



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**  
1 8 0 3

**Facultad de Educación**

**La simetría y su comprensión a través del doblado de papel en el marco de  
enseñanza para la comprensión.**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciados en matemáticas y física**

**AMÉRICA MARÍA CARDONA ARIAS**

**JHON EDWAR GÓMEZ BERRIO**

**Asesor(a)**

**ZAIDA MARGOT SANTA**

## Resumen

El presente trabajo es una de investigación cualitativa encaminada a propiciar la comprensión del concepto de simetría a través del doblado de papel como estrategia didáctica, en un grupo de estudiantes del grado décimo de una institución educativa de Medellín (Colombia). Para lograr el propósito se realizaron una serie de actividades con doblado de papel, apoyadas en el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión. Dichas actividades hicieron parte de tres fases de ejecución: fase de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis. La información recogida en cada una de ellas se analizó a la luz de descriptores de desempeños diseñados a partir de las dimensiones de comprensión referidas en el marco teórico; estos, a su vez, hicieron posible el análisis de las diferentes actividades y construcciones con doblado de papel realizada por los participantes, logrando así establecer los niveles de comprensión alcanzados por cada uno de ellos. El proyecto de investigación propone una unidad curricular encaminada a facilitar la comprensión del concepto de simetría con el doblado de papel como estrategia didáctica, las actividades que se proponen se realizaron con los estudiantes que hicieron parte del proyecto y se fueron refinando en el trabajo de campo.

**Palabras claves.** Comprensión, concepto de simetría, geometría del doblado de papel, Enseñanza para la Comprensión.



## Tabla de contenidos

Resumen.....	II
Tabla de contenidos.....	III
Introducción .....	VIII
1. Antecedentes .....	10
1.1. Origen de las matemáticas.....	10
1.2. La geometría como representación gráfica de las matemáticas .....	13
1.3. Doblado de papel en la enseñanza de la Geometría .....	15
1.4. El concepto de Simetría.....	17
2. Planteamiento del Problema .....	20
2.1. Objetivo General .....	31
2.2. Objetivos Específicos.....	31
3. Marco Teórico: Enseñanza Para La Comprensión.....	33
3.1. Generalidades .....	33
3.2. Elementos para la comprensión.....	35
3.2.1. Tópicos Generativos.....	36
3.2.2. Metas de Comprensión.....	36
3.2.3. Desempeños de Comprensión .....	37
3.2.4. Evaluación diagnóstica continua.....	38
3.3. Las dimensiones para la comprensión.....	39



3.3.1. Contenido.....	39
3.3.2. Método .....	40
3.3.3. Propósitos.....	40
3.3.4. Formas de Comunicación.....	40
3.4. Niveles para la Comprensión .....	41
3.4.1. Ingenuo.....	41
3.4.2. Novato.....	41
3.4.3. Aprendiz.....	42
3.4.4. Maestría.....	42
4. Metodología .....	44
4.1. Paradigma.....	44
4.2. Tipo de estudio .....	46
4.3. Participantes .....	48
4.4. Métodos de recolección de información .....	49
4.4.1. Cuestionarios.....	51
4.4.2. Actividades con el doblado de papel. L .....	51
4.4.3. Observaciones .....	52
4.4.4. Diálogos. ....	54
5. Unidad Curricular .....	55
5.1. Tópico Generativo.....	56





5.2. Metas De Comprensión .....	56
5.2.1. Hilo conductor.....	57
5.3. Actividades y Desempeños .....	57
5.3.1. Fase de Exploración .....	57
5.3.2. Fase de Investigación Guiada.....	69
5.3.3. Fase de proyecto final de síntesis.....	96
5.3.4. Tablas de Descriptores .....	99
5.4. Evaluación diagnóstica continua .....	106
6. Análisis de la información .....	108
6.1. María.....	108
6.1.1. Fase de exploración.....	109
6.1.2. Fase de investigación guiada.....	111
6.1.3. Proyecto final de síntesis.....	113
6.1.4. Análisis del proceso de comprensión de María.....	114
6.2. Lola.....	118
6.2.1. Fase de exploración.....	118
6.2.2. Fase de investigación guiada.....	120
6.2.3. Proyecto final de síntesis.....	123
6.2.4. Análisis del proceso de comprensión de Lola.....	124
6.3. Toni .....	128



6.3.1. Fase de exploración.....	128
6.3.2. Fase de investigación guiada.....	130
6.3.3. Proyecto final de síntesis.....	133
6.3.4. Análisis del proceso de comprensión de Toni.....	135
6.4. Ema.....	139
6.4.1. Fase de exploración.....	139
6.4.2. Fase de investigación guiada.....	141
6.4.3. Proyecto final de síntesis.....	142
6.4.4. Análisis del proceso de comprensión de Ema.....	145
7. Conclusiones.....	149
7.1. Respecto a la pregunta de investigación.....	149
7.2. Respecto al objetivo general.....	151
7.3. Respecto a los objetivos específicos.....	152
7.4. Aportes a la Educación Matemática.....	153
7.5. Recomendaciones.....	154
Referencias Bibliográficas.....	157
Anexos.....	161
Cuestionario de los estudiantes.....	161
María.....	161
Lola.....	163



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

Facultad de Educación

Toni.....	165
Ema. ....	167
Cuestionario familiar.....	169
María. ....	169
Lola. ....	170
Ema. ....	171
Certificado de participación en ASOCOLME. ....	172

## Introducción

La geometría está presente en muchos aspectos cotidianos, desde la construcción de objetos y edificaciones, hasta en la naturaleza, la ciencia y la belleza; este aspecto hace que cobre gran importancia el conocimiento y comprensión de los diferentes conceptos que la geometría encierra. Por esta razón, es de gran relevancia la identificación y reflexión de las problemáticas que se puedan presentar al momento de abordar el conocimiento geométrico dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, con el objetivo de llegar a proponer y realizar actividades o estrategias didácticas que faciliten el diálogo entre el conocimiento geométrico y los estudiantes.

Tomando en cuenta lo anterior y las observaciones realizadas dentro del contexto educativo, el presente proyecto de investigación se desarrolla con el propósito de posibilitar la comprensión del concepto de simetría en un grupo de estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, puesto que la simetría está inmersa y es necesaria para el conocimiento científico, natural y cotidiano del estudiante. Del mismo modo, el estudio se apoya en el doblado de papel como medio facilitador o estrategia didáctica, que propicie dicha comprensión en los estudiantes y que, además, dinamice el proceso de enseñanza y aprendizaje. Así mismo, se enmarca en la Enseñanza para la Comprensión<sup>1</sup>, puesto que permite analizar y reflexionar no solo sobre los diferentes contextos, sino también sobre las prácticas pedagógicas

---

<sup>1</sup> A lo largo del texto se utilizará la sigla EpC para referirse al marco teórico Enseñanza para la Comprensión.



y el currículo, con la finalidad de proponer y desarrollar una serie de actividades encaminadas a lograr la comprensión del concepto de simetría en los participantes.

La investigación se realiza bajo un enfoque cualitativo, ya que lo que se busca es describir e interpretar las diferentes dinámicas y realidades presentes en el transcurso de las actividades; además, se hace uso del estudio de casos para analizar la comprensión del concepto de simetría en cada uno de los participantes, mediante el trabajo de campo. Por último, se realiza una unidad curricular apoyada en el marco de la Enseñanza para la Comprensión, que tiene como objetivo superar las diferentes dificultades que puedan surgir en los estudiantes y en la cual se recurre al doblado de papel como el principal medio para llegar a la comprensión del concepto objeto de estudio.

## 1. Antecedentes

Las matemáticas siempre se han considerado como un saber importante y necesario para el hombre, que le permite conocer el mundo que lo rodea y explicar diferentes fenómenos de la naturaleza, además de esto, también posibilita la creación y construcción de nuevos saberes y de diferentes objetos necesarios para el hombre. La geometría, como rama de las matemáticas, se encuentra inmersa dentro de estas situaciones e historicidad; en este sentido, se considera que si se desea abordar un concepto geométrico en el desarrollo del presente proyecto, es fundamental tener un acercamiento histórico sobre el surgimiento, la evolución y las diferentes concepciones de las cuales han sido objeto las matemáticas y, por ende, la geometría.

### 1.1. Origen de las matemáticas

Las matemáticas son una ciencia teórica y aplicada que hace parte de la vida cotidiana; diversos aspectos como el trabajo y el estudio, hasta las labores domésticas requieren algún conocimiento matemático. Según la Serie Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN, 1998), tanto el origen como la naturaleza de las matemáticas ha sido un gran tema de debate durante toda la historia, por lo que el MEN (1998) precisa las siguientes concepciones:

El Platonismo concibió las matemáticas como un sistema de verdades que existían siempre e independientemente del hombre, donde el matemático tenía el deber de develarlas y descubrirlas puesto que a estas leyes obedecía y estaba sometido. El



Platonismo reconocía que las figuras geométricas, las operaciones y las relaciones aritméticas eran misteriosas; tenían propiedades que se descubrían y otras que se trataban de descubrir sin conseguirlo, además de existir otras que ni siquiera se sospechaban, puesto que las matemáticas trascendían la mente humana, y existían fuera de ella independiente de nuestros conocimientos previos.

Por otra parte, el Logicismo consideraba las matemáticas como una rama de la lógica con vida propia pero con el mismo origen y método; planteaba que era necesario definir los conceptos matemáticos mediante la lógica reduciendo los teoremas de las matemáticas a simples deducciones lógicas. Para los antiguos, la lógica era más un arte que una ciencia, un arte constituido de conceptos y proposiciones, con juegos de preguntas y respuestas y era un pasatiempo intelectual que se realizaba en la academia de Platón y en el liceo de Aristóteles, en el que los contendientes se enfrentaban en público con sus preguntas y respuestas.

El Logicismo identificaba la existencia de la lógica deductiva, que buscaba la coherencia de las ideas entre sí, partiendo de premisas generales para llegar a conclusiones específicas y, de la lógica inductiva, que procuraba la coherencia de las ideas con el mundo real; partía de observaciones específicas para llegar a conclusiones generales, que se iban clarificando a través de experiencias y contrastaciones empíricas. El logicismo pretendía reducir los conceptos matemáticos a los conceptos lógicos, tratando de no caer en paradojas ni contradicciones.

Por su parte, el Formalismo reconocía que las matemáticas son una creación de la mente humana que consistía en unos axiomas, definiciones y teoremas los cuales se ensamblan por medio de unos símbolos a partir de ciertas reglas preestablecidas. Para el formalismo, la verdad de la matemática radicaba en la mente humana pero no en las construcciones que ella realizaba internamente, sino en la coherencia con las reglas del juego simbólico respectivo. En la actividad matemática debían establecerse unos términos iniciales y relaciones básicas donde no se permitía datos imprecisos, todo tenía que estar perfectamente definido.

Sin embargo, el intuicionismo argumentaba que las matemáticas también eran una construcción, pero que debían partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que solo podría existir lo que en ellas haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición. Es importante resaltar que el Intuicionismo supone que cada persona es capaz de realizar con su mente las construcciones e intuiciones matemáticas y por ello no se ocupa de estudiar ni de descubrir las formas en cómo se realizan.

Finalmente, el Constructivismo considera que las matemáticas son una construcción de la mente y que únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos. El constructivismo matemático es muy coherente con la Pedagogía Activa, se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da,





puesto que todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos.

De lo anterior, se infiere que diferentes posturas filosóficas y pedagógicas han intentado dar un acercamiento teórico a lo que son las matemáticas y, por ende, a la geometría; adicionalmente, han tratado de asignarle o atribuirle un papel dentro del universo, que aunque puede ser distinta en cada una de las concepciones, sigue esta ciencia ocupando un papel central para el conocimiento y las representaciones que el hombre tiene y ha tenido del mundo.

## **1.2. La geometría como representación gráfica de las matemáticas**

Desde la antigüedad, las matemáticas y, particularmente, la geometría, han sido de gran importancia tanto para la comprensión del mundo, como para la producción de conocimiento científico. Desde los años 325– 265 a.C., Euclides desarrolló trece libros donde mostraba un estudio profundo de la geometría, sus propiedades y elementos. Los griegos argumentaban que el universo y el mundo obedecía a unas reglas matemáticas y geométricas, por lo que consideraban que “la geometría conduce el alma hacia la verdad y crea el espíritu de la filosofía”. (Platón, 428 a.C. – 347 a.C.)

Es así como la geometría se convierte en una de las ramas de las matemáticas que guarda una estrecha relación con nuestro entorno, puesto que el espacio donde habitamos puede representarse geoméricamente. En este sentido Ivorra (2008) define a la geometría como una de las ramas más antiguas de las matemáticas y su objeto de estudio está



íntimamente arraigado en nuestra forma de concebir la realidad; es decir que todo lo que nos rodea, tocamos vemos y oímos lo procesamos en primera instancia en términos geométricos.

Godino y Ruiz (2002) consideran, del mismo modo la geometría, como una rama de las matemáticas, la cual se ocupa del estudio de unas figuras geométricas que son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades, ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Pero la naturaleza de estos objetos es diferente de los elementos que percibimos en nuestro alrededor, dado que las figuras geométricas no tienen consistencia material, ni peso, ni color, ni densidad. Por lo tanto, sostienen que:

El lenguaje geométrico tiene su origen en nuestra necesidad de describir el mundo, de las formas de los cuerpos perceptibles que nos rodean, su tamaño y posición en el espacio. Pero superada la primera fase de clasificación de las formas, de identificación de las propiedades de las clases de objetos y la creación de un lenguaje que permita su descripción de manera precisa, la actividad geométrica se ocupa de estructurar el mundo de entidades geométricas creadas y de deducir las consecuencias lógicas que se derivan de los convenios establecidos. (pp. 456-457)

Por otra parte, el MEN (1998), en su Serie de Lineamientos curriculares de Matemáticas, define la geometría como una herramienta para interpretar, apreciar y entender el mundo que nos rodea, el cual es eminentemente geométrico. En este sentido, se podría considerar que el universo está regido por diferentes leyes matemáticas, las cuales son creadas o simplemente descubiertas por el hombre; sin embargo, es la geometría la



responsable de llevar a nuestros ojos estas leyes en una forma gráfica y, por ende, factibles de ser comprendidas por el individuo que las aprecia.

### 1.3. Doblado de papel en la enseñanza de la Geometría

Royo (2002) precisa que el doblado de papel se originó en Japón, como una práctica donde se doblaba el papel cuadrado para construir una serie de figuras artísticas, con la única regla de usar solo dobleces; esta actividad también es conocida con el nombre de *Papiroflexia* u *origami*; esta última se deriva de dos palabras japonesas, la primera que significa doblar (*ori*) y la segunda que se deriva de la palabra papel (*Kami*). Los musulmanes y españoles también utilizaron el doblado de papel en la construcción de figuras como la pajarita o pájara pinta (Royo, 2002).

En la actualidad, esta técnica está tomando gran importancia, puesto que además de constituirse como un arte mediado por el papel, también es una gran herramienta para la enseñanza y comprensión de diferentes conocimientos científicos. Al respecto Lang (1989, citado por Royo, 2002), refiere que la escuela japonesa ha utilizado la papiroflexia o el doblado de papel como una forma artística para expresar lo que se siente y representarlo con un mínimo de pliegues. Por otra parte, en occidente, la papiroflexia ha sido desarrollada por matemáticos, ingenieros, físicos y científicos, como Robert Lang (1989, citado por Royo, 2002) y Aníbal Voyer (2000, citado por Royo, 2002), puesto que para la realización de las figuras se han desarrollado gran número de métodos matemáticos. En este mismo sentido, Geretschlager (1995) precisa que la conexión entre la geometría y el origami está bien establecida, es por ello que educadores como el alemán Friedrich Froebel,

han sugerido el uso de este como una herramienta para la enseñanza de formas geométricas elementales.

El doblado de papel también es considerado una importante herramienta para la enseñanza de la geometría y la resolución de problemas matemáticos de trigonometría, ecuaciones y secciones cónicas. Es por ello que se han desarrollado una serie de axiomas y definiciones que estructuran la geometría del doblado del papel, ya que como lo afirman Santa y Jaramillo (2010):

Esta nueva geometría, denominada geometría del doblado de papel, tiene sus raíces en los seis axiomas postulados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita, en el First International Meeting of Origami Science and Technology celebrado en el año 1989 y en el séptimo axioma postulado por el japonés Koshiro Hatori (2003). (p. 341)

Estos axiomas se presentan a continuación, retomando a Lang (1996 - 2003, citado por Santa y Jaramillo, 2010):

1. Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede hacer un doblado que pasa a través de ellos.
2. Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se puede hacer un doblado que lleva a  $P_1$  sobre  $P_2$ .
3. Dados dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , se puede hacer un doblado que pone a  $l_1$  sobre  $l_2$ .
4. Dado un punto  $P_1$  y una línea  $l_1$ , se puede hacer un doblado que pone a  $l_1$  sobre sí misma y pasa por  $P_1$ .
5. Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y una línea  $l_1$ , se puede hacer un doblado que pone a  $P_1$  sobre  $l_1$  y pasa por  $P_2$ .

6. Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , se puede hacer un dobléz que pone a  $P_1$  sobre  $l_1$  y a  $P_2$  sobre  $l_2$ .
7. Dados un punto  $P_1$  y dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , se puede hacer un dobléz perpendicular a  $l_2$  que ponga el punto  $P_1$  sobre la línea  $l_1$ . (pp. 343-349)

#### 1.4. El concepto de Simetría

La simetría está presente en diferentes aspectos de nuestro entorno, tanto en el conocimiento científico, como en las matemáticas, la geometría, la ingeniería, como en el arte y la naturaleza. Weyl (1989) expresa que la palabra simetría se utiliza cotidianamente para definir algo bien proporcionado y equilibrado; por otra parte, la simetría está ligada a la belleza y a la perfección. En este mismo sentido Wolf y Kuhn (1959) definen la simetría de la siguiente manera:

Simetría significa una armonización de diferentes partes de un todo; está dada por la relación (bella) de una parte con otra y de las partes con el todo; se expresa (ante todo) en la repetición de lo igual, ya sea que en determinado objeto se repita un motivo o una aptitud o que se pueda igualar ampliamente objetos diferentes. Si la forma es lo que da vida e importancia a la idea de lo bello, entonces se encuentra simetría en todos aquellos casos en los cuales las ideas se manifiestan en la materia. (p. 23)

Desde una perspectiva más geométrica y matemática, Gómez, Romero, Vergara y Albadan (2009) definen la simetría como el resultado de la actividad de asociar cada punto de una figura con otro punto llamado imagen, donde la distancia del punto y su imagen al





eje de simetría, es el mismo, y el segmento que une a estos dos puntos es perpendicular al eje de simetría. Así mismo, Weyl (1989, citado por Palacios, 2007) argumenta que:

En un sentido matemático, la noción de simetría es un concepto preciso que viene dado por medio de una aplicación entre elementos de conjuntos: dado un cuerpo, una configuración especial, es simétrico con respecto a un punto, a una recta o a un plano dado  $E$  si se transforma en sí mismo al reflejarse en  $E$ . (p. 10)

En esta misma línea, Leithold (2007) argumenta que dos puntos diferentes  $P$ ,  $Q$  son simétricos con respecto a una recta si y solo si la recta es la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$  delimitado por los dos puntos; además un tercer punto  $R$  es simétrico a los dos puntos iniciales si y solo si este último es el punto medio del segmento  $\overline{PQ}$ .

Por su parte, Palacios (2007) refiere que existen diferentes simetrías de las figuras planas, como la simetría cíclica en la cual las figuras geométricas tienen un centro; la simetría diedral perteneciente a grupos puntuales, donde solo se pueden tener rotaciones respecto al centro y reflexiones respecto al eje que pasa por este centro; la simetría axial la cual se realiza a través de un eje. Por otra parte, Wolf y Kuhn (1959) precisan que la simetría se hace evidente por medio de superposiciones que se hacen sobre el mismo objeto o figura por medio de planos y rectas, estas operaciones de superposición hacen posible el estudio de la simetría y la clasificación de la misma; dentro de estas operaciones están los movimientos de traslación, reflexión, rotación y extensión.

Así mismo, señalan que gracias a los diferentes movimientos de superposición, ya sean simples o compuestos, se pueden conocer las diferentes simetrías posibles como lo es la simetría isométrica, en la cual se repiten regularmente los diferentes motivos o formas en una figura; la simetría homeométrica, donde se repiten los motivos o formas en una figura pero varía el tamaño de los mismos; la simetría catamétrica, los motivos o formas son diferentes pero se relacionan por medio de alguna ley, y la ametría que es la falta de simetría ya sea en la forma o en la relación que se guarde entre los diferentes motivos o formas de una figura (Wolf y Kuhn, 1959).



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

## 2. Planteamiento del Problema

En la actualidad, las matemáticas son concebidas por algunos docentes como una de las ciencias más complejas, que requiere de un profundo análisis en la utilización y aprehensión de sus conceptos. Además de esto, se puede presentar cierta desconfianza y desinterés en algunos estudiantes al momento de enfrentarse a ellas. Sin embargo la comprensión de los diferentes conceptos y temas que encierra esta ciencia es necesaria en la formación integral del estudiante y es por ello que su enseñanza es de gran importancia. Perrone (1999) precisa que los currículos que se desarrollan en el presente, hacen énfasis en la comprensión de los alumnos en cuanto a los conceptos claves de las diferentes disciplinas, esto por medio de la investigación y la construcción de su propio conocimiento; específicamente el Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas (NCTM) precisa que los estudiantes deben entender las matemáticas como un campo integrado de investigación, que busca desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan resolver problemas, comunicar, razonar y hacer conexiones, posibilitando así la valoración de esta ciencia en el contexto social.

Por estas razones se ha recurrido a la implementación de actividades lúdicas en la enseñanza de las matemáticas, buscando despertar la motivación de los estudiantes y amenizar el proceso formativo. Además de esto, las actividades lúdicas brindan la posibilidad de que los estudiantes desempeñen un papel activo al momento de abordar y construir conocimientos matemáticos, generando confianza y simpatía por esta ciencia. Al respecto, Martínez (2007) señala que actualmente los docentes apuestan por procesos de





enseñanza de las matemáticas más lúdicos, dado que buscan que se disminuya la aversión, el rechazo, el odio y todo ese compendio de acciones sustentadas en el fracaso de los estudiantes en esta asignatura, lo que también ha llevado a que se convierta en una de las más impopulares del currículo escolar.

De hecho, para la geometría, como rama de las matemáticas, es de gran importancia la utilización de algún tipo de proceso que dinamice su enseñanza; por tal razón se ha recurrido a la interacción con figuras geométricas a partir de la manipulación de objetos tangibles como metodología lúdica, la cual permite a los estudiantes reconocer formas y propiedades, para que a su vez logren desarrollar un nivel de mayor abstracción geométrica y complejidad conceptual. De acuerdo a lo anterior, García y López (2008) precisan:

El punto de partida para el aprendizaje de la geometría es el entorno físico: en esta disciplina el uso de material concreto (sobre todo en los primeros grados de escolaridad) cobra particular importancia al constituirse en un primer acercamiento hacia los diferentes grados de abstracción que se espera que los alumnos alcancen. (p. 80)

La falta de interacción física que el alumno tiene con el objeto de estudio causa dificultades en la integración y construcción del saber en su proceso formativo. En muchas de las prácticas docentes, se puede notar que la gran mayoría de los conceptos matemáticos son presentados al estudiante de manera abstracta y textual, para que este los asimile o memorice sin participar de una reflexión sobre ellos. En este sentido, García y López (2008) argumentan que los ejercicios donde los estudiantes utilizan sus instrumentos



geométricos permiten desarrollar muchas habilidades propias de la Geometría, además de posibilitar que los estudiantes construyan nuevo conocimiento.

Del mismo modo, en la Serie Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se afirma que para el aprendizaje de la geometría se debe dar prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, que posibiliten al alumno moverse, dibujar, construir y producir, para lograr así una conceptualización o representación interna del conocimiento. En esta perspectiva, se podría pensar el doblado de papel como una solución a estas problemáticas, además de constituirse como una gran herramienta de enseñanza de la geometría en el aula; ya que no solo permite la dinamización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que le brinda un rol activo y central al estudiante dentro de este proceso, lo que a su vez se verá reflejado en el interés y la disponibilidad hacia el conocimiento geométrico.

Es así como Jaramillo y Monsalve (2009), argumentan que el doblado de papel como actividad lúdica, proporciona un potencial cognoscitivo, además es de gran utilidad didáctica, puesto que permite a los estudiantes acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos geométricos implícitos en dichas actividades. Del mismo modo, refieren que:

Cuando aplicamos el doblado de papel como herramienta alterna para la solución de problemas, es sorprendente el interés y el entusiasmo con que los estudiantes enfrentan la solución de ciertos ejercicios propuestos en los libros clásicos de la enseñanza del cálculo. (p. 11)

Se podría afirmar entonces que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría que se vive en el aula, se centra en la búsqueda de estrategias para que los estudiantes logren integrar a su saber previo nuevo conocimiento de una manera sólida y estructurada, que posibilite el manejo y aplicación de diferentes conceptos geométricos a su cotidianidad. Se pretende lograr la vinculación de cada uno de los procesos a la realidad del estudiante por medio de actividades familiares y lúdicas que faciliten la integración de nuevo conocimiento geométrico.

Sin embargo, considerando la experiencia personal lograda en la formación como docentes y lo observado en las prácticas pedagógicas, se ha notado en algunos docentes poco interés en la enseñanza de la geometría, puesto que esta es presentada de manera memorística y sin conexión a la realidad del alumno; las estrategias utilizadas no van más allá de un libro de texto o de la solución de una serie de talleres y ejercicios; además de ello, en varias instituciones educativas se le resta importancia a la geometría, ya que su enseñanza es relegada a los últimos temas del año, dando prioridad al desarrollo de competencias de tipo variacionales y métricas, otorgándole así una funcionalidad superficial y poco profunda al conocimiento geométrico.

Contrario a lo anterior, el MEN (1998), por medio de la Serie Lineamientos Curriculares de matemáticas, justifica el desarrollo del pensamiento geométrico como potenciador en el progreso de la inteligencia espacial planteada por Gardner (1983, citado por el MEN, 1998) en su teoría de las inteligencias múltiples, las cuales a su vez desarrollan en el estudiante estrategias y competencias para alcanzar otro tipo de conocimientos



científicos con el fin de que el estudiante pueda comprenderlo y lo aplique en otras situaciones. A este conocimiento científico se inscribe la simetría y su comprensión, ya que como parte de las matemáticas y la geometría permite el fortalecimiento y el desarrollo del pensamiento geométrico, lo que lo constituye como un concepto necesario para el mejoramiento de la inteligencia espacial.

De hecho, la simetría es un concepto que está presente en nuestro entorno y en las diferentes ramas de conocimiento; desde el biológico, artístico hasta el geométrico, ya sea para la elaboración de gráficos, estructuras, obras de artes; para la explicación de fenómenos naturales o para la resolución de problemas matemáticos y geométricos. En este sentido, Bohórquez, Boscán, Hernández, Morán y Salcedo (2009), precisan:

Pero quizás el terreno más fértil para la simetría lo conseguimos de forma natural en la geometría. El solo término geometría nos lleva casi de inmediato al concepto de simetría, a imágenes simétricas, armónicas [...] Incontables problemas geométricos se resuelven haciendo uso de la simetría. Los triángulos isósceles, por ejemplo, gozan de una gran cantidad de propiedades y constituyen un recurso de enorme utilidad en la solución de problemas que involucran no solo otros tipos de triángulos sino también diferentes figuras como circunferencias, polígonos, elipses, etc. Muchos otros problemas se resuelven mediante movimientos simétricos en el plano, como la simetría central y la simetría axial. En las construcciones geométricas con regla y compás está presente permanentemente la simetría: trazado de circunferencias, mediatrices, bisectrices, etc. La



simetría constituye, en fin, una herramienta de invaluable utilidad en la geometría. (pp. 478 – 479)

La relación de la simetría con lo bello, con lo regular y lo perfecto hace que se recurra no sólo a las obras de arte para que se haga evidente, sino también a las diferentes formas que nos presenta la naturaleza, en las que también se puede apreciar con detenimiento y cuidado, puesto que en varias ocasiones se expresa en forma muy sutil. Sin embargo, esto no le resta importancia al concepto puesto que, como afirma Weyl (1989), “simetría, tan amplio o tan estrecho como usted puede definir su significado, es una idea por la que el hombre a través de las edades ha tratado de comprender y crear orden, la belleza y la perfección” (p. 5).

La simetría ha estado presente en muchas de las representaciones que el hombre ha formulado, desde diferentes disciplinas sobre los fenómenos naturales hasta la constitución y comprensión de las leyes que rigen el mundo y el universo. De este modo Wolf y Kuhn (1959) sostienen:

En el mundo de la naturaleza habrá que concebir, por ejemplo, la forma simétrica de los cristales casi directamente en forma tipológica; en los seres vivos en cambio la influencia modificatoria, especialmente de las condiciones de crecimiento, cubre a menudo tan fuertemente las formas simétricas en las que están basadas, que estas sólo pueden ser evidenciadas después de profundos estudios [...] Una ojeada al reino de la física presenta multitud de manifestaciones simétricas, que existen y se desarrollan en el “éter” y en la duración. Como por ejemplo la simetría traslatoria y los movimientos





uniformes rectilíneos y ondas transversales. Los movimientos cíclicos son casos de simetría rotatoria; por ejemplo, los planetas o lunas, electrones en el átomo o el campo eléctrico o magnético de un polo. La simetría reflexiva especular se evidencia en una balanza, en el péndulo o en las oscilaciones como también el principio de acción reacción. (pp. 37-42)

Es así como la simetría no solo se hace presente en la geometría sino también en otras ciencias como la física; en este sentido Weyl (1989), al igual que Wolf y Kuhn (1959), afirman que incluso la Teoría de la Relatividad está relacionada con la simetría, dado que el espacio vacío tiene un alto grado de simetría puesto que cada punto que se tome en este es como cualquier otro y en cada uno de estos puntos no hay diferencia intrínseca entre las direcciones: derecha, izquierda, arriba y abajo; es decir, que es relativo al sistema de referencia o en el caso de la Relatividad Especial, relativo al observador.

Por otra parte, la simetría es también un concepto importante para el cálculo, específicamente en el estudio de las diferentes gráficas de las funciones; es por ello que se ha establecido un Teorema de Criterios de simetría que permite evaluar o determinar la simetría existente entre una gráfica de una ecuación con respecto a los ejes o al origen, facilitando así la comprensión del comportamiento de la misma y, por ende, de la ecuación; este concepto también está presente en el estudio de la geometría vectorial como en el caso de las matrices simétricas y antisimétricas. A partir de todo lo anterior se puede evidenciar que la simetría hace parte de diferentes conocimientos matemáticos, los cuales son necesarios para el conocimiento científico y para la comprensión de fenómenos naturales,



además de ser esenciales para el inicio de estudios superiores en ciencias o en ingenierías. Del mismo modo, el concepto se encuentra presente en la naturaleza, ya sea en la forma de las diferentes flores y plantas e, incluso, en la proporcionalidad y regularidad del cuerpo humano, manifestándose así en otros campos del conocimiento como la botánica, la medicina o el dibujo.

De lo anterior, se puede notar la importancia del aprendizaje del concepto de simetría para alcanzar el conocimiento científico y particularmente el saber geométrico en una forma integral; sin embargo, desde la experiencia personal hemos podido determinar que gran parte de los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín tienen dificultades para la comprensión de dicho concepto, el cual ya debió haberse trabajado y desarrollado en años anteriores, como lo argumentan los estándares curriculares de matemáticas en Colombia. Todas estas problemáticas se lograron evidenciar en unos primeros acercamientos que se hicieron por medio de la observación realizada en el proceso de enseñanza de la geometría que se realizó en la institución, y a través de la aplicación de dos cuestionarios a los estudiantes y a un adulto perteneciente al su núcleo familiar del estudiante, ya sea padre, madre, hermano u otro.

