UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Facultad de Educación

LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO Π DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en Matemática y Física

DIANNY YINEY ROMAÑA PALACIOS

GLORIA YURLEY GIRALDO VÁSQUEZ

Asesora

Mgr. YADIRA MARCELA MESA

Medellín

2017

Facultad de Educación

LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO Π DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

DIANNY YINEY ROMAÑA PALACIOS

GLORIA YURLEY GIRALDO VÁSQUEZ

Asesora

Mgr. Yadira Marcela Mesa

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Medellín

2017

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Agradecimientos

Gracias a Dios, por ser el guía de nuestra vida y nuestra fortaleza para seguir el camino hacia nuestros sueños.

A nuestra asesora, Yadira Marcela Mesa, por su acompañamiento, por sus aportes y por toda la paciencia durante el proceso.

A la Institución Educativa Normal Superior de Medellín, por brindarnos sus espacios para la realización del presente proyecto.

A los maestros que guiaron nuestro proceso formativo, los cuales a través de sus enseñanzas nos mostraron nuevas formas de habitar el mundo, entre ellas la de ser maestras.

A nuestra Alma Mater, por su diversidad, por su grandeza y por todas las oportunidades de formación en diversos campos de la vida.

A todos nuestros amigos y demás personas que hayan contribuido a la realización del presente proyecto.

Gracias a mis padres y a mis hermanos, quienes han sido siempre mi apoyo incondicional y mi motivación principal para luchar por mis sueños.

A Camilo, por haber sido mi principal compañía en esta etapa de mi vida, por escucharme, comprenderme y apoyarme cuando más lo necesité.

Gloria Giraldo Vásquez

Facultad de Educación

RESUMEN

Este trabajo tiene la intención de indagar por un conocimiento histórico-epistemológico del *número π,* con el fin de identificar algunos elementos que den cuenta de su significado en el campo de las matemáticas, ya que, aunque se utiliza frecuentemente no se le atribuye algún significado más que el considerarlo como un dato representado en una letra. Por lo tanto, se plantea cómo el uso de la historia y la epistemología le brindan elementos al maestro para la enseñanza de dicho concepto. Por lo anterior, este trabajo recurre a una historia y una epistemología del *número π* para el diseño de actividades de enseñanza, las cuales fueron desarrolladas con un grupo de estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín, bajo un paradigma cualitativo con un diseño de estudio de caso instrumental.

Dentro de los resultados encontrados se destaca cómo los estudiantes a partir de las actividades producen una concepción distinta sobre el *número π*, pasando de considerarlo solo como un dato a ser un objeto matemático dotado de significación más diversa, más profunda y con ello con más sentido. De este estudio, se confirma que incluir aspectos históricos-epistemológicos en la enseñanza constituye una alternativa importante al considerar diversas estrategias para tener diversos significados a la pregunta sobre el sentido de lo que se enseña en matemáticas.

ÍNDICE

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los lineamientos curriculares de matemáticas menciona que algunos planteamientos en la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la investigación en educación matemática y los estudios de la sociología del conocimiento, han provocado cambios importantes en la concepción de las matemáticas escolares. Estas reflexiones han llevado a la configuración de una nueva visión de las matemáticas escolares basada en varios aspectos, entre ellos el de aceptar que, el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado en la actualidad no es la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen solo una parte de este conocimiento. Se menciona, además que para ello es necesario profundizar sobre dicho proceso, lo que permitirá tener un conocimiento más profundo de las matemáticas, ya que desde los procesos históricos los objetos se muestran desde su verdadera perspectiva (MEN, 1998).

Por otro lado Konic, Godino, Castro y Rivas (2014) plantean que “profundizar en el análisis de la naturaleza y desarrollo de los contenidos matemáticos permite dilucidar factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática” (p. 1006). Esto nos permite decir que, además de la profundización histórica, la profundización sobre los aspectos epistemológicos de los objetos de enseñanza constituye elementos que forman un discurso más completo para el maestro sobre los objetos matemáticos. Así, consideramos que la conjunción de los dos aspectos mencionados enriquece el discurso del docente dando lugar a nuevas posibilidades de aprendizaje para el estudiante.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo se inscribe en la línea de investigaciones de carácter histórico-epistemológico en educación matemática, en el cual tenemos como objeto matemático de interés a estudiar el *número* π. Dicho objeto se ha constituido dentro del campo de las matemáticas y transpuesto al campo escolar, convirtiéndose en un objeto de uso frecuente en diversas ramas de las matemáticas y en diversos grados escolares, sin embargo, se observa que no se le atribuye en la mayoría de los casos, ningún significado numérico diferente al de un número decimal, y de esta manera se contradice su naturaleza. En este escrito planteamos una re-construcción de carácter histórico, en la que pretendimos tener un acercamiento a un análisis epistemológico, dando cuenta de su naturaleza, lo que nos permitió dilucidar los elementos constitutivos del *número* π, que inspiraron el diseño de un conjunto de actividades para su posterior socialización y desarrollo con estudiantes de secundaria.

Este informe de investigación está presentado en varios capítulos, que no pretenden dar cuenta de un orden en términos de secuencialidad, sino de momentos de la investigación que se resumen a continuación:

Capítulo 1: En este apartado abordamos los aspectos generales del proceso de investigación que le dieron origen y consistencia al problema, en él damos cuenta de la revisión de literatura la cual considera los trabajos realizados sobre el *número* π y en relación con algunas propuestas de orden didáctico frente al mismo, en este capítulo formulamos el planteamiento del problema, la pregunta de investigación que será nuestra guía en todo el proceso y establecemos los objetivos..

Capítulo 2: Este capítulo contiene el marco conceptual bajo el que desarrollamos el trabajo, incluyendo una historia sobre el *número* π, en la que procuramos resaltar los elementos constitutivos de este.

Capítulo 3: Aquí presentamos la metodología de investigación, la cual posibilitó el diseño para el análisis con base en lo que nos habíamos propuesto investigar.

Capítulo 4: En este apartado presentamos la organización de la información obtenida en el desarrollo de las actividades propuestas y el análisis pertinente.

Capítulo 5: Finalmente, y una vez analizada la información presentamos las consideraciones finales o conclusiones respectivas a lo planteado a lo largo del trabajo, además de intentar dar respuesta a la pregunta formulada en el capítulo 1.

1 ASPECTOS GENERALES

1.1 Revisión de literatura

En este apartado se muestran algunas de las investigaciones realizadas en torno al *número* π**,** algunos de ellas constituyen parte importante del referente bibliográfico tenido en cuenta para este trabajo. En primer lugar haremos una presentación de los trabajos que abordan el aspecto histórico-epistemológico del *número* π y finalmente, presentaremos aquellas investigaciones en las cuales se evidencie desde lo didáctico propuestas orientadas a la enseñanza del mismo.

1.1.1 Historia y epistemología del número π

Konic (2005) en su tesis de maestría "Significados Institucionales del número pi: implicaciones didácticas" el cual tiene como objetivo hacer una análisis histórico-epistemológico del *número* π e identificar cuáles son los elementos de este análisis que pueden ser considerados como herramientas para el maestro en sus prácticas de enseñanza, realiza una construcción histórica del *número* π, en la que se plantean tres etapas en la constitución del número: periodo pre Newtoniano, de Newton a Hilbert y el siglo XX. Esto le permitió identificar varios de los problemas que llevaron a cabo la emergencia dicho número en el campo de las matemáticas, algunos de ellos son: la medida directa de la longitud de la circunferencia por los Hebreos, el problema de la cuadratura del círculo[1], la acotación del perímetro de un hexágono por inscripción y circunscripción y, la interpretación del argumento de Sen X. Dichos problemas fueron analizados desde una perspectiva epistemológica para la identificación de problemas y sistemas de práctica comprendidos en la construcción científica del objeto matemático, para luego utilizarlos como herramienta en el análisis del currículo de instituciones escolares particulares, a fin de proponer cambios curriculares en el sistema educativo de Argentina.

Dentro de los resultados encontrados se puede destacar cómo la historia de configuración de este número posee elementos importantes para el trabajo de aula en conceptos como: circunferencia, círculo, longitud (Sistema de unidades), números racionales e irracionales, figuras geométricas, área del círculo, cálculo de medidas, errores en la medición; a través de acciones tales como la medición de longitudes, contar, usos de instrumentos de medición, estimación de longitudes, cálculo de datos exactos y aproximados, encuadramiento y aproximación de las distintas clases de números.

Se resalta entonces cómo la historia favorece el desarrollo de estrategias para el proceso de enseñanza y se propone para trabajos investigativos a futuro, la elaboración de situaciones escolares que contribuyan al logro de crecientes significaciones de π, por medio de temas como los mencionados anteriormente.

Beckmann, (2006) en el libro "La historia de π " presenta una historia detallada del número π representada por etapas tales como: la franja, el amanecer, primerios griegos, Euclides, etc. Dichas etapas incluyen dieciocho capítulos, donde se tiene en cuenta los primeros indicios del número,

---

[1] Problema geométrico griego que se refiere a la construcción con regla y compás de un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado

hasta lo que se constituye en la actualidad. Básicamente el número mencionado, emerge en el campo de las matemáticas, específicamente en el área de la geometría cuando la humanidad misma comienza a establecer relaciones entre el diámetro de una circunferencia y su longitud. Más tarde el problema de la cuadratura de círculo despliega innumerables esfuerzos por encontrar un valor numérico para π, de diversos personajes en la historia de las matemáticas tales como Euclides, Arquímedes, Newton, Euler, Lindenman, y todos aquellos interesados en resolver dicho problema, pero también de aquellos para quienes el desarrollo y las nuevas construcciones en matemáticas fue su quehacer diario.

En dicho texto se plantea, cómo el desarrollo de las matemáticas y por tanto de la historia de π se da en continua transformación con la humanidad, y cómo las matemáticas son el resultado de una construcción cultural, en la que las influencias políticas y sociales repercuten en el avance de las matemáticas, y a su vez el desarrollo de estas tienen consecuencias directas en el entorno social y político, que es lo que le propicia unas características propias a cada época (edad antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea)

La justificación de este trabajo radica en que π es un número con el que cualquier estudiante de secundaria está familiarizado pero se desconoce su significado, pues su historia poco se da a conocer y es necesario hacerlo para encontrar el engranaje de conocimientos que encierra.

Posamentier y Lehmann, (2006) en el libro "La proporción trascendental: la historia de pi el número más misterioso del mundo" se muestra una historia de π, sin profundizar en los desarrollos matemáticos, sino en aquellas situaciones que lo convirtieron en un objeto de inspiración de muchos matemáticos durante siglos (La medida del círculo, el problema de la cuadratura del círculo). Su propósito principal es comprender a π y algunos de los aspectos más interesantes de su historia, considerando que π es un objeto presente en muchas ecuaciones, pero el cual se desconoce en la mayoría de los casos. Se menciona como para muchos estudiantes π sólo es un botón que se aprieta en la calculadora, y se afirma que esto es un error, pues como se muestra en el libro, el número π encierra muchas más significaciones (número irracional, trascendente). Esto coincide con lo que otros han planteado acerca del *número π*.

En dicho libro se destaca entonces, como el *número π* aparece en las matemáticas como el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro correspondiente, lo que permite encuadrar una manera de hallar la longitud de cualquier circunferencia (L=Πd)[2], pero de un forma inexacta, pues el valor dado para π era aproximado. La utilización de esta ecuación, ayudada de la imaginación llevó a la construcción de una fórmula para hallar el área de cualquier círculo. Sin embargo, dicha fórmula seguía dando solo resultados aproximados, pues π, continuaba siendo un objeto desconocido.

La aparición del problema griego sobre la cuadratura del círculo, y su relación directa con π desencadenó un conjunto de esfuerzos desde diversas culturas por encontrar un valor exacto para este. Dichos esfuerzos se tradujeron en métodos desarrollados para encontrar las cifras de π tales como: la aproximación de líneas circulares a líneas rectas, el método de exhaución de Arquímedes, aproximación utilizando el sistema sexagesimal, aproximación por polígonos regulares y aproximación por series geométricas..

Aproximadamente 2000 años más tarde y como consecuencia de los múltiples desarrollos matemáticos se concluye que no es posible encontrar un valor exacto para π, dado que es trascendente y por lo tanto no es posible construir, lo que trae como conclusión que no es posible cuadrar el círculo en las condiciones dadas por lo griegos.

[2] Esta notación es la que corresponde en la actualidad a la ecuación referida a la longitud de la circunferencia.

Reif (2000) en su artículo "El número π y su historia" hace un recorrido histórico general sobre este número en forma resumida. Para ello, a diferencia de los trabajos anteriores, identifica y describe tres periodos: El reinado de la geometría, el análisis y la trascendencia de π, destacando en cada uno de ellos los aspectos más relevantes en dicha historia (métodos desarrollados características y naturaleza). Una de las afirmaciones dadas es que la historia del célebre problema de la geometría griega (la cuadratura del círculo) es a su vez, la misma historia del *número* π. Por ello se plantea que la historia de dicho número no se reduce solamente a su valor numérico, sino que existen una gran cantidad de aspectos, que resultan desconocidos en la actualidad por la gente del común, tales como que los diferentes métodos utilizados para su determinación cuantitativa, involucran no solo la geometría elemental, sino también el álgebra y el cálculo analítico, que el número de sus cifras ha sido motivo de investigación y de trabajos cada vez más elaborados.

Para Reif la historia de π es la misma historia de la cuadratura del círculo, y menciona que el primer periodo en la historia de π está marcado por aproximaciones netamente empíricas en los diversos intentos por resolver el problema, y estos intentos contribuyeron a incrementar la precisión en el cálculo de áreas. El segundo período por el contrario estuvo marcado de cálculos muy precisos gracias a la aparición del cálculo elemental, pero sin embargo un período en el que poco se avanzó en la resolución del problema. Caso contrario es el del tercer período que fue el definitivo, en el que se determina la naturaleza de dicho número, ya que se determina a π como número irracional, por lo cual los esfuerzos por encontrar un valor numérico cuyas cifras fueran finitas eran inútiles. Otra de las características encontradas para el *número* π que se descubre en este período es que es un número trascendente[3].

[3] Número real o complejo que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales

Vélez (1997) en el artículo “curiosidades y misterios del número pi” inicia con el recuento de algunos aspectos relacionados con el desarrollo histórico del *número* π, y además afirma que por su relación íntima con el círculo es que se explica que el *número* π intervenga en problemas geométricos relacionados con ángulos, círculos, esferas, conos, cilindros, sólidos en revolución entre otros. También presta atención especial a las ecuaciones construidas por Ramanujan y la ecuación de Buffon que relaciona al *número* π con el azar, los cuales considera misteriosos e interesantes. Además presentan algunas comparaciones y construcciones artísticas entre cifras del *número* π y la literatura. Para el autor, este número es considerado imposible de conocer completamente, dado su caracter de número irracional y trascendente.

A partir de esta revisión de literatura en línea historico- epistemologica hemos podido identificar varios aspectos importantes relacionados con la historia del número π.

Se observa que todos coinciden en que π es un objeto matemático presente en muchos campos de las matemáticas pero que es muy poco conocido, resaltan que es através de la historia es como se puede ahondar y reconocer este objeto que encierra muchos saberes. También coinciden en que la emergencia de π en el campo de las matemáticas se da apartir de la relación observada entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, considerando que la longitud supera el valor del diametro aproximadamente en tre veces. El problema griego de la cuadratura del circulo es el que impulsa directamente a que diversos estudiosos de las matemáticas se hayan interesado en este objeto matemático y dicho interés prácticamente se termina en el momento en el que se encuentra una respuesta segura al problema.

1.1.2 Propuestas de enseñanza del número π

Sánchez y Valdivé (S.f) en el artículo "El número irracional una visión histórico-didáctica" menciona que varias investigaciones plantean que los estudiantes de especialidad en matemática al igual que los profesores presentan deficiencias considerables en cuanto a la concepción de número irracional, estas son vagas, fragmentadas e incoherentes y afirma que las causas de esta problemática radican en la manera como es presentado este concepto en los libros de texto

El autor menciona que la historia constituye una herramienta y un punto de partida para analizar esta problemática, pues es a partir de la historia como es posible conocer como ha sido el proceso de construcción de ciencia.

Es por ello que a partir de aspectos históricos del número racional, lleva a cabo una propuesta cuya finalidad es observar de qué manera estos aspectos históricos dan paso a una conceptualización.

La propuesta incluye una reconstrucción histórica del número irracional, abarcando una característica propia de cada época:

- Edad antigua: origen de los inconmensurables
- Edad media: hacia el reconocimiento del irracional como número
- Renacimiento: reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a un número racional cercano
- Edad moderna y contemporánea: el irracional como número.

En total fueron cuatro los esquemas valorados en el proceso: el número irracional asociado a una aproximación entre razones, el número irracional asociado a lo aritmético, el número irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano y el número irracional asociado a un número.

Los resultados arrojados por las distintas actividades muestran cómo los estudiantes se ven enfrentados a problemas a los que los mismos matemáticos se encontraron y cómo esto da lugar a preguntas que permiten una mejor compresión del concepto.

Se concluye entonces, como este tipo de enseñanza proporciona insumos significativos para quien aprende, permitiendo diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción de número irracional de los matemáticos más representativos en una época histórica.

Peralta (1999) en el artículo "Consideraciones didácticas e históricas sobre el número π" presenta una propuesta didáctica que se puede utilizar como herramienta de enseñanza por los profesores de secundaria de tal manera que los estudiantes tengan una aproximación histórica sobre el *número* π. Dicha propuesta incluye un conjunto de actividades, en las que se propone que el estudiante recree algunos métodos que se han utilizado en la historia para hallar el valor de π. Una de las varias actividades que se proponen es que los estudiantes sean "cuadradores de círculos". Para ello se les muestra la solución dada por los egipcios para dicho problema, y luego se les pide que diseñen una estrategia de tal manera que puedan obtener un cuadrado de igual área de un círculo en papel y que finalmente comparen con las respuestas dadas por los egipcios.

La propuesta muestra cómo a partir de la historia se pueden diseñar actividades didácticas, que pueden permitir un acercamiento a los conceptos, en este caso el numero π, y que le pueden permitir a los estudiantes una mejor familiarización con los contenidos.

González (2016) en su artículo "Modelando para la obtención del número pi" presenta una propuesta didáctica que consiste en hacer la modelación de un problema geométrico, para lograr obtener un valor numérico de π.

Para la modelación del problema se le propuso a los estudiantes construir un polígono regular con el máximo número de lados posibles, de tal manera que se aproximara a un círculo. El número en cuestión se obtuvo mediante la sumatoria de los catetos opuestos de los triángulos formados en el interior del polígono, considerándose el círculo unitario como base y la función trigonométrica Seno del ángulo α. Posteriormente se utilizó el programa de Microsoft Excel para observar que entre mayor numero de lados se tenga, el área se aproxima más a la de un círculo, y que teniendo en cuenta la ecuación del área de un círculo entonces se obtiene el valor de π. Cada estudiante hizo el cálculo en el programa de Microsoft Excel comenzando por un polígono de cuatro lados, de esta manera, los estudiantes pudieron observar cómo a medida que se aumentaba el número de lados del polígono, el valor encontrado para π tenía una mejor aproximación.

El autor concluye que ese tipo de ejercicios permiten al estudiante reconocer que este tipo de programas tienen un alto potencial, y que es de utilidad para la construcción numérica a partir de conceptos y modelos matemáticos.

En esta revisión de literatura referente a las distintas propuestas pedagógicas en relación con el *número π*, se puede observar cómo la historia puede ser fuente de inspiración del docente para el diseño de propuestas didácticas, sin embargo, se observa que las propuestas que están relacionadas con la enseñanza de dicho número están enfocadas más hacia la obtención de un valor aproximado y no hacia la comprensión del concepto del mismo, que es lo que se problematiza en los trabajos de la línea anterior.

1.2 Planteamiento del problema

Cualquier persona, con algún grado de educación matemática, se ha visto relacionada con el *número* π (Reif, 2000) ya que este número es común encontrarlo en diversas áreas de las matemáticas: En geometría, por ejemplo, está relacionado con ecuaciones como la del área del círculo ($A = \pi r^2$) y la del volumen de una esfera ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$), se encuentra en la solución de problemas geométricos que estén relacionados con ángulos, círculos, esferas, conos, cilindros, sólidos en revolución, elipses y elipsoides (Velez, 1988); en trigonometría vemos expresiones tales como sen(π) y πcos(π); en cálculo también lo encontramos en la serie de Fourier

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ o en la solución de un ejercicio de integración; y no sólo en las matemáticas, sino también en aquellas ciencias donde estas están presentes, tales como la física y la química.

Konic et.al (2014) nos dice que "La indagación de algunos procesos de enseñanza y estudios referidos a libros de textos muestran que (π) comienza a tener presencia escolar en forma directa con la longitud de la circunferencia hacia el final de la escolaridad primaria" (p.1005). En el contexto colombiano, esto se confirma con lo presentado en los estándares de matemáticas, en los cuales se enuncia que al terminar el grado quinto los estudiantes deben reconocer tanto el perímetro como el área de distintas figuras geométricas (MEN,2006), además en el conjunto de Derechos Básicos de Aprendizaje –DBA en el área de matemáticas planteados por el MEN, se establece que un estudiante en el grado sexto "Usa las fórmulas del perímetro, longitud de la circunferencia y el área de un círculo para calcular la longitud del borde y el área de figuras compuestas por triángulos, rectángulos y porciones de círculo" (p. 20)

Sin embargo, algunas investigaciones como la de (Jiménez, 2008)(Posamentier y Lehmann, 2006) y (Konic, 2005) cuestionan la forma en que el *número* π emerge en el campo escolar, al afirmar que la manera como este es presentado no da lugar a su conceptualización, pues este es presentado solo como un símbolo que representa a *3,14...* Es decir, como un dato y no como un objeto matemático dotado de significado e importancia dentro de la matemática. De esta manera "se torna ausente (π), o sin un tratamiento explícito en los primeros años de la escolaridad media, y más aún en los cursos siguientes cuando aparecen los números reales" (Konic et al; 2014, p.1005) convirtiéndose así como afirma Konic et al. (2014):

> En un dato que no solo obstaculiza la posibilidad de un trabajo consciente sobre este objeto, sino que enfrenta al estudiante ante la paradoja de proponerle inicialmente un objeto "familiar" pero al que será poco probable que en el futuro, le atribuya su verdadero estatus numérico. (p. 1005)

Como consecuencia de lo anterior es posible que se observen situaciones como las que menciona Jiménez (2008): "el estudiante puede decir cosas tan avanzadas de π como que $e^{i\pi}$+1=0 o manejarlo en ambientes tan extraños a su origen como la teoría de la probabilidad y sin embargo, desconocer las bases que sustentan la existencia y la naturaleza" (p. 300).

