

# **Teoría de la Perspectiva Lineal Cónica**

DARLY OSPINA MORALES

Trabajo de grado para optar al título de:

**Matemático**

Director: CRISTIAN FELIPE GALLEGO OLAYA

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Instituto de Matemáticas

–Medellín–

2021



# Resumen

Desde el trabajo de Filippo Brunelleschi en 1434 se han escrito innumerables tratados de perspectiva lineal bajo un mismo principio geométrico de intersección, el cual estuvo enfocado a encontrar técnicas, dadas las necesidades de los artistas y arquitectos del renacimiento. La pregunta natural era ¿Cómo representar el mundo tridimensional en un lienzo bidimensional? Esto originó la perspectiva lineal cónica, uno de los primeros pintores en comprender esto fue Piero della Francesca quien además era matemático, este describe métodos geométricos de perspectiva, los cuales fueron estudiados y profundizados por otros para comprender mejor el concepto desde un punto de vista matemático.

Este trabajo consiste en la escritura de una teoría Matemática de la perspectiva lineal cónica presentada en un lenguaje moderno, en el cual se extienden algunos resultados conocidos, y otros se generalizan.

En primer lugar, se estudia la perspectiva lineal cónica de puntos, rectas y curvas en el espacio tridimensional, también se analiza la convergencia de rectas paralelas en puntos de fuga; en segundo lugar, se describe la representación de puntos en algunas secciones y se extiende el concepto de perspectiva lineal cónica al conjunto  $\mathbb{R}^n$ ; por último, se desarrolla un software, el cual es el resultado del marco teórico expuesto en este trabajo, este nos permite hacer cálculos sobre perspectiva, representaciones de puntos en diferentes secciones y en dimensiones superiores.



# Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Cristian Felipe Gallego Olaya del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia por sus asesorías académicas, también mi gratitud a Elda M. Úsuga Carvajal quien constantemente motivó la escritura respecto a mi interés sobre la perspectiva lineal cónica.



# Contenido

<b>Resumen</b> . . . . .	v
<b>Agradecimientos</b> . . . . .	vii
<b>Introducción</b> . . . . .	xi
<b>1 Conceptos y terminología de la perspectiva clásica</b> . . . . .	13
1.1 La visión . . . . .	13
1.2 Introducción a la perspectiva . . . . .	15
1.3 Métodos clásicos en la perspectiva . . . . .	17
1.3.1 Método de Alberti . . . . .	18
1.3.2 Método de Piero della Francesca . . . . .	19
1.3.3 Método de los “tiers points” . . . . .	21
1.3.4 Método del “Jesuita” . . . . .	22
<b>2 Perspectiva en sección plana</b> . . . . .	25
2.1 Dominio perspectivo . . . . .	25
2.2 Anamorfismos . . . . .	29
2.2.1 Análisis de los Anamorfismos . . . . .	35
2.3 Rectas paralelas . . . . .	38
2.3.1 Puntos de fuga . . . . .	43
<b>3 Perspectiva de curvas y superficies</b> . . . . .	51
3.1 Imágenes de curvas . . . . .	51
3.1.1 Elipses y circunferencias en perspectiva . . . . .	61
3.2 Imágenes de superficies . . . . .	66
3.2.1 Imágenes de funciones . . . . .	68
3.2.2 Perspectiva de la esfera . . . . .	69
<b>4 Perspectiva en otras secciones</b> . . . . .	71
4.1 Secciones rectas . . . . .	71
4.1.1 Dominio perspectivo en secciones rectas . . . . .	71
4.1.2 Anamorfismos en secciones rectas . . . . .	75
4.1.3 Sección cilíndrica . . . . .	78
4.1.4 Sección parabólica . . . . .	80
4.2 Sección en planta . . . . .	81

4.3 Sección esférica . . . . .	85
<b>5 Perspectiva <math>n</math>-dimensional . . . . .</b>	<b>89</b>
5.1 Dominio perspectivo $n$ -dimensional . . . . .	89
5.2 Anamorfismo $n$ -dimensional . . . . .	92
5.3 Rectas paralelas en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	96
<b>6 Linperscal . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>Índice . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>Autores . . . . .</b>	<b>113</b>

# Introducción

La perspectiva fue estudiada desde la antigüedad sin mayor aporte, a finales de la edad media y principios del renacimiento reaparece el concepto de perspectiva con grandes aportes a partir de la necesidad de los pintores de obtener una mayor sensación espacial y de realidad en sus obras. El descubrimiento de las leyes que rigen la perspectiva se le atribuye al arquitecto italiano Filippo Brunelleschi que se basó en experimentos y observaciones. Décadas más tarde el matemático Piero della Francesca escribe un tratado de la perspectiva basado en un lenguaje matemático, estos métodos planteados por Piero fueron utilizados por la gran mayoría de los pintores renacentistas en sus obras. En el siglo XVII el matemático francés Girard Desargues expone una nueva interpretación a la perspectiva, concibiendo esta como una geometría (la geometría proyectiva). Posteriormente la perspectiva reaparece en los trabajos del matemático inglés Brook Taylor mucho más formal y de manera deductiva, años más tarde Joshua Kirby escribe y mejora el tratado escrito por Taylor. Ya en el siglo XIX la perspectiva abre paso a la geometría descriptiva con Monge, para en año 1859 el matemático alemán Otto Wilhelm Fiedler definió rigurosamente en su tesis doctoral el sistema de proyección central, fijando los fundamentos matemáticos de la perspectiva cónica tal como se conoce en la actualidad.

Hoy en día, la perspectiva lineal cónica (o simplemente **perspectiva**) es un sistema de alineación espacial que crea una ilusión óptica de profundidad en una superficie, replicando la imagen que percibe un observador en determinado punto del espacio tridimensional.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el fenómeno de la perspectiva lineal cónica mediante matemáticas modernas enfocado a conceptos como: la representación de puntos, líneas y curvas en general, además, convergencias en puntos de fuga de rectas arbitrarias, analizando la perspectiva en secciones no planas y caracterizar la teoría en espacios  $n$ -dimensionales con  $n \geq 3$ .

La motivación personal de realizar este trabajo radica en el gusto por el dibujo y la pintura, y el conocer más a fondo la perspectiva desde un punto de vista matemático.

Este texto puede ser de gran utilidad para matemáticos, ingenieros, arquitectos, artistas y toda persona que desee explorar y aprender de perspectiva lineal cónica desde un punto de vista matemático.

El orden de presentación de los temas de este trabajo está orientado, primero a obtener una mejor comprensión de la perspectiva, segundo a partir de conceptos fundamentales y básicos exponer una teoría matemática de esta y por último desarrollar una herramienta computacional que verifique los resultados del marco teórico.

En el capítulo 1, se inicia con una breve descripción del fenómeno físico de la visión, esto con el fin de presentar y desarrollar los conceptos y terminología básica de la perspectiva; todo esto acompañado de notas históricas de sus descubrimientos y métodos.

En el capítulo 2, iniciamos con las definiciones de dominio perspectivo y anamorfismo para construir la teoría matemática en la búsqueda de la representación de puntos y rectas en una sección plana, luego se analiza desde el anamorfismo la situación de convergencia de rectas paralelas en puntos de fuga.

En el capítulo 3, continuamos con la sección plana, pero en este caso se tratarán las representaciones de curvas en el espacio, entre las cuales se analiza la perspectiva de la circunferencia. Posteriormente se analiza la representación de superficies.

En el capítulo 4, se estudia la perspectiva para otro tipo de secciones distintas al plano que es ortogonal al eje de visión, esto nos permite determinar un anamorfismo que encuentre representaciones de puntos en secciones más complejas, tales como secciones cilíndricas y semiesféricas.

En el capítulo 5, se analiza la perspectiva en el espacio  $n$ -dimensional donde tanto el observador como el objeto a representar pertenecen al este espacio y la representación del objeto está en un hiperplano. En este espacio también se presenta la convergencia de rectas paralelas en puntos de fuga.

En el capítulo 6, se muestra el software **Linperscal**, el cual es el resultado del marco teórico expuesto en este trabajo. **Linperscal** es un software que nos permite hacer cálculos sobre perspectiva, representaciones de puntos en diferentes secciones y en múltiples dimensiones.

Los requisitos para una buena lectura del texto son: Cálculo, Geometría Analítica y Vectorial, y conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

# Capítulo 1

## Conceptos y terminología de la perspectiva clásica

La palabra *perspectiva* proviene del latín, *perspicere* (para ver a través de), y lo usaremos en el mismo contexto de las artes gráficas para designar una representación o imagen que represente un objeto en un lienzo o papel del pintor. El concepto de perspectiva abarca una gran gama de métodos y técnicas que permiten su propósito, en este texto solo trataremos una sola rama de la perspectiva, que es la perspectiva lineal cónica. Este tipo de perspectiva está basada en la forma más natural y fiel a la realidad que el humano puede representar por puntos y líneas que forman los contornos de los objetos de un espacio real.

La perspectiva lineal la identificamos como un sistema matemático de representación, en el cual las imágenes se modifican o cambian de tamaño en función de la distancia y lugar espacial que ocupen, esto genera una imagen anamorfa, que se interpreta como su representación en un lienzo para determinado observador que percibe unos efectos ilusorios y visuales que originan a un espacio tridimensional imaginario en el papel del pintor. (Ver [4],[7]).

Antes de iniciar con el estudio de la perspectiva, será necesario un comentario breve respecto al concepto de visión para establecer algunas terminologías, y posteriormente ver algunos hechos y procedimientos básicos de la perspectiva.

### 1.1 La visión

La visión es la capacidad de interpretar un entorno generado por rayos de luz mediante un sistema óptico, que en el caso del humano, al igual que muchos animales, es el órgano receptor llamado ojo. El ojo humano es una estructura compleja que recepta las impresiones luminosas como los rayos de luz, estos ingresan en el ojo hasta llegar a la retina, donde se producen señales eléctricas que el cerebro interpreta como imágenes.

El campo de visión del ojo humano es una porción espacial de la realidad que el ojo percibe mirando sin necesidad de efectuar algún movimiento. La amplitud de este campo puede abarcar aproximadamente 180 grados, pero

esto depende de algunas variables como: resolución, nitidez, contraste, color, luminosidad, entre otras, y todo esto puede variar de una persona a otra, ya sea por motivos biológicos o de iluminación y escena; sin embargo, se pueden tener unos valores promedio que permiten cuantificar estos campos de visión. Para lo que nos compete en este texto, podemos considerar un campo de visión de aproximadamente 60 grados que nos permite tener una zona focal, reconociendo símbolos y realizando discriminación de colores. Así, descartamos el campo de visión periférico que está más allá del valor de 60 grados.

La siguiente definición y el comentario inmediato se encuentran en [1, pag. 179].

**Definición 1.1.** *Un **Objeto** es un **objeto óptico**<sup>1.1</sup> el cual es el lugar de intersección de los rayos de luz que llegan al sistema, siendo estos rayos de luz reflejados y/o refractados por el objeto.*

La luz es una onda electromagnética que puede ser percibida por el ojo humano, esta hace parte de una franja del espectro electromagnético, cuando se menciona la *luz visible* hace referencia a la zona del espectro visible. El fenómeno físico de la luz puede ser descrito por medio de su dualidad onda-partícula, pero cuando la longitud de onda de la luz es mucho menor que los objetos del medio en el que interactúa se puede desprestigiar el carácter ondulatorio de la luz y simplemente considerar la luz como una recta o rayo que se propaga en un medio homogéneo, esta manera de interpretar la luz se le conoce como óptica geométrica, por lo cual no consideraremos los conceptos campo eléctrico y magnético, frecuencia, fase, amplitud, etc.

Conceptos como rayo y observador serán frecuentes durante todo el texto, los definimos de forma que se puedan estudiar y escribir en términos matemáticos para comprender la teoría de la perspectiva.

**Definición 1.2.** *Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos diferentes del espacio tridimensional, decimos que un **rayo** es una recta en el espacio tridimensional que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ , este se denotará por  $pR_Q$ .*

Una vez establecida la definición de rayo en la perspectiva lineal, vamos a definir el concepto de observador, el cual, por ahora se identifica como una persona que observa el cuadro, sin embargo, este posee una visión binocular donde la distancia de un ojo a otro le permite tener una mejor apreciación de la profundidad. En este texto, consideraremos al observador con una visión ocular, ya que la distancia entre sus ojos es relativamente pequeña con respecto a los objetos de estudio en perspectiva, por lo cual exponemos una definición de observador que se usará durante todo el texto.

---

1.1. Se debe diferenciar el objeto óptico del objeto físico (o cuerpo) que es un conglomerado de partículas en un espacio físico que es tratado como si fuera un único cuerpo, el cual puede coincidir en ocasiones con el objeto óptico.

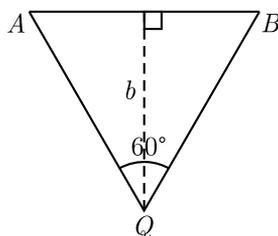


Figura 1.1.

**Definición 1.3.** Un *observador* es un punto en el espacio tridimensional al cual convergen rayos desde otros puntos. Se denotará como  $Q$ .

Nos referiremos a un *observador natural* como aquel que limita su campo visual a un ángulo de 60 grados, y dado que solo nos interesa la interacción entre este y el lienzo, la distancia del observador natural a este dependerá de su ancho o altura. Lo ideal es que el lienzo esté inmerso en el campo visual. Para determinar esta distancia se considera el segmento  $AB$  como el lado más largo del lienzo y  $Q$  un observador (fig 1.1), de tal forma que las líneas imaginarias  $QA$  y  $QB$  de igual longitud determinan el límite del campo visual de 60 grados. Para calcular la distancia de  $Q$  a  $AB$ , se considera el triángulo isósceles de vértices  $A, B$  y  $Q$  en el cual se traza la bisectriz en  $Q$  que a su vez es la mediatriz, así se forman dos triángulos rectángulos. Si  $b$  es la distancia del observador a  $AB$  entonces

$$\frac{AB/2}{b} = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

luego

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} AB.$$

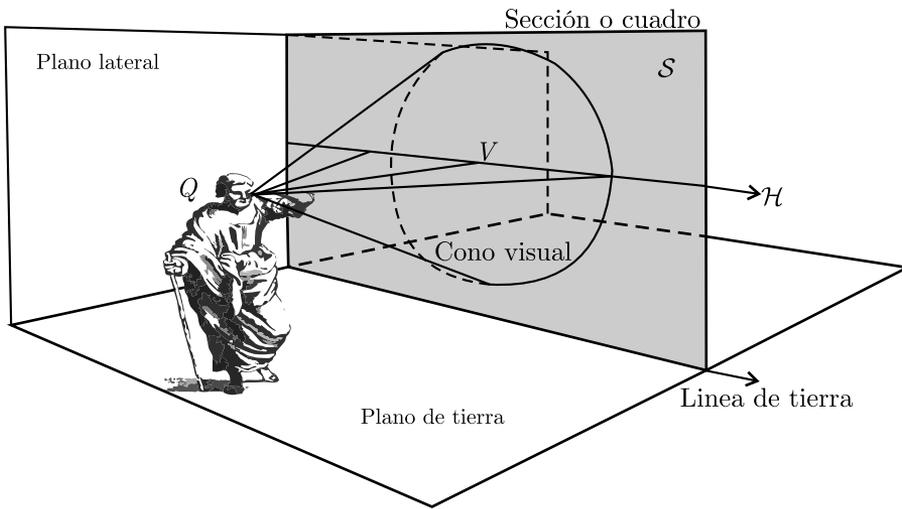
De esta forma se garantiza que un observador natural ubicado a una distancia  $b$  del cuadro pueda percibirlo de la mejor manera.

En el estudio de la perspectiva no es necesario limitar el campo de visión, por lo cual cuando se hable de observador este no tiene un límite en su campo de visión. Para determinados ejemplos en el que se hable del observador natural se debe considerar su distancia al lienzo en términos de su lado más grande<sup>1,2</sup>.

## 1.2 Introducción a la perspectiva

La perspectiva es un método para registrar determinados rayos de luz, convergentes a un observador, en un lienzo o papel del pintor, esta configuración

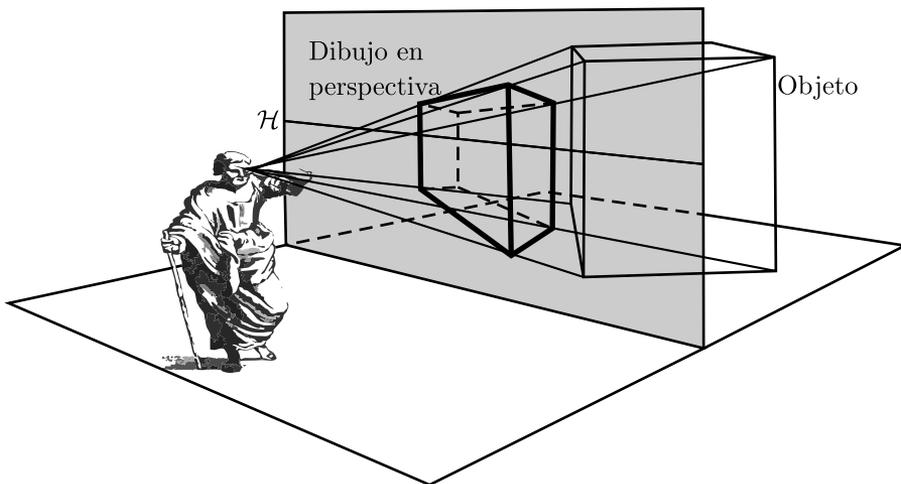
1.2. El lienzo será considerado rectangular.



**Figura 1.2.** Elementos que se utilizan en la perspectiva: Observador, sección, cono visual, línea de tierra, línea de horizonte, eje de visión, plano lateral y plano de tierra.

de puntos que son intersecciones, permite una representación de una imagen correspondiente a un objeto.

Lo primero es identificar un observador que denotaremos por  $Q$ , el cual estará observando un objeto espacial a través de un plano, ya sea un lienzo o papel del pintor donde se asume alguna distancia de este al plano  $S$  (fig 1.2 y fig 1.3) y por supuesto al objeto. Lo segundo será identificar una línea



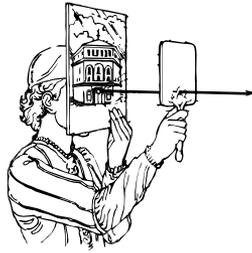
**Figura 1.3.** Dibujo en perspectiva generado por la intersección de rayos provenientes del objeto hacia el observador.

de horizonte en el lienzo que se encuentra a la misma altura del observador, la cual se denotará por la letra  $\mathcal{H}$ , esta línea particiona el plano  $\mathcal{S}$  en dos zonas: una superior que dá la ilusión de cielo, y una inferior que dá la ilusión de suelo, de esta manera se construye un espacio perspectivo en el plano  $\mathcal{S}$ . Desde  $Q$  se traza una recta ortogonal al plano  $\mathcal{S}$ . Esta recta se llama eje focal o eje visual, el cual interseca la línea de horizonte en un punto  $V$ , el cual es el centro de un círculo, que es la base del cono visual; este cono tiene como vértice el observador y contiene todos los rayos de luz que puede percibir el observador. El plano en el cual está parado el observador y que es ortogonal a  $\mathcal{S}$ , es llamado plano de planta (o tierra), la intersección de estos dos planos es una recta, llamada línea de tierra. Cualquier plano perpendicular al plano de planta y a  $\mathcal{S}$  es llamado plano lateral. Estos planos son usados para métodos constructivos de perspectiva.

Además de los planos de planta, lateral y línea de tierra, existe un concepto de mucha relevancia en el estudio de la perspectiva: punto de fuga. Un punto de fuga es un punto en el plano  $\mathcal{S}$  al cual convergen dos o más líneas generando un efecto visual que permite percibir una mayor sensación de tridimensionalidad; estos puntos representan una distancia infinita, y una de las características principales de la perspectiva cónica: es la convergencia de rectas paralelas en el  $\mathcal{S}$ , y de esta manera forzar al observador a la creación de profundidad en el espacio perspectivo. Un ejemplo de estos puntos, es el punto  $V$  al cual convergen las semirrectas que representan gráficamente las rectas ortogonales a  $\mathcal{S}$ . Otros dos puntos de fuga de gran importancia son los puntos de convergencia de rectas que son paralelas al plano de planta y forman un ángulo de  $45^\circ$  con  $\mathcal{S}$ , estos puntos al igual que  $V$  están ubicados en la línea de horizonte y equidistantes de  $V$  a una distancia igual a la distancia del observador y  $\mathcal{S}$ , estos puntos serán importantes para la construcción de métodos perspectivos.

## 1.3 Métodos clásicos en la perspectiva

A finales de la edad media e inicios del renacimiento, reaparece en las artes el espíritu griego de un tratamiento geométrico en las obras, esta vez renaciendo en los pintores, quienes tenían una necesidad de técnicas y reglas convencionales para representar configuraciones espaciales de líneas y puntos en un plano, basándose en la observación de la naturaleza como punto de partida. Uno de sus principales exponentes fue Filippo Brunelleschi, arquitecto y escultor italiano que tenía un profundo conocimiento matemático. Entre los años 1416 y 1420 retoma el concepto de cono visual de Euclides (concepto que se basaría en la intersección de un plano con un cono visual imaginario) y realiza unos estudios con instrumentos ópticos los cuales permiten el descubrimiento de los principios básicos de la perspectiva cónica.



**Figura 1.4.** Experimento de Brunelleschi.

Brunelleschi es considerado el inventor de la perspectiva cónica, él dio a conocer su técnica por medio de un celebre experimento. Según [4, p21] “hizo un pequeño agujero en la tabla en un punto equivalente a aquel en que su línea de visión había tomado con el Baptisterio a lo largo de un eje perpendicular. Ahora era preciso que el espectador mirara a través de este agujero, desde detrás de la tabla, hacia un espejo colocado de tal forma que reflejara la superficie pintada (fig 1.4). Forzando al espectador a ver el Baptisterio pintado desde una posición que correspondía grosso modo a la del artista al ver el edificio real”. Al parecer descubre la perspectiva por observación experimental, cuyo punto de partida fueron objetos reales y no como consecuencia de una teoría en la cual se deduce algún método.

Otro exponente fue Masaccio, quien presenta en su obra *Trinidad* en 1426, una perspectiva muy coherente regida bajo un sistema perspectivo con un claro punto de convergencia. Quizás influenciado por Brunelleschi implementa un método perspectivo de un único punto, sin embargo, no se conoce un registro de cómo lo logró.

Una parte principal del problema de la perspectiva estaba resuelto hasta el momento (el dar la sensación de profundidad), sin embargo, se estaba lejos de una consolidación, y el siguiente paso consistía en resolver el problema de la velocidad. Leon Battista Alberti trabajó sobre esta tema, además fue un hombre de letras que escribe un corto tratado *Sobre la Pintura* en 1435, exponiendo, de manera sistemática, definiciones básicas de elementos geométricos; algo nuevo para los pintores, ya que abordaba temas que no eran de importancia para estos. En el tratado consideró métodos adecuados para cuantificar la distancia en la pintura y al parecer muchos de sus trabajos son basados en los realizados por Euclides y Brunelleschi.

### 1.3.1 Método de Alberti

El Método de Alberti está basado en la construcción de un embaldosado que se usa como medición de la profundidad de objetos a representar. Este método no genera una representación exacta del punto a representar (salvo algunos puntos que conforman el embaldosado).

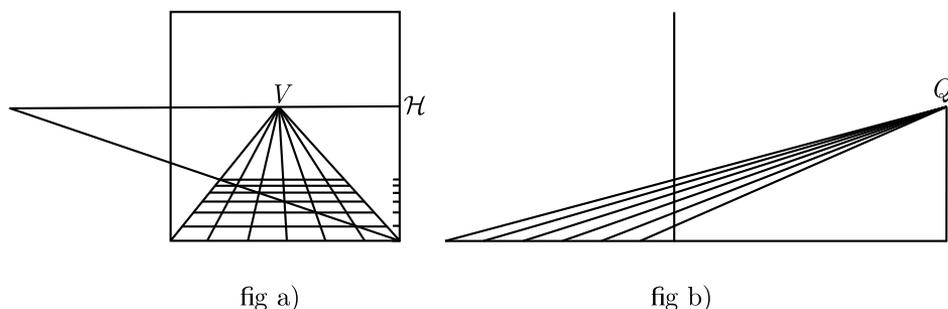


Figura 1.5. Método de Alberti.

Alberti considera la altura del observador como la base en la construcción de la perspectiva –de pensamiento pitagórico– esta no es necesaria para describir su método, sin embargo, lo exponemos en este texto por tener un gran valor histórico en ser de los primeros métodos sistemáticos en buscar la representación en perspectiva de un objeto<sup>1,3</sup>:

1. Se divide la línea de tierra formando un sistema métrico de unidad real. (fig 1.5a)
2. La altura del observador determina la línea de horizonte  $\mathcal{H}$ .
3. En la mitad de esta línea se ubica el punto  $V$ , en la cual convergen las ortogonales que partieron desde las unidades de la escala métrica en la línea de tierra.
4. En el plano lateral se trazan las líneas desde las unidades de la escala métrica real en profundidad hasta el observador  $Q$  (fig 1.5b), cortando el plano del cuadro en determinados puntos, estos se marcan al lado del cuadro.
5. Por estos puntos se trazan paralelas a la línea de tierra, formándose un embaldosado que servirá como referente de medida en profundidad para la determinación de espacios<sup>1,4</sup>.

El uso correcto de la perspectiva resultó más difícil de lo que se esperaba, Piero fue el primero en comprender bien la perspectiva desde lo arístico y matemático.

### 1.3.2 Método de Piero della Francesca

Piero della Francesca fue un pintor y matemático italiano, maestro de la perspectiva y geometría Euclidiana. En la década de 1470 escribe un libro titulado *Sobre Perspectiva*, formalizando la perspectiva a un lenguaje mate-

1.3. Alberti se destaca por ser el primer teórico artístico del renacimiento.

1.4. Alberti recomienda la comprobación del embaldosado con traza de una diagonal a través de los cuadrados en escorzo generados por el embaldosado.



### Segunda Parte.

1. Sean  $ABCD$  un cuadrado con  $AB$  línea de tierra y  $P$  un punto cualquiera en  $ABCD$ .
2. Se escorza  $ABCD$  como  $ABC'D'$  mediante la primera parte (fig 1.6b).
3. Se trazan  $AC$  y  $AC'$ .
4. Se traza una horizontal desde  $P$  para intersecar  $AC$  en  $E$ .
5. Se trazan las verticales  $PF$  y  $EG$ .
6. Se unen  $F$  y  $G$  a  $V$ .
7.  $AC'$  y  $GV$  se intersecan en  $E'$ .
8. La horizontal que pasa por  $E'$  interseca a  $FV$ , donde la intersección da la representación en perspectiva del punto  $P$  en  $P'$ .

### 1.3.3 Método de los “tiers points”

El método de los tres puntos es usado desde Durero (aunque con leves modificaciones) hasta nuestros tiempos, este método se popularizó en Francia en el siglo XVI. El método consiste en un sistema de tres puntos, el punto de fuga de las ortogonales al lienzo  $V$  y dos puntos de fuga  $V_{-1}$  y  $V_1$  a la izquierda y derecha y equidistantes de  $V$  respectivamente, cuya distancia a  $V$  es la del observador al lienzo, estos tres puntos están sobre la línea del horizonte.

