UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Unidad Didáctica para la Enseñanza de la Demostración Empírica en la Geometría de Grado 11

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Universidad de Antioquia, Medellín

EDWIN ARVEY VILLA ALVAREZ

Asesor

RUBEN DARÍO HENAO CIRO

2015

"Te haré entender y te enseñaré el camino por el que debes andar sobre ti fijaré mis ojos"

Salmo 32:8

"No soy capaz de perder sabiendo que puedo ganar"

Edwin Villa, 2008

Gracias Even Villa, Martha Álvarez y Daniela villa por su inmenso apoyo esto es de ustedes.

AGRADECIMIENTOS

Es para mí un motivo de alegría poder en esta página que disfruto tanto escribir, reconocer a las personas que han estado acompañándome en este sueño, como lo es mi carrera profesional, quiero resaltar a:

A mi buen Dios que prometió estar conmigo todos los días.

Al profesor y doctor Rubén Darío Henao Ciro. Que grato es encontrarnos con personas que inspiran y muestran pasión por lo que hacen. Sus aportes enriquecieron mi trabajo en este año y medio de trabajo juntos de una manera extraordinaria.

A la institución Educativa Lola González, que me permitió realizar mi práctica profesional en sus instalaciones.

A la profesora y magíster Aisnardi Soto, profesora cooperadora en la Institución Educativa Lola González, gracias por su apoyo, consejos y el tiempo dedicado cada mañana.

A los diferentes maestros que aportaron su conocimiento en mi paso por la universidad, su aporte fue estupendo.

A los niños y adolescentes del Centro de Desarrollo Integral Betel de la comuna 13. Su amor y cariño despertaron en mí la vocación por el magisterio.

A mis padres y hermana que siempre me apoyaron a pesar de todos los inconvenientes que causo mi cambio de profesión.

Y empiezo con Dios y termino con Dios. La gloria siempre es para Él

RESUMEN

La educación matemática en Colombia desde los lineamientos y estándares curriculares para la educación básica y secundaria está buscando la transformación de los procesos de enseñanza aprendizaje que se vienen dando dentro de las aulas de clase, esta investigación quiere aportar a esa transformación promoviendo la actividad demostrativa. Esta investigación cualitativa enfocada desde la investigación acción educativa (Restrepo, 2004). Aporta a la transformación de los procesos de enseñanza-aprendizaje potencializando el pensamiento matemático y promoviendo la actividad demostrativa como alternativa para aumentar la capacidad de razonamiento desde el área de la geometría (Lourido & Melán, 2012). Ya que la demostración matemática es una de las finalidades que busca la educación matemática (Samper, Camargo & Leguizamón, 2003). Pero tanto la geometría como la actividad demostrativa han perdido fuerza dentro de la escuela y el currículo, por ende para esta investigación se introduce un concepto conocido como la demostración empírica que es un método demostrativo no formal desarrollado por didactas de la matemática (Gutiérrez, 2002) y que se pone como alternativa a la demostración estrictamente formal y deductiva que ha llevado a maestros y profesores a frustraciones y fracasos en la enseñanza tradicional.

Esta investigación se desarrolló en la Institución Educativa Lola Gonzales de la ciudad de Medellín con 35 estudiantes de grado once, buscando a partir del componente teórico de la demostración empírica y de razonamientos inductivos visuales y de construcción, conocer los métodos demostrativos más utilizados por ellos (Fiallo &

Gutiérrez, 2007) y seguidamente buscar a partir de una secuencia de actividades una aproximación a la demostración formal. La investigación mostró como resultado que el empirismo ingenuo es el método de demostración más común entre los estudiantes, además mostró como a partir de dichas actividades de razonamiento algunos de ellos pudieron superar el anterior tipo de demostración, desarrollando razonamientos deductivos que muestran el desarrollo de razonamientos más estructurales y analíticos al participar de la actividad demostrativa partiendo de sus métodos empíricos de validación. Los estudiantes, en síntesis, encuentran en la demostración empírica una vía que les permite razonar más abiertamente y encontrar las vías para la demostración de teoremas por otros métodos.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

La siguiente investigación de carácter cualitativa, muestra a continuación el proceso realizado en la Institución Educativa Lola González de la ciudad de Medellín con una población de 35 estudiantes de grado 11, con el fin de contribuir con mucha humildad un granito de arena desde la práctica profesional a nuevas alternativas en los procesos de enseñanza aprendizaje de los futuros maestros; reconociendo lo mucho por hacer e investigar en este campo tan amplio.

Este trabajo de grado llamado "Unidad didáctica para la enseñanza de la demostración empírica en la geometría de grado once", buscó trascender de la enseñanza de la actividad demostrativa en matemáticas de una manera estrictamente formal y deductiva, a visualizar otras maneras de validación matemática, desde el concepto de demostración empírica diseñado por el profesor Ángel Gutiérrez (2001) y su grupo de investigación, los cuales se basaron en teóricos como Bell (1976), Balacheff (1988), Harel & Sodwer (1998), que promovieron nuevas alternativas en la demostración matemática.

Inicialmente, se buscó conocer el contexto próximo a la institución a través de encuestas a los maestros de matemáticas y a los estudiantes, reconociendo los recursos de la institución educativa, y así determinar cuál podría ser el camino a seguir con determinada población.

Después de revisar el plan de área y el PEI de la institución, se parte desde su componente curricular y pedagógico para crear diferentes actividades que enriquezcan y encaminen este trabajo. Se realiza una prueba diagnóstica y a partir de sus resultados junto con el de las encuestas ya mencionadas, se argumenta un planteamiento de problema, encontrando falencias en los estudiantes en el área de geometría y en la actividad demostrativa por lo intermitente que ha sido su enseñanza en los grados escolares anteriores.

Buscando antecedentes en Colombia, se encontró que universidades como, la Universidad del Valle, la Universidad pedagógica Nacional y la Universidad Industrial de Santander, han promovido la investigación sobre la actividad demostrativa desde la competencia de razonamiento y a partir de sus propuestas y del componente teórico de la demostración empírica se procedió a intervenir en el aula de clase en busca de encontrar una serie de actividades que se convirtieran en una unidad didáctica que potencializara diferentes tipos de razonamiento en los estudiantes participantes.

La metodología realizada fue de carácter cualitativa desde la teoría de la Investigación acción educativa propuesta por Restrepo (2003, 2004) compuesta por tres fases conocidas como deconstrucción, reconstrucción y evaluación.

En la primera fase de deconstrucción se hizo todo lo anterior expuesto para llegar al planteamiento del problema, formar los objetivos y construir un marco teórico que pudiera sostener el segundo momento de reconstrucción, que fue el momento de la intervención educativa, donde se diseñaron planes de clase, se hicieron diarios de procesos, se realizó la metodología estudio de clase (MEC) realizando diferentes actividades que enriquecieran y formaran la Unidad didáctica. Finalmente en la fase de evaluación se diseñaron pruebas de verificación, se aplicaron encuestas a estudiantes y a la profesora colaboradora, se hacen análisis de resultados llevando así a unas conclusiones y a recomendaciones para diferentes sectores que intervinieron en el proceso de investigación e intervención educativa.

1. LECTURA DE CONTEXTO

La importancia en la actualidad de la intervención de los maestros en formación en las instituciones educativas del país, parte del propósito de ayudar a identificar los problemas que se están presentado en los procesos de enseñanza-aprendizaje dentro de las aulas de clase; por lo tanto, es importante que en el momento de estas intervenciones se generen preguntas de investigación que busquen dar respuestas a dichos problemas y así contribuir a mejorar la calidad de la educación en Colombia.

En ese mismo sentir, la siguiente lectura de contexto es el paso inicial para contribuir en una de las instituciones educativas de Medellín, con una posible solución a una de las problemáticas académicas que se pueden vivir en su *ahí del acto pedagógico*. La institución elegida para este proyecto es la Institución Educativa Lola González que a continuación conoceremos.

La Institución Educativa Lola González ha cumplido recientemente medio siglo de existencia, fue creada en octubre de 1963 y en el trascurso de estos años ha buscado aportar a Medellín, Antioquia y Colombia ciudadanas y ciudadanos que contribuyan a su progreso social. Su nombre, se debe a la educadora Lola Gonzales Mesa que nació y murió en Medellín (1894 – 1970). Se recuerda significativamente que el Ministerio de Educación Nacional le concedió a la educadora la Medalla “Estrella Antioquia”, en reconocimiento a sus valores como pedagoga, y al trascurrir los años la Asamblea Departamental dio su nombre al Instituto Femenino de Bachillerato Técnico Comercial de San Javier el cual fue el primer nombre con que se conoció la institución, posteriormente llamado Liceo Departamental Femenino Lola Gonzales, luego Liceo Lola Gonzales y por último su nombre actual.

La institución se ha destacado históricamente en danzas, coro y dramatización. Gracias a esto tuvieron la oportunidad de recibir invitaciones de actividades a nivel departamental. Además, después de 1994 se empezaron a destacar notablemente en el deporte llegando a ser en voleibol subcampeonas nacionales. Y en otros deportes como el baloncesto se coronaron en varias ocasiones campeonas a nivel municipal y departamental, y han aportado jugadoras a selecciones Antioquía y Colombia cada año.

La Institución Educativa Lola González fue inicialmente de carácter femenino, los primeros nombres con que se conoció lo decían explícitamente, solo a partir de los años 2006-2007 el género masculino empezó a ser partícipe de la comunidad estudiantil, sin embargo, aún la cantidad de mujeres supera a la de hombres. Es de destacar que en el presente año ocurren ya particularidades como ver en algunos de los salones más hombres que mujeres, teniendo incluso como ejemplo un grupo de grado once, donde los hombres casi doblan en número al género femenino. Pero es indiscutible que aun el género femenino es quien predomina dentro de la Institución.

Conozcamos ahora un poco más sobre esta institución, su ubicación, su entorno social, su arquitectura y los recursos con los que cuenta tanto tecnológicos como didácticos.

Está conformada por dos sedes, una para básica primaria y otra para básica secundaria. Ambas sedes están ubicadas en el occidente de la ciudad de Medellín; la sede de bachillerato específicamente se encuentra en la calle 47F # 94-63 del barrio Santa Lucía, esta sede tiene una característica importante y es su ubicación en la frontera entre dos comunas, la comuna 12 y la 13, la primera una comuna de estratos dos y tres y la segunda compuesta de los estratos uno, dos y tres. Es importante esta característica porque la institución recibe en sus aulas estudiantes de aproximadamente 13 barrios entre las dos comunas. Además se encuentra cerca a la estación San Javier del Metro de Medellín, lo que también ha permitido que la institución albergue estudiantes de barrios lejanos y otros municipios del área metropolitana. El desnivel social que vive el país también se hace presente en la institución, y la institución debe batallar contra enemigos como las fronteras invisibles o las bacrim. Esta situación ha llevado incluso a que profesores como la licenciada Angélica Guerrero hayan creado proyectos como la Red de Noviolencia que ha buscado sensibilizar a toda la comunidad educativa en los temas de paz y de sana convivencia.

Arquitectónicamente, acerca de la sede de bachillerato se puede decir que su estilo es tradicional, aún conserva el estilo de la mayoría de instituciones de Medellín, su espacio es amplio, tiene dos pisos y 20 aulas de clase, posee un aula múltiple, una biblioteca, dos salas de informática y dos coliseos, en uno de ellos una cancha de microfútbol y en el otro una cancha diseñada para baloncesto y voleibol, y además posee una buena cantidad de zona verde que da a la institución un ambiente diferente que evite ver al colegio como una de las sociedades de encierro que denominó Michael Foucault. En la institución encontramos también oficinas, para la rectoría, la coordinación académica, la coordinación de convivencia, y la secretaría y una sala destinada para los maestros de las dos jornadas (ver anexo 1).

Ahora, después de conocer físicamente la Institución, es importante conocerla académicamente, y el propósito que han buscado tener con toda la comunidad académica y lo que han desarrollado a nivel de prueba de estado.

Como antes se mencionó, entre las dos sedes que conforman la institución, encontramos los niveles educativos, preescolar, educación básica y educación media. La educación media tiene dos especialidades, la media académica y la media técnica, las especialidades de la media técnica son: comercio (documentación y registro de operaciones contables y financieras) e informática (diseño gráfico). La institución imparte sus clases en la jornada de la mañana y de la tarde.

En los diferentes grados escolares, la Institución tiene como misión potenciar las diferentes habilidades de cada estudiante y fortalecer en ellos el trabajo colectivo, misión que se articula con el proyecto educativo de la institución que fundamenta su estrategia pedagógica en las potencialidades del sujeto, de lo que se deduce que el modelo pedagógico de la Institución Educativa Lola González se denomina *potencialista*.

El PEI, en sus concepciones básicas, busca *desde lo humano* que cada estudiante como ser único e irrepetible tenga una experiencia individual que lo ayude a desarrollar su personalidad, y a transformar su entorno para bien, transmitiendo y creando cultura, participando políticamente en las decisiones que afectan su vida y la de los demás. Y *desde la educación* el PEI busca proveerle a cada estudiante la oportunidad de desarrollarse como sujeto íntegro y comprometido, brindándole herramientas conceptuales y metodológicas básicas que le faciliten el progreso individual y el progreso de aquellos que están cerca de él.

En esa misma línea, los principios pedagógicos de la institución buscan que todos aquellos que participan del proceso de enseñanza-aprendizaje, niños, niñas, jóvenes, padres y madres de familia, educadores(as) y directivos(as) puedan interaccionar. Por lo tanto la

Institución busca desarrollar los siguientes principios que propicien el fortalecimiento del Modelo Pedagógico fundamentado en las potencialidades, estos serían: la complementariedad de saberes, la inclusión a la diversidad, la flexibilidad (se da cabida a lo imprevisto, a lo no pensado y a la iniciativa que pueda surgir en el momento), además de la acción reflexiva, la significatividad y la autonomía.

Buscando desarrollar todo lo anterior, la Institución tiene una serie de características para su metodología educativa que dan cuenta de estrategias ideadas para favorecer las particulares de cada educando a la hora de aprender, como lo son: una *relación teórico práctica*, *la contextualización del aprendizaje*, el *privilegio del proceso* por encima de los resultados, y *la integración* que busca superar la concepción reduccionista de los contenidos académicos a los cuales en ocasiones se les dedica esfuerzo y tiempo pero que su trascendencia es nula.

Por lo tanto, con base en los principios pedagógicos y las características metodológicas antes mencionadas se tiene en la institución un plan de estudios para la educación preescolar, para básica primaria, básica secundaria y para la educación media académica. Para estas dos últimas la intensidad horaria semanal es de 30 horas para los estudiantes, pero para los estudiantes que se encuentran realizando la media técnica en cualquiera de las dos modalidades su intensidad es de 37 horas. Sin embargo, para todos los grupos de grado 11, es de resaltar que son cuatro horas dedicadas para el área de matemáticas, tres horas para las matemáticas operativas y una para geometría, no obstante, esta hora de geometría parece haber sido olvidada en la institución. Situación que preocupa, no solo por el conocimiento académico que pueden perder los estudiantes, sino además porque las pruebas de estado poseen un alto componente geométrico.

Hablando propiamente de las pruebas de estado, la Institución Educativa Lola González actualmente se encuentra en nivel alto de acuerdo con los resultados de las últimas pruebas saber 11; en el área de matemáticas, en los años anteriores obtuvieron los siguientes promedios en resultados: en el año 2009 un 45.72, en el año 2010 el promedio fue de 45.64, para el año 2011 se dio el resultado más alto de los cuatro aquí mencionados con un promedio de 50.29, pero para el año 2012 bajó de nuevo a 47.84, situación que para el año 2014 se desea mejorar superando este nivel medio en matemáticas, a través del fortalecimiento del componente geométrico y el componente estadístico.

La siguiente pregunta por responder es por aquellos que conforman y hacen que los espacios físicos de esta institución cobren vida y que el propósito del PEI tenga sentido, estos son directivos, maestros, padres de familia y los principales protagonistas de la institución los estudiantes.

La Institución Educativa está encabezada por su rector Jesús Huberto Giraldo licenciado en filología e idiomas, además cuenta con cuatro coordinadores que se dividen así: una coordinadora para la sede primaria, dos coordinadores de convivencia para la secundaria y un coordinador académico para la secundaria; por otra parte, en su totalidad la institución cuenta con 80 docentes, de los cuales para la sede de bachillerato son seis que se dedican a la enseñanza de las matemáticas y la geometría. De estos seis profesores conoceremos un poco más a continuación.

Después de realizarse una encuesta a estos seis profesores, (ver anexo 2) se encontró, que cuatro mujeres y dos hombres son los docentes dedicados a la enseñanza de las matemáticas, todos ellos licenciados y motivados por ser maestros por su habilidad desde el colegio en dicha área y sus ganas de servir a los demás. Solo dos de ellos han tenido el privilegio de hacer alguna especialidad y una docente pudo realizar su maestría. Para sus procesos de enseñanza utilizan guías propias y en ocasiones algún texto guía, aunque la web también es opción para una de ellas a la hora de preparar sus clases. Todos ellos coinciden en que buscan potenciar en los estudiantes sus habilidades como el modelo pedagógico de la institución exige, no obstante, también coinciden en que los recursos de la institución no son suficientes para mejorar los resultados de los estudiantes en el área de matemáticas, teniendo en cuenta incluso que la institución contó con un aula taller para el área de geometría que hace unos años fue anulada por completo perdiéndose el material que la conformaba, esto ha llevado también, aunque la geometría tiene su espacio dentro del plan de área de la institución con una hora semanal, que factores como la falta de tiempo, la ausencia de espacios para la práctica, e incluso haberla dejado en años anteriores como una temática enseñada en el último periodo hayan llevado como lo afirma una de las docentes a que los alumnos vean la geometría como una componente desarticulada de las matemáticas. Los maestros reconocen la importancia de la geometría en las aulas de clase y aunque pareciese que ha perdido interés en los últimos años, esta sigue teniendo la misma importancia, solo que factores externos no han permitido su buen abordaje. Cinco de estos profesores dan como viable incluso que a los estudiantes de grado 11 se les pueda iniciar en el aprendizaje demostrativo en el componente geométrico, pero también argumentan que debería ser un trabajo que se desarrolle desde los primeros años escolares, y así se le sacaría mayor provecho a las ventajas de la demostración.

La situación anterior es confirmada también por estudiantes de grado 11, específicamente los estudiantes del grupo 11º -5 que afirman no haber visto geometría desde el grado octavo, una falencia para los propósitos de la institución de elevar su calidad académica y reflejar la mejoría en las pruebas de estado.

En consecuencia, es importante conocer más afondo este grupo de estudiantes que conforman el grupo 11º-5, como los sujetos directamente afectados por los procesos de enseñanza-aprendizaje de la institución educativa y que tienen un lugar importante en esta lectura de contexto.

Al participar de una encuesta (ver anexo 3), se encontró que la edad de los chicos y chicas está en un intervalo de 15 a 18 años; la edad predominante en el salón es de 16 años el cual representa el 65.5%. Además la cantidad de mujeres del grupo equivale al 61.3% del grupo.

Se destaca en el grupo, que el estrato socioeconómico de los estudiantes y sus familias en su mayoría es tres que representa el 55.8%, seguido por el estrato dos con un 37.93%, se cuenta con un estudiante de estrato uno y uno de estrato cuatro. La mayoría de ellos viven con sus padres y hermanos, pero algunos viven adicionalmente con tíos y abuelos. El 41.37% de los estudiantes tiene al menos uno de sus padres con estudios técnicos, y el 20,68% tienen al menos uno de sus padres profesionales, el 34.48% de los padres de los estudiantes pudieron terminar su bachillerato y solo uno de los estudiantes tiene a sus padres con solo estudios en básica primaria. De lo anterior se puede concluir que el nivel económico de los estudiantes del grupo 11º-5 puede estar estable.

A nivel académico, la mayoría de los estudiantes (51,72%) resaltan el área de matemáticas como la de mayor agrado, y solo el 10.34% dicen que es la de menor agrado, no obstante, asignaturas como química, artística, física, biología y español también se destacan por ser de agrado para los estudiantes. De menor agrado se resalta notablemente la materia de inglés.

Es interesante que más de la mitad del grupo sientan agrado por la matemática, esto simplemente muestra la importancia de darles herramientas que le permitan potenciar ese agrado que sienten y lo lleven a niveles altos, y así facilitar su ingreso y permanencia en los estudios superiores que tienen proyectados realizar. Los chicos y chicas no dejan de reconocer que las matemáticas han sido dificultosas por aprender en sus años escolares, el 62.06% de ellos lo dice, pero también saben y comprenden la importancia que tiene la matemática en su vida, la describen como útil, necesaria, interesante, fundamental, buena y que permite desarrollar conocimientos.

No obstante, sus falencias en temáticas como la geometría son grandes. Antes se mencionó que la geometría tiene una carga académica semanal de una hora, pero en anteriores años, la geometría era uno de los últimos temas que se daban en clase y el tiempo no era suficiente para alcanzar a verlo, situación que trae como consecuencias que los estudiantes tengan un conocimiento casi nulo sobre geometría como lo demostró una prueba diagnóstica que se les realizó (ver anexo 4). El diagnostico mostró que ellos no saben cómo resolver ejercicios donde se involucran conceptos como área, perímetro, proporción, ángulos, paralelismo o perpendicularidad, y no saben conceptualizar los términos que son base para la geometría, adicional a eso, nunca han visto un proceso de demostración geométrica.

Esta problemática, no sólo traería consecuencias nefastas en las pruebas de estado que se realizaran este año, sino que será una debilidad para muchos de ellos que están haciendo la modalidad en la media técnica en diseño gráfico y desean seguir sus estudios superiores por esa misma línea, y también para algunos que desean estudiar ingenierías o arquitectura.

La Institución Educativa Lola González, ha identificado esta problemática y está decidida a buscar soluciones que traigan beneficios para su fortalecimiento, no solo a nivel de pruebas de estado, sino en gran manera a cada uno de los estudiantes que terminaran sus estudios de básica secundaria. Por lo tanto, este trabajo como se mencionó inicialmente es una de las apuestas de la institución para alcanzar este objetivo, donde toda la comunidad académica sea participe.

2. DISEÑO TEÓRICO

2.1. Planteamiento del problema.

Es evidente que la geometría, es y ha sido de gran importancia para la humanidad, sus diferentes características hacen que su participación en las aulas de clase sea necesaria. Esta importancia se hace evidente en los diferentes dominios en los que esta se mueve. La geometría la podemos ver como aquella que adjudica características y propiedades a los objetos físicos y naturales, como el modelo que se brinda a una realidad ya sea natural o artificial, como una herramienta de apoyo para la matemática, o como aquella colección de teorías que pueden interrelacionarse aunque sus fundamentos sean diferentes: geometría euclidiana, no euclidiana, geometría analítica, proyectiva, algebraica, diferencial, o combinatoria (Samper et al., 2003).

Las autoridades de la educación en Colombia han entendido esta importancia de la geometría y desde los estándares curriculares le han dado un lugar destacado, para que todas las instituciones educativas del país no pasen por alto su enseñanza; no obstante, su sola inclusión en los estándares no ha sido suficiente, ya que lamentablemente después de que la geometría llegó a estar en algún momento en lo más alto de la educación matemática hoy se encuentra en lo más bajo; los profesores no tienen tiempo para enseñarla, la falta de tiempo lleva a que el contenido geométrico sea sacrificado, pues hay otros temas que en la actualidad se hacen más importantes y tienen que ser abordados en la escuela. Estas situaciones traen consecuencias que se evidencian en los nefastos resultados en las pruebas nacionales e internacionales, y aún más en los rendimientos académicos de los estudiantes de educación superior.

Ahora bien, uno de los momentos en que la geometría tuvo su mayor relevancia en las aulas de clase, fue a mediados del siglo XX y finales de los años 70, ya que los maestros vieron que su enseñanza, estaba muy ligada al desarrollo del pensamiento deductivo, determinante para la demostración en matemáticas, algo que hasta el día de hoy no se refuta, sin embargo, los maestros y estudiantes se encontraron con frustraciones en el proceso enseñanza-aprendizaje, debido a que se creyó que en las aulas de clase se debía llevar a cabo la demostración matemática de la misma manera como la realizaban los especialistas en matemáticas; esto desembocó en un fracaso, ya que el desarrollo del pensamiento deductivo no se pudo lograr, y por lo tanto al pasar el tiempo, la actividad demostrativa en las aulas de clase desapareció, y hoy sólo se enseña a reconocer objetos geométricos y aplicar teoremas para efectuar cálculos (Samper el al, 2003).

Por lo tanto, y en primera instancia, este proyecto pretende recordar además de la importancia de la geometría, la pertinencia de volver a incluir la actividad demostrativa en las aulas de clase.

La enseñanza de la geometría, específicamente en el campo de la demostración, ha sido abordada por grandes investigadores a nivel educativo en los últimos años, ya que se ha hecho necesario reflexionar sobre lo que a través de la historia se ha ido olvidando en los currículos de matemáticas como ya se ha mencionado anteriormente.

La geometría ha sido disgregada en la educación básica y media convirtiéndose en el último tema en verse en el año escolar (Samper el al., 2003), no obstante, en las instituciones educativas pocas veces hay tiempo incluso para la enseñanza de los últimos contenidos que se tienen en los planes de área. Por lo tanto, dichas investigaciones que más adelante se mencionaran han dado a conocer diferentes pensamientos sobre la problemática planteada, y han surgido ideas de las cuales conoceremos algunas que permitirán dar un amplio enfoque sobre la demostración en geometría y que conducirán seguidamente a concretar y precisar la idea de investigación de este proyecto.

Algunas de estas investigaciones mundiales destacadas son las realizadas por Bell (1976), Duval (1998), Balacheff (1999,2000), Sánchez (2003), Martínez (2003), Crespo (2004), Ibáñez & Ortega (2005), Larios (2000), estas en el campo general de la demostración matemática. Además como lo mencionan Perry, Camargo, Samper & Rojas (citados por Lourido & Melán, 2012) estos han querido dar un paso más allá de la actividad demostrativa, todos ellos defienden la importancia de no solo ver la actividad demostrativa con un enfoque puramente deductivo, estos investigadores buscaron por lo tanto establecer teorías que vayan mucho más allá de lo formal, axiomático y lógico.

Perry et al. (2006) afirman: que otros autores que han investigado en el campo de la demostración matemática en el mundo debido a la relevancia que dicho tema ha tomado serían, "…Aliberth & Thomas (1991), Bartolinni & Bussi (2000), De Villiers (1993), Dreyfus (1999), Harel (1998), Harel & Sowder (1996-1998), Healy & Hoyles (1998), Olivero (2003), Perks & Prestage (1995), Radford (1994), Senk (1985), Sackur, Drouhard

& Maurel (2000) y Tall (1991, 1995)" (p.37), todos ellos en una misma línea de la actividad demostrativa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva; todas estas investigaciones han buscado darle un enfoque diferente a la actividad demostrativa donde se insta a mejorar su aprendizaje desde diferentes esquemas de demostración ya sea a partir de enfoques empiristas e inductivos o de una manera deductiva y axiomática su intención prima en poder identificar los tipos de demostraciones, los contextos e instituciones donde dicha actividad se hace presente, dando por sentado que para hablar de demostración matemática se debe tener en cuenta el tipo, la cultura donde se enseña y la manera como se enseña. Hacen énfasis también en el profesorado de matemáticas en las concepciones que estos tienen acerca de las demostraciones.

En Colombia también se han hecho investigaciones en el ámbito de la argumentación y la demostración geométrica, entendido también como ese proceso inherente al razonamiento, pero estas investigaciones no han tenido el impacto suficiente en la educación media, tanto que las instituciones educativas no tocan el tema y esta queda únicamente ligada al componente deductivo que tiene su principal enseñanza en la educación superior.

En Colombia, y relacionadas con la demostración geométrica, se han hecho investigaciones, entre ellas se encuentran los trabajos realizados por profesores de la universidad pedagógica, Perry et al. (2006) y Samper et al (2003). Sin embargo, estos trabajos necesitan que el maestro conozca muy bien la teoría antes de implementar en clase lo expuesto en su contenido (Lourido & Melán, 2012). Estos hacen una investigación exhaustiva en términos de promover el razonamiento en el aula a través de la geometría, y establecen las tareas que favorece el razonamiento a través de la geometría, también la importancia de conceptualizar en geometría la importancia de investigar y los tipos de razonamiento en la actividad de investigación y desde luego ahondan en la demostración en aula de geometría en términos de obstáculos del papel de la demostración en matemáticas y los razonamientos que se favorecen a la hora de demostrar (Samper et al. 2003).

También encontramos la tesis de maestría de Ponce de León (2007) de la Universidad del Valle, sobre la enseñanza inicial de la demostración desde una perspectiva cognitiva, donde se hace un trabajo específico en el funcionamiento del razonamiento deductivo y la organización que debe tener este en la educación matemática, por lo tanto Ponce de León deja claro la necesidad de realizar un trabajo bien especifico con los estudiantes para poder llegar a una primera enseñanza de la demostración matemática, además a raíz del trabajo de Ponce de León, Lourido & Melán (2012) se inspiran reconociendo que el trabajo de Ponce debe llegar a los maestros del país y utilizan la tesis de Ponce de León para diseñar un manual para maestros que brinde alternativas didácticas en torno a la enseñanza de la demostración buscando como una necesidad romper la fase heurística y la fase deductiva lo cual significa que:

> El trabajo con figuras, la formulación de conjeturas, así como el trabajo lógico, al igual que la discusión y búsqueda de propiedades que habrán de sufrir una puesta en común en dinámicas de clase que le devuelven la responsabilidad a los estudiantes. (Lourido & Melán, 2012, p.88)

Deben ser herramientas previas requeridas para el inicio de la enseñanza demostrativa. En este misma línea se encontró también el trabajo de Quintero, G. (2010), también de la universidad del Valle sobre el paso de la conjetura a la demostración deductiva, mediante una geometría dinámica.

Sin embargo, estos trabajos no han sido suficiente, ya que no han logrado impactar la escuela como aquel propósito principal, pero si se convirtieron en el motor de arranque para nuevas investigaciones en Colombia que permitan ahondar más en el tema de la actividad demostrativa y así lograr ganar un espacio para ella en la actividad matemática de la educación básica y media, además, se debe tener presente que estos trabajos han tenido su auge en la geometría euclidiana, y este trabajo como una de esas investigaciones que desea seguir aportando a dicha problemática, pretende reflexionar dando otro paso en el dominio de la geometría analítica.

A nivel del Estado, el Ministerio de Educación Nacional, en los Estándares Básicos en Competencia en Matemáticas (2006), no hace mucho énfasis en los procesos de enseñanza-aprendizaje en demostración matemática, pero si sostiene la importancia de que dentro de las aulas de clase se desarrollen diferentes tipos de razonamientos, en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, además el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en gráficas; ya que estos pueden ayudar a comprender otro tipos de razonamiento como los lógicos inductivos y abdutivos que permitan crear hipótesis y conjeturas y los deductivos que permiten validar proposiciones a partir de otras ya aceptadas, ya sean teoremas, axiomas o definiciones.

Desarrollar el pensamiento deductivo, genera una cultura de argumentación que facilita no sólo la demostración matemática, sino que permite interpretar fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias (Samper et al. 2003). Esto se hace importante además porque los Estándares curriculares buscan lograrlo en los grados de décimo y once: *"uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias".* (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.88).