Lo anterior se confirma desde lo que observamos en la práctica profesional. El *número* π es presentado en sexto grado, en el contexto de la geometría, con la presentación de las ecuaciones de la longitud de la circunferencia y el área del círculo. Sin embargo, este sólo aparece como un símbolo más que pertenece a dichas ecuaciones y el cual debe ser reemplazado por un valor de 3,14.. para hallar cada vez que sea requerido, un valor referido al área o a la longitud de una circunferencia. De esta manera a los estudiantes no se les da la oportunidad de conceptualizar y π pasa a considerase simplemente como un dato.

Lo anterior también se confirma desde lo observado en estudiantes de décimo grado, estos reconocen que el *número* π está presente en muchas ecuaciones y que además en todas ellas se reemplaza por un mismo valor *(3.14...)*, sin embargo no es muy claro para ellos la razón de su existencia en esas ecuaciones.

También desde nuestra experiencia formativa como licenciadas en matemáticas y física, hemos visto en las ideas y conocimientos que compartimos entre compañeros en grupos de estudio, que π, a lo sumo, es reconocido como un *número irracional*, donde ya no es π estrictamente el símbolo del *3,14...* sino que constituye un conjunto infinito de cifras las cuales las tres primeras son *3,14…*, *y al* igual que los estudiantes de secundaria, también es considerado como un número presente en muchas ecuaciones tanto en el campo de las matemáticas como en el de la física. Sin embargo su naturaleza es desconocida.

Una experiencia en particular, nos hizo reflexionar sobre la necesidad de profundizar en el conocimiento de este objeto matemático: En la resolución del ejercicio ($\pi \cos \pi$) un compañero afirmaba que π tiene dos representaciones, en el argumento del coseno π toma un valor de 180° y fuera del coseno π tiene un valor aproximado de *3,14..*, entonces, esto nos llevó a preguntarnos: si es el mismo objeto, ¿por qué parece tener dos representaciones?

La respuesta a esta pregunta exige un conocimiento sobre π más allá de reconocerlo como un número irracional o una representación; implica hacer un análisis de cómo se relaciona π con el sistema sexagesimal, y en esta medida es necesario adentrarse en su historia, de dónde viene, cómo surgió en el campo de las matemáticas y cómo se llegó a esta relación.

Reconociendo entonces la importancia de profundizar tanto en los conceptos como en los objetos matemáticos y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores nos planteamos la siguiente **pregunta de investigación**:

¿Cómo una historia y la epistemología del número π contribuye a su enseñanza a estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín?

1.3 Objetivo general

Analizar cómo contribuye una historia y epistemología del *número* π a su enseñanza a estudiantes de décimo grado, a partir de un estudio de caso en la Institución Educativa Normal Superior de Medellín.

1.4 Objetivos Específicos

- Identificar elementos históricos y epistemológicos constitutivos del *número* π a partir de una indagación histórica y de una validación de fuentes.
- Analizar las concepciones de estudiantes de décimo grado acerca del *número* π y sus posibilidades de significación en las actividades propuestas.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Historia

Uno de los términos que ha estado en discusión desde tiempos antiguos, que aún hoy se discute y que probablemente se discutirá, es el concepto de historia. Frente a ello, corrientes filosóficas tales como el positivismo, el materialismo histórico, el realismo, el idealismo, han planteado sus concepciones desde sus creencias y filosofías. Collingwood (1968) plantea que “Lo que la historia sea, de qué trata, cómo procede y para qué sirve son cuestiones que hasta cierto punto serían contestadas de diferentes maneras por diferentes personas” (p. 17). Es decir que, aunque las posturas son diferentes, hay aspectos en común respecto lo que se piense de historia.

Un aspecto en común sería que la historia nos habla del pasado a través de hechos, y que es tarea del historiador dar conocer estos hechos. Ahora bien, ¿sobre cuáles hechos hace historia el historiador?

Desde la perspectiva de Carr (1984) “Los hechos solo hablan cuando el historiador apela a ellos, él es quien decide a qué hechos se da paso y en qué orden y contexto hacerlo” (p.15). Con ello se quiere decir, que el historiador construye historia sobre los hechos que sean de su interés. Así unos construyen historia sobre hechos científicos, otros sobre religión, otros sobre arte. Incluso en cada una de esas dimensiones el historiador sigue siendo selectivo e interpretador de hechos, por ello es absurdo pensar que la historia puede estar constituida por un conjunto de hechos objetivos y con independencia de la interpretación del historiador (Carr, 1984). Son los mismos hechos interpretados de forma distinta, por lo tanto se constituyen como dos formas diferentes de historia.

Así consideramos que desde esta perspectiva, no se puede hablar de la historia, sino que cada construcción es una historia. Por ejemplo, cuando hablamos de historia de las matemáticas, generalmente nos refieren a la historia de las matemáticas del mundo occidental, de cómo las matemáticas actuales llegaron a ser, y no se habla por ejemplo, de las construcciones matemáticas desarrollados por los Incas o los Mayas, pues esta podría ser otra historia de las matemáticas.

Por otra parte, para llevar a cabo su tarea, el historiador tiene dos tipos de fuentes, unas que corresponden a las construcciones primarias, que son propias del momento histórico y sin las que no se podría hacer historia. Como el historiador no puede ser testigo de los acontecimientos pasados, entonces se ve en la obligación de recurrir a fuentes a partir de las cuales los reconstruye, solo es posible conocerlos por los rastros dejados accesibles al historiador quien después inicia un trabajo lógico de razonamiento para reconstruirlos (Sanchez, 2005). El otro tipo de fuentes son las llamadas fuentes secundarias que son aquellas obras que han sido el resultado de la interpretación de fuentes primarias. Aquí entran por ejemplo, las obras historiográficas, que son el tipo de obras que utilizamos para la construcción de *una historia del número* π.

En todo caso, sea cual fuere la historia, esta "cumple una función: la de comprender el presente" (Villoro, p 36), y en este trabajo, la historia nos permitirá entender un concepto que ha estado presente en el campo de las matemáticas desde hace mucho tiempo, y el cual requerimos conocer. Tendremos presente, además, que no existe una sola historia, sino múltiples historias que pueden ser explicadas partir de un mismo hecho y que cada una de ellas está ligada a la subjetividad del historiador o de quien intenta explicar los hechos.

2.2 Epistemología

Tradicionalmente y desde una perspectiva general, podríamos decir que la epistemología es considerada la ciencia que se encarga de estudiar el conocimiento científico, a través de su desarrollo histórico y del análisis de hechos. Sin embargo esta definición es muy amplia y es necesario especificar cuáles son las formas de abordar dicho conocimiento.

Para Mardones y Ursúa (1982) el concepto de epistemología es abordado de maneras diferentes, según el país y para lo que se use, sirve para designar una teoría general del conocimiento, o también para estudios detallados sobre la génesis y estructura de las ciencias.

Según lo citado en Jaramillo (2003) para otros autores, la epistemología es aquella parte de la ciencia que tiene como objeto mostrar un recorrido de la historia del sujeto pero respecto a la construcción del conocimiento científico; es decir mostrar cómo el conocimiento se objetiviza, y se configura como un saber científico, pero sin separar el objeto de estudio del sujeto cognoscente, lo que implica dar una mirada de cómo el ser humano ha transformado o comprendido su entorno mediante métodos experimentales o su propia reflexión en el deseo o necesidad de explicar los fenómenos. Este modo de concebir la epistemología está en la misma línea de lo que presenta Tamayo (2003): “La epistemología presenta el conocimiento como el producto de la interacción del hombre con su medio, conocimiento que implica un proceso crítico mediante el cual el hombre va organizando el saber hasta llegar a sistematizarlo”(p. 24).

Aristóteles, según lo citado en Tamayo (2003) reconocía la epistemología como una ciencia que tiene por objeto conocer las cosas en su esencia y en sus causas. Dicho de otra manera, la epistemología se ocupa de reflexionar en el presente, que alude a conocer en todos sus aspectos un conocimiento y en el pasado, que es lo que permite conocer cómo se configura dicho conocimiento.

Similarmente, Piaget según lo citado en Romero (1991) define la epistemología en estos dos momentos: el primero como “el estudio de la constitución de los conocimientos válidos” y el segundo como “el estudio del paso de los estado de mínimo conocimiento a los estados de conocimiento más riguroso” .

Bachelard según lo explicado en Romero (1991) concibe la epistemología como “reflexión sobre la ciencia en vías de realización”, según lo cual es deber de la epistemología ayudar a plantear el error para rectificarlo. Lo que de alguna manera entra en contraposición respecto a lo que considera Thuillers citado en Mardones y Ursúa (1982): “La epistemología no pretende descubrir la verdad, es solamente un intento de análisis” (p.41). Así este mismo autor plantea que es tarea del epistemólogo responder a preguntas como esta: ¿Cómo se constituye una teoría científica?

Teniendo en cuenta las diferentes maneras de concebir la epistemología como se muestra en párrafos anteriores, consideramos que cada una de ellas responde a una forma de estudio del conocimiento científico, que llevará a tener una visión más amplia sobre el mismo y que permite finalmente tomar una postura crítica frente a ello. Así mismo estamos de acuerdo con Jaramillo (2003) en que “relacionar la epistemología con la génesis de los conocimientos científicos, permite reconocer en ella los diferentes alcances que tienen este tipo de conocimientos en las instituciones de una sociedad, los saberes ideológicos de la época, y el impacto” (S.p)

Al aplicar las anteriores definiciones al contexto de las matemáticas, nos permite decir entonces que hablar de epistemología de las matemáticas es hablar de constitución de las mismas, de cómo estas se desarrollan en transcurso histórico, de su génesis, de su esencia y de sus causas. Y refiriéndonos específicamente a nuestro objeto matemático trabajado, hablar de una epistemología de número π, es responder a preguntas tales como ¿cómo aparece en el campo de las matemáticas?

¿Qué fue lo que permitió que se configurara cómo un número? ¿Por qué ha sido un objeto de interés por los matemáticos más importantes de la historia?

2.3 Uso de la historia y la epistemología en las prácticas de enseñanza

En los últimos años, tanto la historia como la epistemología de las ciencias se han reconocido como posibilitadoras de herramientas para el maestro, en el sentido en que le permite mejorar sus prácticas de enseñanza. De hecho se ha demostrado que el desconocimiento de estas por parte del docente evidencia, en general, que las prácticas de enseñanza conllevan a tener visiones deformadas de la actividad científica (Mosquera, Solano y Sánchez, s.f) y por el contrario, incluir aspectos históricos y epistemológicos de las ciencias en la enseñanza estimula un mejor aprendizaje de la manera cómo se construye y se desarrollan la ciencias (Solbes y Traver, 2001).

En cuanto a las matemáticas, varias investigaciones señalan que la relación *Historia de las matemáticas-Enseñanza de las matemáticas*, tiene mucho potencial (Torres, Guacaneme y Arboleda, 2014) es decir, que considerar esta relación posibilita nuevas y significativas formas de llevar un proceso de enseñanza dentro del campo de las matemáticas. Así mismo, la epistemología aporta elementos de reflexión sobre la constitución del conocimiento matemático que propician un camino hacia la construcción del mismo.

Los aportes tanto de la historia como de la epistemología de las matemáticas al proceso de enseñanza, puede verse desde dos perspectivas: una que va en relación con el docente y otra en relación con el estudiante.

Desde la perspectiva del docente, la historia y la epistemología son imprescindibles para comprender el desarrollo científico y mejorar el aprendizaje de las ciencias (Mosquera, Solano y Sánchez, S.f). En esta medida los análisis histórico-epistemológicos cumplen un papel importante, puesto que ofrecen información valiosa sobre la construcción del conocimiento matemático en una cultura y proveen información sobre los caminos en lo que este emerge y cambia (Sierra, s.f). De esta manera, la profundización en el análisis de la naturaleza y desarrollo de los contenidos matemáticos determina y estudia los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Konic 2005).

Por otro lado, según lo planteado por (Sierra, s.f): “Para el profesor la integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza, debe constituir una especie de revulsivo contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático” (p. 96) que se traduce en reconocer que “las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural” (Anacona, 2003, pág. 32), y que por lo tanto son resultado de múltiples intentos, donde el error no necesariamente lleva al fracaso, sino que puede abrir nuevas posibilidades para construir otro tipo de conocimiento.

Por tanto, si se logra reconocer en los docentes, la importancia de la historia y la epistemología de la ciencias en los procesos de enseñanza coordinados por ellos, se podrían generar nuevas formas de enseñar, en las que se incluya mucho más que el saber disciplinar (Mosquera et al.; s.f).

Desde la perspectiva del estudiante, la historia y la epistemología proporcionan una visión diferente frente a las matemáticas, en el que “la concepción de matemáticas cambia, dejando de ser un edificio acabado, y restableciendo su categoría de actividad cultural y humana, a su vez que ayuda en su motivación por aprender” (Sierra, s.f, p.96).

En este sentido, incluir la historia de las matemáticas en un proceso de enseñanza posibilita, entre otras cosas, que el estudiante pueda resolver situaciones que han sido reto en ciertas épocas de la historia de la humanidad, además de que le posibilita al maestro formarse una idea más completa del discurso matemático en la que aparecen elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad (Anacona, 2003).

De acuerdo con Fauvel (citado en Sierra, 1997) algunas formas del uso de la historia de las matemáticas en el aula son las siguientes:

1. Mencionar anécdotas matemáticas del pasado
2. Presentar introducciones históricas de conceptos que son nuevos para los alumnos
3. Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos, cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase
4. Impartir lecciones de historia de las matemáticas
5. Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado
6. Fomentar la creación de poster, exposiciones u otro proyectos con un tema históricos
7. Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado
8. Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos
9. Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje
10. Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico
11. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico

Ahora bien, reconociendo estas múltiples formas de concebir la historia de las matemáticas en la educación matemática, en este trabajo apelaremos solo a algunas de estas formas dadas las características de la investigación, y considerando el tiempo de realización del mismo. Estas son:

- Presentar introducciones históricas de conceptos que son nuevos para los alumnos
- Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos, cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase
- Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos

2.4 Una historia del número π

En este apartado, pretendemos realizar una breve historia sobre el *número π,* en la cual se deje ver los momentos más importantes de su constitución como número en el campo de las matemáticas. Paralelo a ello, presentamos un análisis de carácter epistemológico, que nos brindará las herramientas para identificar los aspectos del *número π* que son adecuados para llevar a cabo su enseñanza en el contexto escolar.

Dada la dificultad de acceder a las fuentes originales, hemos acudido a algunos libros que muestran principalmente aspectos históricos del número en cuestión, estos libros son: *Historia de π* y *La proporción trascendental: la historia de pi el número más misterioso del mundo*. También han sido fuente importante el artículo *Historia de π* y el trabajo de maestría *Significados institucionales del número pi: implicaciones didácticas.* De este último trabajo hemos tomado algunos elementos de reflexión, propios de la configuración del *número π* como objeto matemático y didáctico.

UNA POSIBLE HISTORIA DE PI

En el contexto de las matemáticas π es la letra que "*representa la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro"* (Posamentier y Lehmann 2006, p.16). En notación actual se representa mediante la expresión

$$\pi = \frac{C}{D} \qquad (1)$$

Donde C es la longitud de la circunferencia de un círculo cualquiera y D su diámetro.

La elección de la letra griega π, como representación de esta razón fue realizada por William Jones en 1702, pero fue Leonhard Euler quien en 1748 la popularizó a través de su obra *Introductio in analysin infinitorum* (Posamentier y Lehmann, 2006).

Según Beckmann (2006), la historia del *número π* abarca un conjunto de sucesos en los que se deja en evidencia la inteligencia, la creatividad e incluso la terquedad humana. Reif (2010) plantea que la historia del *número π* puede dividirse en tres periodos consecutivos, estos son solo para señalar distintas instancias de existencia y desarrollo del objeto: un primer período que llamaremos geométrico, que es el más largo de todos, y que va desde la constitución de los primeros acercamientos al número de forma geométrica hasta la invención del cálculo diferencial e integral; un segundo periodo caracterizado por la aplicación de métodos analíticos que posibilitaron cálculos más aproximados al valor del *número π*; y finalmente un tercer período donde las investigaciones en relación con el *número π* estuvieron orientadas al conocimiento de su naturaleza, es decir, a responder qué características posee que lo permiten ubicar dentro de un conjunto numérico.

Período geométrico

Aproximadamente desde el año 3000 a. c cuando el hombre ya había observado la naturaleza y había sido consciente de que existían las cantidades proporcionales, y que éstas conservaban una razón, se dieron los primeros acercamientos a la constante geométrica π, se observó entonces que la razón entre el contorno (circunferencia) de un objeto redondo y su ancho (diámetro) guardaban una proporcionalidad (Beckmann, 2006). La curiosidad de saber cuánto valía esta proporción fue una de las razones que llevó a una larga travesía histórica del número. Varias culturas, tales como la babilónica, la egipcia, la hebrea, la griega y la china observaron esta proporción (Beckmann, 2006) y realizaron sus propias aproximaciones numéricas a través de métodos empíricos, cuyos materiales eran imprecisos, ya que el desarrollo de las matemáticas hasta el momento no proporcionaba las suficientes herramientas para realizar cálculos más exactos.

Los registros señalan que la primera aproximación numérica encontrada para el *número π*, fue tres (3). Uno de los registros más fehacientes lo encontramos en los libros bíblicos, así lo muestra el libro I Reyes 7: 23:"*Luego se hizo un mar fundido de diez codos*[4] *de borde a borde; perfectamente redondo, de unos cinco codos de altura, y un hilo de treinta codos medía su circunferencia";* otro de los libros donde se puede observar esto es en las Crónicas del Talmud[5], según lo citado en Reif (2010): "*lo que mide tres codos alrededor, tiene un codo de ancho"(p. 51).*

El último enunciado del anterior párrafo tal vez lo podríamos poner en términos actuales cambiando "alrededor" y "ancho" por "circunferencia" y "diámetro" respectivamente, lo que nos

[4] Medida de longitud utilizada por culturas en la antigüedad que consistía en la distancia que mediaba entre el codo y el final de la mano abierta.
[5] Libro que contiene la recopilación de la tradición oral judía, acerca de la religión, leyes, costumbres y tradiciones.

quedaría: *lo que mide tres codos de circunferencia mide un codo de diámetro* y realizando la operación de acuerdo con la expresión (1) el resultado nos da exactamente tres (3).

Probablemente la forma como se llegó al valor mencionado fue utilizando una cuerda: con esta se medía el diámetro de la circunferencia de un objeto circular cualquiera y luego se comparaba con la medición obtenida de la circunferencia completa, sin embargo cada *"comparación revelaba que la circunferencia era tan solo un poco mayor que tres veces la longitud del diámetro"* (Posamentier y Lehmann, 2006, p.39).

La curiosidad de saber qué tan mayor a tres era la longitud de la circunferencia en relación con su diámetro, llevó a desarrollar métodos más elaborados para calcular el valor de π. Según Beckman (2006) los valores más comunes dados para π en la antigüedad fueron: *3, 3(1/7) y 3(1/8)*. Un posible método utilizado para calcular π por la cultura Egipcia, planteado por este mismo autor, da una ruta de cómo pudo haberse llegado a estos últimos valores: Considerando que se está en la edad antigua, a orillas del rio Nilo, en un tiempo en el que no se posee ni regla ni compás ni un sistema decimal establecido, sino estacas y cuerdas, se procede a hallar un valor aproximado para π: En primer lugar se clava una estaca en la arena y al extremo superior de ella una cuerda que a su vez sujetará a una estaca de la misma altura de la estaca clavada en la arena. Se procede a dibujar en la arena una circunferencia con la cuerda tensa (utilizando el montaje como una especie de compás) y se marca la circunferencia con carboncillo. Se saca la estaca de la arena, dejando un punto O, y posteriormente, con otra cuerda, se halla el diámetro de la circunferencia construida, y se marca con carboncillo los puntos de intersección con la circunferencia (A y B), esta será la unidad de medida. Posteriormente se coloca la cuerda (de medida igual al diámetro) sobre la circunferencia, comenzado desde el punto A, y marcando cada punto (sobre la circunferencia) donde esta se termine (C, D y E). Se observará que sobra un espacio en la circunferencia que corresponde a la distancia EA. Para medir esta distancia, se toma, otra cuerda cuya medida sea igual a EA y sobre el diámetro de la circunferencia se coloca, señalando cuantas veces cabe la cuerda en esta distancia. Se observará que cabe entre 7 y 8 veces, siendo 8 un número que supera la longitud del diámetro de la circunferencia. La *Figura 1* muestra una posible imagen de lo que se construya. De esta manera π estaría entre los valores:

$$3(1/8) > \pi < 3(1/7) \qquad (2)$$

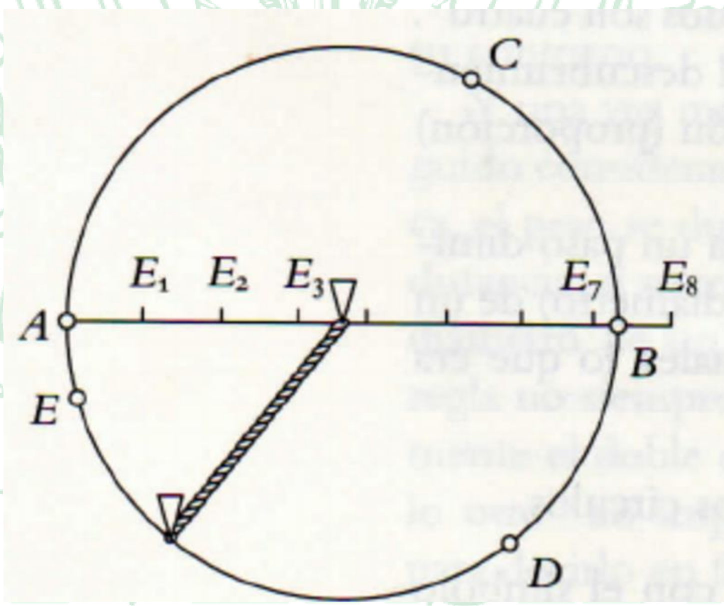


Figura 1: Cálculo aproximado del valor de π

Este método, nos permite dilucidar que los primeros valores para π, fueron netamente resultados de experimentos empíricos, en los que se ponía en juego la creatividad y la inteligencia de los seres humanos. Además nos permite analizar que dichas medidas están sujetas a errores que alteran los resultados.