En [7] se muestra que los puntos de fuga de las rectas de 45 grados con respecto a la sección y paralelas al plano de planta son equidistantes a  $V$  y su distancia es la del observador a la sección.

Sean  $Q$  un observador y  $\mathcal{S}$  la sección, consideramos todas las rectas paralelas al plano de planta y que forman un ángulo de 45 grados con  $\mathcal{S}$ , de este conjunto de rectas debe existir una recta  $\mathcal{L}$  que pasa por  $Q$  (fig 1.7), la intersección de esta recta con  $\mathcal{S}$  se denota por  $V_1$  siendo la fuga de estas rectas, luego necesariamente la distancia  $QV$  es igual a la distancia  $VV_1$  (de manera análoga se obtiene que la distancia  $QV$  es igual a la distancia  $VV_{-1}$ ).

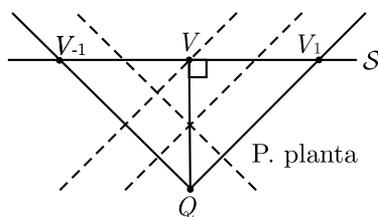


Figura 1.7.

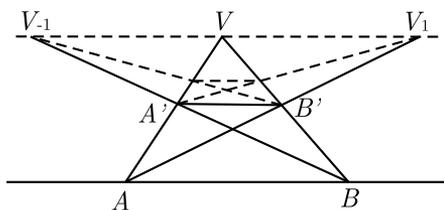


Figura 1.8. Método de los "tiers points".

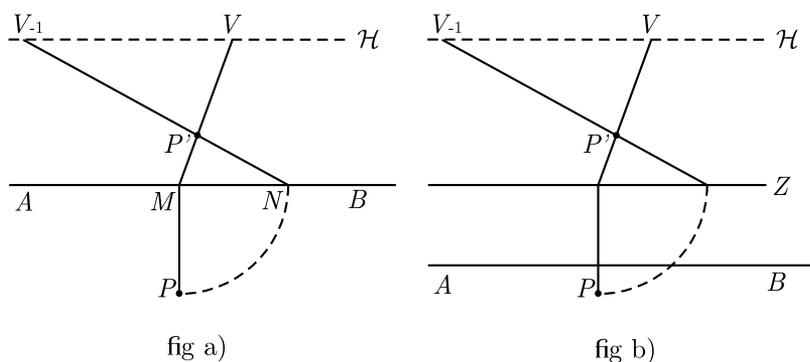
A continuación, enunciaremos el método de los tres puntos:

1. Sean  $\mathcal{H}$  la línea de horizonte,  $V$  la fuga de ortogonales del plano  $\mathcal{S}$ ,  $V_{-1}$  y  $V_1$  puntos de fuga de rectas paralelas al plano de planta y de 45 grados con respecto al plano.(fig 1.8)
2. Se trazan las rectas  $AV$ ,  $BV$ ,  $AV_1$  y  $BV_1$ , donde  $AB$  es la línea de tierra.
3. Las intersecciones  $A'$  y  $B'$  se unen por una recta.
4. La figura  $A, B, A', B'$  determina la representación en perspectiva de un cuadrado de lado  $AB$ .

Sobre el cuadrado en perspectiva  $A, B, A', B'$  puede seguir proyectando más cuadrados al utilizar el método de nuevo pero iniciando con los puntos  $A'$  y  $B'$  y de esta manera determinar un embañosado.

### 1.3.4 Método del "Jesuita"

En 1642 hubo un debate por la publicación del libro *Perspective Practique* del padre Jesuita Jean Debreuil de París, debido a que este contenía imprudentemente fragmentos de la *Manière de Desargues*, donde el matemático Girard Desargues acusa este hecho públicamente y Dubreuil afirma que Desargues plagio las ideas de Veulezard y Aleume. De todo este conflicto aparece un método llamado "Método del Jesuita" que se basa en la repre-



**Figura 1.9.** Método del “Jesuita”.

sentación de un punto, un método práctico, exacto y fácil de usar para los artistas de este periodo y posteriores épocas. El método se describe a continuación:

1. Sean  $AB$  la línea de tierra,  $V$  el punto de fuga de las rectas perpendiculares al plano  $\mathcal{S}$  y  $V_{-1}$  el punto donde convergen las rectas paralelas al plano de planta y que son de 45 grados con respecto al cuadro (fig 1.9a).
2. Sea  $P$  un punto dado, al cual hallaremos su representación. Este estará en la parte inferior de la línea de tierra, el semi plano inferior con respecto a la línea de tierra representará el plano de planta (visto desde abajo) donde sus objetos estarán a escala real.
3. Desde  $P$  se traza una perpendicular a  $AB$  hasta  $M$ .
4. Se traza  $MV$ .
5. Con centro en  $M$  y radio  $MP$  se halla  $N$ .
6. Se dibuja  $NV_{-1}$
7. La intersección de  $MV$  y  $NV_{-1}$  da  $P'$ , que es la representación de  $P$ .

La justificación de este método recae en que  $MN = MP$ , así  $PN$  es una recta de 45 grados cuya representación es  $NV_{-1}$  (este método es aun ampliamente usado, por ser sencillo y exacto).

El método del Jesuita inicialmente está planteado para representar en perspectiva los puntos del plano de planta, si necesitáramos representar un punto con determinada altura deberíamos extender el método de la siguiente manera:(fig 1.9b)

1. Sea  $AB$  la línea de tierra.

2. Se traza la horizontal  $Z$  a una distancia de  $AB$  igual a la altura del objeto a representar.
3. Se aplica el método del Jesuita considerando a  $Z$  como la línea de tierra.
4. El punto hallado  $P'$ , es la representación en perspectiva de  $P$ .

# Capítulo 2

## Perspectiva en sección plana

La perspectiva cónica es el estudio de la profundidad y posición relativa de objetos en el espacio euclidiano mediante la representación en una superficie como el papel o lienzo del pintor, en este caso consideremos la superficie como un plano. Las representaciones gráficas estarán en función de objetos a representar y un observador, nuestro interés es escribir una teoría de la perspectiva lineal cónica bajo un modelo matemático, por tal razón construiremos una función que cumpla con los fundamentos básicos de la perspectiva. Esta función nos permitirá caracterizar puntos del objeto, los cuales son sus representaciones plasmadas en la superficie.

Ciertas propiedades que son de la naturaleza del objeto, se podrán conservar o anular en sus representaciones, también podrían adquirir nuevas propiedades como lo veremos en este capítulo, por ejemplo algunas rectas que son paralelas pierden esta propiedad en su representación y adquieren nuevas propiedades.

Antes de iniciar con la construcción de una función que nos permita representar un objeto en perspectiva, determinaremos qué puntos del espacio podremos representar.

### 2.1 Dominio perspectivo

Si no consideramos las limitantes físicas del ojo humano y los objetos físicos que impidan a un observador visualizar un punto del espacio dado, entonces la definición 1.3 nos podría hacer pensar que todo punto sería visible para este observador; sin embargo, esto no es del todo cierto pues existirán puntos como el del propio observador que no puede visualizar. Otro reto que conlleva la identificación de puntos que se pueden representar en una superficie (papel o lienzo) para determinado observador es que el rayo definido por el observador y el punto observado está compuesto por infinitos puntos del espacio, por lo cual debemos elegir qué punto representar sobre este rayo. El objetivo de esta sección es identificar qué puntos podemos o no dibujar en la superficie para determinado observador, además elegir un punto que represente a un conjunto de puntos que estén sobre el mismo rayo.

Un aspecto importante que debemos considerar es el papel, lienzo o cuadro donde realizaremos nuestro dibujo, es decir, la superficie en la que irá representado el objeto real, normalmente esta contiene ciertas dimensiones

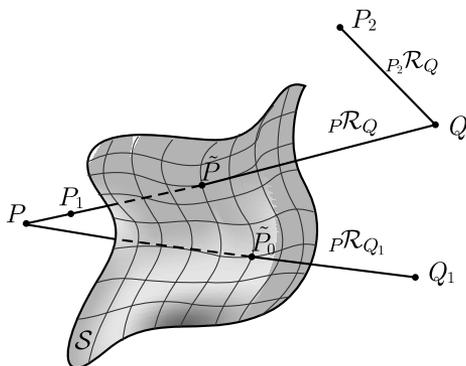


Figura 2.1. Representación de  $P$  en  $S$ .

que dependerán del objetivo que tenga el artista en la creación de su obra. Como nuestro objetivo es una formalización matemática de la perspectiva, no es necesario limitarnos a unas dimensiones, por ejemplo podremos considerar planos. Pero si no consideramos planos esto afectará la elección o no de un punto a representar para un observador dado.

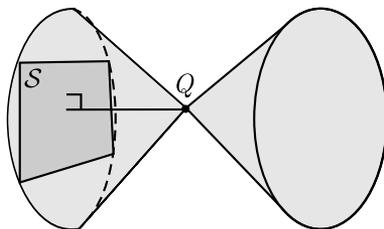
En el capítulo 1,  $S$  representaba un plano (cuadro del pintor). En este capítulo  $S$  será una superficie<sup>2.1</sup> (en términos matemáticos) que llamaremos sección. En  $S$  están los puntos que configuran la representación imaginaria de los objetos reales a representar, por lo cual es importante identificar qué puntos representan al objeto, para ello tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.1.** Sean  $P$  un punto del espacio tridimensional,  $Q$  un observador y  $p\mathcal{R}_Q$  el rayo definido por  $P$  y  $Q$ . Si la intersección del  $p\mathcal{R}_Q$  con  $S$  es un único punto, lo llamaremos **representación** de  $P$  en  $S$  y lo denotaremos por  $\tilde{P}$ .

Notemos que la intersección de  $p\mathcal{R}_Q$  con  $S$  puede no ser un único punto, esto dependerá de la elección de la sección, el punto a representar y el observador. Además de lo anterior, para todo punto que esté en  $p\mathcal{R}_Q$  su representación será la de  $P$ , cabe observar que la representación de un punto es relativa al observador.

No todo punto  $P \in \mathbb{R}^3$  tiene representación en  $S$  para determinado observador  $Q$ . En la figura 2.1 observamos que la representación de  $P$  en  $S$  es  $\tilde{P}$ , la cual es la misma para un punto  $P_1 \in p\mathcal{R}_Q$ , y para otro observador  $Q_1$  vemos que la representación de  $P$  en  $S$  es distinta, en este caso  $\tilde{P}_0$ . El punto  $P_2$  no tiene representación en  $S$  ya que  $p\mathcal{R}_Q \cap S = \emptyset$ .

2.1. Una superficie es un conjunto de puntos de un espacio euclídeo ( $\mathbb{R}^3$ ) que forma un espacio topológico, que localmente se asemeja al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$ .



**Figura 2.2.** Dominio perspectivo para una sección determinada por el conjunto  $[x_0, x_1] \times [z_0, z_1]$ . Concepto generalizado del cono de Euclides.

Notemos que según la definición 2.1 no es suficiente que  ${}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ , sino que tal intersección debe ser un solo punto; si se trata de un plano, esto es trivial, a menos que  ${}^P\mathcal{R}_Q \subset \mathcal{S}$  cuya intersección sería  ${}^P\mathcal{R}_Q$ . En los capítulos 4 y 5 se tratarán secciones que no son planos y en tal caso las intersecciones de  ${}^P\mathcal{R}_Q$  con  $\mathcal{S}$  serían múltiples. Surge una pregunta natural, dados un observador y una sección ¿Qué puntos del espacio tienen representación?

**Definición 2.2.** Sean  $\mathcal{S}$  una sección y  $Q$  un observador. Diremos que el conjunto  $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{R}^3$  definido por

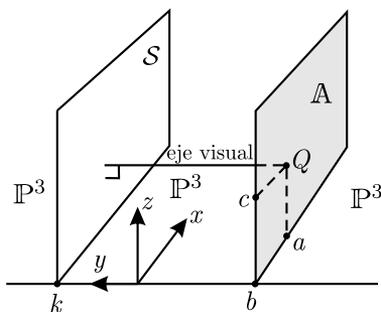
$$\mathbb{P}^3 := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid |{}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S}| = 1\},$$

es el **dominio perspectivo** con respecto a la sección  $\mathcal{S}$  y al observador  $Q$ .

Notemos que  $Q \in {}^P\mathcal{R}_Q$ , además se cumple que  $Q \notin \mathbb{P}^3$  ya que  ${}^P\mathcal{R}_Q$  existe si  $P$  es diferente de  $Q$  según la definición 1.2.

Si  $P \in \mathbb{P}^3$  y además  $P \in \mathcal{S}$ , entonces  ${}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S} = \{\tilde{P}\} = \{P\}$ , esto quiere decir que  $P$  sería su propia representación. Si  $Q \in \mathcal{S}$  entonces para cualquier  $P \in \mathbb{P}^3$  se tiene que  ${}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S} = \{\tilde{P}\} = \{Q\}$ , de este modo  $Q$  sería la representación de todo punto en el dominio perspectivo implicando que  $Q \in \mathbb{P}^3$ , lo cual es una contradicción, por lo tanto,  $Q \notin \mathcal{S}$ . Si  $\mathcal{S}$  es un plano, entonces para cualquier  $P \in \mathcal{S}$  se tiene que  $P \in \mathbb{P}^3$  siempre que  $Q \notin \mathcal{S}$ , pero en general no es cierto cuando  $\mathcal{S}$  es otra superficie distinta a un plano como lo veremos en el capítulo 4. Si  $P \in \mathbb{P}^3$  entonces para todo  $P_1 \in {}^P\mathcal{R}_Q$  con  $P_1 \neq Q$  se tiene que  $P_1 \in \mathbb{P}^3$ .

El dominio perspectivo para el caso en el que  $\mathcal{S}$  sea el conjunto  $[x_0, x_1] \times [z_0, z_1]$  que se encuentra en el plano  $xz$  no contradice el concepto de cono visual de Euclides, de hecho, es más general pues considera un cono de dos hojas cuyos vértices coinciden en el observador  $Q$  (fig 2.2). El dominio perspectivo para el caso en el que  $\mathcal{S}$  sea un plano acotado es conformado por todos los puntos en el interior de los dos conos (rara vez en este texto se considerarán los elementos de  $\mathbb{P}^3$  en el semicono de la derecha en la Figura 2.2).



**Figura 2.3.** Dominio Perspectivo  $\mathbb{P}^3$  para una sección plana  $\mathcal{S}$ .

Diremos que una **sección plana**  $\mathcal{S}$ , es un plano normal al eje visual. Si consideremos el conjunto  $\mathbb{A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = b\}$  donde  $Q = (a, b, c)$  es el observador. De la figura 2.3 vemos que  $\mathbb{A}$  es un plano paralelo a la sección plana  $\mathcal{S}$ , además se cumple

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{A}. \quad (2.1)$$

En efecto: si  $P \in \mathbb{A}$ , el rayo  ${}^P\mathcal{R}_Q$  estaría contenido en  $\mathbb{A}$ , por lo cual  ${}^P\mathcal{R}_Q$  sería paralelo a  $\mathcal{S}$  y por tanto  ${}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S} = \emptyset$ , así  $P \notin \mathbb{P}^3$ .

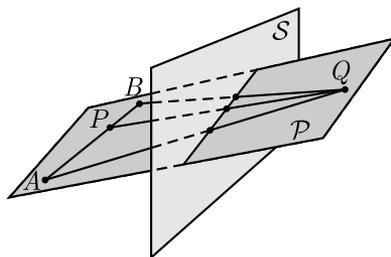
Los segmentos de recta vistos en perspectiva son de suma importancia, ya que junto con los puntos pueden configurar imágenes y descomponer figuras de objetos complejos a formas más simples y así tener una aproximación del objeto mediante puntos y segmentos de rectas, esto permite hallar más fácil la figura en perspectiva del objeto.

**Proposición 2.3.** Sean  $Q$  un observador,  $\mathcal{S}$  un plano normal al eje de visión y  $\overline{AB}$  el conjunto de los puntos de un segmento de recta en el espacio tales que  $\overline{AB} \subset \mathbb{P}^3$ , entonces las representaciones de los puntos de  $\overline{AB}$  conforman un segmento de recta o un punto en  $\mathcal{S}$ .

**Demostración.** Sea  $\overline{AB} \subset \mathbb{P}^3$ ,

Si  $A$  y  $B$  están en el mismo rayo  ${}^A\mathcal{R}_Q$ , entonces la representación de  $\overline{AB}$  en  $\mathcal{S}$  es un punto, y así  $\tilde{A} = \tilde{B}$ .

Si  $A$  y  $B$  están en rayos diferentes, entonces los puntos  $A$ ,  $B$  y  $Q$  no son colineales, por lo tanto podemos determinar un plano  $\mathcal{P}$  (fig 2.4). La



**Figura 2.4.** La representación de un conjunto de puntos que determinan un segmento, conforman un segmento en  $\mathcal{S}$ .

intersección de  $\mathcal{P}$  con  $\mathcal{S}$  es una recta  $\mathcal{L}$ , así, todo punto  $P$  en  $\overline{AB}$  está contenido en  $\mathcal{P}$ , por lo cual  $P\mathcal{R}_Q \subset \mathcal{P}$ , de esta manera  $\{\tilde{P}\} = (P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S}) \subset \mathcal{L}$ . Por la arbitrariedad de  $P$ , tenemos que para todo  $P \in \overline{AB}$  se satisface que  $\tilde{P} \in \tilde{A}\tilde{B} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ , lo cual quiere decir que la representación de un segmento  $\overline{AB}$  en  $\mathcal{S}$  es otro segmento  $\tilde{A}\tilde{B}$ .  $\square$

## 2.2 Anamorfismos

Para estudiar la perspectiva, introducimos el concepto de *anamorfismo*<sup>2.2</sup> (o *función perspectiva*), el cual será necesario para encontrar representaciones de puntos y puntos de fuga. Además se consideran conjuntos de puntos como rectas y curvas en  $\mathbb{P}^3$ , para analizar el comportamiento de los representantes de cada punto en estos conjuntos, a fin de estudiar la colección de todos los representantes de los puntos considerados.

**Definición 2.4.** Sean  $Q$  un observador y  $\mathcal{S}$  una sección. Un anamorfismo es una función de dominio  $\mathbb{P}^3$  con valores en  $\mathcal{S}$  definida de la siguiente manera:

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathcal{S} \quad \text{donde } \tilde{\varphi}(P) = \tilde{P}.$$

En esta definición vemos que el dominio de la función  $\tilde{\varphi}$  es el dominio perspectivo y el codominio<sup>2.3</sup> es  $\mathcal{S}$ . Según la definición 2.1 es necesario que  $\tilde{\varphi}$  dependa de un parámetro como un observador. Notemos que si  $\mathbb{P}^3 \neq \emptyset$ , siempre podemos construir un anamorfismo. Si  $A \subseteq \mathbb{P}^3$ , al conjunto  $\tilde{\varphi}(A)$  se le llama **conjunto imagen** de  $A$  en  $\mathcal{S}$ .

A partir de ahora y en el capítulo 3, consideraremos a  $\mathcal{S}$  un plano ortogonal al eje visual. Por tal razón implementamos un sistema de coordenadas

2.2. De los conceptos anamorfo y morfismo, el término anamorfismo es acuñado en este contexto a la forma de la distorsión de una imagen dada a través de una función.

2.3. Si  $\mathcal{S}$  es una sección plana, el codominio coincide con la imagen de la función  $\tilde{\varphi}$ .

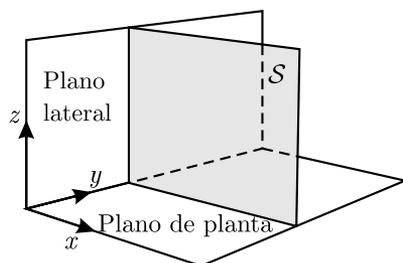


Figura 2.5. Plano lateral y de planta.

$x, y, z$  donde  $\mathcal{S}$  será paralelo al plano  $xz$ , y los planos  $xy$  e  $yz$  son el **plano de tierra** (o **planta**) y el **plano lateral** respectivamente (fig 2.5).

Tenemos a continuación una proposición que define un anamorfismo  $\tilde{\varphi}$  que permite cuantificar e identificar en términos de coordenadas cartesianas los representantes de puntos del dominio perspectivo en  $\mathcal{S}$ .

**Proposición 2.5.** Sean  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ ,  $Q = (a, b, c)$  un observador y  $\mathcal{S}$  un plano de ecuación cartesiana  $y = k$ , con  $k \in \mathbb{R}$  fijo distinto de  $b$ , entonces la representación de  $P$  en  $\mathcal{S}$  está dado por

$$\tilde{\varphi}(P) = \tilde{P} = (\tilde{x}, k, \tilde{z})$$

donde

$$\tilde{x} = \frac{(k-b)(x-a)}{y-b} + a \quad y \quad \tilde{z} = \frac{(k-b)(z-c)}{y-b} + c.$$

**Demostración.** Sean  $\mathbf{q} = Q = (a, b, c)$  un observador y  $\mathbf{p} = P = (x, y, z)$  un punto de  $\mathbb{P}^3$ (fig 2.6).

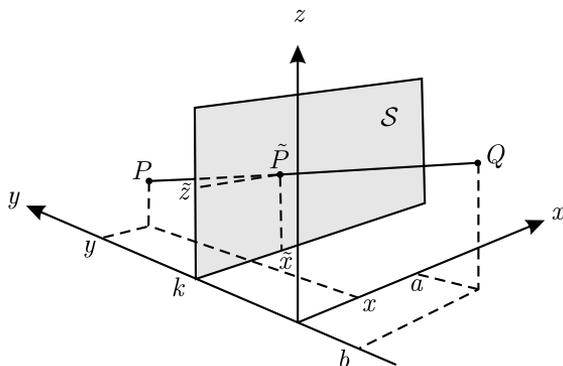


Figura 2.6. Determinación del anamorfismo para una sección plana a partir de la intersección de un rayo con la sección.

La parametrización del rayo  ${}^P\mathcal{R}_Q$  está dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  para  $t \in \mathbb{R}$ , de manera explícita, esto es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Para un único  $t_0 \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t_0 \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix}.$$

Si  $x = a$  entonces  $\tilde{x} = a$ ; similarmente, si  $z = c$  entonces  $\tilde{z} = c$ .

Si  $x \neq a$  y  $z \neq c$ , se tienen las siguientes igualdades por las ecuaciones simétricas (recuerde que  $(y - b) \neq 0$ , ya que  $y = b$  implica que el punto  $P = (x, b, z) \notin \mathbb{P}^3$ )

$$\frac{\tilde{x} - a}{x - a} = \frac{\tilde{y} - b}{y - b} = \frac{\tilde{z} - c}{z - c}. \quad (2.2)$$

Dado que  $\mathcal{S}$  es un plano de ecuación cartesiana  $y = k$  para  $k \neq b \in \mathbb{R}$ , se tiene que  ${}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S} = \tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ . Notemos que  $\tilde{y} = k$ , y sustituyendo en (2.2) se tiene que

$$\frac{\tilde{x} - a}{x - a} = \frac{k - b}{y - b} \quad y \quad \frac{\tilde{z} - c}{z - c} = \frac{k - b}{y - b},$$

luego

$$\tilde{x} = \frac{(k - b)(x - a)}{y - b} + a \quad y \quad \tilde{z} = \frac{(k - b)(z - c)}{y - b} + c \quad (2.3)$$

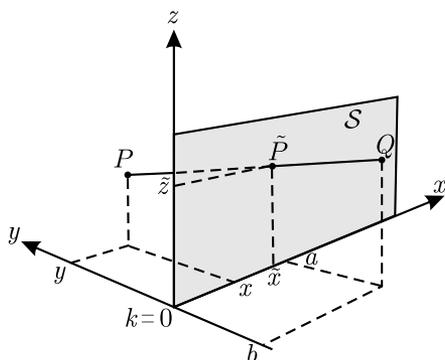
Podemos definir a  $\tilde{\varphi}$  como:

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathcal{S} \quad \text{dada por } \tilde{\varphi}(P) = (\tilde{x}, k, \tilde{z}). \quad (2.4)$$

Así  $\tilde{\varphi}(P) = (\tilde{x}, k, \tilde{z}) = \tilde{P}$  es un anamorfismo, el cual depende del parámetro  $Q$ , logrando representar un punto del espacio tridimensional en un plano cuyo vector normal es paralelo al eje de visión.  $\square$

El hecho de tener una función que permite obtener la representación de un punto en perspectiva de forma cuantitativa, ayuda al análisis de situaciones que con los métodos tradicionales expuestos en capítulo 1 serían de gran complejidad.

Notemos que los puntos en  $\mathbb{P}^3$  están dados por coordenadas  $x, y, z$ , mientras que en  $\mathcal{S}$  los puntos están dados por coordenadas  $\tilde{x}, k, \tilde{z}$  con  $k \in \mathbb{R}$  fijo y  $k \neq b$  ( $\tilde{x}$  y  $\tilde{z}$  dados en la proposición 2.5). Sin embargo, estas suelen



**Figura 2.7.** Sección fija en el plano  $x, z$ .

coincidir cuando  $P \in \mathbb{P}^3$  es de la forma  $P = (x, k, z)$ , para esta situación  $x = \tilde{x}$ ,  $z = \tilde{z}$ , el cual es un caso particular de la proposición 2.5 si consideramos que  $\mathcal{S}$  es el plano  $xz$ ; es decir  $k = 0$ . Por comodidad en los cálculos y en la escritura, a partir de ahora, tomaremos  $k = 0$  y por abuso de notación solo consideraremos las coordenadas  $\tilde{x}$  y  $\tilde{z}$  del anterior resultado; es decir, la terna  $(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$  se escribirá  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  omitiendo la coordenada  $\tilde{y} = 0$ .

**Corolario 2.6.** Sean  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ ,  $Q = (a, b, c)$  un observador, si  $\mathcal{S}$  es el plano  $xz$ , entonces la representación de  $P$  en  $\mathcal{S}$  está dada por

$$\tilde{\varphi}(P) = \tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{z})$$

donde

$$\tilde{x} = \frac{-b(x-a)}{y-b} + a \quad y \quad \tilde{z} = \frac{-b(z-c)}{y-b} + c \quad (2.5)$$

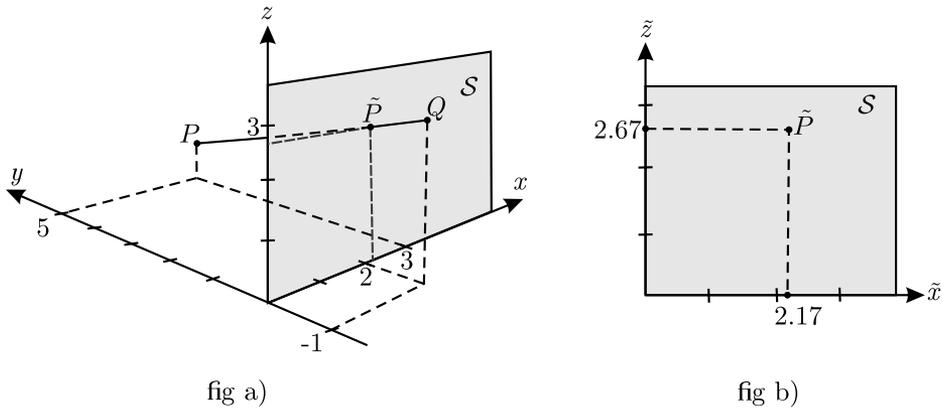
A partir de ahora,  $\mathcal{S}$  es el plano  $xz$ . Dado el sistema de referencia que estamos usando, el observador tendrá componente  $y$  negativa (fig 2.7).