No obstante lo expuesto por los Estándares no es suficiente para que las Instituciones Educativas del país tengan como una alternativa en sus currículos los procesos de demostración matemática, y mucho menos los que tienen que ver con el área de geometría. Además, las investigaciones respecto a la demostración matemática y demostración geométrica tal parece no han podido intervenir lo suficiente en la educación media, pues los resultados de estas investigaciones se quedan entre la comunidad académica y para aquellos que hacen estudios pos-graduados (Lourido & Melán, 2012).

En relación con lo anterior, la Institución Educativa Lola González reconoce que ha caído en dicha problemática, de desligar un poco el componente geométrico por la falta de tiempo, y algunos asuntos extracurriculares que han sido obstáculos para su enseñanza, situación corroborada por los resultados que arrojó la realización de la prueba diagnóstica diseñada en geometría (ver anexo 3), que mostró que a los estudiantes de grado 11 les cuesta identificar las figuras geométricas, no saben aplicar teoremas y no reconocen propiedades, nunca han escuchado de un proceso deductivo e inductivo y no saben lo que es una demostración matemática. Pero, la Institución también desea promover nuevamente

la inclusión de la geometría y darle desde el plan de área la importancia que esta merece, con el fin de mejorar no sólo los procesos de enseñanza sino también los resultados de las pruebas de estado que han estado en nivel medio desde hace varios años y es meta de la institución mejorar dicho aspecto.

2.2. Justificación.

Hasta este punto se ha mencionado mucho el razonamiento deductivo debido a su importancia en la actividad demostrativa en las matemáticas, no obstante, la enseñanza de la demostración matemática a partir de este tipo de razonamiento ha tenido una serie de obstáculos como ya se ha mencionado que la han alejado de la matemática escolar, y lo que se desea a partir de este proyecto es incentivar a maestros en ejercicio y maestros en formación a llevar de nuevo la actividad demostrativa a las aulas de clase, entonces sí solo utilizando el proceso deductivo se ha llegado a fracasos y frustraciones, se puede introducir un primer interrogante que ya ha sido abordado de una u otra manera en otras investigaciones, llegando a conclusiones que servirán de gran apoyo para este trabajo, esta pregunta sería, ¿al incluir los procesos inductivos y deductivos en la enseñanza de la demostración matemática esta será mejor aprendida por parte de los estudiantes?

Además, si miramos desde una perspectiva sociocultural, que une el quehacer matemático con las actividades cotidianas de los seres humanos, existen investigaciones que se centran en caracterizar el razonamiento geométrico, pero desde un panorama más amplio que aquel que ve el razonamiento deductivo como el único razonamiento correcto y válido Hershkowitz (1998) Duval (1998) (citados por Samper el al., 2003). Y este proyecto se une a esta directriz que desea que el aprendizaje escolar y el quehacer cotidiano confluyan en un mismo propósito para beneficio de la comunidad académica, de los estudiantes y la sociedad.

En algunas de las investigaciones sobre la demostración geométrica, el modelo de aprendizaje de la geometría diseñado por los esposos Van Hiele ha sido tema de discusión y de intervención por parte de algunos de estos teóricos, pues Dina y Pierre Van Hiele crearon un modelo basado en unos niveles de pensamiento nombrados comúnmente del 0 al 4, siendo el 0 el primero en desarrollar y el 4 el último, y aunque fue diseñado en los años cincuenta aún se conserva su estructura y sus contenidos para la realización de currículos y para la inclusión de la enseñanza de la geometría en las aulas de clase. Recordando estos niveles, serían entonces: El nivel 0 como la visualización o reconocimiento, el nivel 1 análisis, el nivel 2 ordenación o clasificación, el nivel 3 la deducción formal y por último el nivel 4 que se conoce como el rigor.

Josep Fortuny (1988) centró parte de su investigación sobre estos niveles de razonamiento diseñados por los esposos Van Hiele, y su investigación arrojó como resultado dos características importantes: en primer lugar la importancia de reconocer que la transición de un nivel a otro puede ser lento o sea largo en el tiempo lo cual es observable y evaluable, y en segundo lugar, que la estructura jerárquica de estos niveles es importante y se debe de asumir, sin embargo, siempre es necesario reconocer la realidad escolar en la que se interviene pues es posible que se comience a desarrollar un nivel de razonamiento antes que el anterior este completamente desarrollado.

Lo anterior permite y brinda la alternativa de incluir razonamientos inductivos y deductivos dentro del aula de clase. Comúnmente se escucha entre maestros su negativa por la inclusión de la actividad demostrativa en las aulas de clase, argumentando que si los estudiantes no reconocen las figuras geométricas mucho menos podrán desarrollar razonamientos que les abra el campo a la demostración geométrica. Los resultados de Fortuny (1988) muestran el error que se comete con estos postulados y brinda también la oportunidad de incursionar en este campo de la demostración dentro de las aulas de clase (Fortuny, 2001)

Hablando propiamente de los razonamientos, es importante diferenciar tanto el razonamiento deductivo, de lo que se conoce como demostración matemática, y cabe resaltar para esta distinción lo que dice Ponce de León (2007) cuando resalta que la demostración se convierte en un texto matemático con una organización caracterizada por el razonamiento deductivo, conformado por dos partes, una organización de pasos en primera instancia y seguidamente la continuidad de esos pasos por sustitución, para así llegar a la tesis deseada. Esto simplemente muestra que la demostración necesita de razonamientos deductivos, razonamientos que la historia de la educación matemática ha mostrado han sido difíciles para adquirir por parte de los estudiantes y que ha desencadenado en el abandono en la matemática escolar de la demostración matemática.

Lo que ahora se pretende es buscar alternativas a partir de otros tipos de razonamiento igualmente válidos que nos permitan empezar a incluir de nuevo en el aula escolar de la educación media y básica, la actividad matemática de la demostración, sin perder de mira la meta del razonamiento deductivo dejándolo siempre como el principal objetivo.

El razonamiento matemático tiene una característica importante y es la capacidad de llegar a propiedades generales, o conclusiones a través de la observación, el análisis y la verificación de algunos casos particulares a esto se le puede decir generalización. El razonamiento inductivo, es una estupenda alternativa para este propósito, esta forma de razonamiento se apropia de esta característica importante de generalización y permite demostrar propiedades aritméticas o geométricas; la inducción puede convertirse en una fuente importante para el descubrimiento y la apropiación de conceptos cuando se utiliza como una forma de procesamiento educativo (Alsina, Burgués & Fortuny, 1989).

El razonamiento inductivo específicamente en geometría, como la materia prima de este trabajo, puede dar al maestro en sus procesos de enseñanza-aprendizaje una serie de usos que son y serán de gran utilidad para los estudiantes, estos usos son: *inducción para contar, inducción para verificar, inducción sobre conceptos y también inducción sobre construcciones* (Alsina, Burgués & Fortuny, 1989), esto con el fin de aprovechar al máximo las bondades que el razonamiento inductivo puede brindar al área geométrica.

Hasta aquí, se ha mencionado como los razonamientos tanto inductivos como deductivos son el cuerpo de la actividad demostrativa, y esto permite empezar a introducir conceptos que grandes teóricos han incluido en dicha actividad matemática y que serán base para los objetivos de este proyecto que incluye estos tipos de razonamientos, uno de ellos es la *demostración* *empírica* también conocida como demostración pragmática, la primera enunciada por Alan Bell (1999,2000), siendo este tal vez el primero en ir más allá de las consideraciones rigurosas de las demostraciones formales como único medio de aceptado de demostración, y la segunda por Nicolás Balacheff, el cual buscó dar un paso más delante de lo que Bell había propuesto (Gutiérrez, 2001).

Refiriéndonos a la demostración pragmática (empírica), inicialmente podemos decir que es aquella que se caracteriza por utilizar ejemplos como elementos de convicción, a diferencia de la demostración deductiva, que es aquella que utiliza elementos deductivos y abstractos para conectar una hipótesis y una tesis. Gutiérrez (2001) y su grupo, a partir de estos autores mencionados y algunos otros, buscaron darle más cuerpo a la actividad demostrativa desde razonamientos inductivos y desde razonamientos deductivos adoptando igualmente los nombres de demostración empírica o pragmática como aquellas que se basan de procesos netamente inductivos pero buscando aportar nuevas ideas que complementaran y potencializaran más lo que dichos autores realizaron.

Este proyecto pretende utilizar este tipo de demostración como aquel motor que permita revivir la actividad demostrativa en la educación matemática en las instituciones educativas de Colombia, propiamente en la Institución Educativa Lola González como facilitadora en este caso para la realización de dicho proyecto. No obstante, este trabajo reconoce que es a partir de los procesos deductivos de la geometría discursiva de donde se adquiere la validación para la demostración; por eso es importante siempre buscar ese paso de aquella geometría de observación y de ejemplos a la geometría discursiva.

También es de resaltar varios puntos que permiten adicional a lo ya expuesto, argumentar por qué es importante abordar la actividad demostrativa en la educación matemática; en primera instancia reconocer que para incluir los procesos demostrativos es necesario que estos se hagan desde el área de la geometría, ya que esto facilita algunos tipos de representación semiótica (registro figural, la lengua natural y el lenguaje simbólico), la geometría tiene la facultad de permitir el paso de un registro a otro, estos procesos cognitivos se hacen necesarios a la hora de incluir la demostración, Ponce de León (citado por Lourido & Merlan; 2012).

Además, no se debe de pasar por alto que un objetivo de la enseñanza de las matemáticas es inducir un cambio en las concepciones de demostración de los estudiantes (Gutiérrez, 2001) ya que el fracaso que se ha creado en la historia en su enseñanza ha tenido repercusiones en el presente, en la exclusión de la temática de los currículos académicos de la educación media.

Sin olvidar, que la concepción de la demostración desde la Matemática misma, no es conveniente eliminarla de la formación matemática de los alumnos (Larios, 2003), pues su función no es única y es quitarle a los estudiantes una posibilidad de desarrollo cognitivo. En este orden de ideas, Crespo (2005) señala que “El concepto de demostración es uno de los conceptos matemáticos centrales en la matemática y por lo tanto es indispensable su transmisión a los alumnos a partir de la escuela media” (p. 23) aunque ella misma resalte que no siempre se realiza de manera satisfactoria.

Por lo tanto, como el propósito a cumplir de este trabajo busca no sólo volver a incentivar la importancia de la geometría en los currículos y planes de área de las instituciones, si no también incluir la actividad demostrativa desde esta misma área como alternativa para los procesos de enseñanza y aprendizaje que contribuyan al desarrollo de los procesos de razonamiento de los estudiantes y brinden a estos autonomía y competencias en sus actividades cotidianas presentes y futuras, la Institución Educativa Lola Gonzales brinda los espacios físicos y humanos para la realización de este trabajo con los alumnos de grado 11 que participaron de la prueba diagnóstica (ver anexo 3) la cual arrojó resultados negativos en el conocimiento geométrico de los estudiantes y que se convierten en la oportunidad para la ejecución de este trabajo.

Ahora bien, la propuesta didáctica que se expondrá más adelante y que se fundamenta desde todo lo anterior quiere dar respuesta al siguiente interrogante:

¿Cómo diseñar una unidad didáctica para la enseñanza de la demostración empírica en el área de la geometría de tal manera que los estudiantes de grado once de la I.E Lola González superen sus dificultades en la comprensión y aplicación de teoremas geométricos?

2.3. Objetivos de Investigación.

2.3.1. Objetivo General. Diseñar una unidad didáctica para la enseñanza de la demostración geométrica a partir de la demostración empírica, para los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Lola González.

2.3.2. Objetivos Específicos.

- Reconfigurar el concepto de la demostración empírica en el diseño de una unidad didáctica.
- Diseñar actividades que potencialicen el razonamiento matemático integrando la geometría euclidiana y la geometría analítica en la Institución Educativa Lola González.
- Implementar estrategias relacionadas con la demostración empírica en la geometría de grado 11 en la Institución Educativa Lola González.
- Evaluar la puesta en escena de la unidad didáctica en la enseñanza de la demostración en geometría con los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Lola González.

3. MARCO REFERENCIAL

El siguiente marco referencial se divide en tres campos importantes que se desarrollaran a continuación, un marco contextual, un marco legal y un marco teórico.

3.1. Marco Contextual.

La presente investigación se realizó en la Institución Educativa Lola González, ubicada en la ciudad de Medellín capital del departamento de Antioquia, uno de los 32 departamentos de Colombia.

Medellín, es una de las ciudades más grandes y pobladas del país, ubicada en el Valle de Aburrá, rodeada de hermosas montañas, y es reconocida como la ciudad de la eterna primavera, en los últimos años se ha posicionado como una de las ciudades más innovadoras del mundo y con mayor proyección tecnológica, social y educativa del país, sus sistema de transporte es el mejor del país, siendo esta ciudad la única con metro en toda la nación y con sus sistemas integrados y articulados de transporte permite la comunicación con los municipios fronterizos con excelente progreso como Bello, Envigado, Itagüí, Sabaneta, entre otros. En la alcaldía de Sergio Fajardo (2004-2007) se promovió a Medellín con el fin de que fuera una de las ciudades más educadas, incentivando fuertemente el componente educativo, recreativo y deportivo en las diferentes comunas.

En la Actualidad la ciudad de Medellín cuenta con diferentes parques que promueven la ciencia, el cuidado del medio ambiente y de los recursos naturales y físicos que la conforman, los cuales tienen convenio con los establecimientos educativos, como fundaciones, instituciones educativas, y otros grupos de educación informal para coaccionar en un mismo sentir a todos los habitantes en el progreso social, económico y educativo.

La Institución Educativa Lola González, de carácter público-oficial, está ubicada en el occidente de Medellín, entre las comunas 12 y 13 con estrados desde el 1 hasta el 4, siendo el estrato 2 y 3 por la ubicación geográfica de la institución los más comunes en los estudiantes. Tiene 50 años de existencia, por casi 40 años fue solo femenino, pero de acuerdo a las políticas educativas del estado, se permitió a partir del año 2007 el ingreso del género masculino a la institución con la particularidad en el presente de tener un grupo de grado 11 con más hombres que mujeres. Sin embargo son las mujeres las que tienen mayor presencia aún.

La institución se ha destacado a nivel departamental y nacional en diferentes disciplinas como la danza y el baile; es altamente reconocida como una institución que promueve el deporte, de dicha institución han salido deportistas que han conformado las selecciones nacionales y departamentales de voleibol y baloncesto. A nivel comunitario se han hecho presentes con la red de Noviolencia, diseñada por una de sus maestras en contra de las situaciones difíciles que ha vivido la comuna 13 en términos de violencia, pandillas y conflictos armados con grupos al margen de la ley.

En términos educativos es una institución que promueve la educación académica y técnica, entre sus técnicas está la de diseño gráfico y la administración. Su modelo pedagógico es llamado potencialista, pues busca reconocer en sus estudiantes sus habilidades en las diferentes áreas del ser humano y ayudar a que potencialicen dicha habilidad o saber para su progreso personal y que al mismo tiempo favorezca a la institución.

El área de matemáticas no es el más fuerte de la institución, pero en los últimos años ha sido mejor la respuesta en las pruebas de estado, manteniendo un nivel medio que pronto llegara a superior. Su preocupación continua por nivelar el área ha llevado a que los maestros revisen el plan de área y nivelen de la mejor manera los planes de enseñanza de esta materia, volviendo a darle un lugar importante a la enseñanza de la geometría que llego a tener incluso su propia aula-taller pero que desapareció poco a poco.

Arquitectónicamente, está diseñada de la siguiente manera, dos pisos, 20 aulas de clase, posee un aula múltiple, una biblioteca, dos salas de informática y dos coliseos, en uno de ellos una cancha de microfútbol y en el otro una cancha diseñada para baloncesto y voleibol, y además posee una buena cantidad de zona verde, y una amplia biblioteca.

3.2. Marco Legal.

El siguiente componente del marco referencial es todo lo concerniente al marco legal que sustenta la realización de esta investigación desde la ley general de educación, las prácticas profesionales, los lineamientos curriculares y los estándares básicos en competencias, de acuerdo a esto tenemos lo siguiente:

Partiendo de la ley General de Educación, ley 115 de febrero 8 de 1994, nos encontramos en el título 2 de la estructura del servicio educativo en el capítulo 1 de la educación formal, el artículo 29 de la sección cuarta concerniente a la educación media donde se evidencia la puesta en escena del estudiante como aquel que puede decidir su profundización en cualquier área de conocimiento de acuerdo con sus propios intereses entre esas las ciencias, por lo tanto es deber de las instituciones la enseñanza de la geometría como parte de la ciencia de la matemática, y darle la oportunidad a los estudiantes de ver dicha rama como un posible camino a profundizar. Y el artículo 30 literal b muestra que uno de los objetivos fundamentales de la educación es profundizar en las ciencias.

De acuerdo también con la práctica pedagógica profesional los maestros en formación, con base en el acuerdo 148 de abril del 2004, del reglamento interno y de funcionamiento de la práctica pedagógica en los programas de pregrado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, en el artículo 42 del capítulo 6 literal b, se les da la oportunidad de fortalecer su formación pedagógica y el saber específico que asegure el excelente desarrollo de su profesión. Por lo tanto, es totalmente viable desarrollar la presente investigación en el área de la matemática y la geometría.

Acudiendo finalmente a lo concerniente con el Ministerio de Educación Nacional (MEN), se atiende en este caso a los diferentes cuerpos teóricos que conforman la educación en nuestro país como los lineamientos curriculares de 1998 y los estándares básicos en competencias de 2006 en este caso en el área de matemáticas para visualizar más a fondo la posibilidad de la realización de este trabajo.

Los lineamientos curriculares en matemáticas (1998) establecen los conocimientos básicos en el área de matemáticas. Específicamente la presente investigación se apropia del siguiente conocimiento que es puesto en escena, aunque todos estén inmersos el más evidente es el pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

3.2.1. Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Encontramos en este ítem de los lineamientos curriculares que Gardner establece el pensamiento espacial como algo fundamental del pensamiento científico fundamental en la resolución de problemas, (Gardner, citado por Lineamientos curriculares en matemática, 1998, p.37) por lo tanto:

> En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos,

> sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. Lineamientos curriculares en matemática (2008, p.37)

Lo que permite y sustenta la posibilidad de desarrollar la actividad demostrativa en el área de la geometría ya que esta necesita de representaciones mentales constantemente. Además en el desarrollo del pensamiento geométrico, los lineamientos curriculares señalan el modelo Van Hiele como una teoría que sustenta los niveles de desarrollo de pensamiento geométrico reconociendo aún la oportunidad de ser críticos respecto a ellos, no tomándolos como un fin sino como una oportunidad de investigar y explorar (Lineamientos curriculares en matemática, 2008, p.38-39). Los cinco niveles son visualización, análisis, ordenamiento y clasificación, razonamiento deductivo y rigor deductivo.

Cabe resaltar que este trabajo busca moverse en los primeros cuatro niveles desde los diferentes tipos de razonamiento y el componente teórico de las familias de la demostración empírica.

Acudiendo finalmente a los Estándares básicos de competencias en matemáticas, nos encontremos con que el Ministerio de Educación Nacional desea potenciar en los estudiantes lo que llaman los cincos procesos generales de la educación matemática: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. (MEN, 2006, p.51).

El razonamiento matemático es fundamental en la actividad demostrativa, tanto es así que el MEN desde los estándares básicos de competencias en matemáticas establece que en los grados superiores el razonamiento empieza a cobrar una independencia de los modelos hasta llegar a crear cadenas argumentativas que permiten validar o invalidar sus conjeturas aunque en ocasiones se tienen que apoyar de dibujos, materiales y otros artefactos, como lo sustenta la teoría de la demostración empírica que se desarrollara luego, en la cual el ejemplo es el mayor elemento de convicción matemática.

3.2.2. Algunos estándares curriculares relacionados son:

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

3.3 .Marco Teórico.

3.3.1. Componente disciplinar.

3.3.1.1. El teorema de Pitágoras impulsor de la demostración. Uno de los teoremas geométricos más conocidos y aplicados en la educación media es el "Teorema de Pitágoras", tal vez este permitió dar un salto intelectual de la especulación empírica a los dominios del razonamiento deductivo. Este teorema tal vez pudo estar en el origen de la demostración, lo cual diferencia a la matemática de otras ciencias, y posiblemente la prueba del teorema de Pitágoras sea la primera demostración matemática de la historia (González, 2008).

La demostración se puede entender como el elemento esencial en el "tránsito del mito al logos" con un lugar importante en la cultura griega, esta da un paso adelante a la argumentación de la retórica en la cual los griegos eran expertos, pues estos sostenían que es posible exponer lo falso contra lo verdadero a través de la persuasión. La demostración por lo tanto convence por la conexión argumental que no admite controversias alcanzando lo legítimo, esto siempre y cuando

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

no se contradigan las leyes de la lógica. Por eso se dice que a partir de Pitágoras la matemática es considerada como la fuente primaria de la verdad objetiva. Y es por el auge de este teorema que se dio carta abierta en el mundo griego a la geometría racional, y al surgimiento de la ciencia especulativa y el pensamiento deductivo.

De lo anterior se sustenta que fueron Pitágoras y los pitagóricos los primeros que establecieron en la matemática la exigencia de una rigurosidad lógica deductiva. Es pertinente en este caso recordar los dos tipos de miembros de la comunidad primitiva de los

pitagóricos, como lo eran los acusmáticos y los matemáticos, estos últimos fueron los que vieron la necesidad de trascender de lo que se conocía como la práctica empírica sobre algunos casos particulares y poder desarrollar métodos deductivos para poder demostrar en forma general; sin olvidar que la manera de comprobación geométrico-emperica exclusivamente inductiva de los acusmáticos logra producir resultados visualmente palmarios en muchos casos de los problemas aritméticos, pero no se puede discutir que hay teoremas hablando propiamente del Teorema de Pitágoras que necesitan de una demostración rigurosa o deductiva para su sustentación para el cual el método inductivo se ve limitado.

La gran matemática griega se desarrolló por lo tanto en tres estadios y a través de tres personajes históricos, Pitágoras, Platón y Euclides, el primero como fundador de la tradición matemática griega, el segundo se caracterizó por su actividad que le confirió un estatuto gnoseológico y ontológico a la geometría griega y con él se potenciaron los estudios geométricos, y el último, Euclides, como aquel sistematizador de todos los conocimientos precedentes, Su obra, "*Los Elementos"*, se convierte en modelo adecuado de exposición y demostración en Matemáticas.

Se puede decir por lo tanto que la demostración guío a los pitagóricos, y el teorema de Pitágoras fue una completa ilustración de esto, "su universalidad y la demostración geométrica son las hadas que vemos en torno a la cuna de la geometría griega, del milagro griego en matemática y del espíritu científico que ha llegado hasta nosotros" Rey (citado por González, 2008).

3.3.1.2. La actividad demostrativa en los contextos institucionales. Al hablar de demostración matemática, estamos hablando implícitamente en la mayoría de casos de procesos complejos para los estudiantes, esto si nos basáramos en la historia del proceso de enseñanza-aprendizaje que se ha dado en las diferentes instituciones o contextos donde la actividad demostrativa está presente. Esta situación ha sido constatada por el bajo rendimiento de los estudiantes a la hora de enfrentarse con esta actividad matemática. Por lo tanto como lo enuncian Godino & Recio (2001) es importante conocer las diferentes nociones de demostración en los diferentes contextos institucionales y también su relación con otros términos que tienden a confundirse y que están ligados a la demostración como lo son la *explicación*, la *argumentación, el razonamiento o la verificación*.

Tanto la *explicación*, como la *argumentación*, e incluso la *prueba* se podrían entender con una idea común entre ellas y es la de validar o justificar alguna afirmación, pero estas cuando se ponen en diferentes situaciones, pueden ser de hechos diferentes, y estas diferencias en las practicas argumentativas indican por lo tanto sentidos distintos del concepto de demostración.

Teóricos como Balacheff (1987) y Duval (1999) tienen entre sus conceptos ideas similares pero al mismo tiempo difieren en otras de sus ideas. Balacheff (1987), por ejemplo, habla de la explicación como una idea primitiva de la cual se derivan la prueba y la demostración, y expone que para que una explicación se convierta en una prueba es necesario que alguien la reconozca como razón suficiente a partir de un marco discursivo. Duval (1999) por otro lado, distingue entre explicación y argumentación; argumentación para él trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, y la explicación tiene como propósito describir un fenómeno o comportamiento. Pero ambos autores se encuentran armónicamente cuando usan el término de demostración como la secuencia de enunciados organizados con unas reglas establecidas.

Por eso para poder hablar de demostración es necesario conocer el sentido o modelo ontosemiótico adoptado en cada contexto debido a que las diferencias en estas situaciones y prácticas argumentativas indican sentidos distintos del concepto de *demostración.*

Hablando propiamente desde una mirada cultural, Wilder (1981) resalta que "no debemos olvidar que lo que constituye una "demostración" varía de una cultura a otra, así como de una época a otra" Wilder p. 346 (Citado por Godino & Recio, 2001)

Godino & Recio (2001), de acuerdo con la idea anterior de Wilder, describen una diversidad de demostraciones de acuerdo a lo que ellos llaman un tipo de marco institucional o contexto, cada uno con una determinada problemática, dichos contextos o marcos constitucionales los identifican ellos de la siguiente manera: *"lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, vida cotidiana, ciencias experimentales y enseñanza de las matemáticas elementales (incluyendo aquí los niveles primarios, secundarios y universitarios)".* Su estudio sobre estos cuatro marcos instituciones les permitieron identificar que no existe una sola teoría o práctica estrictamente establecida para la actividad de la demostración matemática. Hablando un poco sobre estos tipos de marco teóricos tenemos lo siguiente:

En la *Lógica y fundamento de las matemáticas,* Godino & Recio destacan una serie de características sobre la noción de demostración, ligan esta actividad con la deducción y los sistemas axiomáticos (o formales), basados en que el argumento deductivo si no es el único vendría hacer el principal objeto de la lógica formal Garrido 1978 (citado por Godino & Recio,). En este marco institucional el objeto "demostración" se puede enunciar que emerge de las prácticas argumentativas analíticas formales, sin embargo no se puede pasar por alto que cuando se aceptan axiomas o postulados en matemáticas las argumentaciones intrínsecamente inductivas también están presentes. Para ayudar a defender las palaras anteriores nos referimos en este caso a las palabras de Poincaré (1902) que escribe lo siguiente:

> ¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo como ordinariamente se cree? Un análisis profundo nos muestra que no es así; que participa en una cierta medida de la naturaleza del razonamiento inductivo, y que por eso es fecundo, Poincaré (1902, p. 15) (Citado por Godino & Recio 2001).

En la *matemática profesional* como el segundo marco institucional mencionado, el algoritmo se hace presente en el concepto de demostración, pues esta se convierte en una gramática formal donde los software hacen el trabajo importante de demostrar, debido a la incapacidad de los humanos por hacer ciertas demostraciones complejas, además, "pueden requerir tiempo, paciencia e interés más allá de la capacidad de cualquier matemático humano. Ciertamente, pueden exceder la capacidad de cualquier sistema de computación disponible o previsible" Hersh (1993, p. 390) (citado por Godino & Recio). Es importante destacar que en este campo las demostraciones son deductivas pero no formales y se expresan mediante un lenguaje ordinario y el uso de expresiones simbólicas. En los últimos años han aparecido demostraciones matemáticas que están desafiando la demostración deductiva, basadas en comprobaciones experimentales desde uso de los ordenadores Hanna (1995, p. 43) (citado por Godino & Recio, 2001). Esto trae consigo para la demostración otros rasgos distintos ya que al no poder aplicar los métodos de demostración formal de la lógica matemática, esta verdad deducida no queda plenamente garantizada.

En *las ciencias experimentales*, la demostración se basa en prácticas argumentativas ya sean empírico inductivas o analógicas, y a partir de dichas prácticas se busca concluir que lo que es verdadero para ciertos individuos de una clase lo será también para toda lo clase, o también lo que es verdadero algunas veces, en circunstancias semejantes también lo será con cierta probabilidad. Esta no descarta el empleo de argumentaciones deductivas. La validez de estos enunciados de contenido empírico se sostienen de tres cosas importantes, primero que no se puede hablar en términos de absoluto y universal, que su validez va incrementar en la medida que más hechos cumplan con dicho enunciado, y por último llegando el caso que un ejemplo no se cumpla, esto no invalida por completo la afirmación puede solo restringirla (Godino & Recio 2001).

En esta misma línea Godino & Recio (2001) hablan de un tipo de contexto o institución conocido como *la vida cotidiana*, donde la argumentación informal se hace presente, estos argumentos no siempre son verdaderos, debido a que estos se pueden apoyar exclusivamente en valores locales (propios de un lugar exclusivo) perdiendo por ende objetividad. En las inferencias cotidianas este razonamiento informal busca analógicamente la similitud entre dos o más aspectos y así concluir las similitudes en otros aspectos. A la lógica informal se han atribuido algunas características como las siguientes: se aplica en su mayoría de veces a situaciones cotidianas, cuestiones relevantes para el individuo, permite elaborar argumentos y contraargumentos y además valorarlos, es propia del lenguaje ordinario, dinámico, depende del contexto, y se aplica a tareas abiertas, mal definidas y no deductivas (Fernández, Carretero (1995, p.43) citado por Godino & Recio (2001)

Por último, *la demostración en la clase de matemáticas*, que podría ser la que más interesa en este proyecto, tiene varios puntos de interés que el maestro debe conocer a la hora de abordar su enseñanza. En primera instancia es de tener en cuenta que tanto los textos como los currículos de matemáticas en cualquier nivel de enseñanza (secundaria y universitaria) en términos generales, muestran los teoremas matemáticos necesariamente verdaderos y esos argumentos que establecen la verdad, son argumentaciones deductivas informales en el mejor de los casos pero en gran superioridad son argumentaciones no deductivas. La matemática elemental es un cuerpo de conocimientos que la mayoría de las veces no se pone en duda, aceptados previamente por la generalidad de los matemáticos profesionales.

Desde una perspectiva naturalista, Herbst (1998) observó que se pueden tener varios modos de impartir clases de matemáticas en un nivel secundario colocando la actividad demostrativa como eje central y mirando esta como funciona en estas, como se valida en ellas el conocimiento matemático y que fórmulas de negociación se pueden generar entre el profesor y el alumno. Este identificó nueve categorías para validación en el aula efectivamente usadas: “el ejemplo genérico, el ejemplo aislado, los experimentos cruciales, la ostensión como prueba, la justificación pseudomatemática, la analogía y, la metáfora, la simetría u ostensión metafórica, el cálculo simbólico y la prueba oficial”. Herbst (1998) (citado por Godino & Recio, 2001, p.411).

3.3.1.3. Esquemas de la demostración matemática. La actividad demostrativa ha sido un fuerte motivo de investigación para los didactas de la matemática, pues su práctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el marco educativo se ha encontrado con grandes problemas como ya se ha mencionado, debido a esto, dichos investigadores han creado y diseñado diferentes "esquemas de demostración" con el fin de darle una estructura a dicha actividad de acuerdo con las diferentes componentes que están inmersos en ella y que permiten por lo tanto dar una clasificación más precisa, hablando propiamente de tipos de razonamiento (inductivo, deductivo), o de grados de formalidad en términos de lo lógico-axiomático.

Dichos esquemas son reunidos y explicados por Gutiérrez (2001) y su grupo de investigación; estos después de describirlos se encuentran con vacíos en cada uno de los esquemas y describen la importancia de incluir estos marcos teóricos basados en una misma temática que es la demostración en uno nuevo, debido a que estos se encuentran incompletos, pero que al unirlos se pueden complementar de una manera coherente y acertada en ánimo de una mejor investigación. Por eso, estos a partir de las ideas planteadas de Alan Bell (1976) como aquel primer teórico que fue más allá de la demostración como un tema puramente formal y deductivo, además de Nicolás Balacheff (1988) y de Harel & Sowder (1998), que son quienes más aportan a este nuevo modelo sobre la demostración matemática, desarrollan dicho esquema con el fin de mejorar la comprensión y la clasificación de la actividad demostrativa.