Con respecto al cuestionario realizado a los estudiantes sobre el concepto de simetría, se pudo notar que aunque algunas preguntas conceptuales eran respondidas en forma acertada, la explicación o justificación de las mismas carecían de un análisis profundo sobre lo que involucra o encierra el concepto de simetría; además de esto, cuando se les pidió realizar diferentes ejes de simetría a algunas figuras geométricas, también se



pudo observar cómo el grupo generalmente solo construía uno, se equivocaba en la elección o no realizaba este punto, permitiendo así establecer que existen dificultades en la comprensión del concepto de simetría, lo cual se hace evidente en la siguiente imagen correspondiente a un fragmento de uno de los cuestionarios realizados a los estudiantes:

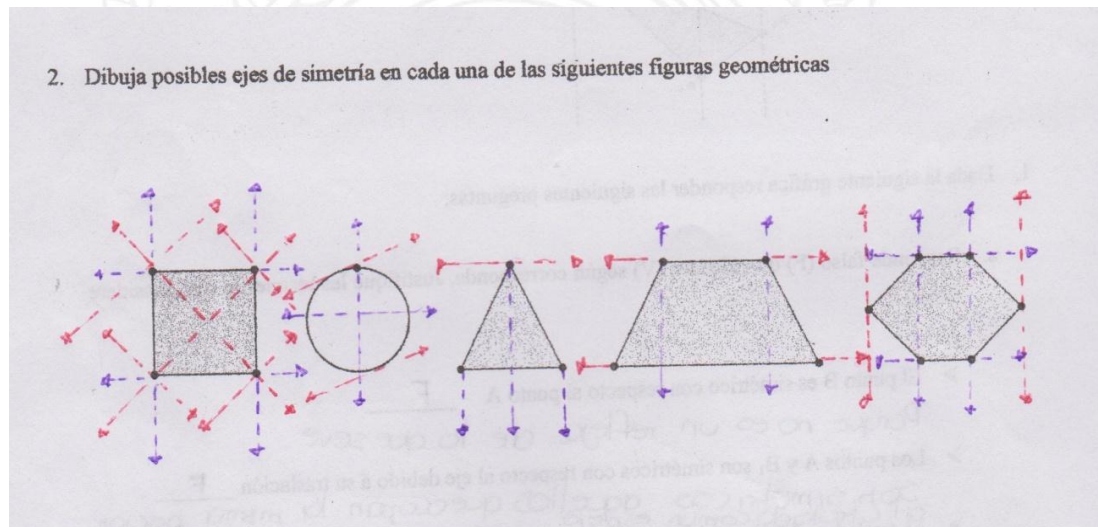


Imagen 1. Fragmento de cuestionario realizado por los estudiantes.

Adicionalmente en un segundo cuestionario familiar sobre simetría, en el cual se buscaba posibilitar una relación del concepto de simetría con el contexto de los estudiantes y con su entorno familiar; puesto que estos son la base de los conocimientos previos de los mismos y da cuenta de las percepciones y saberes de este objeto de estudio por parte de sus parientes más cercanos, se pudo constatar que nuevamente en las preguntas conceptuales de falso o verdadero, eran respondidas por la mayoría de forma acertada; sin embargo, cuando se les pedía relacionar este conocimiento teórico sobre la simetría con su entorno, presentan muchas dificultades o simplemente optaban por evadir o responder este tipo de preguntas de la manera más breve posible, sin olvidar los errores encontrados al trazar





algunos ejes de simetría, lo cual es un indicativo de problemas o falencias en la

comprensión de este concepto geométrico, como se muestra a continuación:

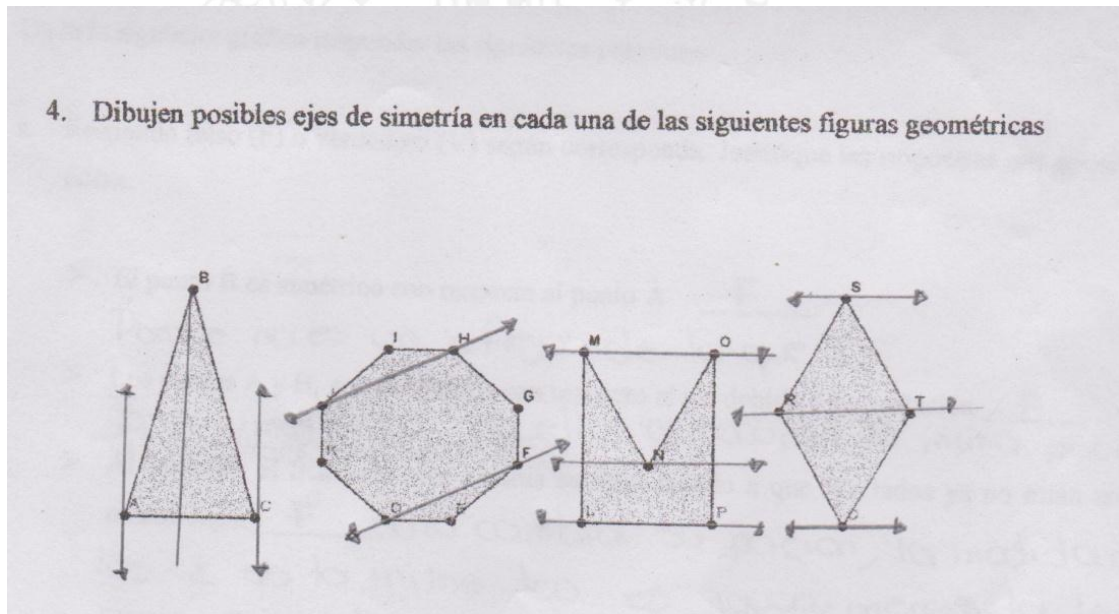


Imagen 2. Fragmento de un cuestionario de padres.

Por lo tanto, a partir de lo anterior se pudo establecer que los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa tienen dificultades en la comprensión del concepto de simetría y sus aplicaciones en contexto, por lo tanto se hace pertinente sustentar este proyecto de investigación desde el Marco teórico EpC, ya que, aparte del apoyo brindado en la identificación e interpretación de los procesos, nos permite analizar y proponer diferentes actividades que propicien la comprensión en los estudiantes, este modelo también invita a la reflexión acerca de temas curriculares y didácticos encaminados al análisis de nuestras prácticas pedagógicas al interior del aula, en particular en la enseñanza de la simetría. En este sentido, Stone (1999) precisa que este marco conceptual “estructura



la investigación para ayudar a los docentes a analizar, diseñar, poner en práctica y evaluar prácticas centradas en el desarrollo de comprensión de los alumnos” (p.25). Al respecto, Acevedo expone (2011):

Este es un marco que además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, brinda a los profesores herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión, desde el abordaje de un concepto hasta el de un curso completo. (p. 24)

Por otra parte, es de gran importancia para la realización del proyecto tener en cuenta el contexto social o familiar de los estudiantes; en particular, este es uno de los componentes con el que cuenta el Marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión, puesto que este nos permitirá generar actividades en el aula y fuera de esta que posibiliten la comprensión de la simetría de acuerdo a sus intereses y necesidades pertenecientes al contexto social o académico, sin olvidar el doblado de papel como estrategia didáctica.

Además de lo anterior, el marco teórico de EpC presenta una propuesta en la cual se desarrolla la unidad curricular, en conjunción con una evaluación continua del proceso al interior del aula. Pese a esto, cabe aclarar que si bien se propone una rúbrica para describir el proceso de comprensión de los estudiantes cuando desarrollan la unidad curricular, la construcción de dicho proyecto contará con la libertad de investigación y la autonomía en la construcción y diseño de las diferentes actividades. En este sentido, Acevedo (2011) precisa que: “no se pretende que los profesores copien un modelo sino que exploren y reflexionen



sobre sus propios contextos, realidades, intereses y necesidades para transformarlas” (p. 25).

Considerando el planteamiento del problema presentado en párrafos anteriores, la presente propuesta de investigación pretende responder la siguiente pregunta: ¿Cómo posibilitar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes del grado décimo, a partir del doblado de papel y en el marco de la EpC?

### **2.1. Objetivo General**

Con base en la pregunta de investigación, el estudio busca dar consecución al siguiente objetivo general:

Propiciar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes de grado décimo, a partir del doblado de papel como estrategia didáctica, bajo el marco teórico de la EpC.

### **2.2. Objetivos Específicos**

Para desarrollar el objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Proponer actividades prácticas a partir del doblado de papel, en una unidad curricular bajos los parámetros de la EpC, que permitan a los estudiantes comprender el concepto de simetría.

- Describir cómo los estudiantes pueden alcanzar los niveles referidos en la EpC, en la comprensión del concepto de simetría.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

### 3. Marco Teórico: Enseñanza Para La Comprensión

#### 3.1. Generalidades

Los diferentes cambios a los que se enfrenta el mundo hacen que surjan necesidades y requerimientos en los campos económicos, culturales, sociales y educativos. En particular, las necesidades en la educación se centran en el desarrollo de las diferentes habilidades de pensamiento y reflexión en los alumnos; estos aspectos abrieron las puertas a la Enseñanza para la Comprensión y a la reflexión por la enseñanza y el aprendizaje. Fue así que un grupo de profesores e investigadores de la Escuela de Educación de la Universidad de Harvard, liderados por Gardner, Perkins y Perrone (1988-1989), se reunieron para estudiar la cognición humana y aplicar sus resultados a la enseñanza y el aprendizaje en la escuela. Se formularon preguntas como: ¿qué significa comprender?, ¿de qué manera desarrollamos la comprensión en nuestros estudiantes?, ¿cómo averiguar hasta qué punto han comprendido alguna temática o tópico? (Stone, 1999). Estos interrogantes impulsaron la realización de un proyecto de investigación llamado “Proyecto Cero”, por medio del cual se estructuró el Marco Teórico EpC.

Bajo este marco teórico, la pregunta fundamental que surge en el planteamiento de una pedagogía de la comprensión, es sin lugar a duda ¿qué es la comprensión? Perkins (2002) argumenta que “comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la ‘capacidad de desempeño flexible’ con énfasis en la flexibilidad” (p. 70). Así mismo, Acevedo (2011) precisa que se puede definir la comprensión en el marco de la Enseñanza





para la Comprensión, como una relación estrecha entre el pensamiento y la

práctica, es decir, la comprensión está delimitada por las decisiones eficaces y racionales que se tomen en cuanto a un tema o situación determinada.

La comprensión se evidencia cuando los estudiantes trascienden los conceptos a problemáticas de su contexto y los relacionan con otras áreas disciplinares; de este modo, utilizar el conocimiento flexiblemente hace referencia a las relaciones que un estudiante puede establecer entre lo que comprende y las situaciones que puede encontrar por fuera de su aula de clase. Como consecuencia, la comprensión no debe entenderse como una práctica espontánea del individuo, sino como una actividad mediada por el pensamiento y la reflexión, que tiene en cuenta unos objetivos o metas fijadas con anterioridad.

Al respecto, Bermúdez, Escobedo y Jaramillo (2009) precisan:

Comprendemos un proceso cuando contamos con una teoría que nos permite orientar nuestra acción en relación con ese proceso en forma exitosa [...] Es necesario que los estudiantes entiendan el conocimiento como resultado de la actividad humana de enfrentar problemas vitales y de resolverlos, y no el acumulado informe de una actividad ociosa que ellos tienen que memorizar. (pp. 531 – 532)

En este mismo sentido, Areiza y Garzón (2008) argumentan que comprender es algo sutil, que no se puede simplemente reducir a conocimientos, puesto que este al igual que la habilidad, se pueden traducir como solo información y desempeños rutinarios. Para comprender no basta solo con adquirir conocimiento, se trata también de utilizarlo en el



mundo de una forma creativa y competente; nos da la posibilidad de explicar, justificar, extrapolar, relacionar y aplicar cualquier tópico.

Existen diversas estrategias y metodologías que posibilitan la comprensión de diferentes conceptos, las cuales nacen a partir de la reflexión de la práctica pedagógica, la cual consideran aspectos importantes como lo hace el Marco teórico EpC, el cual plantea tres puntos fundamentales: los Elementos, las Dimensiones y los Niveles de la Comprensión.

### **3.2. Elementos para la comprensión**

Según Acevedo (2011), “constituyen la pauta para la planificación de la enseñanza” (p. 43). Estos elementos no son lineales, cada uno de estos contribuyen a la realización de actividades en el aula en cuanto permiten la organización de los contenidos a trabajar; además, nos permiten conocer sus alcances y sus límites; de acuerdo con Stone (1999) los elementos para la comprensión involucran la respuesta a las preguntas ¿Qué tópicos vale la pena comprender? ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos? ¿Cómo podemos promover la comprensión? ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos? Por lo tanto, las preguntas dan origen a los cuatro elementos de la comprensión, respectivamente: los tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua; sin embargo, es importante considerar que todos los elementos se relacionan entre sí y no deben concebirse en forma aislada. Stone (1999) define los elementos de la siguiente manera:

**3.2.1. Tópicos Generativos.** Los tópicos generativos hacen parte de las experiencias y preocupaciones del alumno, las cuales varían según la edad y el contexto social y cultural; también se relacionan con los intereses personales y la formación intelectual de los alumnos; de esta manera, los tópicos generativos le otorgan importancia a los saberes previos de los estudiantes. Los tópicos generativos se consideran de la siguiente forma en el marco de la EpC:

Es probable que un tópico sea generativo cuando es central para el dominio y la disciplina, es accesible e interesante para los alumnos, excita las pasiones intelectuales del docente y se conecta fácilmente con otros tópicos tanto fuera como dentro del dominio o disciplina particular (Stone, 1999, p. 99)

Es así como los tópicos pueden considerarse como preguntas e ideas que buscan despertar la atención de los estudiantes; estos pueden crearse a través de las relaciones entre los diferentes conceptos disciplinares y situaciones propias del contexto de los mismos.

**3.2.2. Metas de Comprensión.** Stone (1999) refiere que:

Las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender [...] Las metas de comprensión son más útiles cuando están definidas de manera explícita y se las exhibe públicamente [...] Las metas para la comprensión expuestas públicamente ayudan a todos a saber hacia dónde va la clase, a avanzar y a centrar la atención en la agenda principal [...] Lo importante es que las





metas de comprensión lleven a docentes y alumnos hacia el centro de un trabajo significativo más que a las zonas periféricas de su agenda. (pp. 101-108)

En este sentido, las metas de comprensión delimitan lo que se espera que los estudiantes comprendan, es decir, qué conceptos disciplinares involucrados en los tópicos generativos los estudiantes van a comprender. Estas metas pueden ser conceptos, procedimientos o habilidades.

**3.2.3. Desempeños de Comprensión.** Los desempeños son, quizás, el elemento más importante en el marco teórico de la EpC, puesto que es en el que se concibe la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento en diferentes contextos y situaciones de manera creativa y novedosa; se deben considerar como configuraciones complejas que se relacionan mutuamente; esto hace que se dividan en unas categorías progresivas de desempeño para facilitar la comprensión, las cuales también son descritas por Stone (1999), de la siguiente manera:

**3.2.3.1. Etapa de exploración.** Esta etapa ofrece al docente y a los estudiantes información sobre el conocimiento previo y sobre lo que les interesa aprender a estos últimos; en esta fase, el docente diseña una serie de actividades para que el estudiante ponga en práctica sus conocimientos anteriores, además de permitir que pueda establecer conexiones entre el tópico generativo, los intereses y experiencias de los mismos.

**3.2.3.2. Investigación Guiada.** En esta etapa los estudiantes utilizan ideas o procesos de investigación relevantes para alcanzar la comprensión de las metas de



comprensión antes propuestas; esto con el fin de lograr que los estudiantes se comprometan en formas más avanzadas de investigación, al aplicar conceptos y al poner en práctica su comprensión.

**3.2.3.3. Proyecto final de síntesis.** Puede entenderse como una exposición donde el estudiante de a conocer el dominio que tiene en cuanto a las metas de comprensión propuestas inicialmente.

Los desempeños involucran a los estudiantes en la creación de su comprensión, es decir, intentan poner en evidencia lo comprendido; estos desempeños se relacionan con las actividades que realizan los estudiantes para dar cuenta de algún concepto, habilidad o práctica desarrollada en el proceso.

**3.2.4. Evaluación diagnóstica continua.** La evaluación diagnóstica permite reforzar y evaluar el aprendizaje del estudiante, permite comparar los desempeños anteriores con el actual y con los que se desean llegar a alcanzar. En esta evaluación los estudiantes y el docente conocen los criterios de evaluación antes de comenzar un proceso de comprensión, esto con el fin de posibilitar la utilización de estos criterios para controlar los desempeños que se desean alcanzar y planificar la enseñanza y el aprendizaje futuro. La evaluación diagnóstica brinda, a partir de las actividades o experiencias entre compañeros, hacer una reflexión con miras a mejorar el trabajo y la evaluación individual; los criterios utilizados además de ser públicos se deben relacionar con las metas de comprensión. Esta no es una evaluación lineal o sumativa; por el contrario, pretende que los estudiantes reflexionen sus prácticas y el desarrollo de sus actividades (Stone, 1999).

Finalmente con relación a los cuatro elementos para la comprensión,

Areiza y Garzón (2008) argumentan que los temas generativos promueven la comprensión, se centran en la disciplina, son interesantes pues se vinculan con la realidad del alumno, admiten relación con otros saberes y disciplinas; las metas de comprensión enfocan y dirigen el proceso de enseñanza además de darle propósito y significación a los actos del estudiante, adicionalmente, son más útiles si se definen de manera explícita puesto que muestran el horizonte que se desea alcanzar; los desempeños posibilitan a los alumnos crear su propia comprensión, exige de los mismos un trabajo progresivo con el fin de alcanzar las metas de comprensión y finalmente la evaluación diagnóstica permite la promoción y cualificación de la comprensión, puesto que admite fortalecer logros y detectar vacíos para que así el estudiante oriente y mejore su trabajo.

### **3.3. Las dimensiones para la comprensión**

De acuerdo con Acevedo (2011), son ideas generales necesarias para la comprensión que pueden ser desarrolladas en cualquier disciplina. Estos aspectos referidos por Boix y Gardner (1999) son:

**3.3.1. Contenido.** El cual evalúa el progreso del conocimiento intuitivo de un estudiante al conocimiento académico, permitiendo identificar hasta qué punto los estudiantes han formalizado el conocimiento a partir de las actividades propuestas; esta dimensión evalúa la trascendencia de los alumnos desde sus perspectivas intuitivas hasta el punto en el que este actúa con flexibilidad por medio de ejemplificaciones y generalidades.

**3.3.2. Método.** Esta dimensión reconoce que el conocimiento es el resultado de un proceso de investigación según criterios debatidos y aceptados públicamente por una comunidad específica y competente; evalúa en los estudiantes la capacidad para reflexionar críticamente sobre algún conocimiento o afirmación que se le presente, con el fin de que este mismo utilice métodos confiables para construir y evaluar afirmaciones o trabajos aceptables o valiosos. El objetivo de esta dimensión es propiciar en los estudiantes una actitud de investigación frente al conocimiento, donde no se acepte el saber simplemente como algo fijo, exacto e incuestionable, sino que, por el contrario, los estudiantes tengan las herramientas y habilidades para validar el mismo.

**3.3.3. Propósitos.** Esta dimensión permite evaluar la capacidad que tienen los alumnos de reconocer los propósitos e intereses para construir determinado conocimiento, la capacidad para utilizarlo y las consecuencias de su uso. Se basa en la concepción del conocimiento como herramienta que permite explicar, reinterpretar y operar el mundo; da cuenta de la relación que establece el estudiante entre el conocimiento científico y la realidad social, permitiendo así determinar los tópicos o conocimientos necesarios y dignos para ser llevados o estudiados en el aula. Los propósitos pueden definirse como los cuestionamientos o posiciones que los estudiantes pueden llegar a asumir acerca del conocimiento obtenido, por ejemplo, las implicaciones sociales y culturales que puedan darse en torno a los conceptos comprendidos.

**3.3.4. Formas de Comunicación.** Esta dimensión valida el uso de los diferentes símbolos o métodos con los que el alumno expresa su conocimiento; las formas de

comunicación toman en cuenta todas aquellas formas visuales, verbales o audibles que permiten a los estudiantes dar cuenta de lo comprendido. Posibilitan hacer público el conocimiento adquirido sin importar la forma en que se haga, puesto que la flexibilidad de la utilización de las diferentes formas de comunicación brinda la oportunidad al estudiante de adherirse a la que maneje con mayor facilidad o encuentre más afín, lo importante es que este logre comunicar claramente su comprensión.

### **3.4. Niveles para la Comprensión**

Boix y Gardner (1999) afirman que los niveles para la comprensión permiten diferenciar los desempeños débiles de otros más avanzados en la comprensión de algún conocimiento. Estos niveles son retomados por los autores, de la siguiente forma:

**3.4.1. Ingenuo.** Son los desempeños de comprensión que se basan en el conocimiento intuitivo; en este nivel el estudiante no domina ni utiliza su conocimiento en la vida diaria; los conceptos que se trabajan en el aula no se relacionan con sus experiencias por fuera de esta, es decir, los diferentes conocimientos son concebidos como una simple recepción de información que ya se encuentra disponible en el mundo. Los estudiantes que tienen desempeños de comprensión ingenuos no realizan reflexiones frente al conocimiento, a su construcción y a la forma en la que este se comunica.

**3.4.2. Novato.** Se constituye como un aprendizaje repetitivo, donde difícilmente los conceptos son relacionados con otras áreas del conocimiento o con su vida fuera del aula.

En este desempeño de comprensión de novato, los estudiantes reciben conceptos o





conocimientos disciplinares, sin embargo no se les facilita realizar relaciones o conexiones entre ellos de una manera compleja o consciente, lo poco que vinculan lo hacen de manera memorística o repetitiva; esto mismo sucede con las formas en que se construye y se comunica el conocimiento, concibiéndolos como procesos mecánicos que son validados exteriormente sin contar con su participación.

**3.4.3. Aprendiz.** En este desempeño de comprensión de aprendiz, el estudiante comienza a usar y relacionar el conocimiento disciplinario con su cotidianidad; se empiezan a encontrar relaciones más globales de los conceptos abordados en clase, de hecho se pueden relacionar con anteriores experiencias. La construcción del conocimiento se aprecia como una tarea reflexiva y compleja que sigue criterios y procedimiento validados por una comunidad específica competente, además la comunicación del conocimiento en este nivel se realiza de una forma flexible.

**3.4.4. Maestría.** Los desempeños de comprensión de maestría son integradores, creativos y críticos; en este nivel de comprensión, los estudiantes son reflexivos con el conocimiento, demuestran su comprensión a partir de la generación de relaciones entre los diferentes conceptos comprendidos e incluso se llegan a establecer relaciones interdisciplinares de los mismos, permitiendo así actuar con flexibilidad y contextualizar lo que se comprende. En este nivel, los estudiantes tienen la capacidad de utilizar su conocimiento para interpretar y actuar en su mundo, tienen la habilidad de expresar su saber a los otros en una forma creativa; por lo tanto, se fomenta una conciencia crítica acerca de cómo, para qué y por qué se construye determinado conocimiento.



Los anteriores elementos, dimensiones y niveles de la comprensión

constituyen el Marco Teórico de la Enseñanza para la Comprensión, el cual se empleará como base para el desarrollo del presente proyecto. Estos aspectos iluminarán la planificación de las actividades de aula y nos permitirán replantear diferentes componentes de la didáctica como la evaluación, el currículo y la enseñanza, con el fin de promover la comprensión. El marco teórico de la EpC, a su vez, se constituye en una herramienta para el docente en la medida que permite realizar reflexiones pedagógicas sobre la práctica escolar, además brinda pautas para la formulación de tópicos, evaluaciones, actividades, medios didácticos, guías o unidades curriculares, entre otros; aunque los diferentes elementos, dimensiones y niveles nos permiten estudiar la comprensión de un alumno, no debe concebirse como un marco rígido para estudiar la comprensión de determinada ciencia o concepto, puesto que su base es precisamente el actuar con flexibilidad de acuerdo a las situaciones o a las necesidades que se presenten.

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

## 4. Metodología

### 4.1. Paradigma

Hernández, Fernández y Baptista (2010) sostienen que los estudios cualitativos permiten desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante y después del proceso investigativo, es por ello que en este estudio se permite regresar a etapas previas si es necesario; se podría decir que tanto la recolección de la información como el análisis, son fases que en este estudio ocurren simultáneamente; el estudio cualitativo no pretende probar hipótesis, por el contrario estas se generan y se refinan en el transcurso del proceso investigativo; pretende reconstruir toda la realidad en la que se encuentra el grupo de estudio sin manipularla o condicionarla; busca entender las diferentes acciones de los individuos y los grupos sociales; el investigador comienza a ser parte del grupo estudiado lo cual se hace evidente mediante las interpretaciones que hace de las diferentes situaciones en las cuales se tiene en cuenta las realidades vividas en el desarrollo del estudio; su objetivo no es generalizar los resultados; utiliza diferentes técnicas de investigación, se relaciona empáticamente con los participantes; admite subjetividades y percepciones de los participantes y del investigador, es un estudio abierto y flexible.

En este sentido, Galeano (2004) precisa que el enfoque cualitativo posibilita familiarizarse con la situación y el contexto en el cual se vivencia la problemática y precisamente esta familiarización permitirá comprender las prácticas que se dan por medio de la implementación del doblado de papel como estrategia didáctica en una forma más subjetiva, puesto que se tendrán en cuenta las particularidades, intereses y necesidades de



las personas que interactúan y hacen parte de su ejecución, tratando de

comprender la realidad que se vive cuando es implementada esta estrategia. Se busca que, posteriormente, estos hechos sean analizados, con la intención de proponer los cambios necesarios o nuevas actividades que se consideren apropiadas en pro de un mejor resultado.

A partir de todos los aspectos mencionados anteriormente, además de clarificar que el objeto de estudio de esta investigación es la comprensión del concepto de simetría por medio de la utilización del doblado de papel como estrategia didáctica en los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, es necesario estudiar, observar y analizar las prácticas existentes en estos espacios para la enseñanza de este concepto geométrico. Es por ello que se establece que el proyecto es una investigación propositiva apoyada en el enfoque cualitativo, puesto que permite la relación con el grupo de estudio y su contexto, posibilita la flexibilidad en cuanto a los métodos empleados para la investigación como también en los instrumentos utilizados para la recolección de la información, que pueden ser aplicados al grupo de estudio o a personas que hagan parte del contexto social o familiar del participante.

La investigación cualitativa no pretende generar teoría sino, por el contrario, refinar y construir perspectivas teóricas en el transcurso del proyecto; brinda la oportunidad de reflexionar sobre las etapas previas para planificar con mayor conciencia los pasos o mecanismos a seguir en el proceso investigativo; además, el investigador juega un papel importante en la interpretación y respuesta de las problemáticas que se evidencien en el grupo estudiado.

Los instrumentos a utilizar en el proyecto estarán regidos por preguntas, ya sea por medio de entrevistas semiestructuradas, diálogos o cuestionarios, puesto que todos estos brindarán la información necesaria para determinar las dificultades que se presentan en la comprensión del concepto de simetría, las cuales, a su vez, marcarán la ruta a seguir en la búsqueda y formulación de actividades con doblado de papel, para que con ellas se busque dar solución a la problemática evidenciada inicialmente.

#### **4.2. Tipo de estudio**

El diseño de investigación que se abordará para obtener la información, será el estudio casos, puesto que, como lo refiere Yin (1989, citado por Martínez, 2006):

El método de estudio de casos es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y se registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado [...] Examina o indaga sobre un fenómeno contemporáneo en su entorno real, las fronteras entre el fenómeno y su contexto son claramente evidentes, se utilizan múltiples fuentes de datos, y pueden estudiarse tanto un caso único como múltiples casos (pp. 168-175).

Del mismo modo, Stake (1998) señala que el estudio de casos permite abarcar la complejidad de un caso particular para que por medio de su estudio se pueda llegar a comprender su comportamiento en circunstancias importantes; se pueden tomar varios casos en el estudio de investigación que se realice, sin embargo, en determinado momento, se centrará la atención en cada uno de ellos, para, posteriormente analizar todos los casos



en conjunto, lo cual nos brindará información necesaria e importante para responder la pregunta y dar consecución a los objetivos propuestos; el propósito fundamental del estudio cualitativo de casos es comprender cada uno de los casos en una forma integral.

Estos aspectos que encierra el método de estudio de casos son de gran importancia para el desarrollo del presente proyecto de investigación, puesto que se relaciona íntimamente con el tipo de estudio cualitativo que se quiere realizar, ya que los dos tiene en cuenta factores como las realidades y comportamientos propios de cada uno de los participantes y su relación con el contexto, promueve la utilización de diferentes mecanismos para la recolección de la información y centra su atención, en su momento, en cada uno de los participantes que conforman el grupo de estudio. Las anteriores características describen nuestro proyecto investigativo, que busca analizar el proceso de comprensión de los estudiantes del concepto de simetría a través del doblado de papel.

Por último, Hernández, Fernández y Baptista (2010) refieren que el estudio de casos permite analizar profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema inicial. Análisis que se realizará mediante la observación de prácticas, diálogos e interacciones de los estudiantes al desarrollar las actividades que se diseñen con el doblado de papel para la comprensión del concepto de simetría.

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA





### 4.3. Participantes

Para la investigación, se ha seleccionado una Institución Educativa pública de la ciudad de Medellín, puesto que responde a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y a los Estándares Básicos de Competencias a través de la aplicación de un plan de estudio Institucional y de mallas curriculares que responden a los requerimientos básicos del MEN (1998), y a los cuales apunta este proyecto de investigación. En este sentido, se busca generar estrategias y metodologías que puedan aportar a estos procesos institucionales para la enseñanza de la matemática y, por ende, de la geometría.

El grupo de estudio del proyecto estuvo conformado por un pequeño conjunto de estudiantes del grado décimo, puesto que fue en este grado donde se evidenciaron inicialmente, a partir de la práctica docente, las dificultades en la comprensión y aplicación del concepto de simetría. Sin embargo, con el fin de realizar un análisis de los procesos más profundos y estructurados, se seleccionaron cuatro estudiantes para la aplicación de los instrumentos.

Los estudiantes seleccionados corresponden a aquellos que, además de tener dificultades en la comprensión de la simetría, también mostraron problemas al momento de utilizar el doblado de papel; este último aspecto se tomó en cuenta porque el proyecto también pretende desarrollar mayor habilidad en su utilización, propiciando con esto la implementación de esta estrategia lúdica para alcanzar la comprensión de otros saberes, por lo que se hace necesario que los estudiantes lo disfruten y utilicen en forma adecuada. La identificación de los participantes fue posible hacerla mediante la aplicación de las dos





pruebas diagnósticas iniciales, constituidas por los dos cuestionarios y la realización de las rectas paralelas y perpendiculares con el doblado de papel.

Este grupo de estudio estuvo compuesto por estudiantes de edades entre los 14 y 17 años, residentes en barrios de estratos 1 y 2 de la ciudad de Medellín, la mayoría de estos viven con sus padres y abuelos, muy pocos de estos últimos cuentan con carreras profesionales y la mayoría se encuentra laborando. Por otra parte, con base en un rastreo que se realizó en las notas de los estudiantes, en matemáticas y específicamente en geometría, además de contar con el testimonio del docente del área, se pudo comprobar durante años anteriores y en el presente año, que los estudiantes presentan y han presentado dificultades en el aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos y geométricos.

#### **4.4. Métodos de recolección de información**

El estudio cualitativo de casos permite recolectar información durante todo el transcurso del proyecto investigativo; inicialmente se hace informalmente por medio de los primeros contactos que el investigador tiene con los participantes; posteriormente se diseñan instrumentos para recolectar datos en una forma mucho más estructurada, planificada y organizada. El estudio cualitativo también brinda la oportunidad al investigador de obtener información de aspectos y circunstancias que él considere relevantes, además de propiciar la interpretación y significación de la misma (Stake, 1998).

En este sentido, el investigador se vale de la observación y de su experiencia dentro del contexto de investigación; es importante para este llevar un registro de cada una de



estas observaciones y experiencias ya sea por medio de escritos, videos,

fotografías o audios, con el fin de que no se le escape algún aspecto importante para el desarrollo del proyecto investigativo. Sin embargo, estos registros se pueden considerar como una intromisión a la vida privada de cada uno de los participantes, por ello es de gran importancia contar con permisos que permitan la utilización y realización de los diferentes registros (Stake, 1998).

Para poder evidenciar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes de grado décimo, seleccionados como participantes del estudio de casos, se hizo necesario diseñar instrumentos que posibilitaran la interpretación de las diferentes interacciones, intereses, experiencias, dificultades y necesidades individuales y grupales; puesto que como afirman Hernández et al. (2010):

La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resulta de interés las interacciones entre otros individuos, grupos y colectividades. El investigador pregunta cuestiones abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe y analiza y los convierte en temas que vincula y reconoce tendencias personales [...] El investigador cualitativo utiliza técnicas para recolectar datos, como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos y comunidades (p. 9).

Bajo esta perspectiva se consideró pertinente para la recolección de la información de la propuesta investigativa, desarrollar las siguientes actividades:

**4.4.1. Cuestionarios.** Los cuestionarios estaban conformados por una serie de preguntas abiertas y de opciones falsas y verdaderas; las cuales indagaban explícitamente por el concepto de simetría; también contenían algunas actividades de aplicación del concepto de simetría en figuras geométricas, algunas de estas contaban con ejes de simetría para facilitar la indagación sobre la aplicación del concepto. Uno de los cuestionarios estaba dirigido a los estudiantes y otro a los familiares o integrantes del grupo familiar con los cuales convivía el aprendiz. Ambos tenían el fin de evidenciar las dificultades que los estudiantes tenían respecto al concepto de simetría, como también los problemas en la comprensión del mismo dentro del entorno familiar, lo cual se constituye como un factor importante del conocimiento y obstáculos cognitivos previos del estudiante. Los cuestionarios se aplicaron en la primera fase de exploración del proyecto investigativo, esto con el objetivo de delimitar el problema de investigación, es importante mencionar que la aplicación se hizo para todo el grupo que conformaba el grado décimo, puesto que aún no se habían elegido los estudiantes del estudio de casos.