A continuación, presentamos unos ejemplos de aplicación del corolario 2.6.

**Ejemplo 2.7.** Sea  $\mathcal{S}$  el plano  $xz$ , un observador ubicado en  $Q = (2, -1, 3)$ . Encontrar la representación del punto  $P = (3, 5, 1)$  en  $\mathcal{S}$ .

Lo que necesitamos hallar es  $\tilde{\varphi}(3, 5, 1) = \tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{z})$ , identificamos las componentes:  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 3$ ,  $x = 3$ ,  $y = 5$ ,  $z = 1$ . Por medio de las ecuaciones (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{-(-1)(3-2)}{5-(-1)} + 2 = \frac{1}{6} + 2 = \frac{13}{6} \approx 2.17 \\ \tilde{z} &= \frac{-(-1)(1-3)}{5-(-1)} + 3 = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3} \approx 2.67 \end{aligned}$$

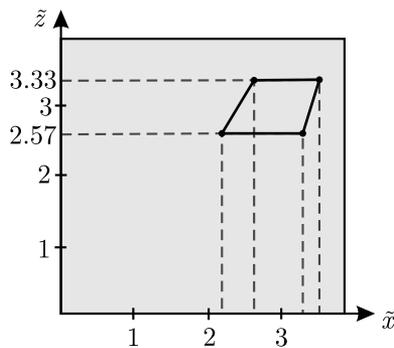


**Figura 2.8.** a) Vista de la situación en tercera persona. b) vista de la situación desde el observador.

así  $\tilde{P} = \left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right) \approx (2.17, 2.67)$ , (fig 2.8).

**Ejemplo 2.8.** Hallar la representación en  $\mathcal{S}$ , de un cuadrado ubicado en el plano de planta con vértices  $P_1 = (1, 3, 0)$ ,  $P_2 = (3, 3, 0)$ ,  $P_3 = (3, 5, 0)$  y  $P_4 = (1, 5, 0)$ , para un observador  $Q = (4, -4, 6)$ .

Quando no se especifique la sección  $\mathcal{S}$  como en este ejemplo, se asumirá que  $\mathcal{S}$  es el plano  $xz$ . Buscaremos las representaciones de estos cuatro puntos en  $\mathcal{S}$  y posteriormente unimos con una línea las representaciones en virtud de la proposición 2.3 para obtener la representación de los segmentos y así generar el cuadrado en perspectiva (fig 2.9), por lo cual usando el



**Figura 2.9.** Cuadrado en perspectiva para un observador  $(4, -4, 6)$ .

	$x$	$y$	$z$	$\tilde{x}$	$\tilde{z}$
$P_1$	1	3	0	2.29	2.57
$P_2$	3	3	0	3.43	2.57
$P_3$	3	5	0	3.56	3.33
$P_4$	1	5	0	2.67	3.33

**Tabla 2.1.** Valores para un observador  $(4, -4, 6)$ .

corolario (2.6) tenemos que para  $\tilde{P}_1$ , las componentes en  $\mathcal{S}$  son:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \frac{-(-4)(1-4)}{3-(-4)} + 4 = -\frac{12}{7} + 4 = \frac{16}{7} \approx 2.29 \\ \tilde{z}_1 &= \frac{-(-4)(0-6)}{3-(-4)} + 6 = -\frac{24}{7} + 6 = \frac{18}{7} \approx 2.57\end{aligned}$$

así  $\tilde{P}_1 = \frac{1}{7}(16, 18) \approx (2.29, 2.57)$ . Para  $\tilde{P}_2$  las componentes son:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2 &= \frac{-(-4)(3-4)}{3-(-4)} + 4 = -\frac{4}{7} + 4 = \frac{24}{7} \approx 3.43 \\ \tilde{z}_2 &= \frac{-(-4)(0-6)}{3-(-4)} + 6 = -\frac{24}{7} + 6 = \frac{18}{7} \approx 2.57\end{aligned}$$

así  $\tilde{P}_2 = \frac{1}{7}(24, 18) \approx (3.43, 2.57)$ . Para  $\tilde{P}_3$  hacemos lo mismo,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_3 &= \frac{-(-4)(3-4)}{5-(-4)} + 4 = -\frac{4}{9} + 4 = \frac{32}{9} \approx 3.56 \\ \tilde{z}_3 &= \frac{-(-4)(0-6)}{5-(-4)} + 6 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3} \approx 3.33\end{aligned}$$

luego  $\tilde{P}_3 = \left(\frac{32}{9}, \frac{10}{3}\right) \approx (3.56, 3.33)$ . Y por último para  $\tilde{P}_4$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_4 &= \frac{-(-4)(1-4)}{5-(-4)} + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2.67 \\ \tilde{z}_4 &= \frac{-(-4)(0-6)}{5-(-4)} + 6 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3} \approx 3.33\end{aligned}$$

por tanto  $\tilde{P}_4 = \frac{1}{3}(8, 10) \approx (2.67, 3.33)$ . Estos resultados los podemos resumir en la tabla 2.1.

### 2.2.1 Análisis de los Anamorfismos

A las ecuaciones (2.5) las llamaremos *ecuaciones perspectivas*, estas definen a  $\tilde{\varphi}$  para  $k=0$ . A partir de esto, tenemos un nuevo enfoque de la perspectiva desde un modelo matemático; nuestros resultados satisfacen las leyes y hechos conocidos de la perspectiva expuestos en el capítulo 1.

Otra forma de escribir las ecuaciones perspectivas es:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{-b(x-a)}{y-b} + a = \frac{ay-ab-bx+ab}{y-b} = \frac{ay-bx}{y-b}, \\ \tilde{z} &= \frac{-b(z-c)}{y-b} + c = \frac{cy-cb-bz+bc}{y-b} = \frac{cy-bz}{y-b},\end{aligned}$$

así,  $\tilde{\varphi}$  también podría escribirse de la forma

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \frac{1}{y-b} \begin{bmatrix} ay-bx \\ cy-bz \end{bmatrix} = \frac{1}{y-b} (ay-bx, cy-bz), \quad (2.6)$$

en ocasiones será conveniente escribir a  $\tilde{\varphi}$  de la forma (2.6) para realizar determinados cálculos.

Sean  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$  y  $Q$  un observador fijo. Si  $P$  no es fijo, se puede definir una función en términos de  $y$ , la cual definimos por  $\mathcal{F}(y) := 1/(y-b)$  llamada **factor de profundidad**. A continuación, analizaremos casos particulares para  $P$ :

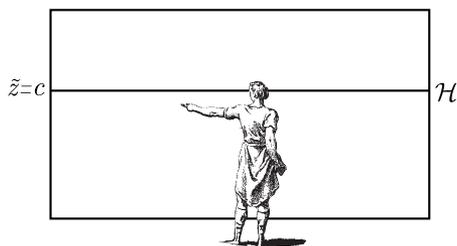
- i. Si un punto  $P = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ , la componente  $y=0$ , luego

$$\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{1}{0-b} \begin{bmatrix} a \cdot 0 - bx \\ c \cdot 0 - bz \end{bmatrix} = \frac{1}{-b} \begin{bmatrix} -bx \\ -bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix},$$

así  $(\tilde{x}, \tilde{z}) = (x, z)$ , esto quiere decir, en términos de dibujo, que un objeto que esté sobre la sección no tendrá cambios perspectivos, ya que el factor de profundidad permanecerá constante.

- ii. Si un punto  $P = (x, y, z)$  esta sobre el eje visual, sin ser este el observador, tenemos que este se escribirá de la forma  $(a, y, c)$ , donde  $c$  es la altura del observador, así

$$\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{1}{y-b} \begin{bmatrix} ay-ba \\ cy-bc \end{bmatrix} = \frac{1}{y-b} \begin{bmatrix} a(y-b) \\ c(y-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix},$$



**Figura 2.10.** Línea del horizonte.

notemos que en este caso no importa el factor de profundidad, dado que la representación permanece constante, lo cual es natural ya que  $(\tilde{x} = a, \tilde{z} = c)$  es la proyección ortogonal del observador en la sección; sin embargo, esta situación es un caso particular. Si  $P \in \mathbb{P}^3$  y  $P$  es de la forma  $(x, y, c)$  donde sus primeras dos componentes son arbitrarias y su tercera es constante e igual a la componente en  $z$  del observador, en este caso

$$\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{1}{y-b} \begin{bmatrix} ay - bx \\ cy - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(y)(ay - bx) \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ c \end{bmatrix},$$

esto quiere decir que todo punto con altura igual a la del observador, tendrá la misma componente  $\tilde{z}$  en  $\mathcal{S}$ .

Continuando con nuestro objetivo, el de escribir una teoría matemática de la perspectiva en términos modernos, la parte ii de la descripción motiva la siguiente definición.

**Definición 2.9.** Sean  $(a, b, c)$  un observador,  $A := \{P \in \mathbb{P}^3 \mid P = (x, y, c)\}$  y  $\tilde{\varphi}|_A$ . Se define el **horizonte** de  $\mathcal{S}$ , denotado por  $\mathcal{H}$ , como el siguiente conjunto

$$\mathcal{H} := \{\tilde{\varphi}(P) \mid P \in A\}$$

Según esta definición, Si  $\mathcal{S}$  es el plano  $xz$ , el horizonte  $\mathcal{H} = \{(\tilde{x}, \tilde{z}) \mid \tilde{z} = c\}$ , es decir, la recta  $\tilde{z} = c$ . Para este caso, hablamos de *línea del horizonte* (fig 2.10), ésta es la línea imaginaria que percibimos cuando se une el cielo y la tierra, o el cielo y el mar, la cual la imaginamos en el infinito visual.

Notemos que  $\mathcal{H}$  divide a  $\mathcal{S}$  en dos conjuntos, el conjunto de puntos en  $\mathcal{S}$  que están por encima de la línea del horizonte, es decir,  $\{(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S} \mid \tilde{z} > c\}$  y el conjunto de puntos en  $\mathcal{S}$  que están por debajo de la línea del horizonte, esto es,  $\{(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S} \mid \tilde{z} < c\}$ .

Si  $P \in \{P \in \mathbb{P}^3 \mid y > b\}$  y su representante  $\tilde{P} \in \{(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S} \mid \tilde{z} > c\}$ , entonces la altura de  $P$  es mayor a la del observador, por lo tanto  $z > c$ . En efecto: si  $\tilde{z} > c$  entonces  $\tilde{z} - c > 0$ , y sabemos que  $-b\mathcal{F}(y) > 0$  luego

$$0 < \tilde{z} - c = c - b\mathcal{F}(y)(z - c) - c = -b\mathcal{F}(y)(z - c)$$

de esta manera  $0 < z - c$ , así  $c < z$ .

Con un razonamiento análogo, si  $P \in \{P \in \mathbb{P}^3 \mid y > b\}$  y su representante  $\tilde{P} \in \{(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S} \mid \tilde{z} < c\}$  entonces la altura de  $P$  es menor a la del observador. Ahora, si se consideran los  $P \in \{P \in \mathbb{P}^3 \mid y < b\}$ , ocurre el proceso inverso; esto es: puntos que están más altos que el observador son proyectados en la parte inferior de la sección (por debajo de la línea del horizonte), lo cual no tiene mucho interés para la teoría de la perspectiva y por ende no se considera tal conjunto.

Con las ecuaciones perspectivas (2.5) definidas al inicio de la sección podemos encontrar las coordenadas de la proyección y con algunos otros datos hallar componentes faltante del punto proyectado. A continuación, se presentan unos ejemplos de esta situación.

**Ejemplo 2.10.** Sean un observador  $Q = (1, -3, 4)$  y la representación de un punto que está a 20 unidades de la sección con coordenadas  $\tilde{P} = (5, 2)$ . Encontrar al punto representado.

Lo que nos piden hallar es el punto  $P = (x, y, z)$  donde sabemos que  $y = 20$ . Resta determinar las componentes  $x, z$  del punto. Utilizando las ecuaciones perspectivas tenemos que

$$5 - 1 = \frac{-(-3)(x - 1)}{20 - (-3)} = \frac{3x - 3}{23}, \quad 2 - 4 = \frac{-(-3)(z - 4)}{20 - (-3)} = \frac{3z - 12}{23}$$

resolviendo para  $x$  y  $z$  tenemos que

$$\begin{aligned} 3x &= 4 \cdot 23 + 3 & 3z &= -2 \cdot 23 + 12 \\ x &= \frac{95}{3} & z &= \frac{-34}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto,  $P = \frac{1}{3}(95, 60, -34)$ . Podríamos comprobar el resultado hallando su representante,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= 1 + \frac{-(-3)\left(\frac{95}{3} - 1\right)}{20 - (-3)} & \tilde{z} &= 4 + \frac{-(-3)\left(\frac{-34}{3} - 4\right)}{20 - (-3)} \\ \tilde{x} &= 1 + \frac{92}{23} & \tilde{z} &= 4 - 2 \\ \tilde{x} &= 5 & \tilde{z} &= 2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.11.** Se sabe que la primera componente de un observador es 2 y la segunda es  $-1/2$ ,  $\mathcal{F}(y) = 1$  y la representación  $\tilde{P} = (3, 6) \in \mathcal{H}$ . Hallar  $P$ .

Como  $b = -1/2$  y  $\mathcal{F}(y) = 1$ , tenemos que

$$1 = \mathcal{F}(y) = \frac{1}{y - b}, \quad \Rightarrow \quad y = b + 1$$

y sustituyendo se tiene que  $y = -1/2 + 1 = 1/2$ . Por otro lado nos dicen que  $\tilde{P} = (3, 6) \in \mathcal{H}$ , lo cual quiere decir que  $z = c = \tilde{z} = 6$ . Solo resta hallar  $x$ , de las ecuaciones perspectivas (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned} (\tilde{x} - a) &= \frac{-b(x - a)}{(y - b)} \\ (y - b)(\tilde{x} - a) &= -b(x - a) \\ -\frac{1}{b}(y - b)(\tilde{x} - a) + a &= x \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores

$$x = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(3 - 2)}{-\left(-\frac{1}{2}\right)} + 2 = 2 + 2 = 4.$$

por lo cual  $P = (4, 1/2, 6)$ . Comprobemos el resultado hallando el representante de  $P$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= 2 + \frac{-(-1/2)(4 - 2)}{1/2 - (-1/2)} & \tilde{z} &= 6 + \frac{-(-1/2)(6 - 6)}{1/2 - (-1/2)} \\ & \tilde{x} = 2 + 1 & \tilde{z} &= 6 + 0 \\ & \tilde{x} = 3 & \tilde{z} &= 6. \end{aligned}$$

## 2.3 Rectas paralelas

Las representaciones de rectas paralelas siempre han cautivado la atención de quienes estudian perspectiva, ya que su propiedad de paralelismo contradice la geometría Euclidiana, dado que estas rectas se cortan en un punto. Estamos expuestos a este fenómeno en situaciones reales: por ejemplo, un pasillo recto y largo, el techo y el suelo al final tienden a unirse en perspectiva.

Dadas dos rectas  $\mathcal{L}_1: \mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_1 + t_1 \mathbf{d}_1$  y  $\mathcal{L}_2: \mathbf{x}_2 = \mathbf{p}_2 + t_2 \mathbf{d}_2$  con  $t_{1,2} \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^n$ , diremos que son paralelas si sus vectores directores los son, es decir, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{d}_1 = \alpha \mathbf{d}_2$ .

Las proposiciones 2.12 y 2.14 dadas a continuación se encuentran en [2, capítulo 3] teorema 4 y teorema 3 respectivamente, las demostraciones dadas allí tienen un enfoque descriptivo. Dado que nuestro objetivo es exponer la teoría de la perspectiva en un lenguaje matemático moderno; en este texto, los resultados serán presentados basado en el concepto de anamorfismo. Antes de enunciar las proposiciones, decimos que **dos rectas son paralelas en  $\mathbb{P}^3$** , si son rectas paralelas en  $\mathbb{R}^3$  que a lo sumo no contienen un punto en  $\mathbb{P}^3$ .

**Proposición 2.12.** *Si dos rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son paralelas en  $\mathbb{P}^3$  y estas a su vez lo son con la sección, entonces sus imágenes son rectas paralelas.*

**Demostración.** Sean  $\mathcal{L}_1: \mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_1 + t_1 \mathbf{d}$  y  $\mathcal{L}_2: \mathbf{x}_2 = \mathbf{p}_2 + t_2 \mathbf{d}$  (sin pérdida de generalidad se puede asumir el vector director director en ambas rectas) donde

$$\mathcal{L}_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} d_x \\ 0 \\ d_z \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_2: \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} d_x \\ 0 \\ d_z \end{bmatrix},$$

con  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son paralelas por tener igual vector director, notemos que  $d_y = 0$  dado que son paralelas a  $\mathcal{S}$ . Así, cada punto de  $\mathcal{L}_i$  quedará determinado por el parámetro  $t_i$

$$x_i(t_i) = p_{ix} + t_i d_x, \quad y_i(t_i) = p_{iy}, \quad z_i(t_i) = p_{iz} + t_i d_z \quad \text{con } t_i \in \mathbb{R}, \text{ e } i = 1, 2.$$

El conjunto  $\tilde{\varphi}(\mathcal{L}_i)$  esta dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_i(t_i), y_i(t_i), z_i(t_i)) &= \mathcal{F}(y_i(t_i)) \begin{bmatrix} a y_i(t_i) - b x_i(t_i) \\ c y_i(t_i) - b z_i(t_i) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(p_{iy}) \begin{bmatrix} a p_{iy} - b(p_{ix} + t_i d_x) \\ c p_{iy} - b(p_{iz} + t_i d_z) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(p_{iy}) \begin{bmatrix} a p_{iy} - b p_{ix} - t_i b d_x \\ c p_{iy} - b p_{iz} - t_i b d_z \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(p_{iy}) \begin{bmatrix} a p_{iy} - b p_{ix} \\ c p_{iy} - b p_{iz} \end{bmatrix} + t_i \mathcal{F}(p_{iy}) \begin{bmatrix} -b d_x \\ -b d_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_i) + t_i(-b\mathcal{F}(p_{iy})) \begin{bmatrix} d_x \\ d_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\tilde{\varphi}(\mathcal{L}_i) = \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_i) + t'_i \tilde{\varphi}(\mathbf{d}) \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) corresponde a una recta en el plano  $xz$ , es decir, está en  $\mathcal{S}$ . Las imágenes de las rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son rectas paralelas en  $\mathcal{S}$  ya que ambas tienen en mismo vector director.

□

En la ecuación (2.8) se omitió el escalar  $-b\mathcal{F}(p_{iy})$  que estaba en (2.7), este no afecta la ecuación de la recta, pero tiene un papel importante para identificar cada punto de la recta en el espacio con su representante, el cual pertenece al conjunto imagen dada a través de la función  $\tilde{\varphi}$ .

**Ejemplo 2.13.** Sea  $\mathcal{L}$  una recta paralela a la sección que contiene el punto  $\mathbf{p} = (2, 3, 0)$ , si consideramos al vector  $(1, 0, 1)$  como vector director para la recta  $\mathcal{L}$ , tenemos una ecuación para la recta

$$\mathcal{L}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } t \in \mathbb{R},$$

Para  $t = 2$  tenemos que el punto  $\mathbf{u} = (4, 3, 2)$  está en  $\mathcal{L}$ , para un observador  $(4, -1, 3)$  tenemos que  $\mathcal{F}(3) = 1/4$  y

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 + 4 \\ 3 \cdot 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11/4 \end{bmatrix},$$

así para  $t = 2$  tenemos que en (2.7)

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) + 2 \cdot (-b\mathcal{F}(3)) \begin{bmatrix} d_x \\ d_z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11/4 \end{bmatrix},$$

pero si hacemos  $t' = 2$  en (2.8) vemos que

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) \neq \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) + 2 \cdot \tilde{\varphi}(\mathbf{d}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/2 \\ 17/4 \end{bmatrix},$$

esto nos dice que el parámetro  $t \neq t'$ .

Ahora consideraremos rectas cuyo vector director no es paralelo a la sección  $\mathcal{S}$ , algunas propiedades de estas rectas no se preservan bajo el anamorfismo, ya que estas se pueden convertir en semirrectas o puntos. Además, las imágenes de rectas paralelas en el espacio, se pueden cortar en un punto.

**Proposición 2.14.** *Sean  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  dos rectas paralelas en  $\mathbb{P}^3$  tal que no son paralelas a la sección, entonces sus imágenes son semirrectas que convergen al punto*

$$\left( a - \frac{bd_x}{d_y}, c - \frac{bd_z}{d_y} \right)$$

donde el vector director de las rectas está dado por  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$  con  $d_y \neq 0$ .

**Demostración.** Sean  $\mathcal{L}_1: \mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_1 + t\mathbf{d}$  y  $\mathcal{L}_2: \mathbf{x}_2 = \mathbf{p}_2 + t\mathbf{d}$  con  $t \in \mathbb{R}$  tal que los puntos de  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  estén en  $\mathbb{P}^3$  y la componente  $y$  del vector director  $\mathbf{d}$  es distinta de cero, esto para garantizar que las rectas no sean paralelas a  $\mathcal{S}$ , escribimos de forma explícita las ecuaciones paramétricas de las rectas

$$\mathcal{L}_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_2: \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix},$$

notemos que los vectores directores son iguales en ambas ecuaciones con  $d_y \neq 0$ , así, para cada  $t \in \mathbb{R}$  con la condición anterior, tenemos:

$$x_i(t) = p_{ix} + td_x, \quad y_i(t) = p_{iy} + td_y, \quad z_i(t) = p_{iz} + td_z.$$

Cada punto del conjunto  $\tilde{\varphi}(\mathcal{L}_i)$  está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_i(t), y_i(t), z_i(t)) &= \mathcal{F}(y_i(t)) \begin{bmatrix} ay_i(t) - bx_i(t) \\ cy_i(t) - bz_i(t) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(y_i(t)) \begin{bmatrix} a(p_{iy} + td_y) - b(p_{ix} + td_x) \\ c(p_{iy} + td_y) - b(p_{iz} + td_z) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(y_i(t)) \begin{bmatrix} (ap_{iy} - bp_{ix}) + (ad_y - bd_x)t \\ (cp_{iy} - bp_{iz}) + (cd_y - bd_z)t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{S}$ , un punto de las rectas que se encuentre muy lejos del observador, está dado por un valor de  $|t|$  muy grande. Consideremos  $t > 0$  con la condición anterior para determinar el comportamiento de rectas en la sección.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_i(t), y_i(t), z_i(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(y_i(t)) \begin{bmatrix} (ap_{iy} - bp_{ix}) + (ad_y - bd_x)t \\ (cp_{iy} - bp_{iz}) + (cd_y - bd_z)t \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

para determinar el límite en (2.10) primero distribuimos el límite en cada componente [6, teorema 3.8],

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_i(t), y_i(t), z_i(t)) = \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(ap_{iy} - bp_{ix}) + (ad_y - bd_x)t}{p_{iy} + td_y - b} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(cp_{iy} - bp_{iz}) + (cd_y - bd_z)t}{p_{iy} + td_y - b} \end{bmatrix}$$

notamos que para hallar el límite en cada componente debemos utilizar la regla de L'Hôpital [5, teorema 7.8.2], verifiquemos que se cumplen las condiciones para aplicarlo:

- Las funciones  $(ap_{iy} - bp_{ix}) + (ad_y - bd_x)t$  y  $p_{iy} + td_y - b$  son diferenciables para toda  $t > b$ .
- $\frac{d}{dt}(p_{iy} + td_y - b) = d_y \neq 0$ .
- Análogo para la componente  $\tilde{z}$ .

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_i(t), y_i(t), z_i(t)) &= \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(ap_{iy} - bp_{ix}) + (ad_y - bd_x)t}{p_{iy} + td_y - b} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(cp_{iy} - bp_{iz}) + (cd_y - bd_z)t}{p_{iy} + td_y - b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ad_y - bd_x}{d_y} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{cd_y - bd_z}{d_y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{ad_y - bd_x}{d_y} \\ \frac{cd_y - bd_z}{d_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{bd_x}{d_y} \\ c - \frac{bd_z}{d_y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

El límite en (2.11) converge y no depende las  $i$ , lo cual quiere decir que las imágenes convergen al mismo punto.

□

En la prueba se tomó  $t > 0$  lo cual implicó considerar  $t \rightarrow \infty$  y posteriormente aplicar la regla de L'Hôpital para  $t > b$ ; sin embargo, se puede considerar  $t < 0$ , así,  $t \rightarrow -\infty$  y de forma análoga aplicar la regla de L'Hôpital para  $t < b$  y llegar al mismo resultado, pero ¿cómo se puede interpretar este hecho físicamente? Lo que sucede es que puntos alejados del observador pueden situarse en dos semiespacios cuyo borde es el plano paralelo a la sección pasando por el observador. Si  $t \rightarrow \infty$  y los puntos determinados por  $t$  están por delante del observador, entonces cuando  $t \rightarrow -\infty$  se determinan los puntos que están detrás del observador. De igual manera, si  $t \rightarrow \infty$  y los puntos determinados por  $t$  están por detrás del observador, entonces cuando  $t \rightarrow -\infty$  se obtienen los puntos que están por delante del observador. En cualquier situación todos los puntos en las rectas paralelas, entre más alejados estén del observador, su representación estará más cerca a un mismo punto en  $\mathcal{S}$ . Esto último motiva el estudio del concepto de *punto de fuga*.

### 2.3.1 Puntos de fuga

La proposición 2.14 establece una relación entre rectas paralelas, la cuál está dada por tener un punto en común al cual convergen. Este punto lo relacionamos con el infinito en términos visuales y nos presenta una ilusión de lejanía a medida que nos aproximamos a este punto a través de las rectas.

En esta sección estudiaremos el concepto de punto de fuga, se describen tres puntos de fuga principales y nos preguntaremos cuántos puntos de fuga existen. El concepto de punto de fuga es bien conocido en perspectiva (ver [4] y [7]), a continuación los definimos en términos matemáticos.

**Definición 2.15.** *Un punto de fuga es un punto  $V_{\mathbf{d}}$  en  $\mathcal{S}$ , en el cual las imágenes de las rectas paralelas con vector director  $\mathbf{d}$  dadas en  $\mathbb{P}^3$  y no paralelas a  $\mathcal{S}$ , convergen a  $V_{\mathbf{d}}$ .*

La notación  $V_{\mathbf{d}}$  hace referencia a que es el punto de fuga de toda recta con vector director  $\mathbf{d}$ , y bajo las condiciones de la proposición 2.14 tenemos que

$$V_{\mathbf{d}} = \left( a - \frac{bd_x}{d_y}, c - \frac{bd_z}{d_y} \right)$$

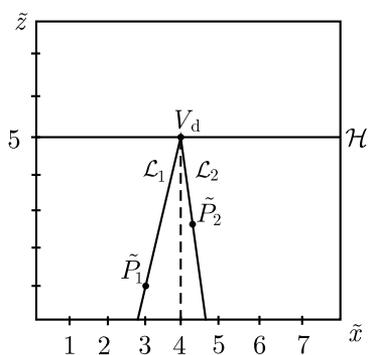


Figura 2.11.

**Ejemplo 2.16.** Dibujar las rectas paralelas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  con vector director  $\mathbf{d} = (1, 2, 0)$  y que pasan por los puntos  $P_1 = (3, 0, 1)$  y  $P_2 = (6, 3, 1)$ , respectivamente, para un observador  $Q = (2, -4, 5)$ .

