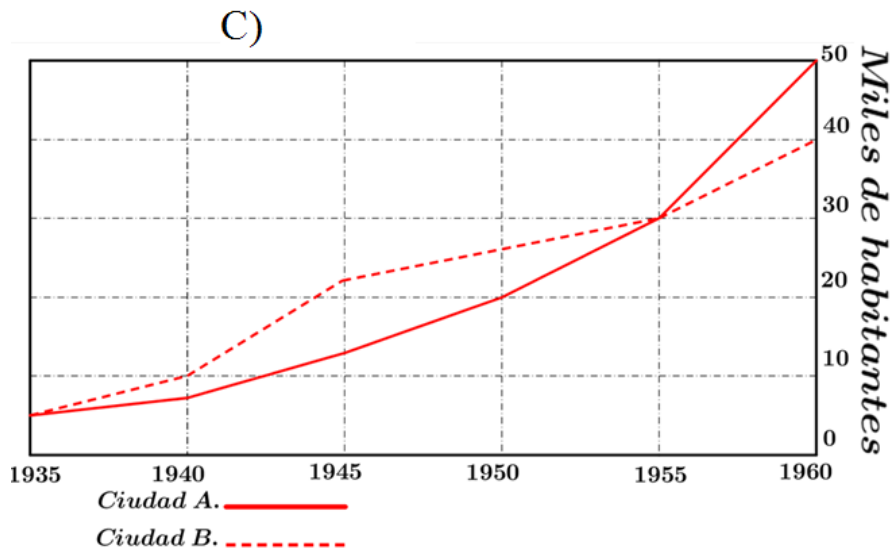
En este primer gráfica la intención es el de dar la mayor parte de datos para que de esta forma se interprete y de cuenta de la información presentada allí.

B)

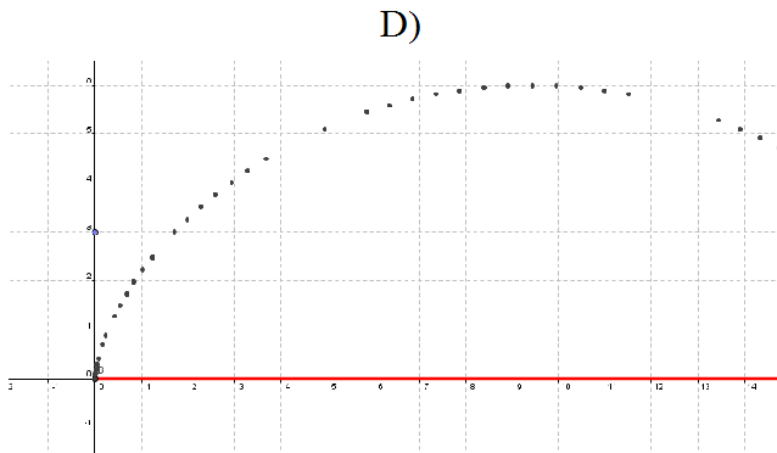


Tiempo Vs Velocidad.

Es una gráfica conocida en su mayoría por los estudiantes, donde se quiere presentar para su interpretación y lectura al tener el tiempo en el eje “x” y la velocidad en el eje “y”.

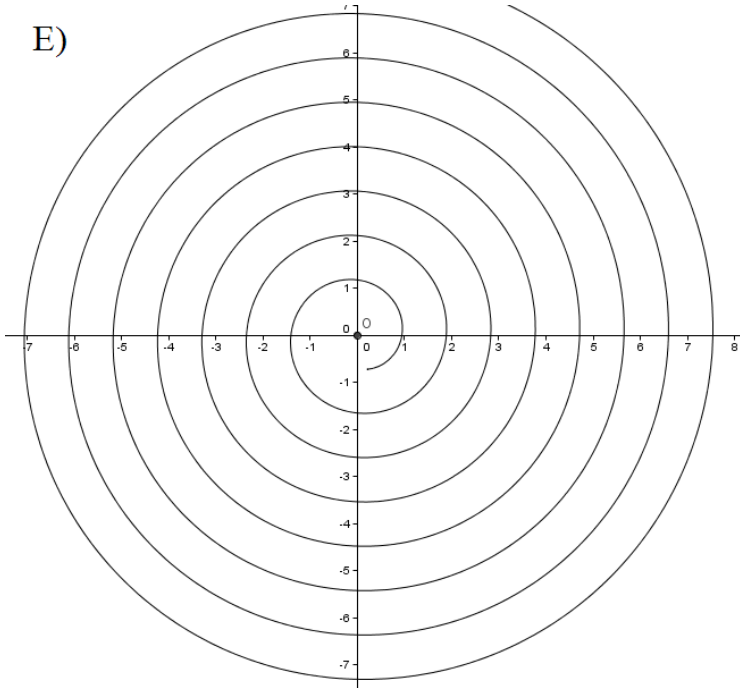


Para esta gráfica se tiene una ilustración muy similar a la anterior pero con una pequeña variante la cual corresponde a tener el eje “y” en la parte derecha, con lo que de igual manera que en las anteriores graficas es el de interpretar esta información y determinar las condiciones para ser relación.



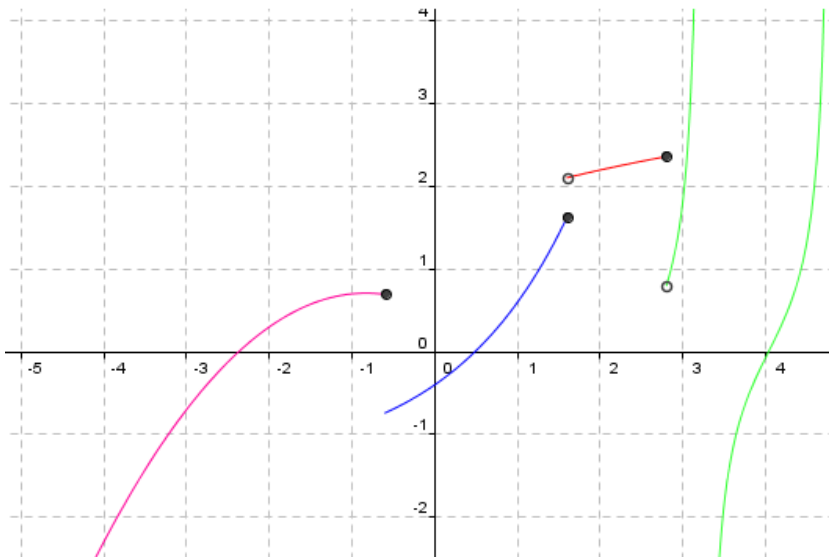
Al tener esta gráfica donde no están unidos los puntos tiene la posibilidad de aportar las condiciones para que un conjunto de puntos sean una relación y además, dar cuenta de los conocimientos con respecto a cuándo se pueden unir y cuándo no.

E)

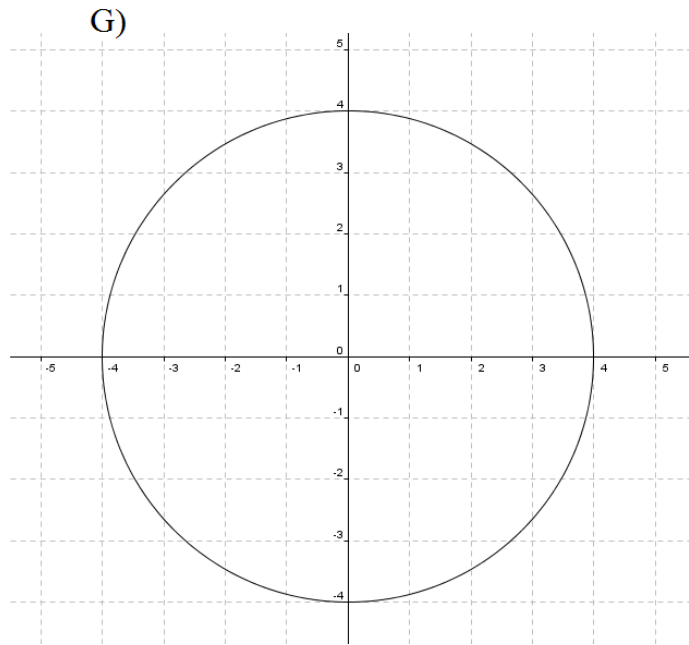


Es una gráfica no tan común pero de la cual se puede deducir comportamientos y demás, por lo que está encaminada a interpretar las condiciones que la hacen ser o no relación.

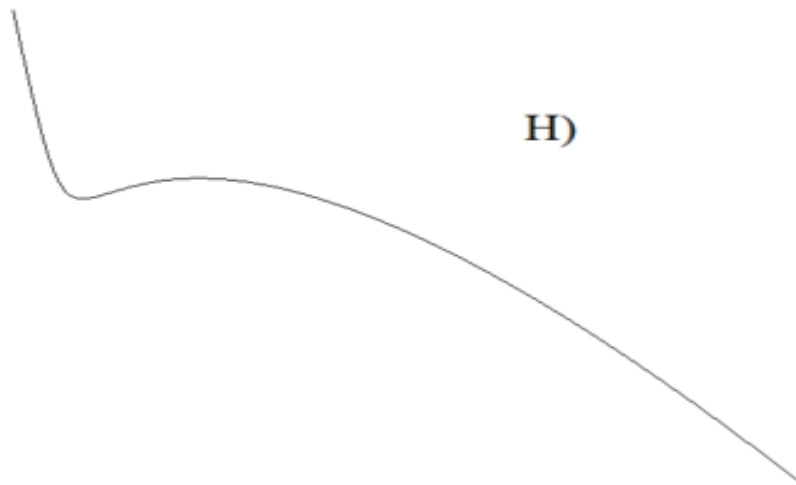
F)



Una gráfica segmentada que puede ser interpretada como una función por tramos, pero que a pesar de esto se va más a interpretar la relación entre cada trazo y la posibilidad de ser relación.



Es pensada con el ámbito posibilitar el pensar las características de la ilustración gráfica de una relación.



D)



Y finalmente se tiene unos trazos con los cuales se quiere determinar la necesidad e importancia de los ejes coordenados para determinar si es relación o no.

**7. De acuerdo con la respuesta de la pregunta anterior, escribe el dominio y el rango respectivamente de las curvas A, B, C D E F y G.**

En esta pregunta, se introducen los conceptos de dominio y rango relacionados con la pregunta anterior. El objetivo de esta pregunta está orientado a identificar la concepción de dominio y rango, reafirmando la respuesta de la pregunta anterior al respecto de si es o no una relación; además de verificar los conceptos de dependencia e independencia.

**8. Observa los valores de las siguientes tablas, ¿cuáles corresponden a relaciones y cuáles no?**

a)

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8
$y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-10	10	11	12	13

b)

$x$	-10	-9	-8	-6	-4	-2	-1	0	2	4	6	8	10	11
$y$	-50	-45	-40	-30	-20	-10	-5	0	10	20	30	40	50	55

c)

$x$	-15	-12	-9	-7	-5	-4	-2	0	1	3	5	7	9	10
$y$	-27	-21	-15	-11	-7	-5	-1	3	5	9	13	17	21	23

d)

$x$	-14	-12	-9	-8	-2	-2	-1	0	2	5	5	7	8	9
$y$	7	6	4	4	1	3	2	1	5	6	7	9	10	14

Con esta pregunta se busca ya desde tablas identificar la concepción de relación que se tienen en correspondencia con la pregunta número seis; es decir confirmar o reforzar el concepto de relación. En esta pregunta se tiene la ilustración de varias tablas con dos variables, números positivos y negativos en cada una, donde se debe de identificar fundamentalmente la dependencia o independencia, adicional a esto determinar si hay o no una relación.

### Aporte de información # 1.

Llamaremos dominio de la relación, al conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable independiente  $x$ , y llamaremos Rango de la relación al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente  $y$ , en la pareja Ordenada.

on

este primer aporte de información se quiere reflexionar sobre las concepciones de los términos dominio y rango por los cuales se preguntó previamente.