Enunciado sus diferentes esquemas a partir de la investigación de Gutiérrez (2001), se encuentra que Bell (1976) desarrolló dos tipos de demostraciones, las empíricas basadas en ejemplos como elementos de convicción y las deductivas basadas en procesos lógicos que conectan datos (hipótesis y tesis). Balacheff (1998) da un paso más amplio en su tesis doctoral hablando de demostraciones pragmáticas basadas en manipulaciones y ejemplos concretos de las cuales se desprende el empirismo naif, el empirismo crucial y el ejemplo genérico y las demostraciones conceptuales subdividas en el experimento mental y el cálculo simbólico. Harel & Sowder (1998) hablan por su parte de tres categorías de esquemas de demostración, en primer lugar los de convicción externa que incluyen los autoritarios, los rituales y los simbólicos; en segundo lugar los empíricos en perceptivos e inductivos y por último los analíticos divididos en transformativos y axiomáticos.

Por lo tanto, Gutiérrez (2001) y su grupo de investigación utilizan dichos esquemas, los unen y desarrollan su propio modelo que se describe de la siguiente manera:

Al igual que los anteriores investigadores este nuevo esquema tiene dos grandes categorías de demostraciones, las primeras serían las demostraciones empíricas, que es la principal fuente de este trabajo y las demostraciones deductivas que se anhela que a partir de este trabajo el acceso a ellas sea de una manera más fácil y acertada.

Las demostraciones empíricas son aquellas donde la verificación de propiedades se da a través de ejemplos como los elementos de convicción, estas demostraciones están conformadas por tres familias de demostraciones empíricas, estas se diferencias en la forma en que se seleccionan los ejemplos y en la forma en que se usan dichos ejemplos que fueron seleccionados para la actividad demostrativa.

La primera familia es el *Empirismo Naïf* donde los estudiantes seleccionan ejemplos arbitrariamente sin ningún criterio específico. Acá podemos encontrar que se puede verificar la propiedad desde la percepción o sea de una manera táctil o visual y en otros ejemplos se verificara observando los elementos matemáticos del ejemplo, esto sería más desde la inducción. La segunda familia es el *Experimento Crucial*, en esta ocasión los estudiantes son conscientes de la importancia de generalizar y para eso se debe seleccionar minuciosamente el ejemplo "lo menos particular posible" (Balacheff, 1987 citado por Gutiérrez, 2001), la idea entonces sería que si el enunciado es correcto para el ejemplo escogido, lo será siempre, teniendo presente que éste no deja de tener carácter de un ejemplo determinado. Estos experimentos cruciales pueden ser ejemplificación cuando se muestra solo la existencia del ejemplo crucial, constructivo cuando se incurre en la forma en que se obtiene el ejemplo, analítico cuando se basa en las propiedades matemáticas que se observaron empíricamente, y por último intelectual, cuando hay una separación de la observación empírica y se basa en propiedades matemáticas aceptadas y relaciones deductivas entre elementos del ejemplo. La tercera familia sería el ejemplo genérico donde los estudiantes entienden la necesidad de generalizar, seleccionan un ejemplo y a este lo determinan como un representante de su clase. Encontramos en esta demostración razonamientos abstractos dirigidos a propiedades y elementos de toda la clase obtenidos después de operar y transformar a través del ejemplo. “Si bien en este caso las demostraciones no se limitan a reflejar la actividad empírica, sino que la transforman en referencias a propiedades abstractas de la clase del ejemplo y razonamientos deductivos que las ligan” (Gutiérrez, 2001 p.90).

Las demostraciones deductivas son donde la formalidad y lo axiomático son su componente principal, esta está dividida además en dos familias, la primera familia de estas demostraciones es llamada e*xperimento mental*, la demostración en este caso es deductiva y abstracta pero se organiza también con la ayuda de un ejemplo; y además se distingue de dos experimentos mentales, los transformativos esta demostración busca transformar un enunciado inicial o conjetura en otro equivalente y los axiomáticos donde hay definida una cadena de implicaciones lógicas desde definiciones, axiomas o propiedades previamente aceptadas. Y la segunda familia seria la *Demostración formal,* en la cual también se hacen presentes las cadenas de deducciones lógicas formales pero no hay soporte de ejemplos y es usual para los matemáticos profesionales también es de dos tipos transformativos y estructurales como en el experimento mental.

3.3.2. Componente didáctico.

3.3.2.1. Acercamiento didáctico a la demostración matemática. Muchos matemáticos ven la demostración como una actividad que solo admite un razonamiento abstracto y axiomático o sea una demostración deductiva y formalizada, en palabras de Dieudonné (1987, p 206) encontramos que "no puede haber demostración rigurosa excepto en el contexto de una teoría axiomática", situación que ha traído repercusiones en la comunidad educativa a cerca de esta actividad matemática.

En resultados de investigaciones en las últimas décadas se mostró como los estudiantes a la hora de resolver demostraciones desde un razonamiento estrictamente formal y se encuentran en problemas por no saber cómo proceder en sus argumentos y los resultados negativos son prueba de esto. Por lo tanto debido a las dificultades que tienen los estudiantes entorno a la actividad demostrativa, Martínez (2001, p.30) pone como ejemplo los resultados de las siguientes investigaciones que permiten ilustrar mejor esta problemática y afirman como la demostración empírica tiene tanta importancia en los procesos de validación:

Fischbein (1982, p. 16) hizo una investigación con 400 estudiantes de secundaria de cómo podrían diferenciar entre la demostración empírica y la formal y encontró que solo el 14,5% pudieron demostrar de acuerdo con un razonamiento riguroso y lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales *"sólo el 14,5% fueron consistentes hasta el final (es decir, no sintieron la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas)".*

Senk (1985), en un estudio realizado con 1520 estudiantes que habían recibido enseñanza en la actividad demostrativa en el área de geometría en 74 clases, de 11 escuelas distintas en 5 de estados de los EEUU. Se encontró con que "*…aproximadamente el 30% de los estudiantes que* *habían seguido un curso año completo con la enseñanza de la demostración alcanzaron un 75% de nivel de maestría en demostraciones escritas”*

Martín & Harel (1989, p.41), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática, encontraron que en una muestra de 101 alumnos de magisterio

“*…más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática valida*”

Recio & Godino, 1996 y Recio, 2000 encontraron que en 429 estudiantes universitarios de su mismo entorno cultural de primer curso en 1994-95, a la hora de realizar sencillas demostraciones formales, que sólo un 32,9% de dichos estudiantes fueron capaces de desarrollar, de modo formal, dos demostraciones, extremadamente simples.

Debido a esto, Godino & Recio sostienen que es conveniente revisar el carácter formal atribuido a la demostración matemática. Pero no sólo en el ámbito educativo, sino también en el matemático propiamente dicho.

A la hora de hablar de modos de estructurar el aprendizaje en geometría que es la madre de esta investigación, y que además sea coherente con la construcción del espacio se acomoda perfectamente a lo que propone Van Hiele en su modelo, estos buscan estratificar en niveles el aprendizaje geométrico y que permita categorizar los diferentes grados de representación en el espacio. Lo que significa que si tenemos un nivel *n-1* en este nivel el estudiante podría estudiar ciertas propiedades de objetos geométricos, podría explicar alguna de ellas, pero no todas debido a que habrá otras relaciones que estarán en un nivel siguiente *n* donde se supone que ya se han adquirido los conocimientos del nivel anterior y así se aumentaría el grado de comprensión de conocimientos. Lo que quiere decir que los objetos del nivel *n* son extensiones del nivel anterior *n-1*. Es acá donde el aporte Van Hiele se hace presente y es un aporte significativo en la enseñanza de la geometría descubriendo así obstáculos con lo cual estudiantes se estaban encontrando en el aula de clase, esto

mostro que los estudiantes van a tender al fracaso si deben de resolver algún problema del nivel *n* mientras aún están en el nivel anterior *n-1* y por ende habrá un fracaso en su enseñanza y no habrá aprendizaje (Alsina et al., 1997).

Pero también Fortuny (1988) y el grupo de investigación de Gutiérrez (2001), encuentran que es posible que se desarrollen conocimientos geométricos en un nivel *n* aunque todo el nivel *n-1* no se haya desarrollado completamente (Gutiérrez, 2001 p.87).

3.3.2.2. Modelo Van Hiele. Estos niveles empiezan en el nivel cero, donde los individuos perciben las figuras de una manera global, reconocen y hacen figuras copiándolas de otras aún sin diferenciar entre esas figuras. En el nivel uno ya los individuos pueden analizar propiedades y partes de las figuras geométricas pero dichas propiedades se establecen experimentalmente. El nivel dos es el nivel donde los individuos determinan las figuras por sus propiedades, pero aun no pueden razonar y verificar sus observaciones ya que no pueden realizar una secuencia de razonamientos para justiciarlas. El nivel tres, es el nivel donde los individuos desarrollan secuencia de proposiciones para deducir propiedades, pero no se reconoce la necesidad de ser rigurosos con los razonamientos. El nivel cuarto, muestra individuos capacitados para analizar en cierto grado el rigor de varios sistemas deductivos (Alsina et al., 1997).

Estos niveles han sido estudiados por psicólogos soviéticos y han sido validados por sus investigaciones, además muestran que el paso de un nivel a otro no depende de la edad (Alsina et al., 1997).

3.3.3. Componente Metodológico. Para realizar una buena investigación es importante identificar la problemática y el contexto en el cual se desea realizar, para que esta investigación sea lo más acertada posible es vital que tanto la problemática y el contexto se unan buscando una respuesta donde todos los protagonistas se vean beneficiados tanto el investigador como los investigadores.

La metodología de investigación que se viene desarrollando en este caso, es de carácter cualitativo, y está basada en la teoría de la IAP, investigación-acción participativa, más concretamente en la IAE investigación acción educativa, un método que tiene como fin buscar y adquirir resultados útiles que permitan mejorar algunas situaciones colectivas, cuya característica principal es la participación de los colectivos que son investigados con el fin de que estos pasen de ser objetos de estudio a sujetos que sean protagonistas de dicha investigación participando continuamente con el proceso investigador.

El método de IAE está conformado por tres partes importantes que están totalmente encadenadas, estos tres momentos los conocemos de la siguiente manera, en primera instancia nos encontramos con un tiempo de deconstrucción, seguido por un tiempo de reconstrucción y finalizado por el tercer momento de evaluación (Restrepo, 2002-2004).

Desde una perspectiva socio-crítica el profesor debe despejarse de su mero rol de reproductor de conocimiento para convertirse en un constructor de conocimiento, por lo tanto los docentes pueden y deben buscar en su quehacer pedagógico elaborar teoría a partir de su investigación educativa y con esto ayudara a romper lo que se ha planteado a través de la historia donde se ha sostenido que el desarrollo teórico es para unos (investigadores científicos) y la práctica es para otros (los difusores de conocimiento), por lo tanto, el maestro debe ser un sujeto que también busque investigar, pues así estará más comprometido con el cambio. En esta misma línea, la metodología de investigación que más se acomoda a dicha visión es la está de investigación-acción educativa, ya que en el ámbito escolar tanto maestros como estudiantes buscan como objeto mejorar la calidad de la acción, a través del diagnóstico de un problema, de una planificación, de una acción, de una reflexión y por último de la evaluación del resultado que arrojo dicha acción. Kemmis & Mctarggart (1992); Elliot (1996) (citado por Godino, 2010).

Hablando propiamente de los tres momentos que plantea Elliot (2000), Restrepo (2002-2004), Bausela (2004), planteados como deconstrucción, reconstrucción y evaluación que son la base de la investigación acción educativa, busca en primera instancia ayudar al docente en su práctica, en su forma de entenderla, en busca de su continua transformación y así sea mejor su comprensión. Con la participación activa no solo del maestro sino también de sus estudiantes, se desea que se haga presente los análisis críticos y reflexivos de todos los participantes.

A partir por lo tanto de esa reflexión y análisis continuo en los diferentes momentos de la intervención educativa las tres fases se conforman de los siguientes componentes.

3.3.3.1. Fase de deconstrucción. La primera fase de la investigación, es conocida como la fase del diagnóstico, a partir de observaciones de los procesos en el aula, se identifica problemas e inconsistencias que puedan derivar en una pregunta de investigación y trazar objetivos que permitan dar solución a dicha problemática encontrada. Pero se hace necesario para esto caracterizar el contexto educativo, incluyendo todos los participantes estudiantes, profesores, directivos, padres de familia entre otros y así tener un panorama amplio de las limitaciones y oportunidades que permearan la investigación.

3.3.3.2. Fase de Reconstrucción. Fase crucial y de gran importancia en la investigación, es a partir de los resultados encontrados de la primera fase y de la búsqueda de lograr los objetivos trazados, que en esta fase se busca realizar una transformación en las prácticas educativas, desde diseños de actividades y planes de clase, de realizar diarios de procesos que de una manera cualitativa ayuden a enfocar las mejores estrategias en dicha intervención educativa desde la reflexión docente. Esta fase es crucial porque es el momento de la formulación de un marco teórico y la producción de saberes pedagógicos desde la innovación que parte del quehacer docente.

3.3.3.3. Fase de Evaluación. Esta fase final aunque sigue permeada por la reflexión es más una fase de análisis y de valorar lo realizado en la intervención educativa y lo producido a través de la transformación. Es el momento para sistematizar información, para validar algunos indicadores de efectividad en los procesos de enseñanza-aprendizaje y retroalimentar la propuesta desde las conclusiones encontradas.

3.3.3.4. Las tres Fases puestas en escena en la Institución Educativa. La investigación que se está realizando en la Institución Educativa Lola González con 35 estudiantes de grado 11 a través de método de la IAE en el área de geometría propiamente en la demostración empírica, tuvo los siguientes momentos en cuestión, el primer momento de deconstrucción estuvo caracterizado por la observación directa de los estudiantes que serían participes de todo el proceso de investigación, de realizar diagnósticos, de caracterizar el contexto educativo, y así mismo de conocer las deficiencias o limitaciones, las fortalezas, las oportunidades y las amenazas que pueden poner en peligro el desarrollo óptimo de las clases dentro del aula de clase en este proceso de investigación. El segundo momento que se ejecutó, gracias a lo encontrado en el primer momento, permitió el diseño de actividades y planes de clase que involucren la actividad demostrativa, desde la demostración empírica, con métodos de validación no formales, desde el razonamiento inductivo y encaminadas hacia el desarrollo del pensamiento deductivo, a través de las actividades y los planes de clase se buscara que los objetivos sean cumplidos y respondan a la pregunta de investigación. Dicho momento es el cuerpo de la investigación pues gracias a esta se busca generar conocimiento y formalizar el marco teórico, se produce saber pedagógico y mecanismos de reflexión que serán expuestos a una transposición didáctica (Chevallard, 1998), para que dicho conocimiento llegue a los estudiantes de la mejor manera. El tercer momento tuvo una intervención final de investigación y un prueba final con el fin de visualizar hasta qué punto los estudiantes pudieron superar sus dificultades en la comprensión de teoremas geométricos adicional a esto se realizaron encuestas a profesores y a los mismos estudiantes sobre la intervención pedagógica realizada en la institución que permitan enriquecer los resultados y las conclusiones a presentar en dicho trabajo.

Este método tiene hasta ahora una secuencia que se viene ejecutando, dichos momentos parten de una motivación para cada actividad que muestre a los chicos su aplicación y proximidad a su contexto inmediato, seguido por la orientación del maestro desde una base teórica que permita conducir al estudiante a la consecución del objetivo y reducir la probabilidad de fracaso en la actividad, aunque este siempre podrá estar presente, las siguientes actividades estarán regidas por las tres familias principales de demostración empírica: empirismo naif, experimento crucial y el ejemplo genérico en ese orden respectivamente, que permitirán comprender de una mejor manera teoremas geométricos y conceptos importantes para el desarrollo del pensamiento geométrico, espacial y que favorecerán la capacidad de razonamiento inductivo y deductivo.

La metodología de enseñanza buscará por lo tanto que los estudiantes tengan una participación activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el mejor método que acomoda a este proyecto donde el empirismo y la inducción son importantes es el conocido como *aprendizaje por descubrimiento*, pero aunque la inducción lleva consigo implícitamente el error, la idea es buscar de reducir al máximo dichos errores, y apoyarse fundamentalmente en cuatro pilares dentro de un aula de clase: el alumno, los materiales, el profesor y la evaluación (Domínguez, 1991).

Un investigador del aprendizaje por descubrimiento es Jerome Brunner psicólogo norteamericano sus ideas se han utilizado para el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias, este dice que lo fundamental de la teoría es construir el conocimiento donde el estudiante es un protagonista importante, por ende la finalidad de su propuesta se podría decir que busca que el estudiante aprenda descubriendo y por lo tanto sea un investigador dentro del aula guiado por su maestro.

4. DISEÑO METODOLÓGICO

Buscando por lo tanto poder aportar a partir del desarrollo de la práctica profesional una alternativa o propuesta que ayude e incentive a la profesión docente a mejorar su ejercicio profesional y adicional a esto busque aportar a la educación del país en su desarrollo pedagógico, didáctico y curricular, y teniendo en cuenta los diferentes componentes que intervienen en una investigación educativa, como la que se viene realizando a partir de este trabajo, como lo son la institución educativa pública, en este caso la Institución Educativa Lola González, además de la comunidad donde se encuentra ubicada dicha institución, así como los estudiantes, padres de familia, el cuerpo docente, además del programa de la licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia desde la dirección de prácticas profesionales, y finalmente apoyados de teóricos y de sus teorías expuestas anteriormente, se hace una propuesta a partir de un marco teórico que brinde una alternativa desde una unidad didáctica que permita la reflexión sobre la enseñanza de la geometría, la matemática y uno de sus objetos de estudio importante que la educación matemática busca sea desarrollada en la educación media como lo es la demostración.

Con base en lo anterior, se ha diseñado una metodología de trabajo que busca crear una unidad didáctica que brinde otras alternativas a las diferentes situaciones que han sido obstáculos en la enseñanza de la demostración matemática. Esta alternativa está basada en los tres momentos importantes y necesarios en cualquier investigación de tipo cualitativa propia de este caso, el primer momento es aquel conocido como *deconstrucción*, un segundo de *reconstrucción* y un tercero y último que es el momento de *evaluación* donde se espera que a través de los procesos e intervenciones en el aula de clase supere las dificultades encontradas desde las pruebas diagnósticas. A continuación profundizaremos en cada una de ellas y veremos lo realizado en las diferentes intervenciones.

4.1. Primer Momento. Deconstrucción en busca de una situación problema.

4.1.1. Prueba diagnóstica. Este momento en el cuál se buscó desde un principio conocer el punto de partida de dicha investigación arrojó como fue expuesto en el principio de este trabajo y a través de una prueba diagnóstica (Anexo 4), que la geometría ha perdido fuerza e importancia en los planes de clase de las instituciones educativas, las diferentes actividades curriculares de todas las instituciones han llevado a darle diferentes valores a las asignaturas y una de las perjudicadas en esta adjudicación de valor es la geometría, seguidamente la actividad demostrativa tal parece no tiene lugar en las instituciones educativas, los estudiantes no conocen los métodos de demostración, sus métodos de validación aunque en ocasiones cercanos a las formas correctas son desarrollados sin un enfoque demostrativo, es decir validan situaciones sin saber la importancia de lo que hacen y sin un orden lógico, y pasan por alto estos momentos de lucidez en las aulas de clase, pues tener que abarcar los componentes de los planes de clase, impide la reflexión profunda de los temas desarrollados, y se cae en una enseñanza muy superficial; situación que ha perjudicado la demostración matemática que necesita de reflexión y profundización.

Las preguntas más relevantes de la prueba diagnóstica tenían el fin de conocer el acercamiento que los estudiantes tenían con la actividad demostrativa; así, preguntas como:

"Enuncie con sus propias palabras qué es una demostración", "en un proceso de demostración geométrico, se puede utilizar los métodos: a. inductivo, b. deductivo, c. sintético,

d. todos, e. no sé", "con sus propias palabras, enuncie la diferencia entre semejanza y congruencia de figuras geométricas" tienen el propósito de medir algunos de los estándares básicos de competencias en matemáticas en el componente del pensamiento espacial y geométrico que los estudiantes debían haber visto en grados anteriores.

4.1.2. Caracterización de los estudiantes. Aunque la prueba diagnóstica tuvo resultados lejanos a los conocimientos matemáticos y geométricos que los estudiantes debían tener de acuerdo a su nivel educativo actual, fue evidente a partir de las encuestas a los estudiantes (Anexo 3) el interés por la matemática y el reconocimiento por parte de ellos, de su importancia en la comunidad académica y profesional, lo que inicialmente se pone a favor de la investigación basada en la acción participativa, ya que los estudiantes comprenden que pueden ser agentes de investigación y partícipes no como objetos de estudio solamente sino también como aportantes de conocimiento que brindan al maestro una facilidad en el planteamiento de las diferentes propuestas de trabajo, flexibles a modificaciones y que dan al estudiante la posibilidad de desarrollar diferentes tipos de pensamiento, de aporte crítico y desarrollo de competencias que seguramente llevarán a una mejor lectura de resultados y brindarán conclusiones que seguramente serán de gran ayuda no solo para la Institución Educativa donde se desarrolló dicha investigación sino que también mostrará a otros investigadores del tema un panorama más amplio de lo que acontece con la enseñanza de la demostración matemática en la educación básica de nuestro país.

Algunas de las preguntas más relevantes de la caracterización de los estudiantes fueron: "¿Ha tenido dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y la geometría?, "En la enseñanza de las matemáticas, que materiales y recursos utiliza el profesor", y "¿Qué percepción tienes acerca de las matemáticas? En el próximo capítulo se mostrará un panorama de sus respuestas.

4.1.3. Caracterización de Maestros. Con los maestros de matemáticas de la institución se encontraron diferentes opiniones a partir de las encuestas realizadas (Anexo 2), la mayoría a favor y algunas en contra de la pertinencia de la enseñanza de la demostración matemática en la educación media. Aquellas en contra muestran una clara postura de que el rigor matemático de dicha actividad es muy fuerte para los estudiantes, desconociendo un poco las capacidades de razonamiento de los estos y sus alternativas para verificar hipótesis, en otras palabras contemplan solo la deducción formal como única alternativa de demostración matemática lo que anteriormente exponemos como un desconocimiento de todo lo que puede brindar la teoría de las familias de la demostración empírica y de la potenciación del razonamiento matemático; otros maestros aunque a favor de la enseñanza de esta demostración matemática, dejan claro que es importante los procesos desde grados escolares anteriores para su buen aprendizaje.

Las preguntas más relevantes en este proceso de caracterizar los maestros de matemáticas de la institución son: "¿Considera usted que el componente geométrico ha perdido interés en los contenidos enseñados en la educación secundaria?", "¿Considera viable enseñarle a los estudiantes de educación básica secundaria métodos de demostración matemática de acuerdo a las posibilidades reales que ellos pueden tener y desarrollar"?

4.1.4. Caracterización de la Institución Educativa y revisión plan de área. Por otra parte, otros factores que intervinieron de una manera significativa en este primer momento son los que tienen que ver con el plan de área de matemáticas en la institución y los recursos físicos (Anexo 1). Para realizar la intervención se hace necesario saber y conocer el modelo pedagógico de la institución y el desarrollo de las temáticas a enseñar por sus grados escolares. Desde un modelo pedagógico potencialista se vio la pertinencia de potencializar la geometría en grado 11 debido a que en los últimos años aún después de haber tenido un aula taller de geometría la cual ya no existe, esta haya perdido importancia dentro del currículo de la institución dejando por fuera conceptos claves en su enseñanza y que desde la coordinación académica y los maestros de geometría de este grado ven pertinente enseñar.

Seguramente, identificar problemáticas en la enseñanza de las matemáticas no es un trabajo difícil, pues dicha área siempre arroja los resultados más negativos en nuestra educación, para este caso, nos encontramos con una situación problema clara, los estudiantes de once tienen muchos vacíos en geometría y la demostración matemática es algo totalmente desconocido para ellos. Por lo tanto se busca desde el segundo momento que se desarrollará a continuación, una alternativa de trabajo que permita la búsqueda de posibles soluciones a dicha problemática encontrada en este primer momento de deconstrucción y de lo encontrado en los antecedentes a la problemática y las pruebas diagnósticas realizadas por estudiantes.

4.2. Segundo momento: reconstrucción. En busca de una alternativa de enseñanza.

Tal vez este sea el momento más importante de esta investigación, ya que la intervención fue vital y es el puente entre el primer y tercer momento de dicho trabajo sobre la creación de una unidad didáctica que muestre una alternativa de enseñanza de la actividad demostrativa a partir de la demostración empírica y así poder relacionar a los estudiantes con diferentes teoremas geométricos y asuman dicha actividad más propia y cercana a ellos.

Algunos elementos de intervención fueron los planes de clase y a raíz de ellos sobresalen algunos diarios de procesos. Propiamente los planes de clases fueron esbozados bajo la teoría de la demostración empírica con sus tres familias, el empirismo naif, el experimento crucial y el ejemplo genérico que se convirtieron en categorías en este trabajo y sus despliegues teóricos en subcategorías que llevaban a la búsqueda de unos indicadores de desempeño que al finalizar este componente de reconstrucción se esboza en la tabla 2.

Los siguientes planes de clase (Anexos 5, 6, 7, 8) fueron los que diseñaron la construcción de la unidad didáctica y en la tabla 1 se muestran los momentos de lo cual se conformaban:

Tabla 1. ***Momentos para los planes de Clases***

Momentos de plan de Clase	Tarea a realizar
Momento 0	Descripción de la Clase
Momento 1	Actividad diagnóstica e introductoria
Momento 2	Actividad de fortalecimiento conceptual
Momento 3	Actividad dirigida por el docente
Momento 4	Trabajo Cooperativo
Momento 5	Ejercicios a explorar adicionales
Momento 6	Evaluación

4.2.1. Plan de Clase 1: La fotografía como herramienta de aprendizaje y de observación geométrica. Empirismo Naif (Anexo 5). Al ser la geometría una disciplina eminentemente visual, podríamos asegurar que enseñarse la geometría sin tener en cuenta la parte visual en los procesos de enseñanza podría hacerse más complejo aunque no imposible.

Aprovechando la capacidad de visión de todos los estudiantes utilizamos la fotografía como ese instrumento tecnológico diseñado para tomar momentos de la realidad y congelarlos, esta ha sido de gran auge en los seres humanos que buscan guardar sus representaciones y momentos de la realidad, hoy la mayoría de los dispositivos de comunicación poseen entre sus herramientas una cámara. Apropiándonos de este dispositivo y en busca de captar la atención de los estudiantes, y conociendo que la geometría podemos encontrarla en la realidad pues todo lo existente y visible a los ojos humanos tiene un diseño geométrico, se buscó conectar la fotografía y la geometría para hacer la muestra final teórica del empirismo naif como un método de demostración empírica con ejemplos como método de verificación a través de la inducción y la percepción.

Momento 1. Actividad diagnóstica e introductoria: En dicha actividad los estudiantes debían tomar fotografías en la institución de figuras geométricas

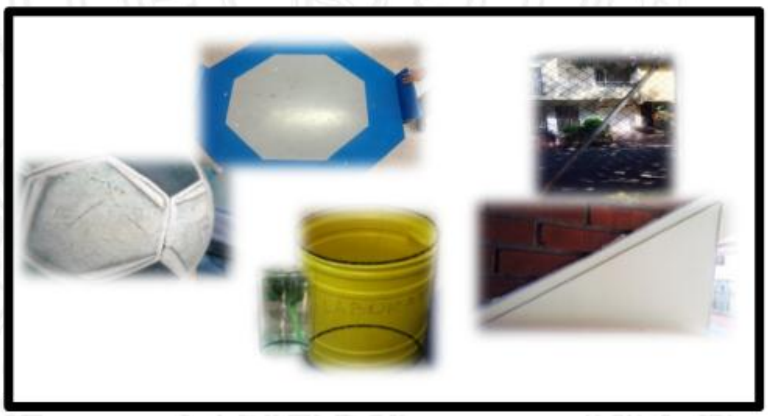


Figura 1. Fotografías de los estudiantes de la Institución Educativa Lola González

Momento 2 Actividad de Fortalecimiento Conceptual. Desarrollar la capacidad de visualización en geometría es de vital importancia, pues es a partir de ella que el estudiante puede mirar más allá de lo normal, acceder a las propiedades de un objeto y poder identificar dichas propiedades con sus funciones en la realidad. Con las siguientes preguntas podemos ilustrar esto, ¿Por qué los coliseos de su Institución Educativa son en forma de arco? ¿Podrían ser planos? ¿Hay diferencias notables entre una forma y la otra? Estas preguntas no se generan solo visualizando, se necesita de la observación analítica. La realidad es lo que puede llevarlos a reflexionar, pues cuando visualizan un arco reconocen el objeto geométrico como tal y al verlo en el coliseo seguramente podrán verlo como un objeto geométrico pero ya funcional. Para esto los estudiantes investigaron sobre las figuras geométricas básicas y sus propiedades más representativas, vía web desde sus dispositivos móviles.

Momento 3. Actividad dirigida por el docente. Seguramente al reconocer las propiedades, y argumentar el porqué de la funcionalidad geométrica de dicho objeto, la actividad demostrativa como secuencia lógica podrá ser de mayor acceso en términos de aprendizaje. La imagen, la visualización y la observación son situaciones que la fotografía permite tener en un mismo momento pues son fragmentos de la realidad. Para este momento, el profesor dio una clase magistral de las propiedades fundamentales de algunas figuras geométricas, y profundizó en congruencia y semejanza.

Momento 4. Trabajo cooperativo. La actividad desde un principio fue diseñada para que este momento estuviera presente desde la toma de fotografías pues su realización fue grupal. Máximo cuatro estudiantes.

Momento 5. Ejercicios a explorar adicionales. En este momento los estudiantes escogieron específicamente algunos ejemplos de las imágenes que fotografiaron y debían hacer una clasificación de las figuras geométricas según sus propiedades.

Momento 6. Evaluación. La actividad finalizó y fue evaluada a partir de una exposición de lo hecho por cada grupo. Para esto ellos diseñaron presentaciones en software como power point o Prezi y mostraron a sus compañeros los trabajos.

La fotografía entonces sirvió en dichas intervenciones como una actividad previa y de acercamiento a la realidad geométrica y a los procesos inductivos, y empíricos, a la hora de validación de teoremas geométricos.