Los babilonios también dieron su aporte al valor numérico de π, según Beckman (2006) en 1936 fueron encontradas ciertas tablillas en Cusa (cerca de Babilonia) y en una de ellas se hace la comparación de la longitud de un círculo circunscrito en un hexágono regular con el perímetro de este. En estas tablillas se afirma que la razón entre el perímetro de un hexágono regular y la circunferencia del círculo circunscrito (*ver Figura 2)* es igual a un número que según la notación actual corresponde a

$$\frac{6r}{C} = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} \qquad (3)$$

Si utilizamos la *expresión (1)* para remplazar en la *Ecuación 3,* considerando a *D= 2r,* tenemos que

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} \qquad (4)$$

De donde se deduce que

$$\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125 \qquad (5)$$

Observemos que este último resultado coincide con el valor inferior del rango encontrado por los egipcios que se muestra en la *Ecuación 2.*

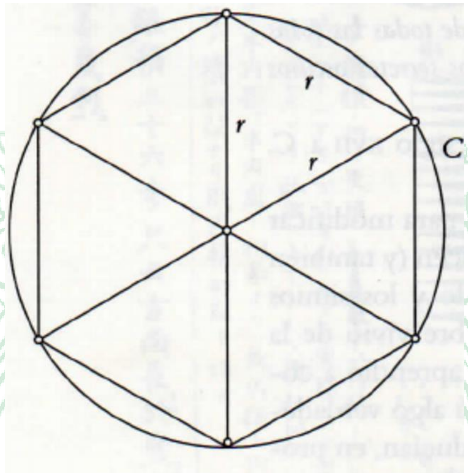


Figura 2: Circunscripción de un círculo en un hexágono

Vemos entonces cómo el surgimiento de la constante π en el campo de las matemáticas, se da como consecuencia de la observación y comparación entre diversos elementos, en este caso circulares, para luego pasar a un nivel en el que se pretende materializar estas relaciones utilizando el lenguaje matemático. Según lo presentado, se evidencia como esta relación no fue hallada solo en una cultura, sino en varias al mismo tiempo, y en cada una de ellas se hicieron intentos por hallar un valor numérico, algunos de manera empírica y otros utilizando las herramientas matemáticas que se tenía en esos tiempos. Dicho cálculo, según lo que se puede observar fue más una consecuencia de la curiosidad misma del ser humano, y no una necesidad.

Claramente se puede notar como algunos valores hallados coincidieron y otros no, todo esto dependió del método construido en cada una de las culturas.

Longitud de la circunferencia y Área del círculo

El ser humano también a través de su ingenio conoció las reglas para calcular la longitud de la circunferencia (*ver ecuación 6)* y el área de un círculo *(ver ecuación 7)* (Posamentier y Lehmann, 2006), (Beckman 2006).

$$C = 2\pi r \quad (6)$$

$$A = \pi r^2 \ (7)$$

Para llegar a la *ecuación 3* utilizando el álgebra actual, se procede de la siguiente manera: Se sabe que el diámetro de una circunferencia es dos veces el radio *(D=2r)*, se remplaza en la *ecuación 1* y se despeja la longitud.

Para obtener la regla del área de un círculo, según (Posamentier y Lehmann, 2006) los antiguos utilizaron un método reconocido en la actualidad como el *método de reordenamiento*:

Teniendo una circunferencia cualquiera, esta se divide en 12 partes iguales como lo muestra la F*igura 3*

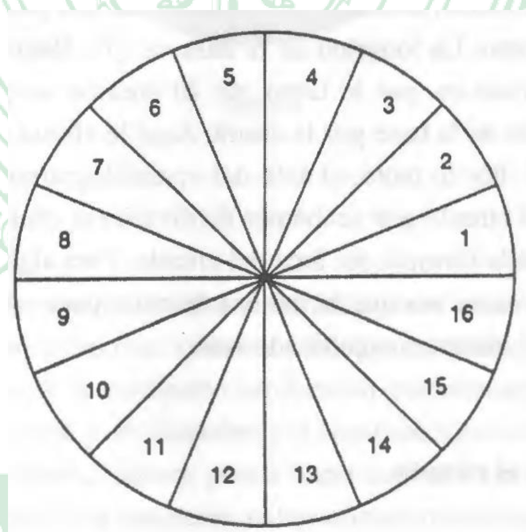


Figura 3: Circunferencia dividida en 12 partes iguales

Luego, se recortan y se organizan en una especie de paralelogramo como se muestra en *la Figura 4*

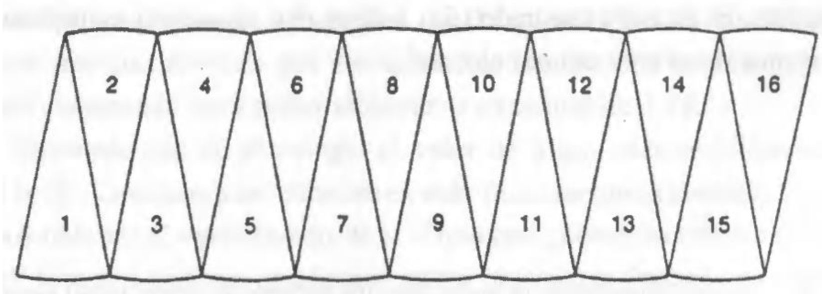


Figura 4: Reordenamiento de la circunferencia

Aproximando la imagen resultante a un paralelogramo se tiene que el área de este es:

$$A = bh \qquad (8)$$

En la *Figura 4* se puede observar que la base de dicho paralelogramo corresponde a media longitud de la circunferencia de la *Figura 3*, y que la altura del paralelogramo corresponde al radio de dicha circunferencia, y reemplazando en la *Ecuación 8* tenemos:

$$A = \frac{1}{2}(2\pi r)\, r = \pi r^2 \qquad (9)$$

Este método de reordenamiento, aunque es aproximado, nos permite intuir que entre más divisiones tenga la circunferencia, más se aproximará la figura formada a la de un paralelogramo, y precisamente esta consideración es la que se tuvo en cuenta para poder establecer una forma aproximada de hallar el área de un circulo, que más tarde con el desarrollo del cálculo integral se comprueba es exacta.

La construcción de las ecuaciones 6 y 7, muestran la primera relación de π con otros conceptos matemáticos: la longitud y área de una figura geométrica, el círculo. Esto cambia la concepción de π, pues pasa de ser solamente una relación a ser un elemento cuya comprensión y conocimiento son necesarias para comprender en su totalidad dichas ecuaciones. Esto puede explicar por qué la necesidad de identificar un valor numérico de π.

Cuadratura del círculo

Vemos entonces como las ecuaciones tanto de la longitud de la circunferencia, como la del área del círculo están íntimamente ligadas con *el número* π*,* pues cada una de ellas se deriva directamente de su definición. *E*sto a su vez vinculaba al número con uno de los tres problemas de la geometría griega: *la cuadratura del círculo*, que consistía en construir con regla y compás un cuadrado cuya área fuera igual a la de un círculo dado. Conocer entonces el *número* π, era un paso decisivo hacia la resolución del problema.

Los griegos sabían cómo construir cualquier figura geométrica utilizando la regla y el compás, incluso sabían cuadrar cualquier figura poligonal, sin embargo no sabían cómo cuadrar el círculo. Este problema fue objeto de fascinación de muchos matemáticos, y de esta manera *"la historia de los diversos intentos por cuadrar el círculo, sus diferentes construcciones, el cálculo por consiguiente de áreas, son en esencia la misma historia del número pi" (*Reif 2010 p. 49).

El papiro de Rhind[6]

El primer registro que da cuenta de una solución respecto al problema de cuadrar el círculo, se encuentra en el papiro de Rhind *(ver figura 5)* hallado en 1858 en la ciudad del Nilo; este contiene un conjunto de 84 problemas con sus soluciones respectivas.

[6] También llamado papiro de Ahmes, es un papiro egipcio escrito por el escriba *Ahmes* a mediados del siglo XVI a. C; durante el reinado de Apofis I. Está redactado en *escritura hierática* (tipo de escritura que permitía a los escribas del Antiguo Egipto escribir de forma rápida simplificando los jeroglíficos) y mide unos seis metros de longitud por 32 cm de anchura.

Figura 5 : Parte de la primera sección del Papiro Rhind

El problema 50 que es el que nos interesa, en palabras de Beckmann (2006) dice "*el área de un terreno circular de diámetro igual a 9 unidades de longitud es igual al área de un terreno cuadrado cuyos lados miden 8 unidades"* (p. 31).

Si igualamos el área del cuadrado con el área del círculo, el valor para π es el siguiente:

$$\pi r^2 = l^2 \rightarrow \pi(\frac{9}{8})^2 = 8^2 \quad (10)$$

De donde se sigue que

$$\pi = 3.16049 \qquad (11)$$

Se desconoce cómo se llegó a este resultado ya que el papiro no lo registra, pero es evidente que en este caso se plantea que tomando *8/9* del diámetro de una circunferencia se puede construir un cuadrado con un área igual a la del círculo.

Esta primera solución dada para el problema de la cuadratura del círculo, muestra como necesariamente para cuadrar el círculo se necesita conocer a π. El valor encontrado *(ver ecuación 11)* por los egipcios evidentemente no es correcto, y por ello el problema no estaba resuelto.

Arquímedes de Siracusa

Según Posamentier y Lehmann, (2006) uno de los principales aportantes, en los primeros tiempos, a la historia de las matemáticas fue Arquímedes de Siracusa (287 a. C- 212 a. C). Una pequeña parte de su trabajo fue dedicada al círculo y a π, y esta se evidencia en su obra *La Medición del círculo:* "En esta importante obra hay tres proposiciones relacionadas con el círculo que han jugado un importante papel en el desarrollo histórico del valor de π."(Posamentier y Lehmann, 2006 p.50). Estas son:

1. El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo donde los catetos del triángulo rectángulo son respectivamente iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

2. La relación del área de un círculo con la de un cuadrado de lado igual al diámetro del círculo se aproxima a *11: 14*.

3. La circunferencia de un círculo es menor que $3\frac{1}{7}$ veces su diámetro, pero mayor que $3\frac{10}{71}$ veces su diámetro.

La primera proposición la podemos relacionar con la siguiente figura:

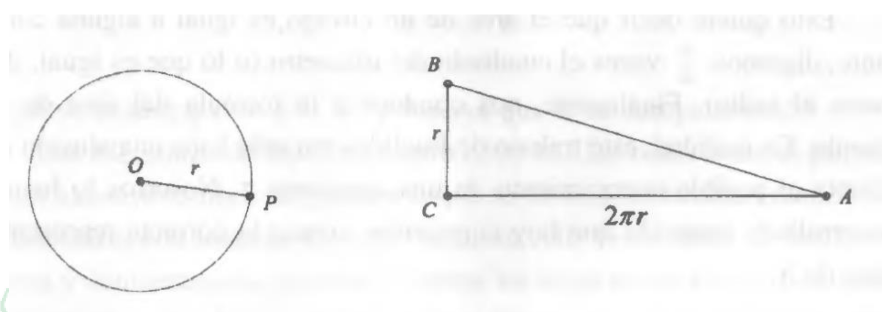


Figura 6: Representación de la proposición 1

El área del círculo, como ya se ha mencionado, es πr^2 y la del triángulo rectángulo es la mitad de la multiplicación de los catetos, de esta manera

$$\frac{1}{2}(2\pi r)(r) = \pi r^2 \qquad (12)$$

La segunda proposición la analizaremos a partir de la siguiente figura:

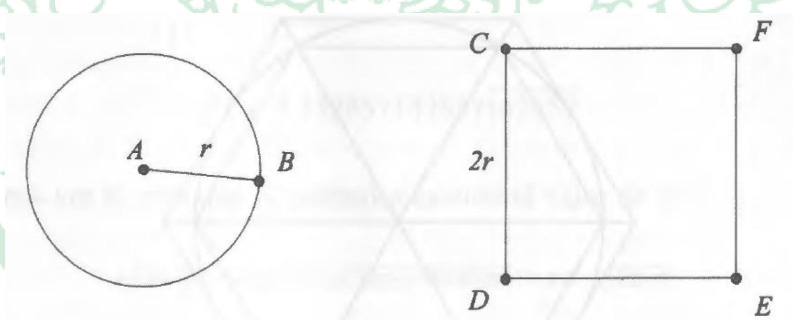


Figura 7: Representación de la proposición 2

Teniendo en cuenta el área del círculo y del cuadrado presentado, se tiene que dicha relación es:

$$\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{11}{14} \quad (13)$$

De donde se obtiene un valor para π de:

$$\pi = \frac{22}{7} \quad (14)$$

La tercera proposición, corresponde a uno de los resultados más significativos encontrados para π en la edad antigua. La forma como Arquímedes llegó a este resultado fue a través del llamado método poligonal ideado por él mismo, que consiste en inscribir y circunscribir polígonos en un círculo *(ver Figura 8*)

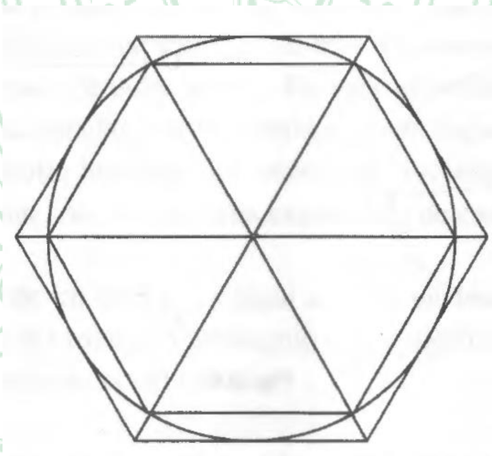


Figura 8: Hexágono inscrito y circunscrito

.

Arquímedes comenzó por hacer esto con hexágonos hasta llegar a construir un polígono de 96 lados, obteniendo un valor para π ubicado entre

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \quad (15)$$

"*…este método fue prácticamente el único utilizado en los casi dos mil años que precedieron la invención del cálculo diferencial*" (Reif, 2000, p. 52).

Después de Arquímedes, fue Ptolomeo quien utilizando el sistema sexagesimal, haciendo uso de tablas de cuerda construidas por él mismo y utilizando funciones trigonométricas llegó a una aproximación de:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3.1416\ldots \ (16)$$

El matemático chino Liu Hui, también hizo un cálculo para el *número π.* Para ello estableció que el área del polígono inscrito en un círculo es menor que el área de este, pero a su vez el área del círculo es menor que el mismo polígono aumentado con los rectángulos que se pueden construir en cada uno de los lados de este (Reif, 2000). Aunque el método no era lo suficientemente correcto, el valor encontrado fue bastante preciso:

$$3.141024 < \ \pi \ < 3.1427041 \quad (17)$$

El valor más aproximado realizado por los matemáticos chinos fue π= 3.14159292. Los árabes también se interesaron por el *número π,* y llegaron a una aproximación de dieciséis cifras correctas. Para ello utilizaron un método de aproximación numérica, con el cual se calculó el perímetro de polígonos regulares de 805.306.368 lados, tanto inscrito como circunscrito en un círculo determinado (Reif ,2010)

Muchas más aproximaciones fueron dadas para el *número π,* probablemente con el interés de encontrar algún patrón secuencial en sus cifras, pero todo esto fue en vano.

Vemos entonces, que desde el momento en el que surge π como una constante, los matemáticos se interesan por encontrar un valor numérico, dicho interés puede explicarse debido a la necesidad de conocer qué representaba. Desde luego el desarrollo de las matemáticas no proporcionaban las herramientas suficientes para ello, y a los matemáticos no les quedaba más que desarrollar métodos para encontrar las cifras de π. De esta manera habría la posibilidad de encontrar un patrón de repetición y si esto se lograba, entonces ya estaría resuelto todo, π sería la representación de un número racional, y con ello quedaría el problema de la cuadratura del círculo resuelto.

Periodo del análisis matemático

Este periodo se caracterizó por el desarrollo de expresiones que dieron resultados más aproximados al valor de π, que fueron consecuencia de los diferentes desarrollos matemáticos. La creación de la geometría analítica abrió la posibilidad de determinar analíticamente si la construcción de un cuadrado de igual área a la de un círculo dado era posible (Beckmann, 2006). De esta manera los estudios geométricos o numéricos de polígonos se volvieron obsoletos y las expresiones para π según lo mencionado en Reif (2000), tienen un carácter analítico, ya que fueron presentadas mediante series infinitas de términos.

François Viète Según lo presentado en Posamentier y Lehmann, (2006) François Viéte(1540-1603) fue la primera persona en dar un gran cambio en el cálculo de π. "utilizando el método desarrollado por los griegos, consideró un polígono regular de 6 • 216 = 393.216 lados y calculó *n* correctamente con nueve decimales" (p. 61). Se le reconoce principalmente por haber encontrado un valor para π a través de un producto infinito. Viéte utiliza el equivalente algebraico del método de Arquímedes, y lo traduce en una serie de términos infinitos (Reif, 2000). La expresión obtenida se constituye como la primera expresión analítica dada par la determinación de π, esta es:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}*\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}*\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}*\ldots}}}} \qquad (18)$$

Viéte calculó que el valor de π estaba entre

$$3,1415926535<\pi<3,1425926537 \qquad (19)$$

y nuevamente con ello se alcanzó un hecho importante en la historia del *número π* Posamentier y Lehmann, 2006 p. 61).

Jhon Wallis

El primer trabajo que se realizó seriamente sobre series infinitas, fue según lo planteado en Reif, (2000), el de Jhon Wallis (1616-1703), conocido por establecer la teoría aritmética de los límites. Wallis, basado en un método para determinar analíticamente el área de un semicírculo obtuvo la expresión de productos infinitos. Dicha expresión converge lentamente pero tiene la particularidad que sólo hace aparecer números enteros (Konic, 2005).

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\ldots}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\ldots} \qquad (20)$$

Leibinz

Durante la segunda mitad del siglo XVII, tuvo lugar la invención de cálculo diferencial e integral, que proporcionó herramientas que dieron como resultado la generacíon de nuevas expresiones sobre π. Dicha invención fue realizada tanto el matemático y filósofo Gottfried Von

Leibniz (1646-1716), como por Isaac Newton (1642-1727), en forma simultanea pero independiente.

Leibinz desarrolló como parte de un trabajo sobre funciones trigonométricas, un grupo de expresiones para encontrar a π como un límite de series infinitas (Reif, 2000), una de estas expresiones fue:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \quad (21)$$

Euler

Euler (1707-1783) desarrolló cantidades de métodos para calcular el valor de π, algunos de ellos se aproximaban con mayor rapidez en comparación con otros. Llegó a calcular un el valor de π con 126 cifras decimales correctos, sin embargo su mayor aporte fue la construcción de una formula, la cual lleva su nombre, en la cual se relacionan varios conceptos (entre ellos el *número π)* que aparentemente parecen no guardar relación alguna (Posamentier y Lehmann, 2006), la expresión es:

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \quad (22)$$

Donde e es la base de los logaritmos naturales, e i es la unidad imaginaria de los números complejos.

Es en este periodo, más exactamente en el año 1706 cuando se le da la convención de π como letra para representar la proporción entre la longitud y el diámetro de la circunferencia. Esto fue realizado por el matemático W. Jones y se cree que seleccionó esta letra al ser la letra inicial de la palabra en griego perímetro, la adopción definitiva se logró al Euler utilizar este símbolo en todos sus trabajos.

Con el advenimiento de la geometría analítica, es claro que comenzó a existir el puente entre el álgebra y la geometría euclidiana, por ello se observa un cambio en el enfoque de desarrollo de los métodos para el cálculo numérico de π. Sin embargo, se evidencia que los resultados obtenidos no arrojaban mayor información sobre lo que realmente era el *número* π.

Naturaleza de del número π

Pese a los distintos métodos desarrollados hasta entonces, a la cantidad de cifras encontradas para π, al ser humano aun le faltaba concluir con su tarea, dar respuesta a la pregunta formulada por Euler; ¿qué clase de número es π? Dar respuesta es esta pegunta fue el trabajo incansable de muchos matemáticos (Beckmann, 2006).

La irracionalidad de π

Lo matemáticos, en sus diversos intentos por hallar la mayor cantidad de decimales para π, guardaban la esperanza de encontrar, un patrón de tal manera que una cantidad de dígitos se repitieran, lo que implicaría nombrar a π como un número racional, sin embargo, ello no sucedió. En 1794, Adrien Marie Legendre, publicó en su obra *Élements de Géométrie* la demostración de π^2 como número irracional, y posteriormente en 1806 también demostró la irracionalidad[7] de π (Posamentier y Lehmann, 2006). Este descubrimiento, disminuyó la probabilidad de cuadrar el círculo, sin embargo, se continuaron con los intentos (Reif, 2010).

[7] "La prueba de 1767 del matemático alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) contenía un error". Posamentier & Lehmann, 2006, p. 23

La demostración de la irracionalidad de π, cambió totalmente la concepción que se tenía sobre este símbolo. Esto lo categorizó en un sistema numérico, el cual lo ubica en el grupo de los números irracionales y por ende en los reales, lo que le da un puesto de ubicación en la infinita recta real. Lo que no pudo haberse realizado antes.

Con dicho descubrimiento, pudo haberse pensado que la tarea de los matemáticos estaba completa, sin embargo ello no daba solución al problema mayor que impulsó a determinar el valor de π: la cuadratura del círculo. Por ello se explica la continuación de la tarea de dar respuesta a la pregunta formulada por Euler.

La trascendencia de π

En 1840 Liouville da cuenta de la existencia de los números trascendentes[8], que son aquellos números que no son solución de ninguna ecuación polinómica de cualquier grado con coeficientes enteros, pero lo más particular es que este tipo de números no son construibles[9]. En 1882 Lindemann demuestra que el número π, es uno de ellos (Posamentier y Lehmann, 2006).

Con lo anterior se concluye la imposibilidad de la cuadratura del círculo ya que al ser π trascendente, no se puede construir con regla y compás y por lo tanto es inútil cuadrar el círculo considerando las condiciones griegas.

Veamos una breve explicación de lo planteado por Beckmann, (2006) como al ser π un número trascendente no se puede cuadrar el círculo:

[8] Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número irracional, pero no trascendente; es la raíz de la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
[9] Que no se pueden construir con regla y compás

Un círculo puede ser cuadrado si puede ser rectificado. Si se considera un circulo de diámetro uno (D=1) entonces la longitud de la circunferencia del círculo es, reemplazando en la *Ecuación 6*

$$c = \pi \qquad (23)$$

Es decir, debemos construir una línea de longitud igual a π. Utilizando regla y compás, solo se pueden construir rectas y círculos, es decir, curvas cuyas ecuaciones son polinomios de segundo grado como máximo. Por tanto, los puntos que se obtienen de las sucesivas construcciones son siempre intersecciones de curvas de grado no mayor a dos. Se puede empezar con un círculo que tenga por ecuación

$$4X^2 + 4Y^2 = 1 \quad (24)$$

Las coordenadas de los extremos de estos puntos se obtienen mediante una serie de procedimientos, cada uno de los cuales se reduce a lo siguiente: empezamos con un cierto conjunto de puntos cuyas coordenadas son números conocidos, estas coordenadas pasan a ser los coeficientes de las ecuaciones por resolver en el próximo paso, dado que una intersección involucra la resolución de dos ecuaciones simultaneas.