**9. Determina el dominio y el rango en las tablas en las cuales se presenta una relación en la pregunta 8.**

En esta pregunta se debe tener en cuenta el primer aporte de información además de la definición que se tomó en este trabajo para el dominio y rango de una relación. Así la intencionalidad de esta pregunta está orientada a confrontar las respuestas de la pregunta ocho y lograr que el estudiante sea consciente de la respuesta, es decir del dominio y el rango de una relación, además de la dependencia e independencia entre variables.

**Aporte de información # 2.**

**Vamos a llamar relación, a una regla o condición que permite establecer una dependencia entre el primero y el segundo elemento en una pareja ordenada, de tal forma que dicha regla la cumplen todas las otras parejas.**

Este aporte de información se realiza con la intencionalidad de reflexionar sobre lo argumentado previamente al respecto de gráficas, tablas y demás.

**10. Si observas las respuestas 6 y 7, ¿Estas son consecuentes con el aporte de información anterior? ¿debes modificar alguna?**

En esta pregunta se debe tener en cuenta el segundo aporte de información y la definición del concepto de relación que se tomó para este trabajo en particular. Dado el aporte de información el objetivo de la pregunta es confrontar y orientar al estudiante al respecto de las preguntas seis y siete para constatar si sus respuestas fueron o no correctas; de tal forma que el estudiante logre tener claridad de cuando hay o no hay una relación.

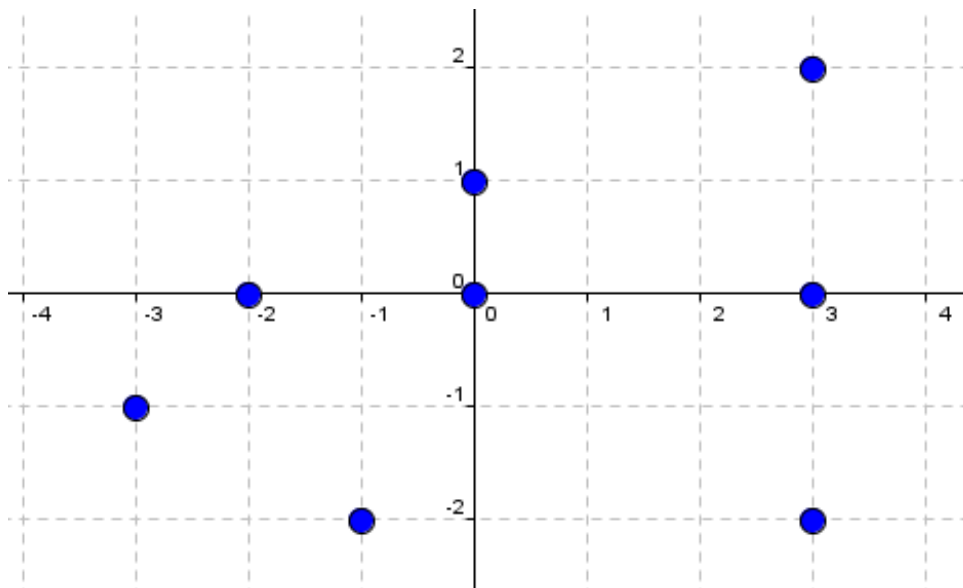
**11. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano.**

$P -5, -1$  ;  $Q -9, -4$  ;  $E -6, -2$  ;  $T -7, -5$  ;  $G -5, -3$

$O -3, -5$  ;  $W -4, -2$  ;  $R -1, -4$

Respecto de esta pregunta el objetivo es práctico, determinar como el estudiante se ubicaba en el plano cartesiano, si logra identificar coordenadas cartesianas, para lo cual se establecen unos puntos y se le pide que los ubique en el plano.

**12. De acuerdo con los puntos en la gráfica, encuentra las coordenadas de cada uno de ellos.**



En esta pregunta cambia la dinámica, consiste en realizar un proceso inverso, ahora dado el plano cartesiano con unos puntos, determinar las coordenadas; el objetivo está fundamentalmente en contrastar con la pregunta anterior.

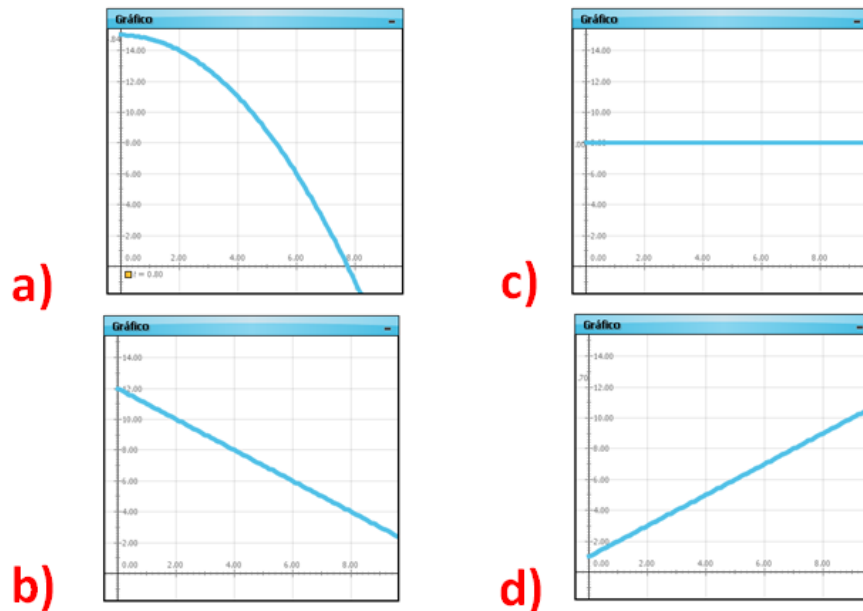
**13. ¿Cuándo crees que los puntos que corresponden a una relación, deban unirse?**

Con esta pregunta se busca ir más allá de lo procedimental, ir a lo conceptual, consiste en la abstracción del estudiante para identificar la dependencia e independencia para llegar a la continuidad del trazo.



**14. Se realizó una encuesta durante cuatro años consecutivos al respecto de las elecciones, donde se indagaba por la inclinación a votar o no votar.**

**En las gráficas siguientes el eje horizontal representa los años y el vertical representa el número de las personas que piensan votar.**



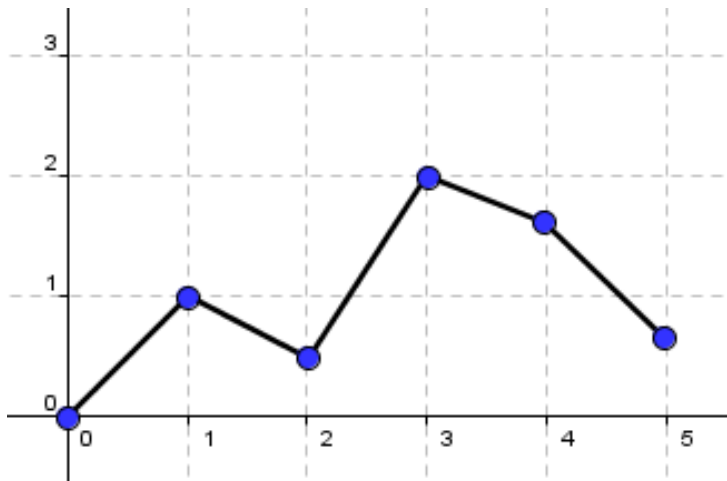
Al tener una situación y la representación gráfica se presenta una predisposición a buscar la gráfica de la situación con respecto a la interpretación de los datos que en este caso son votantes y años.

**¿Cuál de las anteriores gráficas muestra un descenso en la intención de voto de los colombianos en el las elecciones? ¿Por qué?**

Esta pregunta hace un resumen general de lo trabajado hasta el momento, estableciendo los conceptos y un contexto. Busca establecer el punto de comprensión del estudiante; en la pregunta se estableció una encuesta al respecto de la inclinación a votar o no votar y se

establecieron unas graficas que mostraran los resultados obtenidos, en este punto el estudiante debe identificar la relación y la dependencia o independencia.

**15. La siguiente gráfica representa las ventas realizadas por la tienda del colegio en una semana. ¿Qué se puede decir de dichas ventas?**



El objetivo en esta pregunta es establecer el grado de conclusión que tiene los estudiantes al respecto de una situación; específicamente hablamos de las ventas de una tienda en un colegio, se muestra gráficamente los resultados y se pide una conclusión al respecto. Busca que el estudiante alcance un grado de abstracción y sea consciente de los conceptos que determinan una relación.

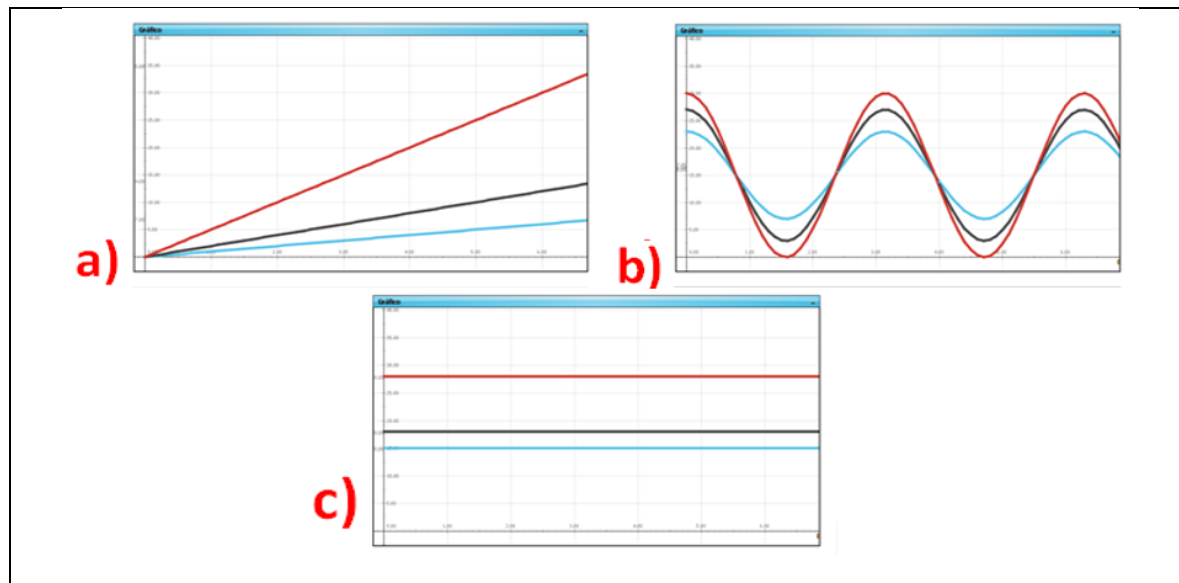
**16. En una pista atlética se presentan un corredor, un perro y un auto; si estos llevan velocidades constantes, ¿Cuál sería la gráfica que representa la distancia recorrida en los primeros minutos?**

**Nota: Cada color representa a uno de los participantes.**

**Rojo: carro**

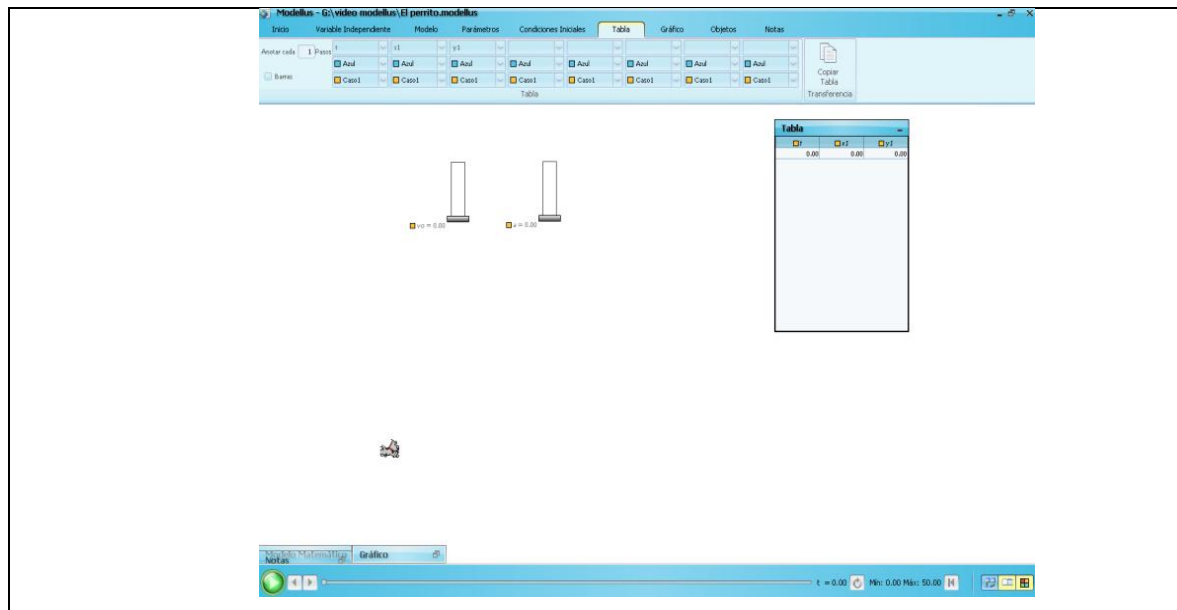
**Azul: perro**

**Negro: corredor**



Al igual que las anteriores preguntas se tiene una situación y una serie de gráficas con la intencionalidad de determinar una correspondencia nuevamente entre imagen situación. Pero a diferencia de los anteriores en este caso no se plantea la representación de los ejes coordenados, y adicional a esto las palabras claves que van desde los personajes que realizan la acción (corredor, perro y auto), hasta las palabras de “velocidad constante” permiten responder posteriormente a una pregunta.