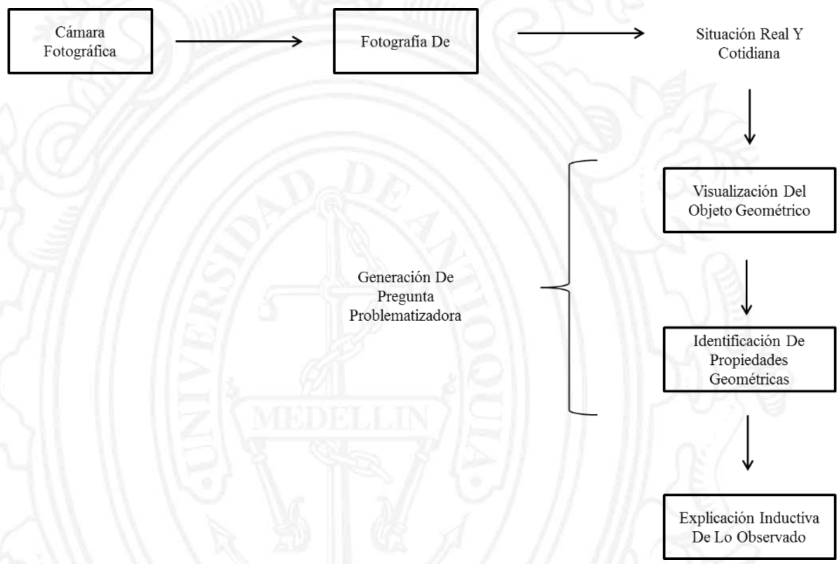


***Figura 2*. Secuencia didáctica de la actividad fotográfica.**

No obstante, solo con la observación y la visualización asegurar que hemos aprendido de geometría es un error se necesita adicional a esto la parte práctica, que permite generalizar propiedades y que no se puede dar a partir únicamente a través de la percepción, se necesita de construcciones geométricas que permitan al estudiante acercarse a situaciones que le permitan validar o reprobar lo observado y para esta situación se plantea una segunda intervención de construcción geométrica que es un método de validación propia de los estudiantes y que se acerca notablemente a la teoría de la demostración empírica.

4.2.2. Plan de Clase 2: La papiroflexia como ayuda didáctica en la Geometría. (Anexo 6). Es una herramienta de construcción que permite visualizar teoremas de una manera sencilla y práctica, esta está íntimamente ligada a las matemáticas: Muchos de los alumnos logran comprender de una manera más sencilla conceptos geométricos como punto medio, mediatriz, bisectriz, simetrías y semejanzas, utilizando de una manera intuitiva y empírica conceptos abstractos al doblar y construir a través del papel.

Este plan de clase se dividió en dos sesiones de trabajo, en la primera sesión se realizaron los momentos 1,2 y 3 y en la segunda sesión los momentos 4,5 y 6 siempre teniendo presente la intención de cada momento en medio de la fusión de estos.

Momentos 1, 2 y 3. Primera sesión. El docente se encargó de guiar a partir del origami los momentos de introducción y de fortalecimiento conceptual en la medida que iba realizando una rosa de papel a partir de una hoja en forma de cuadrado, mientras el docente dirigía cada paso, el papel iba tomando figuras geométricas que eran atravesadas por preguntas conceptuales que promovieran el razonamiento y la apropiación de conceptos como, ¿un cuadrado es rectángulo? ¿Cuáles son los paralelogramos? ¿Un triángulo equilátero es un ejemplo particular o general del triángulo isósceles? A través de la participación de los estudiantes el docente dejaba claras las respuestas.

Momentos 4, 5 y 6 (segunda sesión). Utilizando la rosa u otra figura que se pudiera diseñar con el mismo cuadrado de papel, los chicos de una manera grupal debían realizar una secuencia lógica de los pasos para realizar dicho objeto, identificando figuras geométricas con sus propiedades. Entre los grupos se repartían lo diseñado y evaluaban la secuencia lógica de sus compañeros.

Esta actividad buscaba fortalecer conceptos, acercar a los estudiantes con la importancia de las secuencias lógicas, la construcción de figuras geométricas, el análisis de sus propiedades, y el uso de ejemplos y contraejemplos para verificar sus argumentos y conclusiones, lo cual es propio del experimento crucial que hemos expuesto como una familia de demostración empírica.

4.2.3. Plan de clase 3: Razonamiento a partir de la Inducción (Anexo 7). Una de las características importantes del razonamiento matemático es que nos permite llegar a la generalización de propiedades y a resultados y conclusiones a partir de la observación del análisis o la verificación de casos particulares (Alsina, Burgués, Fortuny, 1997). De este tipo de razonamiento subyacen la capacidad de inducir y deducir las cuales tienen una tarea esencial para su desarrollo, y son vitales para llegar al rigor matemático que tanto se busca en quien estudia esta bella área.

La geometría tuvo un gran aporte a la humanidad, debido a que a partir de ésta la cultura griega supo mezclar los contenidos con el rigor de una lógica. Por lo tanto en esta clase de geometría se podrán encontrar conceptos que se encaminaran a un objetivo específico que es la demostración empírica o pragmática.

Momento 1. Actividad diagnóstica e introductoria. El fin de esta actividad es evaluar lo aprendido en las actividades anteriores y diagnosticar lo que puede venir para los próximos momentos, debido a que esta actividad tiene un nivel de complejidad más alto puesto que el razonamiento matemático y geométrico es más profundo desde lo conceptual y el pensamiento abstracto pues esta actividad entra en juego con la modelación y la generalización de propiedades propios del ejemplo genérico una de las familias de la demostración empírica, en el mismo anexo 7 está la prueba diagnóstica de selección múltiple.

Momento 2 (Actividad de fortalecimiento conceptual). Para esta actividad los estudiantes leerán un documento breve en el cual encontrarán definiciones y propiedades respecto a los polígonos que serán fuertemente utilizados en las demás actividades.

Momento 3 (Actividad dirigida por el docente). En esta parte del plan de clase el profesor mostrará una forma de llegar a la generalización de la fórmula de la suma interior de los ángulos de un polígono convexo desde razonamientos inductivos. Para esta actividad los estudiantes utilizarán regla y transportador como objetos de medición y tijeras.

4.2.3.1. La construcción geométrica como paso a validar lo observado. La construcción geométrica se convierte en este caso en una manera de validación debido a que se acerca más a desarrollar situaciones particulares que pueden servir de ayuda para la generalización de teoremas y propiedades que se convertirán en demostraciones para dar a los estudiantes confianza de lo desarrollado en sus trabajos y que hace parte fuerte del experimento crucial y el ejemplo genérico de la demostración empírica. Para la construcción se hace importante la utilización de la regla y el compás pues este permite acertar en las medidas y ayuda a generalizar.

Momento 4. Trabajo Cooperativo. El trabajo grupal llevará a los estudiantes a que busquen la generalización y la modelación de una fórmula que permita encontrar la suma de las diagonales de cualquier polígono convexo desde razonamientos inductivos.

Momento 5. Ejercicios a explorar adicionales. Los estudiantes buscarán todo lo relacionado con los poliedros, y buscarán formular que puedan ser generalizadas matemáticamente desde sus razonamientos inductivos

Momento 6. Evaluación. Los estudiantes harán una carpeta con todo lo realizado para llegar a sus conclusiones finales que será evaluado por el docente.

4.2.4. Plan de Clase 4: La demostración del teorema de Pitágoras desde Bhaskara con el MEC (Metodología Estudio de Clase) (Anexo 8). Este plan de clase tuvo un toque diferente, pues los 6 momentos diseñados en los anteriores planes de clases están implícitos en este nuevo, no hubo un orden cronológico de los momentos fue una actividad grupal desde el principio pero siempre con la guía del docente. Además dicha actividad tuvo el acompañamiento del asesor, la profesora cooperadora y los profesores practicantes según MEC.

La demostración de Bhaskara de este teorema fue un proceso desarrollado en una de las últimas intervenciones, donde los estudiantes en un proceso de enseñanza-aprendizaje con intervención del docente y la participación activa del grupo de estudiantes se logró demostrar el teorema de Pitágoras a partir del doblado y el corte de papel; la papiroflexia en este caso, ayudó a que los estudiantes vieran y pudieran comprender de una manera más amplia, las propiedades del triángulo rectángulo y como sus lados se relacionan directamente con áreas de cuadrados (Figura 3). Dicha actividad formativa buscó generar en los estudiantes una postura de reflexión y de pensamiento crítico a la manera como se puede validar en matemáticas y de la importancia de generalizar y demostrar en esta área. Seguidamente los estudiantes utilizando los mismos recursos de una manera inductiva y empírica lograron enfrentarse a la demostración del teorema del binomio llegando incluso un estudiante a dar una demostración formal, pero ayudándose propiamente de la ejemplificación y construcción con papiroflexia.

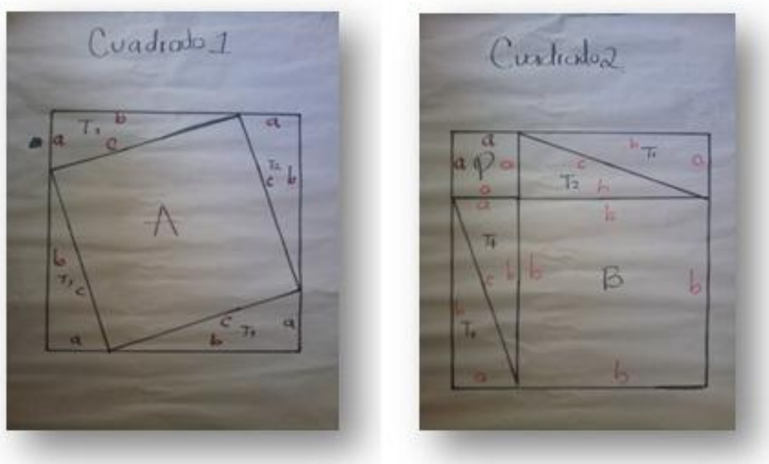


Figura 3. Imágenes de cuadrados con demostración del teorema de Pitágoras de Bhaskara

4.2.4.1. Metodología Estudio de Clase (MEC). Aprovechando la importancia de la construcción de conocimientos y de la socialización de los procesos investigativos que se realizan en los momentos de las prácticas profesionales, se hizo pertinente a partir de varios compañeros y el asesor de este trabajo crear un grupo de estudios de clase que acompañaran en algún momento las intervenciones de los profesores practicantes aplicando su método didáctico, con el fin de reconstruir, analizar y reflexionar los acontecimientos que se pueden dar y así enriquecer el trabajo y optimizar tiempo y recursos si es necesario pero dándole prioridad a los estudiantes y a la enseñanza más eficaz sobre el tema que se desea dar.

4.2.5. Descripción de intervenciones. En las intervenciones en los momentos de enseñanza se llevaron a cabo unos planes de clase que permitieran acercar al estudiante a la actividad geométrica de la demostración, y por ende a la comprensión de la demostración empírica, y de las familias de demostración empírica que se desarrollaron en el anterior marco teórico que le permitieran desarrollar diferentes pensamientos geométricos y fortaleciera sus métodos de validación matemática que afiancen sus conceptos y lo lleven a la comprensión acertada de teoremas que sostienen a la geometría como una rama importante de la matemática.

Este método tiene una secuencia que fue ejecutada en todos sus momentos, dichos momentos parten de una motivación para cada actividad que muestre a los chicos su aplicación y proximidad a su contexto inmediato, seguido por la orientación del maestro desde una base teórica que permita conducir al estudiante a la consecución del objetivo y reducir la probabilidad de fracaso en la actividad, aunque este siempre podrá estar presente, las actividades estarán regidas por las tres familias principales de demostración empírica: empirismo naif, experimento crucial y el ejemplo genérico, en ese orden respectivamente, que permitirán comprender de una mejor manera teoremas geométricos y conceptos importantes para el desarrollo del pensamiento geométrico, espacial y que favorecerán la capacidad de razonamiento inductivo y deductivo.

4.2.6. Diseño de un método didáctico. Seguidamente mostramos cómo relacionamos los momentos de los planes de clase con las tres familias de la demostración empírica (empirismo naif, experimento crucial y el ejemplo genérico).

Es importante recordar que las demostraciones empíricas son caracterizadas por el uso de ejemplos como los elementos claves de convicción. Ahora buscaremos mirar estas tres familias como el método didáctico a desarrollar en este trabajo. Cada plan de clase buscará hacer un recorrido implícito por las demostraciones empíricas, es decir se buscara que cada concepto clave de cada familia de demostración empírica esté involucrado en las actividades realizadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Tenemos entonces en el caso del empirismo ingenuo, la posibilidad de planteamientos de conjeturas, la escogencia de ejemplos sin criterios específicos, haciendo fuerte la percepción desde lo visual y lo táctil, y lo inductivo desde elementos matemáticos y relaciones matemáticas.

En el caso del experimento crucial, planteamiento de conjeturas desde ejemplos específicos, ejemplos únicos, construcciones geométricas, propiedades geométricas y matemáticas aceptadas.

Desde el ejemplo genérico, ejemplos específicos que representan una clase, producción de razonamientos abstractos donde también se incluyen todo lo relacionado con el experimento crucial.

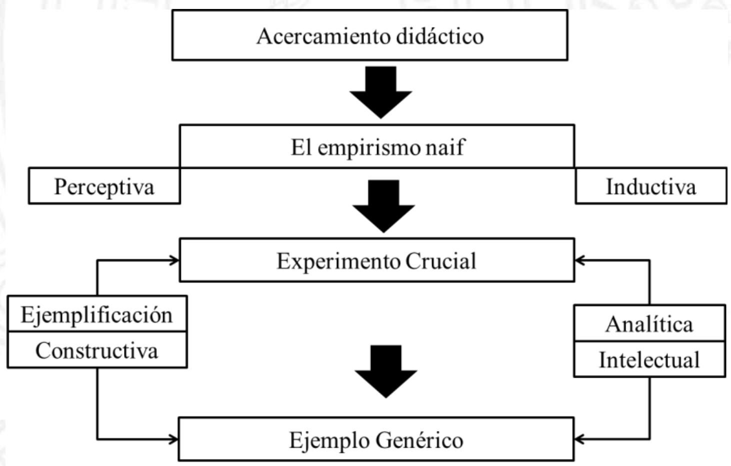


Figura 4. Familias de demostración empírica-Conceptos relacionados.

4.2.7. Diarios de Procesos (Anexo 12). Los diarios de procesos tenían como fin la reflexión continua de lo observado en clase en las diferentes intervenciones educativas por parte del docente. A partir de una evaluación cualitativa. Esto con el fin de mejorar los procesos y buscar la innovación en los procesos de enseñanza-aprendizaje. El manejo de recursos, de tiempos, de estrategias didácticas, de los posibles distractores u obstáculos que se pueden presentar en el momento de las clases se hace importante para la renovación de los ciclos didácticos para unas próximas intervenciones, buscando optimizar tiempo y materiales.

4.3. Tercer momento evaluación. Verificando alternativas que movilicen conocimiento.

Este momento de evaluación buscó a través de un trabajo final de investigación medir como los estudiantes podían enfrentarse a la demostración de teoremas no conocidos por ellos, pero que implícitamente tuvieron presente en sus procesos de enseñanza.

Después de un recorrido por las diferentes intervenciones en el aula de clase, a partir de los planes de clases, de las pruebas diagnósticas y de verificación, y así mismo de las encuestas finales a estudiantes y maestros se hace una recopilación de resultados que serán analizados con el fin de ver la pertinencia de los instrumentos aplicados, su posible reestructuración y los alcances obtenidos después de una comparación entre las pruebas iniciales y las pruebas finales.

Cada proceso realizado buscó potencializar uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática como es el razonamiento que tiene en su cuerpo teórico la demostración como algo intrínseco, desde los razonamientos lógicos inductivos o abductivos y formular hipótesis o conjeturas como el deductivo. Algo adicional es que los demás procesos generales de la actividad matemática se hicieron presentes en el trabajo.

4.3.1. Prueba final 1 (Anexo 9). La prueba de verificación se llevó a cabo en dos sesiones, partiendo igualmente de los momentos diseñados para los planes de clases. La primera sesión fue guiada por los momentos 1, 2 y 3 donde el docente demostró el teorema primero de Thales que dice parafraseando el primer teorema así: “se tiene un triángulo cualquiera, y al trazar una línea paralela a cualquiera de sus tres lados, se obtendrá otro triángulo que es semejante al triángulo dado”. Utilizando el experimento crucial de construcción como método de verificación, con transportador y regla y otra demostración a partir del teorema AAA (ángulo, ángulo, ángulo) como una forma de mostrar la posibilidad de utilizar teoremas y propiedades desde razonamientos abstractos desde la familia de la demostración empírica del ejemplo genérico.

La segunda sesión fue a partir de una prueba de verificación a los estudiantes para los otros tres momentos de los planes de clase pues fue una actividad grupal y evaluativa. Esta se basa de un ejercicio que permitiría a los estudiantes poner en juego las competencias adquiridas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, al recorrer por las diferentes familias de las demostraciones empíricas en los planes de clase. Los estudiantes tendrán argumentos suficientes para validar sus argumentos y demostrar conjeturas, cada uno de ellos buscará demostrar dichas conjeturas y los resultados nos mostrarán cuál alternativa desde la familia de demostración empírica es más utilizada por ellos, y si además lleguen a la demostración deductiva como un fin de la educación matemática y de seguir este proceso con la demostración empírica puede servir de puente para el encuentro con la deducción formal y rigurosa que se exige en niveles superiores de la educación.

El ejercicio de verificación relacionó congruencia y semejanza de triángulos y propiedades y teoremas. Consistía en relacionar del siguiente esquema los triángulos ΔABC y ΔAPQ partiendo del paralelismo entre BC y PQ.

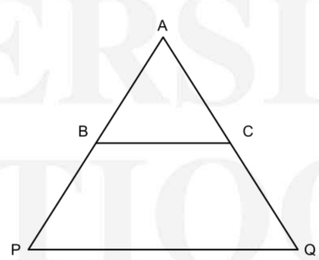


***Figura 5*. Prueba 1 de verificación.**

4.3.2. Prueba final 2. La otra prueba de verificación fue basada en el momento número 5 de los planes de clase, de exploración de nuevos ejercicios con los mismos estudiantes. Se colocó teoremas más rigurosos debido a las respuestas obtenidas en la prueba 1 con el fin de que escogieran alguno y buscaran demostrarlo con los argumentos teóricos y los procesos realizados en clase. Algunos teoremas escogidos fueron los conocidos como teorema de Napoleón que dice “si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de los lados de un triángulo cualquiera, todos al interior o todos al exterior, entonces los centros de los triángulos equiláteros forman también un triángulo equilátero”.

Otro fue el teorema de la bisectriz que dice: “Dado el triángulo ABC, sea AD la bisectriz del ángulo interno A, entonces se cumple la proporción: BA / AC = BD/DC”

Estos podían utilizar cualquier tipo de demostración y lo que vieran necesario para validar sus conjeturas.

4.3.3. Encuesta Final a Estudiantes (Anexo 10). Esta encuesta final tenía como propósito conocer las posturas de los estudiantes frente a la matemática, la geometría la actividad demostrativa y el componente teórico de la demostración empírica, y así retroalimentar los planes de clases, los recursos utilizados, las estrategias didácticas más pertinentes utilizadas por el docente así como su forma y manera de comunicar la enseñanza.

4.3.4. Encuesta Final a Docente cooperador (Anexo 11). Con el fin de tener un buen proceso de intervención educativa, el docente cooperador fue un observador activo de los diferentes momentos educativos, dando al final un concepto sobre el practicante y además dar un valoración cualitativa de los planes de clase respecto a la demostración empírica y su pertinencia en la enseñanza de la educación media.

4.3.5. Categorías, Subcategorías e Indicadores. A partir de los diferentes planes de clase, los diarios de procesos y la teoría de la demostración empírica, se resumen el siguiente cuadro las categorías, subcategorías, y los indicadores de desempeño que se buscaban fueran lo alcanzado por los estudiantes en las intervenciones educativas.

Tabla 2 ***Categorías, Subcategorías e indicadores de los Planes de Clase***

Categorías, Subcategorías e Indicadores de los Planes de Clase.

Categorías	**Subcategorías**	**Indicadores Específicos**	**Indicadores Generales**
	Inductivo	Utiliza elementos matemáticos de verificación.	
		Propone relaciones matemáticas detectadas en el ejemplo.	
		Realiza análisis desde las propiedades geométricas.	
Empirismo Naif (Ingenuo)	**Perceptivo**	Percibe elementos conjeturales que puedan conducir al planteamiento de hipótesis.	
		Realiza conjeturas y demostraciones desde la percepción táctil.	
	Ejemplificación	Identifica ejemplos para demostrar conjeturas.	Utiliza ejemplos como el único criterio en planteamiento de conjeturas y demostraciones.
		Escoge un determinado ejemplo crucial para probar hipótesis.	
		Identifica contraejemplos para refutar hipótesis.	Aplica propiedades geométricas para verificar conjeturas.
	Constructivo	Realiza construcciones sobre un ejemplo seleccionado.	

Experimento Crucial	**Analítico**	Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas. Selecciona cuidadosamente ejemplos para demostrar conjeturas. Demuestra un teorema con base en propiedades y relaciones observadas.		Utiliza teoremas geométricos al hacer demostraciones matemáticas.
	Intelectual	Usa propiedades matemáticas aceptadas partiendo de la simple observación Relaciona diferentes ejemplos para demostrar sus conjeturas.		Argumenta sus hipótesis desde las categorías de demostración empírica. Generaliza propiedades y teoremas geométricos.
	Ejemplificación	Aplica los indicadores del experimento crucial en relación con el ejemplo genérico.	Identifica ejemplos para demostrar conjeturas. Escoge un determinado ejemplo crucial para probar hipótesis.	Utiliza razonamientos inductivos en sus procesos demostrativos.
	Constructivo	Escoge ejemplos representantes de su clase para demostrar conjeturas.	Identifica la posibilidad de contraejemplos para demostrar hipótesis. Realiza construcciones sobre el ejemplo seleccionado.	Reconoce las figuras geométricas.

		Demuestra conjeturas por medio de la abstracción matemática.	Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas.	Clasifica figuras geométricas.
	Analítico		Selecciona cuidadosamente ejemplos para demostrar conjeturas.	Modelan funciones a partir de razonamientos inductivos.
			Demuestra un teorema con base en propiedades y relaciones observadas.	
Ejemplo Genérico	**Intelectual**		Observa empíricamente usando propiedades matemáticas aceptadas.	
			Relaciona diferentes ejemplos para demostrar sus conjeturas.	

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La investigación arrojó resultados desde el primer momento de deconstrucción, la prueba diagnóstica realizada a los estudiantes de grado 11 buscó no solo conocer los conceptos previos que tenían los estudiantes en el componente geométrico y en la actividad demostrativa si no también corroborar que dentro de la institución el área de geometría ha sido marginada y su enseñanza no ha sido continua en los diferentes años escolares, los estudiantes manifiestan poca comprensión sobre la actividad demostrativa y los diferentes métodos de demostración; su nivel académico es muy restringido incluso si estos se compararan con estudiantes de grados escolares menores tendrían igual o peor resultado, además se les dificulta reconocer figuras geométricas no convencionales (con más de 5 lados) así como el entendimiento de teoremas. Tienen falencias para identificar las características y propiedades de objetos geométricos, para conceptualizar. Todo esto los lleva sentir frustración en dicha área.

5.1. La competencia matemática del razonamiento.

Este trabajo tiene como finalidad promover y potenciar el razonamiento matemático en los estudiantes de grado 11, que desde el MEN específicamente de los lineamientos curriculares en matemáticas tiene expresado como un proceso general de la actividad matemática, además razonar en matemáticas tiene que ver con:

> dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente, utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p.54)

Partiendo de lo anterior podemos hacer un análisis de las diferentes intervenciones que se hicieron en clase y cuáles de ellas pudieron aportar a la potenciación del razonamiento geométrico y matemático desde la postura de la demostración empírica.

5.2. Deconstrucción.

5.2.1. Prueba diagnóstica. La prueba diagnóstica inicial mostró las confusiones para definir que es demostración matemática y explicar la diferencia entre semejanza y congruencia, las siguientes figuras muestran un poco este panorama, en términos del MEN, los estudiantes no saben formular hipótesis, ni hacer conjeturas y aunque hacen sus propios argumentos, hay desorden en sus ideas pues buscan definir de manera memorística. Pero cabe destacar que utilizan y relacionan el término demostración analizándolo desde su concepción cotidiana. Desde lo que ellos conocen como demostración se rescata el esfuerzo por hacer analogías trasladando su definición a la rama de la matemática lo que genera en ellos la capacidad de argumentar y validar sus ideas. A continuación veremos algunas respuestas interesantes analiza.

De la pregunta 4 que pregunta por la definición de demostración matemática se rescata lo siguiente:

En la figura 6 se define la palabra demostración con un ejemplo. Esta respuesta es concisa y valiosa, porque muestra como la demostración empírica es el método que más utilizan los estudiantes de educación media para validar sus hipótesis, pues siempre buscan ejemplos representativos con la idea de asegurar sus planteamientos. La demostración empírica fue desarrollada desde esta perspectiva de los ejemplos. Los teóricos de esta, argumentan que los ejemplos son lo que más utilizan los estudiantes en la demostración matemática.

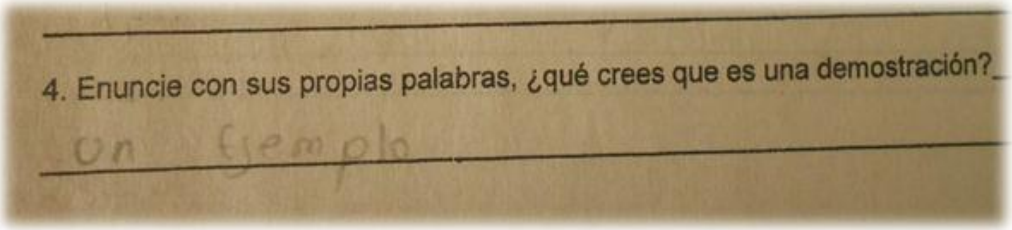


Figura 6. Respuesta 4 de la prueba diagnóstica.

La figura 7 muestra una respuesta más elaborada, ya que introduce acciones matemáticas como explicar y argumentar, acompañadas de un término como la lógica. Es una definición más cercana a la demostración deductiva y formal, pero sigue moviéndose en términos empíricos debido a su limitación de argumentar algo específico que implícitamente sigue siendo propio de ejemplos. Es interesante en esta respuesta la inclusión implícita de un orden secuencial.

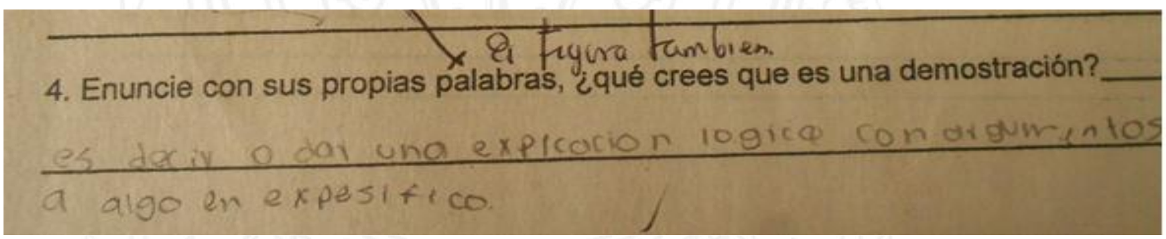
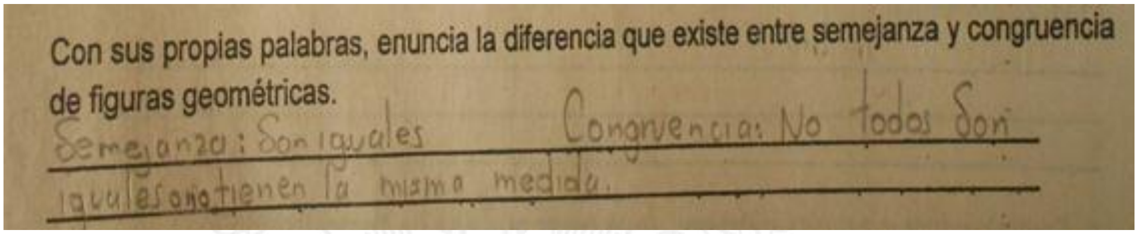


Figura 7. Respuesta 4 de la prueba diagnóstica.

La pregunta 7 pregunta por una actividad propia de la geometría euclidiana desde los términos conceptuales de semejanza y congruencia, y tenemos las siguientes respuestas

La figura 8 muestra una confusión clara entre la diferencia entre semejanza y congruencia desde la concepción de los estudiantes, pues definen estas palabras de manera errónea; dicha respuesta muestra ideas desordenadas de algo que debían haber aprendido, palabras como medida e igualdad, muestran que sí tuvieron un acercamiento antes con los términos pero un desconocimiento actual de las definiciones.

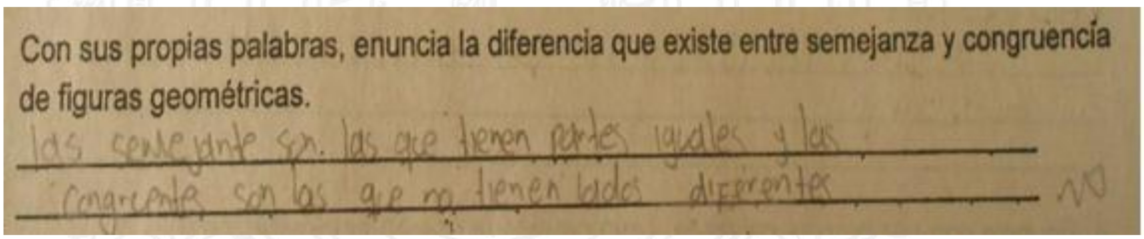


Con sus propias palabras, enuncia la diferencia que existe entre semejanza y congruencia de figuras geométricas.

Semejanza: Son iguales Congruencia: No todos son iguales o no tienen la misma medida.

Figura 8. Respuesta 7 de la prueba diagnóstica

En la figura 9 se muestra otro claro ejemplo de confusión y de ideas desordenadas que llevan a los estudiantes a definiciones erróneas, en esta definición sigue la idea de igualdad y se discriminan términos de las figuras geométricas como los lados y de una manera general partes.

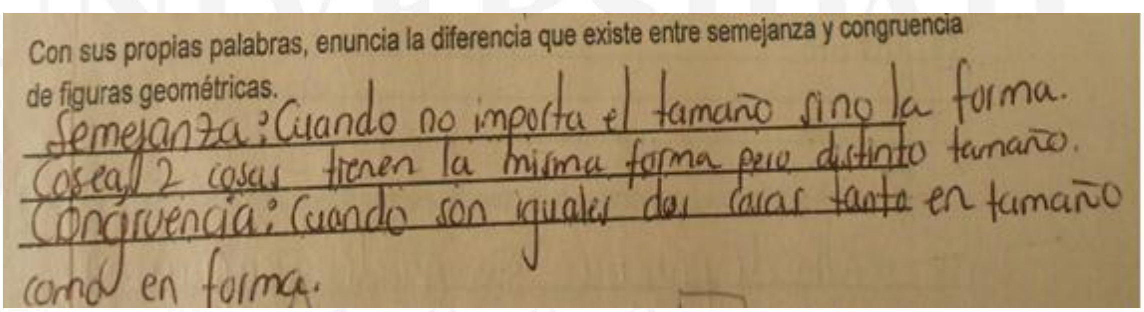


Con sus propias palabras, enuncia la diferencia que existe entre semejanza y congruencia de figuras geométricas.

las semejante son las que tienen partes iguales y las congrente son las que no tienen lados diferentes no

Figura 9. Respuesta 7 de la prueba diagnóstica

La figura 10 muestra una respuesta de la pregunta 7 desde ideas que se acercan más una definición, pero los estudiantes siguen usando ejemplos para validar sus ideas lo cual venimos diciendo es algo común en los estudiantes de educación media, no obstante son ideas inconclusas y con errores para ellos imperceptibles que llevan a interpretaciones erradas.



Con sus propias palabras, enuncia la diferencia que existe entre semejanza y congruencia de figuras geométricas.

Semejanza: Cuando no importa el tamaño sino la forma.
Cosea/ 2 cosas tienen la misma forma pero distinto tamaño.
Congruencia: Cuando son iguales dos cosas tanto en tamaño como en forma.