**4.4.2. Actividades con el doblado de papel.** Las diferentes actividades que se realizaron con doblado de papel, no solo buscaban la identificación de dificultades sino que también pretendían facilitar la comprensión del concepto de simetría; es por ello que se contaron con diferentes clases de actividades; inicialmente se realizó con todo el grupo del grado décimo la construcción de rectas perpendiculares y paralelas con el doblado de papel,



esto con el fin de establecer cuáles de los estudiantes mostraban mayor dificultad para manejar el papel y, por lo tanto, entrar a escoger los participantes que conformarían el grupo de estudio o de investigación; esta actividad se realizó en la fase de exploración al igual que los cuestionarios iniciales.

Posteriormente, ya con el grupo conformado con cada una de las unidades de análisis o participantes, se realizaron actividades utilizando figuras dibujadas en el papel para señalar por medio de dobleces los ejes de simetría de cada una de ellas; también se realizó la rotación con doblado de papel de una figura dibujada en unos de los cuadrantes del plano delimitado por la hoja, esto con el objetivo de mostrar las diferentes simetrías (central y axial) de dichas figuras; finalmente se elaboraron módulos con doblado de papel para la creación de figuras tridimensionales con diferentes formas como mariposas, ranas, flores, peces y estrellas, para evidenciar los ejes de simetría y las simetrías axiales y centrales presentes en cada uno de los formas elaboradas. Cada una de las actividades se realizaron en la fase de investigación guiada, a la cual se le destinó mayor tiempo de ejecución y estuvieron delimitadas por una serie de preguntas que se formulaban en el transcurso de las construcciones, las cuales tenían como fin posibilitar que el estudiante vinculara la simetría y otros conceptos o conocimientos geométricos y matemáticos a las figuras y actividades.

**4.2.3. Observaciones.** Las observaciones fueron un aspecto muy importante para el desarrollo del trabajo de campo del proyecto, puesto que estuvo presente en cada una de las fases. En la fase de exploración la observación se centró en dos aspectos: el primero fue





observar en algunas clases de geometría qué conceptos geométricos generaban mayor dificultad en los estudiantes, lo cual contribuyó a escoger y delimitar el problema de investigación. El segundo aspecto se centró en identificar los estudiantes que serían los participantes del proyecto, los cuales correspondían a los estudiantes con mayor dificultad para utilizar el doblado de papel; ya que, además de la comprensión de la simetría, también se buscaba con este proyecto aportar a la solución de otro tipo de problemáticas, como lo es la dificultad que puede presentarse para doblar papel; propiciando así su utilización en el proceso de comprensión de algún conocimiento necesario para el estudiante.

En la fase de investigación guiada, la observación fue de gran relevancia puesto que nos reveló en cada uno de los estudiantes las dificultades que tenían frente a la comprensión del concepto de simetría, posibilitando así el análisis y la reflexión de las siguientes actividades a realizar para facilitar el proceso de aprendizaje del mismo en cada uno de ellos. La observación en esta fase también nos permitió identificar los diferentes desempeños particulares al objeto de estudio que se tomarían en cuenta en el proyecto, además de los niveles de comprensión que iban logrando cada uno de los estudiantes por medio de la realización de las actividades. Finalmente, la observación de las diferentes formas de comunicación que emplearon los estudiantes en la fase del proyecto final de síntesis, nos permitió evaluar y establecer el nivel de comprensión que alcanzó cada uno de los estudiantes en cuanto al concepto de simetría, lo cual fue de gran importancia para el análisis de los resultados obtenidos con las diferentes actividades y para el proyecto de investigación en general.

#### 4.4.4. Diálogos. Los diálogos con los estudiantes, al igual que la

observación, se presentaron en todas las fases del proyecto, puesto que las percepciones, intereses y dudas de los estudiantes eran los factores delimitantes de la comprensión, y estos se daban a conocer por medio de la comunicación que se establecía en el grupo de estudio y con cada uno de los participantes. En la fase de exploración, el diálogo nos permitió clarificar aún más las diferentes dificultades que los estudiantes manifestaban frente al concepto de simetría, además aportaron a la observación que se realizó para establecer las características necesarias para la elección de las unidades de estudio o participantes, que incluiríamos en el proyecto. En la fase de investigación guiada fueron los diálogos los que hacían más visibles las dificultades y avances que presentaban cada uno de los estudiantes con la realización de las actividades. En la fase de proyecto final de síntesis, los diálogos permitieron clarificar los niveles referidos en el marco teórico de la EpC que fueron alcanzados por cada uno de los estudiantes al finalizar todas las actividades propuestas en el proyecto.

Las diferentes actividades tenían el objetivo de recolectar la información necesaria para el análisis y la reflexión de la problemática; además de tener la posibilidad de implementar metodologías y estrategias didácticas diferentes, que permitan contribuir al proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría y, en particular, del concepto de simetría. Se llevaron a cabo todas las actividades planeadas, siguiendo una ruta metodológica que se consideró apropiada para identificar las problemáticas y facilitar la comprensión del concepto de simetría, la cual se especifica en la unidad curricular realizada a continuación.



## 5. Unidad Curricular

Las unidades curriculares están conformadas por una serie de actividades y procedimientos diseñados para generar o facilitar algún tipo de aprendizaje o comprensión. Desde esta perspectiva, Jiménez (1998) establece que un diseño o unidad curricular es el punto donde se encuentran reflexiones teóricas en cuanto a los modelos de aprendizaje o naturaleza de la ciencia; por medio de este diseño se ponen en práctica unas estrategias determinadas y unos materiales concretos. Además de esto, es necesario establecer los problemas o dificultades que se encuentren en el aula, seleccionar los conceptos o conocimientos a trabajar en la unidad o diseño curricular y promover la variedad tanto de las actividades a realizar como también de las opiniones y trabajos de los estudiantes, los cuales serán evaluados continuamente por el maestro pero con criterios acordados por todo el grupo.

Todos los aspectos anteriores se consideran en la realización de la unidad curricular propuesta, en la cual se presentan y describen cada una de las actividades realizadas en la Institución Educativa, actividades que hicieron parte de nuestro marco metodológico y fueron las que nos permitieron obtener la información necesaria para el desarrollo del proyecto de investigación. De acuerdo con Stone (1999) estas actividades están distribuidas en tres fases: la fase de exploración, la de investigación guiada y la fase de proyecto final de síntesis; las cuales permitieron alcanzar los niveles de comprensión referidos en el marco teórico de la EpC y, además, posibilitaron la dinamización del



proceso de enseñanza y aprendizaje de la simetría. Para el desarrollo de esta

unidad curricular, se identificaron unos factores que marcaron la ruta a seguir de la misma, los cuales son:

### **5.1. Tópico Generativo**

El objetivo del proyecto de investigación es posibilitar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de Medellín, a partir del doblado de papel; por lo tanto, el tópico generativo está determinado por la pregunta de investigación, la cual es:

¿Cómo posibilitar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes del grado décimo, a partir del doblado de papel y en el marco de la EpC?

### **5.2. Metas De Comprensión**

Con relación al marco teórico y, teniendo en cuenta otros factores como el grupo de estudio, las diferentes actividades propuestas y realizadas y el objetivo de nuestro proyecto, se consideraron pertinentes las siguientes metas de comprensión:

- Meta general: Comprender el concepto de simetría a partir del doblado de papel.
  - Reconocer la importancia de la simetría para la comprensión de diferentes conceptos geométricos.
  - Identificar la presencia del concepto de simetría en diferentes situaciones del contexto escolar.

- Aplicar el concepto de simetría, tanto en el contexto matemático, como en otros contextos.

**5.2.1. Hilo conductor.** Los estudiantes utilizan la traslación de figuras y construcciones con doblado para la comprensión del concepto de simetría.

### **5.3. Actividades y Desempeños**

Para el desarrollo del marco metodológico del proyecto, se propusieron unas actividades con doblado de papel, las cuales siguieron los parámetros de la EpC y se dividieron en tres fases, como se mencionó anteriormente. Estas fases buscaban despertar el interés y compromiso en los estudiantes durante todo el desarrollo de las actividades, además de conocer sus saberes previos sobre el tema, puesto que a partir de estos se diseñaron las diferentes actividades propuestas para la comprensión del concepto de simetría.

**5.3.1. Fase de Exploración.** En esta fase se pretendía conocer los saberes previos del estudiante sobre la simetría, además de determinar cómo los conocimientos familiares incidían en el saber del alumno. Por ello, se propusieron dos actividades: un cuestionario dirigido a cada uno de los estudiantes pertenecientes al grupo de estudio y, un cuestionario familiar, dirigido a los padres o personas que conviven con dichos estudiantes.

**5.3.1.1. Cuestionario para los estudiantes.** Este cuestionario debió ser respondido en forma individual, sin contar con ninguna fuente de información más que su



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

Facultad de Educación

propio conocimiento y reflexión sobre el tema; para su desarrollo, se dispusieron de 30 minutos.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



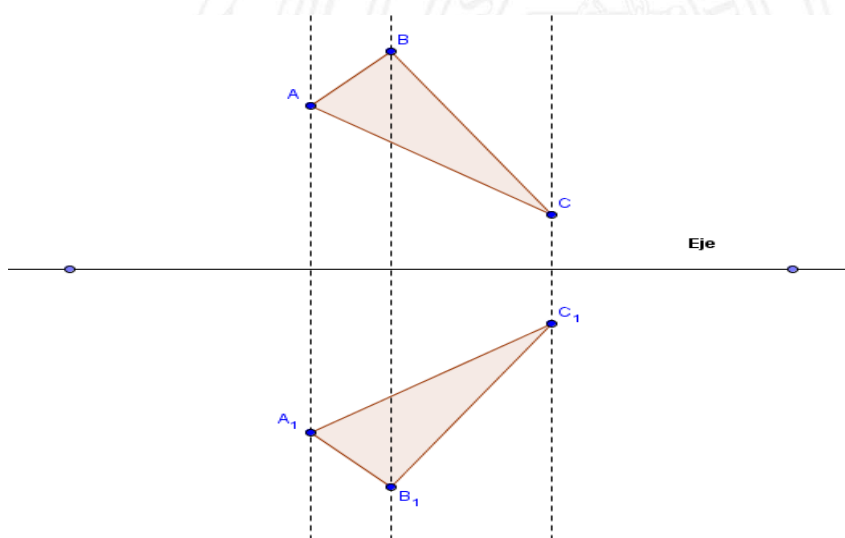
**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**  
**FACULTAD DE EDUCACIÓN**  
**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA**  
**PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2**

**ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA: SIMETRÍA**

**Estudiantes: América María Cardona Arias**  
**Jhon Edwar Gómez Berrio**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Grado: Décimo**



1. Dada la siguiente gráfica responder las siguientes preguntas:

a. Responde falso (F) o verdadero (V) según corresponda. Justifique las respuestas que considere falsas.

- El punto B es simétrico con respecto al punto A \_\_\_\_\_
- Los puntos A y B<sub>1</sub> son simétricos con respecto al eje debido a su traslación \_\_\_\_\_

➤ Al trasladar el triángulo este cambia su área debido a que sus lados ya no están en el mismo lugar \_\_\_\_\_

➤ Como  $B_1$  es simétrico con  $B$  y  $C_1$  es simétrico con  $C$  entonces  $A_1$  es simétrico con  $A$  \_\_\_\_\_

b. ¿Qué propiedad debe cumplir el triángulo  $ABC$  para ser simétrico con el triángulo  $A_1B_1C_1$  con respecto al eje dado?

c. Al realizar la traslación del triángulo con respecto al eje ¿este cambia de forma debido a que los vértices ya no están en los mismos puntos del plano?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

d. Realiza un pliegue por la hoja que pasa por el eje dado ¿qué relaciones puede encontrar entre los triángulos?

2. Dibuja posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas

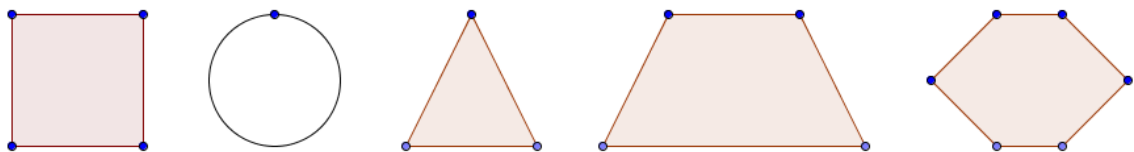


Imagen 3. Cuestionario realizado a los estudiantes.



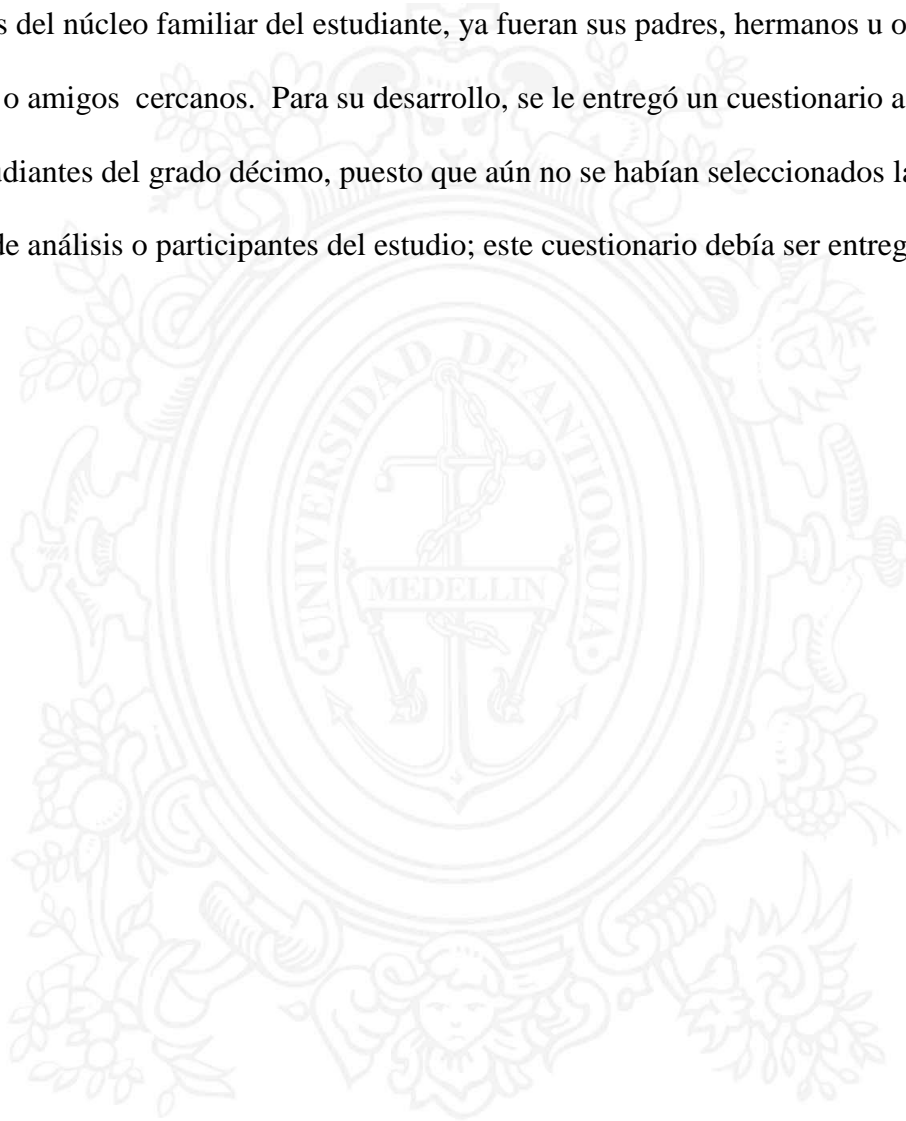


UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

Facultad de Educación

### 5.3.1.2. *Cuestionario familiar.* Estaba dirigido para uno o varios

integrantes del núcleo familiar del estudiante, ya fueran sus padres, hermanos u otros familiares o amigos cercanos. Para su desarrollo, se le entregó un cuestionario a cada uno de los estudiantes del grado décimo, puesto que aún no se habían seleccionados las unidades de análisis o participantes del estudio; este cuestionario debía ser entregado al día siguiente.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
 FACULTAD DE EDUCACIÓN  
 LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
 PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014  
 CUESTIONARIO FAMILIAR SOBRE LA SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
 Jhon Edwar Gómez Berrio

Responda las siguientes preguntas con la ayuda de sus padres o familiares más cercanos.

1. Para ustedes ¿qué es la simetría?
2. ¿En qué aspectos de la vida diaria se puede evidenciar la simetría?
3. ¿Qué objetos simétricos o con ejes de simetría pueden encontrar en su casa?
4. Dibujen posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas

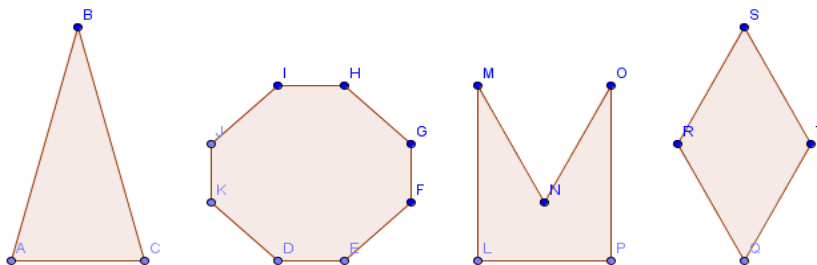


Imagen 4. Cuestionario realizado a los familiares de los estudiantes.

### 5.3.1.3. *Realización de dobleces con papel.* En esta actividad se

construyó, con todos los estudiantes del grado décimo, una serie de dobleces equivalentes a elementos de la geometría plana necesarios para la comprensión del concepto de simetría, y en el transcurso de la actividad se realizaban una serie de preguntas sobre la simetría y sobre otros conceptos geométricos, con el fin de evidenciar las diferentes relaciones y percepciones que los estudiantes tenían de estos.

*I. Construcción de un segmento de recta o dobléz.* Con la hoja de papel, realizar un dobléz colocando una parte de la hoja sobre sí misma y presionando en la línea que se forma al doblar, para evidenciar el segmento cuando retorne el papel a su estado inicial.

¿Cuántos puntos sobre la hoja se necesitarían para trazar o construir un segmento cualquiera?

¿Qué se pueden decir de estos puntos que determinan el segmento?

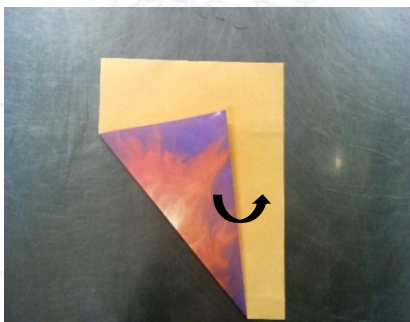


Imagen 5. Realización primer dobléz.

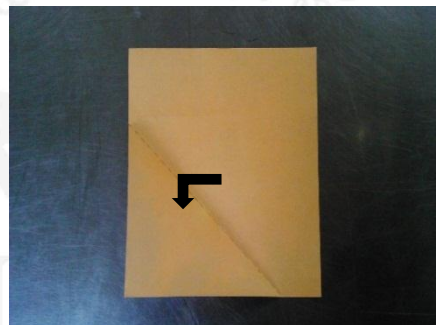


Imagen 6. Resultado primer dobléz.

*II. Construcción de una recta perpendicular a otra.* A partir del segmento de recta construido anteriormente con el doblez, se realiza una perpendicular a este. Se coloca este doblez sobre sí mismo, es decir que se hace coincidir; cuando esto se logre se presiona el papel para formar un segundo doblez, el cual será perpendicular al primero.

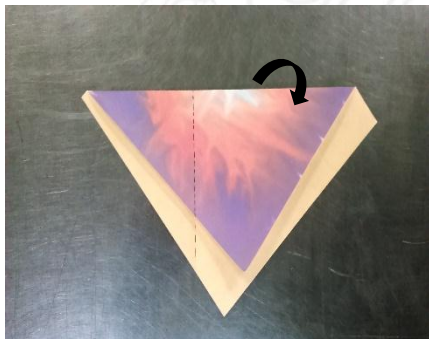


Imagen 7. Realización del segundo doblez.

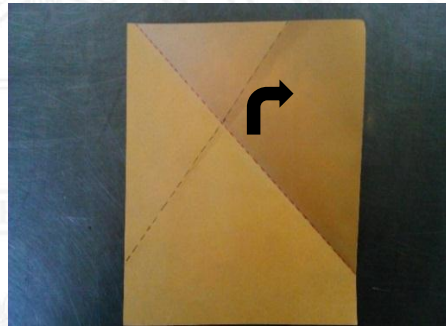


Imagen 8. Rectas perpendiculares.

¿Qué son las rectas perpendiculares?

¿Cómo se puede establecer que dos rectas son perpendiculares o que características tienen?

A partir de la respuesta anterior ¿Cómo se pueden verificar estas características con el doblado de papel?

*III. Construcción de dos rectas paralelas.* Con el segundo doblez que se acabó de realizar, se efectúa el mismo procedimiento anterior; es decir, que se le realizará a



este último doblado o recta un doblado perpendicular, lo cual se logra haciéndolo coincidir consigo mismo. El tercer doblado o recta que se genera será perpendicular al segundo doblado pero, a su vez, paralelo al primer doblado que se realizó.

Nota: Es importante que se propicie un espacio donde los estudiantes traten de realizar esta construcción sin ayuda del docente, para esto se plantean preguntas así: A partir de la anterior construcción de las dos rectas o dobleces perpendiculares ¿Cómo podrías construir una tercera recta paralela a alguna de las dos con doblado de papel?

¿Qué son las rectas paralelas?

¿Qué características tiene dos rectas paralelas?

¿Cómo puedes comprobar a partir del doblado de papel que los dos dobleces o rectas resultantes son paralelas?

¿Qué diferencias encuentras entre las rectas perpendiculares y las rectas paralelas?

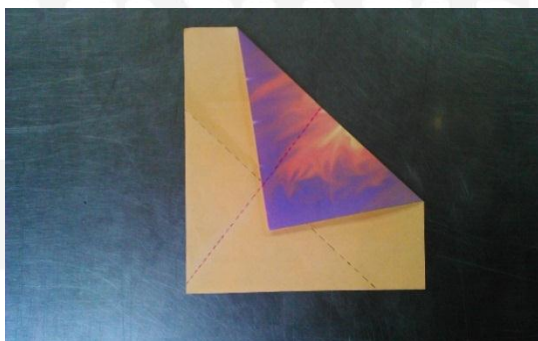


Imagen 9. Realización Tercer doblado

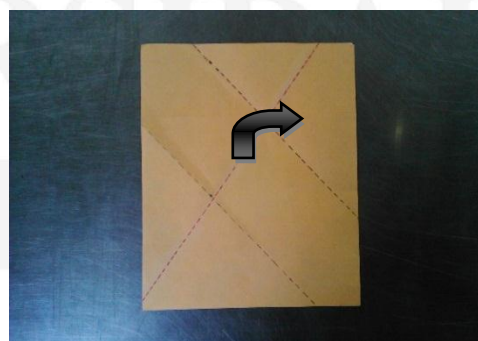
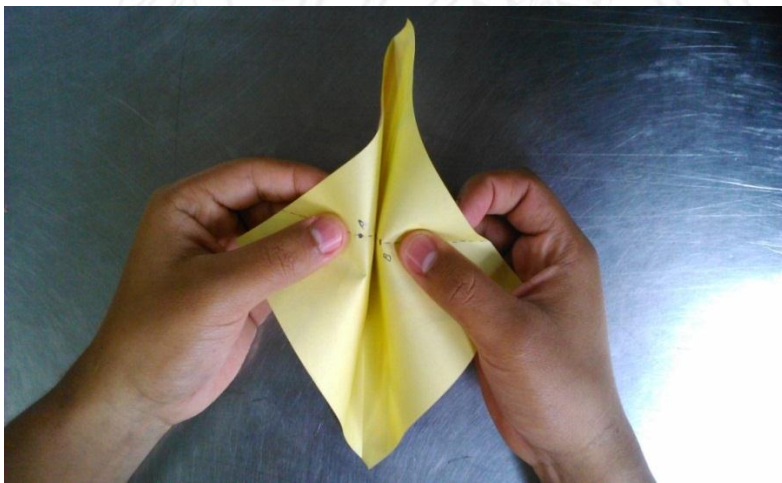


Imagen 10. Rectas paralelas.

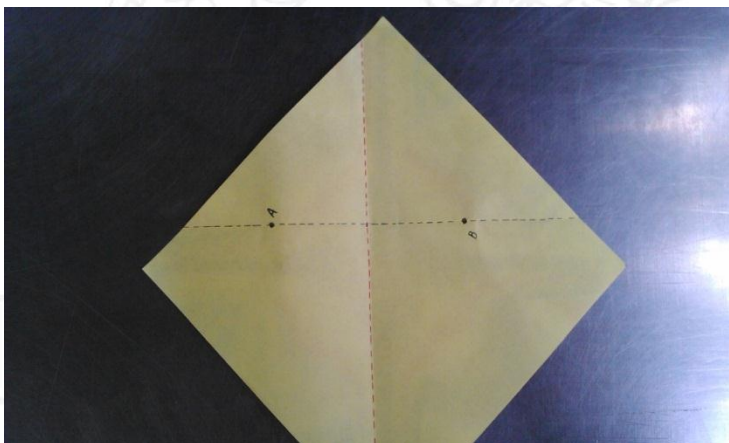




*IV. Construcción de la mediatriz:* En otra hoja se construye un doblez cualquiera, luego sobre el doblez se pintan dos puntos nombrados A y B. Posteriormente una los puntos A y B y presione la hoja por la parte que se dobla al realizar la unión, con el objetivo de generar así un segundo doblez.



*Imagen 11.* Llevar un punto sobre otro



*Imagen 12.* Doblez Resultante

El doblez resultante se le conoce como mediatriz del segmento del doblez  $\overline{AB}$ , la cual se puede definir como el lugar de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento, esto quiere decir que si se toma cualquier punto de la mediatriz, la distancia de este con respecto al punto A será la misma distancia con respecto al punto B.

Además de la mediatriz ¿Qué otra característica o función se le puede atribuir al doblez realizado?

¿Cómo puedes comprobar con doblado de papel que los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  son iguales?

Se toma un punto C cualquiera sobre la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  y se une con un doblez el punto C con el punto A y el punto B, como se muestra en la imagen.

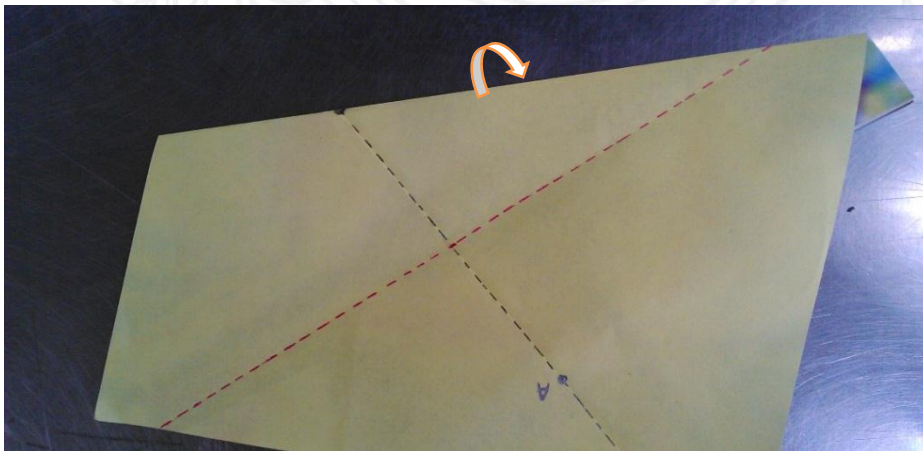


Imagen 13. Doblez que une el punto C con el B.

¿Qué figura geométrica aparecerá?

¿Qué propiedades o características tiene dicha figura?

En la figura formada la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  ¿Qué línea notable representa?

¿Cómo puedes relacionar la mediatriz con la simetría en la figura?

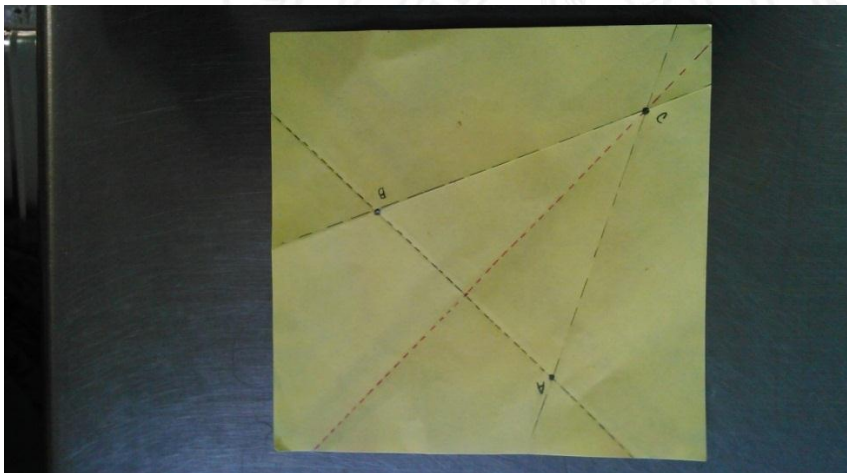


Imagen 14. Dobleces que unen los puntos A, C y C, B.

Se puede observar y comprobar que los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  son congruentes, por lo tanto el triángulo ABC es isósceles, desde aquí se puede inferir que con cualquier punto que se tome en la mediatriz y los puntos A, B iniciales se podrá formar un triángulo isósceles y, por ende, las distancias del punto sobre la mediatriz a cualquiera de los dos extremos del segmento serán iguales.

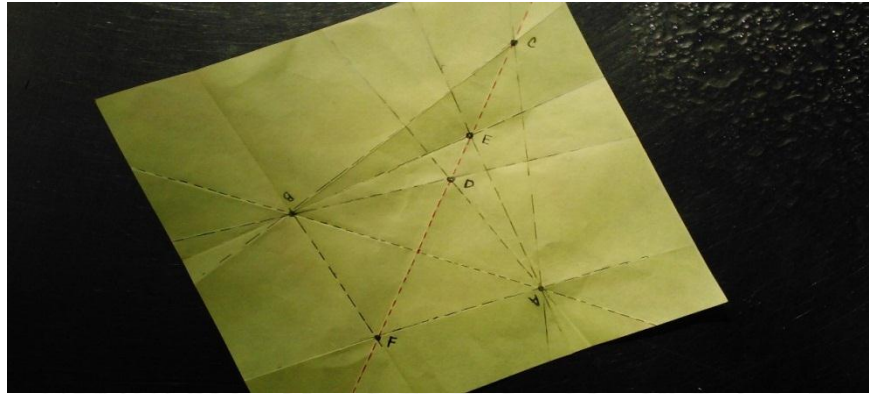
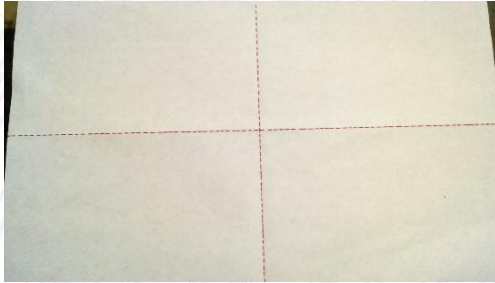


Imagen 15. Resultado de varios dobleces que unen puntos sobre la mediatriz y los puntos A,B.

**5.3.2. Fase de Investigación Guiada.** Esta fase se desarrolla con los participantes del estudio de casos escogidos dentro del grupo del grado décimo, que corresponden a los estudiantes que en la realización de las actividades de doblado de papel iniciales, mostraron mayor dificultad para elaborarlas, además de los problemas que se evidenciaron en los cuestionarios entorno a la comprensión del concepto de simetría. Esta fase se lleva a cabo en diferentes sesiones, en las cuales se realizan actividades de traslación de figuras, de construcción de ejes de simetría, construcción de figuras planas y, finalmente, construcción de figuras tridimensionales; todas ellas tenían como base la utilización del doblado de papel; además de esto se recurrió, en algunas ocasiones, al uso de papeles de diferentes colores o marcadores y colores, para evidenciar los diferentes ejes de simetría en cada una de las figuras elaboradas. También se acudió a la realización de superposiciones con el papel y a la puesta del papel a contra luz, ya fuese en la actividad de rotación de la figura y en algunas construcciones; de igual forma en el transcurso de cada construcción o actividad se formularon preguntas a los participantes para propiciar la reflexión en cuanto al concepto de simetría y facilitar la relación del mismo con otros conocimientos tanto geométricos como de otras disciplinas y ciencias.



**5.3.2.1. Traslación de figura con doblado de papel.** Tomar una hoja de block y doblar por mitades, ambos dobleces servirán como ejes de simetría (eje de simetría horizontal y eje de simetría vertical).

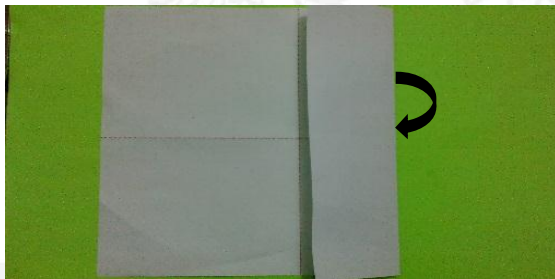


*Imagen 16.* Realización de los ejes de simetría.