**En la siguiente simulación se presenta un curioso perrito que va a saltar y a seguir su camino, adicional a esto se presenta una tabla de valores y dos pequeños controladores, el azul es el nivel de la velocidad y el rojo es el del ángulo de elevación con el que va a saltar el perro.**



A continuación se hace uso del programa Modellus 4.01 donde se realiza una simulación basada en ecuaciones físicas y se da una pequeña introducción de la acción presentada al igual que las características fundamentales para observar la simulación y responder las preguntas.

### 17. ¿Qué sucede si sólo se cambia el nivel de un controlador?

Después de interactuar con esta simulación lo que se pretende con la pregunta sobre un controlador es respuestas que aparte de tener una explicación previa de ¿cómo funcionan? se lleva a una explicación más amplia de los cambios que se presentan de forma individual en dicho movimiento o situación.

### 18. ¿De qué manera, el nivel de los controladores interfiere en el movimiento?

A pesar de ya preguntarse por los controladores tenemos que es aquí donde se debe reflexionar por la combinación de ambos controladores en pro del movimiento. De acuerdo con esto se debe determinar una serie de relaciones entre dichos controladores, relaciones que pueden ser previamente encontradas de forma individual.

**19. ¿El tamaño del salto depende del tiempo? ¿De qué forma?**

Cuando se analiza el movimiento de manera segmentada se posibilita ver las características internas de dicho movimiento, por lo que se establece mediante la interpretación de las variables del cómo influyen y su correspondencia con el controlador.

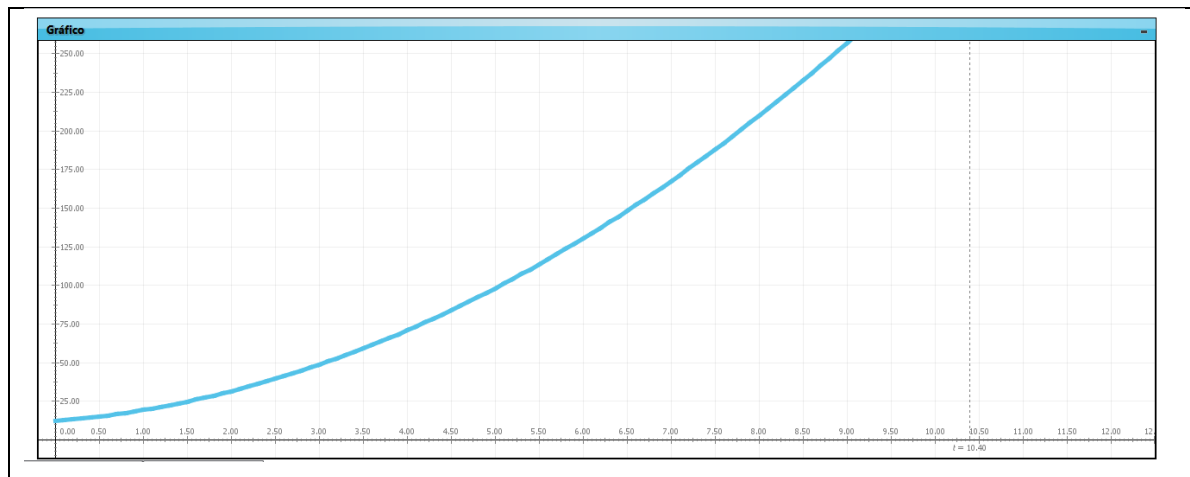
**20. ¿Cuáles son las variables que intervienen en este experimento?**

En las preguntas anteriores se enfatizó en responder de manera exploratoria a aspectos puntuales donde se observaban algunas variables, pero no se realiza una identificación bajo el rotulo de variable. A pesar de que las respuestas pueden llevar esta palabra como parte de su argumentación hace necesario que deba comprobar si se hace de manera consciente o inconsciente, obteniendo además una evolución del lenguaje. Es por esto que la parte visual junto con la dinámica, permite obtener mayor interpretación del ejercicio con relación a las variables inmersas y la importancia o trascendencia de las mismas.

**21. Visualizando la tabla de valores, ¿Se puede hallar alguna relación entre las variables del experimento?**

La capacidad de ordenar datos por medio de datos en tablas es una herramienta que nos proporciona el programa Modellus 4.01. En vista de que dicha tabla permite tener los datos organizados y de forma secuencial da pie para realizar un análisis sobre las variables que se presentan en el movimiento donde el propósito para este caso es el de buscar la relación de las variables mediante una nueva representación visual de un problema.

**La simulación presenta una gráfica donde el eje horizontal representa el tiempo en meses y el eje vertical representa el crecimiento de un capital puesto a interés en un banco.**



Nuevamente se hace uso de una simulación en Modellus 4.01 donde se ilustra una situación de manera gráfica a lo cual se ha querido darle un poco más de dinamismo a la gráfica mediante la simulación de su trazado y la correspondencia del eje horizontal con el vertical. Adicional a lo anterior cuando se repite el ejercicio, permite preguntar más por el suceso en desarrollo saliendo de un trazado plano y estático.

**22. ¿Cuál crees que sea la razón por la que el capital aumenta más rápidamente con el paso del tiempo?**

Se viene trabajando la posibilidad que presentan las gráficas con respecto a situaciones en función de interpretar de manera más fluida la información presente. Por tanto esta pregunta tiene el propósito de obtener información clave de una situación donde se tiene información base la cual es complementaria con la gráfica.

**23. De acuerdo con el crecimiento del capital, ¿Conoces alguna expresión matemática que represente esta situación?**

El objetivo de esta pregunta es la de pasar de una interpretación gráfica a la formalización matemática, además de obtener información sobre el lenguaje usado para realizar dicha transposición.

**24. ¿La situación anterior representa una relación o una función matemática?**

A pesar de que algunas preguntas de manera implícita ya habían preguntado por la función, se tiene que hay que diferenciar entre estos dos conceptos que son complementarios más no iguales. Debemos que aclarar que a pesar de tener la posibilidad de decir que toda función es una relación y que por definición esto no se da forma inversa dado que toda relación NO es función y que para esto se debe tener o cumplir con una condición, no siempre se tiene una claridad sobre esto en importante saber si se tiene dicha claridad mediante la ilustración de una situación la cual se puede inferir mediante la argumentación de la misma.

**25. ¿Podrías establecer algunas condiciones para la existencia de una función matemática?**

Esta pregunta es un complemento de la anterior pregunta donde encontramos que dado la respuesta se puede ver un refuerzo o corrección a la argumentación anterior donde se reflexiona sobre lo que ha dicho anteriormente y el ¿por qué se dijo?

**Ahora: dados dos tanques de forma cilíndrica que están siendo llenados de tal manera que a cada tanque entra la misma cantidad de agua en cada minuto.**

**Tanques Cilíndricos**



**Ilustración 4: Tomado de la base de las pruebas Saber.**

Teniendo en cuenta la ilustración y la introducción de misma se busca que en general se tenga un punto de referencia que es la cotidianidad y la reflexión de actividades que permitan que los estudiantes se involucren más con actividades y sus efectos.

**26. ¿Qué relación hay entre el volumen de agua que contiene cada tanque y la altura del agua en cada tanque?**

Al comparar y diferenciar cantidades la idea es permitir que se establezca patrones, características, condiciones y entre otros elementos para la interpretación de la situaciones.

**Al realizar una variación en uno de los grifos, a uno de los tanques le ingresa la mitad de agua que al otro.**

Tenemos en consecuencia que al tener una misma situación pero con una pequeña variación se puede llegar a reflexionar mucho más sobre lo que presenta el problema o situación.

**27. ¿Cómo influye esto en el tiempo que se necesita para llenar los dos tanques?**

Las relaciones que se presentan en situaciones y su interpretación son los componentes que los casos deben presentar frente la comprensión del concepto de función donde deben tener en cuenta las consecuencia de una variable frente otra, pues al observar esta característica se puede determinar la interdependencia que se presenta entre las variables y por tanto la comprensión de la situación.

**28. ¿Cuándo podríamos hablar de una relación entre variables?**

Nuevamente con esta pregunta es cuestionar al estudiante frente a las respuestas y lo realizado previamente para que reflexione y defina en este caso sobre lo que se necesita para poder establecer una relación.

**29. ¿Qué condiciones debe cumplir una relación entre variables para**



**considerarse función?**

El objetivo en esta pregunta es el de vincular nuevamente al estudiante con el concepto arrancando nuevamente de la diferenciación del concepto de relación. Basándonos en lo anterior se tiene la posibilidad de dar cuenta de las características con las que una relación debe de contar para ser función.

**30. Podrías enunciar algunos casos de funciones entre variables que se presenten en la cotidianidad.**

Finalmente se tiene la interpretación del concepto de manera externa, en lo cotidiano. De esta manera no es necesario de una definición rigurosa o formal donde se utiliza símbolos y un lenguaje técnico. Si no el significado de estos símbolos como se pueden adecuar al entorno y aun así no perder su rigor sino que en cambio ampliarlo a un más.

## **CAPÍTULO: 4 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA INFORMACIÓN**

### **4.1 PARADIGMA CUALITATIVO.**

El paradigma cualitativo tiene un desarrollo histórico con varios momentos en el tiempo, los cuales partieron de estudios realizados a comunidades primitivas y luego a los comportamientos, el desarrollo y la evolución del ser humano en grupo e individual. Después continuo los estudios clínicos donde se cambia la concepción del paciente y de la clínica, teniendo un acercamiento a los sujetos, por lo que se deja el estudio clínico como parte del área de la salud y pasa a explorarse el paradigma en educación, de tal manera que para estos tiempos es uno de los paradigmas más utilizados en este campo, ya que se pretende describir, interpretar y comprender aspectos donde se hacen relevantes los casos individuales sin pretender llegar a una generalización (Hernández et al, 2010). A pesar que el paradigma cualitativo es de alguna manera un derivado del paradigma cuantitativo, debido a que se llego al punto de que no era posible generalizar, por tanto no es posible decir que son contrarios sino que en cambio son complementarios (Hernández et al, 2010), por lo que se podría considerar un tercer paradigma el cual no es objeto de nuestra investigación.

Tenemos que autores como Lincoln & Denzin (2003), Creswell (2005) y Hernández et al (2010) sitúan el origen de las investigaciones bajo este paradigma para finales del siglo XIX y principios del siglo XX por lo que estudios realizados mucho antes no se consideraban como una investigación. De este modo se tiene que los precursores del paradigma cualitativo fueron las áreas de etnografía, antropología y sociología, ciencias sociales y humanas, al igual que la psicología y la educación gracias a personajes tales como Paulo Freire por la década de 1970 en Latino América (Hernández et al., 2010).