Figura 10. Respuesta 7 de la prueba diagnóstica.

En términos generales, como se mencionó anteriormente las ideas de los estudiantes son confusas, los estudiantes tienen ideas de las definiciones pero existen un claro desorden y una mala interpretación de sus ideas, esto muestra claras falencias en lo que es la actividad demostrativa, lo que conllevará a una aclaración de conceptos por parte del profesor y poder promover en ellos las demostraciones empíricas que es lo más cercano a sus conocimientos pues algunos relacionan la demostración con ejemplos y lo cual es el método de verificación de las demostración empírica y que seguramente facilitara los procesos de intervención educativa en las diferentes clases.

5.2.2. Acercamiento didáctico desde actividades lúdicas. A través de la observación y de las diferentes actividades realizadas para la motivación como primer momento del método didáctico que se quiere implementar para la adquisición de los objetivos, la evaluación de dichas actividades arrojó como resultados que cuando los estudiantes actúan y participan activamente de los procesos con actividades de sus gustos personales, pueden despertar mayor interés al verle al curso una mayor relevancia y aplicación a su contexto. El origami o la papiroflexia fue una actividad que les mostró como muchas figuras de la realidad tienen una proximidad a la geometría y un trabajo de fotografía les mostró cómo todo su contexto está constituido de la geometría y de los teoremas que hasta ese momento no tenían interés para ellos y que a partir de dichas actividades permitió una nueva postura en un nuevo interés por la clase.

5.3. Reconstrucción.

5.3.1. Plan de Clase 1: Acercamiento didáctico desde la Fotografía. En esta actividad los estudiantes podían tomar fotos a cualquier objeto geométrico de la institución, y al final debían argumentar y clasificar dichas figuras geométricas de acuerdo a sus conocimientos.

Figura 11. Fotografía de un arco de microfútbol Carolina puerta, 2014.

La actividad de la fotografía evidenció claramente que los estudiantes se encuentran en un empirismo ingenuo pues para verificar y argumentar sus conjeturas utilizaban la percepción, lo visual y lo táctil.

Figura 12. Fotografía de círculos por parte de los estudiantes.

Los estudiantes en la figura 12 muestran una familia de figuras geométricas que clasifican en la categoría de círculos, el desconocimiento de las definiciones lleva a que los estudiantes puedan tener errores pues su método de verificación es solo su percepción de lo observado, e incluyen entre los círculos una esfera y un ovalo. Sus criterios de agrupamiento son validados por la visión y la percepción táctil.

Figura 13. Fotografía de Triángulos y clasificación según sus lados por parte de los estudiantes.

La figura 13 es otro ejemplo del desconocimiento que tienen los estudiantes de las propiedades geométricas, incluyendo entre los triángulos un poliedro como la pirámide, y asumiendo desde la visión y la percepción criterios de igualdad para clasificar, sin instrumentos de medida que validaran sus hipótesis.

Figura 14. Fotografías de otros cuerpos y figuras geométricas por parte de los estudiantes.

En la figura 14 los estudiantes desean mostrar figuras geométricas no tan comunes para ellos y no caen en la cuenta que introducen entre sus familias polígonos y poliedros perdiendo una importante clasificación, además una de las imagines que ellos llaman rombo es una figura que no es un polígono, pues no es una secuencia finita de segmentos rectos sino que son curvos, grave error por desconocimiento de propiedades, definiciones apoyados en sus percepciones visuales.

La actividad de la fotografía permitió comprobar como los estudiantes desde su percepción caen errores que los sentidos pueden traer, pero es su método de validación más común.

Desde la competencia general de razonamiento matemático se notan falencias a la hora de conjeturar, de formular hipótesis y de utilizar las propiedades geométricas y matemáticas que conocen, confundiendo definiciones y colocando como valido su concepto desde lo visual.

5.3.2. Plan de Clase 2: Acercamiento didáctico desde la actividad del origami. El origami es indiscutiblemente un recurso didáctico para la enseñanza de la geometría, y aunque no es el fuerte de este trabajo, se utiliza este recurso por su capacidad de trascender de la enseñanza tradicional

> El origami, como técnica artística que permite doblar una hoja de papel para la elaboración de figuras, ha virado en los últimos años hacia una nueva utilización para abonar el terreno de la didáctica de las matemáticas, permitiendo de esta manera, lograr métodos diferentes a los tradicionales para la enseñanza y aprendizaje de esta rama del conocimiento. (Santa, Bedoya, Jiménez, 2007, p.15)

La actividad se basó en la realización de una flor con un cuadrado como base. Luego de finalizar el procedimiento, los estudiantes debían realizar un algoritmo lógico que describiera paso a paso como se llegaba a la flor final, aunque también tuvieron la alternativa de realizar otra figura que les llamara la atención realizando el mismo trabajo, y al mismo tiempo debían identificar las figuras geométricas que se visualizaban de cada doblado, y sacar sus propias conjeturas sobre lo observado.

Al finalizar la actividad se encontró con algunas situaciones:

El origami les permitió la posibilidad de crear secuencias lógicas a través de dibujos, imágenes o de la escritura. Cabe resaltar además que se encontraron falencias en el reconocimiento de las figuras geométricas que se iban formando en los trazos, por desconocimiento o descuido. Sin embargo dicha actividad ayudó que los estudiantes crearan sus propias secuencias, formularan sus propios procedimientos y usaran propiedades y relaciones geométricas para explicar lo realizado.

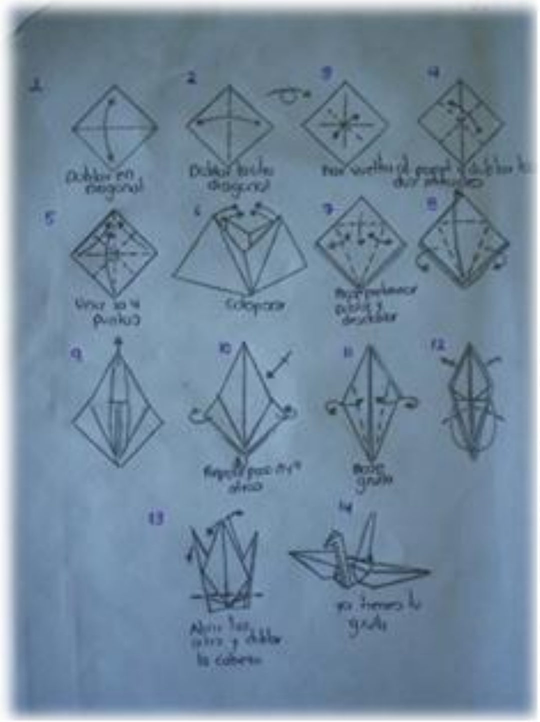


Figura 15. Secuencia lógica de una grulla en origami a través del dibujo.

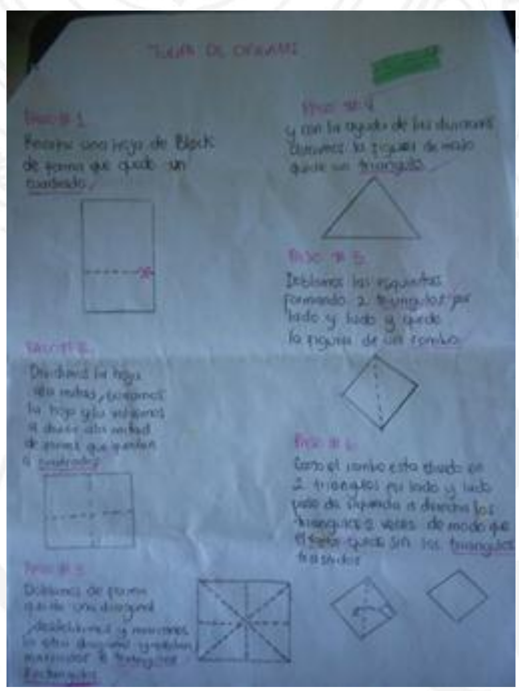
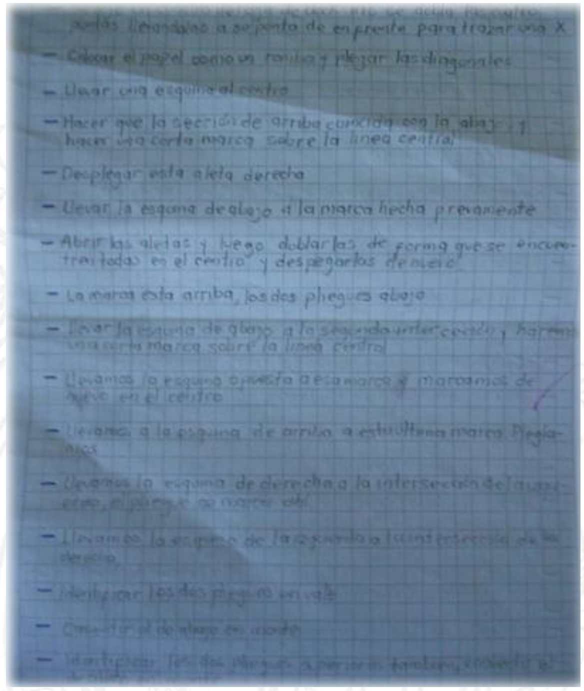


Figura 16. Parte de una secuencia lógica utilizando dibujos y escritura de una flor de origami. Identificación de figuras.



- Colocar el papel como un rombo y plegar las diagonales
- Llevar una esquina al centro
- Hacer que la sección de arriba coincida con la aleta y hacer una corta marca sobre la línea central
- Desplegar esta aleta derecha
- Llevar la esquina de abajo a la marca hecha previamente
- Abrir las aletas y luego doblarlas de forma que se encuentren todas en el centro y despegarlas de nuevo
- La marca esta arriba, los dos pliegues abajo

Figura 17. Parte de una secuencia lógica de un elefante en origami. De manera escrita.

Esta actividad de origami, permitía en su proceso el desarrollo de fortalecimiento conceptual en el conocimiento de propiedades de las figuras geométricas, es interesante de nuevo reconocer en las figuras 15, 16 y 17 tres diferentes formas de crear secuencias lógicas, desde las habilidades que cada uno de ellos tiene, la figura 15 es una secuencia lógica en dibujos, el estudiante muestra una habilidad clara para el dibujo, vemos un orden conjetural y esquemático bien realizado. En cambio la figura 17 es una parte de una secuencia lógica de 3 páginas de manera escrita, la habilidad clara de este estudiante es la escritura; la argumentación que hace en cada paso es claro y es un orden conjetural escrito bien realizado.

La actividad tenía como fin, que los estudiantes se familiarizaran con la capacidad de realizar secuencias lógicas y ordenadas para argumentar sus planteamientos y organizar ideas concretas y abstractas como una característica propia de la demostración matemática.

5.3.3. Plan de Clase 3: Razonamiento inductivo y proceso de modelación matemática.

Los planes de clase ayudaron al fortalecimiento de los conceptos previos y ayudaron a conducir a los estudiantes a los procesos de demostración y al reconocimiento de las diferentes familias de la demostración empírica.

El siguiente ejercicio realizado en clase partió del razonamiento inductivo como propio de la actividad demostrativa y de las familias de las demostraciones empíricas con el fin de llegar a modelar y generalizar propiedades y teoremas geométricos.

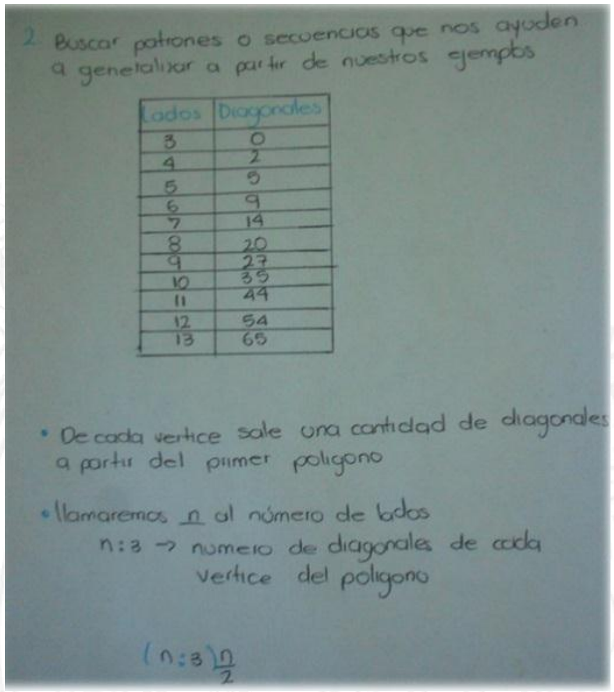
Las tres familias de las demostraciones empíricas se hicieron presentes en este proceso, el *empirismo naif* desde lo perceptivo e intuitivo, el *experimento crucial* en la utilización de objetos de medida (regla, transportador), y de construcciones con los ejemplos utilizados y el *ejemplo genérico* desde los razonamientos abstractos que se visualizan en la modelación.

Figura 18. Modelando la fórmula de la suma de los ángulos internos de un polígono convexo con regla y transportador.

En la figura anterior los estudiantes incursionaron en el empirismo naif y el experimento crucial con la ayuda del profesor, utilizando diferentes razonamientos para encontrar una fórmula general desde lo particular, que les permitirá conocer la suma de los ángulos internos de cualquier polígono convexo sin importa el número de lados, utilizaron así regla, tijeras transportador y compás. Llegando a (n-2) 180.

La siguiente actividad corrió por cuenta de los estudiantes, quienes debían hacer un procedimiento similar y modelar una fórmula que les permitiera conocer el número de diagonales de cualquier polígono convexo, incursionando de nuevo por las familias de la demostración empírica utilizando ejemplos como método de verificación y llegar así a una fórmula general.

Figura 19. Buscando una fórmula para la suma de las diagonales de un polígono convexo. Sin resultado.



2. Buscar patrones o secuencias que nos ayuden a generalizar a partir de nuestros ejemplos

Lados	Diagonales
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14
8	20
9	27
10	35
11	44
12	54
13	65

• De cada vertice sale una cantidad de diagonales a partir del primer poligono

• llamaremos n al número de lados
n:3 → numero de diagonales de cada vertice del poligono

$(n:3)\frac{n}{2}$

Figura 20. Otra forma más general de llegar a la fórmula de la suma de las diagonales internas de un polígono convexo. Con resultado final.

5.3.4. Plan de Clase 4: La demostración con papiroflexia. Esta actividad se realizó en dos intervenciones en primera instancia se hizo una demostración del teorema de Pitágoras, en un proceso maestro-estudiante. En segundo momento como método de verificación se hizo una demostración del teorema del binomio por los estudiantes.

5.3.5.1. Intervención 1: Demostración del teorema de Pitágoras desde Bhaskara. Antes mencionamos como la demostración del teorema de Pitágoras a través de Bhaskara nos permitió realizar una actividad de demostración empírica con los estudiantes, con ayuda del papel y la observación de varios compañeros de práctica, el asesor y la cooperadora.

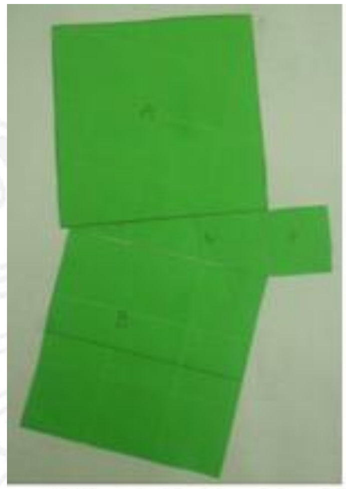


Figura 21. Relación de áreas con el teorema de Pitágoras de Bhaskara.

5.3.5.2. Intervención 2: Demostración del teorema del Binomio. A partir del ejemplo de la demostración del teorema de Pitágoras, se les planteó a los estudiantes que utilizando la misma papiroflexia demostraran el teorema del binomio. Para esto se encontró el caso de un estudiante que ayudado de las figuras y utilizando razonamientos abstractos, formulando hipótesis y conjeturas además de propiedades matemáticas, logró llegar a la demostración no de una forma muy ordenada, pues no hay un rigor en el procedimiento algorítmico, pero su ejercicio logro incursionar en el ejemplo genérico intelectual como la tercera familia de la demostración empírica y que es puente para las demostraciones formales y deductivas.

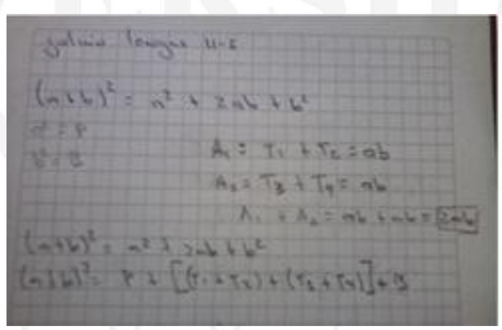


Figura 22. Demostración del teorema del Binomio con papiroflexia. Estudiante de 11.

La intervención con la demostración empírica y el teorema de Pitágoras desde la demostración de Bhaskara llevó a los estudiantes plantearse las siguientes posturas.

A preguntas como de cómo se sintieron en la actividad plantearon:

> "es una manera chévere de demostrar", "es una actividad didáctica", "una actividad sencilla y fácil de entender", "interesante conocer el origen de los teoremas", "es una clase amena y auténtica", "entretenida con el manejo de papel", "fue más fácil con la ayuda del profesor"

Y a la pregunta de lo que pudieron aprender de dicha actividad, dijeron lo siguiente:

> "de una manera muy sencilla se puede demostrar y razonar teoremas, como el teorema de Pitágoras", "es una visualización sobre el razonamiento inductivo que a través de la observación y la construcción se pueden comprobar teoremas", "se puede llegar a la demostración de algo a través de ejercicios visuales y didácticos", "como se puede demostrar o asegurar algo dependiendo de algunos argumentos y enunciados", "a observar más, analizar y buscar el razonamiento inductivo", "como tan fácil y sin darnos cuenta fuimos creando la fórmula del teorema de Pitágoras", "agiliza el pensamiento lógico".

Este plan de clase fue de vital importancia pues fue el conector entre los propósitos de los tres primeros planes de clase con las pruebas de verificación, pues era a parir de este que se quería introducir en los estudiantes el concepto de demostración empírica y todo su componente teórico, además de relacionar el razonamiento inductivo propio de estas familias demostrativas con métodos no convencionales de demostración desde la papiroflexia buscando llegar a razonamientos lógicos y deductivos.

Los estudiantes en sus respuestas muestran un gusto por la demostración matemática cuando esta se introduce a través de otras estrategias didácticas, para ellos tan cercanos a la inducción, la percepción y a la utilización de ejemplos como elementos de convicción, ver demostraciones palpables a sus sentidos como la visión y lo táctil.

Los estudiantes advierten aun así la necesidad del acompañamiento del docente en el proceso de enseñanza, como guía. Además confirman su interés planteado en la encuesta inicial por la matemática, cuando ven interesante conocer la historia del origen de teoremas geométricos.

Los estudiantes afirmaron aprender una de las múltiples maneras de demostrar el teorema de Pitágoras. Fue evidente la ayuda de las actividades anteriores de los primeros planes de clase, pues ellos evidenciaron en la actividad demostrativa la importancia del desarrollo de razonamiento inductivo, de la construcción geométrica y la observación y algo estupendo fue el reconocimiento de la demostración matemática como aquella que permite potencializar el razonamiento lógico.

Dicha actividad encontró en las repuestas de los estudiantes, la familiarización de conceptos que abarca la demostración matemática, en este caso la demostración empírica como lo es la percepción, la inducción, la construcción, el análisis y la ejemplificación para el caso de la demostración a través de la papiroflexia, a continuación se muestra algunas respuestas de los estudiantes que afirman lo dicho desde sus propias palabras.

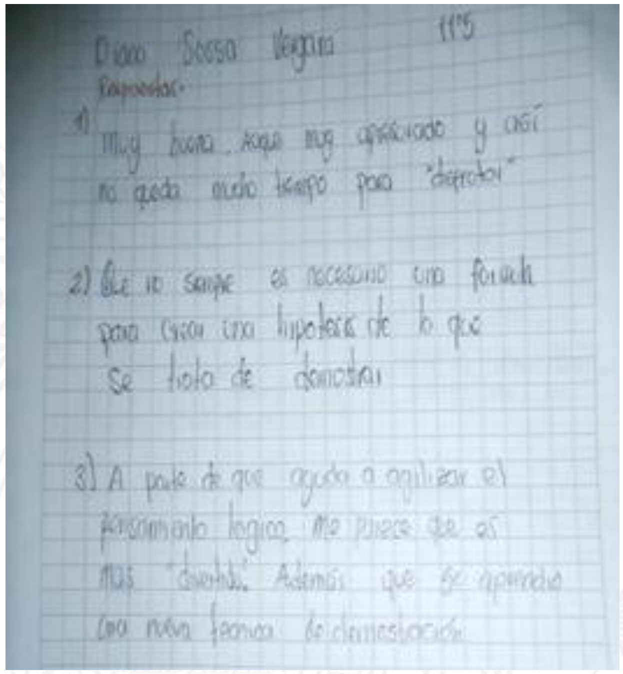

Diego Sossa Vergara 11°5
Respuestas:
1) Muy buena, aunque muy apresurado y así no queda mucho tiempo para "disfrutar"
2) Que no siempre es necesario una fórmula para crear una hipótesis de lo que se trata de demostrar
3) A parte de que ayuda a agilizar el pensamiento lógico me parece que es más "divertido". Además que se aprendió una nueva técnica de demostración.

Figura 23. Apreciación de una estudiante 1 sobre la actividad con papiroflexia.

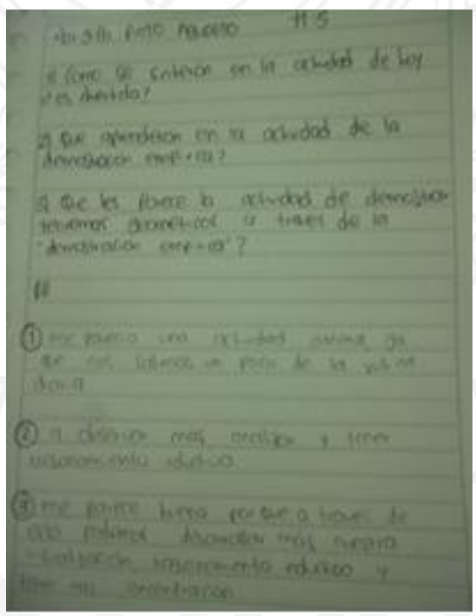

11°5
1) ¿Cómo se sintieron en la actividad de hoy? ¿es divertida?
2) ¿Qué aprendieron en la actividad de la demostración empírica?
3) ¿Qué les parece la actividad de demostrar teoremas geométricos a través de la "demostración empírica"?

Figura 24. Apreciación de una estudiante 3 sobre la actividad con papiroflexia.

Los estudiantes a través de sus respuestas, evidencia un gusto por la actividad con papiroflexia.

5.4. Evaluación.

5.4.1. Pruebas finales de verificación. Las pruebas finales se basaron en dos ejercicios puntuales y se encontró lo siguiente.

El primer ejercicio fue común para todos y fue de realizar el ejercicio de la figura 5, en grupos (G) de dos máximo tres estudiantes. Algunos de los resultados más comunes fueron los del G1 y dos grupos llamados G2 y G3 pudieron hacer demostraciones de tipo formal reconociendo que aún su rigor matemático es bajo sus respuestas son las siguientes.

G1: se nota que sus ángulos son iguales, pero no son iguales porque el triángulo PAQ es más grande y el triángulo ABC es más pequeño. Sus formas son iguales entonces son semejantes y no congruentes (Figura 27).

Tipo de demostración: Empirismo Ingenuo Perceptivo (EIP)

G2: Que los dos triángulos son semejantes porque sus bases son paralelas. En el triángulo APQ el segmento BC es casi la mitad del segmento PQ con lo que sus medidas son semejantes en cuanto a sus lados y ángulos.

Tipo de demostración: Deductivo Formal Estructural (DFE)

G3: Son semejantes. El triángulo ABC es proporcional al triangulo PAQ, si PA II BC, implica que si traslado PQ en el mismo sentido cada triángulo formado será proporcional. Si tengo un triángulo y trazo una línea paralela a uno de sus lados el triángulo formado es proporcional al triángulo en el que se cruza la línea paralela (Figura 26)

Tipo de demostración: Demostración Formal Estructural DFE

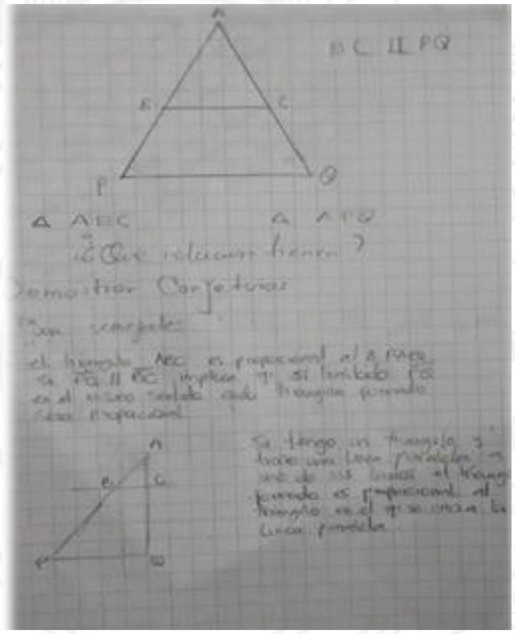


Figura 25. Demostración Grupo 3. Demostración Formal Estructural.

Figura 26. Demostración Grupo 1 Empirismo Ingenuo Perceptivo.

A través de los anteriores ejercicios, como lo fueron los planes de clases, con las actividades no tradicionales de enseñanza y de excelente aplicación como la papiroflexia y las actividades didácticas complementarias como la fotografía se buscó en primera instancia de una manera implícita hasta hacer los conceptos visibles para los estudiantes que estos se movieran en la actividad demostrativa, a partir del término de demostración empírica desarrollado por el profesor Ángel Gutiérrez y su grupo de investigación, desde razonamientos inductivos y con la ayuda de la modelación los estudiantes mostraron un progreso significativo a la hora de explorar y plantear sus propias conjeturas. Encontraron nuevas formas de validación y pudieron ver la actividad demostrativa como algo que va más allá de la deducción rigurosa y formal que siempre se ha planteado.

Los resultados muestran claramente que los estudiantes tienen falencias a la hora de dar un orden bien estructurado a sus secuencias lógicas y a sus argumentos cuando desean verificar hipótesis. Sin embargo se nota un avance en la capacidad de razonamiento en todas las actividades didácticas propuestas por la unidad.

Algo importante, es que los resultados obtenidos muestran que los estudiantes en el proceso general de razonamiento, mostraron que pueden llegar a dar cuenta del porque los procesos que realizan para llegar a sus conclusiones de justificar respuestas en el tratamiento de problemas. Lograron hacer conjeturas, usar hechos conocidos y utilizar propiedades para explicar sus hechos, se vislumbró un poco como algunos pudieron encontrar patrones y expresarlos matemáticamente y al final podían exponer sus propios argumentos para expresar sus ideas lo que potenció su capacidad de pensar.

El segundo ejercicio de verificación fue la posibilidad de ver como se enfrentaban los estudiantes a otros teoremas geométricos con más rigor y los resultados fueron los mismos el de moverse en el empirismo ingenuo perceptivo e inductivo.

G6: .Cuando medimos con una regla podemos comprobar que las medidas son iguales. NM=NP=MD, es equilátero (figura 28).

Tipo de demostración: Empirismo Ingenuo Inductivo

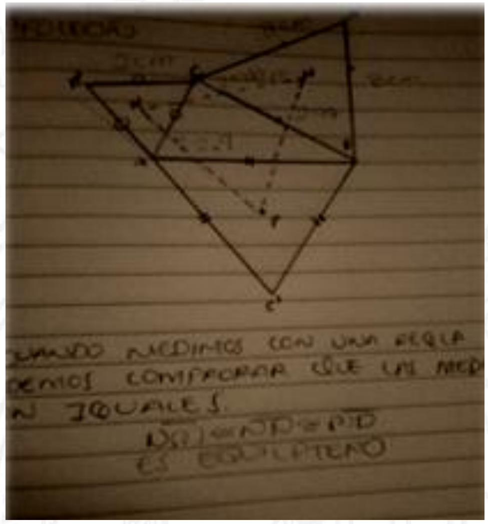


Figura 27. **Demostración del teorema de Napoleón grupo seis. EII**

5.4.2. Encuesta Final Estudiantes. Procesos de enseñanza-aprendizaje. La encuesta a los estudiantes busca conocer las percepciones de estos, después de haber participado de todas las actividades propuestas en clase, de cómo se sintieron con ellas de una manera cualitativa que brinde al profesor investigador, la posibilidad de afianzar su propuesta, así como de mejorarla también de acuerdo a las falencias encontradas por aquellos que fueron protagonistas directos de la intervención educativa.

Al conocer las consideraciones de los estudiantes se encontró que la percepción de la geometría y la matemática cambió para bien de ellos y de sus procesos futuros, algunos dicen afianzar su gusto por el área y la mayoría de ellos resaltan la utilización de los recursos no tradicionales que trascienden a la tiza y el tablero como una posibilidad de cambio para adquirir conocimiento de una manera más didáctica y amena, lo cual facilita su aprendizaje.

Cada actividad tenía un propósito y una intención lo que los estudiantes al parecer captaron de la mejor manera y lo demuestran en sus respuestas a la encuesta final realizada.

A la pregunta del cambio de la percepción de si esta cambio o no en relación con las matemáticas y la geometría nos encontramos que muchos de ellos afirman el cambio debido a que vieron su enseñanza de otra manera, y vieron la aplicación de la geometría a su realidad, algunos de una manera muy esperanzadora dijeron que pensaron que no serían capaz nunca de aprenderlas pero que ahora siente que no es así, además algunos más rigurosos asumieron que encontraron nuevas formas de verificar y formular hipótesis, además sin utilizar números ni ecuaciones.

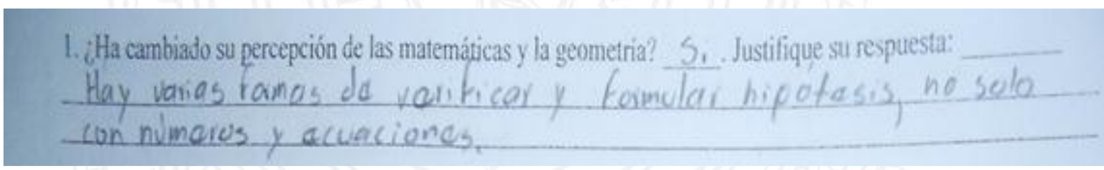
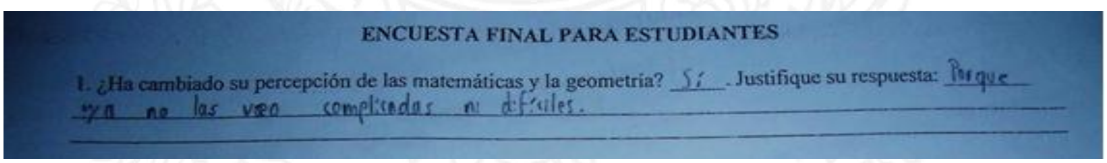
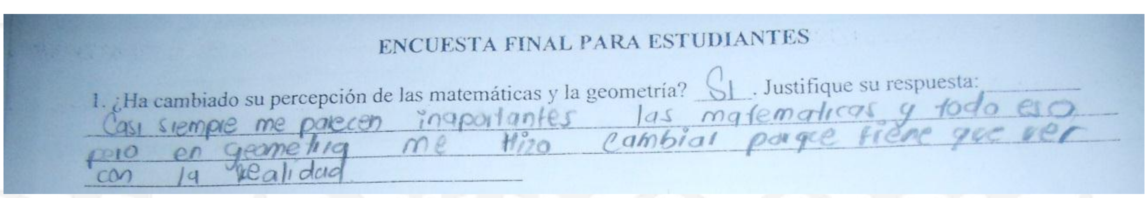

1. ¿Ha cambiado su percepción de las matemáticas y la geometría? Si. Justifique su respuesta: Hay varias formas de verificar y formular hipotasis, no solo con numeros y acuaciones.