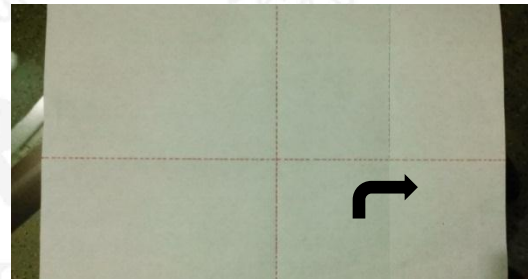
¿Qué características tiene estas dos rectas, además de ser ejes?

¿Qué ángulos se forman en el centro de la hoja de papel?

Posteriormente se hace coincidir un borde vertical de la hoja con la recta o doblez vertical construido anteriormente, presionando la hoja para crear un tercer doblez, como se muestra en la imagen:



*Imagen 17.* Tercer doblez sobre la hoja.



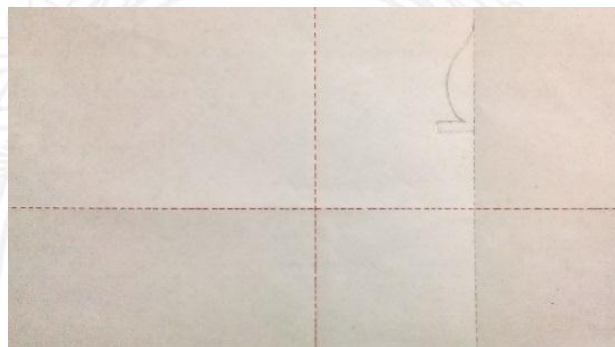
*Imagen 18.* Resultado del tercer doblez





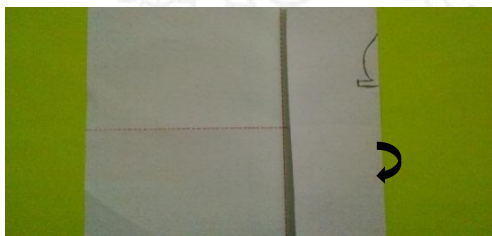
¿Qué fracción de la hoja representa uno de los rectángulos más pequeños que se formaron con la realización de los dobleces?

Sobre el lado derecho de último doblez realizado se realiza un dibujo cualquiera como se muestra en la imagen:

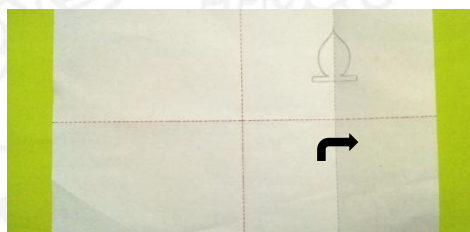


*Imagen 19.* Dibujo de figura cualquiera.

Posteriormente se dobla nuevamente por el doblez en donde se realizó la figura; es decir se superpone, y se trata de copiarla o calcarla en el otro lado en forma precisa, para esto se puede poner a contraluz el papel:



*Imagen 20.* Primera traslación.



*Imagen 21.* Resultado de primera traslación.

¿Qué propiedad tiene la primera figura con relación a la otra figura que se calco?

¿Qué papel cumple el doblez que sirvió como referencia para trazar la figura?

se podría trasladar esta figura a otro cuadrante de la hoja? Después de esto se dobla la hoja por la recta o eje vertical central, para que con esto la figura dibujada quede reflejada en el cuadrante superior izquierdo y se pueda calcar sobre el mismo:

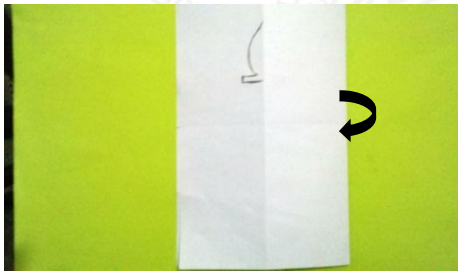


Imagen 22. Segunda traslación.

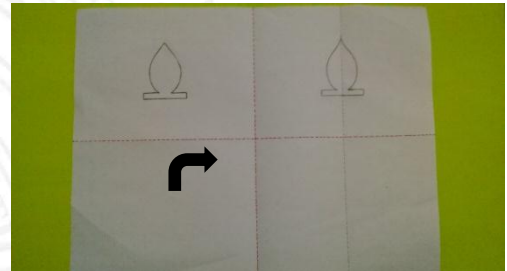


Imagen 23. Resultado segunda traslación.

¿Cómo se podría trasladar esta figura a otro cuadrante de la hoja?

¿Cómo se podría establecer simetría axial entre la figura realizada respecto al cuadrante inferior izquierdo?

¿Qué tipo de simetría se puede establecer entre las dos figuras realizadas?

Del mismo modo se dobla la mitad de la hoja sobre el eje de simetría horizontal, para que las dos figuras se superpongan sobre los dos cuadrantes inferiores y se pueda resaltar sobre ellos:

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

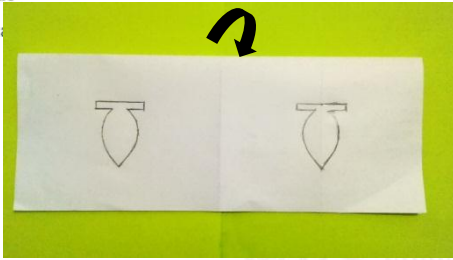


Imagen 24. Tercera traslación.

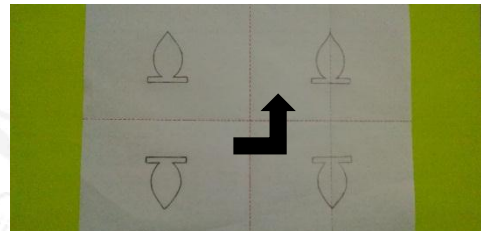


Imagen 25. Resultado de la tercera traslación.

¿Qué tipo de simetría se puede establecer entre la figura formada en el cuadrante superior derecho y el inferior izquierdo?

En total ¿Cuántos ejes de simetría se realizaron en la actividad?

**5.3.2.2. Realización de ejes de simetría sobre figuras en el papel.** La siguiente actividad tiene como propósito que el estudiante trace ejes de simetría para cada uno de las figuras planas, utilizando únicamente el doblado de papel, sin importar si lo hace inicialmente en forma errada; puesto que el propósito de la actividad es generar reflexión de los estudiantes, para que este pueda avanzar en su comprensión y realizar finalmente en forma adecuada los ejes de simetría en una o varias figuras. Al principio es importante dejar que el estudiante indague y trate de hacer dichos ejes por sí mismo, sin contar con la ayuda de los investigadores; más adelante y de acuerdo a las dificultades observadas en cada uno de ellos, los investigadores pueden entrar a guiar y dirigir la actividad por medio de preguntas o explicaciones y así mediar el proceso de comprensión.

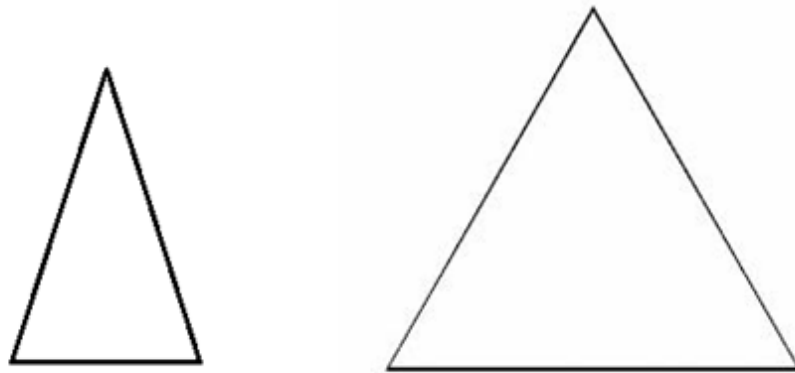


Imagen 26. Triángulos para realizar ejes de simetría.

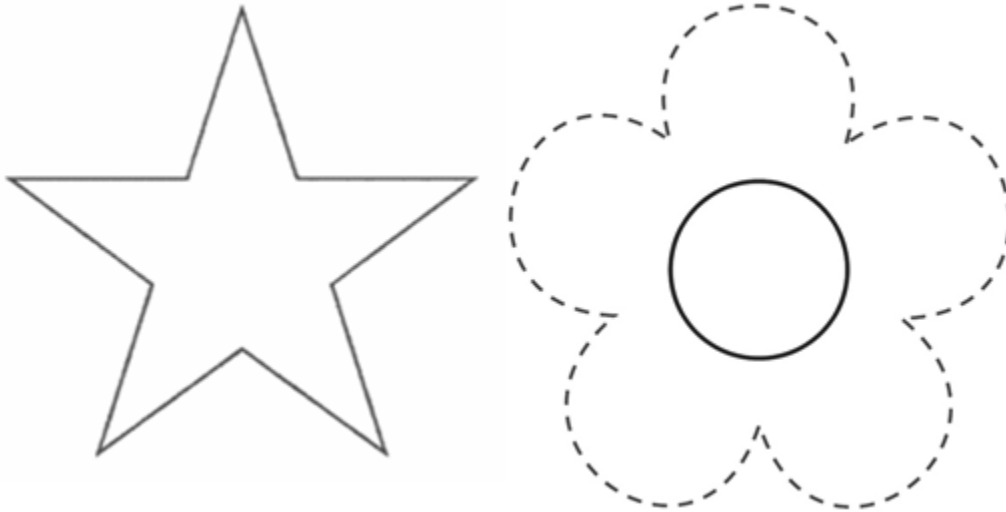


Imagen 27. Estrella y flor para elaborar ejes de simetría.

Para facilitar la reflexión y el análisis en los estudiantes se realizaron las siguientes preguntas:

En los triángulos isósceles y equilátero además de ser ejes de simetría, que otras líneas notable representa dichos ejes?

¿Cuántos ejes crees que se pueden trazar a la estrella?

¿Qué tipo de simetrías puedes encontrar en la estrella?

¿Cuántos ejes de simetría se pueden trazar en la flor?

Cuando se trazan los diferentes ejes de simetría en la flor, en la circunferencia dibujada al interior de esta ¿Qué relación puedes encontrar entre los segmentos de dobles o recta contenidas dentro de la circunferencia y algunas de sus líneas notables?

**5.3.2.3. Construcción de figuras planas.** Para esta actividad se le proporciona una serie de instrucciones a los participantes para facilitar la realización de las diferentes figuras; puesto que el objetivo principal no es la construcción de las mismas sino el análisis y comprensión del concepto de simetría que se encuentra inmersa en ellas.

*I. Mariposa vagarosa.* Para la realización de esta figura se toma una hoja de papel cuadrada y se trazan sus diagonales con doblado de papel. Posteriormente se dobla una de las mitades, llevando uno de los lados del cuadrado sobre su paralelo.

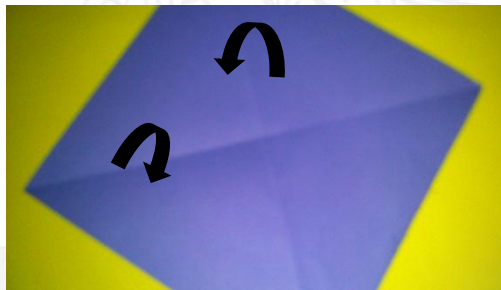


Imagen 28. Trazo de diagonales.



Imagen 29. Dobles por la mitad de la hoja.

Luego, se dobla la mitad derecha verticalmente y se lleva la punta hacia el centro formando un triángulo en este lado.



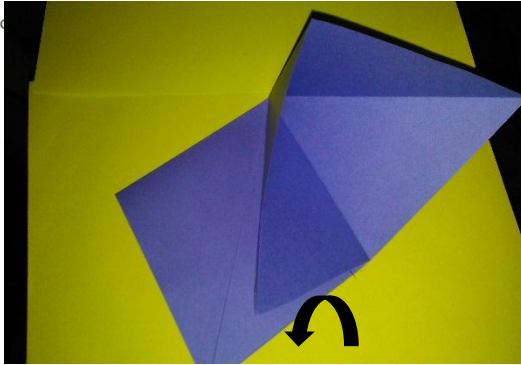


Imagen 30. Formación del triángulo derecho.

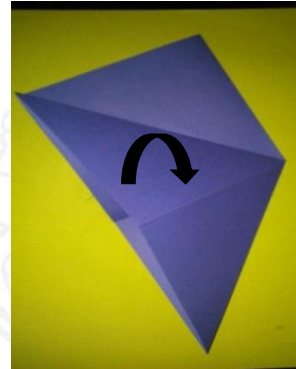


Imagen 31. Triángulo derecho.

Se repite el proceso para el lado izquierdo presionando finalmente la hoja hasta formar un triángulo como se muestra en la gráfica.

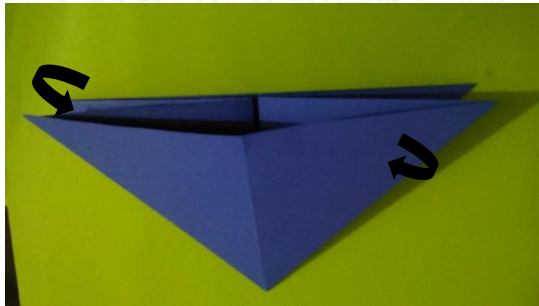
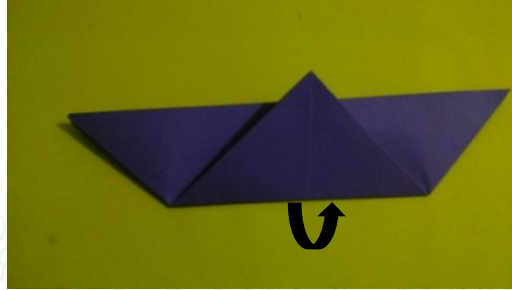


Imagen 32. Triángulos derecho e izquierdo.

¿Por qué los dos triángulos que se encuentran sobrepuestos son simétricos?

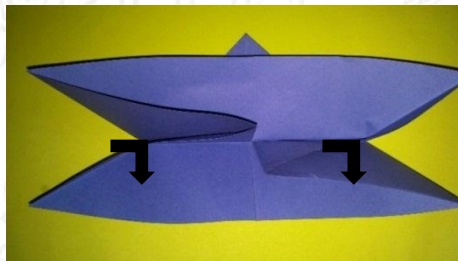
¿Qué relación puede establecerse entre la simetría y la congruencia de dichos triángulos?

Partiendo de la posición anterior, se dobla la figura, aproximadamente por la mitad, pero permitiendo que la punta de esta sobresalga aproximadamente un centímetro con respecto a la horizontal.



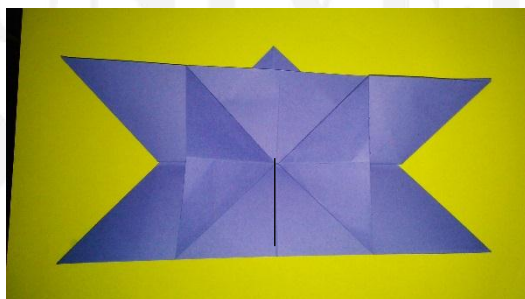
*Imagen 33.* Dobleces de la parte inferior.

Luego, se rota la figura  $180^\circ$  y, posteriormente, se abre hacia arriba unas de las dos capas que se forman en la parte inferior, como se muestra a continuación:



*Imagen 34.* Abertura de una capa inferior.

Las dos puntas que sobresalen al abrir la capa, se doblan hacia adentro siguiendo la línea del doblado central, presionando para formar dos triángulos con sus ángulos superiores opuestos por el vértice:



*Imagen 35.* Formación de los dos triángulos opuestos.

¿Qué tipo de simetría se puede establecer entre estos dos triángulos?

¿Qué propiedades tiene los ángulos opuestos por el vértice?

Levante cada uno de los triángulos formados anteriormente y haga coincidir el borde inferior derecho que se encuentra exterior al triángulo, con el borde lateral derecho de la figura, el cual también es exterior al triángulo. Posteriormente corte con una tijeras el eje central inferior de la figura, y finalmente haga el eje central de cada lado con la diagonal inferior que se formó en el paso anterior.



Imagen 36. Mariposa finalizada.

¿Qué tipos de simetría se pueden establecer entre las diferentes figuras que se forman en la mariposa?

*II. Estrella de ocho puntas.* Para la realización de la estrella se toma una hoja cuadrada y se le trazan sus diagonales doblando el papel, además se dobla por ambas mitades de la hoja; posteriormente se lleva dos de sus puntas consecutivas hacia el centro del cuadrado como se muestra en la gráfica:

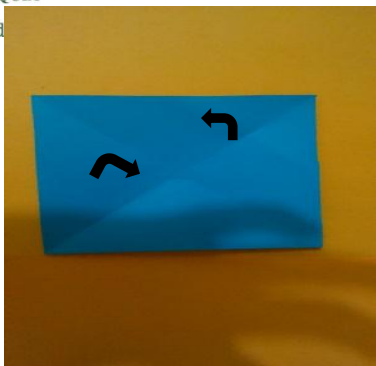


Imagen 37. Trazado de diagonales

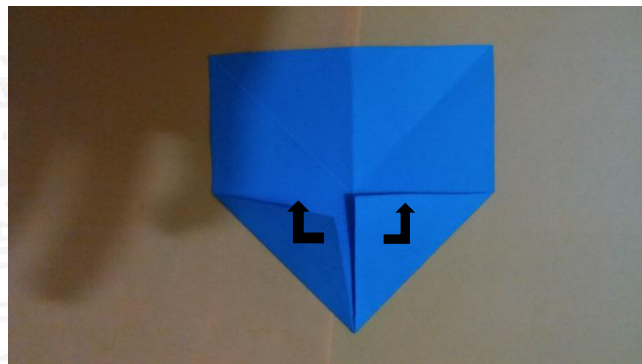


Imagen 38. Pentágono regular

Con el pentágono irregular formado, lleve uno de los lados paralelos sobre el otro, de tal manera que las pestañas que sobresalían de los dobleces anteriores, queden por dentro formándose un trapecio rectángulo. Lleve la punta inferior izquierda del trapecio hacia dentro hasta tocar la punta superior derecha de la base menor del trapecio, como se muestra a continuación.

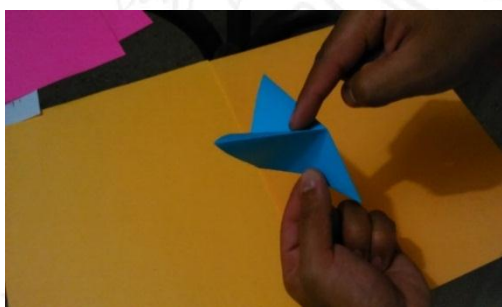


Imagen 39. Formación del paralelogramo.

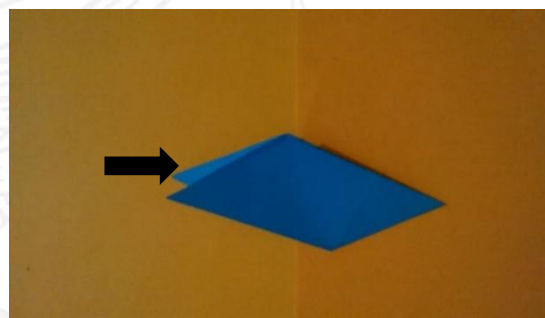


Imagen 40. Resultado procedimiento anterior.

El módulo que resulta tiene forma de paralelogramo. Posteriormente, se realizan otros siete módulos de la misma forma:





Imagen 41. Módulos para realizar la figura.

Ahora, se toman dos de los módulos, se introduce uno de estos en las alas del otro (ver el módulo azul en la figura 41), de tal forma que las alas del que está por fuera se puedan doblar sobre las del otro:

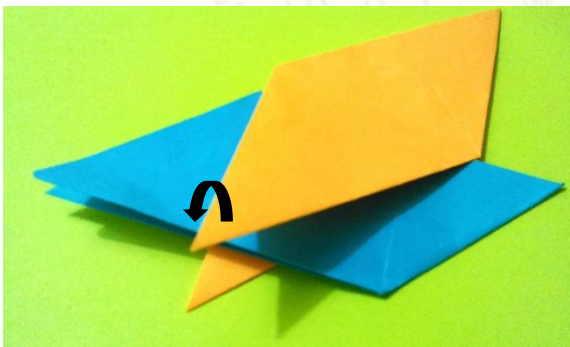


Imagen 42. Ensamble de los módulos.



Imagen 43. Doblez para ensamblar.



Posteriormente, en las alas que no están dobladas, introducimos el siguiente módulo y doblamos las alas del anterior y así sucesivamente se repite el proceso se repite para los 8 módulos.

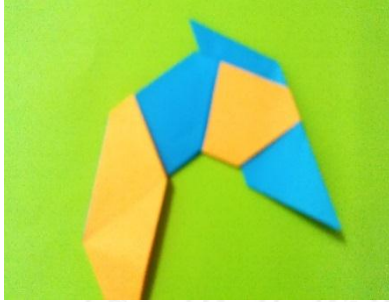


Imagen 44. Ensamble.

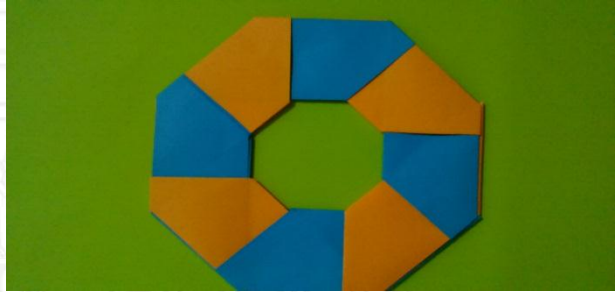


Imagen 45. Figura totalmente ensamblada.

Los módulos de la figura resultante se pueden trasladar hacia el centro para formar la estrella de ocho puntas, tal como se observa en la siguiente figura.

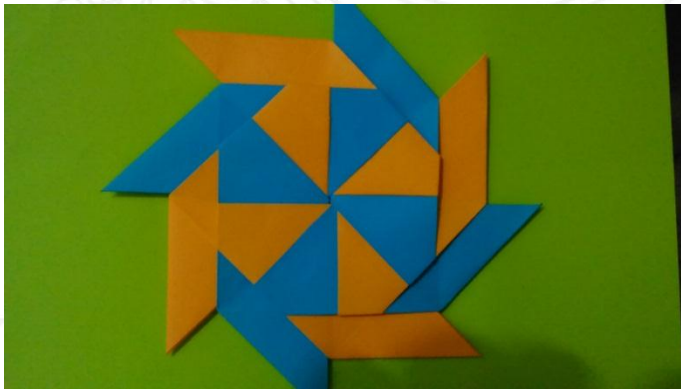


Imagen 46. Estrella finalizada.

¿Cuáles ejes de simetría se pueden ver en esta estrella?

¿De qué forma se pueden identificar fácilmente?

En las diferentes figuras geométricas que se forman en la estrella ¿puedes identificar algunas simétricas?

¿Qué tipo de simetría encuentras en estas figuras?

**5.3.2.4. Construcción de figuras tridimensionales.** Del mismo modo que para la construcción de figuras planas a los estudiantes se les proporciona una serie de instrucciones con el fin de facilitar la construcción de las figuras.

*I. Construcción de una flor.* Se toma una hoja totalmente cuadrada y se trazan sus diagonales doblando el papel.

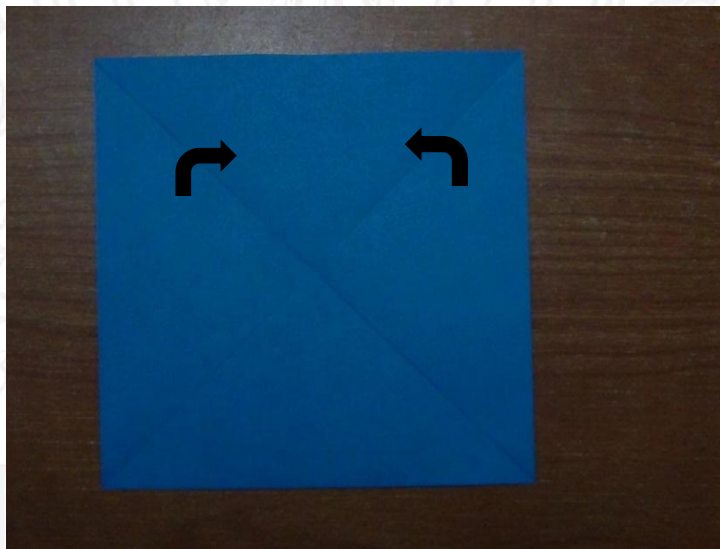


Imagen 47. Realización de las diagonales

A continuación, se realiza un doblez central, al llevar el lado superior del cuadrado, sobre su lado inferior. Unir este doblez consigo mismo en el interior de la hoja, tal como se muestra en la imagen.

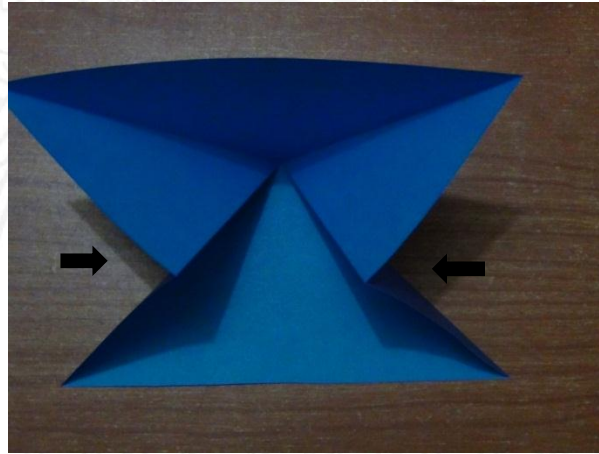


Imagen 48. Unión de los extremos del doblez

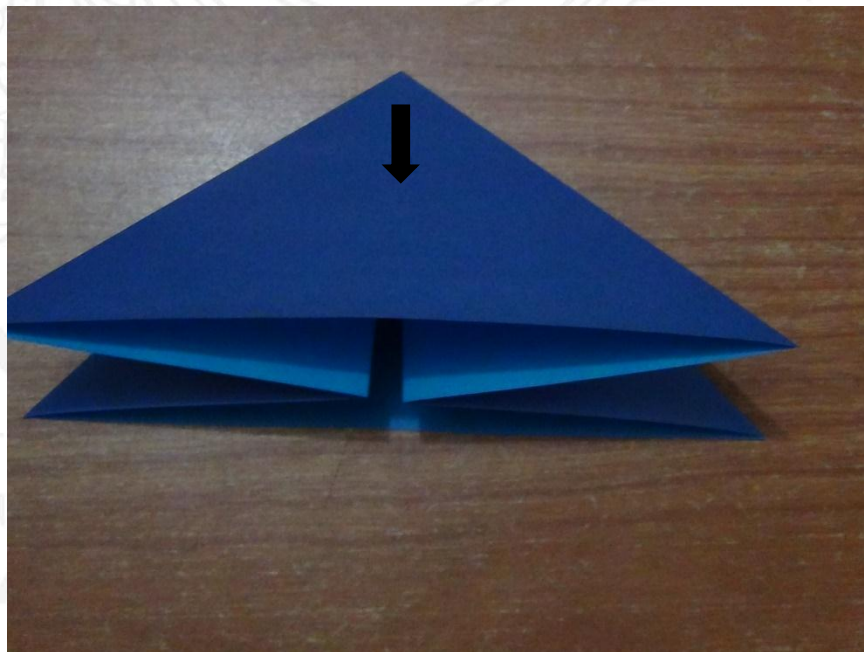


Imagen 49. Resultado de la unión anterior

Hacer un dobléz central de la hoja cuadrada, llevar los catetos del triángulo rectángulo que se ha formado, sobre este dobléz. Luego desdoblar. Posteriormente, abrir esa porción de la figura, considerando el último dobléz elaborado.

¿A qué líneas notables hace referencia el eje o dobléz central?

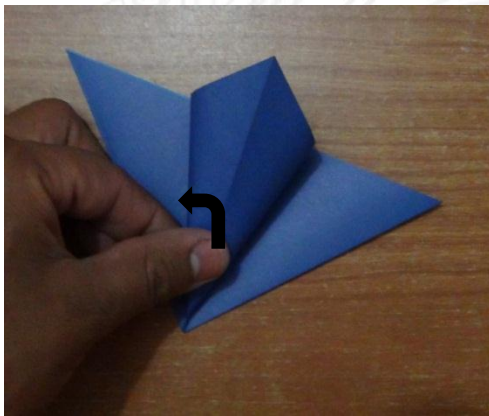


Imagen 50. Doblez de una de las cuatro puntas

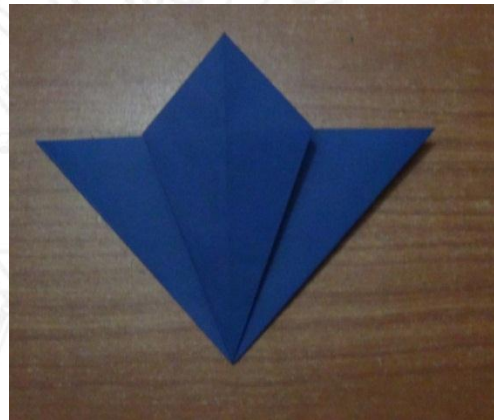


Imagen 51. Resultado del dobléz anterior

Luego se repite el mismo procedimiento con todos los demás extremos de la figura:

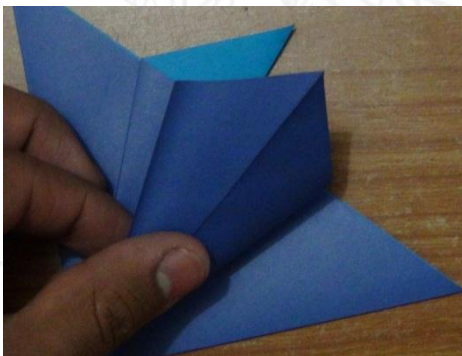


Imagen 52. Repetición del proceso.

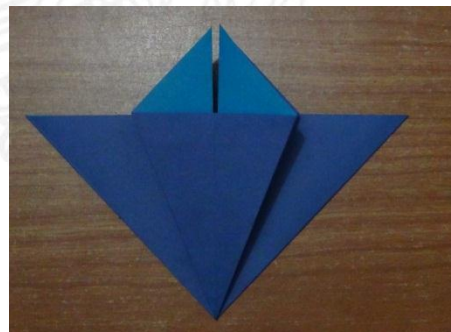
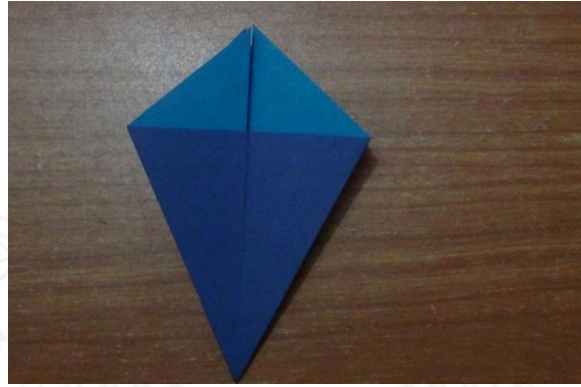


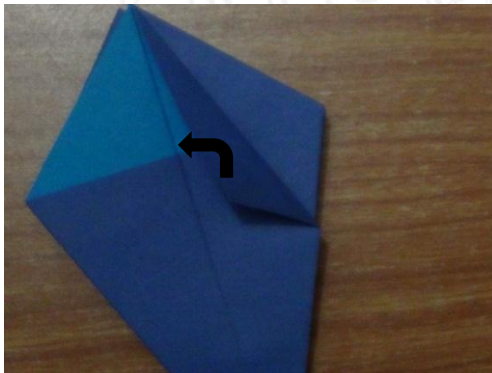
Imagen 53. Repetición del proceso.



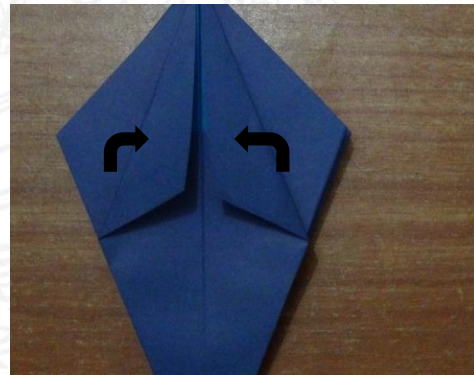


*Imagen 54.* Resultado final de los dobleces en las cuatro puntas.

Considerando la figura en forma de cuadrilátero y con su ángulo agudo dirigido hacia abajo, se llevan los lados laterales superiores sobre el doblez central, como se muestra en la imagen:



*Imagen 55.* Dobleces en la parte superior de las puntas.



*Imagen 56.* Resultado del dobleces superiores.