Comenzando por (24) y el paso siguiente de la construcción, caracterizado por una curva de grado no mayor a dos, encontramos la intersección de las dos curvas resolviendo una ecuación a lo sumo cuadrática, cuyas raíces son racionales o irracionales y en cuyo cálculo solo intervienen raíces cuadradas. Estas raíces, o funciones sencillas de estas, pasan a ser las los coeficientes de la ecuación por resolver, en el siguiente paso de la construcción. Por lo tanto, la siguiente ecuación es cuadrática, y sus coeficientes son racionales o raíces cuadradas. Para convertir esta ecuación en otro con coeficiente racionales, basta con elevar la ecuación al cuadrado dos veces, lo que da como resultado una ecuación de grado no menor a 8, donde ***S*** debe ser finito. Si la construcción tiene ***S*** pasos, la última ecuación por resolver, que debe dar como resultado un segmento de longitud igual a π, debe ser una ecuación con coeficientes de grado menor o igual a 8 donde ***S*** debe ser finito.

Si el círculo se puede rectificar en un número finito de pasos cuadráticos entonces una de las raíces de esta ecuación algebraica es π *o* $\sqrt{\pi}$, pero si π es un número que no es solución de ninguna ecuación algebraica entonces rectificar o cuadrar el círculo es imposible

El descubrimiento del número π como un número trascendente le agrega una nueva característica, con lo cual parece que ya queda descrito completamente y no se necesita saber más sobre él. Sin embargo como se evidencia, es el desarrollo de las matemáticas las que proporcionan nuevos elementos que finalmente permitirán darle o no nuevas características a los objetos matemáticos como fue el caso del *número π.*

La era de la computación

Pese a la demostración de π como número trascendente algunas personas continuaron desarrollando métodos para encontrar más cifras. Tal es el caso de Rmanujan(1882-1920) qe desarrollo un conjunto de fórmulas para calcular el valor de π. Algunas de ellas eran muy complicadas y fue necesario esperar el advenimiento de los computadores para utilizarlas de forma adecuada (Posamentier y Lehmann, 2006).

La invención de los computadores dio paso a nuevos cálculos de cifras de π en una cantidad desproporcionada, en 1949 John Von Neumann, George Reitwiesner y N. C. Metropolis, calcularon el valor de π con 2.037 decimales.

Hoy en día se sigue utilizando los computadores para calcular cifras de π pero con otros fines, el de verificar la potencia de los computadores.

2.5 Elementos constitutivos del número π

A partir de lo presentado en el apartado 2.4, identificamos algunos elementos que permiten mostrar qué problemas a nivel histórico han sido clave importante en la emergencia del número π como objeto matemático. Para ello además hemos tenido como referencia el trabajo elaborado por Konic (2005).

Los problemas identificados son:

1 La medida directa de la longitud de la circunferencia en la antigüedad

El problema de la medida de la longitud de una circunferencia, evidentemente no es de fácil solución. Sin embargo, el interés por conocer cómo se relacionaba una longitud de determinada circunferencia con su diámetro, llevó a la construcción de métodos empíricos para su cálculo, con la utilización de herramientas rudimentarias (palos, estacas, cuerdas) y las herramientas que además proporcionaba las matemáticas de tal época. De ahí se explica por qué el primer valor dado para π fue tres, y la dificultad de encontrar con precisión las cifra decimales.

2 La cuadratura del círculo

Los diversos intentos por encontrar las cifras de π que se muestran a través del desarrollo de métodos, se deben más que todo a la obsesión de los matemáticos por dar solución al problema de la cuadratura de círculo, incluso el descubrimiento de π como número irracional y trascendente.

3 La acotación del perímetro del círculo por inscripción y circunscripción de polígonos, proceso desarrollado por Arquímedes.

Este método, cuya vigencia tuvo aproximadamente diecinueve siglos, fue el más potente durante su vigencia puesto que arrojaba resultados más confiables respecto a las cifras de π, con dicho método se estableció un intervalo de valores entre los que se debía encontrar el número. Con ello, se reconocía que si se encontraba un valor fuera de este intervalo, entonces era incorrecto.

4 La cantidad de decimales de π

El desarrollo constante de métodos para calcular el valor de π, nos hace pensar que los matemáticos creían encontrar en ellas un indicio acerca de lo que sería. La obsesión por encontrar las cifras de π fue una tarea interminable que sacrificó cantidad de tiempo de muchos matemáticos, sin embargo en este cálculo continuo, los matemáticos debieron caer en cuenta que esto era inútil y se debía recurrir a otro tipo de posibilidades, como por ejemplo que este fuera un número irracional.

5 La naturaleza de los decimales de π(irracionalidad y trascendencia)

La pregunta continua por qué es π, la identificación de muchas de sus cifras decimales, la ansiedad por dar solución al problema de la cuadratura del círculo y el avance en el desarrollo de las matemáticas, permitieron finalmente darle un lugar a π en la recta real.

Si bien cada uno de los anteriores problemas permitió la constitución de π como un objeto matemático, varios de dichos problemas y el modo como se procedió a su solución, pueden brindar elementos para llevar a cabo en el proceso de enseñanza. Respecto a esto Konic (2005) plantea:

> La consideración del diámetro de una circunferencia como unidad de medida, la relación entre el diámetro y el perímetro del círculo, la emergencia de π como una constante, la precisión de la medida, la aproximación de la superficie del círculo a través de otras superficies, la acotación de una medida. La distinción entre una expresión decimal y un número decimal. Estos elementos de significado indiscutiblemente generan desafíos matemáticos de gran interés formativo especialmente para la educación obligatoria. (p. 119)

Los elementos mencionados, sin duda alguna pueden constituirse como posibles temáticas que ayude en la construcción de conocimiento e incluso en el desarrollo de habilidades por parte del estudiante.

Pero los elementos de la constitución de π no solo pueden ser objeto de enseñanza en el nivel obligatorio, hay otros que lo pueden ser en niveles superiores:

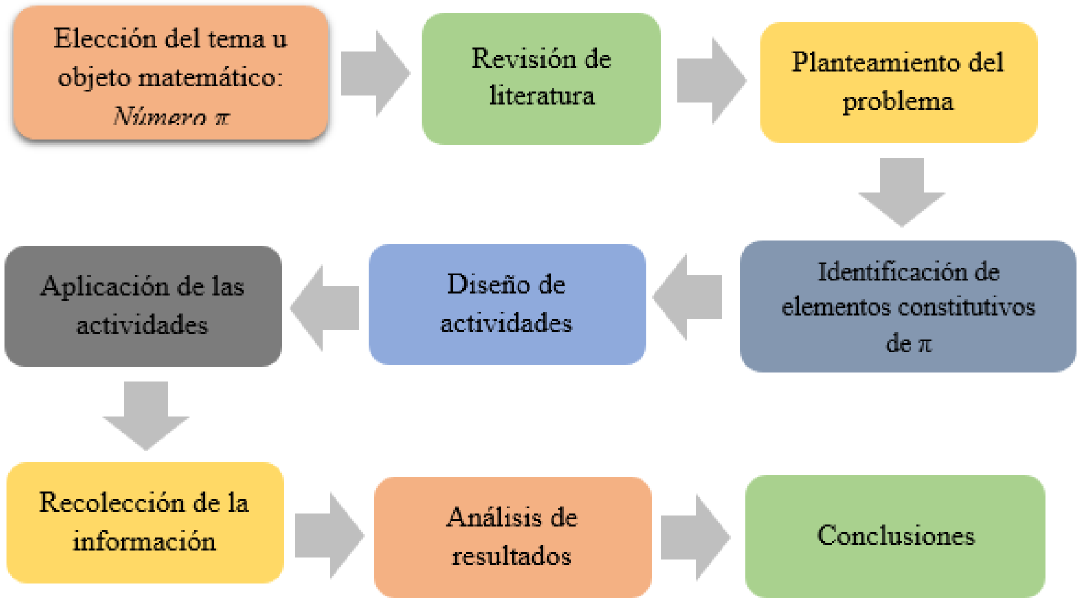
También podemos destacar, ya en niveles superiores, otros elementos de significado que conllevan complejidad epistémica, tal es el caso de la concepción de la longitud de una circunferencia como el límite del perímetro de un polígono regular inscripto (circunscrito) de *n* lados cuando el número de lados crece indefinidamente, el problema de la medición de cualquier curva, los sistemas de medición adecuados, la determinación de la cantidad de decimales de PI, la caracterización de los decimales de PI, el reconocimiento de este objeto como número irracional, la trascendencia de P. (Konic, 2005, p.119.)

Debido al carácter de investigación hemos tomado en cuenta solo los elementos que pueden ser objeto de enseñanza en niveles obligatorios.

3 MARCO METODOLÓGICO

Este trabajo lo desarrollamos bajo un paradigma cualitativo interpretativo dado que pretendíamos comprender y profundizar una situación en particular, a través de una exploración desde la perspectiva de los participantes, en el ambiente en que ellos se desvuelven, teniendo en cuenta la relación con el contexto (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). Nuestro interés era realizar inicialmente una indagación histórica sobre el *número* π a traves de una validación de fuentes, que nos permitiera identificar elementos en la constitución del mismo para luego diseñar un conjunto de actividades que fueron desarrolladas por un grupo de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín. En la intervención en este grupo pretendimos analizar algunas posibilidades de significación a partir de dicha implementación. En este sentido, los datos producidos obedecieron a la recuperación de significados en el sujeto en relación con el objeto matemático *número* π.

Para llevar a acabo nuestro trabajo de investigación realizamos el siguiente camino metodológico:



Esquema 1: Ruta metodológica

3.1 Elección del tema u objeto matemático: número π

A partir de nuestras experiencias en la práctica profesional y de las experiencias como maestras en formación, observamos que el *número* π es un objeto matemático cuya presencia es frecuente tanto en el campo de las matemáticas como en otros campos donde se hace necesario la utilización de estas. Tanto en la educación básica secundaria como en la media, el *número* π se propone en el campo de la geometría, luego pasa a la trigonometría, la física, la química, y continúa en la universidad en los cursos de álgebra, cálculo y otras materias que podríamos mencionar, sin embargo, frente a la pregunta ¿qué es el *número* π? Muchos quedamos inquietos, al reconocer que los conocimientos relacionados con este objeto son muy pocos, pues desconocemos sus orígenes y bases que lo sustentan como un objeto propio de las matemáticas.

3.2 Revisión de literatura

Como consecuencia de las inquietudes frente al *número* π nos surgió el interés por consultar diversas fuentes que nos permitieran tener un conocimiento más apropiado sobre dicho objeto matemático y dar respuesta a nuevas preguntas tales como ¿de dónde y cómo surge? ¿por qué se llama π? ¿por qué está en tantas ecuaciones matemáticas? ¿Qué sentido tiene para la enseñanza conocer su significado?

En dicha búsqueda se encontraron múltiples trabajos, la mayoría de ellos referidos a la historia del *número* π y a reflexiones epistemológicas. También se encontraron trabajos de carácter didáctico, los cuales incluyen propuestas de enseñanza en los que se resalta la importancia de incluir en el currículo la enseñanza de *número* π.

3.2.1 Fichaje bibliográfico

Con la finalidad de enriquecer nuestras lecturas iniciales frente al tema, se buscó la forma de organizar los recursos bibliográficos de tal manera que se pudiera tener una mejor visualización, obedeciendo a una herramienta propia del análisis documental y así encaminarnos a recolectar la información necesaria para dar solución a la pregunta de investigación, realizamos un fichaje bibliográfico, el cual nos permitió establecer relaciones, interpretaciones y comparaciones entre las distintas fuentes, permitiendo la clasificación de las mismas.

3.2.2 Clasificación de literatura

Histórico-epistemológico

La información contenida en esta categoría consideró aquellos trabajos que explican los momentos históricos del *número* π, entre ellos identificar cómo emerge en el campo de las matemáticas, en qué campos de las ciencias se encuentra, cuáles fueron los principales métodos que se desarrollaron para encontrar sus cifras decimales, qué papel cumple en el campo de las matemáticas, así como todos aquellos que nos permitan conocer al *número* π en su origen y naturaleza.

Didáctico

En esta categoría tuvimos en cuenta los trabajos encontrados en los cuales el *número* π constituye un objeto de enseñanza, es decir, aquellos que proponen como este puede ser enseñado en el aula, a través de un diseño de actividades o propuestas de enseñanza.

3.3 Planteamiento del problema

Durante la revisión de literatura, se encontró que el *número* π ha sido objeto de interés de los matemáticos desde hace alrededor de veinticinco siglos, su historia está llena de curiosidades y muestras de genialidad humana; en esta revisión de literatura también encontramos algunos trabajos que se preocupan por la enseñanza de los objetos matemáticos. Estos últimos, señalan que el *número* π se presenta en el campo escolar como un dato y continúa por la básica secundaria y media de manera invisible desde su significado. Lo anterior, lo hemos visto problemático como se expuso anteriormente y por ello lo intentaremos abordar a partir del trabajo con un grupo de estudiantes, en aras de contribuir a un posible análisis no desde la generalidad sino a partir de un grupo de estudiantes en particular y en un determinado contexto escolar.

3.4 Identificación de elementos constitutivos del *número* π

De la información contenida en el fichaje bibliográfico, en especial el que corresponde a la categoría de histórico-epistemológico, pudimos identificar elementos que muestran a través de la historia cómo ha sido la constitución de π como objeto matemático.

Sin duda alguna el *número* π ha sido uno de los números que ha despertado mayor interés entre los grandes matemáticos de la historia de la humanidad. Este fue nombrado como el número asociado a la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma. Su relación directa con uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega (la cuadratura del círculo) atrajo la atención de cantidades de personas interesadas en las matemáticas. La búsqueda incesante de las cifras del *número* π, constituye un legado histórico que deja entrever la perseverancia, creatividad, e inteligencia de quienes se dedicaron a dicha tarea. Después de muchos intentos por hallar una cifra finita, se demuestra la irracionalidad del número, y años más tarde queda definida la imposibilidad de la cuadratura del círculo, al demostrarse la naturaleza de número trascendente, es decir inconstruible.

La emergencia del *número* π en el campo de la geometría, a partir de la relación circunferencia – diámetro, y su posterior inmersión en otros campos de la ciencia constituye un entramado histórico que requiere de un análisis profundo, y esto finalmente se traducirá en tener un conocimiento más amplio sobre lo que es el *número* π.

3.5 Diseño de actividades

Para el contenido de las actividades propuestas nos basamos principalmente en elementos de la historia que muestran la constitución del *número* π como objeto matemático, también se tuvieron en cuenta aspectos epistemológicos que evidencian la importancia de dicho número en el campo de las matemáticas.

Para el diseño metodológico tuvimos en cuenta algunas formas del uso de la historia en el aula, planteadas por Fauvel citado en Sierra (1997) las cuales se mencionan en la sección 2.3. Las formas utilizadas en este trabajo fueron:

- Presentar introducciones históricas de conceptos que son nuevos para los alumnos
- Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos, cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase
- Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.

Dado que la enseñanza del *número* π, constituye un tema muy amplio que puede abordarse desde distintas perspectivas como la geométrica, analítica, desde el cálculo infinitesimal, entre otras, hemos optado por diseñar actividades que permitan la enseñanza del *número* π, desde el panorama geométrico e incluyendo solo algunos aspectos relevantes a esta perspectiva.

Dicha elección la realizamos, dadas las características del contexto en el cual desarrollaríamos las actividades, las cuales constituyen un grupo de alumnos de básica secundaria, cuyos conocimientos en matemáticas no son suficientes como para incluir actividades relacionadas con elementos propios de otros períodos. También tuvimos en cuenta que el período geométrico corresponde al primer periodo en la historia de π, y por ello constituye elementos sumamente significativos, tales como su origen y sus primeros cálculos, que consideramos son claves en la conceptualización del número.

En total fueron cinco las actividades diseñadas, las cuales se mencionan a continuación:

Actividad: Sondeo de conocimientos previos sobre el *número* π **(ver anexo 1)**

Con esta actividad se pretendió hacer una breve exploración sobre las concepciones de los estudiantes acerca del *número* $\boldsymbol{\pi}$, para ello se les entregó una guía que desarrollaron de forma individual, utilizando solo sus conocimientos previos.

Actividad 1: ¿De dónde surge π? **(ver anexo 2)**

El desarrollo de la segunda actividad fue llevada a cabo de tal manera que los estudiantes tuvieran un primer acercamiento a lo que constituye el *número* $\boldsymbol{\pi}$: La constante geométrica asociada a la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Además de dar una idea empírica de cuál fue la primera aproximación dada para este.

Esta actividad fue desarrollada tanto de forma individual, como de forma colectiva, de tal manera que permitieran momentos de discusión entre estudiantes y profesor, relacionados con el objeto estudiado.

Actividad 2: Longitud de la circunferencia y área del círculo **(ver anexo 3)**

Teniendo en cuenta que las ecuaciones de la longitud de la circunferencia y área del círculo, son de uso frecuente para la solución de ejercicios y problemas en geometría y puesto que el *número* π hace parte de ambas ecuaciones, consideramos importante mostrar la forma como $\boldsymbol{\pi}$ llega a hacer parte de estas ecuaciones. De esta manera se crea la posibilidad de que el estudiante reconozca que la presencia del *número* π en una ecuación no es un hecho fortuito, sino que esta tiene una explicación desde la misma construcción de los conocimientos matemáticos.

Para realizar el taller hubo momentos de trabajo individual, explicaciones por parte del docente y momentos de discusión entre estudiantes y profesor los cuales propiciaron espacios para la reflexión conjunta.

Actividad 3: La cuadratura del círculo **(ver anexo 4)**

Reconociendo el papel que cumple el problema de la cuadratura del círculo en la constitución del *número* π, evidenciado en los trabajos de corte histórico–epistemológico pretendimos realizar una introducción al problema de tal manera que el estudiante identificara en esta actividad nuevos elementos sobre el número π, como por ejemplo, la preocupación de los matemáticos por desarrollar métodos que permitieran hallar las cifras de $\boldsymbol{\pi}$**.**

Actividad 4: Aproximación al cálculo numérico de π **(ver anexo 5)**

De los múltiples métodos desarrollados para hacer un cálculo del valor numérico de π, nos pareció que el elaborado por los egipcios, da una idea de la necesidad de generar métodos más sofisticados y más precisos, que determinarían mediciones más exactas del *número* $\boldsymbol{\pi}$ y por ende un mejor conocimiento sobre este**.**

El diseño de las últimas cuatro actividades, se hizo luego de haber realizado la primera actividad, ya que es a partir de la información obtenida en esta que se realizan las demás.

Cabe mencionar que cada una de las actividades fue validada a partir de una prueba piloto realizada con diferentes personas, entre ellas estudiantes universitarios y de colegio, con las cuales se evaluó la claridad y la viabilidad de cada una de ellas.

3.6 Aplicación de las actividades

Teniendo en cuenta que nuestra investigación está orientada a dar solución a una necesidad de comprensión general y considerando que podemos entender la problemática mediante el estudio de un caso particular (Stake, 1998), la metodología para la aplicación de las actividades fue un estudio de caso instrumental. En esta medida nuestro caso es un instrumento para evaluar cómo la integración de la historia y la epistemología en las prácticas de enseñanza contribuye a darle otro significado numérico a $\boldsymbol{\pi}$.

La población escogida para desarrollar las actividades fue los estudiantes del grado décimo (10°C) de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín, esta población fue seleccionada a través de una convocatoria en la cual se invitó a los estudiantes a participar voluntariamente. En total tuvimos cuatro estudiantes quienes conformaron *el caso*.

Para poder participar del proyecto, los estudiantes manifestaron su interés por participar a través de un consentimiento informado (ver anexo 6) con el fin de que sus producciones fueran tomadas en cuenta por nosotras para el análisis de la información y para la producción de sentidos que se originaran en el trabajo sin la participación de ellos. Por asuntos de ética, sus nombres no serán revelados y utilizaremos otros códigos en representación de ello, tales como: ***E1, E2,E3 y E4***

3.7 Recolección de la información

Para la recolección de la información se utilizaron los siguientes instrumentos.

Guías: Estas constituyen el principal instrumento de recolección de la información, puesto que registra la información propiamente de los estudiantes.

Bitácora: Debido a que las guías no registran todo el proceso, ni toda la información, consideramos que este instrumento podría ser valioso para registrar algunos momentos de discusión, preguntas de los estudiantes y detalles relevantes a juicio de nosotras como investigadoras, permitiendo registrar las observaciones y conclusiones del trabajo de campo.

3.8 Análisis de resultados

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y atendiendo a la metodología con la cual se lleva a cabo la propuesta de intervención, procedimos a identificar en cada una de las actividades diferentes categorías que permitieran evaluar posibilidades de significación de los estudiantes con respecto al *número* $\boldsymbol{\pi}$ para posteriormente, organizar la información en tablas de tal forma que el análisis particular de cada una de ellas nos pueda dar conclusiones acerca de lo trabajado y del proceso en general de los estudiantes.

3.9 Conclusiones

A partir del análisis de resultados, se realizaron las conclusiones enfocadas a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación *¿Cómo una historia y la epistemología del número* $\boldsymbol{\pi}$ *contribuyen a su enseñanza a estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín?*

Así mismo, a la luz de la información obtenida planteamos interrogantes que podrían ser objeto de nuevas investigaciones.

4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado presentamos los resultados encontrados en el trabajo de campo, y así mismo analizamos dicha información teniendo en cuenta los objetivos planteados para cada una de las actividades, que finalmente nos llevaran a analizar si los objetivos planteados para el trabajo de investigación se cumplieron. Para ello hemos seleccionado la información que consideramos arroja elementos importantes para el análisis y organizado dicha información en tablas de doble entrada. Los elementos comunes dentro de cada una de las tablas han sido resaltados con un tipo de color, que no se conserva para todas las tablas. Es importante aclarar que la información registrada está escrita tal como la escribieron los estudiantes, con signos de puntuación y ortografía.

Notación utilizada

- Como dijimos anteriormente, para designar cada uno de los estudiantes participantes hemos designado pseudónimos en representación de sus nombres con el fin de proteger sus identidades. Estos son: *E1, E2, E3 y E4*
- A partir de la tabulación, y de las coincidencias econtradas, relacionadas con el análisis epistemológico, en cada una de estas actividades hemos identificado unas categorías emergentes propias de cada actividad. Para mencionarlas hemos decidido notificarlas con PR*n* donde *n* varía según las categorías identificadas en cada actividad.