La propuesta de investigación desarrollada está consolidada en una investigación de carácter cualitativo por lo que la investigación no tiene el propósito de generalizar mediante datos numéricos, ni mucho menos realizar cálculos estadísticos. Por tal motivo, tenemos que el

paradigma cualitativo en la investigación tal como lo define Hernández et al, donde “... la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto” (p, 364). Permite que nosotros como investigadores seamos partícipes del proceso, influyendo mediante la metodología implementada.

“los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él” (Campillo, 1998, p, 10).

#### **4.1.2 CARACTERÍSTICAS DEL PARADIGMA CUALITATIVO.**

El proceso cualitativo está compuesto por etapas o fases que van desde el surgimiento de una idea hasta la elaboración de las conclusiones, donde la literatura es presentada como complemento de cada una de las etapas teniendo un vínculo entre la teoría y la práctica. Además, tenemos que este proceso no es netamente ascendente ya que si es necesario se puede regresar a una etapa previa (Hernández et al, 2010). Ahora veamos algunas de las características que presenta el paradigma cualitativo en la investigación.

- Proceso dinámico.
- No hay generalización.
- Datos de tipo cualitativo (perspectivas, experiencias).
- Teoría posterior a la inmersión al campo.
- Proceso holístico.

Estas son algunas de las características para las cuales se presenta una atención primordial del sujeto y las relaciones con el contexto, por lo que la interpretación y contextualización son valores agregados en el proceso de la investigación cualitativa.

## **4.2 MÉTODO.**

En el trabajo se realizó un estudio de casos el cual es tomado de manera instrumental, ya que tal como lo menciona Stake (2006) citado por Hernández et al (2010), en el estudio de casos se presenta tres tipos de estudio de casos, en lo que lo concierne al estudio de casos de tipo instrumental que permite obtener información relevante para la investigación y desarrollo de la propuesta. Ahora, como el paradigma de la investigación es cualitativo enmarcado en el contexto educativo donde se trabajó directamente con personas que fueron evaluadas de forma individual y se prosiguió a determinar tendencias. A lo anterior Stake (2006) llama como Múltiples unidades de análisis o casos<sup>4</sup>.

A pesar de haber acogido el estudio de casos de tipo instrumental, no hay que dejar de por medio definiciones que van desde una aproximación de aspectos del fenómeno (Blatter, 2008), un examen detallado (Wiersma y Jurs, 2008), el estudio de unidades de análisis (Grinnell, Williams y Unrau, 2009), búsqueda practica de un fenómeno en un contexto (Yin 2009), hasta un método por el cual se valora aspectos específico del fenómeno o unidades organizacionales definidas por Harvard Business School (1997). Es por esto que Hernández et al (2010) establece que el caso es definido por un propósito de análisis más no por un método determinado.

Para el estudio de casos de las múltiples unidades de análisis contamos con los niveles de Pirie y Kieren, por medio de los cuales se hace una evaluación y análisis a cada uno de los casos de manera similar (Hernández et al, 2010).

## **4.3 DISEÑO Y SELECCIÓN DE LOS CASOS.**

### **4.3.1 ELECCIÓN DE LA MUESTRA.**

La elección se realizo en un grupo de once de un colegio público de la ciudad de Medellín, ya que el concepto de función hace parte del contenido académico de los estudiantes de este grado. Como se presentaba un grupo numeroso de estudiantes con condiciones muy

---

<sup>4</sup>Tomado del capítulo 4 Estudio de casos encontrado en el CD de metodologías de la investigación de Hernández, Fernández & Batista (2010)

similares (estar en el mismo grado, ser del mismo estrato social económico y presentar unas diferencias de edades muy bajas), delimitamos la población a cuatro estudiantes ya que como lo afirman Hernández et al, citando a Neuman (2009) “...el tamaño de la muestra no se fija a priori, sino que se establece un tipo de unidades de análisis y a veces se perfila un número relativamente aproximado de casos” (p, 395).

Los estudiantes se eligieron teniendo en cuenta varios aspectos como la facilidad para la comunicación, la participación e interés en trabajar en actividades, que permitieran obtener información, ya que al tener sujetos tímidos no es posible interpretar, ni mucho menos obtener datos que nos permita realizar alguna inferencia sobre la comprensión del concepto es así como “...la elección de los elementos no dependen de la probabilidad, sino de las causas relacionadas con las características de la investigación” (Hernández, Fernández, & Baptista , 2010, p, 176). Es así como los participantes seleccionados fueron informados sobre la investigación de forma general, además de tramitar los debidos permisos con los acudientes de cada uno de estos y la coordinación de los tiempos y el lugar para el desarrollo de las actividades.

#### **4.3.2 EL EXPERIMENTO CONCRETO.**

Las experiencias que se presentan mediante la interacción con la naturaleza, construcción y diseño de elementos posibilita el acercarse a las matemáticas y la física de manera más amena tal como lo afirma Cabral & Maldonado (2010)

“...la libertad de expresarse y analizar ideas previas acerca de los temas, haciendo notar que el conocimiento puede estar en el público general y no sólo en los científicos y, que se puede participar interactivamente en la construcción y divulgación de él” (p, 416)

Por lo que se determino realizar un experimento concreto donde se analizara algún fenómeno físico, donde la variación será el punto central para realizar la interpretación y el análisis.

Es importante tener en cuenta que definimos como “experimento concreto” a la actividad de diseñar, construir, analizar e interpretar un fenómeno que se produce en el entorno por medio

de artefactos, montajes y herramientas, permitiendo que tal como lo afirma Cabral & Maldonado (2010) cuando citan a Zárate-Martín (1995) “el aprendizaje es funcional cuando la persona que lo ha realizado puede utilizarlo efectivamente en una situación concreta para resolver un problema determinado” (p, 416).

#### **4.3.2.1 Diseño del experimento concreto.**

La actividad del experimento concreto consiste en la elaboración de un cohete y su lanzamiento. Como primera instancia se realiza una lectura rápida a la guía, seguida de la construcción del cohete mediante las botellas plásticas, el papel de radiografía, la plastilina, el cartón paja y la cinta. Terminado la construcción se disponen a tomar con una probeta varias medidas de agua, la cual es introducida en la botella para su posterior lanzamiento. El anterior proceso se realiza varias veces con lo que se toman algunos datos, se realizan cálculos y se responden unas preguntas relacionadas con lo observado en el experimento al respecto del concepto de función.

#### **4.3.3 LA SIMULACIÓN.**

Cuando se pensó en incorporar las TIC en el trabajo, se estudiaron varias posibilidades de programas que fueran de uso libre y gratuito, que contaran con la posibilidad de animar el trazado de las gráficas, que ilustrara de forma algebraica, se encontraron dos programas que nos llamaron la atención al ser usados como estrategias didácticas, herramientas y objetivos en varias propuestas de investigación por contar con dinamismo, capacidad y fortalezas a nivel gráfico, manejo o uso y entorno visual. Estos programas son el Geogebra y el Modellus 4.1.

El Geogebra es un programa de gran dinamismo con respecto a las gráficas, construcciones geométricas y algebraicas, pero aun así nos faltaba algo para que posibilitara acercarse más a un fenómeno físico que sería la componente de la simulación por razones ya explicadas en la parte del experimento concreto. Por tanto el Modellus, un programa de uso libre y gratuito al igual que el Geogebra, permite el trazado de gráficas, pero con un componente adicional que se ajustaba a nuestro propósito, ya que “La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el

aprendizaje de los estudiantes” (Godino et al, 2004, p, 12). Es así como la capacidad del programa de animar partículas, las cuales se les puede dar características de movimientos conocidos, nos permitía la posibilidad de manipular un fenómeno en pro de explorar, analizar y conjeturar sobre el mismo, al respecto de variables relacionadas, dependencia e independencia entre las mismas, que nos condujeran al análisis del concepto y su comprensión.

#### **4.3.3.1 Características de Modellus 4.1.**

Modellus 4.1 es un programa de uso libre con propósitos educativos enfocado al básicamente área de la física, para el uso de docentes y estudiantes de todos los ámbitos educativos, pues se adecua tanto a la educación primaria, secundaria como superior, por lo que la dirección del programa debe estar orientada tanto a los grupos que se dirige como a los temas que se presentan. Las posibilidades que brinda el programa son variadas y depende del uso que se le dé, por tal motivo a continuación mencionaremos algunas características que presenta el programa Modellus a nivel general que ayudara a entender el porqué del uso del programa en la investigación<sup>5</sup>.

- El idioma, ya que se encuentra en portugués, inglés, español, chino, entre otros idiomas abarcando un amplio conjunto de usuarios.
- El contenido alto de conceptos matemáticos y físicos, que son vitales en la manipulación, diseño y construcción de la simulación o modelo.
- El retorno a la actividad científica, de exploración, análisis, creación y comprobación.
- A nivel motivacional el programa permite hacer un llamado a la atención de la persona, una invitación a la creatividad, a proponer y establecer relaciones, es además un programa actual que tiene la tecnología del momento.

---

<sup>5</sup> Las características, versiones ejemplos, y demás pueden ser encontradas en la siguiente pagina <http://modellus.co/index.php/es/>

- La interdisciplinariedad del programa, ya que integra las áreas de informática y tecnología, matemáticas, química, astronomía y geometría, entre otras.
- Repetición de una simulación de manera indefinida o definida pero en las mismas condiciones. Permite repetir procesos para identificar variaciones y comprobar resultados.

Estas son algunas de las principales características del programa, que si bien las podría tener cualquier otro programa de computador donde se presente un ambiente virtual que se puede ajustar a un entorno cotidiano; pero es éste el programa que seleccionamos por las características ya mencionadas, especialmente la posibilidad de promover el análisis al permitir repetir la actividad bajo los mismos parámetros repetidamente, lo cual favorece frente a la desventaja del experimento concreto de solo poder hacer una vez el experimento en determinadas condiciones.

#### **4.3.3.2 Diseño de la simulación.**

En primera instancia se pensó en la construcción de una simulación distinta al fenómeno observado en el experimento concreto, pero al comenzar a estudiar las posibilidades que nos presentaba el programa en relación con el experimento se decidió realizar la simulación del mismo fenómeno para confrontar con el experimento concreto.

El diseño de la simulación fue por medio de dos ecuaciones generadoras del movimiento vertical y horizontal de la partícula. Dos controladores que permiten aumentar y disminuir ciertas características del movimiento, los cuales tienen el propósito de modificar el movimiento para ser interpretado posteriormente. Lo concerniente a la parte visual de la animación, establecimos una simulación con movimiento, donde hubiera un trazado de una gráfica y el registro de los datos en una tabla de valores; tanto la gráfica como la tabla de valores permiten determinar patrones, cambios y relaciones presentes entre las variables del experimento en la simulación.

Después de establecidos las condiciones de la simulación, se pasa a determinar a nivel visual y estético la forma de la partícula, tipo de trazado de la gráfica y las variables que presentarían los valores en la tabla. Y finalmente se redactaron las preguntas referentes a las



características del movimiento y la simulación en general, en caminadas a la comprensión del concepto de función.

## **4.4 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN**

La información o datos como lo llaman algunos autores, son producto de tres fuentes, las cuales son:

- La observación.
- La entrevista semiestructurada de carácter Socrático.
- El experimento concreto y su simulación en el Modellus 4.1

Estas fuentes de información son de carácter cualitativo, por lo que no se realizó ningún cálculo estadístico o probabilístico. Por lo que se analizarán los datos obtenidos de forma individual, luego se contrastarán para robustecer los análisis y darle validez, generando un proceso de triangulación que permitirá generar una serie de conclusiones.

### **4.4.1 LA OBSERVACIÓN.**

Teniendo en cuenta que la observación tal y como la expresan Hernández et al (2010) va más allá de lo que se puede percibir mediante la vista, se establece que la observación es una fuente presente durante todo el proceso de investigación por lo que no tiene un tiempo determinado, sino que por el contrario se realiza cada vez que se presenta alguna situación o hecho relevante.