Una vez se repita esta paso en todos los demás lados laterales superiores, se procede a abrir cada doblez e intentar llevarlo hacia adentro de los extremos de la figura:

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



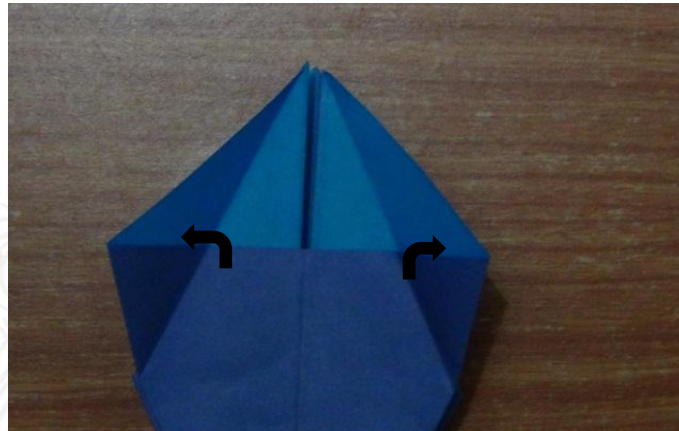


Imagen 57. Abertura de los dobleces anteriores.

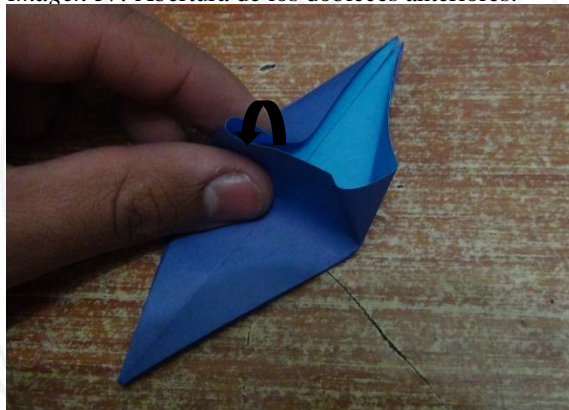
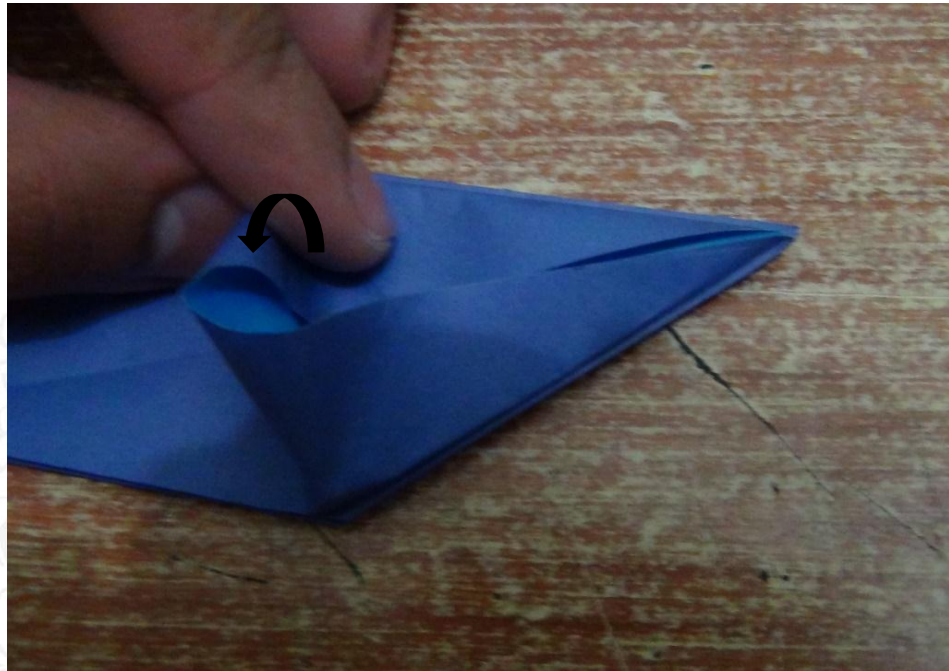
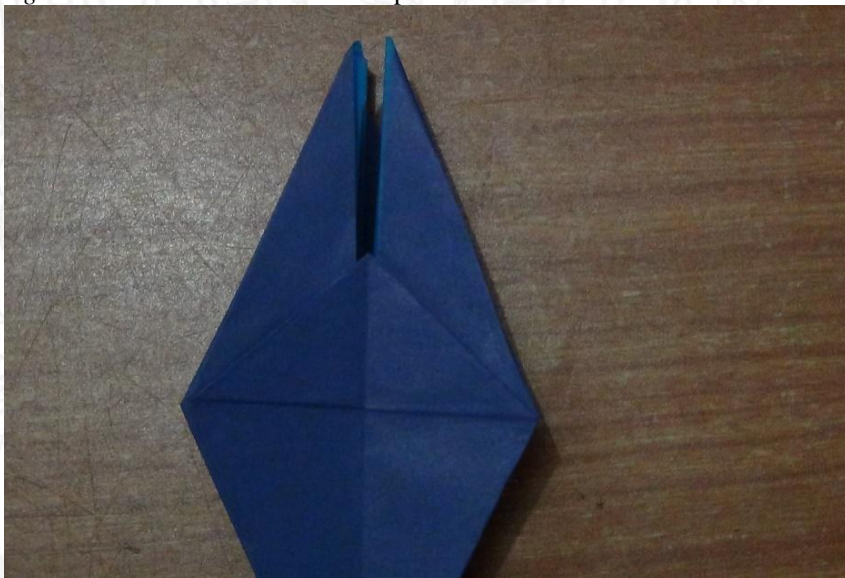


Imagen 58. Doblez de las puntas hacia afuera.

Nota: las puntas se llevan hasta el centro formando un vértice por fuera visible; este procedimiento se repite para los demás lados de la figura.

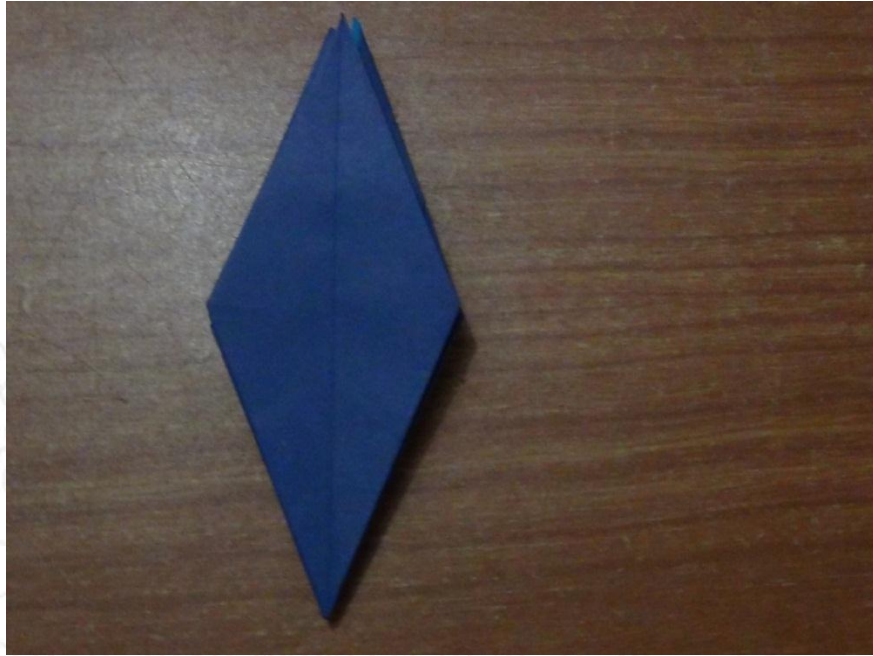


*Imagen 59.* Doblez de cada una de las puntas hacia afuera.



*Imagen 60.* Resultado del procedimiento anterior.

Posteriormente, se toma la figura por una de las caras planas, es decir, que no tienen el anterior vértice sobresaliente, como lo indica la imagen:



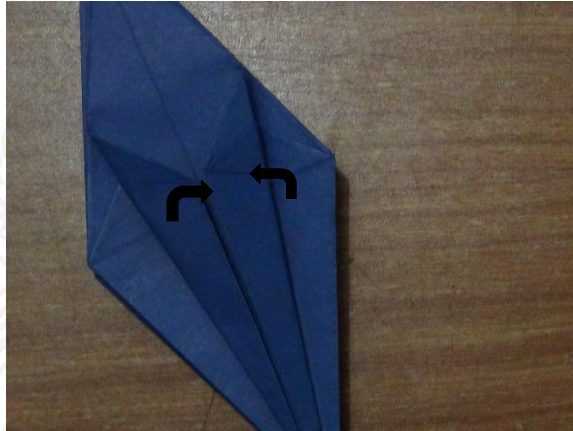
*Imagen 61.* Figura vista desde las otras caras.

Ahora, se llevan los bordes inferiores izquierdo y derecho hacia el eje de simetría central.



*Imagen 62.* Doblez de los bordes inferiores hacia el dobléz central.





*Imagen 63. Resultado del doblar anterior*

Del mismo modo, se realiza el procedimiento en los demás bordes (izquierdo y derecho) de la figura.

Por último, se enrollan con un lápiz los mantos superiores que se forman, para dar vida a la flor y así se obtiene la figura final.



*Imagen 64. Envoltura de las puntas con lapicero.*



Imagen 65. Flor con doblado de papel.

*II. Construcción de la rana.* Para esta construcción se toma una hoja cuadrada, se trazan sus diagonales y se doblan las dos mitades. Como se puede observar en los dobleces, se han formado ejes de simetría que permitirán la realización de los demás pasos.

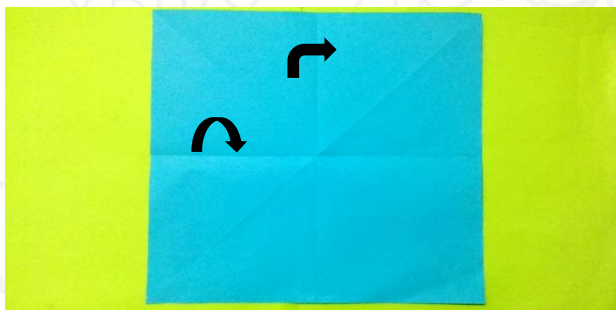


Imagen 66. Realización de las diagonales y ejes de simetría.



Dobla la hoja formando un cuadrado de tal forma que las diagonales interiores coincidan. Se toma uno de los laterales del cuadrado y se lleva al centro, de tal forma que se forme una bolsa.



*Imagen 67.* Unión de las diagonales interiores.



*Imagen 68.* Formación de una bolsa.

Se repite el mismo procedimiento, formando cuatro bolsas en total en toda la figura.



*Imagen 69.* Bolsas en todos los lados de la figura.

¿Cuáles ejes de simetría se identifican en la construcción realizada?

Posteriormente se llevan los extremos C y B al centro de la figura de tal forma que los laterales coincidan con el eje de simetría.

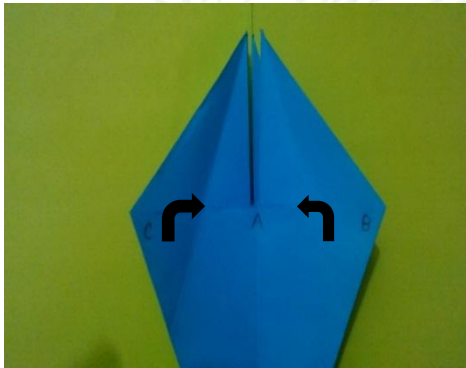


Imagen 70. Dobleces de las laterales hacia el eje de simetría.



Imagen 71. Resultado del procedimiento anterior.

Una vez hechos los dobleces se abre de nuevo la bolsa, se llevan nuevamente los puntos C Y B al centro de la figura pero esta vez por dentro de la bolsa. Se forma un triángulo donde el punto A es vértice

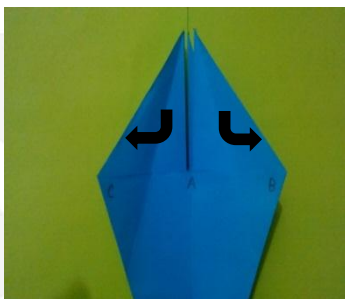


Imagen 72. Dobleces hacia afuera.

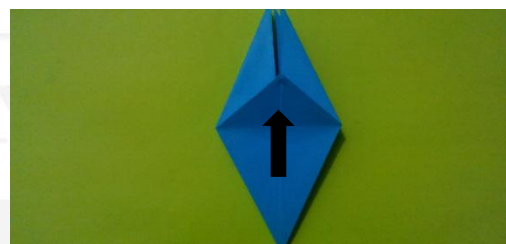


Imagen 73. Se lleva el punto A hacia abajo.

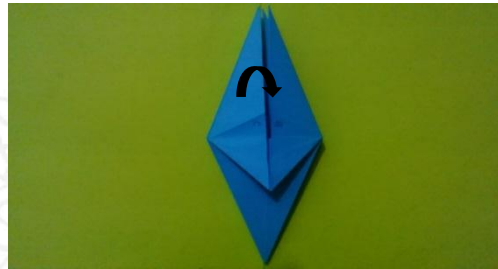


Imagen 74. Punto A hacia arriba.

El anterior procedimiento se realiza para las cuatro partes de la figura.

¿Qué pasaría si el doblar central no fuera un eje de simetría para esta figura?

Luego se lleva el punto E sobre el punto F, de tal forma que quede la cara completamente lisa de la figura

¿Qué tipo de simetría hay entre el punto E y F?

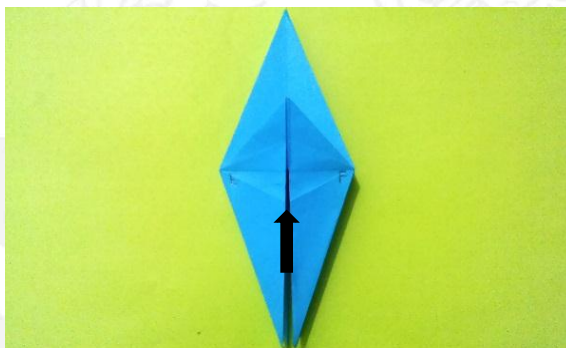


Imagen 75. Todos los puntos A hacia arriba.



Imagen 76. Otras caras de la figura.

Se repite el mismo procedimiento para los cuatro lados de la figura. Ahora dado los puntos laterales G y H se llevan estos al eje de simetría y se repite el mismo procedimiento para los cuatro partes de la figura.

¿Se podría establecer simetría axial entre el punto G y H?



Imagen 77. Vértices de las otras caras.



Imagen 78. Doblez hacia el eje central.

Se llevan los triángulos formados uno sobre otro en las cuatro partes de la figura de tal forma que sea visible el revés de este doblez. Luego los dos extremos inferiores hacia los lados formando ángulos de noventa grados. Los extremos de atrás también se llevan hacia arriba pero formando un ángulo obtuso.

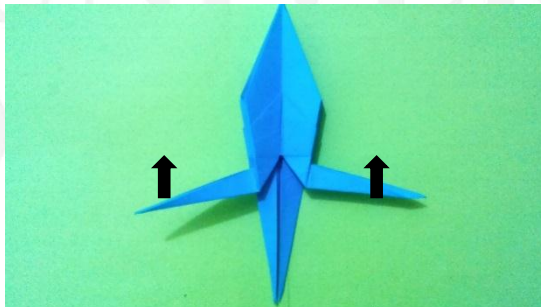


Imagen 79. Puntas delanteras hacia arriba.

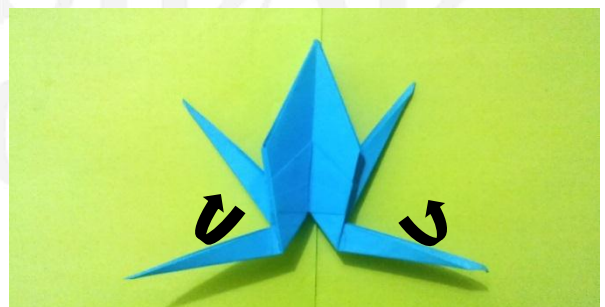


Imagen 80. Puntas traseras hacia arriba.



Finalmente se doblan por la mitad las patas de la rana como se muestra en la imagen.



*Imagen 81.* Rana finalizada.

A partir de las diferentes construcciones ¿En qué otros animales se puede apreciar la simetría? ¿De qué forma?

Observa o recuerda los diferentes objetos y seres presentes en tu entorno ¿Cuáles de ellos son simétricos?

Antes de realizar las actividades ¿habías notado esta característica simétrica que observas ahora en tu alrededor?

¿Consideras que el doblado de papel si fue apropiado de utilizar para la enseñanza de la simetría?

¿Realmente si facilito y apporto a la comprensión del concepto? ¿Por qué?



¿Crees que sería posible abordar otros conceptos geométricos desde el doblado de papel para facilitar su comprensión?, de ser afirmativa tu respuesta menciona algunos de ellos.

¿Qué sugerencias u opiniones quisieras aportar al trabajo realizado hasta ahora, tanto en las construcciones como en la utilización del doblado de papel?

**5.5.3. Fase de proyecto final de síntesis.** Esta fase se llevó a cabo en el marco de la feria de la ciencia que se realizó en la institución educativa. En esta etapa, se buscaba evaluar la comprensión del concepto de simetría en los diferentes participantes por medio de las formas de comunicación a las que este recurría, es decir, el objetivo era clarificar el nivel de comprensión referido en el marco teórico de EpC que había alcanzado cada uno de los participantes; para ello, se le solicitó a los mismos la elaboración de un cartel donde expresaran algún conocimiento o concepto comprendido sobre la simetría vinculando, además, el doblado de papel; estos carteles serían exhibidos en la feria de la ciencia junto con las diferentes figuras planas y tridimensionales realizadas en el proceso investigativo.

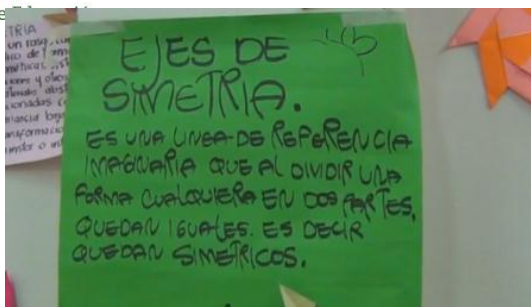


Imagen 82. Cartel realizado por un estudiante para la exposición en la feria de la ciencia.

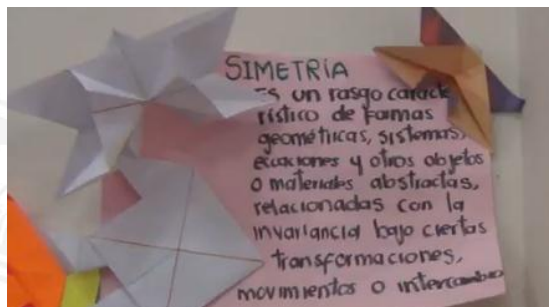


Imagen 83. Cartel realizado por un estudiante para la exposición en la feria de la ciencia.

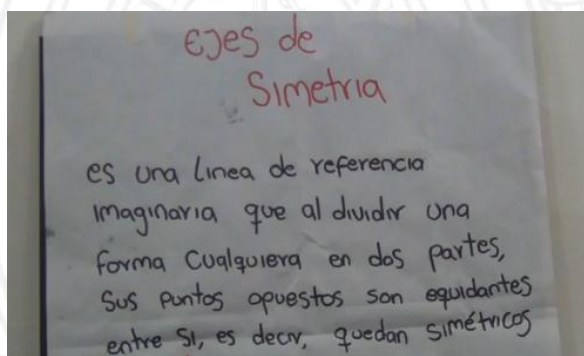


Imagen 84. Cartel realizado por un estudiante para la exposición en la feria de la ciencia.

Por otra parte, los participantes debían realizar una exposición del concepto de simetría y la aplicación del mismo, a cada uno de los estudiantes que se acercaran al lugar que se nos destinó dentro de la feria. Para ello, se contó con la ayuda de las diferentes figuras que se elaboraron en la fase de investigación guiada, todas estas exposiciones fueron registradas en un video y en fotografías, con el fin de analizar posteriormente los resultados obtenidos con las diferentes actividades realizadas dentro del proyecto. Los videos nos facilitaron el estudio y análisis de cada una de las formas en las que los participantes comunicaban lo comprendido, haciendo evidente las dificultades aún existentes y los logros obtenidos en cada uno.



Imagen 85. Exposición en la feria de la ciencia.



Imagen 86. Exposición en la feria de la ciencia.



Imagen 87. Exposición en la feria de la ciencia.



Imagen 88. Exposición en la feria de la ciencia.

La actividad consistía en que los estudiantes, en la feria de la ciencia, expusieran las diferentes figuras que se habían elaborado con el doblado de papel y, por medio, de ellas mostraran los ejes de simetría existentes en cada una; además, debían establecer una diferenciación entre la simetría axial y central, que también se podía evidenciar en las figuras construidas. A partir de esto, los participantes hacían una definición del concepto y mostraban a los demás estudiantes en la feria de la ciencia, cómo este concepto se podía presentar en el contexto y en la naturaleza, puesto que las figuras construidas en su mayoría, eran animales, flores y estrellas; las cuales hacen parte de la realidad y el contexto de todos. El objetivo adicional de esta actividad era demostrar cómo la geometría



y sus conceptos están inmersos en nuestro mundo, posibilitando así despertar interés de los asistentes a la exposición por el estudio de esta disciplina.

**5.3.4. Tablas de Descriptores.** Como resultado de las diferentes actividades y de las observaciones realizadas durante todo el proyecto, se construyeron las siguientes tablas de descriptores, las cuales tienen como finalidad establecer y describir el proceso de comprensión del concepto de simetría del que fue partícipe cada uno de los cuatro estudiante seleccionados para la investigación; buscando con esto establecer el nivel de comprensión alcanzado por los mismos en cada una de las dimensiones de comprensión referidos en el marco de la EpC. Cada uno de los descriptores fue surgiendo con el desarrollo de las actividades, sin embargo, al culminar las mismas, pudimos perfeccionarlos a la luz de la información recolectada en el trabajo de campo del proyecto.

**5.3.4.1. Tabla de descriptores para la dimensión de Contenido.** En esta tabla se hace referencia a los desempeños necesarios para alcanzar cada uno de los niveles de comprensión del concepto de simetría.



Facultad de Educación *Tabla 1. Descriptores para la dimensión de contenido.*

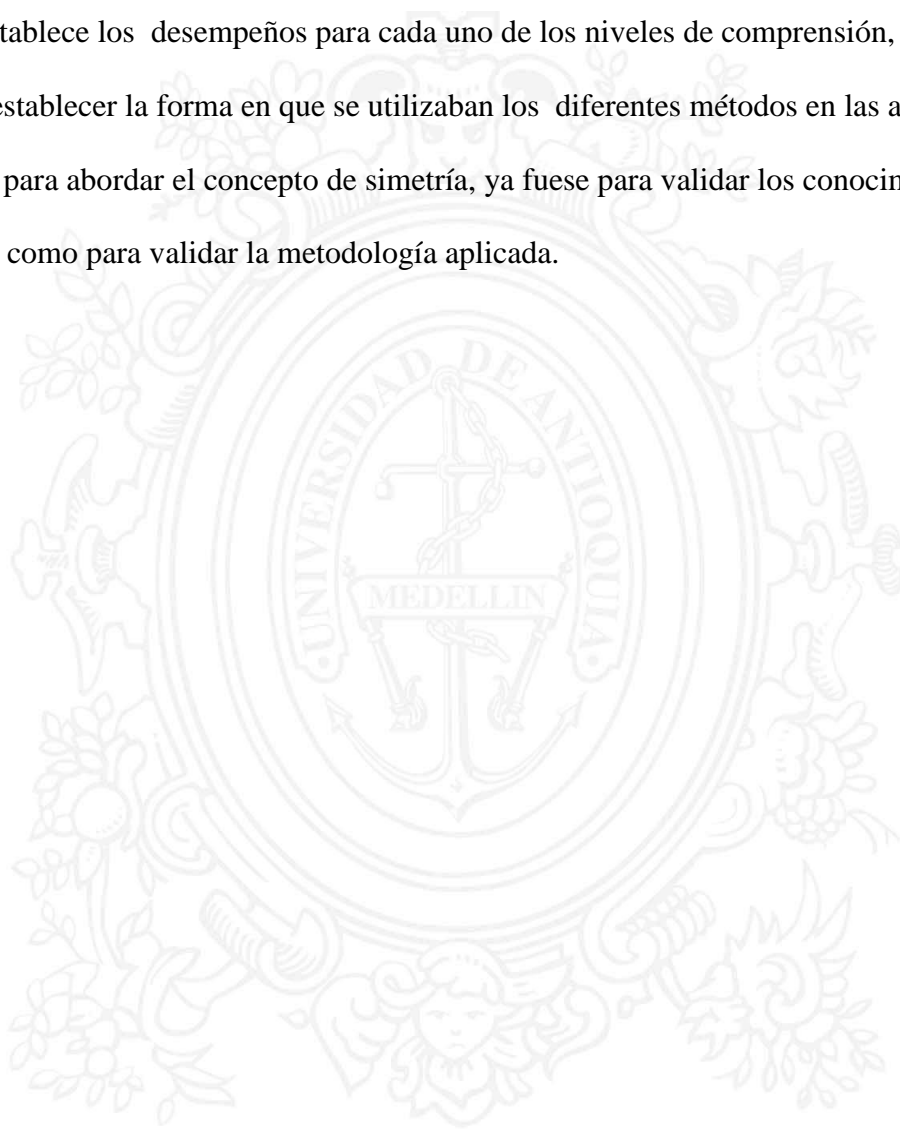
<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>	<b>CONTENIDOS</b>	
	<b><i>SIMETRÍA</i></b>	<b><i>TIPOS DE SIMETRÍA</i></b>
<b><i>INGENUO</i></b>	<p>Manifiesta no conocer el concepto de simetría</p> <p>Responde equivocadamente cuando se le pregunta sobre los ejes de simetría en diferentes figuras.</p>	<p>No identifica la simetría axial ni central en las figuras realizadas.</p> <p>Cuando se le pide realizar rotaciones o dobleces para mostrar los tipos de simetría, lo hace erróneamente.</p>
<b><i>NOVATO</i></b>	<p>Define en forma memorística y repetitiva el concepto de simetría.</p> <p>Identifica y realiza con doblado de papel algunos ejes de simetría, sobre todo en figuras planas.</p>	<p>Manifiesta conocer la simetría axial y central.</p> <p>Se le dificulta, en algunos casos, aplicar o mostrar los tipos de simetría en las figuras trabajadas con doblado de papel.</p>
<b><i>APRENDIZ</i></b>	<p>Reconoce los diferentes ejes de simetría presentes en cada una de las figuras.</p> <p>Relaciona el concepto de simetría con objetos y seres de la naturaleza presentes en su entorno.</p>	<p>Aplica e identifica, a partir del doblado de papel, los tipos de simetría en las figuras.</p> <p>Relaciona los tipos de simetría con algunas situaciones y objetos del contexto y la naturaleza.</p>
<b><i>MAESTRÍA</i></b>	<p>Identifica la presencia del concepto de simetría en otras disciplinas y saberes científicos.</p> <p>Define y aplica con claridad el concepto de simetría durante la realización de las actividades y en otras situaciones escolares.</p>	<p>Aplica y muestra fácilmente los tipos de simetría en las diferentes figuras.</p> <p>Define y relaciona en forma clara la simetría axial y central con figuras o situaciones diferentes a las trabajadas.</p>





**5.3.4.2. Tabla de descriptores para la dimensión de Método.** En esta

tabla se establece los desempeños para cada uno de los niveles de comprensión, que permiten establecer la forma en que se utilizaban los diferentes métodos en las actividades realizadas para abordar el concepto de simetría, ya fuese para validar los conocimientos trabajados como para validar la metodología aplicada.



Facultad de Educación *Tabla 2. Descriptores para la dimensión de método.*

<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>	<b>MÉTODO</b>	
	<b><i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i></b>	<b><i>TRASLACIONES CON DOBLADO DE PAPEL</i></b>
<b><i>INGENUO</i></b>	Se le dificulta la realización de dobleces para la elaboración de las figuras. No hace uso del doblado de papel para mostrar ejes de simetría o tipos de simetría en una figura.	No utiliza traslaciones con doblado de papel, ni evidencia las relaciones existentes entre las traslaciones y la simetría central. No utiliza las traslaciones con doblado de papel, ni evidencia las relaciones existentes entre las traslaciones y la simetría axial.
<b><i>NOVATO</i></b>	Utiliza el doblado de papel para construir ejes de simetría o aplicar las diferentes simetrías en forma instructiva, sin cuestionarse durante el proceso.	Utiliza traslaciones con doblado de papel para construir figuras simétricas a otras. Se le dificulta aplicar traslaciones para mostrar los tipos de simetría en una figura tridimensional.
<b><i>APRENDIZ</i></b>	Utiliza el doblado de papel con facilidad en las diferentes actividades. A partir de la observación, trata de comprobar la simetría en diferentes puntos de la figura.	Identifica las diferencias entre la simetría axial y central a partir de traslaciones. Utiliza traslaciones en algunas ocasiones para verificar las construcciones simétricas realizadas.
<b><i>MAESTRÍA</i></b>	Recurre a mediciones con regla y superposiciones en las gráficas para validar el doblado de papel y su aplicación.	En cada una de las construcciones recurre a traslaciones para comprobar el trabajo realizado con doblado de papel.  Utiliza traslaciones como argumento para validar lo comprendido en las diferentes actividades.

**5.3.4.3. Tabla de descriptores de la dimensión de Praxis.** En la siguiente tabla se definen los desempeños que dan cuenta de la relación que hacen los estudiantes entre la teoría y la práctica, y que los permite ubicar en cada uno de los niveles de comprensión



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Facultad de Educación *Tabla 3. Descriptores de la dimensión de praxis.*

<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>	<b>PRAXIS</b>
	<b><i>RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA.</i></b>
<b><i>INGENUO</i></b>	No encuentra ninguna relación entre el concepto de simetría y las diferentes actividades o figuras realizadas. Considera poco relevante la comprensión del concepto de simetría y la aplicación del doblado de papel y las traslaciones, para su desempeño escolar y social.
<b><i>NOVATO</i></b>	Trata de relacionar el concepto de simetría con algunos contenidos o figuras geométricas. Se le dificulta establecer la pertinencia del doblado de papel para el aprendizaje del concepto de simetría.
<b><i>APRENDIZ</i></b>	Relaciona parcialmente el concepto de simetría con algunos conceptos geométricos. Relaciona parcialmente la simetría con otros aspectos de la cotidianidad como el dibujo, la naturaleza y la fisonomía humana.
<b><i>MAESTRÍA</i></b>	Utiliza el concepto de simetría y el doblado de papel para contestar preguntas y resolver problemas. Relaciona conocimientos de otras disciplinas con los contenidos comprendidos sobre simetría. Reconoce el doblado de papel como una herramienta para facilitar el aprendizaje de diferentes conceptos geométricos. Relaciona e identifica claramente el concepto con el contexto que lo rodea.

**5.3.4.4. Tabla de contenido de la dimensión de Formas de Comunicación.** En la siguiente tabla se establecen los desempeños de comprensión que dan cuenta de la manera en la que el estudiante comunica su comprensión y en la facilidad o dificultad que tiene al hacerlo, lo cual permite a su vez ubicarlos en alguno de los cuatro niveles de comprensión.



Tabla 4. Descriptores de la dimensión de formas de comunicación.

<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>	<b>FORMAS DE COMUNICACIÓN</b>		
	<b>USO COHERENTE DEL LENGUAJE</b>	<b>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</b>	<b>USO DE OTROS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS.</b>
<b>INGENUO</b>	No expresa ningún conocimiento sobre el concepto de simetría.	No hace uso del doblado de papel para mostrar sus conocimientos sobre el concepto de simetría.	No recurre o relaciona otros conceptos geométricos con la simetría.
<b>NOVATO</b>	Reconoce el concepto de simetría pero no es claro al tratar de definirlo. Cuando se le pide argumentar o explicar algún procedimiento en la realización de las actividades, lo hace de manera confusa.	Utiliza con dificultad el doblado de papel para exponer o explicar el concepto de simetría. Utiliza con dificultad el doblado de papel para explicar las diferentes simetrías presentes en una figura.	No es claro al utilizar el concepto de traslación para explicar algunas actividades realizadas con doblado de papel. Trata de explicar a partir de otros conceptos geométricos la simetría, pero lo hace de manera confusa.
<b>APRENDIZ</b>	Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar el concepto de simetría. Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar las diferentes simetrías que se evidencian en determinadas figuras.	Utiliza el doblado de papel para exponer algunos de los conocimientos adquiridos sobre simetría. Trata de vincular los procesos de doblado con todas las actividades realizadas, sin embargo falta claridad en su exposición.	Utiliza en forma poco estructurada conceptos como rotación, traslación y superposición, para explicar conocimientos sobre simetría. Expresa una relación coherente entre el concepto de simetría y las diferentes actividades y figuras realizadas.
<b>MAESTRÍA</b>	Explica con claridad y en forma estructurada el concepto de simetría. Expone con facilidad la simetría existente en las diferentes figuras geométricas, al igual que los tipos de simetría. Comunica con facilidad las diferentes relaciones existentes entre el concepto de simetría y su contexto. Hace uso de ejemplos	Utiliza el doblado de papel con facilidad para exponer y explicar en forma clara el concepto de simetría. Recurre al doblado de papel para exponer las diferentes ideas que le surgen con el desarrollo de las actividades, así estas no estén ligadas íntimamente al objeto de estudio.	Las conexiones que hace con otros conceptos geométricos como rotación, traslación y superposición con la simetría son claras y bien definidas. Reconoce, al realizar las actividades, la necesidad e importancia de utilizar diferentes conceptos en la explicación y exposición de la simetría.





	cotidianos para dar a conocer lo comprendido sobre la simetría.		
--	---	--	--

#### 5.4. Evaluación diagnóstica continua

La evaluación en el proyecto de investigación se realizó durante todo el desarrollo de las actividades, donde uno de los instrumentos más importantes para evaluar la comprensión del concepto de simetría, eran los diálogos constantes con los estudiantes y las respuestas que surgían de ellos a partir de las preguntas que los investigadores hacían durante las diferentes actividades. También fue parte importante de esta evaluación, el uso del doblado de papel tanto para identificar las dificultades como los logros que presentaron los estudiantes al utilizar este medio, ya que era el motor central de la realización de las figuras, las cuales también fueron objeto de evaluación.