Figura 28. Respuesta de un estudiante encuesta final.


ENCUESTA FINAL PARA ESTUDIANTES

1. ¿Ha cambiado su percepción de las matemáticas y la geometría? Si. Justifique su respuesta: Porque ya no las veo complicadas ni dificiles.

Figura 29. Respuesta de un estudiante encuesta final.


ENCUESTA FINAL PARA ESTUDIANTES

1. ¿Ha cambiado su percepción de las matemáticas y la geometría? SI. Justifique su respuesta: Casi siempre me parecen inaportantes las matematicas y todo eso pero en geometria me hizo cambiar porque tiene que ver con la realidad

Figura 30. Respuesta de un estudiante encuesta final.

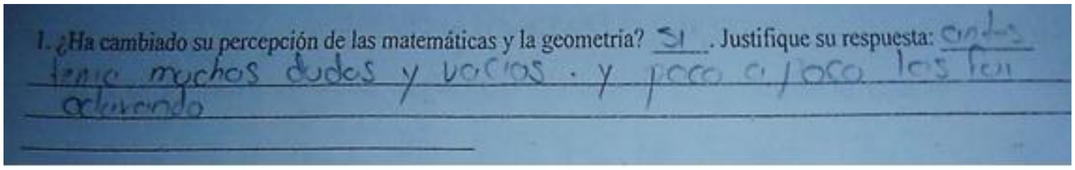

1. ¿Ha cambiado su percepción de las matemáticas y la geometría? Si . Justifique su respuesta: antes tenia muchas dudas y vacios . y poco a poco los fui aclarando

Figura 31. Respuesta de un estudiante encuesta final.

En la pregunta sobre cómo fue la influencia de la actividad demostrativa en su aprendizaje de matemáticas y geometría, los estudiantes argumentaron ver la geometría más práctica, menos tediosa de aprenderla, expresaron que se visualizaba más fácil, aprendieron a tomar medidas con la mente, y alcanzaron a tener concepciones más claras de las figuras, la actividad demostrativa les ayudó a aprender más afondo y ahora tiene más sentido aprender.

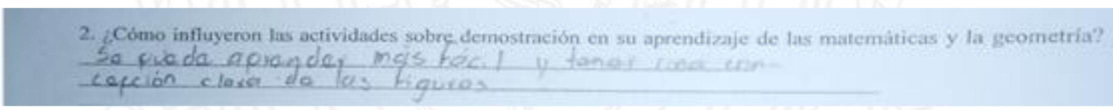

2. ¿Cómo influyeron las actividades sobre demostración en su aprendizaje de las matemáticas y la geometría?
Se pueda aprender más fácil y tener una con-
cepción clara de las figuras

Figura 32. Respuesta de un estudiante encuesta final.

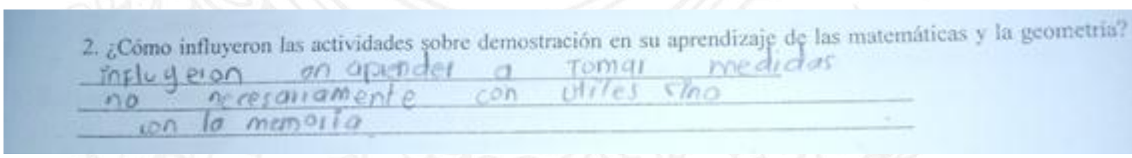

2. ¿Cómo influyeron las actividades sobre demostración en su aprendizaje de las matemáticas y la geometría?
influyeron en aprender a tomar medidas
no necesariamente con utiles sino
con la memoria

Figura 33. Respuesta de un estudiante encuesta final.

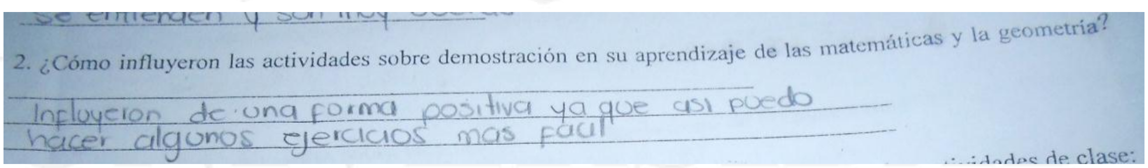

2. ¿Cómo influyeron las actividades sobre demostración en su aprendizaje de las matemáticas y la geometría?
Influyeron de una forma positiva ya que asi puedo
hacer algunos ejercicios mas facil

Figura 34. Respuesta de un estudiante encuesta final.

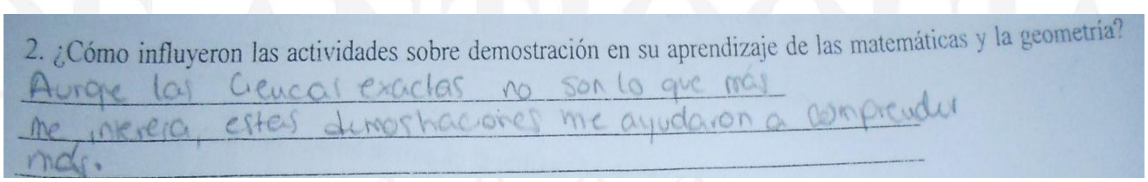

2. ¿Cómo influyeron las actividades sobre demostración en su aprendizaje de las matemáticas y la geometría?
Aunque las Ciencas exactas no son lo que más
me interesa, estas demostraciones me ayudaron a comprender
más.

Figura 35. Respuesta de un estudiante encuesta final.

En los recursos utilizados en los procesos de enseñanza-aprendizaje su apreciación general fue que hubo diversidad en ellos, que fueron didácticos, lúdicos, recursivos, creativos, buena mezcla de tablero tiza, con papiroflexia y origami.

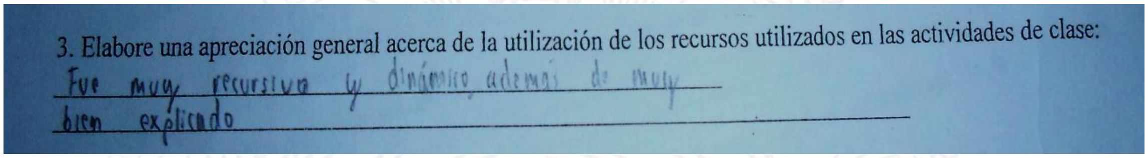

3. Elabore una apreciación general acerca de la utilización de los recursos utilizados en las actividades de clase:
Fue muy recursivo y dinámico además de muy bien explicado

Figura 36. Respuesta de un estudiante encuesta final.

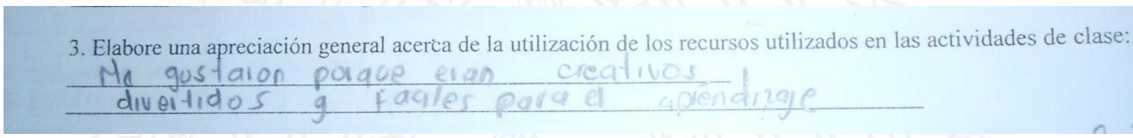

3. Elabore una apreciación general acerca de la utilización de los recursos utilizados en las actividades de clase:
Me gustaron porque eran creativos divertidos y faciles para el aprendizaje

Figura 37. Respuesta de un estudiante encuesta final.

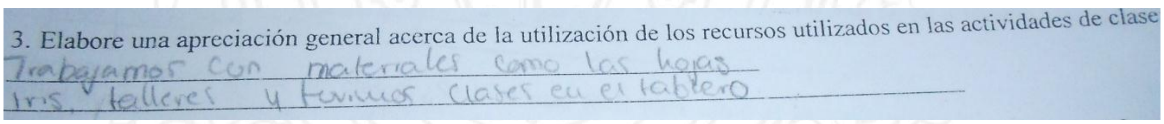

3. Elabore una apreciación general acerca de la utilización de los recursos utilizados en las actividades de clase
Trabajamos con materiales como las hojas iris, talleres y tuvimos clases en el tablero

Figura 38. Respuesta de un estudiante encuesta final.

5.4.3. Encuesta final docente cooperador de los procesos enseñanza aprendizaje.

La profesora cooperadora califica de excelente la posibilidad de utilizar recursos como el origami y la papiroflexia, ve acertada su aplicación para la demostración de teorema y especifica que dichas actividades pueden ser de excelente beneficio para grados anteriores. Dicha actividad es una oportunidad fuerte para fortalecer conceptos matemáticos.

La actividad demostrativa es un trabajo viable en la educación media, argumenta. No obstante insiste en que es un proceso que debe ser iniciado desde la primaria, no con la rigurosidad que una demostración exige pero si desde los procesos de argumentación y comunicación matemática.

6. CONCLUSIONES

Las conclusiones de esta investigación tienen que ver en primer lugar con la confirmación de algunas maestras de que la actividad demostrativa y los componentes geométricos han perdido interés e importancia dentro de la comunidad educativa y el currículo de las escuelas de educación básica y secundaria.

La geometría es la mejor alternativa para iniciar en los estudiantes la actividad demostrativa esta permite desarrollar en ellos tipos de representación semiótica como el registro figural, la lengua natural y el lenguaje simbólico.

Además, los estudiantes son movidos fuertemente a participar de las actividades de enseñanza-aprendizaje, cuando son motivados por estrategias didácticas cercanas a su contexto y a sus intereses.

La metodología de investigación y de enseñanza ha sido pertinente para este trabajo pues la demostración empírica se logra coaccionar con el aprendizaje por descubrimiento y la investigación acción educativa de una buena manera.

Los estudiantes de la I.E Lola González, se ubican en términos generales en la primera familia que propone la demostración empírica, sobre todo en el empirismo naif, y cuando llegan a realizar demostraciones deductivas aun así se siguen apoyando del empirismo.

A los estudiantes les cuesta demostrar sus propias conjeturas sin la ayuda de un mediador (profesor). Posiblemente esto se deba a la poca promoción de la actividad demostrativa en años anteriores.

La demostración empírica, ha permitido que los estudiantes mejoren su comprensión de teoremas geométricos, cuando se les acerca a ellos de una manera constructiva.

El razonamiento inductivo propio de la demostración empírica, es el más utilizado por los estudiantes a la hora de verificar teoremas y propiedades geométricas.

Los docentes de primeros semestres universitarios siempre muestran su inconformidad con los bajos rendimientos de sus estudiantes en los cursos donde la demostración matemática es importante y además los estudiantes están muy cercanos al fracaso debido a su poco acercamiento con esta actividad; por eso se hace importante que en la educación media se busque tener presente la actividad demostrativa como antes se mencionó preferiblemente en geometría. Una alternativa es la demostración empírica, utilizar este cuerpo teórico se hace fácil pues es cercano a todos los niveles educativos ya que su elemento de validación son los ejemplos y los estudiantes de básica y media son cercanos al razonamiento inductivo y la ejemplificación, así como son los sentidos su principal fuente de contacto desde lo concreto de la matemática y la geometría. Es importante que esta actividad demostrativa se realice desde los primeros niveles educativos ya que es en ellos donde se forman los lenguajes naturales y simbólicos, se puede realizar desde estrategias didácticas como el origami y la papiroflexia, desde la mostración matemática con objetos didácticos y la utilización de las TICS aunque estas no sean necesarias, pues es una actividad que no tiene la necesidad de costosos recursos económicos. Los planes de clase de esta investigación fueron diseñados para estudiantes de 10 y 11 que han desarrollado diferentes tipos de razonamiento en su paso por la institución educativa, no obstante podría adaptarse a niveles menores buscando promover algún tipo de razonamiento especifico de acuerdo al nivel educativo y la edad de los estudiantes.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Burques, C., & Fortuny, J. M. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis, S.A.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas*. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.

Bausela, E. H. (2014). La Docencia A Través De La Investigación–Acción. *Revista Iberoamericana De Educación*.

Bedoya, F, Jiménez, O, & Santa, Z. (2007). *Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características.* Tesis de pregrado. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Camargo, L.; Perry, P.; Rojas, C. y Samper, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Camargo, L.; Leguizamón, C. Y Samper, C. (2003). *Tareas que Promueven el Razonamiento en el Aula a Través de la Geometría*. Bogotá: Cuadernos De Matemática Educativa.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. Premisa (Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática), 7(23), 23-29.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. Épsilon. 26, 15-30.

Dieudonné, J (1987). The Concept Of Rigorous Proof. *The Mathematical Gazzete* 80: 204-206

Dominguez, M. (1991). El aprendizaje por descubrimiento dirigido y aplicado a la enseñanza de la matemáticas. *Suma* , 39-41.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. (M. V. Restrepo, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Elliott, J. (2000). El Cambio Educativo Desde La Investigación-Acción. Morata. España.

Elliott, J. (2000). La Investigación-Acción En Educación. Morata. España.

Fiallo, E., & Gutiérrez, Á. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander (Colombia), 355-368.

Fortuny, J.Mª. & Giménez, j. (2001). Razonamientos Geométricos De Alto Nivel Y Actividades Predemostrativas Con Alumnos Y Alumnas De 12-16 Años. Uno, Revista De Didáctica De Las Matemáticas, 28, Pp. 20-38.

Godino, J. D., & Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación. *Enseñanza de las ciencias* , 405-414.

González Urbaneja, P. M. (2008). El Teorema Llamado De Pitágoras: Una Historia Geométrica De 4.000 Años. *Sigma: Revista De Matemáticas= Matematika Aldizkaria*, (32), 103-130.

Gutiérrez, Á. (2002). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. En Moreno, M. F. y otros (Ed.) Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidad de Almería. (pp. 85-93).

Ibáñez, M. &Ortega, T. (2004). Textos argumentativos. UNO. 35, pp 39-52.

Larios Osorio, V. (2000). *Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Tesis de Maestría en Docencia de Matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro.

Lourido Guerrero, D. M., & Melán Jaramillo, C. A. (2012). *La enseñanza inicial de la demostración matemática en la educación básica desde una perspectiva cognitiva.* Tesis de pegrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Martinez, A (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemógica y didáctica. *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (págs. 29-43). Almería; Universidad de Cordoba.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. En: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ponce de León, P. (2007). *La enseñanza inicial de la demostración matemática en la educación básica desde una perspectiva cognitiva.* Tesis de maestría no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Quintero, G. (2010). *De la conjetura a la demostración deductiva con la mediación de un ambiente de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Cali: Universidad del Valle.

Restrepo, B. G. (2000). Una Variante Pedagógica De La Investigación-Acción Educativa. *OEI-Revista Iberoamericana*.

Samper de Caicedo, C., Camargo Uribe, L., & Leguizamón de Bernal, C. (2003). *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la Geometría.*Universidad Pedagogica Nacional.

Sánchez, E. A. S. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática, 15*(2), 27-54.

8. ANEXOS

Anexo 1. Caracterización de la Institución

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
CARACTERIZACIÓN DE LA INSTITUCIÓN

Institución Educativa Lola González

Objetivo: Recopilar información que posibilite realizar una caracterización general de la institución, desde lo organizacional, académico y pedagógico.

La información que usted nos proporcionará será de gran ayuda, por lo tanto le solicitamos sea claro y sincero en sus respuestas.

I. Generalidades De La Institución Educativa

Nombre:_______________________________________Municipio:_________________

Urbana____ Rural ____

Niveles en los que presta el servicio educativo: Preescolar ( ) B. Primaria ( ) B. Secundaria ( ) Media ( ) Formación complementaria ( ) Cuál?________________

En la media vocacional, la institución ofrece:

Formación académica ( ) Formación técnica ( ) Especialidad: _______________

Jornada(s) de funcionamiento de la institución:

J. Mañana ___ J. Tarde ____ J. Nocturna____ J. Única____ J. fines de semana _____

Ii. Categorización Del Personal:

Administrativo

Marque con una X, el nivel educativo

	Cantidad	Bachiller	Normalista	Licenciado	Especialista	Profesional	Maestría
Rector							
Coordinador Académico							
Coordinador Convivencia							
Secretarias							

Docentes

Indique el número de docentes en cada nivel educativo

	Cantidad Total	Bachiller	Normalista	Licenciado	Especialista	Profesional	Maestría
Preescolar							
Primaria							
Básica secundaria							
Media Vocacional							

III. Proyecto Educativo Institucional P.E.I

1. Modelo o corriente pedagógica que orienta el P.E.I

   Explique si existe o no relación y coherencia entre el componente teleológico (misión, visión, filosofía) con el modelo pedagógico y los proyectos institucionales.

2. Describa cómo el sistema institucional de evaluación se articula a las políticas establecidas en la legislación nacional (decreto 1290) y a los enfoques y lineamientos del MEN.

3. Describa como esta organizado el plan de área de matemáticas, si su estructura está enfocada en los lineamientos curriculares y los Estándares básicos de competencia en matemáticas. (Apoyarse en el documento anexo).

IV. Resultados Académicos Institucionales En El Área De Matemáticas

Realice un rastreo estadístico de los resultados académicos institucionales de matemáticas en el 2013 en cada período. (Puede apoyarse en tablas o gráficos.

V. Resultados Obtenidos En Pruebas Externas:

1. **Resultados Pruebas Saber – Icfes**

Año	**NIVEL OBTENIDO INSTITUCIONAL**
2009	
2010	
2011	
2012	
2013	

Promedio Saber- Icfes En El Área De Matemáticas

Año	**PROMEDIO**
2009	
2010	
2011	
2012	
2013	

En el área de matemáticas realice un análisis de los resultados de la pruebas Saber -Icfes, por componente y competencia (realizar gráficos o tablas)

2. **Resultados Pruebas Saber En El Área De Matemáticas**

http://www.icfessaber.edu.co/historico.php/home/buscar

Año	**PROMEDIO 5° GRADO**	**PROMEDIO 9° GRADO**
2009		
2012		
2013		

Realice un gráfico o tabla que ilustre los resultados de las pruebas Saber en los grados 5 y 9°en el 2009 y 2013 en cada una de las competencias y componentes del área.

Identifique las debilidades y fortalezas específicas en cada competencia y componente.

Haga el análisis respectivo de estos resultados.

Anexo 2. Caracterización de los Docentes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
CARACTERIZACIÓN DE LOS DOCENTES

Institución Educativa Lola González

Objetivo: Recopilar información que posibilite caracterizar a los docentes de matemáticas, de las instituciones cooperadoras de la práctica pedagógica de la Licenciatura de matemáticas y física de la Universidad de Antioquia.

La información que usted nos proporcionará será de gran ayuda, por lo tanto le solicitamos sea claro y sincero en sus respuestas.

1. Sexo **m** ☐ **f** ☐ Años de experiencia como docente: ____

2. Título obtenido: Normalista ☐ Licenciado ☐ Tecnólogo ☐ Profesional no docente ☐ Especialista ☐ Maestría ☐ Doctorado ☐

3. ¿Pertenece a algún grupo académico o de investigación? Si ☐ No ☐ Cuál ______________________________

4. ¿Lidera algún proyecto en la institución? Si ☐ No ☐ Cuál ____

5. ¿Sus clases están orientadas a partir de:

☐ Un texto guía ☐ De sus talleres y guías propias ☐ Desde la web Otro ¿Cuál? ______________________

6. ¿Su plan de clases esta focalizado en lo establecido en el plan de área y el modelo pedagógico institucional? Si ___ No ___ Justifique:

____

____

7. En su práctica como docente, como se refleja el desarrollo de las competencias específicas de matemáticas?____

8. ¿Cree usted que las herramientas y recursos con que cuenta la institución son suficientes para lograr mejores resultados de sus estudiantes en el área de matemáticas? Si ( ) No ( ) Justifique: ____

9. ¿Aproximadamente qué porcentaje de estudiantes le pierden el área de matemáticas en cada período académico?

( ) Entre el 5% y 15% ( ) Entre el 16% y 25% ( ) Entre el 26% y 35%

( ) Entre el 36% y 45% ( ) Entre el 46% y 55% ( ) 60 % o mas

10. ¿Qué lo motivo a ser maestro de matemáticas? ____

11. ¿Considera usted que el componente geométrico ha perdido interés en los contenidos enseñados en la educación secundaria? **Si___ No___ Justifique:**

____

____

12. ¿Considera viable enseñarle a los estudiantes de educación básica secundaria métodos de demostración matemática de acuerdo a las posibilidades reales que ellos pueden tener y desarrollar?

Si___ No___ Justifique:_____________

Anexo 3. Caracterización de los Estudiantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
CARACTERIZACIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Institución Educativa Lola González

Fecha: _______________

Objetivo: Recopilar información que posibilite caracterizar los estudiantes que hacen parte de la práctica pedagógica de la Licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia.

La información que usted nos proporcionará será de gran ayuda, por lo tanto le solicitamos sea claro y sincero en sus respuestas.

1. Sexo **m** ☐ **f** ☐ Grado: _______ Edad:___________ Estrato socio-económico ______

2. ¿Con quién vive? **Padres** ☐ **hermanos** ☐ **abuelos** ☐ **tíos** ☐ **otros** ☐ cuáles?______________

3. Nivel educativo de las personas con las que vive

FAMILIAR	NINGUNO	PRIMARIA	SECUNDARIA	TECNICO	UNIVERSIDAD
PADRE					
MADRE					
HERMANOS					
ABUELOS					
TIOS					
OTROS ¿Cuáles?					

4. Actividad económica a la que se dedican sus padres o acudientes:

____

5. ¿Cuáles son las materias de mayor agrado y

justifique?:____

6. ¿Cuáles son las materias de menor agrado y justifique?:

____

7. ¿Ha tenido dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y la geometría? SI ___; NO

____, cuáles podrían ser las posibles causas:

Desinterés personal por la materia____

Metodología de clase por parte del profesor____

Poca claridad en la exposición de los contenidos_____

La complejidad de las temáticas____

La poca preparación académica ____

Los recursos utilizados _____

Falta de tiempo para afianzar los conocimientos____

Poca capacidad del profesor para generar interés_____

Otras:

8. ¿Qué percepción tienes acerca de las matemáticas? _______________________

9. En la enseñanza de las matemáticas, que materiales y recursos utiliza el profesor**:**

____

10. ¿Cuando termine su bachillerato se va dedicara a?

Seguir estudios superiores ☐ trabajar ☐ descansar ☐

11. ¿Qué carrera profesional quisiera seguir cuando termine su bachillerato?

Anexo 4. Prueba Diagnóstica

PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
PRUEBA DE DIAGNÓSTICO DE GEOMETRÍA GRADO 11-5

Institución Educativa Lola Gonzales.

Nombres de los participantes:

1. Enuncie con sus propias palabras, ¿qué cree usted que estudia la Geometría?

2. ¿Dónde cree usted que se puede aplicar la Geometría?

3. Defina con sus propias palabras lo siguiente:

- Punto:
- Plano:
- Espacio:
- Figura geométrica:

4. Enuncie con sus propias palabras, ¿qué crees que es una demostración?

4.1 En un proceso de demostración geométrico, se puede utilizar los siguientes métodos:

a) Método inductivo.
b) Método deductivo.
c) Método sintético.
d) Todos los anteriores
e) No se

5. Conoce usted lo que es una proporción; si es posible ejemplifique.

6. ¿Cuáles proposiciones cree usted que son la base de la geometría?

a) Axiomas
b) Postulados
c) Teoremas
d) Corolarios
e) Problemas
f) Todos los anteriores

7. Razone sus respuestas:

¿Qué cree usted que pesa más, un kilo de hierro o un kilo de algodón?

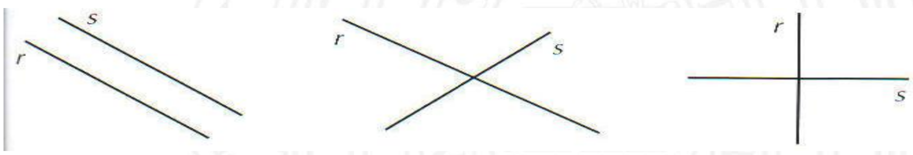
Si un ángulo mide 25º; ¿Cuánto medirá su complemento y su suplemento?

Si un triángulo tiene dos lados iguales, y uno de sus ángulos externo mide 20º.

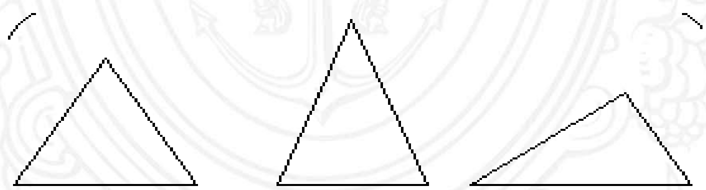
¿Cuánto miden cada uno de los ángulos internos del triángulo?

Con sus propias palabras, enuncia la diferencia que existe entre semejanza y congruencia de figuras geométricas.

8. Escriba debajo de cada par de rectas si son paralelas, perpendiculares y secantes.

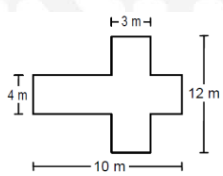


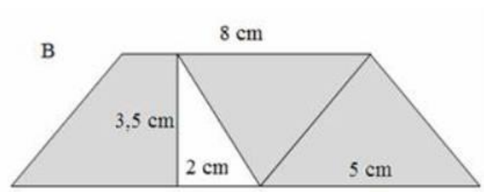
9. Escriba debajo de cada triangulo si es isósceles, escaleno o equilátero.

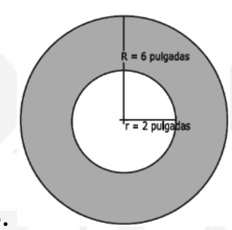


10 Halle el área de las siguientes figuras, (puede realizar operaciones en este documento o adjuntar una hoja con las operaciones que te llevaron a la respuesta).

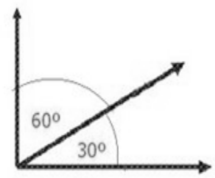
- En el punto 2 es encontrar el área sombreada de la figura.
- En el punto 3 el radio mayor R=6 y el radio menor es r=2

1. 

2. 

3. 

11. ¿Cuál es la imagen que tiene los ángulos complementarios y cual tiene los ángulos suplementarios?


60º
30º

Anexo 5. Plan de Clase 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Plan De Clase N° 1

Docente: Edwin Villa Álvarez

Grado: 11-5

Fechas: Mayo 28 /2014

Nº De Estudiantes: 35

Material A Utilizar: Cámara fotográfica (Celular, tablets), El entorno de la institución educativa.

Descripción de la Clase:

Al ser la geometría una disciplina eminentemente visual, podríamos asegurar que enseñarse la geometría sin tener en cuenta la parte visual en los procesos de enseñanza podría hacerse más complejo aunque no imposible.

Aprovechando la capacidad de visión de todos los estudiantes utilizamos la fotografía como ese instrumento tecnológico diseñado para tomar momentos de la realidad y congelarlos, esta ha sido de gran auge en los seres humanos que buscan guardar sus representaciones y momentos de la realidad, hoy la mayoría de los dispositivos de comunicación poseen entre sus herramientas una cámara. Apropiándondos de este dispositivo y en busca de captar la atención de los estudiantes, y conociendo que la geometría podemos encontrarla en la realidad pues todo lo existente y visible a los ojos humanos tiene un diseño geométrico, se buscó conectar la fotografía y la geometría para hacer la muestra final teórica del empirismo naif como un método de demostración empírica con ejemplos como método de verificación a través de la inducción y la percepción.

Indicadores:

- Utiliza elementos matemáticos de verificación.
- Propone relaciones matemáticas detectadas en el ejemplo.
- Realiza análisis desde las propiedades geométricas.
- Percibe elementos conjeturales que puedan conducir al planteamiento de hipótesis.
- Realiza conjeturas y demostraciones desde la percepción táctil.
- Utiliza la fotografía de su entorno como estrategia didáctica para la enseñanza de la geometría.

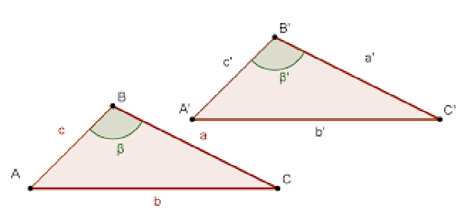
Descripción de procesos

1. **Momento 1**. Actividad diagnóstica e introductoria: En dicha actividad los estudiantes debían tomar fotografías en la institución de figuras geométricas

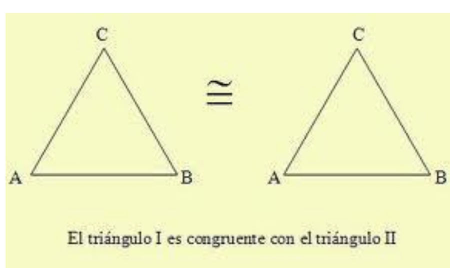
2. Momento 2 Actividad de Fortalecimiento Conceptual. Desarrollar la capacidad de visualización en geometría es de vital importancia, pues es a partir de ella que el estudiante puede mirar más allá de lo normal, acceder a las propiedades de un objeto y poder identificar dichas propiedades con sus funciones en la realidad. Con las siguientes preguntas podemos ilustrar esto, ¿Por qué los coliseos de su Institución Educativa son en forma de arco? ¿Podrían ser planos? ¿Hay diferencias notables entre una forma y la otra? Estas preguntas no se generan solo visualizando, se necesita de la observación analítica. La realidad es lo que puede llevarlos a reflexionar, pues cuando visualizan un arco reconocen el objeto geométrico como tal y al verlo en el coliseo seguramente podrán verlo como un objeto geométrico pero ya funcional. Para esto los estudiantes investigaron sobre las figuras geométricas básicas y sus propiedades más representativas, vía web desde sus dispositivos móviles.

3. Momento 3. Actividad dirigida por el docente. Seguramente al reconocer las propiedades, y argumentar el porqué de la funcionalidad geométrica de dicho objeto, la actividad demostrativa como secuencia lógica podrá ser de mayor acceso en términos de aprendizaje. La imagen, la visualización y la observación son situaciones que la fotografía permite tener en un mismo momento pues son fragmentos de la realidad. Para este momento, el profesor dio una clase magistral de las propiedades fundamentales de algunas figuras geométricas, y profundizó en congruencia y semejanza.

CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIANGULOS



Congruencia de triángulos



En matemáticas, dos figuras de puntos son congruentes si tienen los lados iguales y el mismo tamaño (o también, están relacionados por un movimiento) si existe una isometría que los relaciona: una transformación que es combinación de translaciones, rotaciones y reflexiones. Por así decirlo, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

Criterios de congruencia de triángulos

Los criterios de congruencia de triángulos nos dicen que no es necesario verificar la congruencia de los 6 pares de elementos (3 pares de lados y 3 pares de ángulos), bajo ciertas condiciones, podemos verificar la congruencia de tres pares de elementos.