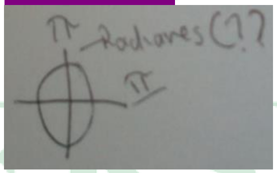
4.1 Análisis de la actividad de sondeo de conocimientos previos

Teniendo en cuenta principalmente la información registrada por los estudiantes participantes en la guía suministrada en clase correspondiente a la actividad realizada para la identificación de las concepciones de los estudiantes sobre el *número π*, conformamos cinco categorías las cuales nos permitieron identificar cuáles son las concepiones de los estudiantes frente este número. Estas son:

1. **Definición del número π:** Hace alusión a las maneras en que los estudiantes consideran a π, como un número o un símbolo.
2. **Relación con otros objetos matemáticos**: Incluye los objetos ya sean matemáticos o de otras disciplinas, con los que los esudiantes relacionan a π.
3. **Ecuaciones donde está presente**: Incluye las ecuaciones en las que los estudiantes han encontrado a π
4. **Solución dada para πsenπ**: Corresponde al resultado dado por los estudiantes para el ejercicio propuesto:D*ecir cuál es el resultado de πsenπ*
5. **Relación con la circunferencia**: Señala las relaciones dadas por los estudiantes entre π y la circunferencia.

La información registrada correspondiente a las categorías mencionadas se muestra en la tabla No.1.

Tabla 1: Sondeo de conocimientos previos

Saberes previos	**Definición del número π**	**Relación con otros objetos matemáticos**	**Ecuaciones donde está presente**	**Solución dada para $\pi sen\pi$**	**Relación con la circunferencia**
E1	Lo defino como un simbolo que representa el valor de 3, 14.	Lo relaciono con la formula para hallar el volumen. $(\frac{4}{3}.\pi.r^3)$ Tambien Con los radianes	$\frac{4}{3}.\pi.r^3)$ $2\ \pi r$ $\pi.r^2$	0.172	No encuentro ninguna relación
E2	Es el simbolo con la que expresamos 3.14	Formulas vistas en clase, hasta donde se "π" esta valorado en 3,14 pero en decimales		0.172	que los resultados 2.b y π estan expresados en decimales
E3	Podria defnirlo como un número para solucionar ecuaciones, que hace parte de una formula	Lo relaciono con un varias formulas vistas que ahora no recuerdo. Pero entre ellas estan la formula del volumen $\frac{4}{3}.\pi.r^3$	$\frac{4}{3}.\pi.r^3$	0.172	Que para hallar la longitud se necesita utilizar π
E4	Como un numerito que complementa un montón de fórmulas de física , química y matemáticas	$\pi = 3.1416$ $\frac{4}{3}$x πr^3→Fórmula de volumen Lo relaciono con otro montón de formulas que hay Sale en la calculadora Sirve para casi todo	$\frac{4}{3}$x πr^3 , πr^2 360°= 2 πrad  fórmulas de física , química y matemáticas	0.172	Para hallar los valores 2d, la fórmula L= 2 πr tiene un π

De la información registrada en la tabla N°1, en relación con el *número* π se evidencia que los estudiantes tienen varias maneras de definirlo o concebirlo. Los estudiantes *E1*, *E2* coincidieron en considerarlo como un símbolo que representa al *3.14*. *E4* también lo define de esta manera pero con otras dos cifras más, π=*3.1416*. De esto, se puede decir que para dichos estudiantes aunque π es considerado como un símbolo, no hay un acuerdo frente a cuál es el número que representa. Esto se evidencia como una clara contradicción, que refleja el desconcimiento frente al número en cuestión.

Todos los estudiantes que participaron mencionaron que el *número* π aparece en fórmulas vistas en clase, en este caso, *E1*,*E3* y *E4* manifiestan que la 'fórmula' del volumen es una de ellas. La ecuación de volumen mencionada por ellos corresponde a la de una esfera, sin embargo ellos no lo especifican. Además, *E4* asocia el *número* π con fórmulas de química y física y agrega que sirve para "*casi todo"*. Esto último lo interpretamos como una manera decir que π ha aparecido en varias de las materias cursadas por él y sus compañeros de clase, pero que al ser "complemento" queda ambiguo el papel que tiene en dichas expresiones, al ser un elemento que completa, pero no define en qué modo.

Con respecto a las disciplinas o temas con que relacionan a π, *E1* y *E4* establecen una relación con los radianes. Sin embargo, *E4* manifiesta a través de una imagen reportada en la tercera columna su confusión acerca de la manera en que se relaciona π y los radianes. En dicha imagen se observa una circunferencia dividida en cuatro cuadrantes y fuera de ella el símbolo π y la palabra radianes en forma interrogativa. De acuerdo con el registro de observación, *E4* reconoció que π corresponde en grados, a la mitad de la circunferencia, pero que no comprende por qué ni de dónde sale la palabra *radianes* ya que esta no se le ha explicado en ninguna clase.

Otra de las relaciones encontradas para el *número π* la cual es mencionada por *E4*, es que aparace en la calculadora. Esto lo podríamos interpretar como una manera de decir que π aparece en la calculadora como una tecla a la cual se le asigan un grupo de dígitos.

Una última relación encontrada para el *número π*, la cual es referida por *E2*, es que sirve para resolver ecuaciones. Con ello se percibe que el *número π* es considerado un elemento que se observa frecuentemente en el campo de las matemáticas.

Con el fin de identificar cómo es el manejo que le dan los estudiates al *número π* en diferentes ámbitos de las matemáticas, en este caso en diferentes sistemas de medidas de ángulos, planteamos la siguiente actividad*: "Decir cuánto da el resultado de π sen π*".

Los resultados a la actividad muestran que *todas* las respuestas de los estudiantes coinciden en un solo valor, este es *0.172*. A partir del valor numérico dado por los estudiantes podemos inferir cómo llegaron él:

$$\pi sen\pi = (3.1415)\ sen\ (3.141592°) = 0.172$$

este resultado dado por los estudiantes es incorrecto. La forma correcta sería:

$$\pi sen\pi = (3.1415)\ sen\ (3.141592\ rad) = 0$$

Comparando los procedimientos anteriores, se puede observar que los estudiantes no identifican las unidades de medida del ángulo con las que se está trabajando, es decir, utilizan a π en una unidad angular en grados cuando deben utilizar a π como unidad angular en radianes. Esto evidencia una necesidad de claridad conceptual, respecto a la relación entre radianes y el sistema sexagesimal pero que se lograría con una comprensión acerca del signficado de π.

Respecto a considerar π como una constante geométrica que surge a partir de la relación circunferencia- diámetro, *E3* y *E4* encuentran solo una relación y esta se da a través de la ecuación de la longitud de la circunferencia, por el contrario *E1* y *E2* manifiestan no encontrar relación alguna. Esto muestra que los estudiantes pueden tener un desconocimiento acerca de la manera cómo el *número π* emerge en la geometría. Este último aspecto se concibe relevante para poder atribuirle un significado numérico al *número π*, ya que hace alusión a la manera en cómo surge en el campo de las matemáticas para luego constituirse como un objeto importante dentro de ellas.

De la descripción anterior, podemos decir que el análisis de las actividades que desarrollaron los estudiantes que participaron reportan que:

1. Sobre la definición del *número π:*

Las concepciones de los estudiantes estuvieron alrededor de considerar a π como un dato, la recurrencia a la definición de π como un símbolo que representa a un conjunto de cifras decimales, lo plantea desde un contexto aritmético y sin embargo no corresponde con la naturaleza del número π. Este modo de concebirlo refleja un desconocimiento sobre el significado del mismo dentro del campo de las matemáticas.

Frente a lo anterior es importante aclarar que el *número π* no emerge en el campo de las matemáticas como la representación de un número en particular, sino como el número mismo. Es decir, π es el número asociado a la razón entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de la misma y no al número *3. 141592…* tal y como hemos visto, que es la forma de concebirlo por los estudiantes.

Por otro lado, las expresiones algebraicas son combinaciones de letras, operadores y números que son constantes y en ellas el símbolo π es concebido como uno más de la expresión, de tal suerte que el significado en tanto número no queda muy claro para el estudiante.

De esta manera, hablar de π sólo como un dato, evidencia lo que se menciona en Konik et al. (s.f) en cuanto no hay un tratamiento específico del objeto en el contexto educativo. Esto puede convertirse en un obstáculo para el docente en su proceso de enseñanza en la medida en que π se vaya relacionando con distintos conceptos matemáticos, ya que la falta de profundización en un concepto puede llevar a la imcomprension de otros relacionados con este. Una muestra de ello es la situación particular del estudiante *E4* que asocia a π con *"los radianes"* pero que manifiesta no saber su significado.

Frente a dicha situación, pensamos que al estudiante le podríamos definir un radián, sin embargo optamos porque pueda preguntarse ¿cómo se relaciona con π? ¿qué es π rad (*pi radianes*)? y ¿por qué πrad equivale a 180° en el sistema sexagesimal? La respuesta a dichas preguntas terminarán en la pregunta misma por ¿qué es π?

2. Relación con otros objetos matemáticos

Los estudiantes participantes coincideron en decir que π aparece en ecuaciones vistas en clase y que pertenecen a disciplinas tales como física y química, además π está relacionado con los radianes. Esto nos permite identificar que para los estudiantes π es un objeto matemático de frecuencia en los contenidos escolares, que no aparece solo en matemáticas, sino además en otras materias como lo son las mencionadas anteriormente, es decir que el estudiante reconoce de alguna manera la presencia de π en distintos disciplinas pero no puede atribuirle un significado más que el 3.14… Esto lo convierte en un objeto de importacia que merece la atención y la explicaciones necesarias, de tal manera que el estudiante pueda establecer relaciones entre conceptos donde este presente π, que finalmente puede traducirse en una mejor aprehensión de ellos.

3. Ecuaciones donde está presente

Comúnmente los estudiantes relacionaron la presencia de π en ecuaciones tales como el volumen de una esfera, área un círculo y longitud de una circunferencia, esto tiene que ver con objetos matemáticos propios de la geometría, sin embargo pese a que las ecuaciones mencionadas fueron propias de ese campo, el mencionar que π aparece en muchas expresiones vistas en clase no solo hace alusión a la clase de geometría sino también a la de química y física. Esto podría significar la posibilidad de pensar que π no solo cobra presencia en ecuaciones propias de la geometría,sino también de otros campos, por ejemplo, el hecho de que los estudiantes relacionen a π con los radianes significa que también es visto en ecuaciones propias de la trigonometría.

Sin embargo lo que se observa es que los estudiantes no le dieron mas importancia que la mera presencia en la expresión algebraica. Esto puede explicar por qué algunos no identificaron que π plantea una relación entre longitud de la circunferencia y su diámetro.

4. Solución dada para $\pi sen\pi$

La solución dada por los estudiantes para el ejercicio planteado, muestra como los estudiantes al identificar a π, inmediatamente, reemplazan el símbolo por el valor numérico que ellos conocen. Esto reafirma lo que ya se había observado, hay un desconocimiento respecto a la forma como el número es concebido, pues no se tiene claro el manejo de las unidades en este caso radianes y grados, de tal manera que los estudiantes identifiquen cómo es el manejo de ellos.

5. Relación de π con la circunferencia.

Se evidencia que los estudianes no encuentran relación alguna entre π y la circunferencia, excepto la presencia de este en la ecuación de la longitud de la circunferencia. Esto nos permite inferir que a los estudiantes π se les ha mostrado solo como un dato, necesario para resolver ecuaciones, no se les ha enseñado su carácter numérico.

4.2 Análisis de las actividades realizadas

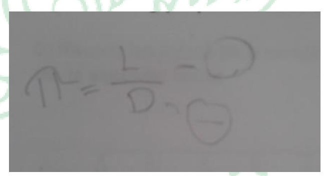
El análisis que se presenta a continuación corresponde a la información obtenida en cada una de las actividades diseñadas para la enseñanza del número π

4.2.1 Análisis de la actividad N°1

PR1: Relación encontrada entre la longitud de una circunferencia y su diámetro

PR2: Con base en las actividades realizadas y la lectura propuesta "un pedazo de π" ¿Conociste algo nuevo? ¿Qué puedes decir de π?

Tabla 2: Organización de la información correspondiente a la actividad N° 1

De dónde surge π	**PR1**	**PR2**
E1	Al dividir la longitud con el diametro el resultado No pasa de 3.	Aprendí que Pi(π) es un coeficiente entre el perimetro y la longitud de una circunsferencia. Se le empleo la letra griega π por William Oughtred.
E2	Que la longitud de la circunferencia es aproximadamente tres veces el diámetro	π es el cociente entre la longitud de la circunferencia y el diametro Por ello los resultados medidos dieron cercanos a 3 .
E3	La longitud es más o menos 3 veces mayor al diámetro. La división de los valores (L/D) dá siempre algo aproximado a 3.	Si, normalmente usamos este símbolo pero no sabemos que significa, personalmente considero muy importante conocer la historia de las cosas.
E4	Cada vez que se divide $\frac{L}{D} \simeq$ 3.Algo La L>D	 π = letra griega π = No tiene valor exacto Pero busca un coeficiente universal

De la información registrada en la tabla N°2, en relación con PR1, el estudiante E1 concluye que al dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro el resultado no pasa de tres, por el contrario, E4 manifiesta que este resultado da un poco mayor al número mencionado y agrega que la longitud de una circunferencia siempre es mayor que su diámetro. Los estudiantes E2 y E3 coinciden en decir que la longitud de la circunferencia es aproximadamente tres veces el diámetro, y este último agrega que la división entre estas dos longitudes da como resultado un número aproximado a tres.

Del anterior párrafo, podemos identificar que a partir del ejercicio realizado los estudiantes notaron una recurrencia en las medidas realizadas, esta es que el cociente entre las distintas longitudes de las circunferencias con sus diámetros respectivos da como resultado un número aproximado a tres. Esto nos permite analizar que como consecuencia de sus propias reflexiones sobre dicha información, los estudiantes concluyen que la longitud de una circunferencia, cualquiera que sea su medida, es aproximadamente tres veces su diámetro. Así los estudiantes obtienen una conclusión que se asemeja a la primera aproximación que se tuvo en la edad antigua para dicha relación circunferencia- diámetro: La circunferencia es aproximadamente tres veces la longitud del diámetro. También los resultados del ejercicio conducen a los estudiantes, en este caso al estudiante E4, a decir que siempre dicha longitud es mayor que el diámetro, resultado importante que conduce a certezas sobre dicha relación: esta es cercana a tres pero siempre mayor.

Por otro lado, respecto a PR2 los estudiantes E1, E2 Y E4, señalan que relacionando la lectura con la actividad realizada, π corresponde al número hallado de la relación encontrada en PR1 entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Precisamente E2 señala que por ello los resultados obtenidos fueron aproximados a tres. Interpretamos esta última afirmación del estudiante E2, como una asociación dada a partir de la lectura, la actividad y sus conocimientos previos.

También los estudiantes E1 y E4 mencionan que π corresponde a la letra griega escogida para representar la relación encontrada entre la longitud y el diámetro de una circunferencia, y además agrega el estudiante E4 que π no tiene una valor exacto, lo cual interpretamos como una forma de decir que no es posible atribuirle un valor representativo por medio de dígitos y que este sea finito.

Otra de las conclusiones dadas en PR2 y la cual es mencionada por el estudiante E3, es que normalmente se usa π pero no se sabe en realidad cuál es su significado. Esto nos permite deducir que el estudiante reconoce que el modo como se utiliza a π ya sea en la solución de una ecuación, o en otro contexto es de manera mecánica, simplemente se le reconoce como un símbolo el cual puede ser remplazado por cierto valor, pasando por alto el significado del mismo. El estudiante E3 agrega además que es importante conocer la historia de las cosas. Esto muestra como los mismos estudiantes reconocen que conocer la historia de un objeto, aporta nuevos elementos a la formación.

Se observa entonces, que a partir de la actividad realizada los estudiantes tienen una primera aproximación hacia lo que constituye el *número π*, la cual está asociada con el problema 1 del conjunto de problemas que permiten la emergencia de π como un número, mencionados en la sección 2.5.

En el ejercicio realizado los estudiantes notan una relación entre la longitud de la circunferencia y dan cuenta de ello, luego a partir de la lectura establecen relaciones entre lo que habían hecho y lo mencionado en ella, de esta manera concluyen que lo que ellos encontraron era probablemente una aproximación al *número π.*

Además la lectura permitió dar otro tipo de conclusiones, como por ejemplo que π no tiene un valor exacto, como lo plantea el estudiante E4, con esto es posible que se pueda ir alejando la idea de que π es 3,14 y pensarlo más como un número y no como la representación de este; además de que los estudiantes reconocen la importancia de conocer la historia de los conceptos, tal como menciona E3, con ello puede referirse a que la historia da cuenta de detalles que no se muestran en el aula de clase y que permite conocer mejor los objetos matemáticos con los que ellos trabajan.

4.2.2 Análisis de la actividad N°2

PR1: ¿Consideras que es posible hallar el valor de la longitud de una circunferencia sin conocer el valor de π?

PR2: Es igual el área del paralelogramo construido, al de la circunferencia inicial?

PR3: Teniendo en cuenta la longitud de una circunferencia dada y su radio ¿cómo se relaciona con la ecuación del área del paralelogramo?

PR4: Realiza una discusión con tus compañeros y profesor acerca de lo trabajado ¿qué concluyes de la actividad realizada?

Tabla 3: Organización de la información correspondiente a la actividad N°2

	PR1	PR2	PR3	PR4
E1	Si es posible, pero como no conocemos el valor de π el resultado no seria Tan verdadero como Cuando conocemos el valor de π.	Si ya que solo transformamos la figura, no la cambiamos y por lo tanto es igual	Se relaciona en que de la formula del paralelogramo podemos extraer la formula A=bxh, al reemplazar la altura por el radio y la base por $A = \frac{1}{2}2\pi r.r$ $= A\pi r^2$	Gracias a las investigaciones realizadas por los cientificos podemos definir a π con su valor
E2	No, aunque encontramos un resultado no seria como el que estamos acostumbrados a encontrar	Talvez no sea igual pero si se aproxima mucho ya que el area de la circunferencia no ha cambiado , solo cambia la forma	La base del parlelogramo corresponde a la mitad de la circunferencia por ende elevar la base al cuadrado sería toda el area de la circunferencia	Mi conclusion es que π es mas que 3.14, es más de lo que creemos y es muy interesante todo este origen.
E3	Si, pero no obtendríamos un número Natural como resultado, si no un número(2 veces el radio) junto con el símbolo π.	Si, ya que seguimos teniendo la circunferencia pero organizada de otra manera (paralelogramo)	Son lo mismo , solo que cambiamos los término de las variables usadas en el paralelogramo bxh a los términos que usamos en las circunferencias, así la base se convierte en la mitad de la longitud y la altura en el radio.	Gracias a que se generalizo el valor de π, podemos aplicar este concepto otras áreas en las que se hace imposible la medición , como en astrononomía y medicina y así hacer más fácil estas áreas
E4	L=(2r)π la longitud se mediría en π´s	Es la misma pero tiene diferente forma	Es posible hallar el area de la circunferencia si se conoce la del paralelogramo	Sin π no se podría hallar el área de la circunferencia Es muy importante tiene millones de cifras

En la tabla N°3 vemos que en relación con PR1 los estudiantes E1 y E3 manifiestan que es posible hallar la longitud de la circunferencia sin conocer un valor para π, sin embargo agregan que si este no se conoce “el resultado no sería tan verdadero” o similarmente, que la respuesta no sería un “número natural”. E2 por el contrario, manifiesta que no es posible hallar este valor, sin embargo, emplea una justificación igual a la mencionada por E1 y E3.

Según esto, a los estudiantes se les dificulta considerar un resultado diferente a los convencionales, por ello la necesidad de siempre reemplazar a π por un valor numérico.

Esto último nos permite identificar cómo para dichos estudiantes existe la necesidad de que los resultados sean dados en números arábigos como ha sido la costumbre, sin embargo el hecho de que mencionen que sí es posible hallar dicha longitud tal como lo plantea E4, al mencionar que el resultado quedaría en términos de π, es un paso a comprender que π es un número y no un símbolo que tiene que ser reemplazado por algún valor, como se observó en el análisis de la tabla N°1 donde los estudiantes consideraran que π no es más que un dato presente en muchas ecuaciones.

En relación con PR2 que está relacionada con la actividad correspondiente al “método de reordenamiento” explicado en la sección 2.4, lo estudiantes E1, E3 y E4 manifiestan que las áreas tanto del circulo dado y luego transformado en un paralelogramo siguen siendo iguales, ya que el circulo que se tenía inicialmente se organiza de distinta manera, E2 manifiesta que dichas áreas pueden ser distintas, pero en caso de serlo serían muy semejantes. Se observa en la respuesta dada por los estudiantes una unanimidad que precisamente los lleva a relacionar las ecuaciones del área de la circunferencia y del paralelogramo, cuando inicialmente parecieran no tener alguna relación.

Así en relación con PR3, los estudiantes E1 y E3 manifiestan que a partir de una ecuación se puede llegar otra, en este caso a partir de la ecuación del área para un paralelogramo se puede llegar a la ecuación del área de un círculo a través de relaciones establecidas entre la circunferencia inicial dada en la actividad y el paralelogramo obtenido luego de la reorganización de esta. Como menciona el estudiante E4 que si se conoce el área del paralelogramo, es posible hallar la ecuación del área de un círculo a partir de esta. E2 aunque el resultado no fue totalmente correcto, también establece que a partir de una ecuación se puede llegar a la otra.

Refiriéndonos entonces a PR4, la información obtenida muestra multiplicidad de respuestas. El estudiante E1 concluye que gracias a las investigaciones de los científicos se puede definir a π con su valor. Esto muestra como el estudiante aún está muy ligado a considerar que es necesario e importante conocer un valor para π.

El estudiante E2 por el contrario, muestra la iniciación de un cambio de perspectiva frente a π, al decir que este es más que 3, 14. Esta afirmación nos permite analizar que ya para dicho estudiante, la concepción sobre el número π, como se menciona en la tabla N°1 ha cambiado, al menos ya no se presenta sólo como un dato.

El estudiante E3, menciona respecto a PR3 que es a partir de una definición general del número π, que comienza esa relación con otras áreas ya no solo en geometría sino también en medicina y astronomía. y el estudiante E4

4.2.3 Análisis de la actividad N°3

PR1: Se tiene un terreno circular cuyo diámetro es igual a 4 unidades, si se desea construir un terreno cuadrado cuya área sea igual a la del círculo dado. ¿Cuánto debe medir cada lado?

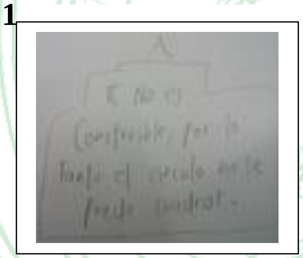
PR2: Intenta construir un cuadrado y un círculo que tengan la misma área, utilizando regla y compás. Comparte con tus compañeros tu propuesta de solución.

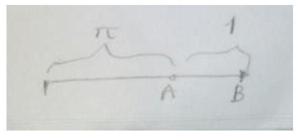
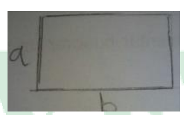
PR3: ¿Cómo se relaciona el *número* π con el problema de la cuadratura del círculo?