La evaluación no tenía como objetivo asignar un valor al trabajo realizado por los estudiantes, ni evaluar numéricamente los desempeños alcanzados por los mismos; el propósito era identificar los niveles de comprensión que alcanzaba cada estudiante en las diferentes dimensiones, para lo cual se utilizaron las tablas de descriptores que se fueron construyendo y refinando a partir de todas las intervenciones hechas en el transcurso del proyecto. Más que evaluar para asignar una nota, lo que se pretendía era utilizar la evaluación como parte del proceso formativo y como parte importante en el proceso de comprensión, por ello la validación de los desempeños fue un proceso flexible que permitía reflexionar y modificar las diferentes acciones y aportes de los estudiantes a partir del trabajo realizado en el grupo e individualmente.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

Facultad de Educación



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

## 6. Análisis de la información

El proceso para realizar el análisis de la información consistió en: (1) hacer un relato de las diferentes observaciones que se realizaron en el proceso investigativo, (2) transcribir los diferentes videos registrados en algunas actividades, (3) transcribir o tomar registro de los cuestionarios realizados por los estudiantes y por sus familiares; además, se codificó, categorizó y tematizó los diferentes datos obtenidos con el propósito de hacer una comparación de la información con las tablas de descriptores, y así evidenciar los niveles de comprensión referidos en el marco teórico de la EpC que alcanzaron cada uno de los participantes.

La información suministrada por cada uno de los estudiantes que hicieron parte de este proceso, se efectuó en forma individual. Para ello, se consideró todo el material realizado o utilizado por los mismos, al igual que las observaciones registradas. El proyecto contó con la participación de cuatro estudiantes del grado décimo, a los cuales se les asignaron los siguientes seudónimos: María, Lola, Ema y Toni, con el fin de proteger su identidad (por ser menores de edad) y respetarles su derecho a la privacidad.

### 6.1. María

La participante es una estudiante de 16 años de edad, que vive con su madre en un barrio de estrato dos de la ciudad de Medellín.

### 6.1.1. Fase de exploración.

En la primera fase de exploración los estudiantes realizaron un cuestionario que contenía una serie de preguntas y actividades relacionadas directamente con el concepto de simetría; además de esto, su madre también realizó otro cuestionario con las mismas características. En la revisión del cuestionario, en una de las actividades propuestas, se pudo establecer que la estudiante tenía dificultades en identificar dos puntos simétricos respecto a un eje de simetría, como se muestra en la siguiente gráfica:

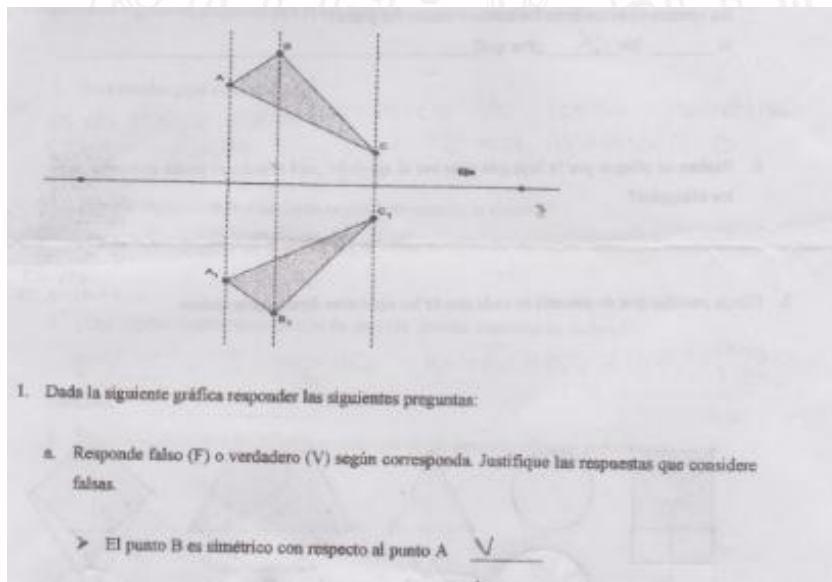


Imagen 89. Fragmento del cuestionario de María.

Cuando se le pidió establecer si dos puntos son simétricos, lo hizo de una manera errónea; por otra parte, en la realización del cuestionario María manifestó no haber visto la simetría ni nada parecido a las preguntas formuladas en la prueba. En el cuestionario familiar, también se mostró confusión en la realización de los ejes de simetría en algunas figuras geométricas; puesto que se realizaron unas líneas que no se relacionan con los ejes



ni con algún tipo de línea notable, lo que hace evidente la confusión y la falta de conocimiento del concepto de simetría.

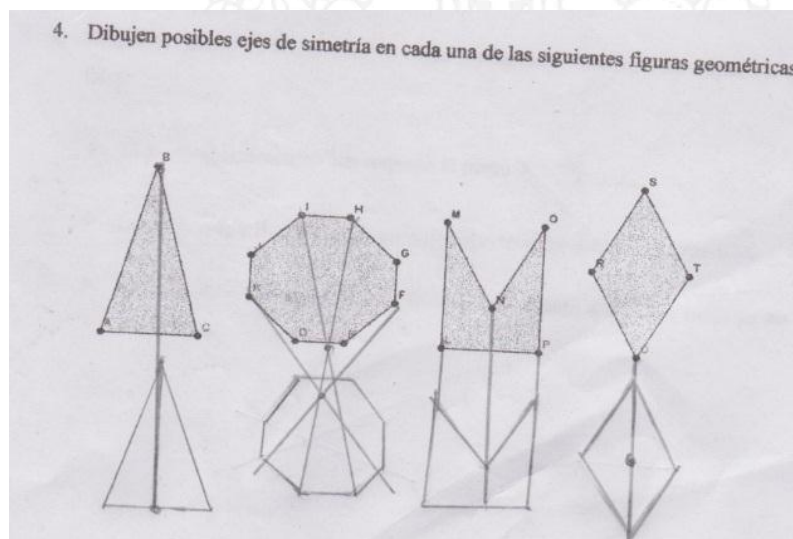


Imagen 90. Fragmento del cuestionario familiar de María.

En la segunda actividad que se realizó en esta primera fase de exploración, se le pidió a María realizar la construcción de rectas paralelas y perpendiculares con doblado de papel; aquí se pudo notar que la estudiante presentaba dificultades para utilizar este medio aunque se pudo observar que sí tenía conocimiento de lo que eran rectas paralelas; puesto que se le preguntó: “para ti ¿qué son las rectas paralelas?” A lo cual ella respondió: “*las rectas paralelas son rectas que nunca se van a encontrar porque la distancia siempre es la misma*”. Con relación a las rectas perpendiculares, se le preguntó nuevamente: “y ¿qué son rectas perpendiculares?” A lo cual ella respondió: “*umm esas si se encuentran, esas se chocan*”. Luego, se le preguntó, “pero, ¿qué otra característica tiene esas rectas?”, “*si, esas rectas donde se juntan hay un ángulo recto, pues de noventa grados*”. Cuando se le volvió





a mencionar la simetría para ser trabajada con el doblado de papel, se mostró desinteresada y hasta un poco desanimada para continuar con las siguientes sesiones y actividades.

**6.1.2. Fase de investigación guiada.** En la realización de los ejes de simetría con doblado de papel en las figuras geométricas, María comenzó a realizar dobleces sin ningún tipo de análisis, solo trataba de construir dobleces que pasaran por las esquinas o vértices de las figuras; sin embargo, a medida de que se desarrollaba la actividad y teniendo en cuenta las explicaciones, logró realizar algunos ejes de simetría con el doblado de papel. Cuando se le pregunta por el total de ejes de simetría que pueden trazar en la flor, ella responde que son cinco; por último, en esta actividad, cuando se les pide relacionar los ejes de simetría con otras líneas notables, la estudiante manifiesta no saber hacerlo.

En la segunda actividad de traslación, María mostró mucha más facilidad para trasladar la figura con doblado de papel y, aunque repitió la actividad en dos ocasiones, esto le permitió desarrollar mayor destreza con el doblado de papel y, además, le facilitó relacionar la actividad con los diferentes tipos de simetrías referidos durante la realización de la traslación.

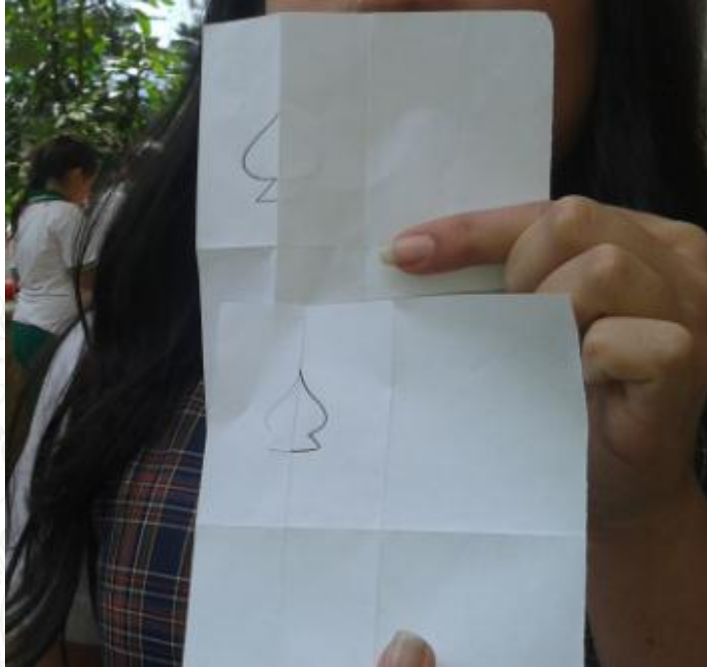


Imagen 91. María realizando la traslación.

En la tercera actividad se construyó una estrella conformada por módulos de dos colores; en esta actividad María demostró mucha facilidad para realizar los diferentes dobleces y módulos, además se les preguntó sobre los ejes de simetría de la estrella y de cómo se podrían identificar en la misma, a lo cual la estudiante respondió: *“los ejes se ven por los colores diferentes, mire profe cada vez que cambia el color en la estrella esa raya es un eje de simetría”*. Además, agregó más adelante que: *“vea profe, este triángulo o eso que parece un triángulo, es simétrico con este, pero también con este, si ve, eso es por las dos simetrías que usted nos explicó en la clase pasada”*.

En la cuarta actividad, con la realización de la mariposa, la rana y la flor, María mostró algunas dificultades en la elaboración de las construcciones más complejas; sin embargo, cuando se le pide mostrar los diferentes ejes de simetría en las figuras lo hace



fácilmente, incluso ya menciona los conceptos de simetría axial y central en sus explicaciones. Además, cuando se le pide explicar por qué dos puntos son simétricos, recurre a la igualdad de distancia con respecto al eje y mide con su dedo estas distancias. Cuando se les pregunta en qué otros espacios o momentos han visto la simetría reflejada, María inmediatamente lo relaciona con su rostro, trazando una línea con su dedo por el centro de la nariz como eje de simetría y menciona también aspectos o seres de la naturaleza donde se hace presente la simetría, esto con la ayuda de las figuras realizadas como la mariposa y la flor.

**6.1.3. Proyecto final de síntesis.** Para el proyecto final, María realiza un cartel para exponer en la feria de la ciencia, donde define la simetría como: “SIMETRÍA: es un rasgo característico de las figuras geométricas, sistemas de ecuaciones y otros objetos o materiales abstractos relacionados con la invariancia bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios”; sin embargo, se le pregunta sobre cómo realizó esta definición y ella responde: “*lo saque de internet, pero no entendí eso muy bien*”.

A medida que se acercan algunos estudiantes a la mesa de exposición, María se muestra un poco tímida para exponer a los asistentes; sin embargo, después de la intervención de otros compañeros ella interviene y dice: “*los ejes de simetría como ven allá en muchos carteles, yo les voy a decir que son los ejes de simetría, es una línea imaginaria que parte cualquier figura y que deja sus puntos equidistantes, o sea que de este punto a este punto es lo mismo que de este a este* (muestra dos puntos simétricos y el eje de simetría



en la mariposa), *o sea que queda en dos partes iguales*”. Esta es la única participación verbal que realiza la estudiante en el evento.

**6.1.4. Análisis del proceso de comprensión de María.** A partir de la información recolectada y, teniendo en cuenta la tabla de descriptores, se resaltó en negrilla los desempeños logrados por la estudiante en las tablas de descriptores, esto con el fin de establecer el nivel de comprensión alcanzado por María en cada una de las dimensiones, como se muestra a continuación:

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



6.1.4.1. Tabla de descriptores de María para la dimensión de Contenido.

Tabla 5. Desempeños alcanzados por María en la dimensión de contenido.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	CONTENIDOS	
	<i>SIMETRÍA</i>	<i>TIPOS DE SIMETRÍA</i>
<b>APRENDIZ</b>	<p>Reconoce los diferentes ejes de simetría presentes en cada una de las figuras.</p> <p>Relaciona el concepto de simetría con objetos y seres de la naturaleza presentes en su entorno.</p>	<p>Aplica e identifica, a partir del doblado de papel, los tipos de simetría en las figuras.</p> <p>Relaciona los tipos de simetría con algunas situaciones y objetos del contexto y la naturaleza.</p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p>Identifica la presencia del concepto de simetría en otras disciplinas y saberes científicos.</p> <p>Define y aplica con claridad el concepto de simetría durante la realización de las actividades y en otras situaciones escolares.</p>	<p>Aplica y muestra fácilmente los tipos de simetría en las diferentes figuras.</p> <p>Define y relaciona en forma clara la simetría axial y central con figuras o situaciones diferentes a las trabajadas.</p>





**6.1.4.2. Tabla de descriptores de María para la dimensión de Método.**

Tabla 6. Desempeños alcanzados por María en la dimensión de método.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	MÉTODO	
	<i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i>	<i>TRASLACIONES CON DOBLADO DE PAPEL</i>
<b>APRENDIZ</b>	Utiliza el doblado de papel con facilidad en las diferentes actividades. A partir de la observación, trata de comprobar la simetría en diferentes puntos de la figura.	Identifica las diferencias entre la simetría axial y central a partir de traslaciones. Utiliza traslaciones en algunas ocasiones para verificar las construcciones simétricas realizadas.

**6.1.4.3. Tabla de descriptores de María para la dimensión de Praxis.**

Tabla 7. Desempeños alcanzados por María en la dimensión de praxis.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	PRAXIS
	<i>RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA</i>
<b>APRENDIZ</b>	Relaciona parcialmente el concepto de simetría con algunos conceptos geométricos. Relaciona parcialmente la simetría con otros aspectos de la cotidianidad como el dibujo, la naturaleza y la fisonomía humana.
<b>MAESTRÍA</b>	Utiliza el concepto de simetría y el doblado de papel para contestar preguntas y resolver problemas. Relaciona conocimientos de otras disciplinas con los contenidos comprendidos sobre simetría. <b>Reconoce el doblado de papel como una herramienta para facilitar el aprendizaje de diferentes conceptos geométricos.</b> Relaciona e identifica claramente el concepto con el contexto que lo rodea.

**6.1.4.4. Tabla de contenido de María para la dimensión de Formas de**

**Comunicación.**

Tabla 8. Desempeños alcanzados por María en la dimensión de formas de comunicación.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	FORMAS DE COMUNICACIÓN		
	<i>USO COHERENTE DEL LENGUAJE</i>	<i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i>	<i>USO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON SIMETRÍA</i>
<b>APRENDIZ</b>	<p>Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar el concepto de simetría.</p> <p>Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar las diferentes simetrías que se evidencian en determinadas figuras.</p>	<p>Utiliza el doblado de papel para exponer algunos de los conocimientos adquiridos sobre simetría.</p> <p>Trata de vincular los procesos de doblado con todas las actividades realizadas, sin embargo falta claridad en su exposición.</p>	<p>Utiliza en forma poco estructurada conceptos como rotación, traslación y superposición, para explicar conocimientos sobre simetría.</p> <p>Expresa una relación coherente entre el concepto de simetría y las diferentes actividades y figuras realizadas.</p>

Teniendo en cuenta los desempeños alcanzados por María durante todo el proceso y, considerando las diferentes observaciones que se realizaron a medida que se desarrollaban las actividades, se puede ver que la estudiante mostró un progreso en la comprensión del concepto y en la utilización del doblado del papel; sin embargo, también es evidente que le faltó profundización y desarrollo en otros aspectos descritos en el nivel de Maestría. Por lo



tanto, se puede afirmar que por medio del trabajo realizado, María logró alcanzar el nivel de Aprendiz, referido en el marco teórico de la EpC.

## 6.2. Lola

Lola es una estudiante de 16 años de edad, que convive con su padre, su madre y dos hermanos en un barrio de estrato dos de la ciudad de Medellín.

**6.2.1. Fase de exploración.** En la realización del cuestionario se pudo ver que la estudiante tiene algún tipo de conocimiento frente a la simetría; sin embargo, las explicaciones o sustentaciones de las preguntas no son claras puesto que, aunque justifica todo a partir de la diferencia o igualdad de medidas o distancia, ya sea entre dos puntos o



figuras, no expresa frente a qué o con respecto a qué se deben determinar estas mediciones.

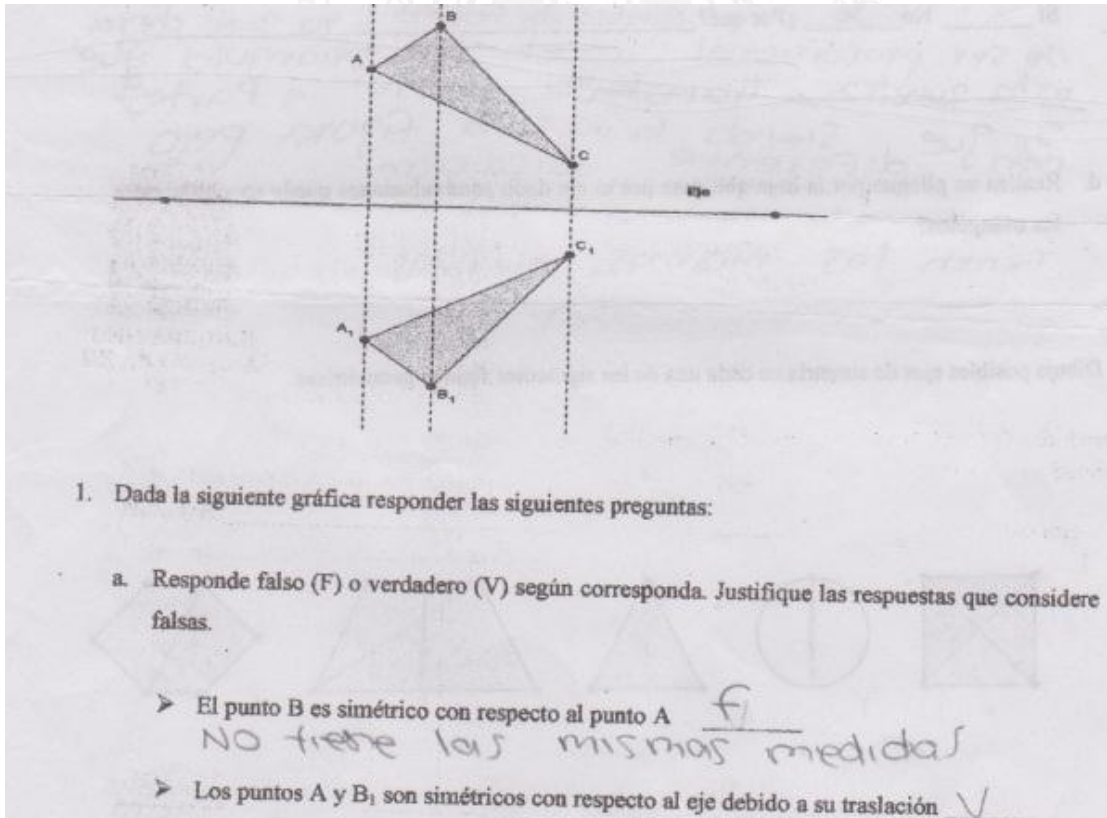


Imagen 92. Fragmento del cuestionario realizado por Lola.

En el cuestionario familiar también se notó un acercamiento al concepto de simetría; puesto que se realizaron algunos ejes de simetría a unas figuras geométricas, lo cual se hizo evidente en la respuesta dada a la cuarta pregunta del cuestionario, como aquí se muestra:

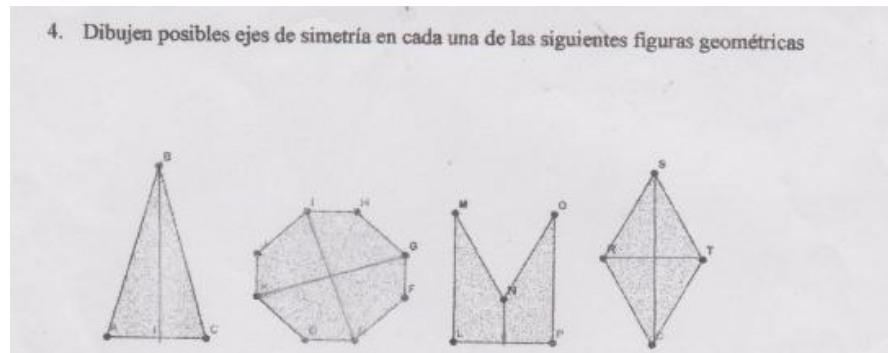
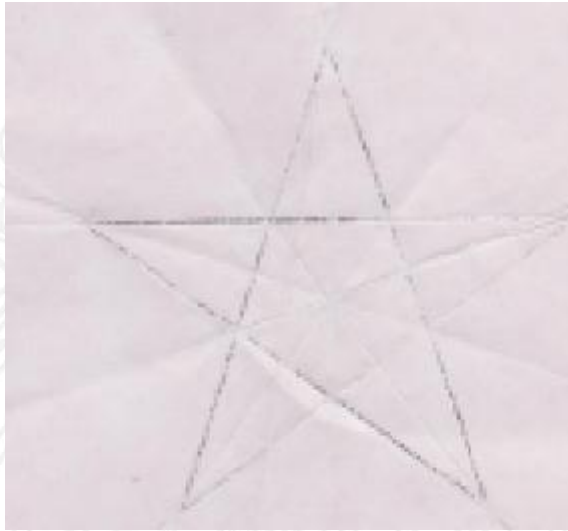


Imagen 93. Fragmento del cuestionario familiar de Lola.

En la realización de las rectas paralelas y perpendiculares, Lola mostró dificultad para utilizar el doblado de papel, pero con relación a la definición y conocimiento de las rectas no presentó ningún problema; incluso trató de proporcionar definiciones estructuradas cuando argumentó: “*dos rectas paralelas nunca se cortan en cambio las perpendiculares se cortan y donde lo hacen forman un ángulo recto, como en esta escuadra*” (muestra el ángulo recto en la escuadra), e incluso le explica a algunos de sus compañeros a partir de esta relación.

**6.2.2. Fase de investigación guiada.** En la construcción de los ejes de simetría, Lola trató de realizar algunos de estos en las figuras, no obstante, ciertos dobleces que realizó no correspondían a ejes de simetría, lo cual fue clarificando a medida que continuaba la actividad, aunque cuando se le hizo la pregunta por la cantidad de ejes de simetría posibles que se podían trazar en la estrella, en su respuesta se mostró confundida respondiendo erróneamente que tenía cinco. Es importante mencionar que Lola realizó muchos dobleces en la figura, impidiendo aún más establecer la cantidad de ejes de simetría.





*Imagen 94. Ejes de simetría en la estrella realizada por Lola.*

A medida que se desarrollaba la actividad, se les pidió relacionar los ejes de simetría trazados en el triángulo equilátero con algunas líneas notables, a lo cual Lola respondió: *“las mediatrices o dizque bisectrices o ortocentros, algo así, porque terminan en un punto, en el de la mitad”*. Lo anterior muestra que, aunque no se tenía claridad en su argumentación o relación, sí se tenía alguna idea sobre ello.



Imagen 95. Lola realizando ejes de simetría.

En la segunda actividad de traslación, Lola no presentó inconvenientes, incluso, puso el papel a contraluz, sin recibir indicación al respecto, para facilitar y visualizar el proceso de traslación. A partir de la actividad, mostró un avance en la vinculación de la traslación de la figura en la hoja, con los tipos de simetría, ya que explicó de una manera clara cuál figura era simétrica axialmente a la inicial y cuál lo era centralmente; todo esto lo realizó apoyándose en el doblado de papel.

En la tercera actividad de elaboración de la estrella, a Lola se le dificultó un poco la realización de los módulos con doblado de papel para la construcción de la figura y, aunque establecía por medio del contraste de colores los ejes de simetría y los tipos de simetría, no tenía la misma facilidad para hacerlo con el doblado de papel; incluso, en una ocasión manifestó “no profe, eso doblando el papel es más difícil, vea que con los colores se



*entiende más fácil, hay mismo uno se da cuenta cuales son los ejes*". Sin embargo, se le preguntó cómo mostrar la simetría axial y central con los colores, a lo cual Lola respondió: *"pues se muestra con la mano, sin necesidad de doblar la estrella"*.

En la cuarta actividad, Lola exhibió varios problemas para la realización de las figuras; de hecho, recibió la ayuda de uno de sus compañeros; no obstante, cuando se le pedía mostrar los diferentes ejes de simetría lo hacía rápidamente, ya fuese señalándolos o doblando el papel, pero cuando se le preguntaba por los tipos de simetría, lo hacía señalándolos únicamente. Por otra parte, se pudo destacar en la estudiante que cuando se le indagaba del por qué dos puntos eran simétricos, ella doblaba el papel para argumentar la igualdad de distancia entre los dos puntos y el eje, también en ocasiones recurrió a utilizar una regla como prueba de la igualdad de esas distancias. A la pregunta sobre la relación de la simetría con otros aspectos y conocimientos, Lola argumentó que en la naturaleza la simetría se puede ver, como en los animales, en las hojas de las plantas; *"en las casas también se ve, las ventanas en esas que son de madera partidas en cuatro cuadros, hasta en un triángulo isósceles si usted lo parte a la mitad quedan dos rectángulos iguales y simétricos, o el plano cartesiano también es simétrico con los cuatro cuadrantes, las alas de la mariposa, en mis ojos, etc"*.

**6.2.3. Proyecto final de síntesis.** En esta fase, Lola no lleva ningún cartel argumentando que cuando quiso hacerlo no se le vinieron a la mente las palabras. Al momento de la exposición a algunos asistentes a la feria de la ciencia, Lola interrumpió a uno de sus compañeros en su explicación para decir lo siguiente: *"por ejemplo acá se*

*pueden ver los ejes de simetría (coge la figura en forma de estrella), este triángulo es simétrico con este porque son proporcionalmente iguales, porque si uno parte por la línea y lo dobla hace como un espejo (dobla la figura) y se va a ver igual. Es como si colocáramos un espejo en el eje de simetría, que se va a ver exactamente lo mismo, porque la distancia que hay de acá a acá, es el mismo que hay de acá, es la misma que hay de este punto a este (muestra dos puntos simétricos y el eje de simetría)”. Sin embargo, Lola no expreso nada referente a los tipos de simetría utilizando el doblado de papel o las traslaciones.*

**6.2.4. Análisis del proceso de comprensión de Lola.** Considerando las diferentes actividades realizadas por Lola, además de tener en cuenta los aportes y las dificultades que surgieron a lo largo de las sesiones, se establece que la estudiante logró los siguientes desempeños en cada una de las dimensiones de comprensión; los cuales se subrayan a continuación en cada una de las tablas de descriptores:

**6.2.4.1. Tabla de descriptores de Lola para la dimensión de Contenido.**

Tabla 9. Desempeños alcanzados por Lola en la dimensión de contenido.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	CONTENIDOS	
	<i>SIMETRÍA</i>	<i>TIPOS DE SIMETRÍA</i>
<b>APRENDIZ</b>	<b>Reconoce los diferentes ejes de simetría presentes en cada una de las figuras.</b> <b>Relaciona el concepto de simetría con objetos y seres de la naturaleza presentes en su entorno.</b>	Aplica e identifica, a partir del doblado de papel, los tipos de simetría en las figuras. <b>Relaciona los tipos de simetría con algunas situaciones y objetos del</b>



		<b>contexto y la naturaleza.</b>
<b>MAESTRÍA</b>	<p><b>Identifica la presencia del concepto de simetría en otras disciplinas y saberes científicos.</b></p> <p><b>Define y aplica con claridad el concepto de simetría durante la realización de las actividades y en otras situaciones escolares.</b></p>	<p>Aplica y muestra fácilmente los tipos de simetría en las diferentes figuras.</p> <p>Define y relaciona en forma clara la simetría axial y central con figuras o situaciones diferentes a las trabajadas.</p>

**6.2.4.2. Tabla de descriptores de Lola para la dimensión de Método.**

Tabla 10. Desempeños alcanzados por Lola en la dimensión de método.

<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>	<b>MÉTODO</b>	
	<b>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</b>	<b>TRASLACIONES CON DOBLADO DE PAPEL</b>
<b>APRENDIZ</b>	<p>Utiliza el doblado de papel con facilidad en las diferentes actividades.</p> <p>A partir de la observación, trata de comprobar la simetría en diferentes puntos de la figura.</p>	<p>Identifica las diferencias entre la simetría axial y central a partir de traslaciones.</p> <p>Utiliza traslaciones en algunas ocasiones para verificar las construcciones simétricas realizadas.</p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p>Recurre a mediciones con regla y superposiciones en las gráficas para validar el doblado de papel y su aplicación.</p>	<p>En cada una de las construcciones recurre a traslaciones para comprobar el trabajo realizado con doblado de papel.</p> <p>Utiliza traslaciones como argumento para validar lo comprendido en las diferentes actividades.</p>





6.4.2.3. *Tabla de descriptores de Lola para la dimensión de Praxis.*

Tabla 11. Desempeños alcanzados por Lola en la dimensión de Praxis.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	PRAXIS
	<i>RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA</i>
<b>MAESTRIA</b>	<p>Utiliza el concepto de simetría y el doblado de papel para contestar preguntas y resolver problemas.</p> <p>Relaciona conocimientos de otras disciplinas con los contenidos comprendidos sobre simetría.</p> <p>Reconoce el doblado de papel como una herramienta para facilitar el aprendizaje de diferentes conceptos geométricos.</p> <p>Relaciona e identifica claramente el concepto con el contexto que lo rodea.</p>

6.4.2.4. *Tabla de contenido de Lola para la dimensión de Formas de Comunicación.*

Tabla 12. Desempeños alcanzados por Lola en la dimensión de formas de comunicación.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	FORMAS DE COMUNICACIÓN		
	<i>USO COHERENTE DEL LENGUAJE</i>	<i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i>	<i>USO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON SIMETRÍA</i>
<b>APRENDIZ</b>	<p>Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar el concepto de simetría.</p> <p>Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar las diferentes simetrías que se evidencian en determinadas figuras.</p>	<p>Utiliza el doblado de papel para exponer algunos de los conocimientos adquiridos sobre simetría.</p> <p>Trata de vincular los procesos de doblado con todas las actividades realizadas, sin embargo falta claridad en su exposición.</p>	<p>Utiliza en forma poco estructurada conceptos como rotación, traslación y superposición, para explicar conocimientos sobre simetría.</p> <p>Expresa una relación coherente entre el concepto de simetría y las diferentes</p>

			<b>actividades y figuras realizadas.</b>
<b>MAESTRÍA</b>	Explica con claridad y en forma estructurada el concepto de simetría. Expone con facilidad la simetría existente en las diferentes figuras geométricas, al igual que los tipos de simetría. <b>Comunica con facilidad las diferentes relaciones existentes entre el concepto de simetría y su contexto. Hace uso de ejemplos cotidianos para dar a conocer lo comprendido sobre la simetría.</b>	Utiliza el doblado de papel con facilidad para exponer y explicar en forma clara el concepto de simetría. <b>Recurre al doblado de papel para exponer las diferentes ideas que le surgen con el desarrollo de las actividades, así estas no estén ligadas íntimamente al objeto de estudio.</b>	Las conexiones que hace con otros conceptos geométricos como rotación, traslación y superposición con la simetría son claras y bien definidas. Reconoce, al realizar las actividades, la necesidad e importancia de utilizar diferentes conceptos en la explicación y exposición de la simetría.