Cuando se aplica la entrevista se tiene la intención de conseguir información mediante una serie de respuestas y preguntas por lo que la observación sigue presente, al igual que cuando se realiza en un segundo momento el experimento concreto y la simulación. Por lo que a pesar de estar atentos la mayor parte del tiempo, la percepción de cada uno de nosotros es la clave para realizar una observación pertinente. Basados en lo anterior, vemos la importancia al hacer una observación de carácter investigativo donde tener todos los sentidos involucrados con “los detalles, sucesos, eventos e interacciones” (Hernández et al, 2010, p411) permitiendo que el



investigador o los investigadores estén atentos a situaciones que sean más a portantes para el trabajo.

#### **4.4.2 LA ENTREVISTA.**

La entrevista es personalizada teniendo en cuenta que los participantes a pesar de tener unas características equivalentes, no presentaron las mismas actitudes a la hora de argumentar las preguntas a pesar que las circunstancias en las cuales se desarrollaron las entrevistas fueron de manera similar para todos los casos, donde la homogeneidad en el ambiente, los equipos y guion proporcionaron la información de manera que no estuviera sesgada y fuera producto de cada uno de los casos luego analizar e interpretar dicha información alrededor de los participantes.

#### **4.4.3 EL EXPERIMENTO CONCRETO Y LA SIMULACIÓN.**

Teniendo en cuenta una de las principales características del experimento concreto y la simulación es el uso de materiales y manipulación de objetos, lo cual vemos importante ya que “el material manipulativo (sea tangible o gráfico-textual) puede ser un puente entre la realidad y los objetos matemáticos, pero es necesario adoptar precauciones para no caer en un empirismo ciego ni en un formalismo estéril.” (Godino, Batanero & Font, 2004, p 14). Por lo que no podemos dejar todo de la mano del experimento concreto o la simulación sino que en cambio sea un proceso de ambos. Conjuntamente se hace necesario exponer que el trabajo se realiza de forma colectiva donde las apreciaciones de los participantes fueron analizadas tanto de forma grupal como individual.

#### **4.5 ANÁLISIS DE LOS CASOS.**

Para realizar el análisis se tuvo en cuenta una discusión previa sobre lo que se observo de manera superficial en los instrumentos aplicados. Se establece las aptitudes y actitudes de los estudiantes en el desarrollo de cada uno de los instrumentos, por lo que se llega a definir los siguientes casos teniendo en cuenta los niveles en que se presentan inicialmente los estudiantes sobre la teoría de Pirie y Kieren al respecto de la comprensión matemática:

- **Caso 1** son los estudiantes que están ubicados en el **nivel 1**, los cuales serán identificados por el nombre de Andrés.
- **Caso 2** son los estudiantes que están ubicado en el **nivel 2**, los se identificarán bajo el nombre de Brenito.
- **Caso 3** son los estudiantes que están ubicados en el **nivel 3**, los cuales se identificarán como Pedro.

Estos casos fueron los determinados para realizar el siguiente análisis frente a cada uno de los instrumentos tal y como se encuentran a continuación. Además de esto es necesario determinar que el uso de los nombres son por las características del paradigma cualitativo y los compromisos éticos frente a cada uno de los personajes. Al mismo tiempo, tenemos que el análisis se realizó bajo el programa ATLAS.TI versión 7.0 con licencia proporcionada por el apoyo económico del CODI (Comité para el desarrollo de la investigación).

ATLAS.TI es un programa que ayuda a realizar el análisis cualitativo, facilitando el manejo de grandes cantidades de datos en diversos formatos. El programa permite clasificar la información a analizar, para una posterior interpretación por medio del entorno visual que presenta el programa, permitiendo tener de forma resumida, clara y precisa la información por medio de redes conceptuales. A pesar de que el programa nos permite organizar la información, es un proceso de cada investigador establecer códigos y categorías para el programa, ya que este es una herramienta y como tal, presenta opciones para el análisis de la investigación, lo demás lo establece el investigador<sup>6</sup>.

Lo referente al análisis, consistió en primera instancia a una codificación abierta, donde se analizaron las respuestas de los casos por medio de frases completas, las cuales dieran cuenta de la idea o imagen que se tenía; por lo que una codificación por medio de párrafos presenta una extensión demasiado amplia para obtener información, lo contrario de realizar la codificación por palabras u oraciones donde la información podría ser poca al cortar una idea que puede estar en

---

<sup>6</sup>ATLAS.TI es descrita en el CD, anexo de la quinta edición de Metodología de la investigación de Hernández, Fernández & Batista (2010), apartado Manuales.

más de una oración. Desde lo anterior y mediante las discusiones planteadas sobre los términos en que se realizaba la investigación con respecto al Marco teórico y los datos recolectados, se determinaron las familias de códigos o palabras claves que conformarían la codificación teniendo en cuenta que los conceptos que se extraen de los datos, que nos permiten dar cuenta del fenómeno. Además, se definieron unos códigos o subcodigos por medio de los cuales se evaluaría la información de los casos presentados teniendo en cuenta, un barrido principal que se hizo por las respuestas lo que permitió establecer con más claridad la información para su análisis, y final mente con la codificación realizada se procederá a establecer tendencias, similitudes y diferencias entre los casos.

#### **4.5.1 CASO 1, Andrés.**

A partir de lo anterior, tenemos que lo identificado en el caso Andrés es la forma en la que intenta justificarse mediante el planteamiento de ejemplos y analogías, lo cual se vuelve repetitivo en la entrevista, mientras que en el experimento concreto se presenta una aptitud más reflexiva y atenta sobre los factores, datos y variables presentes, además de los debates que se generan entre sus compañeros.

##### **4.5.1.1 Entrevista.**

Partiendo desde los bloques del guion entrevista tenemos que respecto de Andrés, a través del desarrollo de la entrevista se identificaron aspectos frente al concepto los cuales presentamos a continuación.

En lo referente al bloque uno, Andrés presenta una serie de respuestas que se apoyan en la ubicación de datos, a partir de los cuales comienza a plantear hipótesis de una posible solución, organizándolos de tal modo que establece el uso de operaciones para justificar los planteamientos iniciales. Además, se notó para éste caso capacidades respecto al plano coordinado, que desde la intencionalidad del bloque dos fue fundamental para la buena interpretación de graficas e identificación de variables respecto a situaciones en contexto, resaltando la argumentación de ideas a partir de un buen apoyo visual. Por último desde el bloque tres observamos para Andrés una persistencia en lo visual para justificarse,

argumentando por medio de ejemplos y analogías para referirse o acercarse al concepto de función.

*Entrevistador: la situación anterior, ¿representa una relación o una función matemática?*

*Andrés: una función matemática*

*Entrevistador: ¿por qué una función?*

*Andrés: porque la forma en que va creciendo se va formando una parábola*

*Entrevistador: y ¿habría una función entre quien y quién?*

*Andrés: una función entre el tiempo que pasa y el interés en el banco.*

De lo anterior establecemos que Andrés, al respecto de la entrevista y el modelo de comprensión, empieza situándose en el nivel uno “**Primitive Knowing**” ya que identifica datos y variables relacionadas en el problema, pero no logra vincularlos a la solución.

*“Entrevistador: los lasos tiene 600 metros, y tienen franjas rojas, pero uno lo tiene cada 4 metros y el otro lo tiene cada 5. ¿Cuáles coinciden?”*

*Andrés: no coincidirían*

*Entrevistador: ¿no coincidirían las franjas?*

*Andrés: no porque uno esta cada 4 y la otra siempre tendría un metro de más.*

Pero al ir transcurriendo la entrevista encontramos que por medio de las preguntas tenemos se comienza a mejorar su argumentación al poder tener un apoyo en las graficas, ya que relaciona y representa valores de un problema en el plano cartesiano, interpretandolas situaciones cotidianas en las graficas por lo que podemos situar una avance de Andrés al nivel 2 “**Image Making**”.

*Entrevistador: ahora te voy a mostrar unas gráficas y nos vas a decir ¿cuáles corresponden a relaciones y por qué?. Listo entonces la gráfica A. ¿sería una relación o no sería relación?.*

*Andrés: si sería una relación.*

*Entrevistador: ¿por qué?*

*Andrés: porque están tratando sobre un tema que serían, he educación superior ya sean licenciatura o doctorados. Y aquí pues, los diplomas que se adquieren en dichos años.*

*Entrevistador: en la B. ¿sería una relación o no sería una relación?*

*Andrés: no sería una relación*

*Entrevistador: ¿no sería una relación?*

*Andrés: si sería una relación*

*Entrevistador: si sería una relación, ¿por qué?*

*Andrés: tenemos dos variables que serían el tiempo y la velocidad, que se aplican sobre una magnitud, por ejemplo el tiempo en que se demora en vaciar y la velocidad en que se demora en hacer un tanque de agua.*

Igualmente sigue apoyándose en la parte visual para justificarse y comenzar a dar condiciones entre las variables presentes permitiendo un nuevo avance, que lo ubica en el nivel 3 “**Image Having**”.

*Entrevistador: ¿De qué manera, el nivel de los controladores interfiere en el movimiento?*

*Andrés: de la manera en que a más velocidad el salto va ser mucho más elevado, y a más ángulo va a recorrer más distancia el perro.*

*Entrevistador: ¿El tamaño del salto depende del tiempo?*

*Andrés: si*

*Entrevistador: ¿de qué forma?*

*Andrés: que si se mantiene más en el aire el tiempo es mayor y si salta con una distancia menor el tiempo va ser menor.*

Pero al final se puede establecer que hay una conexión fuerte de la función en el contexto donde se tiene en cuenta las dependencias e independencias pero le cuesta abandonar una definición formal del concepto a nivel geométrico.

**Entrevistador:** *¿Qué condiciones debe cumplir una relación entre variables para considerarse función?*

**Andrés:** *que cuando se plantee en un plano cartesiano tenga una relación con la ecuación dada ya sea una línea recta, una parábola, etc.*

**Entrevistador:** *Podrías enunciar algunos casos de funciones entre variables que se presenten en la cotidianidad.*

**Andrés:** *por ejemplo lo que estábamos haciendo en este momento, a menor tiempo que trate de pensar las preguntas que me realicen, mayor será el tiempo a demorarse el examen*

#### **4.5.1.2 Experimento concreto**

Lo concerniente al caso de Andrés se tuvo que en la construcción se planteaba la posibilidad de diseñar el cohete planteando alguna hipótesis iniciales sobre los materiales y el factores que podrían influenciar en el lanzamiento, observándose una identificación previa de las variables del fenómeno, que fueron comprobadas al realizar los lanzamientos. En vista de esto, el diseño fue propio de cada caso, donde por el lado de Andrés se presenta que entre los factores que influían en los lanzamientos no estaba incluido este diseño, ni mucho menos los materiales con que se construyó; ya que los materiales similares para todos, más las sugerencias de construcción establecidas en el inicio de la guía.

Obtenidos los datos y hechos los cálculos, Andrés argumenta desde los resultados y sus explicaciones son soportadas en las variables que encontró en la ejecución del experimento sin alejarse de lo desarrolla y los elementos utilizados.

Establece una serie de conclusiones al respecto del experimento realizado y el concepto de función.  
Al añadir más agua dentro del cohete este viajara a una velocidad menor, reduciendo su altura y tiempo de vuelo. Por otro lado, si su cantidad de agua es menor, el aire atrapado es mayor, su altura sera el doble a la inicial al igual que el tiempo y velocidad.

Ilustración 5: imagen de las conclusiones sacadas por Andrés sobre el experimento concreto.

Por tanto tenemos que a posibilidad para realizar interpretaciones sobre el fenómeno abordado desde la construcción y lanzamiento del cohete realizados por Andrés lo llevaron a identificar concretamente las variables, para después establecer una relación que diera cuenta de lo que los resultados habían arrojado con respecto a las hipótesis planteadas.