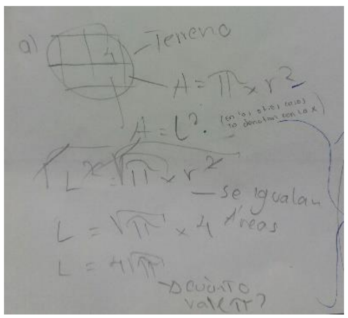
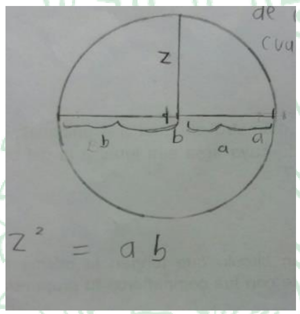
PR4: ¿Qué conocimientos nuevos en relación con el *número* π te brindó la actividad?

Nota: Dado que los estudiantes PR2 dieron respuestas semejantes, debido a que la solución del problema planteado se realizó entre estudiantes y profesor, decidimos plantear un solo desarrollo dado para el ejercicio.

Tabla 4: Organización de la información correspondiente a la actividad N°3

	PR1	PR2	PR3	PR4
E1	$A_0 = \pi r^2$ $A_{\square} = x^2$ $= \pi(2)^2 = x^2$ $= \pi 4 = x^2$ $= \sqrt{4\pi} = x$ Igualamos las areas para encontrar el valor del cuadrado.	**MOMENTO 1**  $Area^0 = \pi, r^2$ $Área^{\square} = L^2$ Para construcción. $Radio = 1$ $L^2 = \pi r^2$ $L^2 = (\pi)(1)$ $L^2 = \pi \times r^2$ Iguales áreas $L = \sqrt{\pi} \times r$ Para aplicar la formula necesitamos π	Su relación es que π es lo que impide cuadrar el círculo debido a que este no es un numero construible	Aprendi que para resolver el problema de la cuadratura del circulo se necesitaba conocer π, por eso muchas personas trataban de hallar sus cifras.
E2	$A_0 = \pi r^2$		Resulta, que este problema no se	π es muy complicado, es algo que

	$A_{\square} = x^2$ $= \pi(2)^2 = x^2$ $\pi(4) = x^2$ $\sqrt{4\pi} = x$ Igualamos las áreas para igualar el área del cuadrado	Pero π necesita tener una longitud 	puede resolver porque π no se puede construir y es necesario para resolver el problema	no puede ser construible, algo lo cual no tiene fin, pues claro, es un numero irracional.
E3	$A_0 = \pi r^2$ $A_{\square} = x^2$ $\pi(2)^2 = x^2$ $\pi 4 = x^2$ $\sqrt{4\pi} = x$ Igualar áreas para conocer el lado necesario	**MOMENTO 2** 1. Teniendo un rectángulo ab 	Es un obstáculo, pues por su condición de número irracional y no construible no permite desarrollar el problema y llegar a una solución.	Aprendí que todas las cuestiones relacionadas con el círculo se cruzan con el número pi, que es muy espec (Por ser irracional e inconstruible).

	para construir el cuadrado.	2. Trazamos un segmento que mida a+b según el rectángulo 3. Sacamos la mitad de ese segmento (punto medio) con el compás. 4. Éste punto será el centro de la circunferencia que trazaremos. 5. Trazamos una línea perpendicular al punto de separación de a y b		
E4		 Ésta es la medida de la longitud de un lado necesario para crear el cuadrado con la misma área que el rectángulo ab.	El círculo es imposible de cuadrar porque π no es # construible y siempre va estar presente.	π es muy extraño y aparece en problemas relacionados con todos los circulos

De la información presentada en la tabla anterior, en relación con PR1 se observa que todos los estudiantes tuvieron formas similares para resolver el ejercicio propuesto. El método utilizado es algebraico, dado que determinan igualar las áreas del círculo que se tiene y del cuadrado que se necesita por medio de sus ecuaciones respectivas, donde x representa según lo que se observa, la longitud del lado del cuadrado que se necesita hallar. Esta es una manera de ver como los estudiantes relacionan la geometría con el álgebra, lo que hoy llamamos geometría analítica. Aunque claramente se observa que el resultado dado para el ejercicio es semejante para todos los estudiantes, llama la atención la pregunta del estudiante E4 cuando plantea *¿cuánto vale π?*, con ello interpretamos que el estudiante se pregunta que para saber dicha respuesta es necesario conocer un valor de π.

En relación con PR2, ya hemos mencionado que tuvimos en cuenta sólo una solución puesto que los estudiantes presentaron resultados iguales dado que se hizo junto con el profesor. Para iniciar la solución del problema los estudiantes plantearon un método igual al desarrollado en PR1, que es representado en el momento 1, se observa que los estudiantes intentan cuadrar un círculo cuyo diámetro tenga el valor de 1. Según lo registrado en la bitácora el resultado lleva a los estudiantes a preguntarse cómo se puede construir una longitud que sea de medida igual a π y que además se haga con regla y compás, según lo registrado en la bitácora, E4 plantea que se puede hacer con el valor que se conoce o un valor aproximado de esta manera el problema quedaría resuelto. Esto muestra como para el caso de E4 el problema lo lleva a buscar posibles soluciones tal como lo plantea (Anacona 2003) incluir la historia de la matemática un proceso de enseñanza posibilita al estudiante resolver situaciones que han sido reto en ciertas épocas de la historia de la humanidad. Es precisamente el reto planteado a los estudiantes, el de pensar como cuadrar el círculo.

El momento 2 constituye propiamente la construcción del cuadrado con el área del círculo. En este momento la guía del profesor fue clave para llegar a las conclusiones sobre la solución dada para el problema, puesto que las construcciones con regla y compás[10] no les eran familiares. La conclusión posterior sobre la imposibilidad de la cuadratura por parte del profesor, permitió a los estudiantes a conocer un poco más sobre π, aunque dicha conclusión no se haya hecho en profundidad debido a que las herramientas matemáticas necesarias requerían de un nivel de educación superior.

A partir de la construcción realizada para PR2 los estudiantes concluyen que π, fue el obstáculo para resolver el problema de la cuadratura del círculo, que es precisamente lo que todos mencionan en PR3 al decir que como π no es construible, no se puede "cuadrar el círculo". Para E3 el que π sea un número irracional también constituye un obstáculo para resolver el problema planteado.

En relación con PR4 se puede observar como para los estudiantes E2 y E3 recalcan que π es un número no construible e irracional. Esto lo consideramos muy importante puesto que constituye nuevas significaciones para el numero π, diferentes a las mencionadas en la tabla N°1, también la respuesta dada por E1 el cual dice que para resolver el problema era necesario conocer a π, por ello el interés de los matemáticos por encontrar sus cifras, evidencia que los estudiantes reflexionan sobre lo que se está haciendo construyendo su propio conocimiento. Lo mismo scede con E4 cuando menciona que π aparece en todos los problemas relacionados con los círculos, lo que interpretamos como una manera de decir que donde está la circunferencia está presente π. Todas estas conclusiones muestran como para los estudiantes π deja ser sólo un dato, convirtiéndose en un objeto matemático dotado de significado.

[10] Como se estableció en la guía de la actividad N° 4, a los estudiantes se les hace una introducción sobre las construcciones con regla y compás, además se les explica una de las posibles formas para cuadrar un rectángulo utilizando solo estos elementos.

4.2.4 Análisis de la actividad N°4

PR1: Con la cuerda cuya medida es igual a la del diámetro, determine cuantos diámetros caben alrededor de la circunferencia, realiza un dibujo aproximado de lo encontrado

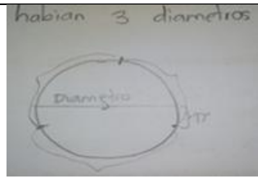
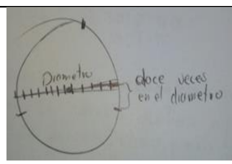
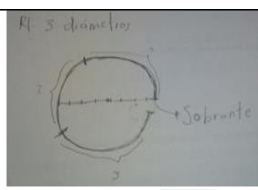
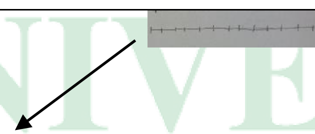
PR2: Utiliza otra cuerda para determinar el pedazo de circunferencia que sobra. ¿cómo es esta distancia en relación con el diámetro?

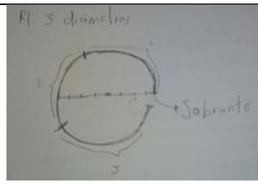
PR3: ¿Continuando con este método, será posible llegar a un valor exacto de π

PR4: Qué nuevas enseñanzas te dejó esta actividad en relación con π

PR5: Teniendo en cuenta las actividades anteriores cómo podrías definir a π

Tabla 5: Organización de la información correspondiente a la actividad N°4

	PR1	PR2	PR3	PR4	PR5
E1		La cuerda que corresponde a la distancia de la circunferencia cabe 13 veces, es decir $\frac{1}{13}$	El método es impresiso por eso el valor será inexacto debido a que los humanos tenemos muchos errores en las medidas.	Fue muy chevere calcular un valor para π aunque estuvo un poco alejado del valor que conocemos pero se puede ver que tiene muchas cifras Talvez con otro metodo se calcularia mejor	π es un numero interesante, que se refiere a una relacion entre la circunferencia y su diametro, tiene infinitas cifras, tampoco se puede construir y aparece en muchas formulas.
E2		La cuerda que sobra en la circunferencia, se ve reflejada en el diámetro 13 veces	No lo creo, se vieron uchas imprecisiones, se comenten errores, obvio, pero aqui se ven mas	La experiencia de calcular a pi es interesante porque nos muestra que tambien lo podemos hallar pero debemos poner mas cuidado haciendo las medidas	Es un numero con demasidas cifras y que tiene que ver con la longitud y el diametro de la circunferencia, tiene que ver con la cuadratura del circulo, no solo es 3.14 como pensaba antes
E3			No, debido a que nuestras mediciones no son muy imprecisas, y los	Que podemos comprobar su existencia en la realidad y no solo	Numero irracional por ello contiene infinitas cifras, tambien surge de dividir la circunferencia entre el

		La cuerda que mide lo mismo que el sobrante cabe 13 veces en el diámetro.	errores nos desviarían de el valor correcto	verlo en las fórmulas matemáticas.	diametro, ha sido un número importante en las matemáticas, y se ha relacionado con otras ciencias
E4		Esta distancia cupo 13 veces en el diámetro (sobrante) Hecho con herramientas imprecizas (Método egipcio)	es un método impreciso porque no podemos hacer medidas exactas	El origen de π, Todas las circunferencias se relacionan por este valor, por eso vimos que el diametro cupo tres veces en la circunferencia	π= piedra en el zapato para resolver el problema de la cuadratura del círculo. π =# infinitas cifras π=relacionado con todo lo que tenga que ver con círculo. π = numero relacionado con la longitud y area de la circunferencia π= numero importante

La actividad N° 4 fue realizada en conjunto por los estudiantes, por ello la respuestas dadas para PR1 y PR2 que se muestran en la tabla anterior son parecidas.

Los estudiantes comprueban mediante el método utilizado por los egipcios, que el diámetro de la circunferencia construida cabe tres veces en la circunferencia, y además que el "pedazo" de circunferencia que sobra, cabe trece veces en el diámetro. Sólo el estudiante E1 hace la relación de que dicho resultado es $\frac{1}{13}$ veces el diámetro. A partir de los resultados obtenidos, y con ayuda del docente, los estudiantes hallan un valor para π.

Respecto a PR3 los estudiantes explican que no es posible llegar a un valor exacto del número π, puesto que el método utilizado es impreciso, interpretamos esto como un manera de decir que por ello no se llegó a un valor como el que conoce normalmente 3, 14… el que los estudiantes mencionen esto muestra que ellos son conscientes de se necesitan otras herramientas que den resultados más seguros. Por ejemplo E2 menciona que también los egipcios tuvieron errores, pero que ellos (los estudiantes) tuvieron más. Esto de alguna manera confirma lo que plantea Sierra (S.f) "la concepción de matemáticas cambia, dejando de ser un edificio acabado, y restableciendo su categoría de actividad cultural y humana, a su vez que ayuda en su motivación por aprender" (p.96). Tal como se evidencia en la información registrada para PR4, por ejemplo, E2 y E3 manifiestan que la experiencia les da la posibilidad de comprobar su existencia en la realidad, hallándolo ellos mismos y no solo verlo en las fórmulas matemáticas, esto lo interpretamos además como una crítica del estudiante frente a la manera como se les da a conocer ciertos conceptos, donde para ellos se presentan como objetos acabados, sin la posibilidad de hacer sus propias construcciones. Otra de las conclusiones dadas para esta actividad es la mencionada por E1 el cual dice que aunque el resultado obtenido estuvo alejado del valor que se les había dado (3.14), pudo evidenciar que este tiene muchas cifras, lo que podríamos relacionar con una idea de irracionalidad.

Otra de las conclusiones dadas es que todas las circunferencias se relacionan con el valor de π, y por ello se evidenció que el diámetro cupo tres veces en la circunferencia, dicha conclusión es referida por el estudiante E4, la cual nos muestra que para este estudiante está claro que todas las circunferencias guardan una relación.

La información registrada que corresponde a PR5, muestra que a partir de las actividades realizadas los estudiantes dan nuevas significaciones respecto al número π en relación con lo que se presenta en la tabla N°1. Para este caso todos los estudiantes mencionan que π tiene infinitas cifras, con la salvedad que para E3 la cantidad de cifras se debe a que es un número irracional, también se podría interpretar esto del estudiante E2, pues así lo considera según lo que se observa en la tabla N°4 en la información que corresponde a PR4.

En este mismo sentido E1, E2 y E3 mencionan que este se relaciona con la circunferencia y diámetro y que además surge de la división entre ambos, E4 también lo relaciona con la circunferencia pero desde las ecuaciones de la longitud de la circunferencia y el área del círculo. Otra de las características que le atribuyen a π los estudiantes en este caso E2 y E4, es que está relacionado con la cuadratura del círculo; también E2 y E3 manifiestan que es un número importante dentro de las matemáticas y además E2 hace énfasis en que es más que 3, 14.

Hay que resaltar que la caracterización de número irracional y trascendente no fue dada en profundidad puesto que nuestra intención era una aproximación a π desde la perspectiva geométrica

Puede verse entonces, a partir de este análisis como hay una transformación respecto a la manera de concebir π, si se compara con lo encontrado en la identificación de conocimientos previos y las posteriores actividades encaminadas a transformar la manera de verlo.

En la actividad de sondeo de conocimientos se observa como para los estudiantes, π se identifica como un símbolo cuya presencia es frecuente en distintas áreas de las matemáticas. La concepción como número está bastante alejada de lo que realmente representa en el campo de las matemáticas incluida su importancia.

El desarrollo de las actividades introdujo nuevas significaciones para el número π: surge del cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, número irracional, relacionado con problemas de círculos, tiene infinitas cifras decimales, entre otras.

Las anteriores significaciones se evidencian en las afirmaciones realizadas por los estudiantes a partir de las actividades, en las que además el papel de maestro como guía del proceso cobró especial importancia en los momentos de preguntas de los estudiantes.

5 CONCLUSIONES

El análisis de las diferentes actividades realizadas, permite evidenciar cómo a partir de estas se permite tomar un poco de conciencia sobre una concepción del número π desde su sentido geométrico, en el cual ya no es simplemente un dato en forma de letra griega sino que posibilita una construcción como un número constituido de múltiples significaciones. En este sentido, consideramos que incluir aspectos históricos y epistemológicos del número π en el diseño de las actividades fue significativo, ya que estos proveen herramientas que facilitan los procesos de enseñanza, en cuanto evidenciamos que el estudiante muestra interés y dedicación en la realización de cada una de ellas y además observamos un cambio significativo en la concepción del objeto matemático trabajado.

Observamos una clara diferencia entre lo que significaba π para los estudiantes en el momento inicial, presentadas en la actividad de sondeo de conocimientos previos, y las significaciones que se le van atribuyendo conforme se llevan a cabo las actividades planteadas.

De la actividad correspondiente al sondeo de conocimientos previos se identificaron varias maneras de concebir al número π, por parte de los estudiantes:

- El número π es la representación del número 3.14
- Aparece en muchas fórmulas matemáticas vistas en clase
- El número π se relaciona con la circunferencia en cuanto este aparece en la ecuación de la longitud

Estas concepciones muestran como no había una atribución numérica para π, al considerarse simplemente como un dato que se necesita conocer para resolver ecuaciones ya sea en el campo de las matemáticas o en otras disciplinas.

A partir de las actividades realizadas, los estudiantes adquieren nuevas significaciones para π, que van en consonancia con las características dadas históricamente, estas son:

- Surge del cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro
- Numero irracional
- Contiene infinitas cifras
- Relacionado con la cuadratura del círculo
- No construible (trascendente)
- Aparece en los problema relacionados con los círculos

La oportunidad que los estudiantes tuvieron al enfrentarse a situaciones con otros sentidos del número les permitió verlo desde otra perspectiva.

En relación con la metodología utilizada para la elaboración de las actividades que incluyó la utilización de elementos histórico-epistemológicos observamos que esta generó interés en los estudiantes, de tal manera que facilitó la participación y la disposición de estos, además proveyó elementos de reflexión en relación con la matemática misma, donde se muestra su carácter de construcción humana y por ende social, que está en consonancia con lo que plantea Anacona (2003) cuando menciona que las matemáticas son una construcción social; al igual que con Sierra (s.f) que plantea que la historia de las matemáticas debe constituir un revulsivo contra el formalismo matemático.

Por otra parte, como consecuencia del proceso investigativo, destacamos que el aprendizaje no solo se dio en los estudiantes, sino en nosotras como investigadoras y aun en mayor profundidad. La profundización en el objeto matemático número π, desde una perspectiva histórica y epistemológica permitió conocer ampliamente un objeto que era casi que completamente desconocido para nosotras, siendo nuestra significación inicial no muy diferente a la encontrada en los estudiantes participantes. Encontramos en las diferentes construcciones históricas sobre dicho número, un entramado de conocimientos que dan cuenta de la riqueza conceptual que provee una historia, en la que no solo se muestra la transformación o configuración del objeto sino la interacción del mismo en diferentes contextos y con otros objetos matemáticos. Además, las diferentes construcciones que se pueden dar a partir del análisis epistemológico del objeto matemático, da posibles respuestas a preguntas que dese nuestra posición como maestras en formación nos hemos planteado: ¿por qué el número π es un objeto tan frecuente no solo en las matemáticas sino en todas las disciplinas con las que se relaciona las matemáticas? o incluso hacernos nuevas preguntas que nos llevan a la adquisición de nuevos saberes que complementaran nuestro saber disciplinar y pedagógico y que finalmente se verá reflejado en nuestros procesos de enseñanza que se traduce en mayores posibilidades de aprendizaje para el estudiante.

Por lo anterior, resaltamos la importancia de realizar trabajos de corte histórico- epistemológico en la facultad de educación de la Universidad de Antioquia, en los que se profundice no solo los objetos matemáticos, sino cualquier saber que pueda ser objeto de enseñanza.

Aquí es importante mencionar que en la facultad de Educación los trabajos de tipo histórico-epistemológico son escasos, además estos aspectos desde nuestra formación no han sido de mucha importancia.

En este sentido consideramos que la apuesta por modificar los procesos de enseñanza actuales debe ser impulsada desde la formación del maestro, siendo la universidad el espacio propicio para ello. El maestro no debe ser un replicador de contenidos, sino que debe de ser un mediador en la construcción de conocimientos, y para ello debe conocer en profundidad y reflexionar sobre los saberes a enseñar. Esto se constituye básicamente desde los estudios histórico-epistemológicos.

6 REFERENCIAS BILIOGRÁFICAS

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *EMA, 8*(1), 30-46.

Artacho, A.(2015). *π y el papiro de Ahmes.* Recuperado de https://matematicascercanas.com/2015/03/12/%CF%80-y-el-papiro-de-ahmes/

Asimov, I. (1987). *De los números y su historia*. Ediciones Orbis.

Beckmann, P. (2006). *Historia de π.* (P. Zadunaisky, Trad.) Mexico: Conaculta.

Carr, E. (1984). *¿Qué es la historia?* Barcelona: Ariel .

Collingwood, R. (1968). *Idea de la historia.* Mexico: Ingramex.

Fleck, L. (1987). *La génesis y desarrollo de un hecho científico.* Madrid: Alianza.

Gonzalez, A. (2016). Modelando para la obtención del número pi. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *6*(12). Obtenido de https://www.ride.org.mx/index.php/RIDE/issue/view/12

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología e la investigación* (Quinta ed.). Mexico: Mc Graw Hill.

Jaramillo, L. (Diciembre de 2003). ¿Qué es epistemología? *Cinta de Moebio*(18). Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10101802

Jiménez, D. (2008). π desde sus bases. *Divulgaciones matemáticas*, *16*(2), 299-326.

Konic, P., Godino, J., Castro, W., & Rivas, M. (2014). Estudio epistémico del número π: implicaciones didácticas. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/5658/1/KonicEstudioALME2014.pdf

Konic, P. (2005). Significados institucionales del número Pi: Implicaciones didácticas. Tesis de maestría. Universidad de Rio Cuarto, Argentina.

Mardones, J., & Ursúa, N. (1982). *Filosofía de las ciencias humanas y sociales:Materiales para una fundamentación científica* . Barcelona: Fontamara.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015)Derechos Básicos de Aprendizaje en matemáticas. Recuperado de http://www.santillana.com.co/www/pdf/articles-349446_dba_mate.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Serie lineamientos curriculares de matemáticas. Recuperado de : http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Mosquera, C., Solano, C., & Sánchez, M. (s.f). Historia y epistemología d elas ciencias como conocimieto didáctico. *Ruta Maestra*, 22-27.

Perlata, J. (1999). Consideraciones didácticas e históricas sobre el número pi. *Aula Abierta*(74), 177-191.

Posamentier, A., & Lehmann, I. (2006). *La proporción trascendental*,. Barcelona: Ariel.

Reif, S. (2000). El número π y su historia. *Ingeniria y Competitividad, 2*(2), 47-62.

Romero, C. (1991). Algunas consideraciones sobre epistemlogía científica. Obtenido de http://www.ts.ucr.ac.cr/binarios/docente/pd-000186.pdf

Sanchez, L. (2005). La historia como ciencia. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 1*(1), 54-82.

Sanchez, J y Valdive, C. (Sf). El Número Irracional: una visión Histórico- Diáctica . Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/52%20Sanchez.pdf

Sierra, M. (s.f). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. 93-96.

Solbes, J., y Traver, M. (2001). Resultados obtenidos introduciendo historia de la ciencia en las clases de física y química: mejora de la imagen de la ciencia y desarrollo de actitudes positivas. *Revista enseñanza de las ciencias, 19*(1), 151-162.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos* (Segunda ed.). Madrid: Morata.