Vamos a encontrar las representaciones de  $P_1$  y  $P_2$ , luego, utilizando la proposición 2.14 unimos por medio de semirrectas estos puntos con el punto de fuga  $V_d$ . A partir de las ecuaciones 2.5 se obtiene:

$$\tilde{P}_1 = (3, 1), \quad \tilde{P}_2 \approx (4.29, 2.71)$$

y

$$V_d = V_{(1,2,0)} = \left( 2 - \frac{(-4)1}{2}, 5 - \frac{(-4)0}{2} \right) = (4, 5)$$

(ver figura 2.11).

Existen puntos de fuga con mayor relevancia en el estudio de la perspectiva, como lo es el punto de fuga  $V_{(0,1,0)}$ ; es decir, el punto en  $\mathcal{S}$  donde convergen dos o más rectas ortogonales a la sección y paralelas entre sí. A este punto lo denotaremos simplemente por  $V$

$$V_d = V_{(0,1,0)} = V$$

Según la proposición 2.14 para  $\mathbf{d} = (0, 1, 0)$  se tiene:

$$V = \left( a - \frac{b \cdot 0}{1}, c - \frac{b \cdot 0}{1} \right) = (a, c),$$

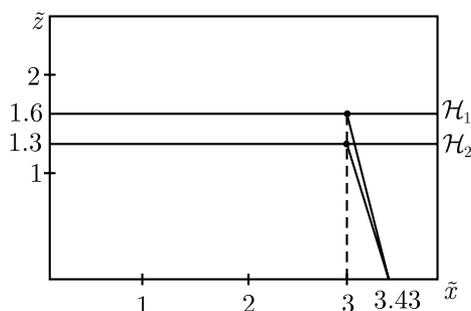


Figura 2.12.

esto quiere decir que la imagen de toda recta ortogonal a  $\mathcal{S}$  convergerá al punto  $V = (a, c)$ , el cual corresponde precisamente a las coordenadas  $x$  y  $z$  del observador. Este fenómeno lo podemos percibir cuando observamos unos rieles de una vía de trenes donde ellos son rectas paralelas en todo el trayecto; sin embargo, a lo lejos los rieles están cada vez más cerca, visualmente, uno del otro, los cuales se unen en un punto muy lejano del observador, pero si nos movemos de posición, ya sea hacia arriba o hacia abajo, hacia un lado o hacia el otro, ese punto donde convergen también se desplaza con nosotros, por ejemplo si nos sentamos, notamos que el punto de fuga también se baja, y no solo lo percibimos en las vías del tren sino que también en toda edificación que posea rectas paralelas a nuestro eje de visión. También podemos notar que el punto de fuga ocurre justamente en el horizonte, ya que  $V = (a, c)$  y por tanto  $V \in \mathcal{H}$ . Veamos esto con un ejemplo más explícito.

**Ejemplo 2.17.** Supongamos que un observador está en  $x = 3$  m,  $y = -15$  m,  $z = 1.60$  m para cierto sistema de referencia, el cual está de pie sobre un riel ubicado sobre una recta que pasa por el punto  $(3, 0, 0)$  y de vector director  $(0, 1, 0)$  en una vía de trenes y vamos a dibujar tales rieles en un soporte plano y ortogonal a los rieles. Dibujar los rieles sabiendo que la distancia entre ellos es de 1.4335 m, dibujar nuevamente los rieles si el observador está sentado y su componente  $z = 1.30$  m.

Para el primer caso hallaremos primero al punto de fuga

$$V = (a, c) = (3 \text{ m}, 1.6 \text{ m})$$

el dibujo del primer riel solo será unir el punto  $P = (3, 0, 0)$  m (intersección del riel con la vía) y el punto  $V$  (fig 2.12). Para dibujar el otro riel sabemos que en  $\mathcal{S}$  las distancias se preservan, por lo cual el punto de intersección del otro riel con  $\mathcal{S}$  es  $P_2 = (3 + 1.4335, 0, 0)$  m =  $(4.4335, 0, 0)$  m y uniendo este punto con  $V$  tenemos el otro riel.

Ahora para el segundo caso

$$V = (3 \text{ m}, 1.3 \text{ m})$$

para el dibujo de los rieles es suficiente unir los puntos encontrados anteriormente  $P_1$  y  $P_2$  con  $V$ .

En el anterior ejemplo no se hizo uso de la componente  $b$  del observador, cuando se representan objetos que se encuentran muy distantes del observador y sus representaciones están cerca de  $V$ , el valor de  $b$  no altera en medida significativa el valor a representar, por lo cual tendrá una representación casi igual, si el observador se encuentra más retirado de la sección que al inicio.

Una consecuencia inmediata de la proposición 2.14 es la siguiente:

**Corolario 2.18.** *Toda imagen de rectas paralelas entre sí y paralelas al plano de tierra, pero no a  $\mathcal{S}$ , tienen a su respectivo punto de fuga en  $\mathcal{H}$ .*

**Demostración.** Sea  $V_{\mathbf{d}}$  el punto de fuga de un conjunto de rectas con vector director  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, 0)$ . Luego, por la proposición 2.14 tenemos que

$$V_{\mathbf{d}} = V_{(d_x, d_y, 0)} = \left( a - \frac{bd_x}{d_y}, c \right) \in \mathcal{H}. \quad \square$$

Dos puntos de fuga de gran importancia en la perspectiva, son los  $V_{\mathbf{d}}$  donde  $\mathbf{d} = (\pm 1, 1, 0)$ , estas rectas forman un ángulo de  $45^\circ$  con  $\mathcal{S}$ , además son paralelas al plano de tierra, estos dos puntos los denotaremos por  $V_{-1}$  y  $V_1$ , donde

$$V_{-1} = V_{(-1, 1, 0)} = (a + b, c) \quad \text{y} \quad V_1 = V_{(1, 1, 0)} = (a - b, c)$$

estos puntos son equidistantes a  $V$ ; de hecho, la distancia de cualquiera de ellos a  $V$  es la misma distancia que hay entre el observador y  $\mathcal{S}$ , esto lo podemos verificar de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} \text{distancia}(V_1, V) &= \sqrt{(a - (a - b))^2 + (c - c)^2} \\ &= \sqrt{(-b)^2} = |b|, \end{aligned}$$

de manera análoga se tiene para la distancia  $(V_{-1}, V) = |b|$ .

Veamos un ejemplo de cómo utilizarlos.

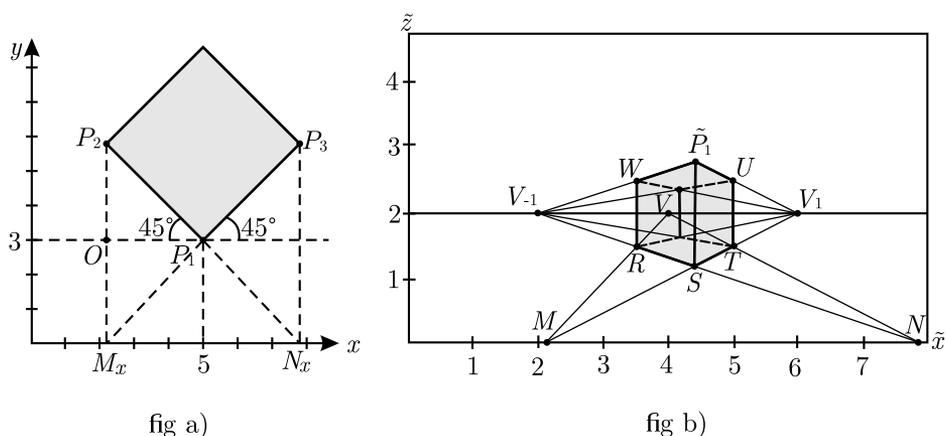


Figura 2.13.

**Ejemplo 2.19.** Un cubo ubicado sobre el plano de tierra tiene como longitud de lado 4 unidades, y uno de sus dos vértices más cercanos a  $\mathcal{S}$  tiene coordenadas  $P_1 = (5, 3, 4)$ . El cubo está colocado de tal forma que dos de sus caras están a  $45^\circ$  con  $\mathcal{S}$ . Dibujar el cubo para un observador  $Q = (4, -2, 2)$ .

Para realizar este dibujo podemos hacer un esquema de la situación, representando el cubo con su proyección ortogonal, con la información dada, como en la figura 2.13a. Lo primero que debemos hacer es encontrar la componente  $x$  de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , para ello usaremos el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\overline{OP_1}^2 &= 4^2 - \overline{OP_2}^2 \\ 2\overline{OP_1}^2 &= 16 \\ \overline{OP_1} &= \sqrt{\frac{16}{2}} = 2\sqrt{2},\end{aligned}$$

luego

$$M_x = 5 - 2\sqrt{2} \approx 2.17 \quad \text{y para la componente de } P_2, \quad N_x = 5 + 2\sqrt{2} \approx 7.83$$

Ahora en la sección dibujamos la línea de horizonte  $\mathcal{H}$ , esto es,  $\tilde{z} = 2$ , y ubicamos en ella los puntos de fuga  $V_{-1}, V, V_1$ , donde

$$V_{-1} = (2, 2), \quad V = (4, 2), \quad V_1 = (6, 2)$$

(fig 2.13b), posteriormente hallamos la representación del punto  $P_1$ , así tenemos que

$$\tilde{P}_1 = (4.4, 2.8),$$

luego trazamos los segmentos,  $\overline{\tilde{P}_1 V_{-1}}$  y  $\overline{\tilde{P}_1 V_1}$ , que son segmentos que representan a dos semirrectas ortogonales que pasan por  $\tilde{P}_1$  y que forman un ángulo de  $45^\circ$  con  $\mathcal{S}$ , trazamos los segmentos  $\overline{V_{-1} N}$  y  $\overline{V_1 M}$  que son paralelos a los segmentos  $\overline{\tilde{P}_1 V_{-1}}$  y  $\overline{\tilde{P}_1 V_1}$  respectivamente, dado que convergen a los puntos de fuga  $V_{-1}$  y  $V_1$ , la intersección de estos dos segmentos es el punto  $S$ . Ahora, tomamos los segmentos  $\overline{NV}$  y  $\overline{MV}$  que son segmentos que representan semirrectas paralelas entre sí y ortogonales a  $\mathcal{S}$  ya que convergen en  $V$ , la intersección de estos segmentos con los segmentos  $\overline{V_1 M}$  y  $\overline{V_{-1} N}$  los marcamos como  $T$  y  $R$ , respectivamente. En  $T$  trazamos un segmento vertical hasta  $U$ , y de igual manera hallamos  $W$  por medio de  $R$ . Así los puntos  $\tilde{P}_1, U, T, S, R, W$ , son los 6 vértices visibles del cubo para el observador  $Q$  y los cuales son suficientes para dibujarlo.

Continuando con el estudio de puntos de fuga, para la representación gráfica de elevaciones o depresiones, encontraremos estos puntos sobre la recta que pasa por el punto  $(a, 0, 0)$  y de vector director  $(0, 0, 1)$ . En esta recta estarán los puntos de fuga de las rectas con vectores directores  $\mathbf{d} = (0, d_y, d_z)$ , así, cualquier punto de fuga es de la forma

$$\left( a, c - \frac{bd_z}{d_y} \right)$$

y de manera análoga a como se obtuvo  $V_{\pm 1}$  se tiene que

$$V_{(0,1,1)} = (a, c - b), \quad V_{(0,1,-1)} = (c, c + b)$$

donde

$$\text{distancia}(V_{(0,1,1)}, V) = \text{distancia}(V_{(0,1,-1)}, V) = |b|.$$

Para trabajar con depresiones y elevaciones, cuando no se tiene de manera explícita el vector director, es conveniente trabajar con ángulos mediante el siguiente método:

1. Trazamos la línea de horizonte y los puntos de fuga  $V, V_1$ .
2. Trazamos la vertical  $\tilde{x} = a$  que pasa por  $V$ .
3. Trazamos  $V_1 F$  formando el ángulo  $\theta$ , con  $F$  en la recta  $\tilde{x} = a$ .
4. El punto  $F$  es el punto en el cual fugan las rectas con ángulo de elevación (o depresión)  $\theta$ .

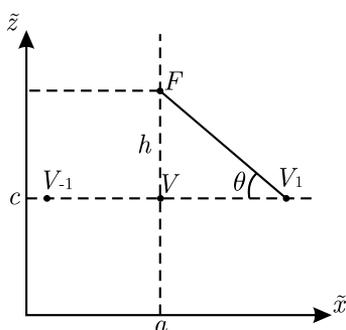


Figura 2.14.

Este método es conocido y usado en perspectiva; dado nuestro interés matemático de un lenguaje moderno respecto al tema, debemos justificarlo con nuestros resultados.

En efecto: sea  $\mathcal{L}$  un segmento que pasa por  $V_{\pm 1}$  y con ángulo de elevación (depresión)  $\theta$  con respecto a la recta  $\tilde{z} = c$ , (fig 2.14). Se desea encontrar la coordenada  $\tilde{z}$  del punto intersección de  $\mathcal{L}$  con  $\tilde{x} = a$ , el cual lo denotaremos por  $F$ . Se demostrará que el punto  $F$  es precisamente el punto de fuga de las rectas con vector director  $\mathbf{d} = (0, d_y, d_z)$ .

Se relaciona el ángulo  $\theta$  con el vector director  $\mathbf{d}$ , esto es

$$\tan(\theta) = \frac{d_z}{d_y}.$$

Si  $h$  es la distancia entre  $V$  y  $F$ , y dado que la distancia entre  $V_{\pm 1}$  y  $V$  es  $|b|$ , se tiene que

$$\frac{h}{|b|} = \tan(\theta) = \frac{d_z}{d_y},$$

así

$$h = |b| \frac{d_z}{d_y} = -b \frac{d_z}{d_y},$$

por lo tanto, la componente  $\tilde{z}$  de  $F$  está dada por

$$\tilde{z} = c + h = c - b \frac{d_z}{d_y},$$

y como  $F$  está en  $\tilde{x} = a$ , se sigue que  $F = \left(a, c - b \frac{d_z}{d_y}\right)$  lo cual corresponde al punto de fuga de rectas con vectores directores de la forma  $\mathbf{d} = (0, d_y, d_z)$ .

Hasta el momento se estudiaron tres puntos de fuga,  $V$ ,  $V_{-1}$ , y  $V_1$ , según la definición 2.15 pueden existir “muchos” de estos puntos de fuga. Si tomamos un conjunto de vectores directores  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$  no paralelos, encontramos un conjunto de puntos de fuga  $V_{\mathbf{d}_1}, V_{\mathbf{d}_2}, \dots, V_{\mathbf{d}_n}$  correspondiente a cada vector director, por lo tanto podríamos considerar un conjunto infinito de vectores directores que no sean paralelos entre sí, y de esta manera inferir que existen infinitos puntos de fuga; sin embargo, nos podemos preguntar ¿qué tipo de infinito es?

**Teorema 2.20.** *El conjunto de todos los puntos de fuga en  $\mathcal{S}$  es un conjunto infinito y de cardinalidad igual al conjunto de los reales.*

**Demostración.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador y  $\mathcal{V}$  el conjunto de todos los puntos de fuga en  $\mathcal{S}$ , veamos que  $\mathcal{V} = \mathcal{S}$ .

Por la definición 2.15 de punto de fuga se tiene que

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}. \quad (2.12)$$

Ahora sea  $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S}$ , de esta manera  $\tilde{x}, \tilde{z} \in \mathbb{R}$ . Definimos el vector director

$$\mathbf{d} = \left( \frac{a - \tilde{x}}{b}, 1, \frac{c - \tilde{z}}{b} \right)$$

donde  $b \neq 0$  ya que  $Q \notin \mathcal{S}$ .

Como el vector  $\mathbf{d}$  no es ortogonal al vector normal de  $\mathcal{S}$ , podemos hallar el punto de fuga de las rectas con vector director  $\mathbf{d}$ , así

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{d}} &= \left( a - \frac{b(a - \tilde{x})}{b}, c - \frac{b(c - \tilde{z})}{b} \right) \\ &= (\tilde{x}, \tilde{z}), \end{aligned}$$

lo cual implica que  $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{V}$  y de este modo se tiene que

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}. \quad (2.13)$$

2.12 y 2.13 implican que  $\mathcal{V} = \mathcal{S}$ , dado que la cardinalidad de  $\mathcal{S}$  es igual a la cardinalidad de  $\mathbb{R}^2$  y  $|\mathbb{R}^2| = 2^{\aleph_0}$  donde  $\aleph_0$  es el cardinal del conjunto de los números naturales, afirmamos que  $|\mathcal{V}| = 2^{\aleph_0}$ .  $\square$

**Corolario 2.21.** *En la línea de horizonte hay tantos puntos de fuga como en la sección.*

## Capítulo 3

# Perspectiva de curvas y superficies

En la naturaleza predominan figuras con formas curvas, mucho más que las rectas. el desafío de dibujarlas en perspectiva, a su vez, genera mayor dificultad debido a las ecuaciones que se asocian a estas curvas, las cuales no son tan sencillas como la ecuación de una recta.

Uno de los retos de la perspectiva es la representación correcta de una circunferencia, hecho que ha constituido la creación de métodos para su construcción, sin embargo, estos métodos por lo general están basados en la inscripción o circunscripción de una circunferencia en un cuadrado que posteriormente se lleva a perspectiva, por lo cual, no dejan de ser una aproximación a lo que sería una circunferencia en perspectiva. Este es un caso de los muchos que plantean las figuras dadas por curvas no rectas.

En el capítulo anterior se estudió la representación de puntos, segmentos, rectas y toda figura que se pueda formar con estos elementos. En este capítulo estudiaremos las curvas en general y las figuras cíclicas, para posteriormente hacer el estudio de las elipses donde se considera a la circunferencia como un caso particular.

### 3.1 Imágenes de curvas

La sección  $S$  será el plano  $xz$ , el cual es ortogonal al eje de visión. Iniciamos nuestro estudio con la definición de una curva en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , la cual involucra los conceptos de curvas paramétricas y funciones vectoriales. Las definiciones de este capítulo se encuentran en [5, capítulos 9 y 11].

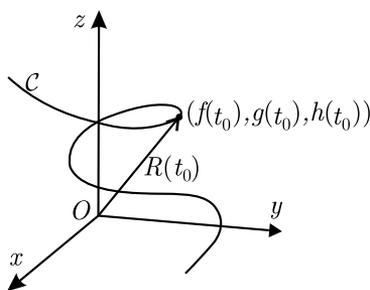


Figura 3.1.

**Definición 3.1.** Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones continuas de valores reales en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Llamamos **curva en el espacio tridimensional** al conjunto

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = f(t), y = g(t), z = h(t)\} \quad \text{donde } t \in I$$

En ocasiones, denotaremos la curva  $\mathcal{C}$  por  $\mathcal{C}(t)$  para hacer referencia al parámetro  $t$ . Notemos que, según la definición, cualquier función vectorial continua  $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$  definida en  $I$  es una curva en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , ya que el para  $t = t_0 \in I$ ,  $\mathbf{R}(t_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0)) \in \mathcal{C}$ , (fig 3.1).

Para iniciar nuestro estudio de curvas en perspectiva, consideremos el siguiente conjunto

$$I_{\mathbb{P}} := \{t \in I \mid (f(t), g(t), h(t)) \in \mathbb{P}^3\} \subseteq I.$$

Para  $P \in \mathcal{C}$  tal que exista  $t \in I_{\mathbb{P}}$  con  $P = (f(t), g(t), h(t))$ , La representación de  $P$  en  $\mathcal{S}$  está dada por la expresión

$$\tilde{\varphi}(P) = \tilde{\varphi}(f(t), g(t), h(t)) = \mathcal{F}(g(t)) \begin{bmatrix} ag(t) - bf(t) \\ cg(t) - bh(t) \end{bmatrix} \quad \text{para } t \in I_{\mathbb{P}}.$$

Surge la pregunta ¿Cómo puedo encontrar el conjunto  $I_{\mathbb{P}}$ ? Si  $\mathcal{S}$  es un plano bajo las mismas hipótesis sobre las cuales estamos trabajando, tenemos de la expresión en (2.1) que  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{A}$  con  $\mathbb{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = b\}$  donde  $Q = (a, b, c)$  es el observador, por lo cual los valores de  $t$  que no debemos considerar son aquellos que satisfacen que  $g(t) = b$ . De esta manera podemos expresar a  $I_{\mathbb{P}}$  como

$$I_{\mathbb{P}} = \{t \in I \mid g(t) \neq b\}.$$

Hallar los valores de  $t$  en los cuales  $g(t) = b$  puede ser difícil según la expresión de la función  $g(t)$ , y quizá se necesite de métodos numéricos para hallarlos. Se recomienda considerar (cuando sea posible) una curva  $\mathcal{C}$  definida en un intervalo  $I$  de tal manera que  $g(t) \geq 0$ , esto garantizaría que  $I = I_{\mathbb{P}}$ .

Si  $g(t) \neq b$  es continua para todo  $t \in I$ , entonces  $I_{\mathbb{P}} = I$ . Dado que  $\mathcal{F}$  es continua en  $\mathbb{P}^3$  la compuesta  $\mathcal{F}(g(t))$  es continua en  $\mathbb{P}^3$  y de valor real. Las funciones  $ag(t) - bf(t)$  y  $cg(t) - bh(t)$  son continuas y de valores reales para  $t \in I_{\mathbb{P}}$ , así las funciones  $\mathcal{F}(g(t))(ag(t) - bf(t))$  y  $\mathcal{F}(g(t))(cg(t) - bh(t))$  son continuas y de valor real para  $t \in I_{\mathbb{P}}$ ; considerando la función compuesta  $\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\varphi} \circ C_t$  ( $C_t$  es la curva restringida al intervalo  $I_{\mathbb{P}}$ ) donde

$$C_t: I_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{P}^3 \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}: \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathcal{S},$$

tenemos que

$$\tilde{\mathcal{C}}: I_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

Esto permite enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador y  $g$  una función continua de valor real tal que  $g(t) \neq b$  para todo  $t \in I$ , entonces la imagen en  $\mathcal{S}$  de una curva  $\mathcal{C} := \{(f(t), g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I_{\mathbb{P}}\}$  con  $f$  y  $h$  continuas es una curva  $\tilde{\mathcal{C}}$  en  $\mathcal{S}$  bajo el mismo parámetro  $t$ , donde

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S} \mid \tilde{x} = \mathcal{F}(g(t))(ag(t) - bf(t)), \tilde{z} = \mathcal{F}(g(t))(cg(t) - bh(t))\}.$$

Este resultado permite representar figuras complejas de una manera relativamente fácil, solo variando el parámetro  $t$  en el intervalo  $I_{\mathbb{P}}$ , ya que la representación del punto  $(f(t), g(t), h(t))$  en el instante  $t$  corresponde al valor  $(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t))$ .

**Ejemplo 3.3.** Dibujar la curva  $\mathcal{C}$  definida por las ecuaciones paramétricas

$$f(t) = 2 + e^{-t}\cos(10t) \quad g(t) = 1 + e^{-t}\sin(10t) \quad h(t) = e^{-t}$$

para  $t \in [0, 6]$  y un observador en  $(2, -6, 4)$ .

$t$	$\tilde{x}$	$\tilde{z}$
0.0	2.86	1.43
0.5	2.16	0.83
1.0	1.73	0.80
1.5	1.86	0.83
2.0	2.05	0.74
2.5	2.07	0.64
3.0	2.01	0.59
3.5	1.98	0.59
4.0	1.99	0.59
4.5	2.00	0.59
5.0	2.01	0.58
5.5	2.00	0.57

**Tabla 3.1.** Valores para un observador  $(2, -6, 4)$ .

Determinemos  $I_{\mathbb{P}}$ , observamos que

$$g(t) = 1 + e^{-t}\sin(10t) \geq 0$$

para  $t \in [0, 6]$ , pues  $-1 \leq \sin(10t) \leq 1$  y  $0 < e^{-t} \leq 1$  para  $t \geq 0$  lo que quiere decir que  $-1 \leq e^{-t}\sin(10t) \leq 1$ . De esta manera  $I_{\mathbb{P}} = I = [0, 6]$ .

Ahora, debemos hallar las ecuaciones paramétricas que definen  $\tilde{\mathcal{C}}$ , para ello hacemos uso de la proposición 3.2, por lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \mathcal{F}(g(t))(ag(t) - bf(t)) \\ &= \frac{a(1 + e^{-t}\sin(10t)) - b(2 + e^{-t}\cos(10t))}{1 + e^{-t}\sin(10t) - b} \\ &= \frac{2e^{-t}\sin(10t) + 6e^{-t}\cos(10t) + 14}{e^{-t}\sin(10t) + 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) &= \mathcal{F}(g(t))(cg(t) - bh(t)) \\ &= \frac{c(1 + e^{-t}\sin(10t)) - be^{-t}}{1 + e^{-t}\sin(10t) - b} \\ &= \frac{4e^{-t}\sin(10t) + 6e^{-t} + 4}{e^{-t}\sin(10t) + 7}, \end{aligned}$$

así, podemos dar algunos valores de  $t$  para tener una aproximación de la figura, estos datos se ven resumidos en la tabla 3.1.

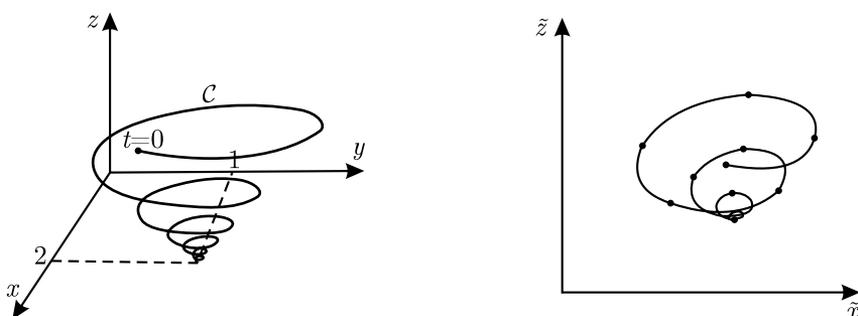


Figura 3.2.

Por último, podemos ver el resultado en la figura 3.2.

Un ejemplo clásico en los libros de perspectiva es la realización de una escalera en espiral, debido a que esta presenta un grado de dificultad, en este caso lo exponemos como una aplicación de la proposición 3.2.

**Ejemplo 3.4. (escalera en espiral)** Dibujar una escalera en espiral con las siguientes dimensiones en centímetros: los escalones tienen una abertura de  $30^\circ$  y una altura de 20, la forma circular o dodecagonal de su base tiene como radio 100 de centro  $(100,100,0)$ , para un observador en  $(100, -100, 170)$ .

Hacemos un esquema de la información dada. En la figura 3.3a vemos la proyección ortogonal en el plano de planta donde tenemos los escalones  $A, B, C, \dots$  y en la figura 3.3b tenemos un esquema de los escalones donde se

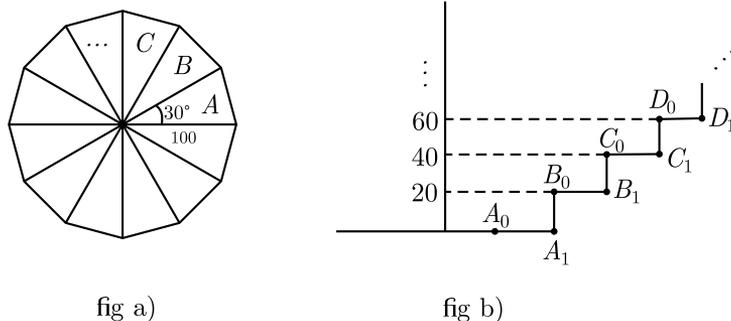


Figura 3.3.