#### 4.5.1.3 Simulación

En comparación con el experimento concreto, la simulación presento tres momentos conformados por la animación de la simulación, la observación del trazado de la grafica al igual que la tabla de valores y finalmente la interpretación de los aspectos anteriores. Para lo anterior Andrés establece una serie de condiciones frente a la simulación, lo cual corrobora en la grafica y en la tabla de valores, mediante una observación atenta a la animación, tomando los datos y argumentando sus respuestas en estos, determinando relaciones entre las variables y los resultados.

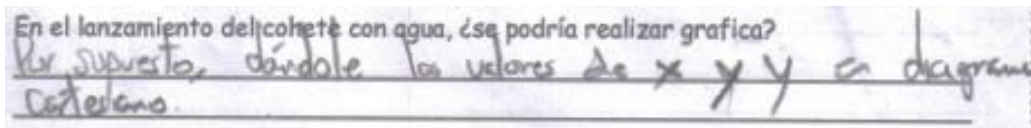
¿Las dependencias e independencias son iguales en la tabla y en la grafica?  
Si, porque cada uno de los valores respeta como su valor en el diagrama o grafica.

Ilustración 6: la dependencia e independencia de los valores obtenidos interpretados por Andrés en dos representaciones.

Pero al igual que en el experimento concreto, sus explicaciones están ligadas a los resultados donde se establecieron ciertas relaciones entre las variables y demás, por lo que sus



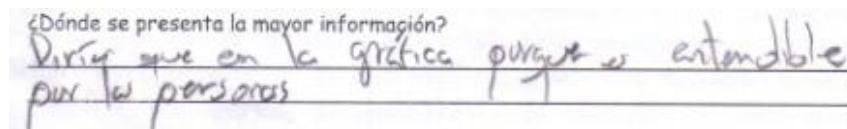
comparaciones frente al experimento concreto se limitaban puntualmente a los resultados más no a una reflexión propia.



En el lanzamiento del cohete con agua, ¿se podría realizar grafica?  
Por supuesto, dándole los valores de  $x$  y  $y$  en diagrama  
cartesiano.

**Ilustración 7: Comparación Experimento concreto simulación por medio de el tipo de representación.**

A partir de los instrumentos aplicados en el caso Andrés observamos que el concepto de función presenta una imagen que se desliga de la parte formal a la hora de presentarla en un contexto, donde la parte visual es la que prima, en especial si se presenta una situación con su respectiva gráfica, ya que tal como lo menciona Andrés en la simulación.



¿Dónde se presenta la mayor información?  
Dicho que en la grafica porque es entendible  
por la personas

**Ilustración 8: Reflexión que realiza Andrés sobre la gráfica.**

Muestra que lo que se establecía desde el inicio del trabajo si era pertinente por la interdisciplinariedad que tiene el concepto frente al análisis de datos e interpretación de información.

#### **4.5.2 CASO 2 Brenito.**

Con Brenito se establece un dialogo directo, donde acude a definiciones previas, concentrándose en responder con precisión y usando pocas veces la citación de ejemplos o analogías, mientras que en el experimento concreto las discusiones con sus compañeros, fueron al respecto de lo que *debería de pasar y lo que paso*, para llegar a una aclaración donde afirma o descarta una idea, en comparación con la simulación donde estableció conclusiones más precisas en la medida que el experimento podía repetirlo variando elementos del mismo.

##### **4.5.2.1 Entrevista.**

En el caso Brenito, la entrevista fue un elemento determinante partiendo de los bloques del guion, ya que observamos elementos referentes al nivel dos del modelo de la comprensión

del concepto, donde Brenito hacía mención a ideas de Relación, Operaciones básicas, Plano cartesiano, conceptos en los que se fundamenta éste nivel. Al respecto realizamos una descripción de lo acontecido en la entrevista.

Partimos del bloque 1, en el cual Brenito establece respuestas que se van ajustando al nivel dos, es importante destacar entonces que plantea claramente el uso de operaciones básicas en la posible solución de problemas, evidenciando una idea sobre relación de variables. Seguidamente en el análisis de graficas va identificando parcialmente la relación que establecen ejes coordenados para diversas situaciones que emergen en el guion, que ya para el bloque 2 de preguntas son evidentes, donde Brenito logra ir clarificando ideas al respecto de la condición entre variables relacionadas en un plano coordenado, fundamentalmente apoyado en graficas que representan tanto situaciones en contexto; como situaciones en las que hay que identificar coordenadas específicas lo que ayuda a establecer dependencia y/o independencia. Para el bloque 3 en Brenito podemos notar que hay un acercamiento al nivel 3 del modelo de comprensión, dado que de acuerdo a la intencionalidad de este bloque se busca más interpretación y reflexión al respecto del concepto, es así como Brenito comienza a unificar elementos que lo aproximan a la nivel tres en la medida que este nivel requiere además de establecer relaciones, ubicarlas en el Plano cartesiano, estableciendo variación y cambio.

Así tenemos para la primera parte la identificación de operaciones en la solución de problemas:

*“Entrevistador: teniendo en cuenta que los dos lazos miden 600 y que uno tiene las franjas cada 4 metros y el otro cada 5 metros*

*Entrevistador: ¿qué harías para determinar la coincidencia de esas franjas?*

*Brenito: pues para saber cuántas coinciden sumaría... pues cuanto suma la diferencia en esas franjas y mirar en qué valor se parecen o se acercan...*

Ahora en la interpretación de grafica de situaciones:

*Brenito: ... si es una relación,*

**Entrevistador:** *¿Por qué es una relación?*

**Brenito:** *porque se está comparando los años con diplomados, entonces a medida de los años cuantos diplomados, pues si sube o disminuye*

**Entrevistador:** *solo si es o no relación y por qué*

**Brenito:** *pues ésta, a mí me parece que es una relación, pues está comparando, está teniendo dos variables*

Situamos al caso en el nivel 2 “**Image Making**” pues podemos notar que en esta parte de la entrevista Brenito logra identificar las operaciones básicas como un elemento en la solución de problemas, además desde un apoyo visual logra ubicarse en el plano cartesiano para interpretar situaciones que relacionan valores en problemas de contexto.

Al transcurrir la entrevista Brenito establece condiciones más específicas en variables relacionadas.

**Entrevistador:** *El grafico “G”*

**Brenito:** *... esa sí, la relación podría ser la de que la circunferencia depende del radio”*

**Entrevistador:** *El grafico “H e I”*

**Entrevistado:** *la “h” y la “i” no serían relaciones*

**Entrevistador:** *¿Por qué?*

**Entrevistado:** *porque no tienen parejas ordenadas, no tienen alguna dependiente*

**Entrevistador:** *El grafico “G”*

**Brenito:** *Si, una relación entre los años que han transcurridos y los diplomas que han entregado, dependiendo las licenciaturas y doctorados*

Seguido, Brenito establece un acercamiento al nivel 3 del modelo de comprensión, estableciendo interpretación y reflexión al respecto del concepto.

**Entrevistador:** *¿se cumple alguna condición o característica entre los números?*

**Brenito:** *estoy pensando como una relación, como si fueran múltiplos de cada uno y si en todos se cumplen*

**Entrevistador:** *¿hay alguna relación, tiempo, desplazamiento y altura?*

**Brenito:** *A mayor velocidad es mayor el salto y que a menor velocidad es menor el salto, y que eso también influye en el tiempo*

**Entrevistador:** *¿cuál sería su relación, volumen y su altura?*

**Brenito:** *el tiempo en que se demora llenar el tanque.*

**Entrevistador:** *¿podrías explicarlo?*

**Entrevistador:** *¿Qué ocurre entonces con el tiempo, a mayor tiempo que ocurre con el volumen y la altura?*

**Brenito:** *que con respecto al volumen y la altura del tanque eso depende de la cantidad de agua que puede almacenar el tanque*

**Entrevistador:** *¿Cuándo podríamos hablar de una relación entre variables?*

**Brenito:** *en el ejemplo pasado, que a mayor cantidad de tiempo, pues dependiendo de la cantidad de agua.*

Podemos decir finalmente a modo de cierre y conclusión que Brenito frente a la entrevista se situó en un nivel dos y fue ascendiendo en la comprensión del concepto partiendo de operaciones básicas hasta relacionar variables e interpretar ejes coordenados, a aproximándose al nivel tres, estableciendo algunas relaciones entre variables de dependencia e independencia.

#### **4.5.2.2 Experimento concreto**

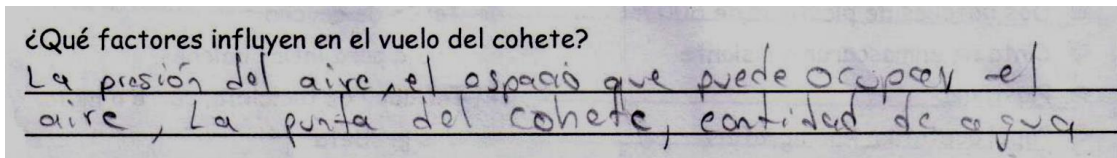
En este punto de la investigación para el caso de Brenito como para los demás casos se estableció la construcción y el diseño del cohete, con el objetivo de hacer consideraciones

iniciales que permitieren plantear hipótesis sobre las variables inmersas en el experimento, de tal forma que fueran conduciendo al concepto desde el modelo la comprensión.

Brenito de forma muy asertiva, logra hacer consideración que le permiten identificar variables en el lanzamiento del cohete, desde la organización de la información obtenida, la identificación de datos, el uso de operaciones entre otros aspectos que lo conducen a realizar inferencias al respecto de relaciones y variables en el experimento.

Es así como se empieza a notar una capacidad de argumenta ideas desde los resultados del experimento.

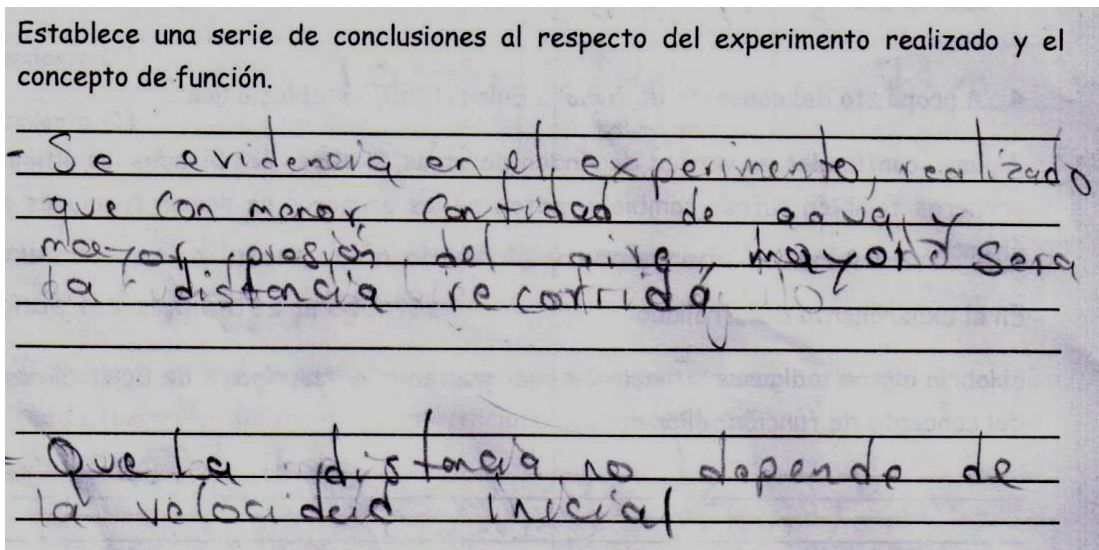
Inicialmente establecemos como Brenito hace consideraciones en la identificación de variables o factores en el experimento:



¿Qué factores influyen en el vuelo del cohete?  
La presión del aire, el espacio que puede ocupar el  
aire, La punta del cohete, cantidad de agua

**Ilustración 9: factores – variables presentes en el experimento con respecto a Brenito.**

Observamos además para éste caso la capacidad para argumentar y dar conclusiones.



Establece una serie de conclusiones al respecto del experimento realizado y el concepto de función.

- Se evidencia en el experimento, realizado que con menor cantidad de agua y mayor presión del aire, mayor será la distancia recorrida.