Primer criterio de congruencia: LLL

Dos triángulos son congruentes si sus tres lados son respectivamente iguales.

a ≡ a’
b ≡ b’
c ≡ c’
→ triáng ABC ≡ triáng A’B'C’

Segundo criterio de congruencia: LAL

Dos triángulos son congruentes si son respectivamente iguales dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos.

b ≡ b’
c ≡ c’

α ≡ α’

→ triáng ABC ≡ triáng A’B'C’

Tercer criterio de congruencia: ALA

Dos triángulos son congruentes si tienen un lado congruente y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado también congruentes. A estos ángulos se los llama adyacentes al lado.

b ≡ b’

α ≡ α’

β ≡ β’

→ triáng ABC ≡ triáng A’B'C

Cuarto criterio de congruencia: LLA

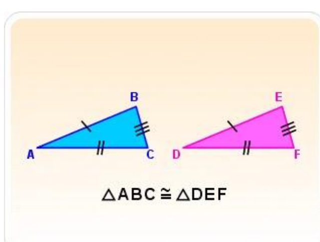
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y los ángulos opuestos al mayor de los lados también son congruentes.

a ≡ a’

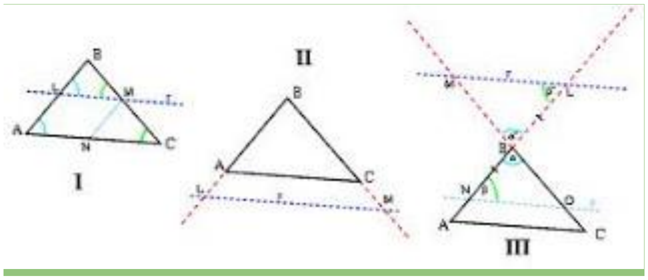
b ≡ b’

β ≡ β’

→ triáng ABC ≡ triáng A’B'C’



Semejanza de Triángulos:



El concepto de semejanza corresponde a figuras de igual forma, pero nonecesariamente de igual tamaño.

Una semejanza, es un coaguló geométrico difundido de rotación (una rotación y una posible reflexión o simetría axial). En la rotación se pueden cambiar los lados y la radiación de una materia pero no se altera su coagulo.

En el caso del triángulo, la forma sólo depende de sus ángulos (no así en el caso de un rectángulo, por ejemplo, donde uno de sus ángulos es recto pero cuya forma puede ser más o menos alargada, es decir que depende del cociente base / altura).

Se puede simplificar así la definición: dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales dos a dos.

En la figura, los ángulos correspondientes son A = A', B = B' y C = C'. Para denotar que dos triángulos ABC y DEF son semejantes se escribe ABC ~ DEF, donde el orden indica la correspondencia entre los ángulos: A, B y C se corresponden con D, E y F, respectivamente.

Una similitud tiene la propiedad (que la caracteriza) de multiplicar todas las longitudes por un mismo factor. Por lo tanto las razones longitud imagen / longitud origen son todas iguales, lo que da una segunda caracterización de los triángulos semejantes:

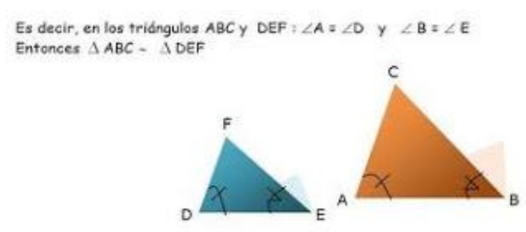
Dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son congruentes.

Criterios de semejanza de triángulos.

1.-Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. 2.-Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman. 3.- Dos triángulos son semejante si sus lados son proporcionales.

Para que dos triángulos sean semejantes es suficiente con que se verifique una de las siguientes condiciones:

1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales:
2. Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales:
3. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido:



Momento 4. Trabajo cooperativo. La actividad desde un principio es diseñada para que este momento este presente desde la toma de fotografías pues su realización fue grupal. Máximo cuatro estudiantes.

Momento 5. Ejercicios a explorar adicionales. En este momento los estudiantes escogen específicamente algunos ejemplos de las imágenes que fotografiaron y deben hacer una clasificación de las figuras geométricas según sus propiedades.

Momento 6. Evaluación. La actividad es evaluada a partir de una exposición de lo hecho por cada grupo. Para esto ellos diseñaron presentaciones en software como power point o Prezi y mostraron a sus compañeros los trabajos.

Ítems	**0**	**1**	**2**	**3**
1. Soy puntual en las clases				
2. Participo activamente en el trabajo colaborativo				
3. Presto atención a las clases				
4. Sigo las instrucciones del profesor				
5. Termino las actividades asignadas para realizar en el aula				
6. Me esfuerzo en la realización y entrega puntual de las tareas.				
7. Hago consultas adicionales sobre el tema visto en clase (internet, libro u otros)				
8. Realizo preguntas sobre lo que no entiendo en la clase				
9. Evito hablar sobre temas que no son parte de la clase				
10. Participo de forma activa y regular en las actividades				

Anexo 6. Plan de Clase 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Plan De Clase N° 2

Docente: Edwin Villa Álvarez

Grado: 11-5

Fechas: Julio 2 /2014

Nº De Estudiantes: 35

Material A Utilizar: Papel cortado en forma de cuadro, tijeras, colores, lápiz, regla.

Descripción de la clase

El origami: Es una herramienta de construcción que permite visualizar teoremas de una manera sencilla y práctica, esta está íntimamente ligada a las matemáticas: Muchos de los alumnos logran comprender de una manera más sencilla conceptos geométricos como punto medio, mediatriz, bisectriz, simetrías y semejanzas, utilizando de una manera intuitiva y empírica conceptos abstractos al doblar y construir a través del papel.

Este plan de clase se dividió en dos sesiones de trabajo, en la primera sesión se realizaron los momentos 1,2 y 3 y en la segunda sesión los momentos 4,5 y 6 siempre teniendo presente la intención de cada momento en medio de la fusión de estos.

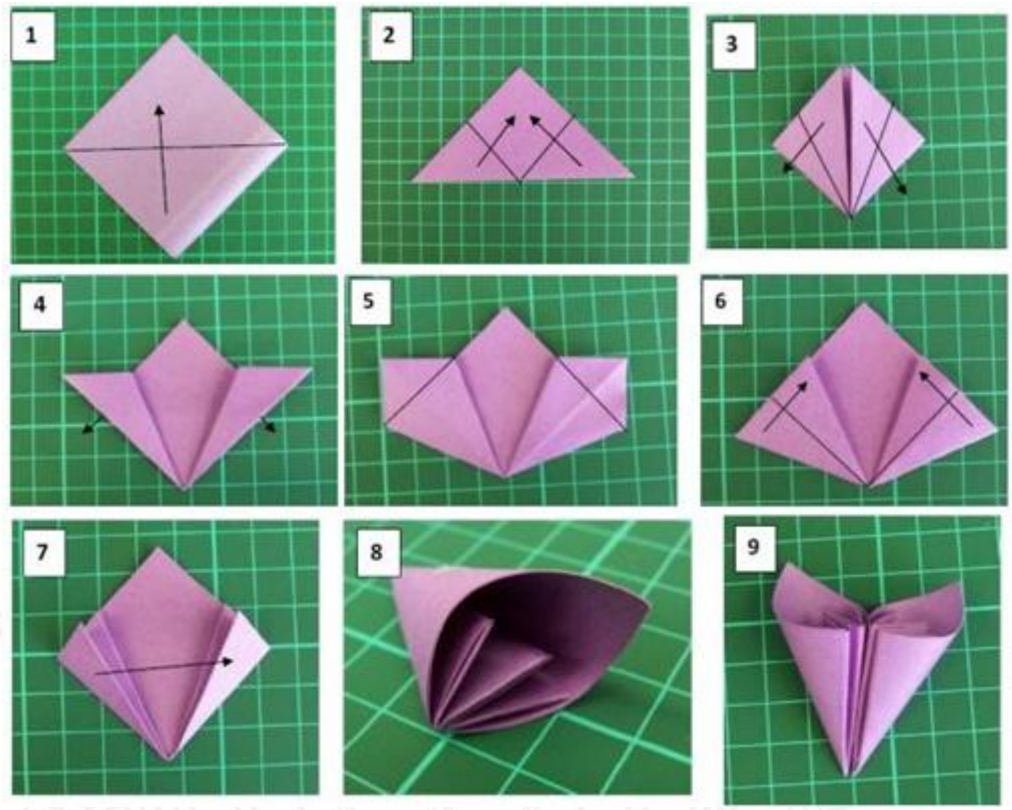
Indicadores

- Identifica ejemplos para demostrar conjeturas.

- Escoge un determinado ejemplo crucial para probar hipótesis.
- Identifica contraejemplos para refutar hipótesis.
- Realiza construcciones sobre un ejemplo seleccionado.
- Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas.
- Selecciona cuidadosamente ejemplos para demostrar conjeturas.
- Demuestra un teorema con base en propiedades y relaciones observadas.
- Usa propiedades matemáticas aceptadas partiendo de la simple observación
- Relaciona diferentes ejemplos para demostrar sus conjeturas.

Descripción de procesos

1. Momentos 1, 2 y 3. Primera sesión. El docente se encarga de guiar a partir del origami los momentos de introducción y de fortalecimiento conceptual en la medida que va realizando una rosa de papel a partir de una hoja en forma de cuadrado, mientras el docente dirige cada paso, el papel forma figuras geométricas que serán atravesadas por preguntas conceptuales que promovieran el razonamiento y la apropiación de conceptos como, ¿un cuadrado es rectángulo? ¿Cuáles son los paralelogramos? ¿Un triángulo equilátero es un ejemplo particular o general del triángulo isósceles? Y las que puedan ocurrir través de la participación de los estudiantes el docente dejara claras las respuestas.



2. Momentos 4,5 y 6 (segunda sesión). Utilizando la rosa u otra figura que se pudiera diseñar con el mismo cuadrado de papel, los chicos de una manera grupal debían realizar una secuencia lógica de los pasos para realizar dicho objeto, identificando figuras geométricas con sus propiedades. Entre los grupos se repartían lo diseñado y evaluaban la secuencia lógica de sus compañeros.
3. Esta actividad buscaba fortalecer conceptos, acercar a los estudiantes con la importancia de las secuencias lógicas, la construcción de figuras geométricas, el análisis de sus propiedades, y el uso de ejemplos y contraejemplos para verificar sus argumentos y conclusiones, lo cual es propio del experimento crucial que hemos expuesto como una familia de demostración empírica.
4. **Autoevaluación**

Evalúate los siguientes aspectos marcando una x en la casilla que crees es la mas acertada.

La escala a utilizar es: **3: Excelente – 2: Buena – 1: Regular – 0: Mala**.

Ítems	**0**	**1**	**2**	**3**
11. Soy puntual en las clases				
12. Participo activamente en el trabajo colaborativo				
13. Presto atención a las clases				
14. Sigo las instrucciones del profesor				
15. Termino las actividades asignadas para realizar en el aula				
16. Me esfuerzo en la realización y entrega puntual de las tareas.				
17. Hago consultas adicionales sobre el tema visto en clase (internet, libro u otros)				
18. Realizo preguntas sobre lo que no entiendo en la clase				
19. Evito hablar sobre temas que no son parte de la clase				
20. Participo de forma activa y regular en las actividades				

Anexo 7. Plan de Clase 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Plan De Clase N° 3

Razonando A Partir De La Inducción

Docente: Edwin Villa Álvarez

Grado: 11

Fechas: Agosto 6, 13 Del 2014.

Nº De Estudiantes: 35

Material A Utilizar: Transportador, regla, papel reciclable, lápiz, tablero, fotocopias (Guía de trabajo), cuaderno de los alumnos, notas del profesor**.**

Descripción de la Clase.

Una de las características importantes del razonamiento matemático, es que este nos permite llegar a la generalización de propiedades y a resultados y conclusiones a partir de la observación, del análisis o la verificación de casos particulares (Alsina, Burgués, Fortuny, 1997). De este tipo de razonamiento subyacen la capacidad de inducir y deducir las cuales tienen una tarea esencial para su desarrollo, y son vitales para llegar al rigor matemático que tanto se busca en quien estudia esta bella área.

La geometría tuvo un gran aporte a la humanidad, debido a que a partir de ésta la cultura griega supo mezclar los contenidos con el rigor de una lógica. Por lo tanto en esta clase de geometría, se podrán encontrar conceptos que se encaminaran a un objetivo específico que es la demostración empírica o pragmática.

Los conceptos que se podrán encontrar en esta clase son: polígono (convexo y cóncavo), área, perímetro, vértice, diagonal, ángulo interior y exterior de un polígono, y a partir de estos conceptos se realizaran diferentes actividades que encaminaran a desarrollar el razonamiento geométrico en la inducción para contar y verificar; pero será necesario entender las propiedades de los polígonos, el cálculo de áreas y perímetros, la clasificación de figuras planas, la identificación y trazo de las diagonales de un polígono y sus ángulos interiores.

La tarea final después de asimilar los conceptos será la introducción al concepto de inducción y de lo que es un proceso inductivo con un ejemplo que lo ilustre desde la cotidianidad y a partir de esto propiciar un espacio para el trabajo grupal y la realización de una actividad donde los estudiantes pongan en funcionamiento su capacidad de razonar a través de procesos inductivos para contar en la demostración de hipótesis particulares.

Indicadores

- Recuerda y afianza algunos conceptos de la geometría plana.
- Identifica los polígonos con sus respectivas características.
- Utiliza algunos instrumentos de medición a favor de la geometría.
- Reconoce la importancia de los instrumentos de medición.
- Distingue cuando una hipótesis es inductiva.
- Razona a través de procesos inductivos en la actividad demostrativa.

MOMENTOS

1. **Actividad Diagnostica e Introductoria.**

Los resultados de dicha actividad permitirán encontrar un punto de partida para la realización de las próximas actividades, y darán al profesor un panorama de la población con la cual estará realizando este conjunto de actividades y al mismo tiempo recordara en los estudiantes conceptos antes vistos en grado anteriores y finalmente poder facilitar la conexión de dichos conceptos con los nuevos.

I. **Elija una sola de las alternativas que consideres correcta, marcando con (X) o encierre un círculo la alternativa elegida**

1. El polígono regular de tres lados se llama:

A) Triángulo acutángulo. B) Triángulo rectángulo. C) Triángulo Isósceles.

D) Triángulo Equilátero.

2. La unidad de medida que se utiliza para medir ángulos es:

A) Grados sexagesimales. B) Centímetros. C) Metros. D) Litros.

3. La suma de los ángulos interiores de un pentágono es:

A) 180° B) 540° C) 90° D) 360°

4. Indica cuál de las siguientes medidas de ángulos representa un ángulo obtuso:

A) 60° B) 90° C) 180° D) 110

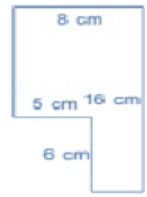
5. ¿Cuál de los siguientes elementos geométricos es un polígono?

A) Esfera. B) Cilindro. C) Rombo. D) Cubo.

6. El área de un triángulo rectángulo de dimensiones: 3, 4 y 5 cm es:

A) 6 cm^2 B) 12 cm^2 C) 6 cm^2 D) 12 cm^2.

7. El perímetro de la siguiente figura, es:



A) 74 cm. B) 35 cm. C) 47cm. D) Ninguna de las Anteriores.

II. TÉRMINOS PAREADOS: Escribe el número del concepto en la definición que corresponda.

1. Recta.	____ Superficie del espacio sin curvas, plana y de infinitas dimensiones.
2. Trazo.	____ Angulo cuya medida es exactamente 90°.
3. Angulo Recto.	____ Línea infinita en ambos extremos, formada por puntos.
4. Triángulo.	____ Figura geométrica formada por 4 lados, 4vértices y 4 ángulos.
5. Angulo obtuso.	____ Unidad mínima e indivisible de la geometría.
6. Angulo extendido.	____ Angulo que mida más de 90°.
7. Punto.	____ Figura geométrica formada por 3 lados, 3 vértices y 3 ángulos.
8. Cuerpos geométricos	____ Angulo que mide exactamente 180°.
9. Cuadrilátero.	____ Porción de la recta finita en ambos extremos.
10. Plano.	____ Formado por caras planas o curvas y tienen volumen

2. Actividad de Fortalecimiento conceptual.

Con esta actividad se buscara fortalecer algunos conceptos previos para la actividad final, con definiciones específicas de éstos y determinadas operaciones que la geometría nos permite realizar.

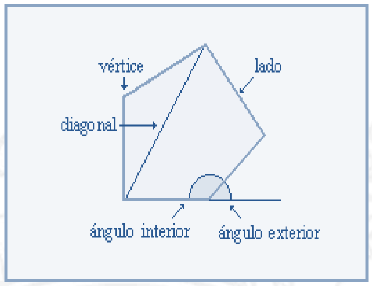
Recordemos algunas definiciones.

Polígono: En geometría, un polígono es una figura plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que cierran una región en el plano. Estos segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersecan se llaman vértices. El interior del polígono es llamado área. Ejemplos:

Algunas partes de los polígonos son

En un polígono se pueden distinguir los siguientes elementos geométricos:

- **Lado (L):** es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- **Vértice (V):** es el punto de intersección (punto de unión) de dos lados consecutivos.
- **Diagonal (d):** es el segmento que une dos vértices no consecutivos.
- **Perímetro (P):** es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
- **Ángulo interior (AI):** es el ángulo formado, internamente al polígono, por dos lados consecutivos.
- **Ángulo exterior (AE):** es el ángulo formado, externamente al polígono, por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.



Al final del documento se anexan otras propiedades de los polígonos.

Además recordar lo siguiente:

Polígono cóncavo: Los "polígonos cóncavos" son aquellos que al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180 grados ó \pi radianes. En un polígono cóncavo al menos una de sus diagonales es exterior al polígono.

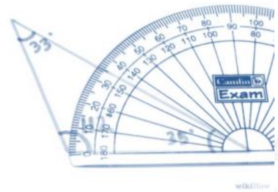
Polígono convexo: Un polígono convexo es una figura en la que todos los ángulos interiores miden menos de 180 grados o \pi radianes y todas sus diagonales son interiores.

Nota:

- Un polígono es convexo solo si cualquier segmento entre dos puntos que estén dentro del mismo está dentro, es decir el segmento no corta los lados.
- En un polígono convexo, todos los vértices "apuntan" hacia el exterior del polígono.
- Todos los triángulos son polígonos convexos. Todos los polígonos regulares son convexos.

3. Actividad Dirigida por el docente. "Papel, tijeras y transportador"

La actividad consiste en llevar al aula un transportador para medir los ángulos interiores de un triangulo y sumarlos para construir de una manera práctica el teorema de que dicha suma es de 180°.



4. **Trabajo cooperativo.**

- Para esta actividad es importante recordar que el Razonamiento inductivo, es un tipo de razonamiento en que la verdad de las premisas brinda apoyo a la verdad de la conclusión, pero no la garantiza.

Ejemplos inductivos de la vida cotidiana.

- Si la llama de la vela quema porque es caliente, el bombillo quema porque está caliente, la hoya quema porque está caliente; entonces todo aquello que esté caliente me puede quemar.
- Los pájaros tienen alas y vuelan, los patos tienen alas y vuelan, los murciélagos tienen alas y pueden volar, las abejas tiene alas y vuelan; por lo tanto, todos los animales que tienen alas vuelan.
- Mi papá es buen chofer, mis hermanos son buenos choferes, mis tíos son buenos choferes, mis primos son buenos choferes, por lo tanto, todos los hombres de mi familia son buenos choferes.

A continuación en grupos creen diferentes ejemplos inductivos de la vida cotidiana:

Inducción como forma de razonamiento matemático: esta permite demostrar una cierta propiedad aritmética o geométrica Pn que se desea válida para cualquier número natural n (n puede representar el número de lados de un polígono, las caras de un poliedro, las dimensiones etc.). El proceso de demostración por inducción de una relación Pn exige dos pasos:

1. Verificar que efectivamente el resultado P_1 es cierto.
2. Verificar que efectivamente el resultado para cualquier Pn es cierto, o sea explicitar la hipótesis de inducción y de ello poder seguir la validación de Pn+1.

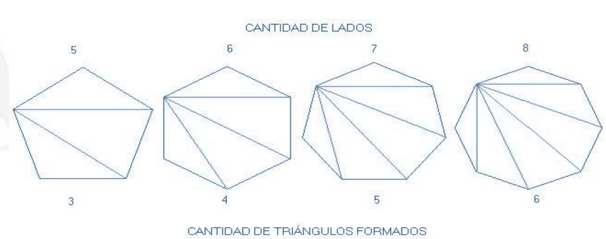
Según lo anterior, y los ejemplos de la vida cotidiana antes mencionados.

P1 podría ser, la llama de la vela quema, P2 el bombillo quema… Pn: Todo lo caliente puede quemar

Inducción para contar: Se trata de ir analizando cómo una determinada cantidad evoluciona al aumentar progresivamente la complejidad del problema (numero de lados o de ángulos o de apotemas, etc).

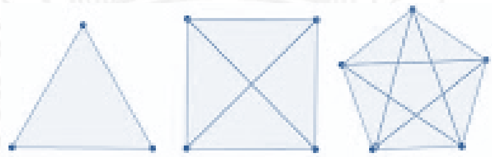
Ejemplo: Hallar la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados (Alsina, Burgués, Fortuny, 1997).

Para el primer caso interesante n=3 tenemos un triangulo y obviamente sus ángulos interiores suman 180°, para n=4 tendremos un cuadrilátero convexo que podrá descomponerse en 2 triángulos y, por tanto, sus ángulos interiores sumaran 2 x 180°. Aquí ya se puede observar que en general se tratará de descomponer el polígono convexo de 5 lados en tres triángulos, el de 6 en 4 triángulos (Figura 3)…., el de n lados en n-2 triángulos. Así obtendremos inductivamente que la suma de los ángulos interiores del polígono convexo de n lados es precisamente: **(n-2) 180°.**



Actividad grupal: Hallar las diagonales interiores de un polígono convexo de n lados. Seguidamente ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 645 lados?

Nota: Recuerda que un triangulo tiene 0 diagonales y un cuadrado tiene 2



5. **Ejercicios a explorar.** Desarrollar lo mismo con poliedros. Buscar teoremas que se pueden generalizar.
6. **Evaluación**

Desde lo conceptual.

- La comprensión de conceptos, desde su definición y aplicación en los diferentes ejercicios
- La identificación de propiedades y variables correspondientes al tema.
- Reconocimiento de una hipótesis inductiva.
- La generalización de hipótesis inductivas.

Desde lo procedimental.

- La utilización de conceptos previos para la adquisición de otros nuevos.
- La capacidad de argumentación de cada procedimiento realizado.
- La justificación verbal y lógica de cada actividad realizada.
- La utilización de procesos inductivos como razonamiento matemático.

Desde lo actitudinal.

- La iniciativa en el trabajo realizado desde la escucha y la participación activa del proceso.

- La responsabilidad y honestidad en la realización de cada actividad.
- La capacidad de apoyo en su profesor y compañeros.
- Su trabajo colaborativo con compañeros para llegar a los fines esperados.

7. **Autoevaluación**

Evalúate los siguientes aspectos marcando una x en la casilla que crees es la más acertada. La escala a utilizar es: **3: Excelente – 2: Buena – 1: Regular – 0: Mala**.

Ítems	**0**	**1**	**2**	**3**
21. Soy puntual en las clases				
22. Participo activamente en el trabajo colaborativo				
23. Presto atención a las clases				
24. Sigo las instrucciones del profesor				
25. Termino las actividades asignadas para realizar en el aula				
26. Me esfuerzo en la realización y entrega puntual de las tareas.				
27. Hago consultas adicionales sobre el tema visto en clase (internet, libro u otros)				
28. Realizo preguntas sobre lo que no entiendo en la clase				
29. Evito hablar sobre temas que no son parte de la clase				
30. Participo de forma activa y regular en las actividades				

Anexo 8. Plan de Clase 4

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Plan De Clase N° 4

Docente: Edwin Villa Álvarez

Grado: 11-5

Fechas: Agosto 20 /2014

Nº De Estudiantes: 35

Material A Utilizar: Papel Cortado En Forma De Cuadro, Tijeras, Colores, Lápiz, Regla, Carteles.

1. **Descripción de Clase**

Este plan de clase tuvo un toque diferente, pues los 6 momentos diseñados en los anteriores planes de clases están implícitos en este nuevo, no hubo un orden cronológico de los momentos fue una actividad grupal desde el principio pero siempre con la guía del docente. Además dicha actividad tuvo el acompañamiento del asesor, la profesora cooperadora y los profesores practicantes según MEC.

La demostración de Bhaskara de este teorema fue un proceso desarrollado en una de las últimas intervenciones, donde los estudiantes en un proceso de enseñanza-aprendizaje con intervención del docente y la participación activa del grupo de estudiantes se logró demostrar el teorema de Pitágoras a partir del doblado y el corte de papel; la papiroflexia en este caso, ayudó a que los estudiantes vieran y pudieran comprender de una manera más amplia, las propiedades del triángulo rectángulo y como sus lados se relacionan directamente con áreas de cuadrados. Dicha actividad formativa buscó generar en los estudiantes una postura de reflexión y de pensamiento crítico a la manera como se puede validar en matemáticas y de la importancia de generalizar y demostrar en esta área. Seguidamente los estudiantes utilizando los mismos recursos de una manera inductiva y empírica lograron enfrentarse a la demostración del teorema del binomio llegando incluso un estudiante a dar una demostración formal, pero ayudándose propiamente de la ejemplificación y construcción con papiroflexia.

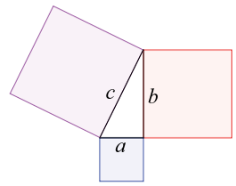
Metodología Estudio de Clase (MEC). Aprovechando la importancia de la construcción de conocimientos y de la socialización de los procesos investigativos que se realizan en los momentos de las prácticas profesionales, se hizo pertinente a partir de varios compañeros y el asesor de este trabajo crear un grupo de estudios de clase que acompañaran en algún momento las intervenciones de los profesores practicantes aplicando su método didáctico, con el fin de reconstruir, analizar y reflexionar los acontecimientos que se pueden dar y así enriquecer el trabajo y optimizar tiempo y recursos si es necesario pero dándole prioridad a los estudiantes y a la enseñanza más eficaz sobre el tema que se desea dar.

1. **Indicadores**

- Identifica ejemplos para demostrar conjeturas.
- Escoge un determinado ejemplo crucial para probar hipótesis.
- Identifica contraejemplos para refutar hipótesis.
- Realiza construcciones sobre un ejemplo seleccionado.
- Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas.
- Selecciona cuidadosamente ejemplos para demostrar conjeturas.
- Demuestra un teorema con base en propiedades y relaciones observadas.
- Usa propiedades matemáticas aceptadas partiendo de la simple observación
- Relaciona diferentes ejemplos para demostrar sus conjeturas.
- Realiza construcciones sobre el ejemplo seleccionado.
- Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas.

2. **Demostración de Bhaskara**

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

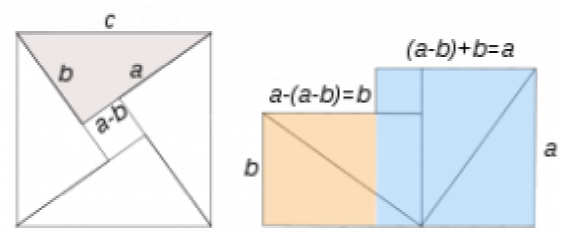


La expresión general del cateto y sus corolarios derivados son conocidos por todo el mundo. Algo que no parece tan mediático son las múltiples demostraciones que se han llevado a cabo a lo largo de años de historia en diferentes civilizaciones.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

El matemático hindú Bhaskara – el segundo de su nombre – partió de las demostraciones chinas para dar con otra posible explicación.

Seguimos con el cuadrado anterior, cuya área es la suma de cuatro triángulos rectángulos más la del cuadrado menor (de lado a – b) y transformamos en la siguiente construcción geométrica. Algebraicamente demostramos que el área de esta nueva figura es la suma de las superficies rojas (lado b al cuadrado) y azules (lado a al cuadrado) y que son del mismo valor que la del cuadrado chino de área c elevado al cuadrado.



La demostración de Garfield fue algo más geométrica. Uniendo dos triángulos por la base como vemos en la imagen de abajo, se puede trazar una línea que uniera ambos vértices libres de cada triángulo dando lugar a un trapecio.

Siendo X la superficie del trapecio e Y la superficie de la figura entera (compuesta por la suma del área de tres triángulos), podemos igualarlas y simplicar.

X

$$S_{trapecio} = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$$

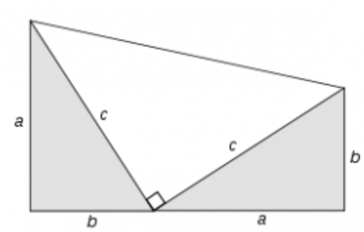
Y

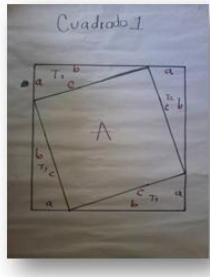
$$S = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

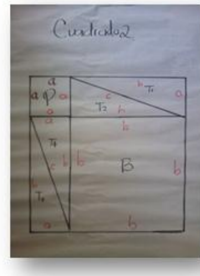
Igualamos $$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Simplificamos restándole 2ab a cada lado de la igualdad y ya tenemos de nuevo el paradigma geométrico de todo estudiante en su paso por educación secundaria.

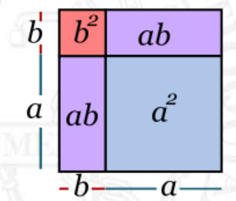
La representación gráfica de los dos triángulos rectángulos unidos por el mismo vértice para construir un trapecio:







3. **Demostración del teorema del binomio.** A partir de la demostración anterior, y con los mismos instrumentos, estos deben realizar la demostración del teorema del binomio.



$$(a+b)^2 = a^2+b^2+ab+ab = a^2+2ab+b^2$$

4. **Preguntas Finales y evaluación.**

- ¿Cómo se sintieron en la actividad de hoy?
- ¿Que aprendieron en la actividad de la demostración del teorema de Pitágoras desde Bhaskara?
- ¿Qué les pare demostrar teoremas geométricos a través de la demostración empírica?

5. **Autoevaluación**

Evalúate los siguientes aspectos marcando una x en la casilla que crees es la más acertada. La escala a utilizar es: **3: Excelente – 2: Buena – 1: Regular – 0: Mala**.

Ítems	**0**	**1**	**2**	**3**
31. Soy puntual en las clases				

32. Participo activamente en el trabajo colaborativo				
33. Presto atención a las clases				
34. Sigo las instrucciones del profesor				
35. Termino las actividades asignadas para realizar en el aula				
36. Me esfuerzo en la realización y entrega puntual de las tareas.				
37. Hago consultas adicionales sobre el tema visto en clase (internet, libro u otros)				
38. Realizo preguntas sobre lo que no entiendo en la clase				
39. Evito hablar sobre temas que no son parte de la clase				
40. Participo de forma activa y regular en las actividades				

Anexo 9. Prueba de Verificación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Prueba De Verificación

Docente: Edwin Villa Álvarez

Grado: 11

Fechas: Agosto 6, 13 Del 2014.

Nº De Estudiantes: 35

Objetivo. Identificar la familia de la demostración empírica en la que los estudiantes se ubican al final de los procesos de intervención educativa.

Descripción de la Prueba.