Tamayo, M. (2003). *El proceso de la investigación científica.* Mexico: Limusa.

Torres, L., Guacaneme, E., & Arboleda, L. (2 de Mayo de 2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 16*(2), 203-224.

Velez, A. (1988). Curiosidades y misterios del número pi. *Revista Universidad Eafit*(69), 97-109.

Vergara, A. (2010). Epistemología . *Polisemia*, 37- 43.

7 ANEXOS

7.1. Anexo 1: actividad 1

Nombre____**Grado** ____________

Instrucciones:

El siguiente taller consta de varias preguntas, las cuales deberás responder de acuerdo a tus conocimientos, este se realizará con fines investigativos, por ello, tu sinceridad en las respuestas es muy importante para nosotros.

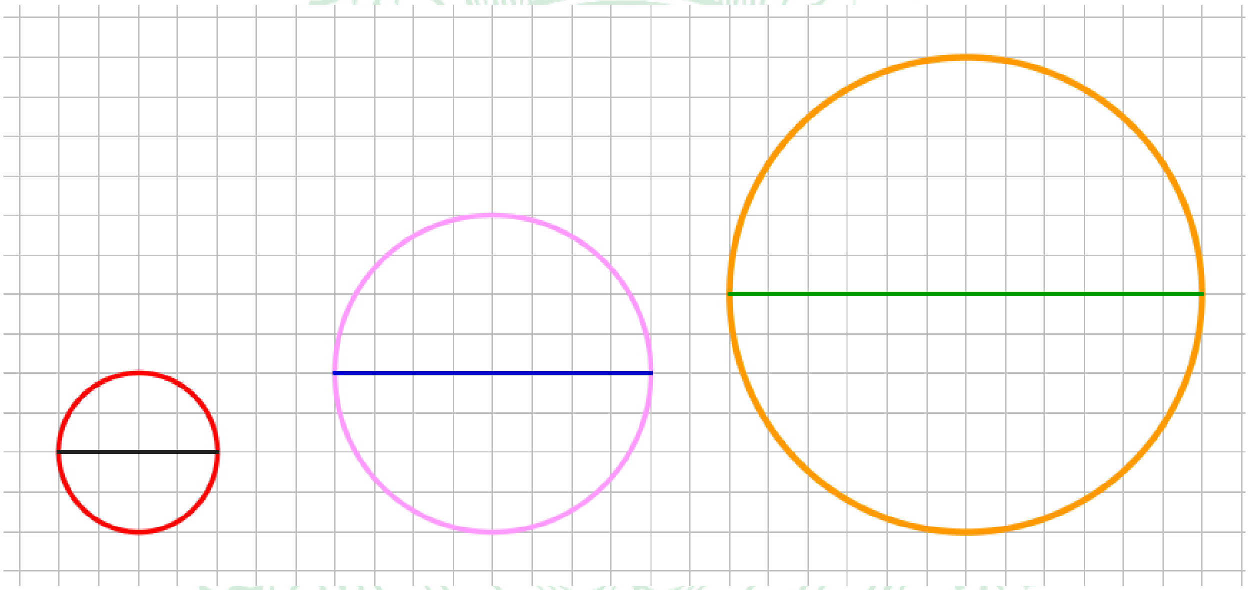
Si no entiendes alguna pregunta o algún término te genera confusión, señalas con una línea en la parte inferior de la palabra.

Tu respuesta es muy importante para nosotros.

1. Con qué relacionas el siguiente símbolo (letras, números, fórmulas vistas en clase).

$$\pi$$

2. a. ¿Qué relaciones encuentras entre las siguientes circunferencias?



2. b. Mide la línea negra, azul y verde:

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Negra	
Azul	
Verde	

2. c Ahora, intenta medir las líneas roja, rosada y naranja. ¿Cómo lo vas a hacer?

2. d. Escribe los valores obtenidos.

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Roja	
Rosada	
Naranja	

3. ¿Encuentras alguna relación entre los valores medidos en el punto 2.b y en el punto 2.d? Si encontraste una o más relaciones, menciónalas.

4. Encuentras alguna relación entre la información del punto dos y $\boldsymbol{\pi}$? Si encontraste una o más relaciones, menciónalas.

En los textos encontramos que:

La **circunferencia** es una línea curva cerrada, formada por los puntos que están a igual distancia del centro de un círculo, su longitud está determinada por la ecuación:

$$\mathbf{L=2\pi r}$$

5. Señala con un ✓ las expresiones que puedan estar relacionadas con la información anterior.

- Cos π = -1 ____
- A= πr^2 ____
- V=$\frac{4}{3}$ πr^3 ____
- π= 180° ____
- 360°= 2π rad__

Si señalaste una o más expresiones, menciona por qué las seleccionaste

$\boldsymbol{\pi}$ **Sen** $\boldsymbol{\pi}$

6. La expresión muestra la multiplicación de dos términos

Señala el resultado de la operación que consideras es la correcta:

- 0__
- 0.172__
- 25___

7¿Cómo podrías definir a $\boldsymbol{\pi}$?

Has terminado! Muchas gracias por tu participación!

7.2. Anexo 2: actividad 2

Nombre____Grado ____________

¿DE DÓNDE SURGE π?

1. a) Menciona varios objetos circulares

b) Escoge una de las figuras dadas, mide la longitud del diámetro, y la longitud de la circunferencia y ubica los valores en la tabla. Haz lo mismo con cuatro figuras más.

c) Completa la última columna de la tabla N°1

Figuras seleccionadas	Diámetro (D)	Longitud (L)	$\frac{l}{D}$

TABLA N°1: Datos obtenidos de la medición de objetos circulares

Según la información obtenida en la tabla anterior responde las siguientes preguntas:

a) ¿Existe algún caso en el que la longitud de la circunferencia medida fue menor que el diámetro de ella?

b) ¿Existe algún caso en el que la longitud de la circunferencia medida fue igual que la medida de su diámetro?

c) ¿Qué relación hay entre la longitud de las circunferencias medidas y sus diámetros?

d) Teniendo en cuenta los datos de la última columna de la tabla N°1 ¿Qué puedes concluir?

e) Con base en las actividades y la lectura propuesta “Un pedazo de π” ¿conociste algo nuevo? ¿Qué puedes decir de Pi?

UN PEDAZO DE PI [1]

En primer lugar, ¿qué es π? Pues bien, es la letra griega pi, que representa el cociente entre el perímetro de una circunferencia y la longitud de su diámetro. Perímetro proviene del griego perimetron, que quiere decir "la medida alrededor", y diámetro viene del griego diametron, que significa "la medida a través". Por alguna razón desconocida, mientras es costumbre hablar del perímetro de los polígonos, también se acostumbra a cambiar por la palabra latina circunferencia al referirse a los círculos. Supongo que está bien (no soy un purista), pero esto tiende a ocultar el origen del símbolo π.

Allá por el 1600 el matemático inglés William Oughtred, al discutir el cociente entre el perímetro de un círculo y su diámetro, empleó la letra griega π para representar al perímetro y la letra griega δ(delta) para representar al diámetro. Eran las iniciales de perimetron y diametron, respectivamente.

Pero los matemáticos simplifican las cosas muy a menudo igualando a la unidad todos los valores que pueden. Por ejemplo, pueden hablar de un círculo de diámetro unidad. En ese círculo la longitud del perímetro tiene un valor numérico que es igual al cociente entre el perímetro y el diámetro. (Supongo que esto es evidente para algunos de ustedes, y los demás pueden aceptar mi palabra de que es así.) Como en un círculo de diámetro unidad, el perímetro es igual al cociente, este cociente puede representarse por medio de π, el símbolo del perímetro. Y como los círculos de diámetro unidad se encuentran con frecuencia, el hábito acaba por convertirse en regla.

El primer hombre de alto vuelo que empleó π como símbolo del cociente entre el perímetro de un círculo y la longitud de su diámetro fue el matemático suizo Leonhard Euler, en 1737, y lo que a Euler le pareció bien les pareció bien a todos los demás.

Ahora sí puedo volver a llamar circunferencia a la curva que encierra al círculo.

Pero ¿cuánto vale en cifras el cociente entre la circunferencia y su diámetro?

Parece ser que esta pregunta siempre preocupó a los antiguos, incluso mucho antes de que se hubiera inventado la matemática pura. En cualquier clase de construcción que sea más complicada que un gallinero, uno tiene que calcular de antemano todo tipo de mediciones, para no tener que pasarse la vida gritándole a algún peón: "¡Imbécil, a estas vigas les faltan diez centímetros!". Y para hacer las mediciones, siendo el universo como es, siempre hay que usar el valor de π para multiplicar. Aun cuando usted no trabaje con círculos, sino solamente con ángulos (y a los ángulos no los puede evitar) va a tener que tropezar con π.

Es de suponer que los primeros calculistas empíricos que observaron que el cociente es importante, deben de haber determinado ese cociente dibujando una circunferencia y dividiendo directamente las longitudes del diámetro y de la circunferencia. Por supuesto que medir la longitud de la circunferencia es un problema difícil que no se puede resolver empleando la regla común de madera pues ésta resulta demasiado poco flexible para la medición.

Lo que probablemente hicieron los constructores de las pirámides y sus predecesores fue colocar con mucho cuidado una cuerda de lino a lo largo de la circunferencia, trazar una marca pequeña en el punto donde se completaba la circunferencia, para después enderezar la cuerda y medirla con el equivalente de una regla. (Los matemáticos teóricos actuales se enojan por esto y hacen comentarios despreciativos como: "...pero usted está suponiendo sin ninguna garantía que después de enderezar la cuerda, ésta tiene la misma longitud que tenía cuando estaba curvada". Yo me imagino que el honesto trabajador que organizaba la construcción del templo local, puesto frente a esta clase de objeciones, habría resuelto las cosas arrojando el criticón al Nilo.)

De cualquier modo, al dibujar circunferencias de distintos tamaños y hacer bastantes mediciones, sin duda los arquitectos y artesanos deben de haberse dado cuenta muy pronto de que el cociente era siempre el mismo para todos los círculos. En otras palabras, si el diámetro de un círculo era dos veces más grande que el diámetro de otro, la circunferencia del primero también medía el doble de la circunferencia del segundo. Entonces, el problema no se reducía a descubrir cuánto valía el cociente para un círculo en particular: buscaba un cociente universal que sirviera para todos los círculos y en todos los casos. Una vez que alguien hubiese aprendido el valor de π, nunca más tendría que determinar el cociente para un nuevo círculo.

1. Sección tomada del libro " De los números y su historia" de Isaac Asimov

7.3. Anexo 3: actividad 3

Nombre____**Grado** ______________

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

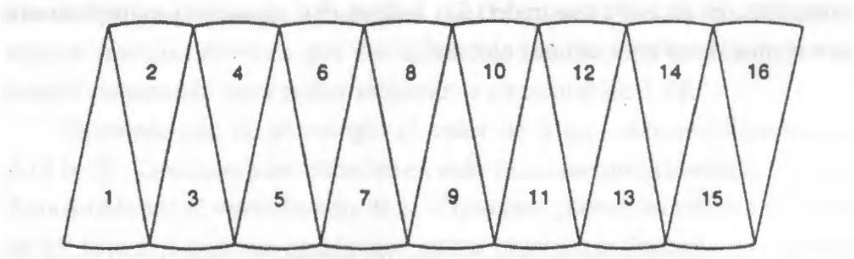
1. Según la explicación dada por el profesor

   a) Es posible hallar longitud de la circunferencia utilizando la ecuación L= 2π sin conocer el valor de pi?

AREA DEL CÍRCULO

1. a) Mide la longitud de la circunferencia dada y su radio

   b) Recorta las piezas de la cartulina, luego trata de organizar cada una de las piezas de la siguiente forma



c) ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo?

d) ¿Cuánto mide la base del paralelogramo?

e) Calcula el área del paralelogramo

f) ¿Es esta área igual a la del círculo?

g) Teniendo en cuenta la longitud de una circunferencia dada y su radio ¿cómo se relaciona con la ecuación del área del paralelogramo?

2. Realiza una discusión con tus compañeros y profesor acerca de lo trabajado ¿Qué concluyes de la actividad realizada?

7.4. Anexo 4: actividad 4

Nombre____**Grado** ____________

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

1. Realiza la siguiente lectura junto con tus compañeros y profesor.

La geometría de regla y compás[11]

[11] Lectura tomada del libro ciencia divulgativa regla compás y otras formas de ver la geometría de José Antonio Pérez.

En Grecia clásica, los dibujos geométricos se realizaban en el suelo con instrumentos de dibujo similares a los que se emplean en la actualidad: reglas graduadas y sin graduar, compases, escuadras, etc. La regla graduada y las escuadras se consideraban poco fiables y es natural, porque, ¿quién garantiza que se ha medido correctamente una distancia o que el ángulo de una escuadra sea perfectamente recto? sólo quedaba la regla no graduada y el compás y, no sin reticencias, si lo entendieron los sabios griegos y Euclides en particular, que optó por dichos instrumentos en todas las construcciones de sus *Elementos*. Eso sí, se trataba de instrumentos ideales que cumplían ciertas condiciones: la regla podía ser tan larga como se quisiera y el compás sólo mantenía la separación entre puntas sino se levantaba, lo que significa que no podía utilizarse para medir y trasladar distancias, como se acostumbra a hacer con los compases actuales.

¿Qué construcciones podían realizarse con regla y compás? se fijaron cinco construcciones básicas (Figura 1) de forma que cualquier otra debía ser una combinación de las mismas.

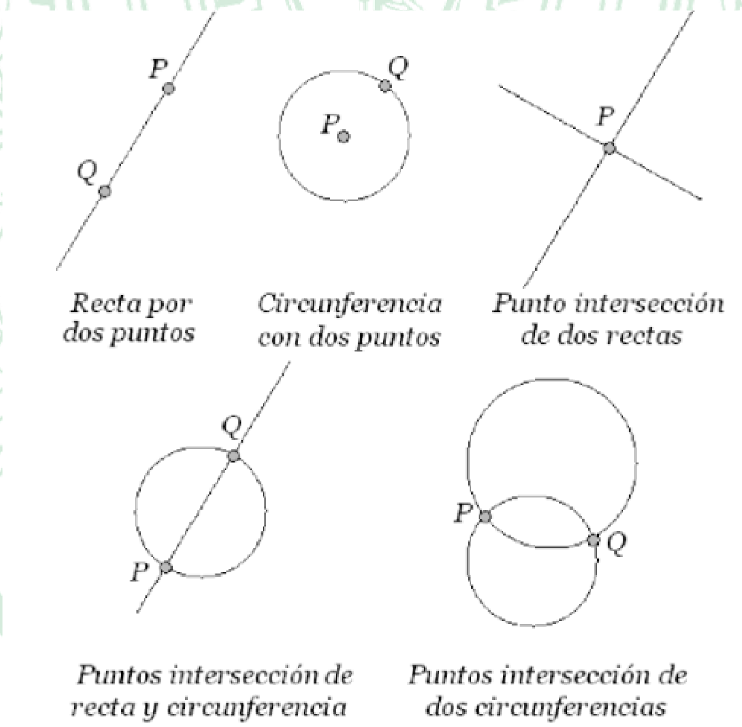


Fig 1: Construcciones básicas en la geometría de regla y compás

Así por ejemplo, para construir un triángulo equilátero (Figura 2) a partir de un segmento bastaba con trazar dos arcos de circunferencia centrados en cada uno de los extremos y radio igual a su longitud, marcar uno de los puntos de intersección y trazar dos rectas que unieran el nuevo punto con los anteriores

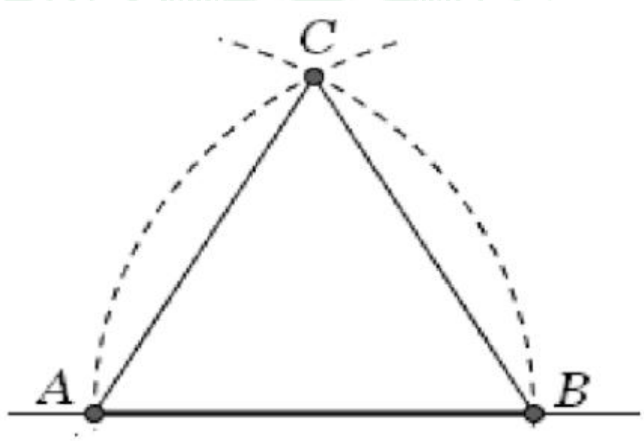


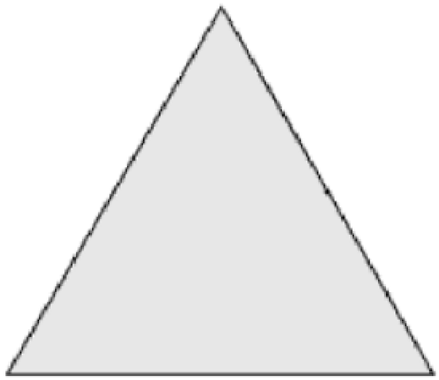
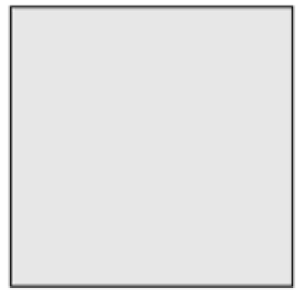
Fig 2: Construcción de un triángulo equilátero

¿Bastaban estos dos instrumentos para hacer cualquier construcción? En principio sí, como lo prueba el hecho de que gran parte de la geometría griega se desarrollara utilizando regla y compás

CUADRAR FIGURAS

2. a) ¿De los polígonos que se muestran a continuación, alguno tiene mayor área o son iguales?

Discute tu respuesta con los demás compañeros y el profesor.

Comparar dos figuras de formas diferentes resulta difícil porque algunas de sus dimensiones pueden inducir al error. Los griegos eran conscientes del problema y pensaron que la mejor manera de resolverlo era reducir las figuras a uno forma común (el cuadrado) en la que bastaba la medida de un lado para tener una idea del área.

Existieron construcciones de cuadratura para los triángulos, los rectángulos y otros polígonos, por ejemplo el pentágono el hexágono y el octágono.

b) Entre estudiantes y profesor intentar cuadrar un rectángulo utilizando sólo la regla y el compás.

CUADRATURA DEL CÍRCULO

3. Realizar en parejas

   a) Se tiene un terreno circular cuyo diámetro es igual a 4 unidades, si se desea construir un terreno cuadrado cuya área sea igual a la del círculo dado, cuánto debe medir cada lado?

b) Intenta construir un cuadrado y un círculo que tengan la misma área, utilizando regla y compás. Comparte con tus compañeros tu propuesta de solución.

4. Atendiendo a lo explicado por el docente, y todo lo trabajado en clase responde:

a) ¿Cómo se relaciona el *número π* con el problema de la cuadratura del círculo?

b) ¿Qué conocimientos nuevos en relación con *número π* te brindó la actividad?

7.5. Anexo 5: actividad 5

Nombre____Grado ____________

APROXIMACIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO DE π

En actividades anteriores se ha hablado del número π: cómo se define, cómo está relacionado con las ecuaciones de la longitud y el área de la circunferencia, también se ha hecho una breve introducción al problema de cuadratura del círculo. Ahora, se intentará realizar un cálculo aproximado del valor de π.

A través de la historia se han construido varios métodos para calcular el valor de π (aproximación por series, método de exhaución, entre otros), siendo algunos de ellos más precisos que otros.

El proceso para llevar a cabo esta tarea también fue cambiando paralelamente con la ciencia y la tecnología. Los primeros materiales utilizados fueron probablemente cuerdas, estacas, arena y carbón, luego se inventó el papel, un sistema de medida común para todos, el compás, etc.

Actualmente se utiliza el computador para llevar a cabo esta tarea, pues por medio de este se obtienen resultados más rápido.

En esta actividad, vamos a hacer un cálculo aproximado de π, y para ello nos basaremos uno de los posibles métodos utilizados en la edad antigua por los Egipcios. Para ello, lo primero que tenemos que suponer es que no existen reglas, ni compás, ni un sistema decimal como el que hay ahora, así que tendremos que utilizar herramientas semejantes a las que se utilizaron en ese entonces.

Los materiales que necesitaremos son los siguientes:

- Superficie de tierra (plana)

- Dos estacas
- Tiza
- Cuerda

Construir una circunferencia:

Primero se necesita hallar un lugar donde haya un terreno de tierra plano.

Clava una estaca y amarra al extremo superior una cuerda; al extremo libre de esta amarra el palo, y luego dibuja la circunferencia moviendo el palo alrededor de la estaca, (trata de hacerlo con la mayor precisión posible); marca con tiza; saca la estaca y señala este punto con carbón.

Medir el diámetro de la circunferencia

Señala el diámetro de la circunferencia y marca con una tiza, además corta un pedazo de cuerda igual al diámetro de la circunferencia.

Cálculo del valor de π

1. a) Con la cuerda, (cuya medida es igual a la del diámetro), determina cuántos diámetros caben alrededor de la circunferencia. Realiza un dibujo aproximado de lo encontrado.

Utiliza otra cuerda para determinar el pedazo de circunferencia que resta, esta cuerda será utilizada para determinar qué fracción del diámetro representa este pedazo de circunferencia que sobra. Para ello encuentra sobre la línea que representa el diámetro de la circunferencia las veces que la cuerda cabe en esta distancia.

2. ¿Cómo es esta distancia en relación con el diámetro?

3. Discute con los compañeros y profesor sobre los resultados obtenidos

y responde:

¿Qué valor aproximado se encontró sobre π?

4. ¿Continuando con este método, será posible llegar a un valor exacto π?

5. ¿Qué nuevas enseñanzas te dejó esta actividad en relación con π ?

6. Teniendo en cuenta las actividades anteriores ¿Cómo podrías definir a π?

7.6. Anexo 6: Consentimiento informado

UNVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROTOCOLO DE COMPROMISO ÉTICO Y ACEPTACIÓN DE LOS Y LAS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN [1]

Nombre de la Investigación:

LA ENSEÑANZA DE π DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

Investigadoras:

Dianny Romaña Palacios, Gloria Giraldo Vásquez

Presentamos ante ustedes nuestro compromiso ético. Entendemos como imperativo y deber, hacer uso adecuado y discrecional de la información recolectada en el marco de este trabajo, con el único fin de lograr los objetivos del estudio en cuestión y en la perspectiva de contribuir con aportes para el mejoramiento de la educación en ciencias en los contextos de los casos elegidos para este estudio.

El uso discrecional y adecuado de la información recogida y de su análisis, implica que la misma sólo será utilizada para los propósitos enunciados en el marco de este trabajo investigativo, que se evitará la alusión a nombres propios y se valorará con respeto y responsabilidad los aportes de cada uno de los participantes. Los análisis y resultados serán dados a conocer en primera instancia a los participantes, para su valoración.