Con el análisis de toda la información recolectada en cada una de las actividades que realizó Lola y, contando además con las observaciones, no se puede establecer, de forma general, qué nivel de comprensión alcanzó la estudiante, puesto que en algunas dimensiones presentó un notable desarrollo en comparación con otras. Por lo anterior, tal como se percibe en la tabla, se le asigna un nivel diferente para cada una o para algunas de las dimensiones.

En la dimensión de contenido para el concepto de simetría, el nivel alcanzado de acuerdo a sus desempeños es el de maestría; sin embargo, esto no sucede con los tipos de simetría donde se ubica en el nivel de aprendiz, puesto que en las diferentes actividades mostró más dificultad y menos desempeños alcanzados. En la dimensión de método, la



estudiante se ubica en el nivel de aprendiz, ya que generalmente fueron los desempeños referidos en este nivel los que la estudiante desarrolló a partir de las actividades.

En la dimensión de praxis, se establece que la estudiante se encuentra en el nivel de maestría, puesto que logra, casi en su totalidad, desarrollar esta dimensión y, por ende, alcanzar casi todos los desempeños allí descritos. Por último, en las formas de comunicación, la estudiante alcanza desempeños de los niveles de aprendiz y de maestría, por lo que parece estar en un nivel transitorio o intermedio entre estos dos, puesto que, aunque le falta estructurar o formalizar su lenguaje para explicar el concepto de simetría y otros conceptos geométricos, al momento de comunicar las relaciones existentes entre el concepto y el contexto, lo hace de forma clara y coherente; es por ello que para esta dimensión de comprensión, la estudiante se ubique entre el nivel de aprendiz y de maestría.

### 6.3. Toni

El estudiante tiene 17 años de edad, vive con su padre, su madre y cinco hermanos menores. Reside en un barrio de estrato uno de la ciudad de Medellín.

**6.3.1. Fase de exploración.** En las respuestas consignadas en el cuestionario, el estudiante se contradice; esto sucede en el primer y segundo apartado de la pregunta uno, en la que se proporciona una imagen para ser analizada, lo cual se puede evidenciar en el siguiente fragmento:

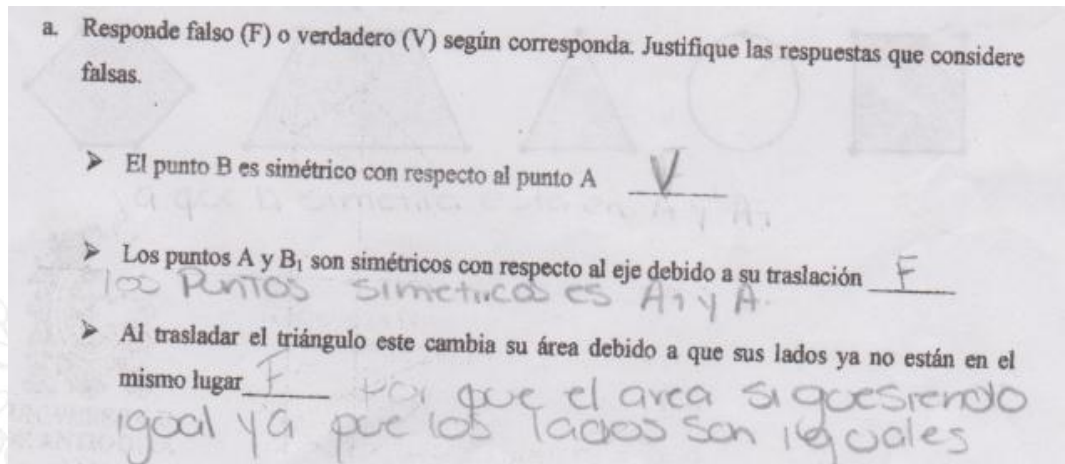


Imagen 96. Fragmento del cuestionario realizado por Toni.

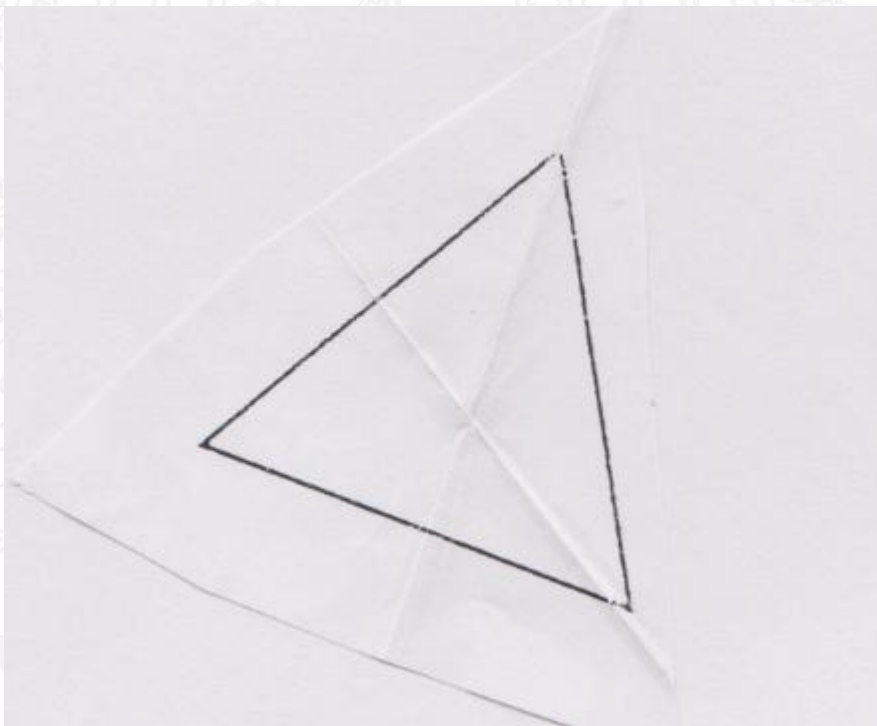
Se puede observar que el estudiante presenta confusión al momento de señalar los puntos simétricos dentro de la figura dada, propiciando así respuestas erróneas y contradictorias en el cuestionario. De lo anterior se puede inferir que, al parecer, el estudiante no mantiene una definición de simetría consistente que le permita responder a las preguntas proporcionadas, incidiendo así en su percepción errónea del concepto. En cuanto al cuestionario familiar, el estudiante lo trae en blanco, dando como explicación la no estaba en casa de sus padres por motivos laborales y además de esto sus hermanos, los cuales son menores que él, no cuentan con las herramientas para dar solución a las preguntas, motivo por el cual no se contestaron las preguntas.

En la siguiente actividad donde se construyeron rectas paralelas y perpendiculares con doblado de papel, el estudiante se muestra muy confundido, puesto que mira a sus compañeros constantemente para imitarlos. Debido a este comportamiento, se le pregunta sobre los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares, a lo cual él responde: “*la verdad profe, yo no sé qué es eso, a mí no me han enseñado eso*”; sin embargo, después de una



corta explicación, Toni realiza nuevamente la actividad en otra hoja, con gran destreza y agilidad.

**6.3.2. Fase de investigación guiada.** Cuando se prosigue con la siguiente actividad y se trazan los ejes de simetría a las figuras, nuevamente el estudiante evidencia desconcierto, puesto que no tiene claridad sobre lo que se debe de hacer y recurre nuevamente a observar a sus compañeros para seguir el procedimiento; no obstante, aunque construye algunos ejes, se puede notar que lo hizo de forma meramente instructiva.



*Imagen 97. Ejes de simetría realizados por Toni.*

Con las otras imágenes sigue presentando igual confusión para identificar sus ejes de simetría, por tal motivo recibe apoyo constante de los investigadores, puesto que se puede observar, que si bien tiene problemas con la comprensión y aplicación del concepto,





esto no sucede con el doblado de papel ya que disfruta de este método, situación que le despierta más interés por seguir con las siguientes actividades. Por último, cuando se le pregunta por la relación que se puede establecer entre los ejes de simetría y las líneas notables, el estudiante guarda silencio y hace un gesto de desconocimiento frente a la temática.



*Imagen 98. Toni realizando ejes de simetría.*

En la siguiente sesión, donde se realizó la traslación de una figura con doblado de papel, Toni se muestra muy entusiasmado por realizar la actividad y se puede notar la facilidad con que el estudiante hace la traslación; además, utiliza la contraluz para visualizar el papel y realizar más fácilmente lo propuesto, lo que le permite terminar rápidamente; el resto del tiempo lo utiliza en explicar y asistir a sus compañeros.



*Imagen 99.* Toni explicando a uno de sus compañeros.

De igual forma, a partir del trabajo de traslación, el estudiante pudo identificar en la hoja los dos tipos de simetrías explicados y se valió del doblado de papel para poder dar respuestas a las preguntas o explicaciones que se iban pidiendo. Toni, en la actividad de realización de la estrella y sus módulos, no presentó ningún inconveniente; incluso, se destacó con relación al desempeño de sus compañeros. Vale la pena mencionar que a partir de la construcción de esta figura, el estudiante comenzó a identificar los ejes de simetría presentes en la misma, puesto que mencionó que la diferencia de los colores y el contraste, le facilitaba la identificación de los ejes. Del mismo modo, con esta figura pudo mostrar la simetría axial y central presentes en ella, esto lo hizo doblando la estrella de varias formas, puesto que verbalmente se le dificultaba expresarlo o explicarlo.

En la construcción de las diferentes figuras, se pudo notar que Toni se comporta como una especie de ayudante o monitor, ya que presenta gran habilidad para doblar papel, lo que lo convierte en apoyo muy importante para sus compañeros a la hora de realizar las



figuras más complejas, como, por ejemplo, la construcción de la rana. Fue precisamente en esta última, donde el estudiante estuvo más dispuesto a ayudar, pero sin desconectarse del concepto de simetría, puesto que a medida que realizaba o apoyaba la elaboración de los diferentes animales y la flor con doblado de papel, le surgían algunas dudas frente a cuales eran los ejes presentes en determinado lugar, incluso doblaba la figura para probar si las distancias entre dos puntos eran las mismas, para establecer si entre una y otra forma geométrica existía simetría axial o central; esto fue muy notorio durante el desarrollo de la actividad, aunque lo manifestaba en mayor medida con dobleces y no verbalmente.

A partir de estas construcciones, se le preguntó a Toni sobre otros aspectos donde se evidencia o se aplique la simetría, a lo cual responde tímidamente y menciona objetos como el mueble de dos puestos que hay en su casa, la parte media de un cuaderno, los pétalos de un girasol y, por último, refiere: *“todas las personas tenemos cuerpo simétrico y también los animales”*

**6.3.3. Proyecto final de síntesis.** Para la feria de la ciencia, Toni elabora un cartel donde define los ejes de simetría así: “Es una línea de referencia imaginaria que al dividir una forma cualquiera en dos partes quedan iguales, es decir quedan simétricos”. Esta definición pone en evidencia las dificultades que aún tiene el estudiante al tratar de explicar el concepto, puesto que no se toma en cuenta la equidistancia que debe existir entre los puntos opuestos que presentan las figuras para poder establecer la simetría. En la exposición que realizó Toni a un grupo de cinco estudiantes asistentes al evento, dice: *“Un*



*eje de simetría es una línea que me dice que un punto es igual a otro, por medio de esta línea ¿si me entiende?, vea pues pa, aquí está, un eje de simetría (señala un eje de simetría de una flor), ¿usted sabe que es un eje de simetría?, vea pues, es la línea que divide a dos puntos en distancias iguales”.*

Posteriormente, uno de los investigadores insiste en que Toni muestre las distancias divididas por el eje de simetría en la figura, a lo cual Toni responde: *“por ejemplo, vea acá en esta figura (coge la figura en forma de pez), el eje de simetría de esta, por ejemplo en esta muestra, este eje de simetría ¿por qué está acá?, porque este debe ser igual a este (muestra dos triángulos simétricos que se hay en la figura del pez), lo mismo con este, este es igual a este, este es igual a este y este es igual a este (muestra tres pares de triángulos simétricos que están en la figura del pez), ahí están los ejes de simetría. ¿Qué quiere decir esto?, si este es el eje de simetría (señala el eje de simetría con su mano), este es igual a este (muestra dos triángulos).*

Más tarde, otro grupo de asistentes se acercan y Toni les explica: *“Un eje de simetría es una línea que equidista dos puntos aparentemente iguales, por ejemplo en esta imagen (señala la figura en forma de mariposa) esta línea es un eje de simetría (señala un eje de simetría) que ¿qué refleja? Este punto con este punto que son iguales (muestra dos puntos en la figura) o por ejemplo este, también es un eje de simetría”*, y continúa diciendo: *“Existen varios tipos de simetría uno que es el central y otro que es el central, el axial es este que usted ve acá y se refleja en este lado (muestra dos triángulos) y el central es el que usted lo refleja en este y luego lo hace en este (muestra dos triángulos)”*.



Aunque se puede notar que en la segunda intervención trató de formalizar más sus palabras y conceptos empleados, es claro que el estudiante tiene dificultades para comunicar verbalmente lo comprendido en torno al concepto de simetría; sin embargo, al momento de mostrarlo con el doblado de papel lo hace de una forma correcta y rápida.

**6.3.4. Análisis del proceso de comprensión de Toni.** A partir de las diferentes actividades realizadas por Toni y, a la luz de las diferentes tablas de descriptores, se puede establecer que el estudiante logró los siguientes desempeños:

**6.3.4.1. Tabla de descriptores de Toni para la dimensión de Contenido.**

Tabla 13. Desempeños alcanzados por Toni en la dimensión de contenido.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	CONTENIDOS	
	<i>SIMETRÍA</i>	<i>TIPOS DE SIMETRÍA</i>
<b>APRENDIZ</b>	<p>Reconoce los diferentes ejes de simetría presentes en cada una de las figuras.</p> <p>Relaciona el concepto de simetría con objetos y seres de la naturaleza presentes en su entorno.</p>	<p>Aplica e identifica, a partir del doblado de papel, los tipos de simetría en las figuras.</p> <p>Relaciona los tipos de simetría con algunas situaciones y objetos del contexto y la naturaleza.</p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p>Identifica la presencia del concepto de simetría en otras disciplinas y saberes científicos.</p> <p>Define y aplica con claridad el concepto de simetría durante la realización de las actividades y en otras situaciones escolares.</p>	<p>Aplica y muestra fácilmente los tipos de simetría en las diferentes figuras.</p> <p>Define y relaciona en forma clara la simetría axial y central con figuras o situaciones diferentes a las trabajadas.</p>



--	--	--

**6.3.4.2. Tabla de descriptores de Toni para la dimensión de Método.**

Tabla 14. Desempeños alcanzados por Toni en la dimensión de método.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	MÉTODO	
	<i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i>	<i>TRASLACIONES CON DOBLADO DE PAPEL</i>
<b>APRENDIZ</b>	Utiliza el doblado de papel con facilidad en las diferentes actividades. A partir de la observación, trata de comprobar la simetría en diferentes puntos de la figura.	Identifica las diferencias entre la simetría axial y central a partir de traslaciones. Utiliza traslaciones en algunas ocasiones para verificar las construcciones simétricas realizadas.
<b>MAESTRÍA</b>	Recorre a mediciones con regla y superposiciones en las gráficas para validar el doblado de papel y su aplicación.	En cada una de las construcciones recurre a traslaciones para comprobar el trabajo realizado con doblado de papel.  Utiliza traslaciones como argumento para validar lo comprendido en las diferentes actividades.

**6.3.4.3. Tabla de descriptores de Toni para la dimensión de Praxis.**

Tabla 15. Desempeños alcanzados por Toni en la dimensión de praxis.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	PRAXIS
	<i>RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA</i> TIPOS DE SIMETRÍA



<b>APRENDIZ</b>	<p>Relaciona parcialmente el concepto de simetría con algunos conceptos geométricos.</p> <p>Relaciona parcialmente la simetría con otros aspectos de la cotidianidad como el dibujo, la naturaleza y la fisonomía humana.</p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p>Utiliza el concepto de simetría y el doblado de papel para contestar preguntas y resolver problemas.</p> <p>Relaciona conocimientos de otras disciplinas con los contenidos comprendidos sobre simetría.</p> <p>Reconoce el doblado de papel como una herramienta para facilitar el aprendizaje de diferentes conceptos geométricos.</p> <p>Relaciona e identifica claramente el concepto con el contexto que lo rodea.</p>

#### 6.3.4.4. Tabla de contenido de Toni para la dimensión de Formas de

#### Comunicación.

Tabla 16. Desempeños alcanzados por Toni en la dimensión de formas de comunicación.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	FORMAS DE COMUNICACIÓN		
	<i>USO COHERENTE DEL LENGUAJE</i>	<i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i>	<i>USO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON SIMETRÍA</i>
<b>NOVATO</b>	<p>Reconoce el concepto de simetría pero no es claro al tratar de definirlo.</p> <p>Cuando se le pide argumentar o explicar algún procedimiento en la realización de las actividades, lo hace de manera confusa.</p>	<p>Utiliza con dificultad el doblado de papel para exponer o explicar el concepto de simetría.</p> <p>Utiliza con dificultad el doblado de papel para explicar las diferentes simetrías presentes en una figura.</p>	<p>No es claro al utilizar el concepto de traslación para explicar algunas actividades realizadas con doblado de papel.</p> <p>Trata de explicar a partir de otros conceptos geométricos la simetría, pero lo hace de manera confusa.</p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p>Explica con claridad y en forma estructurada el concepto de simetría.</p> <p>Expone con facilidad la</p>	<p>Utiliza el doblado de papel con facilidad para exponer y explicar en forma clara el concepto</p>	<p>Las conexiones que hace con otros conceptos geométricos como rotación,</p>

	<p>simetría existente en las diferentes figuras geométricas, al igual que los tipos de simetría.</p> <p>Comunica con facilidad las diferentes relaciones existentes entre el concepto de simetría y su contexto.</p> <p>Hace uso de ejemplos cotidianos para dar a conocer lo comprendido sobre la simetría.</p>	<p><b>de simetría.</b></p> <p><b>Recurre al doblado de papel para exponer las diferentes ideas que le surgen con el desarrollo de las actividades, así estas no estén ligadas íntimamente al objeto de estudio.</b></p>	<p>traslación y superposición con la simetría son claras y bien definidas.</p> <p>Reconoce, al realizar las actividades, la necesidad e importancia de utilizar diferentes conceptos en la explicación y exposición de la simetría.</p>
--	--	---	---

A partir de los diferentes desempeños alcanzados por Toni, se pudo establecer que en las tres primeras dimensiones de contenido, método y praxis, referidas en el marco teórico EpC, el estudiante se ubica en el nivel de aprendiz; puesto que es evidente el desarrollo y la habilidad alcanzada en la utilización del doblado de papel para comprender y explicar la simetría y los tipos de simetría, realiza procedimientos con el papel o con otras herramientas para tratar de validar los diferentes conocimientos y el método empleado, además en algunos casos establece relaciones entre lo comprendido a partir de las actividades y su contexto.

Sin embargo el estudiante al momento de tratar de realizar una definición o relación en un lenguaje estructurado, presenta grandes dificultades; por este mismo motivo, en la última dimensión se hizo necesario separar el doblado de papel de las otras dos formas de comunicación señaladas en la tabla de descriptores, debido a que la comunicación por medio de este método fue clara, correcta y precisa, permitiendo ubicarlo en el nivel de



maestría; pero esto no sucedió con el uso del lenguaje y de conceptos geométricos para comunicar su comprensión, ya que presentó muchos problemas en cuanto a la expresión confusa y poco formal, ubicándose así para estas dos formas de comunicación en el nivel de novato.

#### **6.4. Ema**

Estudiante de 16 años que convive con su padre, su madre y una hermana. Reside en un barrio de estrato dos de la ciudad de Medellín.

**6.4.1. Fase de exploración.** En la primera actividad relacionada con los cuestionarios, se puede establecer en la estudiante Ema cierto tipo de conocimiento frente al concepto de simetría, puesto que algunas preguntas se contestaron de manera correcta y se trazaron algunos ejes de simetría en las figuras presentadas en el cuestionario; no obstante, Ema presenta confusión al momento de sustentar o relacionar algunas respuestas o actividades con el concepto geométrico; lo cual se puede apreciar en este apartado de su cuestionario:



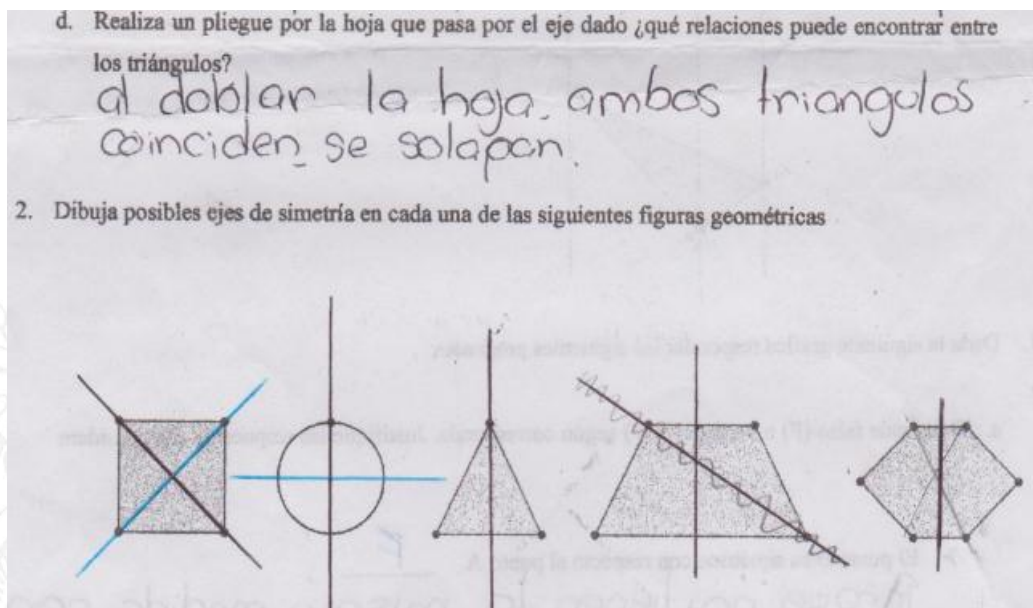


Imagen 100. Fragmento del cuestionario realizado por Ema.

Por otra parte, en el cuestionario familiar, se aprecia claramente el mismo desempeño anterior, ya que si bien es cierto que se tiene noción y conocimiento del concepto de simetría, falta claridad y comprensión en el mismo. También es interesante la forma en que relacionan la simetría de un cuerpo o figura con un reflejo, haciendo analogías entre los ejes de simetría y los espejos, lo cual se pudo utilizar para favorecer la comprensión en la estudiante.

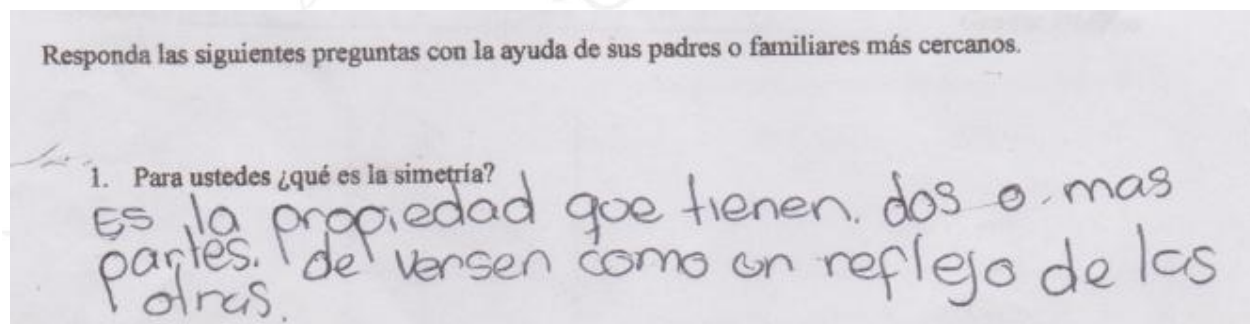


Imagen 101. Fragmento del cuestionario familiar de Ema.



En la actividad de rectas paralelas y perpendiculares, Ema presenta algunas dificultades para doblar el papel, sin embargo es apoyada por uno de sus compañeros y comienza a mostrar mayor destreza; por otra parte, ella es la que se destaca más al momento de explicar y responder las preguntas que se hacen en torno a las rectas paralelas, proporcionando definiciones y explicaciones claras y estructuradas del tema.

**6.4.2. Fase de investigación guiada.** En la realización de algunos ejes de simetría en las figuras impresas sobre el papel, la estudiante realiza una especie de dobleces que en ocasiones concuerda con diferentes ejes de simetría de las figuras, pero en otros casos no, sobre todo en las primeras figuras. A medida que avanza el trabajo, la estudiante comienza a clarificar sus ideas hasta que finalmente logra realizar en la estrella ejes de simetría en una forma correcta.

Lo mismo sucede al momento de realizar la traslación de la figura con doblado de papel, puesto que lo hace en forma correcta y se evidencia que comienza a desarrollar mayor agilidad al momento de doblar papel. Por medio de esta traslación, la estudiante se acerca de una manera rápida a la simetría axial y central y, aunque a veces confunde los nombres, en forma general lo hace de una forma correcta; sin embargo, sus explicaciones las hace señalando con su dedo y no utilizando el doblado de papel; cuando se le pregunta sobre esto, Ema responde *“esta figura es simétrica central, ah no, axialmente con esta y esta con esta, pero eso se puede ver con los ejes, doblando el papel si no sé cómo”*. Sin embargo, se le continúa cuestionando ya que se le dice que para realizar las traslaciones ella dobló la hoja, a lo cual ella contesta: *“si profe, eso es verdad, no lo había pensado”*. Ema



continúa doblando el papel hasta que, finalmente, explica a los investigadores y a los compañeros cómo identificar figuras simétricas a otras, por medio del doblado de papel.

En la realización de la estrella y los módulos, nuevamente la estudiante es apoyada por uno de sus compañeros, pero no presenta ninguna dificultad al mostrar los diferentes ejes de simetría y tipos de simetría presentes en la figura. Lo mismo sucede con la construcción de las diferentes figuras realizadas con doblado de papel, donde ella comienza a resaltar con un marcador los diferentes ejes de simetría; del mismo modo, cuando se le cuestiona por la relación de la simetría y el contexto, ella responde: *“profe yo lo relaciono con la naturaleza, con los pétalos de casi todas las flores... Pero los árboles no son simétricos... Con los animales, con las patas de los animales si no fueran equidistantes del ombligo serían cojos, con las gráficas que dibuja el profe de matemáticas en el tablero... ¿Cómo es que se llama?... Así con la parábola pero esa en la que el eje y le pasa por toda la mitad, con los edificios, casi todos son simétricos, son iguales en un lado y en el otro, y con la belleza, porque si uno tiene la cara simétrica es bonito, imagínese usted si uno tuviera los ojos a diferente distancia de la nariz, o la boca más ancha para un lado, jumm, muy feo, así como las pinturas de Picasso”*, mostrando así facilidad al momento de establecer relaciones con su entorno.

**6.4.3. Proyecto final de síntesis.** Para la exposición de la feria de la ciencia, Ema realiza un cartel en el cual define los ejes de simetría así: “Es una línea de referencia imaginaria que al dividir una forma cualquiera en dos partes, sus puntos opuestos son



equidistantes entre sí; es decir quedan simétricos”. Uno de los investigadores le preguntó si ella realizó esa definición o la consultó, a lo cual ella responde que la elaboró a partir de lo comprendido. En la exposición a los asistentes, Ema realiza tres intervenciones, dos de ellas muy similares; sin embargo, es importante precisar las dos porque en una de ellas, Ema relaciona el concepto con otros conocimientos matemáticos, hace una exposición más formal y estructurada, además de mencionar el origami como método para la enseñanza del concepto.

En la primera intervención, ella expresa lo siguiente: *“miren por ejemplo en esta figura, se pueden ver los ejes de simetría en esta figura, por ejemplo este es un eje de simetría axial, si de aquí, si doblamos esto acá vamos a ver que todo este lado se va a ver reflejado en esta parte (dobla la figura en forma de mariposa por un eje de simetría) y lo mismo si se refleja este lado acá vamos a ver que estos dos lados quedan iguales (dobla la figura por otro eje), entonces están estos ejes simetría y estos dos de acá, pues que es lo mismo, se refleja este lado de acá en este lado de acá (muestra dos triángulos simétricos de la figura). Bueno y está también, esto es una flor ¿Cierto? Se ven los ejes de simetría de este lado y de este lado (muestra ejes de simetría) y aquí también en la hoja”*.

Del mismo modo, en otro momento precisa: *“aquí les vamos a hablar de los ejes de simetría, un eje de simetría es una línea invisible que parte una figura, mejor dicho hace que los puntos de la figura opuestos queden completamente equidistantes (muestra dos puntos en la mariposa) y que queden a la misma distancia del eje. Por ejemplo en esta figura (coge la figura con forma de mariposa) se ven los ejes de simetría aquí marcados*



(muestra los ejes de simetría) entonces aquí se puede ver que si se dobla esta figura a la mitad por este eje de simetría va a quedar completamente igual (dobla la figura por un eje de simetría en toda la mitad). Bueno la simetría central se ve reflejada en esta figura, (muestra la mariposa), es cuando esta parte se ve reflejada en esta (muestra dos partes en la figura) pero este también se ve reflejado aquí y este aquí (muestra uno de los triángulos anteriores y otro triángulo simétricos que se forman en la mariposa), entonces se dobló aquí, entonces este ya quedó reflejado acá (dobla nuevamente la mariposa), pero si se dobla acá queda también reflejada acá (dobla otra vez la figura), si se dobla queda aquí y aquí también (realiza una traslación con el doblado de papel del primer triángulo, doblando por varios ejes de simetría), entonces se ven reflejados todos los ejes de simetría”.

Finalmente, refiere: “Un eje de simetría es una línea invisible que parte una figura, mejor dicho hace que los puntos de la figura opuestos queden completamente equidistantes (muestra dos puntos en la mariposa), es decir que queden a igual distancia de ese eje de simetría, es como lo que le enseñan a ustedes del plano cartesiano, esos ejes del plano es lo mismo que los ejes de simetría entonces por ejemplo en esta figura se ve que uno de los ejes de simetría este, este es uno de los ejes de simetría y puede verse que este punto está a la misma distancia que este eje de simetría y este punto está a la misma distancia que este eje de simetría (muestra el eje en una figura), entonces está el eje de simetría axial, el central es el que usted ve que se refleja en este lado y en este lado, ¿cómo hace para que se refleje en este lado?, cuando usted lo refleja acá y luego acá (muestra un triángulo de la figura), entonces aquí ya le queda reflejado en este lado, estos dos (dobla la figura por el eje de simetría para superponer un primer triángulo sobre otro), entonces luego





*cuando lo va a bajar ya le queda reflejado acá (dobla nuevamente la figura por otro eje de simetría para superponer ahora el segundo triangulo en un tercero) y el axial sería solamente con dos lados, sería solamente estos dos; entonces por ejemplo estos dos queda también reflejada, este lado con este y este lado con este (dobla el papel y muestra dos partes de la figura reflejadas idénticamente al superponerlas), por ejemplo en esta flor, este es un eje de simetría y ustedes ven que están a igual distancia (señala dos puntos simétricos), si se cierra esto aquí mira que quedan iguales (cierra el pétalo de la flor y une los dos puntos equidistantes) y estos también son ejes de simetría y todas estas figuras que hay aquí lo hicimos con doblado de papel, pues aplicando el doblado de papel y el origami.*

**6.4.4. Análisis del proceso de comprensión de Ema.** A partir de la información recolectada de Ema, se puede establecer que con la realización de las diferentes actividades, la estudiante ha alcanzado los siguientes desempeños referidos en las cuatro tablas de descriptores:

**6.4.4.1. Tabla de descriptores de Ema para la dimensión de Contenido.**

Tabla 17. Desempeños alcanzados por Ema en la dimensión de contenido.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	CONTENIDOS	
	<i>SIMETRÍA</i>	<i>TIPOS DE SIMETRÍA</i>
<b>MAESTRÍA</b>	<b>Identifica la presencia del concepto de simetría en otras disciplinas y saberes científicos.</b>	<b>Aplica y muestra fácilmente los tipos de simetría en las diferentes figuras.</b>



	<p><b>Define y aplica con claridad el concepto de simetría durante la realización de las actividades y en otras situaciones escolares.</b></p>	<p><b>Define y relaciona en forma clara la simetría axial y central con figuras o situaciones diferentes a las trabajadas.</b></p>
--	--	--

**6.4.4.2. Tabla de descriptores de Ema para la dimensión de Método.**

*Tabla 18. Desempeños alcanzados por Ema en la dimensión de método.*

NIVELES DE COMPRENSIÓN	MÉTODO	
	<i>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</i>	<i>TRASLACIONES CON DOBLADO DE PAPEL</i>
<b>MAESTRÍA</b>	<p><b>Recurre a mediciones con regla y superposiciones en las gráficas para validar el doblado de papel y su aplicación.</b></p>	<p><b>En cada una de las construcciones recurre a traslaciones para comprobar el trabajo realizado con doblado de papel.</b></p> <p><b>Utiliza traslaciones como argumento para validar lo comprendido en las diferentes actividades.</b></p>

**6.4.4.3. Tabla de descriptores de Ema para la dimensión de Praxis.**

*Tabla 19. Desempeños alcanzados por Ema en la dimensión de praxis.*

NIVELES DE COMPRENSIÓN	PRAXIS
	<b>RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA</b>

<b>APRENDIZ</b>	<p><b>Relaciona parcialmente el concepto de simetría con algunos conceptos geométricos.</b> Relaciona parcialmente la simetría con otros aspectos de la cotidianidad como el dibujo, la naturaleza y la fisonomía humana.</p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p><b>Utiliza el concepto de simetría y el doblado de papel para contestar preguntas y resolver problemas.</b> Relaciona conocimientos de otras disciplinas con los contenidos comprendidos sobre simetría. <b>Reconoce el doblado de papel como una herramienta para facilitar el aprendizaje de diferentes conceptos geométricos.</b> <b>Relaciona e identifica claramente el concepto con el contexto que lo rodea.</b></p>

**6.4.4.4. Tabla de descriptores de Ema para la dimensión de Formas de Comunicación.**

Tabla 20. Desempeños alcanzados por Ema en la dimensión de formas de comunicación.