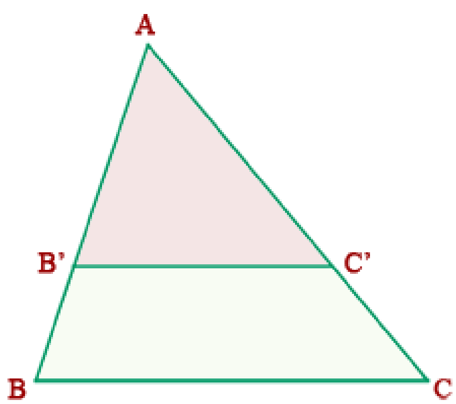
1. La prueba de verificación se llevó a cabo en dos sesiones, partiendo igualmente de los momentos diseñados para los planes de clases. La primera sesión fue guiada por los momentos 1, 2 y 3 donde el docente demostró el teorema primero de Thales que dice parafraseando el primer teorema así: "se tiene un triángulo cualquiera, y al trazar una línea paralela a cualquiera de sus tres lados, se obtendrá otro triángulo que es semejante al triángulo dado". Utilizando el experimento crucial de construcción como método de verificación, con transportador y regla y otra demostración a partir del teorema AAA (ángulo, ángulo, ángulo) como una forma de mostrar la posibilidad de utilizar teoremas y propiedades desde razonamientos abstractos desde la familia de la demostración empírica del ejemplo genérico.

Primer teorema

Como definición previa al enunciado del teorema, es necesario establecer que dos triángulos son **semejantes** si tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales entre si. El primer teorema de Tales recoge uno de los postulados más básicos de la geometría, a saber, que:

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

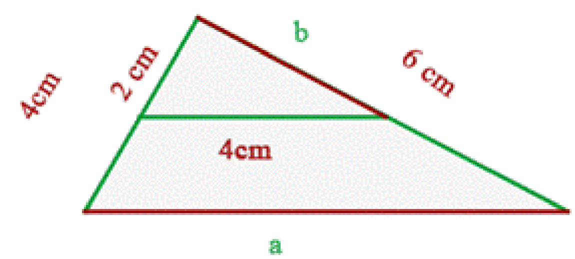
Entonces, veamos el **primer Teorema de Tales en un triángulo**:



Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'**, cuyos **lados** son**proporcionales** a los del **triángulo ABC**.

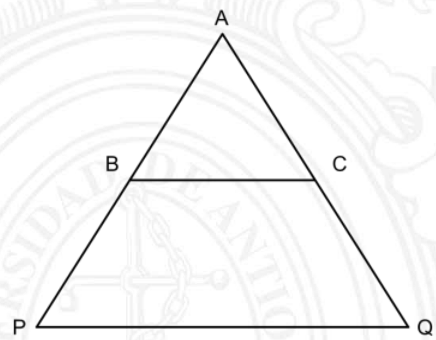
Lo que se traduce en la fórmula

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

En el triágulo de la derecha, hallar las medidas de los segmentos **a** y **b**. Apicamos la fórmula, y tenemos $\frac{4}{2} = \frac{a}{4}$ $\quad a = 8\,cm$ $\frac{4}{2} = \frac{6}{b}$ $\quad b = 3\,cm$	

2. La segunda sesión fue a partir de una prueba de verificación a los estudiantes para los otros tres momentos de los planes de clase pues fue una actividad grupal y evaluativa. Esta se basa de un ejercicio que permitiría a los estudiantes poner en juego las competencias adquiridas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, al recorrer por las diferentes familias de las demostraciones empíricas en los planes de clase. Los estudiantes tendrán argumentos suficientes para validar sus argumentos y demostrar conjeturas, cada uno de ellos buscará demostrar dichas conjeturas y los resultados nos mostrarán cuál alternativa desde la familia de demostración empírica es más utilizada por ellos, y si además lleguen a la demostración deductiva como un fin de la educación matemática y de seguir este proceso con la demostración empírica puede servir de puente para el encuentro con la deducción formal y rigurosa que se exige en niveles superiores de la educación.

El ejercicio de verificación relaciona congruencia y semejanza de triángulos y propiedades y teoremas. Consiste en relacionar del siguiente esquema los triángulos ∆ABC y ∆APQ partiendo del paralelismo entre BC y PQ.



Anexo 10. Formato Encuesta Final para Estudiantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Formato Encuesta Final Para Estudiantes

1. ¿Ha cambiado su percepción de las matemáticas y la geometría? _____. Justifique su respuesta: ________
____
____
____

2. ¿Cómo influyeron las actividades sobre demostración en su aprendizaje de las matemáticas y la geometría? ____
____

3. Elabore una apreciación general acerca de la utilización de los recursos utilizados en las actividades de clase: ____
____

4. Durante el desarrollo de las clases, ¿Se hizo más fácil para usted el aprendizaje de la geometría? ___. Justifica tu respuesta: _______________________________________
____
____

5. Al hablar en la clase de procesos inductivos y demostración empírica en geometría ¿considera usted haber logrado una mayor comprensión de los conceptos matemáticos estudiados? ____
____

6. De estos pensamientos matemáticos, ¿cuál se desarrolló más en las actividades de clase?
Pensamiento numérico: ___ Pensamiento espacial: __ Pensamiento métrico: __
Pensamiento aleatorio: __ Pensamiento variacional: __

7. De las siguientes competencias, ¿cuál se logró desarrollar más con la intervención del maestro practicante?
Razonamiento: __ Resolución y planteamiento de problemas: ___ Comunicación: __
Modelación: __Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: __

8. De los siguientes procesos, ¿cuáles se lograron desarrollar más con la intervención del docente practicante? (puede marcar varios)

Justificar respuestas: ___	Encontrar contradicciones: ___
Explicar procedimientos: ___	Identificar propiedades: ___
Representar objetos matemáticos: ___	Cambio de registro: ___
Resolver problemas: ___	Graficar ecuaciones: ___
Crear nuevas ideas: ___	¿Otro? ___ cuál: ________________________

9. Califique de 1 a 5 (siendo 5 lo mejor) la metodología implementada por el docente practicante: __

10. Emita un juicio de valor sobre la metodología implementada por el docente practicante:
____
____
____

Anexo 11. Formato de entrevista final a docente cooperador

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Institución Educativa Lola González

Formato De Entrevista Final A Docente Cooperador

1. ¿Considera que la demostración matemática de influye en el aprendizaje de las matemáticas?

____

____

2. ¿Observó usted algún cambio en sus estudiantes respecto al aprendizaje de las matemáticas con la intervención de la docente practicante?

____

____

____

____

3. ¿Cuáles aspectos considera que fueron significativos durante la realización de la práctica?

____

____

____

____

4. Elabore una apreciación general de los recursos utilizados en las actividades propuestas en los planes de clase.

____

____

____

____

5. Durante el desarrollo de las actividades, ¿se hizo más fácil el aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes?

____

____

____

____

6. Califique de 1-5 (siendo 5 la mejor) la metodología implementada por la docente Practicante.

5:_________ 4:__________ 3:___________2:__________ 1:___________

7. Emita un juicio de valor sobre la metodología implementada por la docente.

8. ¿Considera que se alcanzaron los objetivos propuestos?

Anexo 12. Orientaciones para la Revisión de los Planes de Área

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
ORIENTACIONES PARA LA REVISIÓN DE LOS PLANES DE ÁREA

Institución Educativa Lola González

1. **Presentación**:

   La presentación del plan de área contempla o hace un desarrollo conceptual o una disertación, de cómo el área da respuesta a la articulación de los siguientes aspectos:

- Contribución del área al cumplimiento de la misión, visión y filosofía de la institución
- A la formación de los sujetos que conforman la IE.
- Referentes legales en los que se "asientan" los procesos pedagógicos del Área
- La articulación de los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias
- Ubicación en el contexto sociocultural de la IE
- Producción científica de la disciplina matemática o de las ciencias naturales
- Perspectiva didáctica, modelo didáctico o pedagógico
- Finalidad Formativa del Área (competencias esbozadas a nivel general)

2. **Objetivos:**

Examinar los **objetivos generales del plan de área**, y verificar si el plan de área da respuesta a preguntas como:

- ¿Cuál es la contribución del área a la formación de los sujetos que la institución educativa ha definido en sus principios misionales?
- ¿Qué demanda la sociedad al área?

Están definidos los **objetivos por cada grado** escolar, en el que se exprese claramente el para qué del Área en el grado específico. Objetivos que muestren una relación progresiva en complejidad entre grado y grado.

3. **Metodología:**

- Revisar la metodología propuesta para el Plan de Área y determinar si guarda o no coherencia con los objetivos propuestos y el modelo pedagógico Institucional.
- Revisar las estrategias didácticas, derivadas de la metodología, de acuerdo con el tipo de competencias que en el área se pretenden desarrollar.

4. **Recursos**

- Aparte de un listado generalizado de materiales, se evidencian recursos desde lo humano, académico, investigativo y /o científico desde el grupo de docentes, que aporte a la propuesta del área.
- Clasificación de recursos: a) Materiales impresos, b) Materiales didácticos, c) Registros sonoros, d) Imágenes fijas, e) Equipos y Materiales audiovisuales, f) Programas y servicios informáticos, g) laboratorios, aula taller, h) otros

5. **Evaluación**:

- Contempla una propuesta evaluativa del área, sustentada en las bases teóricas que le dan sentido.
- Los criterios y procedimientos de evaluación, teniendo en cuenta la correspondencia con la formulación de los objetivos, la metodología y el S.I.E

- Revisar las estrategias e instrumentos evaluativos, de acuerdo con el tipo de competencias que, en el área, se pretenden desarrollar.

6. Malla Curricular:

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOLA GONZÁLEZ	Código: AC-F-F-01-H
	GESTIÓN ACADÉMICA	Versión: 01
	PLANEACIÓN Y DESARROLLO DE ÁREAS POR PERÍODO	Edición: 25-Abr-11

AREA O ASIGNATURA: Geometría **GRADO:** Undécimo **GRUPO(S): 02, 03, 04, 05.**

PROFESORES(AS): Aisnardi Soto Acevedo y Ayda Zapata Ochoa **AÑO:** 2014 **PERÍODO:** II

CÓDIGO(S) E INDICADOR(ES) DE DESEMPEÑO	SEMANA	CONTENIDOS	DESARROLLADOS SI	DESARROLLADOS NO	OBSERVACIONES
• Participa de la nivelación de geometría euclidiana como repaso a lo visto en años anteriores. • Manifiesta rigurosidad en el uso del lenguaje matemático . • Comprende las características de la línea recta en el plano cartesiano.	**21-25 Abril**	Repaso Elementos Previos: Las Figuras geométricas.	X		
	28 abril 2 mayo	Caracterización de Polígonos y Poliedros	X		
	5-9 mayo	Área, perímetro y volumen de figuras geométricas.	X		
	12-16 Mayo	Segmento, ángulos y arcos Suma de ángulos.	X		

<table>
<tr><th rowspan="2">CÓDIGO(S) E
INDICADOR(ES) DE DESEMPEÑO</th><th rowspan="2">SEMANA</th><th rowspan="2">CONTENIDOS</th><th colspan="2">DESARROLLADOS</th><th rowspan="2">OBSERVACIONES</th></tr>
<tr><th>SI</th><th>NO</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Determina adecuadamente las ecuaciones de la recta, de la circunferencia y la parábola.
Comprende la función del ángulo de inclinación en una línea recta.
Resuelve ejercicios y problemas que involucran la línea recta, la circunferencia y la parábola.
Calcula las intersecciones entre una recta y una circunferencia o entre dos circunferencias.
Demuestra inductivamente teoremas geométricos.
Valida deductivamente teoremas geométricos.
Utiliza el pensamiento inductivo en el desarrollo del pensamiento deductivo-argumentativo en la demostración geométrica.
Relaciona el contexto físico que lo rodea con la geometría y lo utiliza</td><td>19-23
Mayo</td><td>El plano cartesiano y distancia entre dos puntos.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>26-30
Mayo</td><td>Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2-6
Junio</td><td>Angulo de inclinación Determinación de la ecuación de la recta.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1-4
Julio</td><td>Ecuaciones de la recta (General de la recta, simétrica de la recta, de la recta en la forma normal).</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7-11
Julio</td><td>Ecuación cartesiana de la circunferencia.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14-18
Julio</td><td>La parábola.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
</table>

CÓDIGO(S) E INDICADOR(ES) DE DESEMPEÑO	SEMANA	CONTENIDOS	DESARROLLADOS SI	DESARROLLADOS NO	OBSERVACIONES
para formular y poner a prueba conjeturas.	**21-25 Julio**	Parábola con vértice en (h,k).	X		
	28 julio 1 agosto	Procesos inductivos y deductivos	X		Dicha clase no pudo darse debido las actividades institucionales y será incluida para el tercer periodo.
	4-8 Agosto	Demostración empírica en geometría euclidiana y analítica.	x		Dicha clase no pudo darse debido las actividades institucionales y será incluida para el tercer periodo.

DESCRIPCIÓN DE ESTRATEGIAS, ACTIVIDADES PEDAGÓGICAS DE APOYO (APA) Y EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS GENERALES	ESTRATEGIAS Y/O ACTIVIDADES EVALUATIVAS

Desarrollo de talleres Realización de talleres Clases magistrales Solución de situaciones problemas Actividades de motivación y contextualización Estrategias didácticas de aprendizaje (Origami) Uso de las TIC (Power Point) Sustentaciones	Trabajos escritos **Sustentaciones:** -Sustentaciones grupales -Sustentaciones individuales de temas específicos Asesoría sobre temas que presente dificultad Aplicación de pruebas grupales y/o individuales
ESTRATEGIAS Y/O APA's **PARA ESTUDIANTES CON MÁS DIFICULTADES**	**ESTRATEGIAS Y/O APA's** **PARA ESTUDIANTES CON MÁS POTENCIALIDADES**

Consultas previas sobre los temas Resolución de situaciones problema propuestas para realizar por fuera de clase.	**Análisis de las producciones de los estudiantes** -cuaderno de clase -Producciones orales -Revisión de talleres -Sustentación de talleres **Pruebas especificas** -Trabajo en grupo -Trabajo individual -Resolución de situaciones problema -Evaluaciones individuales y/o grupo, evaluación de período

OBSERVACIONES

____

____

____

____

Revisó: ______________________________ **Fecha**______________________________

Anexo 13. Caracterización de los Recursos y Materiales

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
CARACTERIZACIÓN DE LOS RECURSOS Y MATERIALES

Institución Educativa Lola González

Objetivo: Recopilar información que posibilite realizar una caracterización general de los recursos con que cuenta la institución para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La información que usted nos proporcionará será de gran ayuda, por lo tanto le solicitamos sea claro y sincero en sus respuestas.

1. Marque con una x si existen cada uno de los siguientes elementos o dependencias dentro de la institución.

( ) Aula de audio visuales

( ) Televisor

( ) DVD

( ) Aula taller de matemáticas

( ) Biblioteca actualizada

( ) Grabadora

( ) Sala de informática para el uso del aprendizaje en matemáticas

( ) Internet

( ) Video beam

( ) Materiales didácticos para matemáticas

( ) Libros actualizados de matemáticas

( ) Software educativos matemáticas

( ) Otros ¿cuáles

2. ¿Cómo docente de matemáticas, con qué frecuencia utiliza los anteriores elementos para orientar su área?

Elementos	Frecuencia				
	Siempre	Casi Siempre	Algunas veces	Casi nunca	Nunca
Aula de audio visuales					
Televisor					
DVD					
Aula taller de matemáticas					
Grabadora					
Sala de informática para el uso de matemáticas					
Software educativos para matemáticas					
Internet					
Video beam					
Materiales didácticos para matemáticas					
Libros actualizados de matemáticas					

Anexo 14. Formato de Observación Plan de Clase

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
PRÁCTICA PROFESIONAL DOCENTE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

FORMATO DE OBSERVACIÒN DE LA CLASE

Institución Educativa Lola González

1. **Identificación**

Institución: ____ Grado: ___________

No. De estudiantes: _______ Fecha: _______________

Integrantes del equipo de trabajo:

____

Maestro cooperador: ____

Temática:____

____

2. **Desarrollo de la clase:** Evalúe el desarrollo de la clase considerando los siguientes aspectos:

E : Excelente **B :** Bien **R :** Regular N: No realizado

EN CUANTO A LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS	E	B	R	N	Descripción
Actividades de motivación o de diagnóstico					
Actividades de fortalecimiento de los conocimientos previos					
Actividades con los diferentes materiales o recursos					
Actividades creativas					
Actividades de profundización					

Recursos y materiales utilizados					
Pertenecía de los materiales					
Pertinencia del tiempo utilizado para la clase.					
DESDE LOS ESTUDIANTES					
Disponibilidad y entusiasmo en el desarrollo de las actividades propuestas.					
Uso de recursos (guías, materiales y talleres) para los fines indicados.					
Nivel de participación de los estudiantes					
Estrategias utilizadas por los estudiantes					
La manera como los estudiantes expresan sus opiniones, dudas e ideas					
Nivel de preguntas de los estudiantes					
Aprovechamiento del tiempo en la clase					
DESDE EL DESEMPEÑO DEL DOCENTE					
Capacidad para despertar el interés en los estudiantes					
Habilidad para el manejo y control del grupo					
Receptividad del docente para resolver pregunta e inquietudes.					
Dominio y apropiación de los conceptos					
Evaluación y valoración del nivel de logro en el proceso de clase					
Aspectos que deberían ser mejorados para optimizar los resultados del proceso de la clase:					

Aspectos positivos que deben permanecer como soporte para futuras clases e implementaciones:
Observaciones generales sobre el desarrollo de la clase

Anexo 15. Diarios de Procesos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PRÁCTICA DOCENTE II

DIARIO DE PROCESOS DE AULA

Professor: Ruben Dario Henao

Estudiante - Docente: Edwin Villa	Fecha: Mayo 28 y Junio 4 /2014	Grupo: 11-5
Institución: Educativa Lola González	Docente cooperador: Aisnardi Soto	Tiempo de clase: Una hora por Sesión.
Materiales utilizados: Cámara fotográfica (Celular, tablets), El entorno de la institución educativa.	Indicadores de desempeño: • Utiliza elementos matemáticos de verificación. • Propone relaciones matemáticas detectadas en el ejemplo. • Realiza análisis desde las propiedades geométricas. • Percibe elementos conjeturales que puedan conducir al planteamiento de hipótesis. • Realiza conjeturas y demostraciones desde la percepción táctil. • Utiliza la fotografía de su entorno como estrategia didáctica para la enseñanza de la geometría.	
Temas desarrollados:		

- Empirismo Naif.
- Figuras geométricas básicas.
- Propiedades geométricas.
- Congruencia y Semejanza de triángulos.

Descripción de las actividades desarrolladas:

Las actividades se llevaron en dos sesiones de una hora cada una y además de un trabajo que debía realizar por fuera de clase.

Momento1. Los estudiantes debían traer un dispositivo móvil que tomara fotografías. En grupos de tres estudiantes estuvieron por toda la institución educativa tomando fotografías a las diferentes figuras geométricas que quisieran y que observaran estaban inmersas en la institución. Podían tomar las fotografías de las figuras geométricas que quisieran sin criterios específicos.

Momento 2. Este momento fue de selección e intervención por parte del maestro. Como docente elabore una clase magistral sobre criterios semejanza y congruencia en triángulos y cuadriláteros. Seguidamente ellos fueron a su casa y seleccionaron fotografías, de acuerdo a categorías que ellos mismos seleccionaban para realizar una presentación a sus compañeros de sus fotografías y de las categorías que crearon a la hora de agrupar sus figuras geométricas.

Momento 3. La exposición, en esta parte los estudiantes argumentaron a sus compañeros con sus propias palabras y con la presentación realizada las categorías formadas de acuerdo a las figuras geométricas que seleccionaron. Desde la congruencia y la semejanza de figuras geométricas buscaron explicar su resultado final.

Verificación de los avances de la monografía: En el caso de la monografía, se buscó que los estudiantes se familiarizaran con la primera familia de la demostración empírica, conocida como el empirismo naif, la cual tiene intrínseca la inducción y la percepción. Además se buscó que la hora de argumentar sus conjeturas utilizaran la observación, y corroboraran sus hipótesis desde propiedades geométricas cocidas utilizando ejemplos como elementos de verificación.
Fortalezas: • Una fortaleza fue la utilización de un artefacto como los dispositivos móviles, pues estos tienen diferentes aplicaciones que mostraron la creatividad de los estudiantes. • Los estudiantes se sintieron motivados por la actividad, pues nunca habían visto su institución como un conjunto de figuras geométricas, y evidenciar la geometría en ella los ayudo a reconocerla un poco más. • La mayoría de los estudiantes fueron participes de la actividad pues era llamativo la toma de fotografías pues salía de las clases tradicionales. • A la hora de la presentación de su trabajo la mayoría realizo la tarea encomendada, lo que ayudo notablemente en el propósito de la clase.
Debilidades: • El tiempo fue muy reducido, lo que llevo algunos grupos a no poder exponer sus ideas. • Los estudiantes tomaron algunas fotografías a figuras geométricas no convencionales que tuvieron que desechar debido a que la explicación del docente se limitó a figuras geométricas básicas y conocidas.
Observaciones:

La actividad se puede realizar nuevamente, pero es necesario delimitar criterios para la toma de fotografías, para que la mayoría de fotografías tomadas puedan aprovecharse. Se puede buscar claramente otra actividad que permita la inclusión del empirismo naif en la actividad demostrativa. Dicha actividad fue propuesta por el docente como una alternativa.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PRÁCTICA DOCENTE II

DIARIO DE PROCESOS DE AULA

Professor: Ruben Dario Henao

Estudiante - Docente: Edwin Villa	Fecha: Julio 2 /2014	Grupo: 11-5
Institución: Lola González	Docente cooperador: Aisnardi Soto	Tiempo de clase: 1 hora por sesión
Materiales utilizados: Papel cortado en forma de cuadrado, tijeras, colores, lápiz, regla.	Indicadores de desempeño: • Identifica ejemplos para demostrar conjeturas. • Escoge un determinado ejemplo crucial para probar hipótesis. • Identifica contraejemplos para refutar hipótesis. • Realiza construcciones sobre un ejemplo seleccionado.	

	• Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas. • Selecciona cuidadosamente ejemplos para demostrar conjeturas. • Usa propiedades matemáticas aceptadas partiendo de la simple observación • Relaciona diferentes ejemplos para demostrar sus conjeturas.
Temas desarrollados: Figuras geométricas. Propiedades de figuras geométricas. Secuencias y orden formales.	
Descripción de las actividades desarrolladas: La clase se llevó a cabo en los siguientes momentos: Momento 1. En este momento el docente realizo junto con los estudiantes una flor en origami, los estudiantes trajeron los materiales y el profesor junto con ellos les guiaba paso a paso para llegar al producto final, en la medida que se hacía la figura se reconocían las figuras geométricas que se iban trazando y que se visualizaban en el papel, aclarando conceptos y propiedades (bisectriz, mediatriz, entre otros). Y haciendo preguntas conceptuales sobre las definiciones y propiedades de dichas figuras formadas. Momento 2. El momento numero 2 fue para los estudiantes ellos podían utilizar la figura de la flor realizada, o cualquier otra figura que se pudiera realizar con origami, para realizar una	

secuencia lógica de los pasos de principio a fin para alcanzar la figura, y a la medida que organizaban la secuencia debían describir las diferentes figuras geométricas que se visualizaban agruparlas y analizarlas de acuerdo a sus características principales.
Verificación de los avances de la monografía: En el avance de la monografía en términos de la actividad demostrativa, la clase tenía como fin acercar a los estudiantes con el orden lógico, con la capacidad de argumentar secuencias. Adicional a lo anterior sigue fortaleciendo componentes de la demostración empírica, como la observación, la ejemplificación, la generalización, la construcción y el análisis.
Fortalezas: El origami es una estrategia que desarrolla la capacidad de concentración, de observación y ayuda a crear un orden de trabajo para cualquier actividad entre ellas la actividad demostrativa y matemática. La mayoría de los estudiantes fueron motivados por la actividad por ser una actividad no convencional en las clases de geometría y mostraban interés por conocer el producto final. Los estudiantes mostraron diferentes formas de argumentar y mostrar sus secuencias lógicas, lo que muestra como muchos de ellos aprovechan sus fortalezas para sus trabajos educativos y escolares.
Debilidades:

A la hora de identificar las figuras geométricas que se visualizaban en el papel se quedaron cortos y se limitaron a la secuencia lógica y el dibujo. Solo visualizaban la figura cuando realizaban el trabajo junto con el docente. Aunque la mayoría de los estudiantes fueron movidos por la actividad, algunos asumieron no tener la habilidad, agilidad y movilidad para realizarlo a la misma velocidad que sus compañeros, algo que atrasaba la actividad por el afán de muchos de avanzar al producto final.
Observaciones: El origami es una estrategia didáctica fenomenal para la enseñanza de la geometría y para el fortalecimiento conceptual, es una estrategia visual que desarrolla diferentes tipos de razonamiento matemático que es ameno de trabajar con los estudiantes así como de fácil manejo.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PRÁCTICA DOCENTE II

DIARIO DE PROCESOS DE AULA

Professor: Ruben Dario Henao

<table>
<tr><td>Estudiante - Docente: Edwin Villa</td><td>Fecha: Agosto 6, 13 del 2014.</td><td>Grupo: 11-5</td></tr>
<tr><td>Institución: Lola González</td><td>Docente cooperador: Aisnardi Soto</td><td>Tiempo de clase: Hora por sesión</td></tr>
<tr><td>Materiales utilizados: Transportador, regla, papel reciclable, lápiz, tablero, fotocopias (Guía de trabajo), cuaderno de los alumnos, notas del profesor.</td><td colspan="2">Indicadores de desempeño:
Recuerda y afianza algunos conceptos de la geometría plana.
Identifica los polígonos con sus respectivas características.
Utiliza algunos instrumentos de medición a favor de la geometría.
Reconoce la importancia de los instrumentos de medición.
Distingue cuando una hipótesis es inductiva.
Razona a través de procesos inductivos en la actividad demostrativa.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Temas desarrollados:

Razonamiento Inductivo, generalización de propiedades, ejemplificación, Demostración empírica (Familias de la demostración empírica)</td></tr>
</table>

Descripción de las actividades desarrolladas: La actividad se llevó a cabo en los siguientes momentos. Momento 1. Los resultados de una actividad diagnostica permitieron encontrar un punto de partida para la realización de las próximas actividades, y dieron al profesor un panorama de la población con la cual estará realizando este conjunto de actividades. Momento 2. Este momento fue de fortalecimiento conceptual, a partir de una clase magistral sobre polígonos convexos y cóncavos se desarrollaron, las características y propiedades principales de los polígonos, pues la actividad siguiente fue generalizar una fórmula para conocer la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo utilizando transportador, regla y tijeras y luego haciendo razonamientos inductivos para generalizar la propiedad o formula. Momento 3 Actividad colaborativa, los estudiantes a partir del momento 2 buscaron generalizar una fórmula para conocer el número de diagonales interiores de cualquier polígono convexo, utilizaron el ejemplo realizado por el profesor, realizaron varias propuestas de solución válidas y algunos llegaron al resultado de la formula, utilizando razonamientos visuales e inductivos.
Verificación de los avances de la monografía: Esta actividad fue de excelentes resultados en términos de la monografía pues los estudiantes se identificaron con el razonamiento inductivo y visual, con la generalización de propiedades y la modelización de fórmulas matemáticas.
Fortalezas:

Se pudo promover el razonamiento inductivo y visual desde la actividad realizada. Los estudiantes fueron participes y buscaron dar respuesta a sus conjeturas. Se evidencia un progreso en los estudiantes para argumentar sus hipótesis y validar sus conjeturas. Los estudiantes fueron creativos a la hora de mostrar sus respuestas.
Debilidades: Algunos de los estudiantes no fueron movidos por la actividad la catalogaron de ser muy complicada.
Observaciones: Una buena actividad respecto al tiempo empleado. Se llega más fácil a los objetivos planteados para la clase, con actividades en clase que con actividades extra clase.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PRÁCTICA DOCENTE II

DIARIO DE PROCESOS DE AULA

Professor: Ruben Dario Henao

<table>
<tr><td>Estudiante - Docente: Edwin Villa</td><td>Fecha: Agosto 20 / 2014</td><td>Grupo: 11-5</td></tr>
<tr><td>Institución: Lola González</td><td>Docente cooperador:
Aisnardi Soto</td><td>Tiempo de clase: 2 horas</td></tr>
<tr><td>Materiales utilizados: Papel cortado en forma de cuadrado, tijeras, colores, lápiz, regla, carteles.</td><td colspan="2">Indicadores de desempeño:
• Identifica ejemplos para demostrar conjeturas.
• Escoge un determinado ejemplo crucial para probar hipótesis.
• Identifica contraejemplos para refutar hipótesis.
• Realiza construcciones sobre un ejemplo seleccionado.
• Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas.
• Selecciona cuidadosamente ejemplos para demostrar conjeturas.
• Demuestra un teorema con base en propiedades y relaciones observadas.
• Usa propiedades matemáticas aceptadas partiendo de la simple observación
• Relaciona diferentes ejemplos para demostrar sus conjeturas.
• Realiza construcciones sobre el ejemplo seleccionado.
• Sustenta conjeturas y demostraciones a partir de las construcciones hechas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Temas desarrollados:
Teorema de Pitágoras, Teorema del Binomio, La demostración empírica, La papiroflexia.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descripción de las actividades desarrolladas:</td></tr>
</table>

Para esta actividad se tuvo la compañía del asesor de la investigación y de compañeros del seminario de práctica con el fin de observar la clase y dar sugerencias para mejorar los procesos de las intervenciones educativas. Los momentos de la actividad realizada consistieron en lo siguiente. Momento 1. A través de papiroflexia el docente elaboro una demostración del teorema de Pitágoras paso a paso con los estudiantes conocida como la demostración de Bhaskara. A la medida que iba realizando la demostración hacía preguntas conceptuales. El profesor utilizó carteles y los estudiantes seguían la demostración con sus propios materiales. Mientras el profesor hacía la intervención sus compañeros de seminario y asesor de trabajo de grado, recogían sugerencias para darle al profesor. Se utilizó la metodología estudio de clase (MEC). Momento 2. El siguiente momento no conto con los acompañantes, fue una prueba donde los estudiantes debían hacer la demostración del teorema del binomio utilizando los mismos recursos de la actividad del teorema de Pitágoras ya sin la ayuda y asesoría del profesor. Momento 3. Explicación de la demostración empírica, de las familias de demostración empírica y de los métodos de validación que se utilizan en ellas.
Verificación de los avances de la monografía: En el paso a la monografía se verificaron avances conceptuales desde el cuerpo teórico de la demostración empírica. Los estudiantes visualizaron otra forma de demostrar teoremas a través del recurso de la papiroflexia.

Se promovieron diferentes tipos de razonamientos, visuales, inductivos, deductivos y se pudo agrupar los planes de clase anteriores en uno. La construcción geométrica y el análisis geométrico estuvieron presentes como ayudas para demostrar teoremas.
Fortalezas: El tiempo fue muy bien distribuido en las actividades. Los recursos didácticos fueron suficientes para el propósito de la clase. Los estudiantes mostraron interés y participaron de principio a fin de las actividades. Se cumplió con el propósito de mostrar otros métodos de demostración no formal Los compañeros de práctica y el asesor retroalimentaron la intervención del docente con sus sugerencias y aportes para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en un futuro. Algunos estudiantes alcanzaron razonamientos deductivos y formales en la segunda actividad. Se dio buena comunicación.
Debilidades: No todos los estudiantes tienen la misma agilidad para desarrollar trabajo con origami, se debe de buscar estrategias que les niveles su motricidad. El docente debe de escuchar los aportes de todos los estudiantes, y percatarse de escucharlos a todos.

El docente debe dar buen tiempo a la hora de generar preguntas a sus estudiantes para que estos respondan.
Observaciones: La metodología estudio de clase fue de excelente contribución en el trabajo realizado.