- Que la distancia no depende de la velocidad inicial

**Ilustración 10: Conclusiones del experimento caso Brenito.**

Brenito muestra capacidades en el desarrollo del experimento concreto, identificando variables relacionadas en el lanzamiento del cohete, a partir de lo cual empieza a establecer condiciones de dependencia que lo van conduciendo al concepto de función. Es importante destacar que Brenito tuvo un gran avance con respecto a la entrevista semiestructurada.

#### 4.5.2.3 Simulación

Con la simulación se buscó posibilitar más la reflexión frente al experimento concreto, es decir que hubiera la posibilidad de repetir el experimento varias veces en las mismas condiciones y diferentes condiciones, además la simulación nos ofrece un análisis gráfico y de datos presentes en el experimento a través de un tabla de valores, lo que consideramos es fundamental en el avance del modelo de comprensión del concepto, ya que desde allí se pueden interpretar relaciones entre variables con mayor facilidad, permitiendo definir dependencia y/o independencia.

Brenito en ésta guía, logra analizar el experimento desde diferentes ángulos, estableciendo la relevancia de una gráfica, de un apoyo visual.

Si se presenta un problema donde puedes utilizar la tabla de valores o una gráfica, ¿cuál utilizarías?

la grafica ya que me muestra con diferentes bombillos la intensidad de luz o la energía que utiliza en cierto tiempo

Ilustración 11: Importancia del aspecto gráfico – visual que muestra Brenito.

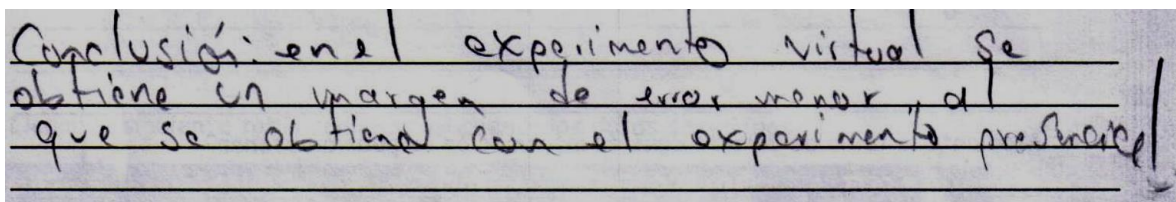
Logra identificar dependencia entre variables relacionadas con situaciones de la simulación.

- ¿Cuáles son los cambios que producen un cambio grande en el lanzamiento?
- - Cambiar el ángulo de la trayectoria
- Cambiar la velocidad

Ilustración 12: Dependencia y/o independencia establecida por Brenito.

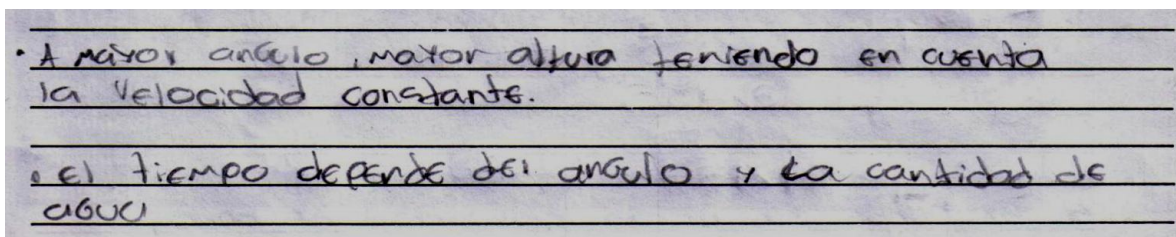


Podemos notar que Brenito establece elementos importantes en la interpretación de datos a través de tablas y gráficas, argumentando sus ideas en la relación de variables.



Conclusión: en el experimento virtual se obtiene un margen de error menor, al que se obtiene con el experimento presencial.

**Ilustración 13: La importancia de la simulación por Brenito.**



• A mayor ángulo, mayor altura teniendo en cuenta la velocidad constante.  
• el tiempo depende del ángulo y la cantidad de agua

**Ilustración 14: Identificación de las variables que se presentaban tanto en la simulación como en el experimento hecho por Brenito.**

Por último determinamos que Brenito logra comparar el experimento concreto y la simulación, al tiempo que identifica las variables en cada uno.

Establecemos entonces que desde los instrumentos aplicados para Brenito al respecto del concepto de función y el modelo de comprensión de Pirie y Kieren, logra situarse en el uso de operaciones básicas y va relacionar variables en contexto, para interpretar información y datos en problemas. Es fundamental destacar que Brenito como los demás casos hace referencia al apoyo visual, a las gráficas para determinar relaciones entre variables y establecer dependencia y/o independencia entre las mismas.

#### **4.5.3 CASO 3, Pedro.**

Lo concerniente al caso de Pedro en sus argumentaciones hace uso de la teoría que se le ha presentado anteriormente y hace uso de esta para dar una respuesta tanto en la entrevista como en el experimento concreto y la simulación. Aparte usa la teoría para generar debate y realizar

algunas deducciones que coloca en consideración con sus compañeros, cálculos y datos obtenidos.

#### 4.5.3.1 Entrevista.

Con Pedro se presenta un desarrollo más fluido frente a cada uno de los bloques, donde da cuenta de capacidades para argumentar, retomando repetidamente a reflexionar sobre las preguntas en busca de la respuesta.

Tenemos así, que cuando Pedro se le presenta las preguntas del bloque uno determina rápidamente las respuestas citando ejemplos y haciendo uso adecuado de las operaciones después de una identificación de los datos y organización de los mismos, además de presentarse algunas hipótesis que luego retoma para confirmar o modificar por medio de los datos y las variables que se presenta en el trabajo.

A la hora e interpretar las graficas, se ubica de manera apropiada analizando las variables presentes en ellas por lo que las respuestas frente al bloque dos son solucionadas con gran detalle, estableciendo las posibles relaciones y condiciones que se presentan entre las variables. De igual manera que con los otros casos, la posición de Pedro frente a las gráficas es un apoyo, en tanto que define dependencias e independencias que presentan los problemas con respecto a la grafica de la situación por lo que se genera acercamientos al concepto de función por medio de ejemplos y definiciones propias provenientes de las preguntas del bloque tres.

Teniendo como base lo anterior, tenemos que Pedro comienza en el nivel 3 “**Image Having**” dado que establece condiciones de dependencia e independencia entre las variables presentes en las gráficas al igual que en los problemas lo cual lo evidenciamos en respuestas como.

***Entrevistador:** ahora te voy a mostrar unas gráficas y me vas a decir ¿cuál de ellas corresponden a una relación? Y ¿por qué?. La gráfica A. ¿es una relación?*

***Pedro:** si, porque están relacionando el número de licenciaturas y doctorados con los graduados de esos años.*

***Entrevistador:** La B.*



***Pedro:** si es relación, porque la velocidad es dependiente del tiempo, la velocidad va cambiando a medida que pasa el tiempo. Aquí va acelerando, aquí disminuye, aquí se mantiene constante, otra vez acelera, disminuye se mantiene constante y desacelera.*

***Entrevistador:** la C*

***Pedro:** si se relaciona, muestra la ciudad A y ciudad B, la cantidad de habitantes que hay cuando pasan los años.*

Como ya se había mencionado el apoyo visual es importante a la hora justificarse, haciendo uso de los elementos conocidos de las graficas y los de mayor referencia.

***Entrevistador:** ¿por qué estas tres no son relaciones?*

***Pedro:** porque esto serían solo unas líneas, y acá esto no dice nada, la gráfica no me dice nada.*

Pedro a pesar de apoyarse en la parte visual, logra trascender al nivel 4 “**Property Noticing**” debido a que las imágenes que venido consolidando, comienza a despartarse de las graficas para comenzar a dar características, o propiedades con las que debe cumplir una relación para ser función.

***Entrevistador:** ¿Cuándo podríamos hablar de una relación entre variables?*

***Pedro:** cuando una depende de la otra.*

***Entrevistador:** ¿Qué condiciones debe cumplir una relación entre variables para considerarse función?*

***Pedro:** la dependencia.*

Es así como la dependencia es una característica en la cual se fundamenta Pedro para describir que una relación es una función, por lo que no ve necesario retomar a las definiciones formales desde conjuntos.

#### **4.5.3.2 Experimento concreto.**

Para la parte del experimento concreto encontramos que Pedro plantea hipótesis sobre el espacio utilizado e intenta comprobar de alguna manera. Además frente a las preguntas identifica

las variables y las determina primero teóricamente y las comprueba con detalle, por lo que toma medidas, apuntes y demás consideraciones que él ve conveniente.

A la hora de diseñar y construir el cohete lee cuidadosamente la guía y en algunas etapas pide sugerencia sobre lo que está haciendo. Adicional a esto, con los materiales dispuesto comienza establecer características como la forma de cortar, las cantidades de cinta a usar para el ensamble permitiendo que quede firme y el peso con el que queda el cohete al final de la construcción, para proseguir a lanzarlo.

Antes de lanzar lee atentamente el procedimiento para saber qué datos debe tomar y que necesita para ello.

Realizado los lanzamientos y consignados en la guía los datos con sus respectivos cálculos procede Pedro a contestar las preguntas en relación con la actividad experimental. De aquí es donde toma los resultados, donde aquellos que no son lo suficientemente claros con respecto a la teoría y alguna condición que quiera dar, son repetidos de manera que algunos los modifica para comprobar alguna deducción o hipótesis que tenía en mente para después contestar con más precisión donde generaliza por medio de los resultados hallados.

Establece una serie de conclusiones al respecto del experimento realizado y el concepto de función.

• A mayor cantidad de agua mayor altura alcanzó mi cohete

• A mayor cantidad de agua mayor tiempo de vuelo

**Ilustración 15: conclusiones del Experimento realizadas por Pedro.**

Para esta circunstancia Pedro mejora en su definición sobre función al apoyarse en lo efectuado previamente con respecto a evaluar las variables que se encontraban en el experimento.

¿Cuándo podemos decir que se presenta una función? ¿Por qué?

Cuando hay dos variables y una depende de otra

**Ilustración 16: Pedro define que es la función.**

#### 4.5.3.3 La simulación.

El estar atento a lo que sucedía en Modellus con respecto a la situación Pedro escribía los datos de manera organizada y puntual, para después realizar un análisis sobre los mismos. Cuando comienza a contestar encuentra menos variables que en las planteadas en el experimento concreto, aun así sus respuestas se justificaban basados en los datos y las variables que identificó.

Como se presentaban con respecto a la cantidad, menos variables, estas las relaciono para dar condiciones en la simulación y dar solución a las preguntas.

¿Será posible que alguna de las variables se pueda quitar, y aun así se pueda presentar el lanzamiento del cohete?

No es posible, ya que sin velocidad no hay movimiento y sin ángulo tampoco hay desplazamiento

**Ilustración 17: identificación de variables en la simulación por parte de Pedro.**

Del análisis que realizó Pedro, solo al final en las conclusiones hay un intento de generalización donde tiene en cuenta el uso de palabras claves constante, mayor e inicial que permiten conformar una comparación y diferenciación entre las variables y las circunstancias que las rodea.

Finalmente saca algunas conclusiones sobre las actividades realizadas en esta guía y la anterior.

- A mayor ángulo, mayor será la altura y teniendo en cuenta una velocidad constante
- Tiempo de vuelo depende del ángulo y la velocidad inicial mayor ángulo mayor tiempo de vuelo

**Ilustración 18: Conclusiones sobre la Simulación por parte de Pedro.**

En concordancia con lo visto sobre Pedro y el desarrollo de los instrumentos, podemos dar cuenta que la parte visual es definitiva en el proceso de comprensión del concepto como tal, al igual que la relación que presenta frente al contexto cotidiano de cada uno de los participantes. Es aquí donde las actividades que despiertan la capacidad de explorar, participar y relacionar toman relevancia en el acto educativo.