<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>	<b>FORMAS DE COMUNICACIÓN</b>		
	<b>USO COHERENTE DEL LENGUAJE</b>	<b>USO DEL DOBLADO DE PAPEL</b>	<b>USO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON SIMETRÍA</b>
<b>APRENDIZ</b>	<p>Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar el concepto de simetría. Utiliza un lenguaje informal y poco estructurado para explicar las diferentes simetrías que se evidencian en determinadas figuras.</p>	<p>Utiliza el doblado de papel para exponer algunos de los conocimientos adquiridos sobre simetría. Trata de vincular los procesos de doblado con todas las actividades realizadas, sin embargo falta claridad en su exposición.</p>	<p>Utiliza en forma poco estructurada conceptos como rotación, traslación y superposición, para explicar conocimientos sobre simetría. <b>Expresa una relación coherente entre el concepto de simetría y las diferentes actividades y figuras realizadas.</b></p>
<b>MAESTRÍA</b>	<p><b>Explica con claridad y en forma estructurada el concepto de simetría. Expone con facilidad la</b></p>	<p><b>Utiliza el doblado de papel con facilidad para exponer y explicar en forma</b></p>	<p>Las conexiones que hace con otros conceptos geométricos como rotación,</p>

	<p><b>simetría existente en las diferentes figuras geométricas, al igual que los tipos de simetría.</b>  <b>Comunica con facilidad las diferentes relaciones existentes entre el concepto de simetría y su contexto.</b>  <b>Hace uso de ejemplos cotidianos para dar a conocer lo comprendido sobre la simetría.</b></p>	<p><b>clara el concepto de simetría.</b>  <b>Recurre al doblado de papel para exponer las diferentes ideas que le surgen con el desarrollo de las actividades, así estas no estén ligadas íntimamente al objeto de estudio.</b></p>	<p>traslación y superposición con la simetría son claras y bien definidas.  Reconoce, al realizar las actividades, la necesidad e importancia de utilizar diferentes conceptos en la explicación y exposición de la simetría.</p>
--	---	---	---

Considerando los diferentes desempeños alcanzados por la estudiante, se puede establecer que en las tres primeras dimensiones de comprensión logró el nivel de maestría, puesto que su trabajo la destacó con respecto a sus compañeros; sus exposiciones y actividades se realizaron en forma clara y correcta, el avance con el manejo del doblado de papel también fue muy evidente; no obstante, falta más rigurosidad y estructuración al momento de establecer relaciones entre diferentes conceptos geométricos y la simetría; por lo tanto, en la última dimensión de comprensión, asociada con el uso de diferentes conceptos relacionados con simetría, la estudiante se ubica en el nivel de aprendiz; pero, tanto en el uso coherente del lenguaje y en la utilización del doblado de papel sí alcanzó a desarrollar los descriptores referidos al nivel de maestría.

## 7. Conclusiones

### 7.1. Respecto a la pregunta de investigación

La pregunta planteada y propuesta para ser resuelta a lo largo del proyecto de investigación fue: “¿Cómo posibilitar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes del grado décimo, a partir del doblado de papel y en el marco de la EpC?” Para responder a esta pregunta, se diseñaron, se evaluaron y se pusieron en práctica una serie de actividades que permitieran evidenciar las diferentes dificultades y logros de los participantes que las realizaron. Para facilitar el proceso de análisis, las actividades se distribuyeron en las tres fases referidas en el marco de la EpC, buscando también que el proceso investigativo fuera ordenado y ameno para los estudiantes.

Del mismo modo, el trabajo de campo nos brindó las herramientas necesarias para construir una serie de desempeños necesarios para describir el proceso de comprensión de los estudiantes; los cuales, a su vez, se fueron refinando a medida que se realizaban las diferentes sesiones. Estos desempeños referidos en las tablas de descriptores para cada una de las dimensiones de comprensión, nos permitieron conocer el nivel de comprensión alcanzado por cada uno de los estudiantes, con base en el marco teórico de la EpC.

Por otra parte, también se logró, gracias a las actividades realizadas, reconocer la importancia del doblado de papel para la enseñanza de la simetría; ya que este medio permitió resaltar la importancia del concepto tanto para el conocimiento científico, como para el contexto y las realidades de los estudiantes. Las figuras construidas mediante el





doblado de papel, vincularon el entorno de los participantes, destacaron la presencia del concepto de simetría dentro de su realidad y permitieron establecer relaciones con otros conceptos geométricos necesarios en su proceso formativo.

Además, el doblado de papel permitió que los estudiantes avanzaran en sus procesos de comprensión del concepto de simetría, pero de una forma agradable y lúdica, lo cual despertó el interés en el trabajo realizado, lo que al final se evidenció en la permanencia y responsabilidad de los participantes durante todo el proceso. Esta comprensión se manifestó a través de los aportes, opiniones, construcciones y demás trabajos realizados por los estudiantes; además, se deben resaltar las explicaciones ofrecidas por los mismos en la feria de la ciencia, ya que nos permitieron analizar y reflexionar sobre las actividades realizadas y sobre el proyecto en general. Es importante mencionar que la unidad curricular fue desarrollada, en su totalidad, en tiempo extraescolar y los estudiantes participaron de manera voluntaria, aspecto que destacamos también en el proceso.

El marco teórico iluminó la ruta a seguir en la investigación; nos proporcionó las herramientas y parámetros necesarios para realizar el proyecto de una forma adecuada, que realmente fuera consecuente con su finalidad de comprensión. Cada uno de los elementos, dimensiones y niveles, fueron vitales para la construcción y ejecución del estudio, puesto que se establecieron los tópicos, metas y desempeños de comprensión relevantes para nuestro objeto de estudio; la EpC nos permitió reflexionar sobre cada una de las prácticas y nos permitió evaluar el trabajo de cada uno de los estudiantes; además, nos permitió la creación y puesta en marcha de una unidad curricular, que consideró todos estos aspectos y





que se orientó hacia la comprensión del concepto de simetría. Finalmente, con

todos estos factores, se dio respuesta a la pregunta de investigación referida inicialmente.

## **7.2. Respecto al objetivo general**

El estudio se desarrolló con el siguiente objetivo general: “Analizar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes de grado décimo, a partir del doblado de papel como estrategia didáctica, bajo el marco teórico de la EpC”. Cada una de las actividades diseñadas y evaluadas estaba focalizada a la consecución de este objetivo; por ello, se hizo una reflexión profunda sobre los diferentes desempeños necesarios para ser desarrollados por lo estudiantes durante el trabajo de campo, que permitieran lograr la comprensión del concepto de simetría y que, a su vez, posibilitaran la ubicación de los participantes en cada uno de los niveles de comprensión de acuerdo al trabajo realizado.

También fue de gran importancia contar con el doblado de papel para este proceso, puesto que permitió el desarrollo de los diferentes desempeños y, por ende, dimensiones de comprensión, dinamizó las sesiones realizadas y fue el gran factor determinante para planear cada una de las actividades. El marco teórico trazó los aspectos relevantes para el proyecto y guió todo el proceso de manera adecuada, dado que nos permitió la construcción de rúbricas y de descriptores para cada una de las dimensiones, permitiendo así analizar la comprensión en los estudiantes y los niveles alcanzados por los mismos entorno al concepto de simetría.

Finalmente, cada uno de estos aspectos nos brindó las herramientas necesarias para analizar en forma integral y exhaustiva los procesos de comprensión del concepto de simetría en cada uno de los participantes del estudio de casos; por lo tanto, la consecución de esta acción nos permite concluir que se cumplió el objetivo general que se pauteó al inicio del proyecto y que se materializó en el desarrollo del trabajo de campo bajo el marco teórico, la sustentación bibliográfica y la continua reflexión de las diferentes prácticas y situaciones que se presentaron.

### **7.3. Respecto a los objetivos específicos**

En el trabajo de investigación se propusieron los siguientes objetivos específicos: “Proponer actividades prácticas a partir del doblado de papel, en una unidad curricular bajos los parámetros de la EpC, que permitan a los estudiantes comprender el concepto de simetría” y “Describir cómo los estudiantes pueden alcanzar los niveles referidos en la EpC, en la comprensión del concepto de simetría”.

El primer objetivo específico se logró, gracias a las diferentes actividades realizadas en el trabajo de campo, que a su vez permitieron el refinamiento y perfeccionamiento de las mismas, aportando como resultado final la construcción de la Unidad curricular basada en el marco teórico de la EpC. Es decir, dicha unidad curricular, diseñada, evaluada y aplicada, se basó totalmente en los elementos, las dimensiones y los niveles de comprensión, con el fin de propiciar la comprensión del concepto de simetría en los participantes y en los futuros estudiantes que la desarrollen.

El trabajo de campo también posibilitó el diseño de una serie de descriptores que dieran cuenta de los desempeños de los participantes del proyecto, buscando con esto brindar unos parámetros claros y precisos que se deben cumplir para alcanzar la comprensión del concepto de simetría, considerando los cuatro niveles referidos en el marco teórico: Ingenuo, Novato, Aprendiz y Maestría. Estos descriptores fueron consignados en las diferentes tablas (o rúbricas) y separados de acuerdo con las dimensiones de comprensión, las cuales, de acuerdo con la EpC y con los resultados de nuestro trabajo de campo, son necesarias para lograr la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes; todo lo anterior permite concluir que se dio consecución al segundo objetivo específico del estudio.

#### **7.4. Aportes a la Educación Matemática**

Por medio de este trabajo investigativo, se buscaba contribuir a la enseñanza de la geometría y en particular, a la enseñanza del concepto de simetría. El trabajo de campo nos dio la oportunidad de mostrar la gran importancia que tiene vincular el doblado de papel, como estrategia didáctica, a los procesos de enseñanza y aprendizaje, dado que permite hacer evidentes procesos de comprensión, que pueden ser abordados de una manera lúdica, entretenida y muy eficiente. Adicionalmente, la puesta en marcha de la unidad curricular, nos posibilitó resaltar los aportes que el marco teórico de la EpC puede brindar a los diferentes proyectos que se deseen emprender y, en los cuales, se tenga como objetivo principal buscar la comprensión de algún concepto en los estudiantes.

También se espera que por medio de este trabajo, los futuros investigadores o maestros apliquen o construyan actividades que vinculen el conocimiento disciplinar con el contexto y la realidad del estudiante, al dotar de significado los diferentes conceptos geométricos que se trabajen. La unidad curricular que aquí se propone, más que una guía a seguir, es un aliciente para que se generen reflexiones y propuestas con actividades focalizadas hacia la comprensión del estudiante, aplicadas por medio de una estrategia didáctica y lúdica, como lo es el doblado de papel.

Por último, es importante resaltar que la propuesta fue y será presentada a la comunidad académica en el marco de algunos eventos nacionales. Se realizó una comunicación breve en la Universidad Industrial de Santander, donde se llevó a cabo el Encuentro anual de la Asociación Colombiana de Matemáticas Educativas (ASOCOLME), en el mes de Octubre de 2014, del mismo modo será presentada en el 22° Encuentro de geometría y sus aplicaciones, que se realizará en el mes de Junio del presente año en la Universidad Pedagógica de la ciudad de Bogotá. Estos eventos permitieron y permitirán difundir los avances del estudio, generar reflexiones en cuanto a la comprensión del concepto de simetría y pautar rutas a seguir para otros proyectos investigativos.

### **7.5. Recomendaciones**

Para futuros proyectos, enmarcados en la EpC y utilizando el doblado de papel como estrategia didáctica, o para la aplicación de la unidad curricular construida, se recomienda:

- Realización de exposiciones por parte de los estudiantes al finalizar cada una de las sesiones, con el objetivo de que ellos puedan mostrar el trabajo realizado, hacer evidentes los conocimientos comprendidos y evaluar las diferentes actividades.
- Construir diferentes figuras con doblado de papel con los estudiantes, con el fin de hacer una puesta en común grupal (una feria de la ciencia, por ejemplo) con el trabajo hecho por los participantes.
- Utilizar diferentes colores de papel en las construcciones realizadas.
- Proponer la construcción de bitácoras, por parte de cada uno de los participantes, donde se plasmen los conocimientos, preguntas y dificultades, además de las observaciones y aportes para destacar y mejorar en las actividades.
- Propiciar diálogos continuos y preguntas que permitan dar cuenta de las opiniones o dudas que puedan tener los estudiantes en determinado momento, para generar una buena evaluación formativa del proceso.
- Asegurarse de captar todas las actividades e interacciones que se generen dentro del grupo, ya sea por medio de fotografías, escritos, videos, audios o demás material, con el fin de facilitar el posterior análisis de la información.
- La unidad didáctica debe concebirse como un proceso flexible, por lo tanto los docentes pueden utilizarla como guía para la propiciar la comprensión de otros conceptos geométricos y adecuar las actividades de acuerdo a los intereses de los estudiantes, de las metas de comprensión y de las particularidades del contexto.



- La aplicación de la unidad didáctica requiere de varias sesiones para ser desarrollada, por lo tanto se deben de propiciar diferentes espacios para que se realice en forma adecuada.
- El manejo del papel puede en algunos momentos dispersar a los estudiantes, por lo tanto sería conveniente nombrar unos monitores que tengan facilidad para utilizar el doblado de papel, para que con su ayuda y acompañamiento se evite que los demás estudiantes se retrasen o distraigan.
- Independientemente de la estrategia utilizada o el objeto de estudio, el marco teórico EpC es un gran referente para abordarlo en una forma integral, además no se debe de olvidar que la contextualización y la significación del conocimiento es un gran aliciente y aliado para lograr la comprensión en los estudiantes.

## Referencias Bibliográficas

- Acevedo, D. (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado* (tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín.
- Areiza, C. y Garzón, F. (2008). Enseñanza para la comprensión. *Enseñanza y Comprensión*. Prontoprinter: Colombia.
- Bermúdez, A., Escobedo, H., y Jaramillo, R. (2009). Enseñanza para la comprensión. *Revista Venezolana de Educación, Educere*, 08(027), 529-534.
- Bohórquez, H., Boscán, L., Hernández, A., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría, *Revista Venezolana de Educación, Educere*, 13(45), 477 – 489.
- Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En: M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215-256). Buenos Aires: Paidós.
- Galeano, M. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Medellín: Universidad EAFIT.
- García, S. y López, O. (2008). *Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. Enseñanza de la Geometría*. Recuperado de <http://www.oei.es/pdf2/ensenanza-geometria-mexico.pdf>

Geretschlager, R. (1995) Euclidean Constructions and the Geometry of Origami.

*Revista Mathematics*, 68(5), 357-371.

Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su Didáctica para Maestros*. Recuperado de

[http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4\\_Geometria.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf)

Gómez, N., Romero, I., Vergara, G., y Albadan, J. (2009). *Misión Matemática 7*. Bogotá:

Educación.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*.

México: McGraw Hill.

Ivorra, C., Carlos, (2008). *Geometría*. Recuperado de

<http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Geometria.pdf>

Jaramillo, C. y Monsalve, O. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y Algunas

aplicaciones matemáticas. *Educación y Pedagogía*, 15(35), 11 – 25.

Jiménez, A. (1998). Diseño curricular: Indagación y razonamiento con el lenguaje de las

ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, 16 (2).

Leithold, L. (2007). *El cálculo*. México D.F.: Oxford.

Martínez, C. (2006). El método del estudio de caso: Estrategia metodológica de la

investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 20, 165-193.

Martínez, O. (2007). Matemática: Un mundo de posibilidades. *Educere*, 11(37), 223 – 232.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santafé de Bogotá D.C.: Delfín Ltda.

Palacios, D. (2007). *Enseñanza de simetrías matemáticas a través del arte: Propuesta para promover un estudio integral* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Venezuela, Caracas.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En: M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (69-95). Buenos Aires: Paidós.

Perrone, V. (1999). ¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión? En: M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (35-68). Buenos Aires: Paidós.

Royo, J. (2002). Matemáticas y Papiroflexia. *Sigma*, (21), 175-192.

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del Doblado de Papel en las Secciones Cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica de Oriente*, (31), 338-362.

Recuperado de

<http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/48/106>



Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En: M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (21-31). Buenos Aires: Paidós.

Stone, M. (1999). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión? En: M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (95-126). Buenos Aires: Paidós.

Weyl, H. (1989). *Symmetry*. Princeton: Princeton University.

Wolf, K. y Kuhn, D. (1959). *Forma y simetría*. Buenos Aires: Editorial universitaria de Buenos Aires.






UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

Facultad de Educación

### Anexos

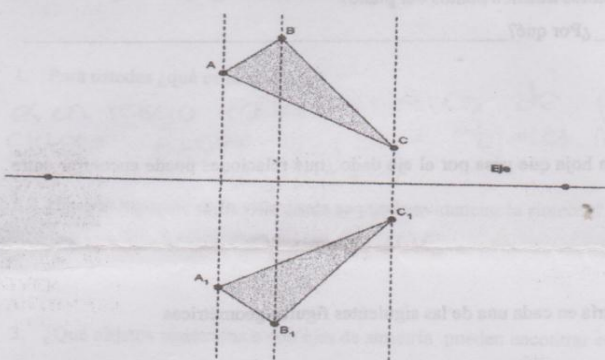
### Cuestionario de los estudiantes

María.

 UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2  
NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA: SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Grado: Décimo B.



1. Dada la siguiente gráfica responder las siguientes preguntas:

a. Responde falso (F) o verdadero (V) según corresponda. Justifique las respuestas que considere falsas.

- El punto B es simétrico con respecto al punto A V
- Los puntos A y B<sub>1</sub> son simétricos con respecto al eje debido a su traslación F
- Al trasladar el triángulo este cambia su área debido a que sus lados ya no están en el mismo lugar V



➤ Como  $B_1$  es simétrico con B y  $C_1$  es simétrico con C entonces  $A_1$  es simétrico con A



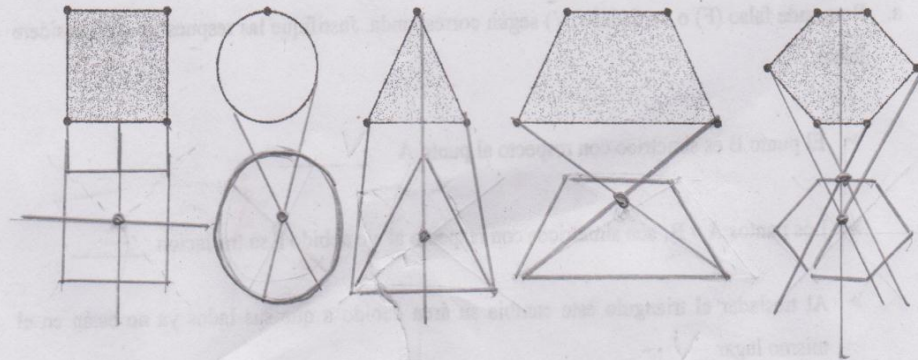
b. ¿Qué propiedad debe cumplir el triángulo ABC para ser simétrico con el triángulo  $A_1B_1C_1$  con respecto al eje dado?

c. Al realizar la traslación del triángulo con respecto al eje ¿este cambia de forma debido a que los vértices ya no están en los mismos puntos del plano?

Sí \_\_\_\_\_ No  ¿Por qué? \_\_\_\_\_

d. Realiza un pliegue por la hoja que pasa por el eje dado ¿qué relaciones puede encontrar entre los triángulos?

2. Dibuja posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas





Lola.



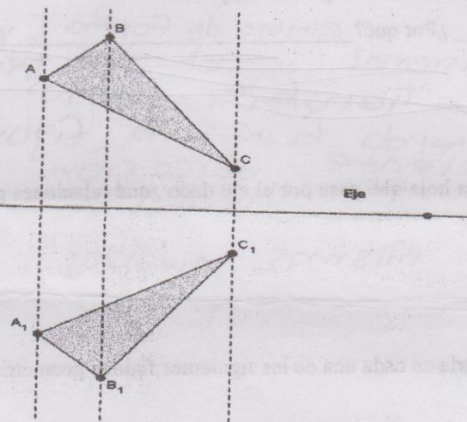
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2

NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA: SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Nombre:

Grado: Décimo



1. Dada la siguiente gráfica responder las siguientes preguntas:

a. Responde falso (F) o verdadero (V) según corresponda. Justifique las respuestas que considere falsas.

- El punto B es simétrico con respecto al punto A F  
NO tiene las mismas medidas
- Los puntos A y B<sub>1</sub> son simétricos con respecto al eje debido a su traslación V
- Al trasladar el triángulo este cambia su área debido a que sus lados ya no están en el mismo lugar F  
la figura sigue siendo la misma con diferente posición





➤ Como  $B_1$  es simétrico con B y  $C_1$  es simétrico con C entonces  $A_1$  es simétrico con A

✓

b. ¿Qué propiedad debe cumplir el triángulo ABC para ser simétrico con el triángulo  $A_1B_1C_1$  con respecto al eje dado?

Tienen que tener las mismas medidas,  
y ser proporcional

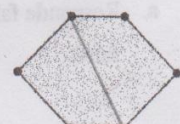
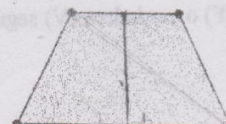
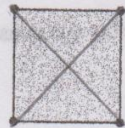
c. Al realizar la traslación del triángulo con respecto al eje ¿este cambia de forma debido a que los vértices ya no están en los mismos puntos del plano?

Sí × No × ¿Por qué? cambia de forma ya que deja de ser proporcional a el otro triángulo que esta quieto, traslada puntos a partes, si que siendo la misma figura pero con diferente ubicación

d. Realiza un pliegue por la hoja que pasa por el eje dado ¿qué relaciones puede encontrar entre los triángulos?

Tienen las mismas medidas

Dibuja posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas





Toni.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2  
NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA: SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Nombre:

Grado: Décimo <sup>AB</sup>

1. Dada la siguiente gráfica responder las siguientes preguntas:

a. Responde falso (F) o verdadero (V) según corresponda. Justifique las respuestas que considere falsas.

- El punto B es simétrico con respecto al punto A V  
*ya que la simetría es con respecto a A1 y A.*
- Los puntos A y B<sub>1</sub> son simétricos con respecto al eje debido a su traslación F  
*Los puntos simétricos es A1 y A.*
- Al trasladar el triángulo este cambia su área debido a que sus lados ya no están en el mismo lugar F  
*Por que el area si que siendo igual ya que los lados son iguales*





➤ Como  $B_1$  es simétrico con B y  $C_1$  es simétrico con C entonces  $A_1$  es simétrico con A

✓

b. ¿Qué propiedad debe cumplir el triángulo ABC para ser simétrico con el triángulo  $A_1B_1C_1$  con respecto al eje dado?

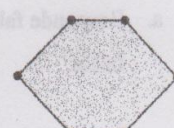
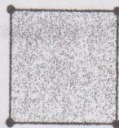
c. Al realizar la traslación del triángulo con respecto al eje ¿este cambia de forma debido a que los vértices ya no están en los mismos puntos del plano?

Sí ✗ No ✗ ¿Por qué? Se supone que se trasladada exactamente igual para que quede igual el reflejo

d. Realiza un pliegue por la hoja que pasa por el eje dado ¿qué relaciones puede encontrar entre los triángulos?

son exactamente igual pero cambian de ángulos dirección

2. Dibuja posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas





Ema.

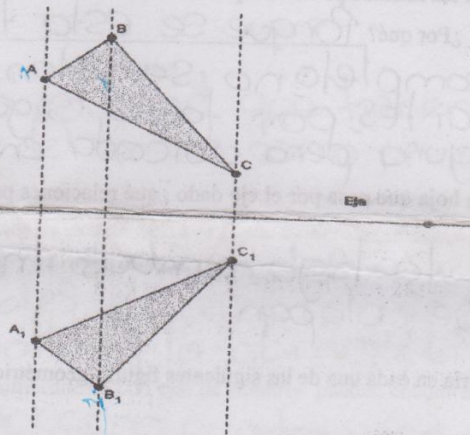


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2  
NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA: SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Nombre:

Grado: Décimo



1. Dada la siguiente gráfica responder las siguientes preguntas:

a. Responde falso (F) o verdadero (V) según corresponda. Justifique las respuestas que considere falsas.

- El punto B es simétrico con respecto al punto A F  
Porque no tienen la misma medida con respecto al eje.
- Los puntos A y B<sub>1</sub> son simétricos con respecto al eje debido a su traslación V  
Si se traslada el punto A hacia la izquierda, quedaría en el mismo eje de B<sub>1</sub>.
- Al trasladar el triángulo este cambia su área debido a que sus lados ya no están en el mismo lugar F  
La figura sigue siendo la misma independiente de su posición.





► Como  $B_1$  es simétrico con  $B$  y  $C_1$  es simétrico con  $C$  entonces  $A_1$  es simétrico con  $A$

Y Son simétricas porque los puntos vértices con respecto al ~~entonces~~ eje están en iguales puntos, teniendo en cuenta la gráfica

b. ¿Qué propiedad debe cumplir el triángulo  $ABC$  para ser simétrico con el triángulo  $A_1B_1C_1$  con respecto al eje dado?

Que cada vertice tenga simetría con respecto al eje o sea congruente, teniendo en cuenta la misma medida con respecto al eje.

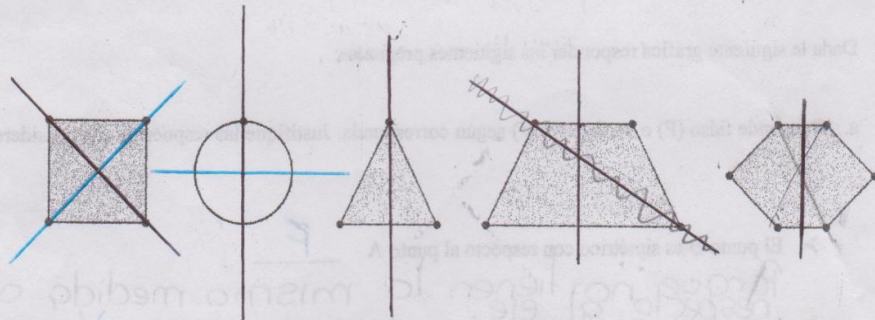
c. Al realizar la traslación del triángulo con respecto al eje ¿este cambia de forma debido a que los vértices ya no están en los mismos puntos del plano?

Sí  No  ¿Por qué? Porque se está trasladando el triángulo completo, no se están trasladando puntos a partes, por tanto, sigue siendo la misma figura pero ubicada en otra parte.

d. Realiza un pliegue por la hoja que pasa por el eje dado ¿qué relaciones puede encontrar entre los triángulos?


al doblar la hoja, ambos triángulos coinciden, se solapan.

2. Dibuja posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas



## Cuestionario familiar

María.

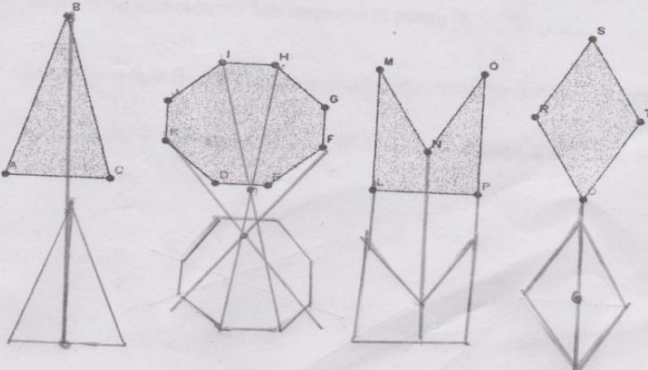


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2  
NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
CUESTIONARIO FAMILIAR SOBRE LA SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Responda las siguientes preguntas con la ayuda de sus padres o familiares más cercanos.

- Para ustedes ¿qué es la simetría?  
es un rasgo característico de formas geométricas, sistemas, ecuaciones, y otras objetos materiales o entidades abstractas
- ¿En qué aspectos de la vida diaria se puede evidenciar la simetría?  
en la economía, etc.
- ¿Qué objetos simétricos o con ejes de simetría pueden encontrar en su casa?  
vaso, platos, lámparas de noche, cuadros, espejo, el televisor, etc.
- Dibujen posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas





Lola.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2  
NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
CUESTIONARIO FAMILIAR SOBRE LA SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Responda las siguientes preguntas con la ayuda de sus padres o familiares más cercanos.

1. Para ustedes ¿qué es la simetría?

es cuando una figura es igual a la otra mitad si se parte a la mitad, es igual en tamaño, largo y ancho

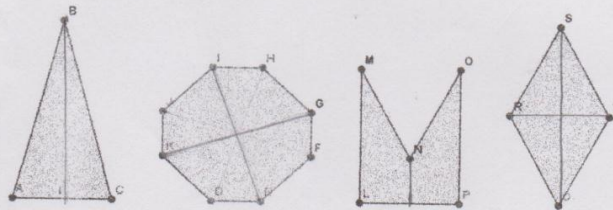
2. ¿En qué aspectos de la vida diaria se puede evidenciar la simetría?

Cuando nos miramos al espejo podemos observar que la mitad de la cara es igualmente proporcional a la otra

3. ¿Qué objetos simétricos o con ejes de simetría pueden encontrar en su casa?

un jarrón, un televisor, una camisa, un beso, un plato, un cuaderno, un cuadro

4. Dibujen posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas







Ema.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA 2014-2  
NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN  
CUESTIONARIO FAMILIAR SOBRE LA SIMETRÍA

Estudiantes: América María Cardona Arias  
Jhon Edwar Gómez Berrio

Responda las siguientes preguntas con la ayuda de sus padres o familiares más cercanos.

1. Para ustedes ¿qué es la simetría?

Es la propiedad que tienen dos o más partes de verse como un reflejo de las otras.

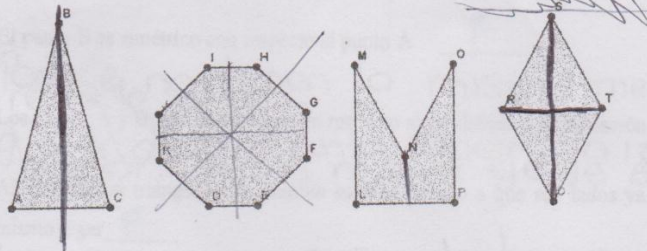
2. ¿En qué aspectos de la vida diaria se puede evidenciar la simetría?

En los rostros, en los cuerpos de personas y animales, de algunas frutas y vegetales como la cebolla y la naranja, los vehículos.

3. ¿Qué objetos simétricos o con ejes de simetría pueden encontrar en su casa?

Televisor, cuadro, vaso, celular y muchas otras cosas del diario vivir.

4. Dibujen posibles ejes de simetría en cada una de las siguientes figuras geométricas





UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

Facultad de Educación

## Certificado de participación en ASOCOLME.



La Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y la Universidad Industrial de Santander

Certifican que:

*América María Cardona Arias*  
*Jhon Edwar Gómez Berrío*  
*Zaida Margot Santa Ramírez*

Participaron como ponentes de la Comunicación Breve titulada “*La simetría y su comprensión a través del doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*”, en el 15º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME-14) – **Formación de ciudadanos matemáticamente competentes**, realizado los días 6, 7 y 8 de octubre de 2014, en la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga – Colombia, con una duración de 24 horas.

Bucaramanga-Colombia, 30 de marzo de 2015.

**Gilberto Obando**  
Presidente ASOCOLME  
Profesor  
Universidad de Antioquia

**Jorge Fiallo**  
Comité Organizador ECME-15  
Profesor  
Universidad Industrial de Santander

Asociación Colombiana de Matemática Educativa - ASOCOLME  
NIT 830059245-8

[www.asocolme.org](http://www.asocolme.org)

1 8 0 3