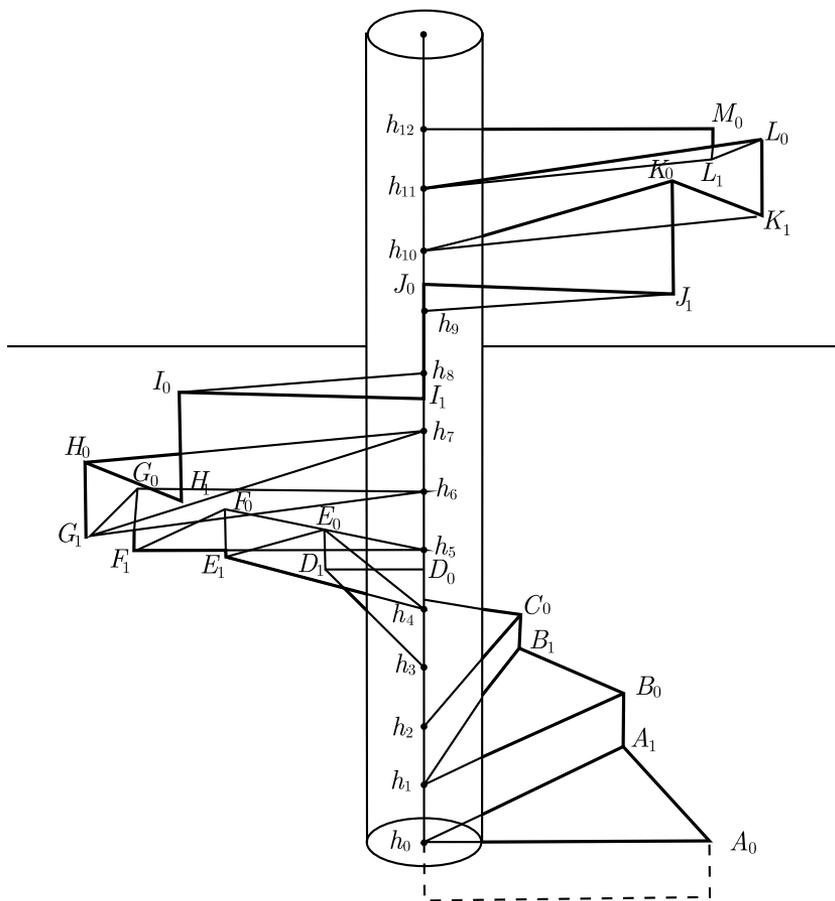


Figura 3.4.

relacionan con sus respectivas alturas. Así el escalón  $A = A_0A_1$ ,  $B = B_0B_1$ ,  $C = C_0C_1, \dots$  donde  $A_1B_0 = B_1C_0 = \dots = 20$ .

Iniciamos dibujando una vertical que represente el eje central de la escalera, como esta está en el centro necesariamente contiene al punto  $(100, 100, 0)$ , así trazamos una vertical en  $\mathcal{S}$  que pasa por  $\tilde{\varphi}(100, 100, 0) = (100, 85) = h_0$ , y a partir de este punto marcamos las alturas de los escalones en la vertical,

$$\tilde{\varphi}(100, 100, i) = h_i \quad \text{con } i = 20, 40, 60, \dots$$

donde  $h_1 = (100, 95)$ ,  $h_2 = (100, 105)$ ,  $h_3 = (100, 115), \dots$  los cuales van aumentando de forma constante en su componente  $\tilde{z}$  con un factor de 10 (fig 3.4).

Punto	$t_0$	$\tilde{x}_0$	$\tilde{z}_0$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{z}_1$	$t_1$
<i>A</i>	0	150.0	85.0	134.6	102.0	1
<i>B</i>	1	134.6	110.0	117.4	117.7	2
<i>C</i>	2	117.4	124.6	100.0	126.7	3
<i>D</i>	3	100.0	133.3	82.6	131.6	4
<i>E</i>	4	82.6	138.6	65.4	134.0	5
<i>F</i>	5	65.4	142.0	50.0	135.0	6
<i>G</i>	6	50.0	145.0	42.3	136.7	7
<i>H</i>	7	42.3	150.0	55.9	143.5	8
<i>I</i>	8	55.9	161.2	100.0	160.0	9
<i>J</i>	9	100.0	180.0	144.1	178.8	10
<i>K</i>	10	144.1	196.5	157.7	190.0	11
<i>L</i>	11	157.7	203.3	150.0	195.0	12
<i>M</i>	12	150.0	205.0			

**Tabla 3.2.** Valores para un observador (100, -100, 170).

Luego, para determinar los extremos de los escalones  $A_0, A_1, B_0, B_1, \dots$  hacemos

$$f(t) = 100\cos(30^\circ t) + 100, \quad g(t) = 1000\sin(30^\circ t) + 100, \quad h(t) = 20t$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots$ , donde tenemos que  $I_{\mathbb{P}} = I = \mathbb{R}$ , pues  $g(t) \neq -100$  y  $g(t)$  es continua en  $I$ , luego por la proposición 3.2 tenemos que;

$$\tilde{\mathcal{C}} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \mathcal{F}(100 \sin(30^\circ t) + 100)(100^2 \sin(30^\circ t) + 100^2 \cos(30^\circ t) + 20000) \\ \tilde{z} = \mathcal{F}(100 \sin(30^\circ t) + 100)(17000 \sin(30^\circ t) + 2000t + 17000) \end{array} \right\}.$$

Por lo tanto los puntos  $A_0, B_0, C_0, \dots$  tienen como representación a  $\tilde{\mathcal{C}}(t_0)$ , con  $t_0 = 0, 1, 2, \dots$  y para los puntos  $A_1, B_1, C_1, \dots$  hacemos  $h(t) = 20(t - 1)$  y de este modo encontramos sus representaciones como  $\tilde{\mathcal{C}}(t_1)$  para  $t_1 = 1, 2, 3, \dots$ , estos resultados se presentan en la tabla 3.2.

Se unen los puntos  $A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, \dots$  y luego estos con los  $h_i$ . En

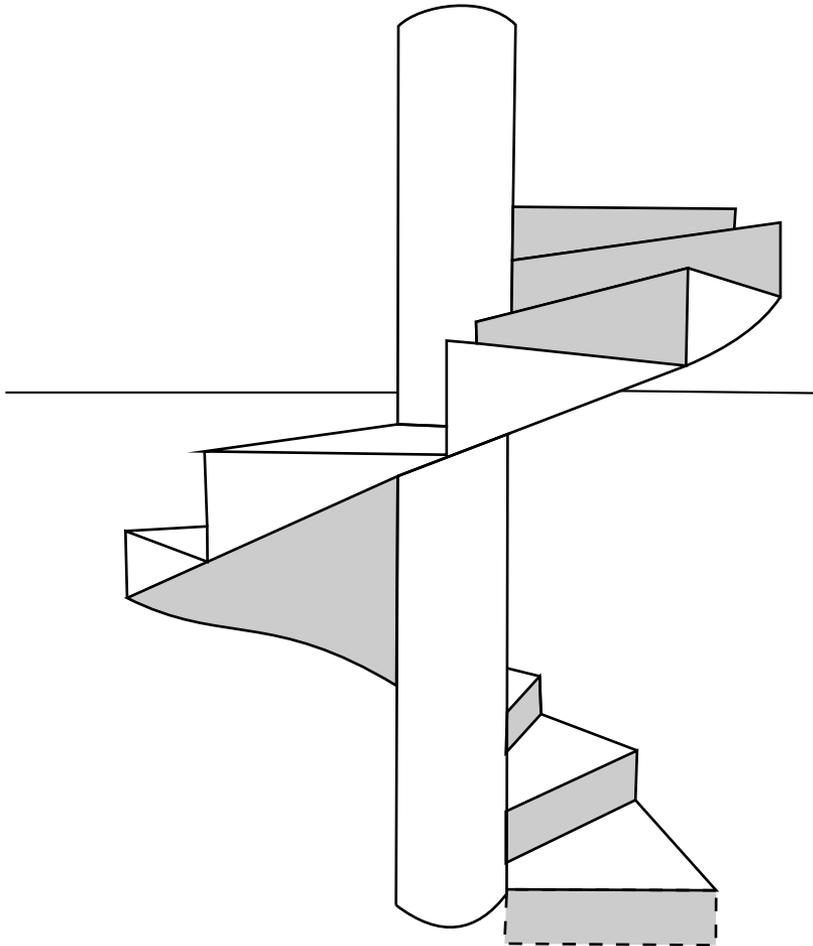


Figura 3.5.

la figura 3.5 presentamos la escalera en forma de dibujo acabado.

**Definición 3.5.** *Una curva plana en el espacio es una curva en el espacio  $\mathbb{R}^3$  que está contenida en un plano.*

Este tipo de curvas son un caso especial de la curva definida en (3.1). Dado que no es fácil encontrar parametrizaciones de curvas en el espacio con determinada forma, se puede construir una curva en el espacio tridimensional a partir de una curva en el espacio bidimensional. Con todo esto una curva que esté en un plano, se puede identificar con una curva en el espacio

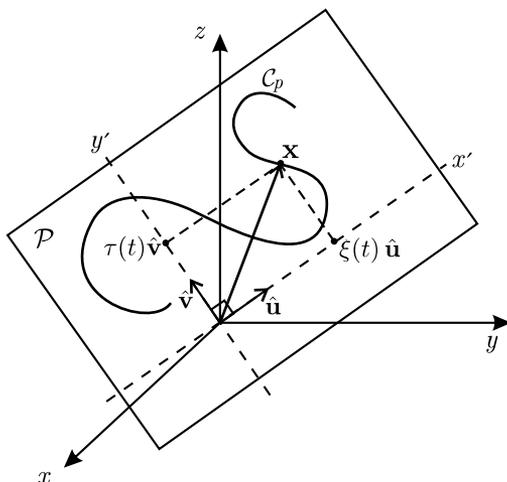


Figura 3.6.

tridimensional y así ésta puede ser dibujada en perspectiva.

**Proposición 3.6.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $C_p$  una curva determinada por ecuaciones paramétricas

$$x' = \xi(t) \quad y \quad y' = \tau(t) \quad \text{con } t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

donde  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$  es el plano de coordenadas  $x', y'$  que contiene a  $C_p$  y está determinado por los vectores  $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$  de posición, unitarios y ortogonales entre sí en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces si el origen del plano  $\mathcal{P}$  se traslada a un punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  se tiene que

$$\tilde{C}_p = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \left| \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \frac{x_0 + \xi(t)u_1 + \tau(t)v_1 - a}{y_0 + \xi(t)u_2 + \tau(t)v_2 - b} \\ c - b \frac{z_0 + \xi(t)u_3 + \tau(t)v_3 - c}{y_0 + \xi(t)u_2 + \tau(t)v_2 - b} \end{bmatrix} \right. \right\}$$

con  $t \in I_{\mathbb{P}}$ .

**Demostración.** Sean  $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$  ortogonales y unitarios. La ortogonalidad de estos dos vectores junto con el origen determinan un plano  $\mathcal{P}$  (fig 3.6). Se construyen dos rectas  $x'$  y  $y'$  que pasan por el origen y con vectores directores  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  respectivamente,  $x'$  y

$y'$  son ejes coordenados para el plano  $\mathcal{P}$  y en el cual está  $\mathcal{C}_p$  con ecuaciones paramétricas  $x' = \xi(t)$ ,  $y' = \tau(t)$  para  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ .

Definamos ecuaciones paramétricas para  $\mathcal{C}_p$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$  de tal forma que  $\mathcal{C}_p$  sea una curva en el espacio.

Como  $\mathcal{C}_p \subset \mathcal{P}$  y además  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  son unitarios, entonces podemos escribir los puntos de  $\mathcal{C}_p$  como

$$\mathbf{x} = \xi(t) \hat{\mathbf{u}} + \tau(t) \hat{\mathbf{v}} \quad \text{para } t \in I. \quad (3.1)$$

Si  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  entonces

$$x(t) = \xi(t) u_1 + \tau(t) v_1, \quad y(t) = \xi(t) u_2 + \tau(t) v_2, \quad z(t) = \xi(t) u_3 + \tau(t) v_3$$

donde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  son funciones de valor real y continuas, dado que  $\xi$  y  $\tau$  lo son por ser las ecuaciones paramétricas de la curva. Notemos que el origen del sistema de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  para el plano  $\mathcal{P}$  coincide con el origen de coordenadas en  $\mathbb{R}^3$ . Ahora, consideremos el punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y traslademos el origen de nuestro sistema de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  al punto  $\mathbf{p}_0$ , para esto, sumamos  $\mathbf{p}_0$  al lado derecho de (3.1)

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \xi(t) \hat{\mathbf{u}} + \tau(t) \hat{\mathbf{v}} \quad \text{para } t \in I,$$

de esta manera

$$\begin{aligned} f(t) &:= x_0 + \xi(t) u_1 + \tau(t) v_1 \\ g(t) &:= y_0 + \xi(t) u_2 + \tau(t) v_2 \\ h(t) &:= z_0 + \xi(t) u_3 + \tau(t) v_3, \end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas para la curva  $\mathcal{C}_p$  en el espacio tridimensional. Por la proposición (3.2) se sigue que

$$\tilde{\mathcal{C}}_p = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{array} \right] \in \mathcal{S} \left| \left[ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} a - b \frac{x_0 + \xi(t)u_1 + \tau(t)v_1 - a}{y_0 + \xi(t)u_2 + \tau(t)v_2 - b} \\ c - b \frac{z_0 + \xi(t)u_3 + \tau(t)v_3 - c}{y_0 + \xi(t)u_2 + \tau(t)v_2 - b} \end{array} \right] \right. \right\}$$

para  $t \in I_{\mathbb{P}}$ . □

### 3.1.1 Elipses y circunferencias en perspectiva

Las circunferencias siempre presentan un grado de dificultad al dibujarlas en perspectiva, y por lo general se hace un bosquejo o aproximación de su imagen perspectiva trazando una elipse. Los métodos tradicionales que suelen existir en perspectiva, son métodos de aproximación en los cuales se emplea un cuadrado en perspectiva y se inscribe de manera aproximada una circunferencia tomando forma elíptica, para este método se consideran diagonales que determinan puntos adicionales de la circunferencia para obtener una mejor aproximación de su imagen. Las dificultades de estos métodos aumentan dependiendo de la posición en la que se encuentre la circunferencia en el espacio, de manera más compleja resulta hallar la imagen en perspectiva de una elipse.

En esta sección abordaremos la circunferencia como un caso particular de la elipse, por lo cual nos concentraremos en hallar el conjunto imagen de la elipse.

**Definición 3.7.** *Una curva plana  $\mathcal{E}$  definida por las ecuaciones*

$$x' = \xi(t) \quad y \quad y' = \tau(t) \quad \text{con } \alpha \leq t \leq \beta$$

*se dice que es **cerrada** si el punto inicial  $A(\xi(\alpha), \tau(\alpha))$  y el punto terminal  $B(\xi(\beta), \tau(\beta))$  coinciden.*

Una elipse centrada en el origen es una curva cerrada  $\mathcal{E}$  definida por las ecuaciones

$$\xi(t) = r_1 \cos(t) \quad y \quad \tau(t) = r_2 \sin(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los semi-ejes de la elipse.

Si la curva  $\mathcal{E}$  es una circunferencia entonces  $r = r_1 = r_2$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia.

Como  $\mathcal{E}$  es una curva plana, por la proposición (3.6) tenemos el siguiente

resultado:

**Corolario 3.8.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $\mathcal{E}$  una elipse y  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$  un plano que contiene a  $\mathcal{E}$  y está determinado por los vectores  $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$  de posición, unitarios y ortogonales entre sí en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, si el origen del plano  $\mathcal{P}$  se traslada a un punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  se tiene que

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \left| \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \frac{x_0 + r_1 \cos(t)u_1 + r_2 \sin(t)v_1 - a}{y_0 + r_1 \cos(t)u_2 + r_2 \sin(t)v_2 - b} \\ c - b \frac{z_0 + r_1 \cos(t)u_3 + r_2 \sin(t)v_3 - c}{y_0 + r_1 \cos(t)u_2 + r_2 \sin(t)v_2 - b} \end{bmatrix} \right. \right\}$$

para  $t \in I_{\mathbb{P}}$ .

**Ejemplo 3.9.** Sea  $Q = (6, -2, 3)$  un observador y  $\mathcal{E}$  una elipse en el espacio con ecuaciones

$$\xi(t) = 3 \cos(t) \quad \text{y} \quad \tau(t) = 2 \sin(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

con centro en  $\mathbf{p}_0 = (4, 5, 3)$ , donde el semi-eje mayor tiene como vector director el vector  $\mathbf{u} = (2, 2, 0)$  y el semi-eje menor tiene como vector director al vector  $\mathbf{v} = (0, 0, 3)$ . Dibujar la elipse.

Como los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales, ya que son los vectores directores de los semi-ejes, consideremos los vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u} = (1, 1, 0), \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{3} (0, 0, 3) = (0, 0, 1),$$

según el corolario (3.8) tenemos que

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \left| \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 2 \frac{-2 + 3 \cos(t)}{7 + 3 \cos(t)} \\ 3 + 2 \frac{2 \sin(t)}{7 + 3 \cos(t)} \end{bmatrix} \right. \right\} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Algunos valores de  $t$  en  $[0, 2\pi]$  se muestran en la tabla (3.3), corresponden a puntos de la imagen de la elipse (fig 3.7).

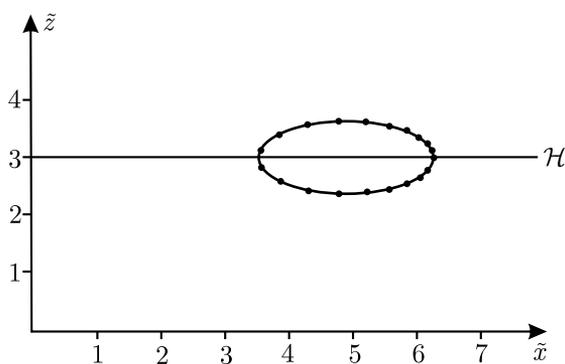


Figura 3.7. Elipse en perspectiva.

$t$	$\tilde{x}$	$\tilde{z}$
0.0	6.20	3.00
0.31	6.17	3.13
0.63	6.09	3.25
0.94	5.95	3.25
1.26	5.73	3.48
1.57	5.43	4.57
1.88	5.04	3.63
2.20	4.56	3.62
2.51	4.06	3.51
2.83	3.66	3.30
3.14	3.50	3.00
3.46	3.66	2.7
3.77	4.06	2.49
4.08	5.56	2.38
4.40	5.04	2.37
4.71	5.43	2.43
5.03	5.73	2.52
5.34	5.95	2.63
5.65	6.09	2.75
5.97	6.17	2.87

Tabla 3.3. Valores para un observador  $(6, -2, 3)$ .

Y para el caso de la circunferencia consideramos  $r = r_1 = r_2$ , por lo cual el corolario (3.8) se puede enunciar de la siguiente manera:

**Corolario 3.10.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $\mathcal{E}$  una circunferencia y  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$  un plano que contiene a  $\mathcal{E}$  y está determinado por los vectores

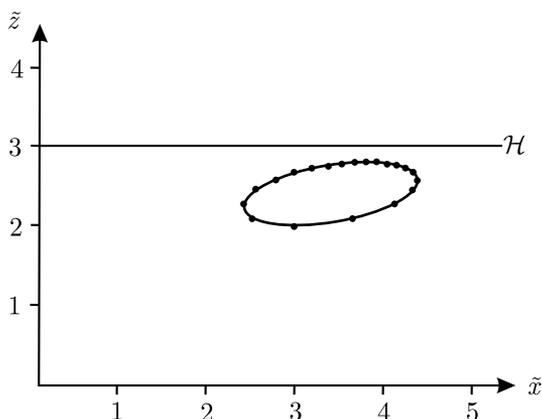


Figura 3.8. Circunferencia en perspectiva.

$\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$  de posición, unitarios y ortogonales entre sí en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, si el origen del plano  $\mathcal{P}$  se traslada a un punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  se tiene que

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \left| \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \frac{x_0 + r \cos(t)u_1 + r \sin(t)v_1 - a}{y_0 + r \cos(t)u_2 + r \sin(t)v_2 - b} \\ c - b \frac{z_0 + r \cos(t)u_3 + r \sin(t)v_3 - c}{y_0 + r \cos(t)u_2 + r \sin(t)v_2 - b} \end{bmatrix} \right. \right\}$$

para  $t \in I_{\mathbb{P}}$ .

**Ejemplo 3.11.** Sea  $Q = (4, -1, 3)$  un observador y  $\mathcal{E}$  una circunferencia con centro en el punto  $\mathbf{p}_0 = (3, 2, 2)$ , radio  $r = 2$ , contenida en un plano con vectores ortogonales y unitarios  $\hat{\mathbf{u}} = (1, 0, 0)$  y  $\hat{\mathbf{v}} = (0, 1, 0)$ . Dibujar la circunferencia  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

Utilizando el corolario (3.10) tenemos que

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \left| \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + \frac{2 \cos(t) - 1}{3 + 2 \sin(t)} \\ 3 - \frac{1}{3 + 2 \sin(t)} \end{bmatrix} \right. \right\}$$

Algunos valores de  $t$  en  $[0, 2\pi]$ , se presentan en la tabla (3.4), corresponden a puntos de la imagen de la circunferencia (fig 3.8).

$t$	$\tilde{x}$	$\tilde{z}$
0.00	4.33	2.67
0.31	4.00	2.79
0.63	3.58	2.79
0.94	3.00	2.67
1.26	2.42	2.21
1.57	4.00	2.21
1.88	4.33	2.67
2.20	4.00	2.79
2.51	3.58	2.79
2.83	3.20	2.72
3.14	3.00	2.67
3.45	2.78	2.58
3.77	2.57	2.45
4.08	2.43	2.28
4.40	2.52	2.09
5.34	4.12	2.27
6.65	4.34	2.45
5.97	4.38	2.58

**Tabla 3.4.** Valores para un observador  $(4, -1, 3)$ .

Cuando se observa un objeto en forma de circunferencia que se encuentra totalmente de frente a nosotros, por ejemplo, cuando miramos una llanta de un automóvil, un anillo o la circunferencia de una moneda, la circunferencia no se deforma, sigue siendo una circunferencia, solo que se encuentra a una escala en función de su lejanía con respecto a nosotros como observadores. Veamos este fenómeno con el siguiente análisis.

Sea  $\mathcal{E}$  una circunferencia con centro en  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y contenida en un plano paralelo a  $\mathcal{S}$  con  $y_0 \neq b$ , por lo cual los vectores unitarios y ortogonales que corresponden a este plano son

$$\hat{\mathbf{u}} = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{v}} = (0, 0, 1).$$

Si aplicamos el corolario 3.10 se obtienen los puntos que están en  $\tilde{\mathcal{E}}$ , los cuales tienen la forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \frac{x_0 + r \cos(t)u_1 - a}{y_0 - b} \\ c - b \frac{z_0 + r \sin(t)v_3 - c}{y_0 - b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{ay_0 - bx_0 - br \cos(t)}{y_0 - b} \\ \frac{cy_0 - bz_0 - br \sin(t)}{y_0 - b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{ay_0 - bx_0}{y_0 - b} - \frac{br \cos(t)}{y_0 - b} \\ \frac{cy_0 - bz_0}{y_0 - b} - \frac{br \sin(t)}{y_0 - b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{x}(x_0, y_0, z_0) + R \cos(t) \\ \tilde{z}(x_0, y_0, z_0) + R \sin(t) \end{bmatrix} \\
&= \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_0) + R \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \quad \text{donde } R = \frac{-br}{y_0 - b}, \quad (3.2)
\end{aligned}$$

notemos que (3.2) es la forma paramétrica de una circunferencia de centro  $\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_0)$  y radio  $R$ .

- i. Si  $y_0 \geq 0$ , entonces  $0 < R \leq r$  determinando la imagen de la circunferencia, la cual es menor que la original como era de esperar y  $R = r$  cuando  $y_0 = 0$ , indicando que conserva su tamaño si está contenida en la sección.
- ii. Si  $b < y_0 < 0$ , entonces  $r < R$ , obteniendo una imagen de la circunferencia mayor que la original.

Así, cuando se desee dibujar una circunferencia que se encuentre de frente hacia nosotros como observadores, solo bastará con hallar la representación de su centro y su radio, ya que a partir de estos obtenemos su centro en  $\mathcal{S}$  y su nuevo radio  $R$ .

## 3.2 Imágenes de superficies

Existen formas diferentes de representar una superficie en el espacio, puede ser: de manera explícita cuando la ecuación tiene la forma  $z = f(x, y)$ , de manera implícita cuando la ecuación tiene la forma  $F(x, y, z) = 0$  o se puede representar por medio de una parametrización.

Sea  $D$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{R}(s, t) = f(s, t)\mathbf{i} + g(s, t)\mathbf{j} + h(s, t)\mathbf{k}$  una función vectorial definida en  $D$  con valores en  $\mathbb{R}^3$  y  $f, g$  y  $h$  funciones continuas de valor real. La gráfica de  $\mathbf{R}(s, t)$  es la superficie en el espacio con **ecuaciones paramétricas**

$$x = f(s, t), \quad y = g(s, t), \quad z = h(s, t).$$

A una superficie descrita de esta forma se le llama **superficie paramétrica**.

**Ejemplo 3.12.** La ecuación implícita de un cono circular recto y su parametrización están dadas respectivamente por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0 \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x = \alpha t \cos(s), \quad y = \alpha t \sin(s), \quad z = t.$$

Ahora, nos concentraremos en hallar el conjunto imagen de una superficie paramétrica. Lo primero será definir un subconjunto de  $D$  el cual genere bajo  $\mathbf{R}$  puntos en  $\mathbb{P}^3$ , el cual está basado en el mismo concepto de  $I_{\mathbb{P}}$  que se definió para curvas.

Sea  $D$  el dominio de la función vectorial  $\mathbf{R}$ , definimos a

$$D_{\mathbb{P}} := \{(s, t) \in D \mid g(s, t) \neq b\} \subseteq D.$$

Esto implica que  $\mathbf{R}(D_{\mathbb{P}}) \subseteq \mathbb{P}^3$ , es decir, que el subconjunto de puntos que estén en la superficie y que deseemos dibujar se puedan representar.

**Proposición 3.13.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador y  $S$  una superficie paramétrica definida por una función vectorial  $\mathbf{R}(s, t) = f(s, t)\mathbf{i} + g(s, t)\mathbf{j} + h(s, t)\mathbf{k}$  con dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $g(s, t) \neq b$ . la imagen de  $S$  en  $\mathcal{S}$  está dado por

$$\tilde{S} = \{(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{S} \mid \tilde{x} = \mathcal{F}(g(s, t))(ag(s, t) - bf(s, t)), \tilde{z} = \mathcal{F}(g(s, t))(cg(s, t) - bh(s, t))\}$$

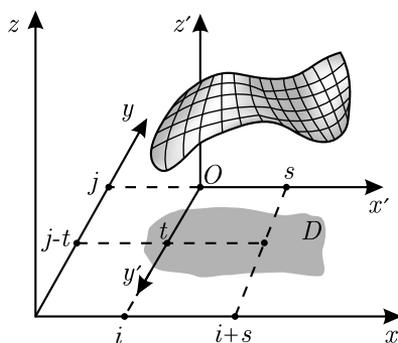
donde  $(s, t) \in D_{\mathbb{P}}$ .