## **CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES.**

### **5.1 ALCANCE DEL OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN**

Los resultados obtenidos en la investigación nos permiten establecer que el acto de evidenciar de manera concreta las variables presentes en un fenómeno al igual que identificar por medio de los niveles de comprensión de Pirie y Kieren el cómo se realiza dicha evidencia respecto de la comprensión de un concepto.

Establecemos entonces que se desarrollan las capacidades y aptitudes de argumentación frente al concepto, donde se trasciende de ser una declaración estática anclada a dos conjuntos o a una definición entre variables “ $x$ ” e “ $y$ ” que están en un contexto netamente matemático, ya que se constituyen relaciones de variables en la solución de problemas, ya que cuando fue abortado un contexto desde situaciones de variación y cambio, se plantearon posibilidades de generalizar, teniendo en cuenta la identificación de patrones y propiedades que se fueron mejorando con respecto al lenguaje usado al inicio.

Los procesos aritméticos y algebraicos desde algunas de sus características, como la rigurosidad y la abstracción, deben posibilitar la interpretación de situaciones y problemas, no quedarse en hacer un ejercicio siguiendo los pasos de forma mecánica, estableciendo un proceso que es analítico en un proceso algorítmico donde se llega a la respuesta pero no hay correspondencia con el concepto. Ejemplos de esto puede ser el hallar los tiempos para una partícula en un movimiento y que las soluciones sean  $t = 2s$  y  $t = -3s$  y no se presente justificación al respecto de los resultados, es decir la comprensión conceptual y la relación con situaciones reales y prácticas se olvida, siendo uno de los fines de la formación la integración de conocimientos al vida diaria. Es entonces que destacamos como en nuestro trabajo la fundamentación estuvo en la comprensión de un concepto interdisciplinar, que se aplica en muchas áreas del saber y situaciones de la vida cotidiana.

Desde lo anterior consideramos la importancia de la complementariedad que debe haber entre las áreas, una meta que se debe de tener en las instituciones educativas si se quiere llegar a

la formación integral de los estudiantes. Dicha integración de áreas y saberes consideramos es posible desde la comprensión de los conceptos, ya que mediante la disociación que se presentan aun hoy en día en algunas instituciones, se conllevan a en algunas ocasiones a producirse fracaso, donde aparece la deserción escolar. El hecho de no comprender los conceptos y tan solo recurrir a la memorización a corto plazo solo para aprobar un examen, deja de lado todo el sentido de la formación que prepara para una integración en un contexto, en una sociedad, para enfrentar una vida cambiante que establece retos a medida que transcurre el tiempo.

Pensando en la labor del docente, en la vocación de formar seres integrales capaces de ser líderes en un mañana que establece dementadas inmediatas e innegables como la recuperación del medio ambiente, consideramos la importancia de establecer compromisos con la educación. Creemos que la experiencia frente a los años de enseñar y aprender, debe posibilitar la identificación de estrategias y metodologías que nos permitan contribuir a la formación integral que mencionábamos anteriormente. Es entonces que establecemos el hecho que los maestros deben tener como referencia bases, además de prácticas, teóricas que permiten el tener en cuenta como se están haciendo las cosas respecto de la formación y poder mejorar, es decir pensar en cómo están entendiendo los estudiantes, que están entendiendo y desde allí poder fundamentar cambios apoyados en teorías y modelos como el de Pirie y Kieren que plantean posibilidades frente a la formación, a la comprensión de conceptos.

## **5.2 SOBRE LA ENTREVISTA**

Estableciendo desde la base del guion el cual es la teoría de la comprensión matemática de Pirie y Kieren, donde se tiene como referencia los niveles; encontramos que la interacción entre las preguntas y las respuestas permitieron que se diera un proceso más consiente en el que la reflexión y la interacción con imágenes fueron elementos que en la entrevista establecieron un camino que llevo a mejorar la comprensión del concepto.

Cada pregunta tuvo una intencionalidad que de la mano del carácter de Socrático que tiene la entrevista, contribuyeron a la investigación a la hora de interpretar la ubicación y crecimiento de los niveles de cada caso, por lo que se interpretaron características importantes

como lo son el conocimiento sobre el contexto, la imagen y relación que se presenta entre la imagen y la situación. Adicional a esto, el uso del lenguaje común en relación con las respuestas se va mejorando al hacer uso de nuevas palabras a las cuales presentan una interpretación por lo que se enriquece sus argumentaciones sobre el concepto de función.

### **5.3 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

Al interactuar por medio de la manipulación de elementos concretos y la tecnología se conlleva a progresar con respecto a la interpretación de factores (variables relacionadas) inmersos en el experimento y la simulación, con los que llega a apoyarse para justificarse y argumentar sus ideas.

Cuando se tienen la posibilidad de realizar unas hipótesis previas y de confrontarlas por medio de la práctica, hace que emerja en la persona la capacidad de razonar mediante una reflexión por lo que modifica o afirma las concepciones que se tenían. Podemos decir que para esta instancia se desliga de la formalidad y comienza un proceso de abstracción del concepto que se presenta inmerso en una situación o fenómeno de variación.

### **5.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.**

Lo encontrado nos permite afirmar que el concepto de función mostrado desde una definición que poco a poco puede ser ajustada y formalizada, da pie a presentar la investigación como base en líneas de investigación como lo son la epistemológica e historia, la modelación matemática e inclusión de las TIC al aula, además fundamenta la experimentación como un componente interdisciplinario relevante en la comprensión e integración de conceptos a diversos contextos y situaciones.

Referenciamos la parte epistemológica ya que a pesar de retomarla en el trabajo como uno de los ejes conductores, no se centró específicamente en esta parte quedando aspectos que pueden ser relevantes en futuras investigaciones. Además las Tic son otra línea que vemos con gran auge en la educación en especial cuando tenemos en cuenta la innovación en la que nos encontramos. Establecemos el componente experimental como elemento importante ya que



permite que aptitudes de los estudiantes como la investigación, la argumentación, la resolución de problemas y el análisis entre otras emerjan y puedan ser potenciadas teniendo en cuenta que no necesariamente pueden ser desarrolladas desde el área de las matemáticas sino desde el vínculo con otras áreas.

## **5.5 APORTE DEL TRABAJO EN EL CAMPO EDUCATIVO**

Pensamos que establecemos y fundamentamos una opción para la aplicación de las herramientas informáticas en el aula, ya que la tecnología en la educación está teniendo un gran reconocimiento en los últimos años; lo evidenciamos desde la vinculación que ha tenido la misma gobernación al realizar la dotaciones, de Computadores y Tablet, entre otros, que permiten que se fortalezca el uso de software, con el cual se tiene grandes potencialidades a la hora de dar una clase, teniendo factores a favor como lo son las animaciones, vistas en 3D y un factor importantísimo el cual es el ambiental ya que suple el uso de tizas, papel y otras cosas mediante el uso de tecnología.

Consideramos además que debemos pensar en la formación integral y una de las formas de contribuir a ello es mediante la implantación de nuevas estrategias, que fundamenten la comprensión de los conceptos, que permitan generar una interiorización de saberes y conocimientos, que logren abandonar la idea de la escuela como un lugar de paso y en cambio establezcan desde la educación herramientas practicas del hombre que demanda nuestra sociedad.



## CAPÍTULO 6: ANEXOS.

### 6.1 ANEXOS PARTICIPACIONES EN EVENTOS.

Estos fueron algunos eventos donde fue aceptado el trabajo de investigación y en los cuales se participó en la modalidad de ponentes.

- VIII Congreso internacional didácticas de las ciencias y XIII taller internacional sobre la enseñanza de la física 24 al 29 de marzo 2014 La Habana Cuba.
- VI congreso internacional. Formación y Modelación en ciencias Básicas 7, 8 y 9 Mayo 2014 Universidad de Medellín Antioquia.

### 6.2 ANEXO EVIDENCIA FOTOGRÁFICA.



Ilustración 19: Construcción del cohete.



Ilustración 20: Los cohetes terminados.

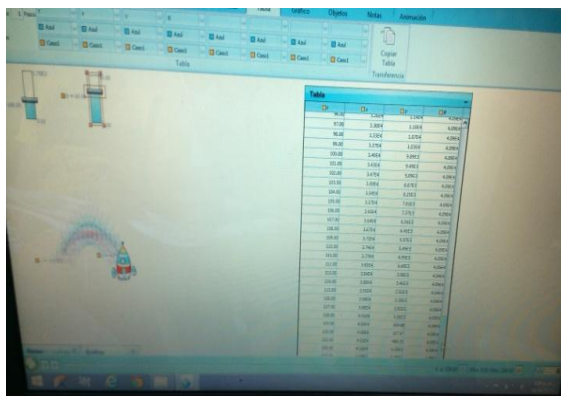


Ilustración 21: La animación presentada en Modellus.



Ilustración 22: Solución de las guías mediante la actividad.



## CAPÍTULO 7: BIBLIOGRAFÍA

### 7.1 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- CAMPILLO HERRERO, P. (1998). *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.
- CEBALLOS, U. L., & LÓPEZ M, A. (Abril de 2003). Relación y función: conceptos claves para el aprendizaje del cálculo y una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y pedagogía*, vol 15 (N 35), P.P 130-140.
- CUESTA BORGES, A. (2007). *El proceso de Aprendizaje de los conceptos función y extremo en estudiantes de economía: Análisis de una innovación didáctica*. Universidad Autónoma de Barcelona., Barcelona.
- DORADO CABRAL, R. C., & MALDONADO RIVERA, J. L. (2010). Enseñanza de las ciencias físicas a estudiantes de primaria y secundaria por medio de sencillos talleres científicos. *Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, P.P 415-421.
- FARFÁN, R. M., & GARCÍA, M. A. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, P.P 489-494.
- GARCIA , A. (2011). *Historia de la Matemática*. Universidad de Veraguas Facultad de ciencias naturales y exactas, Escuela de matemáticas.
- GODINO, J. D., BATANERO, C., & Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: P 456.
- HAREL, GUERSHON, & DUBINSKY, E. (1992). The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. *Mathematical Association of America MAA, Vol. 25*.



- HERNÁNDEZ VALDERAMA, E. J. (2005). *Software educativo para el aprendizaje experimental de las matemáticas*. Fundación Arturo Rosenblueth Tecnología Educativa Galileo.
- HERNÁNDEZ, FERNÁNDEZ, & BAPTISTA. (2010). *Metodología de investigación* (Vols. vol, 5). McGraw Hill.
- JURADO, F. M., & LONDOÑO CARO, R. A. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la suma de una serie, vía áreas de figuras planas*. Universidad de Antioquía .
- MEEL, D. E. (2003). Moselos y Teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, vol. 6(N 003), P.P 221-278.
- MESA, Y. M. (2008). *El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico*. Medellín.
- PAREJA HEREDIA, D. (Junio de 2007). Euler. Tres siglos después. *Revista Lecturas Matemáticas*, vol. 28(N 1), P.P 41-45.
- PIRIE, S., & KIEREN, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics is currently published by Springer.*, P.P 165-190.
- RUIZ HIGUERAS, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén.
- VILLA OCHOA, J. A., JARAMILLO LÓPEZ, C. M., & ESTEBAN DUARTE, P. V. (2011). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la Teoría de Pirie y Kieren. p 228.



## 7.2 CIBERGRAFÍA

ANDRADE, J. M., & SARAIVA, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. (Portuguese). *Multiple representations: a contribution for the learning of the concept of function. (English)*, 15(2), 137–169. Consultado el 7 marzo del 2013. <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=fua&AN=78177047&lang=es&site=ehost-live>

STONE, M. H. (1965). II. Learning and using the mathematical concept of a function. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 30(1), 5–11. Consultado el 7 marzo del 2013.

<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ehh&AN=17518035&lang=es&site=ehost-live>

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Fecha de consulta 27 de marzo del 2013. <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:MLh1sKxXzoQJ:aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/mod/resource/view.php%3Fid%3D47791+lineamientos+curriculares+de+matematicas+concepto+de+funci%C3%B3n+matematio&cd=5&hl=es&ct=clnk&gl=co>

Ministerio de Educación Nacional (2008). Estándares Básicos de competencias en Matemáticas. Fecha de consulta 15 de febrero del 2013 [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)