Desde esta perspectiva, las personas que firman este documento autorizan al investigador para que las fuentes de información como escritos, entrevistas, foros de discusión, observaciones, etc.; se constituyan en bases de datos para dicha investigación. Al respecto, se solicita también a los firmantes de este documento anotar, algunas recomendaciones o sugerencias que consideren pertinentes en relación con la autorización que otorgan al investigador.

Maria Elena Angel S.
FIRMA ACUDIENTE

S. C. Angel.
FIRMA DEL ESTUDIANTE

Recomendaciones o Sugerencias:

[1] Esta es una adaptación de la tesis doctoral de la profesora Berta Lucila Henao Sierra (2010). Hacia la construcción de una ecología representacional: Aproximación al aprendizaje como argumentación, desde la perspectiva de Stephen Toulmin. Universidad de Burgos.

UNVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROTOCOLO DE COMPROMISO ÉTICO Y ACEPTACIÓN DE LOS Y LAS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN [1]

Nombre de la Investigación:

LA ENSEÑANZA DE π DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

Investigadoras:

Dianny Romaña Palacios, Gloria Giraldo Vásquez

Presentamos ante ustedes nuestro compromiso ético. Entendemos como imperativo y deber, hacer uso adecuado y discrecional de la información recolectada en el marco de este trabajo, con el único fin de lograr los objetivos del estudio en cuestión y en la perspectiva de contribuir con aportes para el mejoramiento de la educación en ciencias en los contextos de los casos elegidos para este estudio.

El uso discrecional y adecuado de la información recogida y de su análisis, implica que la misma sólo será utilizada para los propósitos enunciados en el marco de este trabajo investigativo, que se evitará la alusión a nombres propios y se valorará con respeto y responsabilidad los aportes de cada uno de los participantes. Los análisis y resultados serán dados a conocer en primera instancia a los participantes, para su valoración.

Desde esta perspectiva, las personas que firman este documento autorizan al investigador para que las fuentes de información como escritos, entrevistas, foros de discusión, observaciones, etc.; se constituyan en bases de datos para dicha investigación. Al respecto, se solicita también a los firmantes de este documento anotar, algunas recomendaciones o sugerencias que consideren pertinentes en relación con la autorización que otorgan al investigador.

Isabel Cristina T.
FIRMA ACUDIENTE

Daniel Brand Taborda
FIRMA DEL ESTUDIANTE

Recomendaciones o Sugerencias:

[1] Esta es una adaptación de la tesis doctoral de la profesora Berta Lucila Henao Sierra (2010). Hacia la construcción de una ecología representacional: Aproximación al aprendizaje como argumentación, desde la perspectiva de Stephen Toulmin. Universidad de Burgos.

UNVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROTOCOLO DE COMPROMISO ÉTICO Y ACEPTACIÓN DE LOS Y LAS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN [1]

Nombre de la Investigación:

LA ENSEÑANZA DE π DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

Investigadoras:

Dianny Romaña Palacios, Gloria Giraldo Vásquez

Presentamos ante ustedes nuestro compromiso ético. Entendemos como imperativo y deber, hacer uso adecuado y discrecional de la información recolectada en el marco de este trabajo, con el único fin de lograr los objetivos del estudio en cuestión y en la perspectiva de contribuir con aportes para el mejoramiento de la educación en ciencias en los contextos de los casos elegidos para este estudio.

El uso discrecional y adecuado de la información recogida y de su análisis, implica que la misma sólo será utilizada para los propósitos enunciados en el marco de este trabajo investigativo, que se evitará la alusión a nombres propios y se valorará con respeto y responsabilidad los aportes de cada uno de los participantes. Los análisis y resultados serán dados a conocer en primera instancia a los participantes, para su valoración.

Desde esta perspectiva, las personas que firman este documento autorizan al investigador para que las fuentes de información como escritos, entrevistas, foros de discusión, observaciones, etc.; se constituyan en bases de datos para dicha investigación. Al respecto, se solicita también a los firmantes de este documento anotar, algunas recomendaciones o sugerencias que consideren pertinentes en relación con la autorización que otorgan al investigador.

Isabel Cristina Morales
FIRMA ACUDIENTE

Emmanuel Morales S.
FIRMA DEL ESTUDIANTE

Recomendaciones o Sugerencias:

[1] Esta es una adaptación de la tesis doctoral de la profesora Berta Lucila Henao Sierra (2010). Hacia la construcción de una ecología representacional: Aproximación al aprendizaje como argumentación, desde la perspectiva de Stephen Toulmin. Universidad de Burgos.

UNVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROTOCOLO DE COMPROMISO ÉTICO Y ACEPTACIÓN DE LOS Y LAS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN [1]

Nombre de la Investigación:

LA ENSEÑANZA DE π DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

Investigadoras:

Dianny Romaña Palacios, Gloria Giraldo Vásquez

Presentamos ante ustedes nuestro compromiso ético. Entendemos como imperativo y deber, hacer uso adecuado y discrecional de la información recolectada en el marco de este trabajo, con el único fin de lograr los objetivos del estudio en cuestión y en la perspectiva de contribuir con aportes para el mejoramiento de la educación en ciencias en los contextos de los casos elegidos para este estudio.

El uso discrecional y adecuado de la información recogida y de su análisis, implica que la misma sólo será utilizada para los propósitos enunciados en el marco de este trabajo investigativo, que se evitará la alusión a nombres propios y se valorará con respeto y responsabilidad los aportes de cada uno de los participantes. Los análisis y resultados serán dados a conocer en primera instancia a los participantes, para su valoración.

Desde esta perspectiva, las personas que firman este documento autorizan al investigador para que las fuentes de información como escritos, entrevistas, foros de discusión, observaciones, etc.; se constituyan en bases de datos para dicha investigación. Al respecto, se solicita también a los firmantes de este documento anotar, algunas recomendaciones o sugerencias que consideren pertinentes en relación con la autorización que otorgan al investigador.

Naira Negrete C — **FIRMA ACUDIENTE**

Juana Isabel Pantoja — **FIRMA DEL ESTUDIANTE**

Recomendaciones o Sugerencias:

[1] Esta es una adaptación de la tesis doctoral de la profesora Berta Lucila Henao Sierra (2010). Hacia la construcción de una ecología representacional: Aproximación al aprendizaje como argumentación, desde la perspectiva de Stephen Toulmin. Universidad de Burgos.

7.7. Anexo 6: Algunas evidencias

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Nombre E4. Grado 10°

Instrucciones:
El siguiente taller consta de varias preguntas, las cuales deberás responder de acuerdo a tus conocimientos, este se realizará con fines investigativos, por ello, tu sinceridad en las respuestas es muy importante para nosotros.
Si no entiendes alguna pregunta o algún término te genera confusión, señalas con una línea en la parte inferior de la palabra.

Tu respuesta es muy importante para nosotros.

1. Con qué relacionas el siguiente símbolo (letras, números, fórmulas vistas en clase).

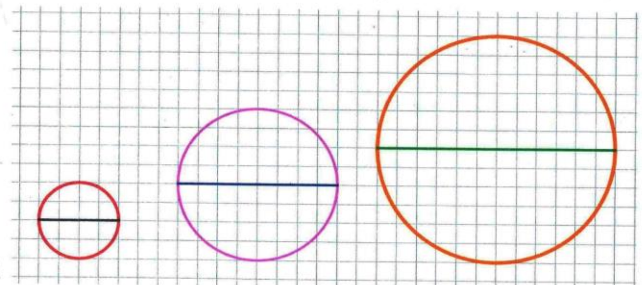
$$\pi$$

$\pi = 3,1416$

$\frac{4}{3}\pi \times r^3 \rightarrow$ Fórmula de volumen

lo relaciono con otro montón de Fórmulas que hay.
sale en la calculadora
Sirve para casi Todo.

2.a. ¿Qué relaciones encuentras entre las siguientes circunferencias?



Primero que todo. Todas son circulos, ademas tienen una raya que las traza por la mitada. Todas ocupan en la parte superior dos cuadrados antes de comenzar a bajar. Todas desde la pequeña hasta la grande ~~se~~ la raya que las divide van aumentando de dos en dos. (2, 4, 6)

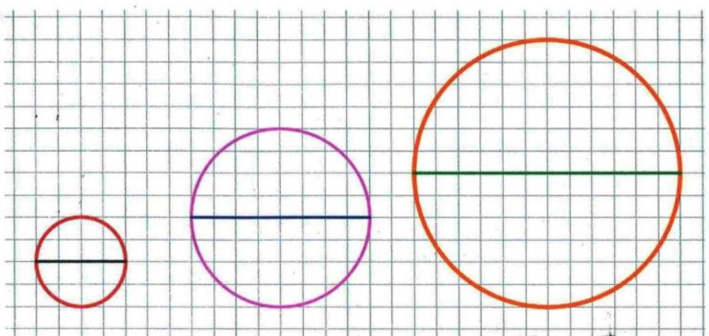
2.b. Mide la línea negra, azul y verde:

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Negra	2 cm
Azul	4 cm
Verde	6 cm

2.c Ahora, intenta medir las líneas roja, rosada y naranja. ¿Cómo lo vas a hacer?

Lo hice utilizando hilo y la formula $2\pi r$

2.a. ¿Qué relaciones encuentras entre las siguientes circunferencias?



Que tienen una linea trazada por la mitad y que todos los circulos tienen un radio igual a 1

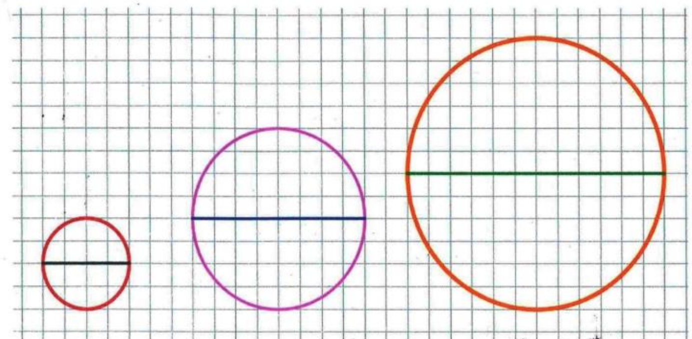
2.b. Mide la línea negra, azul y verde:

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Negra	1,8cm
Azul	3,8cm
Verde	5,8cm

2.c Ahora, intenta medir las líneas roja, rosada y naranja. ¿Cómo lo vas a hacer?

Pondre un hilo por cada linea de cada circulo y luego medire el hilo

2.a. ¿Qué relaciones encuentras entre las siguientes circunferencias?



Que tienen una linea trazada por la mitad y que todos los circulos tienen un radio igual a 1

2.b. Mide la línea negra, azul y verde:

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Negra	1,8cm
Azul	3,8cm
Verde	5,8cm

2.c Ahora, intenta medir las líneas roja, rosada y naranja. ¿Cómo lo vas a hacer?

Pondre un hilo por cada linea de cada circulo y luego medire el hilo

2.d. Escribe los valores obtenidos.

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Roja	6 CM
Rosada	13 CM
Naranja	18 CM

3. ¿Encuentras alguna relación entre los valores medidos en el punto 2.b y en el punto 2.d? Si encontraste una o más relaciones, menciónalas.

Realmente no encuentro una similitud, quiza que ambas tablas se llenan a partir del punto 2.a

4. Encuentras alguna relación entre la información del punto dos y π ? Si encontraste una o más relaciones, menciónalas.

que para hayar la longitud se necesita utilizar π

En los textos encontramos que:

> La **circunferencia** es una línea curva cerrada, formada por los puntos que están a igual distancia del centro de un círculo, su longitud está determinada por la ecuación:
>
> $$L=2\pi r$$

5. Señala con un ✔ las expresiones que puedan estar relacionadas con la información anterior.

- Cos π = -1 ____
- A= πr^2 ✔
- V=$\frac{4}{3}\pi r^3$ ✔
- π= 180° ____
- 360°= 2π rad ____

2.d. Escribe los valores obtenidos.

LÍNEA	VALOR MEDIDO (cm)
Roja	6.283
Rosada	12.566
Naranja	18.849

3. ¿Encuentras alguna relación entre los valores medidos en el punto 2.b y en el punto 2.d? Si encontraste una o más relaciones, menciónalas.

No encuentro ninguna relación. Pero los valores de 2.d es que a cada valor se le va sumando 6.283

4. Encuentras alguna relación entre la información del punto dos y π ? Si encontraste una o más relaciones, menciónalas.

Para hayar los valores de 2.d, la Fórmula $L=2\pi r$ Tiene un π

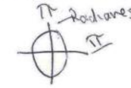
En los textos encontramos que:

> La **circunferencia** es una línea curva cerrada, formada por los puntos que están a igual distancia del centro de un círculo, su longitud está determinada por la ecuación:
>
> $$L=2\pi r$$

5. Señala con un ✔ las expresiones que puedan estar relacionadas con la información anterior.

- Cos π = -1 ____
- A= πr^2 ✓ → Área del circulo ② → Area.
- V=$\frac{4}{3}\pi r^3$ ____
- π= 180° ✓ → Parte de unidad de radianes
- 360°= 2π rad ✓ → ~~[illegible]~~ Más radianes

π Radianes (??)



Si señalaste una o más expresiones, menciona por qué las seleccionaste

porque tienen parecido con la formula

6. La expresión $\boxed{\pi \text{ Sen } \pi}$ muestra la multiplicación de dos términos

Señala el resultado de la operación que consideras es la correcta.

- 0__
- 0.172 X
- 25___

7¿Cómo podrías definir a π ?

Podría definirlo como un número para solucionar ecuaciones, que hace parte de una formula

Has terminado! Muchas gracias por tu participación!

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Nombre E1 Grado 10°

¿DE DÓNDE SURGE π?

1. a) Menciona varios objetos circulares
   - los balones
   - El reloj
   - Tapa de botellas

b) Escoge una de las figuras dadas, mide la longitud del diámetro, y la longitud de la circunferencia y ubica los valores en la tabla. Haz lo mismo con cuatro figuras más.

c) Completa la última columna de la tabla

Figuras seleccionadas	Diámetro (D)	Longitud (L)	$\frac{L}{D}$
Transportador	10,3 cm	33,3 cm	3.23 cm
Lata de Cerveza	6,9 cm	22,4 cm	3,24 cm
Vaso desechable	7,9 cm	25,9 cm	3.27 cm
Tapa de olla	22,1 cm	69,3 cm	3.13 cm
Arepa	15,5 cm	49,3 cm	3,18 cm

TABLA N°1: Datos obtenidos de la medición de objetos circulares

Según la información obtenida en la tabla anterior responde las siguientes preguntas:

a) ¿Existe algún caso en el que la longitud de la circunferencia medida fue menor que el diámetro de ella?

R/. No

b) ¿Existe algún caso en el que la longitud de la circunferencia medida fue igual que la medida de su diámetro?

R/ No

c) ¿Qué relación hay entre la longitud de las circunferencias medidas y sus diámetros?

R/. La longitud es más o menos 3 veces mayor al diámetro

d) Teniendo en cuenta los datos de la última columna de la tabla N°1 ¿Qué puedes concluir?

R/. La división de los valores (L/D) dá siempre algo aproximado a 3.

Con base en las actividades y la lectura propuesta " Un pedazo de π" ¿conociste algo nuevo? ¿qué puedes decir de Pi?

Sí, normalmente sólo usamos este símbolo pero no sabemos que significa, personalmente considero muy importante conocer la historia de las cosas.

Según la información obtenida en la tabla anterior responde las siguientes preguntas:

a) ¿Existe algún caso en el que la longitud de la circunferencia medida fue menor que el diámetro de ella?

NO

b) ¿Existe algún caso en el que la longitud de la circunferencia medida fue igual que la medida de su diámetro?

NO

c) ¿Qué relación hay entre la longitud de las circunferencias medidas y sus diámetros?

Cada vez que se divide $\frac{L}{D} \simeq 3.$ Algo

La $L > D$

d) Teniendo en cuenta los datos de la última columna de la tabla N°1 ¿Qué puedes concluir?

$\frac{L}{D} \simeq 3.$ Algo $\quad L > D$

Con base en las actividades y la lectura propuesta " Un pedazo de π" ¿conociste algo nuevo? ¿qué puedes decir de Pi?

$\pi = \frac{L}{D}$

π = letra griega

π = NO Tiene valor exacto.

Pero busca un cociente universal

b) cuanto mide la altura del paralelogramo?

11,2 cm

c) Cuanto mide la base del paralelogramo?

37 cm

d) Calcula el área del paralelogramo

414.4 cm

e) ¿Es esta área es igual a la de la circunferencia?

Talvez no sea igual pero si se aproxima mucho ya que el area de la circunferencia no ha cambiado, solo cambio la forma

f) ¿Teniendo en cuenta la longitud de la circunferencia y su radio, cómo se relaciona con la fórmula del paralelogramo?

la base del paralelogramo corresponde a la mitad de la circunferencia por ende elevar la base al cuadrado seria todo el area de la circunferencia

2. Realiza una discusión con tus compañeros y profesor acerca de lo trabajado
¿Qué concluyes de la actividad realizada?

Mi conclusion es que π es mas que 3.14 es mas de lo que creemos y es muy interesante todo este origen.

b) Entre estudiantes y profesor intentar cuadrar un rectángulo utilizando sólo la regla y el compás.

CUADRATURA DEL CÍRCULO

3. Realizar en parejas

a) Se tiene un terreno circular cuyo diámetro es igual a 4 unidades, si se desea construir un terreno cuadrado cuya área sea igual a la del círculo dado, cuánto debe medir cada lado?

b) Intenta construir un cuadrado y un círculo que tengan la misma área, utilizando regla y compás. Comparte con tus compañeros tu propuesta de solución.

a) $A_O = \pi \cdot r^2$ $\quad A_\square = x^2$

$= \pi \cdot (2)^2 = x^2$

$= \pi 4 = x^2 \longrightarrow$ igualamos las areas para encontrar el valor del cuadrado.

$= \sqrt{4\pi} = x$

b) Igualamos las formulas del area del circulo y cuadrado

$A_O = \pi \cdot r^2 \quad A_\square = l^2 \quad r = 1$

$l^2 = \pi \cdot r^2 \longrightarrow l^2 = \pi \cdot 1$

$L = \sqrt{\pi \cdot r}$

El problema es saber que valor es π.

No se puede Cuadrar el circulo ya que π no tiene valor exacto

b) Entre estudiantes y profesor intentar cuadrar un rectángulo utilizando sólo la regla y el compás.

CUADRATURA DEL CÍRCULO

3. Realizar en parejas

a) Se tiene un terreno circular cuyo diámetro es igual a 4 unidades, si se desea construir un terreno cuadrado cuya área sea igual a la del círculo dado, cuánto debe medir cada lado?

b) Intenta construir un cuadrado y un círculo que tengan la misma área, utilizando regla y compás. Comparte con tus compañeros tu propuesta de solución.

a) $A_\circ = \pi r^2$ $\qquad A_\square = x^2$

Igualar áreas para conocer el lado necesario para construir el cuadrado

$\pi (2)^2 = x^2$

$\pi 4 = x^2$

$\sqrt{4\pi} = x$

A
π No es Construible, por lo Tanto el círculo no se puede cuadrar.

b) $Área^\circ = \pi \cdot r^2$ $\qquad Área^\square = L^2$

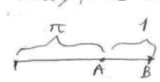
Para la construcción.

$L^2 = \pi \times r^2$ Igualar áreas

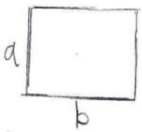
Radio=1 $\quad L = \sqrt{\pi} \times r$ Para aplicar la fórmula necesitamos π

$L^2 = \pi r^2$

segmento $L^2 = (\pi)(1)$ → Pero π necesita tener una longitud

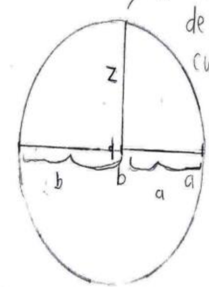


1. Teniendo un rectángulo ab



2. Trazamos un segmento que mida a+b según el rectángulo
3. Sacamos la mitad de ese segmento (Punto medio) con el compás.
4. Este punto será el centro de la circunferencia que trazaremos.
5. Trazamos una línea perpendicular al punto de separación de a y b
6. E

Ésta es la medida de la longitud de un lado necesario para crear el cuadrado con la misma área que el rectángulo ab



$z^2 = ab$

4. Ate
a)
círculo

4. Atendiendo a lo explicado por el docente, y todo lo trabajado en clase responde:

a) ¿Cómo se relaciona el *número π* con el problema de la cuadratura del círculo?

~~Como π es desconocido~~ El círculo es imposible de cuadrar porque π no es un # construible y siempre va a estar presente.

b) ¿Qué conocimientos nuevos en relación con *número π* te brindó la actividad?

π es muy extraño y aparece en ~~muchos~~ problemas, relacionados Todos los con los circulos

4. Atendiendo a lo explicado por el docente, y todo lo trabajado en clase responde:

a) ¿Cómo se relaciona el *número π* con el problema de la cuadratura del círculo?

R/. Es un obstáculo, pues por su condición de número irracional y no construible no permite desarrollar el problema y llegar a una solución. (No es posible con

b) ¿Qué conocimientos nuevos en relación con *número π* te brindó la actividad?

R/. Aprendí que todas las cuestiones relacionadas con el círculo se cruzan con el número pi, que es muy especial (por ser irracional e inconstruible).

Utiliza otra cuerda para determinar el pedazo de circunferencia que resta, esta cuerda será utilizada para determinar qué fracción del diámetro representa este pedazo de circunferencia que sobra. Para ello encuentra sobre la línea que representa el diámetro de la circunferencia las veces que la cuerda cabe en esta distancia.

2. ¿Cómo es esta distancia en relación con el diámetro?

la cuerda que corresponde a la distancia de la circunferencia cabe 13 veces, es decir $\frac{1}{13}$

3. Discute con los compañeros y profesor sobre los resultados obtenidos

y responde:

4. ¿Qué valor aproximado se encontró sobre π?

$L = 3$ diámetros

$\frac{1}{13}$ $L = 3 + 0.076923\ldots$

$L = 3.07$

$L = 2\pi r$

$3.07 = D = 2\pi r$

$3.07 = \cancel{D} = \pi \cancel{D}$

$\boxed{3.07 = \pi}$

R// se encontro un valor de 3.07 del π

5. ¿Continuando con este método, será posible llegar a un valor exacto π?

El metodo es impresisu por eso el valor sera inexacto debido a que los humanos tenemos muchos errores en las medidas.

6. ¿Qué nuevas enseñanzas te dejó esta actividad en relación con π ?

fue muy chevere calcular un valor para π aunque estuvo un poco alejado del valor que conocemos pero se puede ver que tiene muchas cifras. Talvez con otro metodo se calcularía mejor

7. Teniendo en cuenta las actividades anteriores ¿Cómo podrías definir a π?

π es un numero interesante, que se refiere a una relación entre la circunferencia y su diametro, tiene infinitas cifras, tampoco se puede construir y parece en muchas formulas.