Hay distintas formas de determinar un plano: una de ellas, es por medio de la ecuación en la que el plano queda determinado por un punto en el plano y un vector normal a dicho plano, la cual es

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

para un punto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  del plano y un vector normal al plano  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ; otra forma de representar el plano es en su forma paramétrica determinada por un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  que pertenece al plano y dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no paralelos entre sí contenidos en el plano, su ecuación paramétrica está dada por

$$\mathcal{P}: \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \quad \text{para } s, t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$



**Figura 3.9.** Sistemas de coordenadas para determinar la perspectiva de una superficie generada por de una función.

Si  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , la ecuación (3.3) se escribe como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Las **ecuaciones paramétricas** del plano  $\mathcal{P}$  están dadas por

$$f(s, t) = x_0 + tu_1 + sv_1, \quad g(s, t) = y_0 + tu_2 + sv_2, \quad h(s, t) = z_0 + tu_3 + sv_3$$

de esta manera considerando los  $(s, t) \in D_{\mathbb{P}}$  y haciendo uso de la proposición (3.13) se puede hallar el conjunto  $\tilde{\varphi}(\mathcal{P})$ .

### 3.2.1 Imágenes de funciones

Para graficar una función de dos variables, se estudia el comportamiento de la función en determinado subconjunto del dominio; por lo general lo que se hace es analizar o evaluar algunos puntos y luego hacer un boceto de la función en papel sin una correcta ubicación en el espacio y con una perspectiva que no corresponde a la de un observador, que en este caso somos nosotros.

Sea  $F$  una función de dos variables de valor real

$$F: D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } F(s, t) = z \quad \text{para } D \subseteq \mathbb{R}^2$$

se quiere hallar la imagen de  $F$  en  $\mathcal{S}$ , para esto restringimos su dominio a  $D_{\mathbb{P}}$ , luego ubicamos un sistema cartesiano con origen en  $O = (i, j, 0)$  donde los parámetros  $i, j$  son constantes y elegidos arbitrariamente (fig 3.9). Luego

se trazan las rectas  $x', y', z'$  que pasan por el punto  $O$  y son paralelas a los ejes  $x, y, z$  respectivamente y con  $y'$  en dirección opuesta a la de  $y$ , las rectas  $x', y', z'$  son los ejes coordenados de la función  $F$ . de esta manera tenemos que un punto  $(s, t, F(s, t))$  en el sistema  $x', y', z'$  queda determinado en el sistema  $x, y, z$  como,

$$x = i + s = f(s, t), \quad y = j - t = g(s, t), \quad z = F(s, t) = h(s, t)$$

y aplicando la proposición 3.13 se tiene

$$\tilde{F}(s, t) = \mathcal{F}(j - t) \begin{bmatrix} a(j - t) - b(i + s) \\ c(j - t) - bF(s, t) \end{bmatrix} \quad \text{para } (s, t) \in D_{\mathbb{P}}$$

que es la imagen de la función  $F$  en  $\mathcal{S}$ . De esta manera  $\tilde{F}$  es una función la cual depende de los parámetros  $s, t$  y

$$\tilde{F}: D_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

La buena definición de  $\tilde{F}$  se hereda de la buena definición de  $F$ <sup>3.1</sup>.

### 3.2.2 Perspectiva de la esfera

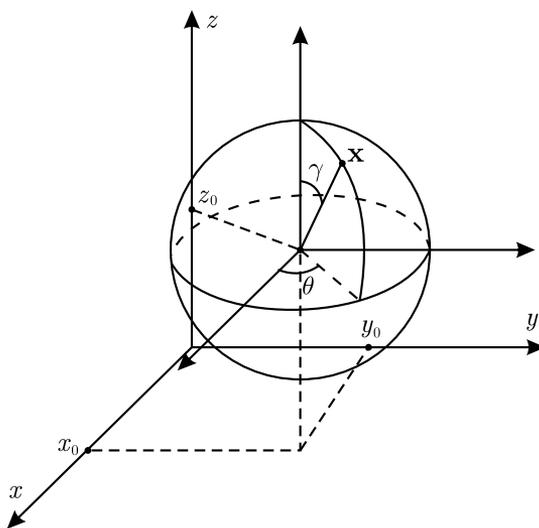
Finalizamos este capítulo con el conjunto imagen de una esfera, ya que tenemos las herramientas para determinar la representación de cualquier punto de la esfera. De manera análoga a lo realizado en las secciones anteriores, es suficiente con encontrar sus ecuaciones paramétricas y luego por medio de la proposición (3.13) hallar el conjunto imagen de la esfera.

Sea  $E$  una esfera de radio  $r > 0$  y centrada en el punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , un punto  $\mathbf{x} \in E$  está descrito por (fig 3.10)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + r \sin(\gamma) \cos(\theta) \\ y_0 + r \sin(\gamma) \sin(\theta) \\ z_0 + r \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \gamma \leq \pi.$$

---

3.1. Notemos que  $\tilde{F} \neq \tilde{\varphi} \circ F$ , pues el conjunto de llegada de  $F$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y no  $\mathbb{P}^3$ .



**Figura 3.10.** Esfera de radio  $r$  centrada en el punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

Por la proposición (3.13) se sigue que

$$\tilde{E} = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{array} \right] \in \mathcal{S} \left| \begin{array}{l} \tilde{x} = a - b \frac{r \sin(\gamma) \cos(\theta) + x_0 - a}{r \sin(\gamma) \sin(\theta) + y_0 - b} \\ \tilde{z} = c - b \frac{r \cos(\gamma) + z_0 - c}{r \sin(\gamma) \sin(\theta) + y_0 - b} \end{array} \right. \right\}$$

para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \gamma \leq \pi$ .

# Capítulo 4

## Perspectiva en otras secciones

Las estructuras arquitectónicas siempre han determinado secciones para la pintura, en el caso de que esta estructura sea un muro plano, se podrá resolver su representación mediante lo visto en los capítulos anteriores, pero son estas mismas estructuras arquitectónicas las que plantean nuevos desafíos, debido a que no necesariamente son planos ortogonales al eje de visión de un observador, como, por ejemplo, las bóvedas de techos con sus formas cilíndricas o domos. Por tanto, las imágenes de objetos en perspectiva son imágenes anamorfásicas vistas en la sección, sin embargo, estas imágenes reflejan un espacio coherente para el observador.

En capítulos anteriores consideramos la sección  $\mathcal{S}$  como el plano  $xz$ , en este capítulo la sección será una superficie que no necesariamente sea dicho plano.

### 4.1 Secciones rectas

Iniciamos estudiando un tipo de sección muy particular (sección recta) que luego se usará para determinar otras secciones. Siguiendo el orden de los capítulos anteriores, se debe identificar el dominio perspectivo, y así definir sobre este dominio un anamorfismo que logre representar un punto en perspectiva, dados la sección y el observador.

#### 4.1.1 Dominio perspectivo en secciones rectas

En la literatura [5], se puede encontrar definiciones similares a la que se presenta a continuación, sin embargo, exponemos esta definición en nuestros términos para continuar con la temática desarrollada en el texto.

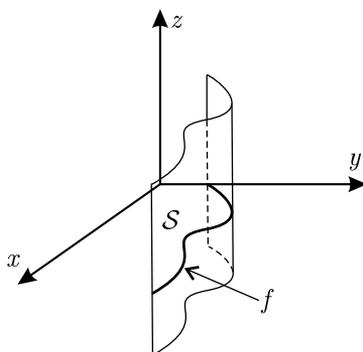


Figura 4.1.

**Definición 4.1.** Sea  $f$  una función continua de valor real definida sobre algún intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  con derivada continua. El conjunto  $\mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{p} = (x, f(x), z)\}$$

es llamado **sección recta**.

Seguiremos utilizando el mismo sistema de referencia que se usó en los capítulos anteriores (en la figura 4.1 se tiene un ejemplo de sección recta).

Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador y  $\mathcal{S}$  una sección recta. De la definición 2.2 un dominio perspectivo es el conjunto  $\mathbb{P}^3$  dado por

$$\mathbb{P}^3 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid |{}_P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S}| = 1\}.$$

Para hallar el anamorfismo  $\tilde{\varphi}$  para el caso de las secciones rectas, se evalúa en puntos  $P$  tales que  $P \in \mathbb{P}^3$ . Para identificar este dominio perspectivo se debe conocer el intervalo de la función  $f$  que se interseca con  ${}_P\mathcal{R}_Q$  generando una intersección única, ya que se pueden dar casos de múltiples intersecciones.

Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador y  $P = (x_p, f(x_p), z_p)$  un punto arbitrario diferente del observador. Si  $x_p = a$ , como  $f$  es una función entonces se cumple que  $P \in \mathbb{P}^3$  (Notemos que si  $f(a) = b$  entonces  $Q \in \mathcal{S}$ . Este caso no se da, ya que siempre se parte de la hipótesis de que la sección no contiene al observador); si  $x_p \neq a$  y si la ecuación

$$\frac{(f(x_p) - b)(x - a)}{x_p - a} + b - f(x) = 0 \quad (4.1)$$

tiene como solución únicamente  $x = x_p$ , entonces  $P \in \mathbb{P}^3$ ; si tiene más de una solución  $P \notin \mathbb{P}^3$  (fig 4.2).

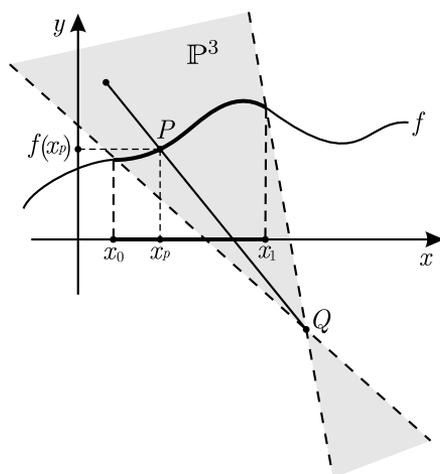


Figura 4.2.

**Definición 4.2.** Sean  $x_0 \neq x_1$  y  $(x_0, x_1) \subseteq \text{dom}(f)$ . Si para todo  $x_p \in (x_0, x_1)$  se tiene que  $x_p$  es la única solución de (4.1), decimos que  $(x_0, x_1) =: \mathbb{I}$  es un *intervalo perspectivo*.

Para el caso de los capítulos anteriores donde  $\mathcal{S}$  es un plano, se tiene que  $f(x) = 0$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{(0-b)(x-a)}{x_p-a} + b - 0 &= 0 \\ x - a &= \frac{-b(x_p - a)}{-b} \\ x &= x_p \end{aligned}$$

así, cualquier punto  $x_p \in \mathbb{R}$  es la única solución de (4.1) y en consecuencia  $\mathbb{I} = (x_0, x_1) = \mathbb{R}$  es un intervalo perspectivo para  $\mathcal{S}$ .

**Proposición 4.3.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $\mathcal{S}$  una sección recta e  $\{\mathbb{I}_j\}_{j \in J}$  donde  $\mathbb{I}_j$  es un intervalo perspectivo de  $\mathcal{S}$  con respecto a  $Q$ , entonces el dominio perspectivo con respecto a  $\mathcal{S}$  y  $Q$  está dado por

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + t(x_p - a), y = b + t(f(x_p) - b) \quad \text{con } t \neq 0 \right\}$$

donde  $x_p \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{I}_j$ .

**Demostración.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $\mathcal{S}$  una sección recta,  $k \in J$ ,  $\mathbb{I}_k$  un intervalo perspectivo y  $P = (x_p, f(x_p), z_p) \in \mathbb{P}^3$ .

Para  $x_p \in \mathbb{I}_k$ , notemos que todo punto en el rayo  $P\mathcal{R}_Q$ , excepto  $Q$ , pertenece a  $\mathbb{P}^3$ . La parametrización del rayo está dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_p - a \\ f(x_p) - b \\ z_p - c \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3 \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

esto es válido para todo  $x_p \in \mathbb{I}_k$ , si consideramos todos los intervalos perspectivos  $\mathbb{I}_j$ , los puntos de  $\mathbb{P}^3$  están dados por

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + t(x_p - a), y = b + t(f(x_p) - b) \quad \text{con } t \neq 0 \right\}$$

donde  $x_p \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{I}_j$ . □

**Observación 4.4.** El conjunto  $J$  en la proposición 4.3 es numerable.

**Lema 4.5.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $\mathcal{S}$  una sección recta e  $\{\mathbb{I}_j\}_{j \in J}$  donde  $\mathbb{I}_j$  es un intervalo perspectivo de  $\mathcal{S}$  con respecto a  $Q$ . Entonces para todo punto  $P$  del dominio perspectivo, existe un único punto  $x_p \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{I}_j$  que define a  $P$ .

**Demostración.** Sea  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ , por la proposición 4.3 tenemos que existe un  $t = t_0 \neq 0$  tal que

$$x = a + t_0(x_p - a) \quad \text{para algún } x_p \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{I}_j,$$

Veamos que  $x_p$  es único. Sean  $x_p, x_q \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{I}_j$  tales que

$$x = a + t_0(x_p - a) \quad \text{y} \quad x = a + t_0(x_q - a),$$

igualando se tiene que

$$\begin{aligned} a + t_0(x_p - a) &= a + t_0(x_q - a) \\ x_p &= x_q. \end{aligned}$$

□

### 4.1.2 Anamorfismos en secciones rectas

Encontrado el dominio perspectivo para secciones rectas, nos concentramos en el anamorfismo para identificar los representantes e imágenes de puntos en la sección recta. A continuación se enunciará una proposición para determinarlos y su importancia está en que su demostración muestra un método de cómo hallar los anamorfismos.

**Proposición 4.6.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ ,  $\mathcal{S}$  una sección recta e  $\{\mathbb{I}_j\}_{j \in J}$  donde  $\mathbb{I}_j$  es un intervalo perspectivo de  $\mathcal{S}$  con respecto a  $Q$ . Entonces la representación de  $P$  en  $\mathcal{S}$  está dada por

$$\tilde{\varphi}(P) = \tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{z})$$

con

$$\tilde{x} = \int_0^{x_p} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad y \quad \tilde{z} = c + \lambda(z - c)$$

donde  $x_p = a + \lambda(x - a)$  y  $\lambda$  es la solución de la ecuación

$$f(a + \lambda(x - a)) = b + \lambda(y - b).$$

**Demostración.** Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador,  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ ,  $\mathcal{S}$  una sección recta e  $\{\mathbb{I}_j\}_{j \in J}$  intervalos perspectivos para  $\mathcal{S}$  con respecto a  $Q$ .

Como  $P \in \mathbb{P}^3$ , por el lema 4.5 tenemos que existe un único punto  $x_p \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{I}_j$  que define a  $P$ , por la proposición 4.3 existe un  $t = \lambda^{-1} \neq 0$  tal que

$$x = a + \frac{1}{\lambda}(x_p - a), \quad y = b + \frac{1}{\lambda}(f(x_p) - b)$$

así

$$x_p = a + \lambda(x - a),$$

luego

$$f(a + \lambda(x - a)) = f(x_p) = b + \lambda(y - b). \quad (4.2)$$

Al resolver para  $\lambda$  en (4.2) se obtiene una función  $\lambda$  de valor real que depende de los parámetros  $x, y, a$ , y  $b$ . De la demostración de la proposición 4.3 con  $t = \lambda^{-1}$  se tiene que  $z = c + \lambda^{-1}(z_p - c)$ , implicando que  $z_p = c + \lambda(z - c)$ . El punto  $(x_p, f(x_p), z_p)$  es la imagen de  $P$  en  $\mathcal{S}$ ; sin embargo, este punto no está representado en  $\mathcal{S}$ , para ello hacemos

$$\tilde{z} = z_p = c + \lambda(z - c), \quad (4.3)$$

y para  $\tilde{x}$  utilizamos la longitud de arco de la gráfica de la función desde el punto  $(0, f(0))$  hasta el punto  $(x_p, f(x_p))$ , esto es;

$$\tilde{x} = \int_0^{x_p} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4.4)$$

$\tilde{x}$  está bien definida, ya que por la definición de sección recta, tenemos que  $f$  y  $f'$  son continuas en  $[0, x_p]$ .

De (4.4) y (4.3) se tiene la definición del anamorfismo  $\tilde{\varphi}$ . □

Notemos que la proposición 4.6 es una extensión a otras superficies de la proposición 2.5, ya que el plano  $\mathcal{S}$  es una sección recta con  $f(x) = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  e  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$  donde

$$\begin{aligned} f(a + \lambda(x - a)) &= b + \lambda(y - b) \\ k &= b + \lambda(y - b). \end{aligned}$$

Despejando, tenemos

$$\lambda = \frac{k - b}{y - b},$$

y de esta manera

$$x_p = a + \lambda(x - a) = a + \frac{(k - b)(x - a)}{y - b},$$

por lo cual

$$\tilde{x} = \int_0^{x_p} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^{x_p} dx = x_p = a + \frac{(k - b)(x - a)}{y - b}$$

y

$$\tilde{z} = c + \lambda(z - c) = c + \frac{(k - b)(z - c)}{y - b}$$

obteniendo el mismo anamorfismo de la proposición 2.5.

Veamos con un ejemplo el método propuesto por la proposición 4.6 para hallar anamorfismos de secciones rectas.

**Ejemplo 4.7.** Para un observador  $Q = (a, b, c)$  y una sección  $\mathcal{S}$  que es un plano que pasa por el origen con vector normal  $(\alpha, \beta, 0)$ , donde  $\alpha, \beta \neq 0 \in \mathbb{R}$  y  $(\alpha, \beta) \cdot (a, b) \neq 0$ , hallar su anamorfismo.

Se debe identificar la sección para usar la definición 4.1, es decir, hallar la función  $f$  que me describa el plano, como sabemos que la sección pasa por el origen y su vector normal es  $(\alpha, \beta, 0)$ , su componente en  $z$  es cero

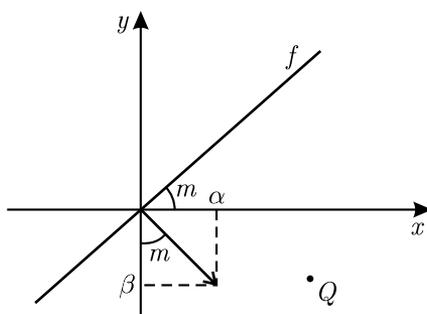


Figura 4.3.

garantizando que sea una sección recta, según esto  $f$  sería una recta que para por el origen (fig 4.3) por lo cual necesitamos identificar su pendiente la cual se puede describir por medio del vector normal al plano como:

$$m = \frac{\alpha}{\beta},$$

y de esta manera  $f$  queda definida por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}x$$

notemos que  $Q \notin \mathcal{S}$  pues

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq 0$$

lo que implica que  $\alpha \neq -b\beta/a$  y por consiguiente  $f(x) \neq -bx/a$ .

Ahora hacemos

$$\begin{aligned} f(a + \lambda(x - a)) &= b + \lambda(y - b) \\ \frac{\alpha}{\beta}(a + \lambda(x - a)) &= b + \lambda(y - b) \end{aligned}$$

donde despejando  $\lambda$  tenemos

$$\lambda = \frac{b - \frac{\alpha}{\beta}a}{\frac{\alpha}{\beta}(x - a) - (y - b)},$$

de esta manera

$$x_p = a + \lambda(x - a) = a + \frac{\left(b - \frac{\alpha}{\beta}a\right)(x - a)}{\frac{\alpha}{\beta}(x - a) - (y - b)}.$$

Calculando la integral tenemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= \int_0^{x_p} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\
 &= \int_0^{x_p} \sqrt{1 + \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2} dx \\
 &= \sqrt{1 + \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2} x_p \\
 &= \sqrt{1 + \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2} \left( a + \frac{\left(b - \frac{\alpha}{\beta}a\right)(x - a)}{\frac{\alpha}{\beta}(x - a) - (y - b)} \right)
 \end{aligned}$$

y

$$\tilde{z} = c + \frac{\left(b - \frac{\alpha}{\beta}a\right)(z - c)}{\frac{\alpha}{\beta}(x - a) - (y - b)}.$$

De esta manera queda definido el anamorfismo  $\tilde{\varphi}$ , que debido a la prueba de la proposición 4.6 nos garantiza la buena definición del anamorfismo sobre un dominio perspectivo proporcionado por la proposición 4.3 donde

$$\mathbb{I} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq a - \frac{\alpha}{\beta}b \right\}.$$

De nuevo, en el anterior ejemplo vemos que si  $\alpha = 0$ , se tiene el resultado de la proposición 2.5.

### 4.1.3 Sección cilíndrica

Se tienen herramientas necesarias para considerar la perspectiva en una sección cilíndrica (cilindro circular recto), sección que ha sido de suma importancia para los artistas, ya que esta sección está presente en los techos de palacios, castillos, iglesias y todo tipo de arquitecturas.

Esta sección presenta un nivel de dificultad a la hora de realizar dibujos que representen algún grado de perspectiva, pues se deben dibujar figuras anamorfadas de tal manera que estas figuras, al ser visualizadas por un observador se vean con la naturalidad esperada.

Sea  $Q = (a, b, c)$  un observador con  $b < 0$ , hallemos el anamorfismo para una superficie cilíndrica, apoyándonos en una sección recta.

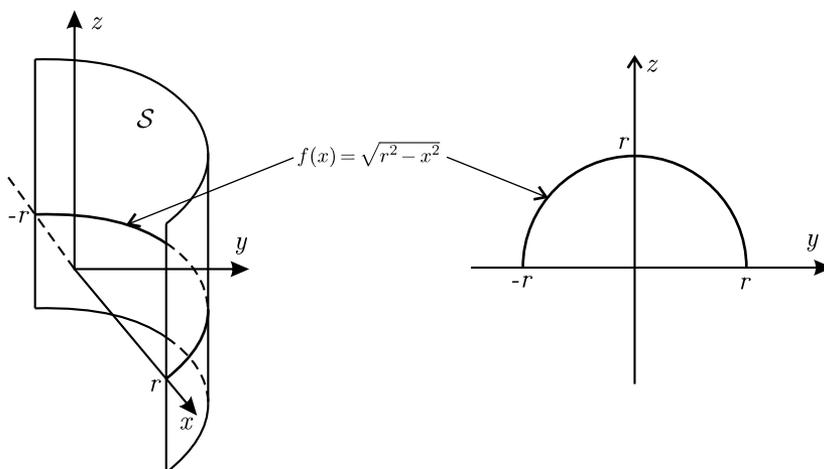


Figura 4.4.

Sea  $\mathcal{S}$  una sección recta con  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  para  $-r < x < r$  donde  $r$  es el radio de la proyección ortogonal de  $\mathcal{S}$  en el plano  $xy$  (fig 4.4). Luego

$$\begin{aligned} f(a + \lambda(x - a)) &= b + \lambda(y - b) \\ \sqrt{r^2 - (a + \lambda(x - a))^2} &= b + \lambda(y - b), \end{aligned}$$

resolviendo para  $\lambda$  se tiene

$$\lambda = \frac{-[b(y - b) + a(x - a)] + \sqrt{[b(y - b) + a(x - a)]^2 - [(y - b)^2 + (x - a)^2][a^2 + b^2] - r^2}}{(y - b)^2 + (x - a)^2},$$

la derivada de  $f$  está dada por

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \int_0^{x_p} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{x_p} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_0^{x_p} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_0^{x_p} \end{aligned}$$

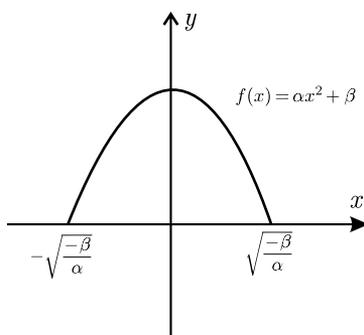


Figura 4.5.

$$\begin{aligned}
 &= r \arcsin\left(\frac{x_p}{r}\right) \\
 &= r \arcsin\left(\frac{a - \lambda(x - a)}{r}\right).
 \end{aligned}$$

Notemos que  $\mathbb{I} = (-r, r)$ , así  $|x_p| < r$  y de esta manera garantizamos que el argumento de la función arcsin sea menor que uno ya que  $|x_p/r| < 1$ .

Para el valor de  $\tilde{z}$  se tiene  $\tilde{z} = c + \lambda(z - c)$  con el  $\lambda$  previamente encontrado, de esta manera tenemos el anamorfismo  $\tilde{\varphi}$  para una superficie cilíndrica.

#### 4.1.4 Sección parabólica

Ahora, determinaremos la perspectiva en una sección recta parabólica, es decir, cuando  $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ . Si bien no es una sección que se use mucho, en la actualidad existen complejos arquitectónicos compuestos por una estructura parabólica, por lo cual suele ser útil tener un anamorfismo para este tipo de secciones.

Sea  $Q = (a, b, c)$  un observador con  $b < 0$ , encontremos el anamorfismo para la superficie parabólica.

En  $\mathcal{S}$  tenemos que

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha < 0, \beta > 0 \quad \text{y } x \in \mathbb{I},$$

donde

$$\mathbb{I} = \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$$

(ver figura 4.5).

Luego

$$\begin{aligned} f(a + \lambda(x - a)) &= b + \lambda(y - b) \\ \alpha(a + \lambda(x - a))^2 + \beta &= b + \lambda(y - b) \end{aligned}$$

resolviendo para  $\lambda$  tenemos

$$\lambda = \frac{y - b + 2\alpha a(a - x) + \sqrt{(2\alpha a(x - a) - y + b)^2 - 4\alpha(x - a)^2(\alpha a^2 + \beta - b)}}{2\alpha(x - a)^2},$$

la derivada de  $f$  está dada por

$$f'(x) = 2\alpha x,$$

así

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \int_0^{x_p} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{x_p} \sqrt{1 + (2\alpha x)^2} dx \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{4\alpha^2 x^2 + 1} + \frac{1}{4\alpha} \ln \left| 2\alpha x + \sqrt{4\alpha^2 x^2 + 1} \right| \Big|_0^{x_p} \\ &= \frac{x_p}{2} \sqrt{4\alpha^2 x_p^2 + 1} + \frac{1}{4\alpha} \ln \left| 2\alpha x_p + \sqrt{4\alpha^2 x_p^2 + 1} \right| \end{aligned}$$

como  $x_p = a + \lambda(x - a)$  tenemos que

$$\tilde{x} = \frac{a + \lambda(x - a)}{2} \sqrt{4\alpha^2(a + \lambda(x - a))^2 + 1} + \frac{1}{4\alpha} \ln \left| 2\alpha(a + \lambda(x - a)) + \sqrt{4\alpha^2(a + \lambda(x - a))^2 + 1} \right|.$$

Para el valor de  $\tilde{z}$  se tiene

$$\tilde{z} = c + \lambda(z - c).$$

## 4.2 Sección en planta

Consideremos ahora al plano de planta como la sección  $\mathcal{S}$ . En un inicio se puede pensar en la inutilidad de una sección de este tipo; sin embargo, es utilizado en el “Street art”. Al pintar figuras de alguna complejidad perspectiva en el suelo, se requiere de alguna técnica para su representación que genere el efecto deseado para un observador que claramente no se encuentre en el suelo, es decir, con  $c \neq 0$ . También es muy usado por empresas de publicidad que generan efectos de figuras 3D en espacios que por alguna razón no pueden tener la figura real, o simplemente por costos.

Se observará que este tipo de sección tiene cierta similaridad con lo estudiado en el capítulo 2.

**Definición 4.8.** *Una sección en planta  $\mathcal{S}$  es un plano que coincide con el plano de planta.*

Determinemos el dominio perspectivo para la sección en planta. De la definición 2.2 tenemos que

$$\mathbb{P}^3 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid |{}_P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S}| = 1\},$$

como  $\mathcal{S}$  está en el plano de planta, entonces si  $\mathbb{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c\}$ , nuevamente

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{A},$$

pues el conjunto  $\mathbb{A}$  es un plano paralelo a  $\mathcal{S}$  que contiene al observador.

La siguiente proposición permite encontrar un anamorfismo para la sección plana, cuya prueba se deja al lector, debido a su similitud con la proposición 2.5.

**Proposición 4.9.** *Sean  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ ,  $Q = (a, b, c)$  un observador. Si  $\mathcal{S}$  es una sección en planta, entonces la representación de  $P$  en  $\mathcal{S}$  está dada por*

$$\tilde{\varphi}(P) = \tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

donde

$$\tilde{x} = a - \frac{c(x-a)}{z-c} \quad y \quad \tilde{y} = b - \frac{c(y-b)}{z-c}.$$

Notemos que se sustituye  $\tilde{z}$  por  $\tilde{y}$  para hacer énfasis en que la sección está en planta, por lo cual conviene escribir  $\tilde{y}$ , observemos que  $(z-c) \neq 0$  ya que  $P \in \mathbb{P}^3$  y esto implica que  $P \notin \mathbb{A}$  y por tanto  $z \neq c$ .

En esta sección se pueden conseguir efectos de tridimensionalidad cuando el objeto a representar se encuentra con altura  $z$ , donde  $z < c$  como se estudiará en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.10.** Para un observador  $Q = (8, -6, 5.3)$  representemos un cubo con vértices  $A, B, C, D, A', B', C', D'$ . En la tabla 4.1 se muestran los

	$x$	$y$	$z$	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$
$A$	10	6	0	10	6
$B$	7.7	7.9	0	7.7	7.9
$C$	9.7	10.3	0	9.7	10.3
$D$	12	8.4	0	12	8.4
$A'$	10	6	3	12.6	21.7
$B'$	7.7	7.9	3	7.3	26
$C'$	9.7	10.3	3	11.9	31.6
$D'$	12	8.4	3	17.2	27.2

Tabla 4.1. Valores para un observador  $(8, -6, 5.3)$ .

puntos y sus respectivas representaciones. En la figura 4.6a vemos la imagen del cubo en la sección como una figura anamorfa, sin embargo, para el observador ocurre una ilusión óptica el cual percibe esta misma imagen de una manera distinta (algo aproximado a la figura 4.6b), dándole una mayor sensación de tridimensionalidad.

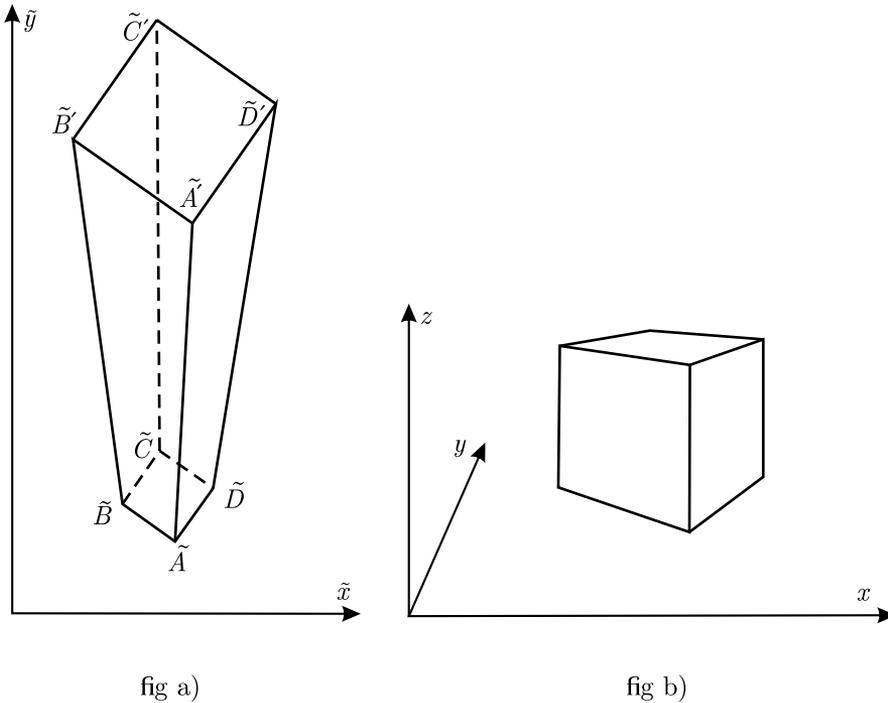


Figura 4.6. Fig a): Dibujo en la sección del cubo en perspectiva. Fig b): Ilusión óptica de un cubo para un observador  $Q = (8, -6, 5.3)$ .

Lo que notamos en este ejemplo, es que en la figura 4.6a, a medida que la componente  $\tilde{y}$  aumenta, esta empieza a expandirse. Esta expansión es la que contrarresta la perspectiva natural para el observador, ya que éste, la componente  $y$  es la que genera perspectiva, sin embargo, esta anulación de perspectivas hace que se genere el efecto óptico en el observador y este pueda ver la figura 4.6b. Sabemos que la figura  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$  forma un cuadrado en  $\mathcal{S}$  porque  $A, B, C, D \in \mathcal{S}$  luego no hay ninguna transformación, lo que implica que sigue siendo un cuadrado. Ahora nos podemos preguntar ¿Es la figura en  $\mathcal{S}$ ,  $\tilde{A}'\tilde{B}'\tilde{C}'\tilde{D}'$  un cuadrado? tendremos que esperar hasta la proposición 4.11 para dar respuesta a esta interrogante.

Analicemos el anamorfismo presentado en la proposición 4.9.

Sean  $Q = (a, b, c)$  un observador con  $c > 0$ ,  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$  y  $\mathcal{S}$  una sección de planta, entonces si  $P \in \mathcal{S}$  se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= a - \frac{c(x-a)}{0-c} & \tilde{y} &= b - \frac{c(y-b)}{0-c} \\ \tilde{x} &= x & \tilde{y} &= y \end{aligned}$$

esto era de esperar, ya que todo punto en  $\mathcal{S}$  no tiene transformación, porque el es su propio representante. Si  $P = (a, b, z)$  con  $z \neq c$  tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= a - \frac{c(a-a)}{z-c} & \tilde{y} &= b - \frac{c(b-b)}{z-c} \\ \tilde{x} &= a & \tilde{y} &= b. \end{aligned}$$

En este caso la representación coincide con la proyección ortogonal del observador a la sección.

Ahora, veamos qué ocurre con las imágenes de las rectas paralelas, para ello obtendremos resultados análogos a los de las proposiciones 2.12 y 2.14, pero adaptados a la sección en planta, la demostración de estos resultados se deja al lector debido a su similitud con las realizadas en 2.12 y 2.14.

**Proposición 4.11.** *Si dos rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son paralelas y estas a su vez lo son con la sección, entonces sus imágenes son rectas paralelas.*

Este resultado propociona una respuesta al interrogante que teníamos en el ejemplo 4.10 sobre si la figura  $\tilde{A}'\tilde{B}'\tilde{C}'\tilde{D}'$  formaba un cuadrado; en efecto lo forma, debido a que  $A'B'C'D'$  es un cuadrado paralelo a  $\mathcal{S}$  y sus lados están conformados por rectas paralelas a la sección, luego  $A'B'$  es paralela a  $C'D'$  y por lo tanto  $\tilde{A}'\tilde{B}'$  es paralela con  $\tilde{C}'\tilde{D}'$ , de igual manera se tiene que  $\tilde{A}'\tilde{D}'$  es paralela con  $\tilde{B}'\tilde{C}'$  y finalmente se demuestra que  $\tilde{A}'\tilde{B}'\tilde{C}'\tilde{D}'$  forma un cuadrado.

**Proposición 4.12.** Sean  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  dos rectas paralelas, pero no con  $\mathcal{S}$ , entonces sus imágenes son semi-rectas que convergen al punto

$$\left( a - \frac{cd_x}{d_z}, b - \frac{cd_y}{d_z} \right)$$

donde el vector director de las rectas está dado por  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$  con  $d_z \neq 0$ .

Cuando las rectas son perpendiculares a  $\mathcal{S}$  tenemos que sus respectivos vectores directores son  $\mathbf{d} = (0, 0, d_z)$ , y de esta manera se tiene que el punto de fuga de estas rectas está en  $(a, b)$  justamente bajo el observador, por lo cual podemos afirmar que todo objeto que se genere por extrusión (barrido) ortogonal en el eje  $z$ , sus paredes rectas estarán conformadas por rectas convergentes en los pies del observador.

### 4.3 Sección esférica

Además de la sección cilíndrica, otra sección que ha sido importante en la historia de la perspectiva es la sección esférica, dado que muchos artistas abordaron este problema debido a que existen estructuras arquitectónicas con esta forma, más específicamente domos, el cual demandaba un mayor esfuerzo al momento de calcular perspectivas.

**Definición 4.13.** Una sección esférica  $\mathcal{S}$  es una semiesfera de radio  $r$  y centrada en el origen.

La siguiente proposición nos proporciona el dominio perspectivo para la sección esférica.

**Proposición 4.14.** Para una sección esférica de radio  $r$  y un observador  $Q = (a, b, c)$  con  $c < 0$ , el dominio perspectivo viene dado por

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3 \left| \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} a(t-1) + tr \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ b(t-1) + tr \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ c(t-1) \end{array} \right] \right. \right\},$$

con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  y  $0 \leq \beta < \pi/2$ .

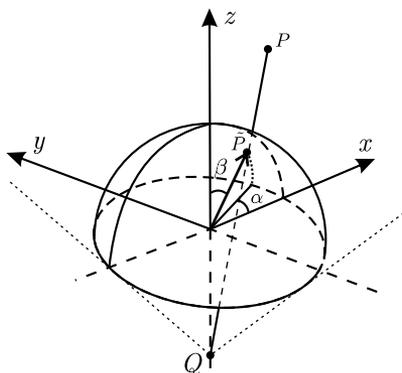


Figura 4.7. Sección esférica.

**Demostración.** Se necesita garantizar que la intersección de  ${}^P\mathcal{R}_Q$  con  $\mathcal{S}$  sea un único punto, para ello construimos un rayo con el observador y un punto en la sección  $\tilde{P}$  (fig 4.7). Así,

$${}^{\tilde{P}}\mathcal{R}_Q: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \tilde{P}_x - a \\ \tilde{P}_y - b \\ \tilde{P}_z - c \end{bmatrix} \quad \text{para } t \in \mathbb{R},$$

escribimos el punto  $\tilde{P}$  en coordenadas esféricas con  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  y  $0 \leq \beta < \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r \sin(\alpha) \cos(\beta) - a \\ r \sin(\alpha) \sin(\beta) - b \\ -c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(t-1) + tr \sin(\alpha) \cos(\beta) - a \\ b(t-1) + tr \sin(\alpha) \sin(\beta) - b \\ c(t-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de esta manera  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ , pues garantizamos que la intersección de  ${}^P\mathcal{R}_Q$  con  $\mathcal{S}$  es un único punto, en este caso  $\tilde{P}$ .  $\square$

Ahora se halla el anamorfismo  $\tilde{\varphi}$  para la sección esférica  $\mathcal{S}$  y un observador  $Q = (a, b, c)$  con  $c < 0$ . Un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  en una esfera de radio  $r$  satisface la siguiente expresión

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (4.5)$$

donde, si consideramos  $z \geq 0$ , tenemos la semi-esfera. Sea  $P = (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$ , si consideramos el rayo

$${}^P\mathcal{R}_Q: \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

y deseamos intersecar este con la semiesfera para hallar la representación  $\tilde{P}$ , es decir,  ${}^P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S} = \{\tilde{P}\}$  se debe tener que  $\tilde{P}$  satisface (4.5) y (4.6) simultáneamente, por lo cual se tiene que

$$(a + \lambda(x-a))^2 + (b + \lambda(y-b))^2 + (c + \lambda(z-c))^2 = r^2$$

donde, resolviendo para  $\lambda$  se tiene que

$$\begin{aligned} A &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ B &= a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) \\ C &= a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

de esta manera

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix},$$

pero esto es aún un punto en  $\mathbb{R}^3$  y no en  $\mathcal{S}$ , por lo cual utilizando coordenadas esféricas tenemos que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin(\gamma) \cos(\theta) \\ r \sin(\gamma) \sin(\theta) \\ r \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

así

$$\gamma = \cos^{-1} \left( \frac{c}{r} + \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{rA} (z-c) \right) \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{a}{r \sin(\gamma)} + \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{r \sin(\gamma) A} (x-a) \right)$$

y finalmente tenemos que

$$\tilde{x} = r\theta \quad \tilde{z} = r\frac{\pi}{2} - r\gamma,$$

teniendo el anamorfismo

$$\tilde{\varphi}(P) = r \left[ \begin{array}{c} \theta \\ \frac{\pi}{2} - r\gamma \end{array} \right], \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

# Capítulo 5

## Perspectiva $n$ -dimensional

Una limitante que se posee es graficar un objeto en más de tres dimensiones, debido a que este se escapa de nuestra comprensión física; sin embargo, el no tener una experiencia física con una dimensión mayor en la que vivimos no nos limita su estudio, con las matemáticas se pueden estudiar estos espacios  $n$ -dimensionales y, como se desarrolla en este capítulo, la perspectiva no es un fenómeno exclusivo de nuestro universo tridimensional. Se analizará cómo los conceptos hasta ahora vistos se extienden a otras dimensiones tales como: dominio perspectivo, anamorfismo, convergencia de rectas paralelas, horizonte y puntos de fuga.

### 5.1 Dominio perspectivo $n$ -dimensional

Extendemos el concepto de rayo y observador que se estudió en las definiciones (1.2), (1.3) a dimensiones mayores.

**Definición 5.1.** Sean  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  dos puntos diferentes de  $\mathbb{R}^n$ , decimos que un rayo es una recta en el espacio  $n$ -dimensional que se denotará por  ${}^p\mathcal{R}_Q$ .

Una expresión matemática para el rayo es la siguiente: sean  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ , luego el rayo  ${}^p\mathcal{R}_Q$   $n$ -dimensional está dado por

$${}^p\mathcal{R}_Q: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ \vdots \\ p_n - q_n \end{bmatrix} \quad \text{para } t \in \mathbb{R},$$

En notación vectorial será: si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  son puntos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$${}^p\mathcal{R}_Q: \quad \mathbf{x} = \mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

En los anteriores capítulos el observador siempre pertenece al mismo espacio dimensional del punto a representar, por lo cual la siguiente definición solo extiende el espacio en el que está el observador de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 5.2.** *Un **observador** en el espacio  $n$ -dimensional es un punto en dicho espacio al cual convergen rayos desde otros puntos. Se denotará como  $\mathbf{q}$ .*

Notemos que el observador pertenece a  $\mathbb{R}^n$ , por lo cual, como observadores que percibimos la tercera dimensión nos costará entender las imágenes en perspectiva de los objetos de  $\mathbb{R}^n$ .

Al considerar la recta real como un espacio unidimensional, un punto arbitrario de este espacio permite dividir el espacio en dos sub-espacios, cuyo caso son dos semi-rectas. A este punto se la llama hiperplano. Si consideramos el espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , una recta sería un hiperplano dado que nos permite dividir el espacio  $\mathbb{R}^2$  en dos sub-espacios y para el espacio  $\mathbb{R}^3$  tenemos que un hiperplano es el plano ordinario que podemos escribir con ecuación lineal

$$m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + m_3(z - z_0) = 0$$

donde  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  es el vector normal al plano y  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es un punto contenido en el plano. Este concepto se puede extender a  $\mathbb{R}^n$ , así, un hiperplano en  $\mathbb{R}^4$  es una especie de espacio tridimensional que divide al espacio de cuarta dimensión en dos sub-espacios. En general, un hiperplano es un objeto divisor de dimensión  $n - 1$  que permite dividir el espacio  $\mathbb{R}^n$  en dos sub-espacios.

En lo anterior encontramos una idea intuitiva de lo que es un hiperplano, pero estamos lejos de su definición formal y rigurosa (algo fuera del objetivo de este texto); sin embargo, por abuso de escritura y formalismo un **hiperplano** en un espacio  $n$ -dimensional descrito por una ecuación lineal de la forma

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - a_k) = 0 \tag{5.1}$$

donde  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$  es el vector normal al hiperplano y  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  es un punto contenido en el hiperplano. Un hiperplano puede ser considerado como un caso particular de una sección  $n$ -dimensional  $\mathcal{S}^{n-1}$ , pero a su vez como una extensión natural de la sección tratada en el capítulo 2, por lo cual en este capítulo solo consideraremos la sección como un hiperplano, por lo cual nos resta identificar el punto por el cual pasa (que será el origen) y su vector normal, para ello se hace una convención del sistema coordinado

para una sección  $\mathcal{S}^{n-1}$  y un observador  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , en el capítulo 2 se consideró como eje de profundidad al eje  $y$ , si bien puede asumir cualquier otro eje, por cuestiones de practicidad y para identificar el eje  $z$  con la altura elegimos el eje  $y$ . Ahora, para un nuevo sistema de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  se conserva esta convención, por lo cual para un sistema de coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  en  $\mathbb{R}^n$  siempre consideraremos a  $x_2$  como la componente de profundidad que genera perspectiva. De esta manera podemos definir nuestra sección como: un hiperplano que pasa por el origen y tiene como vector normal al vector  $\mathbf{m} = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , esto es según (5.1) se tiene que  $x_2 = 0$ , por lo cual

$$\mathcal{S}^{n-1} = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}.$$

**Definición 5.3.** Para  $\mathbf{q}$  un observador, diremos que un conjunto  $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{R}^n$  definido por

$$\mathbb{P}^n := \{P \in \mathbb{R}^n \mid |{}_P\mathcal{R}_Q \cap \mathcal{S}^{n-1}| = 1\},$$

es un **dominio perspectivo** con respecto a una sección  $\mathcal{S}^{n-1}$  y un observador  $\mathbf{q}$ .

Lo que nos dice esta definición es que si tenemos un hiperplano de dimensión  $n - 1$  y un rayo en  $\mathbb{R}^n$ , la intersección de este con el hiperplano debe ser un solo punto de  $\mathbb{R}^n$ , que posteriormente identificaremos en  $\mathcal{S}^{n-1}$  por medio de un anamorfismo con coordenadas locales mediante una  $(n - 1)$ -tupla.

Para identificar el dominio perspectivo debemos tener en cuenta tres cosas:

- La primera, es que el observador no puede estar en  $\mathcal{S}^{n-1}$ , es decir, si  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  es el observador, entonces  $q_2 < 0$ .
- La segunda, es que si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un punto a representar, entonces  $\mathbf{x} \neq \mathbf{q}$ .
- La tercera, es que si  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  es el observador y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un punto a representar entonces  $q_2 \neq x_2$ , pues si  $q_2 = x_2$  entonces el vector director de  ${}_P\mathcal{R}_Q$  estará dado por

$$\begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ x_3 - q_3 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ 0 \\ x_3 - q_3 \\ \vdots \\ p_n - q_n \end{bmatrix},$$

y es paralelo a la sección, lo que implica que  $p\mathcal{R}_Q$  sea paralelo a  $\mathcal{S}^{n-1}$  y no exista intersección.

Las dos primeras se dan por hechas, debido a lo realizado en el capítulo 2, no tiene sentido que se consideren estos casos, sin embargo, el tercer caso es clave para determinar el dominio perspectivo. Si  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  es un observador y  $\mathbb{A} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = q_2\}$ , entonces

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{A}.$$

## 5.2 Anamorfismo $n$ -dimensional

Ya solucionado el problema de identificación del dominio perspectivo en  $\mathbb{R}^n$ , nos concentraremos en definir un anamorfismo para el espacio  $n$ -dimensional como una generalización del concepto de anamorfismo planteado en la definición (2.4).

**Definición 5.4.** *Sea  $Q$  un observador. Un anamorfismo  $n$ -dimensional es una función de dominio  $\mathbb{P}^n$  con valores en  $\mathcal{S}^{n-1}$ , definida de la siguiente manera:*

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathcal{S}^{n-1} \quad \text{definida por } \tilde{\varphi}(P) = \tilde{P}.$$

Para la obtención de un anamorfismo en la sección  $\mathcal{S}^{n-1}$  dada anteriormente como un hiperplano, debemos definir una función que permita omitir una componente, con el fin de encontrar una comodidad en los cálculos y la escritura (como se hizo en los anteriores capítulos omitiendo  $\tilde{y} = 0$ ).

**Definición 5.5.** *Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos la función  $\Psi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  como  $\Psi_i(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .*

Lo que hace la función  $\Psi_i$  es eliminar la  $i$ -ésima componente del punto, y de esta maneja obtener la reducción de una dimensión. La función  $\Psi_i$  es un operador lineal, es decir,

$$\Psi_i(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = \Psi_i(\mathbf{x}) + \alpha\Psi_i(\mathbf{y}) \quad \text{para } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Proposición 5.6.** Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  un observador y  $\mathcal{S}^{n-1}$  una sección  $n$ -dimensional, entonces la representación de  $\mathbf{x}$  en  $\mathcal{S}^{n-1}$  está dado por

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)} \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}).$$

**Demostración.** Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  un observador y  $\mathcal{S}^{n-1}$  una sección  $n$ -dimensional, tomando el rayo  $P\mathcal{R}_Q$  tenemos que

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{bmatrix} \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n)$  está en  $\mathcal{S}^{n-1}$  si y solo si  $\tilde{x}_2 = 0$ , de esta manera

$$\lambda = \frac{-q_2}{x_2 - q_2},$$

y sustituyendo este valor de  $\lambda$  en el (5.2) se tiene que

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} - \frac{q_2}{x_2 - q_2} \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ x_3 - q_3 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{bmatrix}$$

como  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n)$  tenemos que

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} - \frac{q_2}{x_2 - q_2} \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_3 - q_3 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{bmatrix}$$

luego

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)} \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}).$$

□

Veamos un ejemplo de la proposición 5.6.

**Ejemplo 5.7.** Para un observador  $\mathbf{q} = (2, -3, -1, 3, 5) \in \mathbb{R}^5$  hallemos la representación en  $\mathcal{S}^4$  del punto  $\mathbf{x} = (1, -2, 6, 0, -2) \in \mathbb{R}^5$ .

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{x_2 - q_2} \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\
 &= \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right) - \frac{-3}{-2 - (-3)} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} 1 - 2 \\ -2 - (-3) \\ 6 - (-1) \\ 0 - 3 \\ -2 - 5 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right) + 3 \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \\ -6 \\ -16 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Notemos que si  $\mathbf{q} = (a, b, c)$  y  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{x_2 - q_2} \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\
 &= \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) - \frac{b}{y - b} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} - \frac{b}{y - b} \begin{bmatrix} x - a \\ z - c \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a - \frac{b}{y - b}(x - a) \\ c - \frac{b}{y - b}(z - c) \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^2 \equiv \mathcal{S},
 \end{aligned}$$

que es el mismo resultado del corolario 2.6.

Analicemos un poco el anamorfismo  $n$ -dimensional.

Punto	$\tilde{x}$	$\tilde{z}$	$\tilde{w}$
(0, 0, 0, 0)	0	0	0
(3, 0, 0, 0)	3	0	0
(0, 3, 0, 0)	0	0.5	0.5
(0, 0, 3, 0)	0	3	0
(0, 0, 0, 3)	0	0	3
(3, 3, 0, 0)	1.5	0.5	0.5
(0, 3, 3, 0)	0	2	0.5
(0, 0, 3, 3)	0	3	3
(3, 0, 3, 0)	3	3	0
(3, 0, 0, 3)	3	0	3
(0, 3, 0, 3)	0	0.5	2
(3, 3, 3, 0)	1.5	2	0.5
(0, 3, 3, 3)	0	2	2
(3, 0, 3, 3)	3	3	3
(3, 3, 0, 3)	1.5	0.5	2
(3, 3, 3, 3)	1.5	2	2

**Tabla 5.1.** Valores para un observador  $(0, -3, 1, 1)$ .

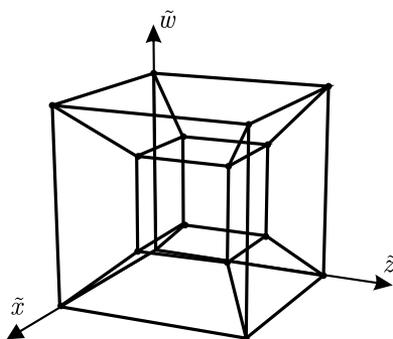
Si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^{n-1}$  y  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  es un observador entonces  $x_2 = 0$  y se tiene que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{0 - q_2} \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\
 &= \Psi_2(\mathbf{q}) + \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\
 &= \Psi_2(\mathbf{q}) + \Psi_2(\mathbf{x}) - \Psi_2(\mathbf{q}) \\
 &= \Psi_2(\mathbf{x}) = (x_1, x_3, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^{n-1},
 \end{aligned}$$

por lo que la representación de un punto en  $\mathcal{S}^{n-1}$  es el mismo punto.

Mostremos cómo se grafica un cubo de  $\mathbb{R}^4$  (o tesseracto), esta figura geométrica posee 24 caras, 16 vértices y 32 aristas. En [3, capítulo 4], figura 26 el autor nos muestra el dibujo del cubo en  $\mathbb{R}^4$ . El ejemplo dado a continuación mostrará una forma alternativa de obtener el tesseracto utilizando la proposición 5.6.

**Ejemplo 5.8.** Para graficar un cubo en  $\mathbb{R}^4$  consideraremos un cubo de lado 3 unidades con uno de sus vértices ubicado en el origen y con una de sus caras paralela a la sección  $\mathcal{S}^3$ , por lo cual los 16 vértices de este cubo están dados por la forma  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  donde  $x_i$  toma el valor de cero o tres. Considerando un observador  $(0, -3, 1, 1)$  presentamos las representaciones de los vértices en la tabla 5.1 y la figura 5.1 muestra el tesseracto. Notemos



**Figura 5.1.** Tesseracto, para un observador  $(0, -3, 1, 1)$ .

que los ocho puntos que tienen como componente  $y = 0$ , están sobre la sección  $\mathcal{S}^3$ , por lo cual no vemos cambios en los valores de las componentes de su representación.

### 5.3 Rectas paralelas en $\mathbb{R}^n$

Extendemos los resultados y observaciones dadas en el capítulo 2, respecto a rectas paralelas.

decimos que dos rectas son paralelas en  $\mathbb{P}^n$  si son rectas paralelas en  $\mathbb{R}^n$  que a lo sumo no contienen un punto en  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposición 5.9.** *Si dos rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son paralelas en  $\mathbb{P}^n$  y estas a su vez lo son con  $\mathcal{S}^{n-1}$ , entonces sus imágenes son rectas paralelas.*

**Demostración.** Sean  $\mathcal{L}_1: \mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_1 + t_1 \mathbf{d}$  y  $\mathcal{L}_2: \mathbf{x}_2 = \mathbf{p}_2 + t_2 \mathbf{d}$  con  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$ . y  $\mathbf{d}$  un vector director en  $\mathbb{R}^n$  tal que su segunda componente es  $d_2 = 0$ , de esta manera garantizamos que  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  sean paralelas entre sí por tener el mismo vector director  $\mathbf{d}$ , y además son paralelas a  $\mathcal{S}^{n-1}$  ya que el vector director  $\mathbf{d}$  tiene su segunda componente igual a cero. Así cada punto de  $\mathcal{L}_i$  quedará determinado por el parámetro  $t$

$$x_{ij}(t) = p_{ij} + td_j, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, i = 1, 2., \text{ y } j = 1, 2, \dots, n$$

El conjunto  $\tilde{\varphi}(\mathcal{L}_i)$  está dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(\mathbf{x}_i) &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(x_{i2} - q_2)} \Psi_2(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}) \\
&= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} - q_2)} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} p_{i1} + t d_1 - q_1 \\ p_{i2} - q_2 \\ p_{i3} + t d_3 - q_3 \\ \vdots \\ p_{in} + t d_n - q_n \end{bmatrix} \right) \\
&= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} - q_2)} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} p_{i1} - q_1 \\ p_{i2} - q_2 \\ p_{i3} - q_3 \\ \vdots \\ p_{in} - q_n \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right) \\
&= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} - q_2)} [\Psi_2(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) + t \Psi_2(\mathbf{d})] \\
&= \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_i) - \frac{q_2}{(p_{i2} - q_2)} t \Psi_2(\mathbf{d}) \\
&= \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_i) + t_0 \tilde{\varphi}(\mathbf{d})
\end{aligned}$$

Para las rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  tenemos que sus imágenes en  $\mathcal{S}^{n-1}$  son rectas, y como su vector director es el mismo  $\tilde{\varphi}(\mathbf{d})$  (no depende de  $i$ ), entonces estas rectas imágenes son paralelas.  $\square$

**Ejemplo 5.10.** En el ejemplo 5.8, el segmento formado por los puntos  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 3)$  y el segmento formado por los puntos  $(3, 0, 0, 0)$ ,  $(3, 0, 0, 3)$  son paralelos pues comparten el mismo vector director  $\mathbf{d} = (0, 0, 0, 3)$ , además también son paralelos a la sección  $\mathcal{S}^3$  por tener su segunda componente igual a cero. Por lo proposición 5.9 tenemos que las imágenes de estos segmentos son paralelos, hecho que concuerda con la imagen del Tesseracto de la figura 5.1 donde se muestra el cubo externo y el interno compartiendo similitudes.

**Proposición 5.11.** Sean  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  dos rectas paralelas en  $\mathbb{R}^n$  tales que no son paralelas a  $\mathcal{S}^{n-1}$ , entonces sus imágenes son semi-rectas en  $\mathbb{R}^{n-1}$  que convergen a un punto en  $\mathcal{S}^{n-1}$ , el cual está dado por

$$V_{\mathbf{d}} = \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{d_2} \Psi_2(\mathbf{d})$$

donde el vector director de las rectas esta dado por  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$  con  $d_2 \neq 0$ .

**Demostración.** Sean  $\mathcal{L}_1: \mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_1 + t\mathbf{d}$  y  $\mathcal{L}_2: \mathbf{x}_2 = \mathbf{p}_2 + t\mathbf{d}$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$  y  $\mathbf{d}$  un vector director en  $\mathbb{R}^n$  con su segunda componente distinta de cero. Así, cada punto de  $\mathcal{L}_i$  quedará determinado por el parámetro  $t$

$$x_{ij}(t) = p_{ij} + td_j, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, i = 1, 2., \text{ y } j = 1, 2, \dots, n$$

Cada punto del conjunto  $\tilde{\varphi}(\mathcal{L}_i)$  está dada por

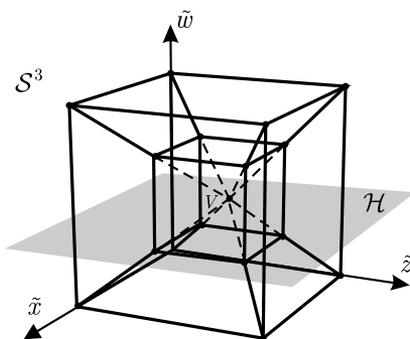
$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathbf{x}_i) &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(x_{i2} - q_2)} \Psi_2(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}) \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} p_{i1} + td_1 - q_1 \\ p_{i2} + td_2 - q_2 \\ \vdots \\ p_{in} + td_n - q_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} p_{i1} + td_1 - q_1 \\ p_{i2} + td_2 - q_2 \\ \vdots \\ p_{in} + td_n - q_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} [\Psi_2(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) + t\Psi_2(\mathbf{d})] \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} \Psi_2(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} t\Psi_2(\mathbf{d}), \end{aligned}$$

calculando el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} \Psi_2(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) - \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} t\Psi_2(\mathbf{d}) \right) \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \Psi_2(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} - \Psi_2(\mathbf{d}) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} t \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \Psi_2(\mathbf{d}) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q_2}{(p_{i2} + td_2 - q_2)} t \\ &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{d_2} \Psi_2(\mathbf{d}). \end{aligned}$$

□

En este caso  $V \in \mathcal{S}^{n-1}$  es el punto de fuga al cual convergen las rectas paralelas, lo podemos interpretar como el infinito, generando la sensación de profundidad de la  $n$ -dimensión.



**Figura 5.2.** Convergencia hacia el punto  $(0, 1, 1)$ .

**Ejemplo 5.12.** En el ejemplo 5.8, notamos que hay unos segmentos que a pesar de que son paralelos, sus imágenes no son. Estos segmentos se identifican con el vector director  $\mathbf{d} = (0, 1, 0, 0)$ , en virtud de la proposición 5.11, tenemos que las imágenes de las rectas que contienen a estos segmentos convergen a un punto  $V_{\mathbf{d}}$  donde

$$\begin{aligned}
 V_{\mathbf{d}} &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{d_2} \Psi_2(\mathbf{d}) \\
 &= \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \frac{-3}{1} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

el cual vendría siendo coordenadas  $x, z, w$  del observador<sup>5.1</sup>. En la figura 5.2 vemos como estos segmentos tienden a converger al punto  $V_{\mathbf{d}} = (0, 1, 1)$ .

En el capítulo 2 se estudió el conjunto horizonte (línea de horizonte). este concepto también lo podemos analizar en un espacio  $n$ -dimensional, por lo cual, extenderemos la definición 2.9 como se sigue.

5.1. De hecho, esto siempre sucede debido a que  $V_{\mathbf{d}} = \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{d_2} \Psi_2((0, 1, 0, 0)) = \Psi_2(\mathbf{q})$ .

**Definición 5.13.** Sean  $\mathbf{q}$  un observador,  $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, q_n)\}$  y  $\varphi|_A$ . Se define el **horizonte** de  $\mathcal{S}^{n-1}$ , denotado por  $\mathcal{H}$  dado por el siguiente conjunto

$$\mathcal{H} := \{\tilde{\varphi}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in A\}.$$

De esta definición podemos notar que:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)} \Psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\ &= \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} \right) - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - q_{n-1} \\ q_n - q_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)} \begin{bmatrix} x_1 - q_1 \\ x_3 - q_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} - q_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_1 - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)}(x_1 - q_1) \\ q_3 - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)}(x_3 - q_3) \\ \vdots \\ q_{n-1} - \frac{q_2}{(x_2 - q_2)}(x_{n-1} - q_{n-1}) \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de esta manera el conjunto horizonte lo podemos escribir como

$$\mathcal{H} = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n-1}, q_n) \in \mathcal{S}^{n-1}\}.$$

Este conjunto se representa como un hiperplano de dimensión  $n - 2$  (es aquí donde pasamos de decir “una línea de horizonte a un hiperplano de horizonte de dimensión  $n - 2$ ”). Este hiperplano  $\mathcal{H}$  es paralelo al hiperplano generado por los ejes  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n-1}$  en  $\mathcal{S}^{n-1}$ .

Un resultado más general del corolario 2.18 es el siguiente:

**Corolario 5.14.** Toda imagen de rectas paralelas al hiperplano conformado por los ejes  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n-1}$ , pero no a  $\mathcal{S}^{n-1}$ , tiene a su respectivos puntos de fuga en  $\mathcal{H}$ .

**Demostración.** El vector director de rectas paralelas al plano conformado por los ejes  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n-1}$  es de la forma  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, 0)$ , así

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{d}} &= \Psi_2(\mathbf{q}) - \frac{q_2}{d_2} \Psi_2(\mathbf{d}) \\ &= \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \right) - \frac{q_2}{d_2} \Psi_2 \left( \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} q_1 - \frac{q_2}{d_2} d_1 \\ q_3 - \frac{q_2}{d_2} d_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} - \frac{q_2}{d_2} d_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

□

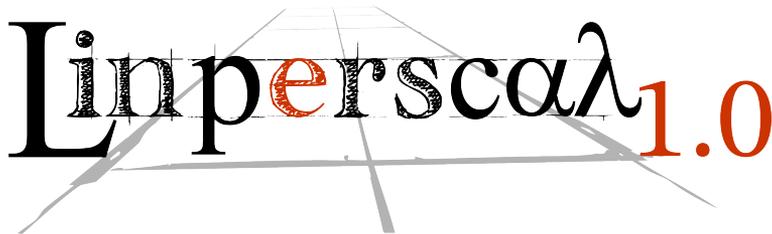
En el ejemplo 5.12 vimos que rectas con vector director  $\mathbf{d} = (0, 1, 0, 0)$  convergen al punto  $V_{\mathbf{d}} = (0, 1, 1)$  el cual está en  $\mathcal{H} = \{(\tilde{x}, \tilde{z}, 1) \in \mathcal{S}^3\}$  (ver fig 5.2).



# Capítulo 6

## Linperscal

En este capítulo veremos el manejo de un software que nos permitirá realizar los cálculos en perspectiva de una manera muy sencilla. Como hemos visto en los ejemplos, es tedioso calcular las representaciones dependiendo del tipo de sección, por lo cual un complemento a este trabajo fue la elaboración de un software que reúne todos los resultados de la teoría de la perspectiva con el fin de realizar todos los cálculos. Este software hace parte de la tesis elaborada por Darly Ospina M. para optar al título de Matemático.

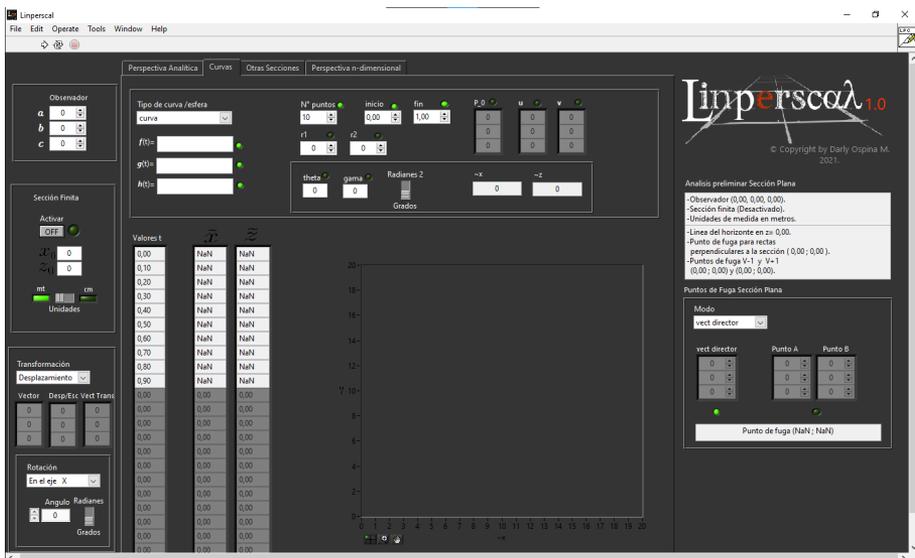
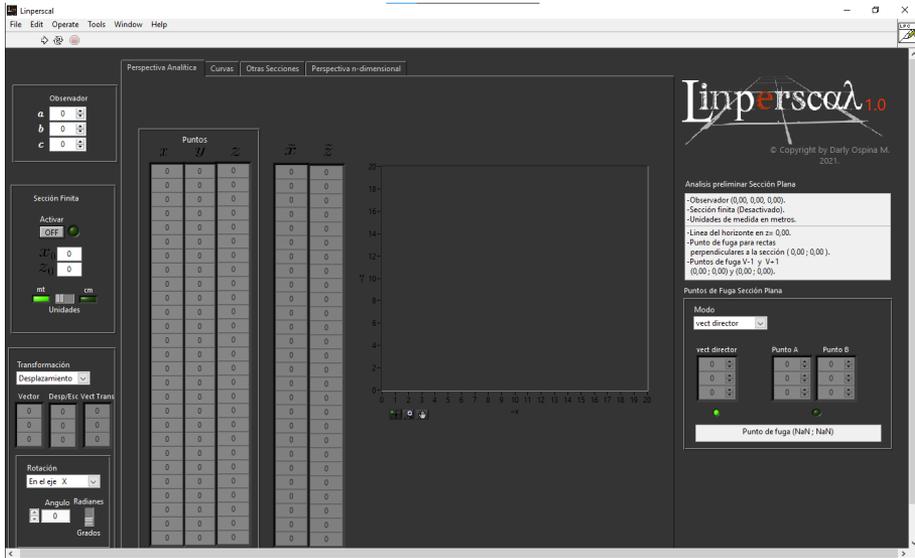


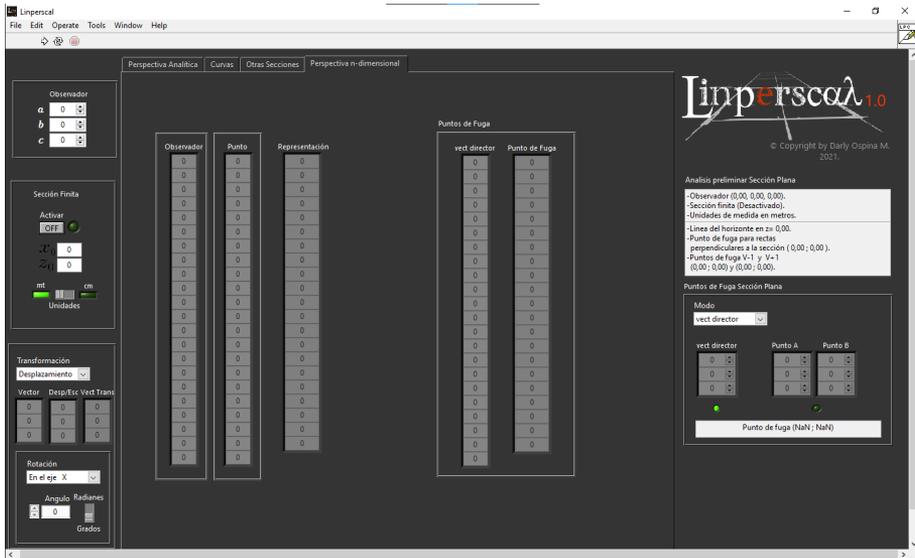
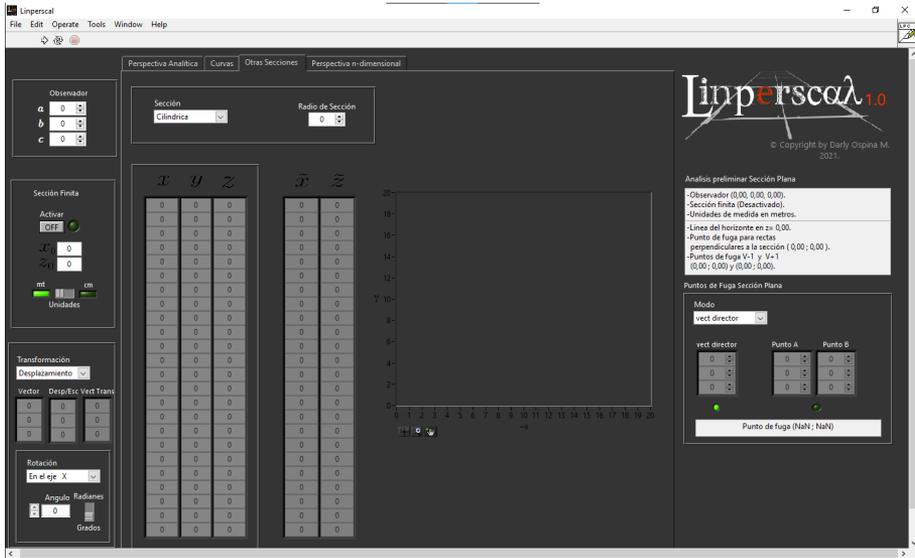
**Linperscal** (Linear Perspective Calculator) es una aplicación informática que tiene como objetivo proporcionar a los usuarios una herramienta que permite la realización de cálculos en la perspectiva lineal cónica (sin pretender nunca ser un programa de renderizado 3D). Se encuentra desarrollado principalmente para el sistema operativo Windows tanto con arquitectura de 32 bits ( $\times 86$ ) como de 64 bits ( $\times 64$ ), ejecutándose en un archivo instalador de extensión `.exe`. Desarrollador Darly Ospina M. Aprobado por Cristian Felipe Gallego O. A la fecha (8 de mayo de 2021) se encuentra en la versión 1.0.0.

**Linperscal** permite calcular representaciones de puntos contenidos en un dominio perspectivo para un observador y una sección dados, ingresando las coordenadas del observador entrega un análisis preliminar como la línea de horizonte y los tres puntos de fuga principales. También permite el cálculo de puntos de fuga para rectas de vector director dado, el cálculo de puntos representados de curvas en el espacio, así como las representaciones

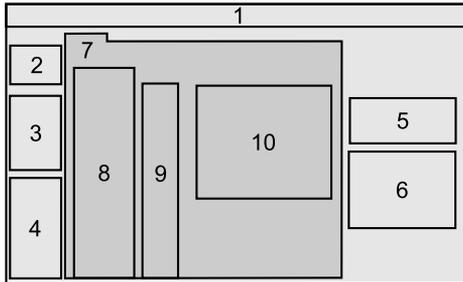
de puntos en otras secciones y el cálculo de representaciones de puntos en otras dimensiones. Viene incorporado con un label en los botones de entrada y salida para orientar al usuario, de necesitar más información, el usuario puede oprimir las teclas Ctrl + H y ubicando el cursor en cualquier entrada o salida recibirá una ventana con una ayuda más específica.

A continuación, se muestra unas capturas de pantalla de la interfaz de usuario del software **Linperscal**.

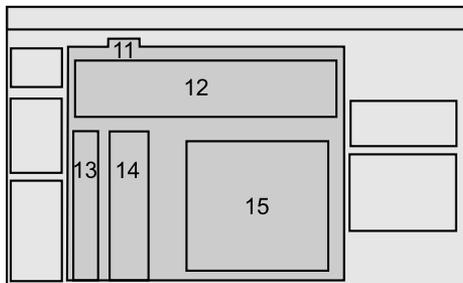




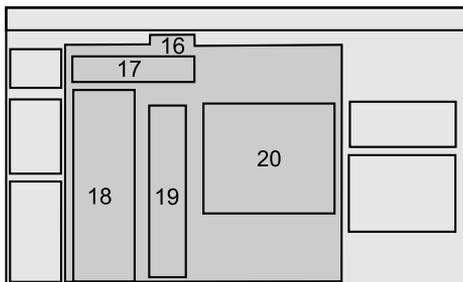
Ahora realizaremos una explicación detallada de su input y output.



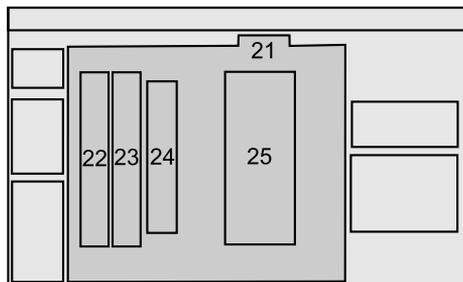
1. Esta es una barra básica de tareas donde el botón  $\nabla$  ejecuta una sola vez el programa y el siguiente botón a la derecha ejecuta de manera continua el programa (esta opción no es recomendada por que consume muchos recursos del equipo).



2. (input) coordenadas del observador.
3. (input) para secciones acotadas y cambio de unidades.
4. (input & output) para la transformación de vectores.



5. (output) análisis preliminar con información de observador, sección finita, línea de horizonte y los tres puntos de fuga principales.
6. (input & output) para determinar puntos de fuga dado un vector director, o dos puntos del espacio.



7. Esta pestaña contiene a 8,9 y 10, concierne a una sección plana y ortogonal al eje de visión.
8. (input) componentes del punto a representar.
9. (output) componentes de la representación en  $\mathcal{S}$ .

10. (output) representación gráfica del punto representado.
11. Esta pestaña contiene a 12,13,14 y 15, concerniente a una sección plana y ortogonal al eje de visión, en esta pestaña se encuentra todas las herramientas para la obtención de las representaciones de curvas en el espacio.
12. (input) entradas de los parámetros para la curva a representar. Una vez elegida el tipo de curva, los leds indican que parámetros ingresar.
13. (output) valores del parámetro  $t$  de para los cuales se están evaluando automáticamente.
14. (output) coordenadas de las representaciones respectivas a cada  $t$ .
15. (output) representación gráfica del punto representado.
16. Esta pestaña contiene a 17,18,19 y 21, concerniente a otras secciones.
17. (input) ingreso del tipo de sección.
18. (input) ingreso de coordenadas del punto a representar.
19. (output) componentes de la representación en  $\mathcal{S}$ .
20. (output) representación gráfica del punto representado.
21. Esta pestaña contiene a 22,23,24 y 25, concerniente a la perspectiva  $n$ -dimensional.
22. (input) coordenadas del observador perteneciente a una  $n$ -dimensión.
23. (input) punto en una  $n$ -dimensión, a representar.
24. (output) coordenadas de la representación del punto en la sección  $\mathcal{S}^{n-1}$ .
25. (input & output) para determinar puntos de fuga dado un vector director en  $\mathbb{R}^n$ .

También se ha desarrollado una versión ligera en un archivo de aplicación para el sistema operativo **Android®** de tipo **.apk**, la cual solo contiene como input un observador, el punto a representar y un vector director, y como output las coordenadas de la representación del punto y un punto de fuga en la sección plana ortogonal al eje de visión del observador además información como la línea de horizonte y los tres puntos de fuga principales.

Desarrollador Darly Ospina M. Aprobado por Cristian Felipe Gallego O. A la fecha (8 de mayo de 2021) se encuentra en la versión 1.0.

A continuación, se muestra unas capturas de pantalla de la interfaz de usuario de la aplicación **Linperscal.apk**.



# Bibliografía

- [1] Alzate, Héctor, *Física de las Ondas*. Medellín, Universidad de Antioquia, 2007.
- [2] Dixon, Robert, *Mathographics*. New York, Dover Publication, 1991.
- [3] Gardner, Martin, *Mathematical Carnival*, Washington D.C., The Mathematical Association of America, 1989.
- [4] Kemp, Martin, *La ciencia del arte, la óptica en el arte occidental de Brunelleschi a Seurat*. Ediciones Akal, 2002.
- [5] Leithold, Luis, *El Cálculo*. séptima edición, México, Oxford University Press, 1998.
- [6] Munkres, James, *Analysis on Manifolds*. Massachusetts, Eddison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [7] Rodrigues, Manuel, *Tratado de perspectiva lineal*. Madrid, Ibarro, 1834.



# Índice

$\tilde{\phi}$ . . . . .	29	Función	
Ángulo de elevación (depresión) . . . . .	49	perspectiva . . . . .	29
$\mathbb{I}$ . . . . .	73	vectorial . . . . .	51, 66
$\mathbb{P}^n$ . . . . .	91	Girard Desargues . . . . .	xi, 22
$\mathbb{P}^3$ . . . . .	27, 72, 74	Hiperplano . . . . .	90
$\mathbb{R}^n$ . . . . .	39, 89	Imagen . . . . .	13
$\mathbb{R}^3$ . . . . .	27	anamorfa . . . . .	71
$\mathcal{H}$ . . . . .	17, 36, 100	de rectas paralelas . . . . .	39, 41
$\mathcal{PR}_Q$ . . . . .	14, 89	de un elipse . . . . .	62
$S^{n-1}$ . . . . .	90	de una circunferencia . . . . .	64
$\mathcal{S}$ . . . . .	26, 51, 71	de una esfera . . . . .	69
$\Psi_i$ . . . . .	92	de una función . . . . .	69
Anamorfismo . . . . .	29, 72, 92	de una superficie . . . . .	67
Brook Taylor . . . . .	xi	Input y output . . . . .	106
Brunelleschi . . . . .	xi, 17	Intervalo	
Campo de visión . . . . .	13, 15	perspectivo . . . . .	73
Circunferencia . . . . .	61	Jean Debreuil . . . . .	22
Conjunto imagen . . . . .	29	Joshua Kirby . . . . .	xi
Cono visual . . . . .	17	Línea de horizonte . . . . .	17, 36, 100
Curvas . . . . .	51	Línea de tierra . . . . .	17
en el espacio . . . . .	52	Leon Battista Alberti . . . . .	18
paramétricas . . . . .	51	Linperscal . . . . .	103
planas cerradas . . . . .	61	Longitud de arco de la gráfica de una función . . . . .	76
planas en el espacio . . . . .	58	Masaccio . . . . .	18
Dominio . . . . .	27	Monge . . . . .	xi
función vectorial . . . . .	67	Objeto . . . . .	14, 16
perspectivo . . . . .	27, 71, 91	Observador . . . . .	15–16, 26, 90
Ecuaciones . . . . .	31	natural . . . . .	15
de simetría . . . . .	31	Operador lineal . . . . .	92
implícitas . . . . .	67	Otto Wilhelm Fiedler . . . . .	xi
paramétricas . . . . .	59, 66, 68	Perspectiva . . . . .	xi, 13
perspectivas . . . . .	35	Piero della Francesca . . . . .	xi, 19
Eje . . . . .	17	Plano . . . . .	17
focal . . . . .	17	de planta . . . . .	17, 30
visual . . . . .	17, 28	lateral . . . . .	17, 30
Elipse . . . . .	61	Punto de fuga . . . . .	17, 43, 98
Escalera en espiral . . . . .	55	Rayo . . . . .	14, 89
Espacios $n$ -dimensionales . . . . .	89	Rectas paralelas . . . . .	38, 96
Factor de profundidad . . . . .	35	Regla de L'Hôpital . . . . .	42
Función		Representación . . . . .	26, 93
de dos variables . . . . .	68	Sección . . . . .	26

Sección		Sección	
cilíndrica . . . . .	78	recta . . . . .	72
$n$ -dimensional . . . . .	90	Software . . . . .	103
en planta . . . . .	82	Superficie . . . . .	26
esférica . . . . .	85	paramétrica . . . . .	67
parabólica . . . . .	80	Teseracto . . . . .	95
plana . . . . .	28	$V_d$ . . . . .	43

# Autores

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA.  
CALLE 67 No. 53-108, MEDELLÍN, COLOMBIA.  
*Email address:* `cristianf.gallego@udea.edu.co`

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA.  
CALLE 67 No. 53-108, MEDELLÍN, COLOMBIA.  
*Email address:* `darly.ospina@udea.edu.co`