UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Facultad de Educación

Razonamiento algebraico en 3º grado

Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

ANA MILENA SIBAJA RAMOS

SURDELY SOTO RODRÍGUEZ

Asesores

HILDUARA VELÁSQUEZ

JOSÉ WILDE CISNEROS

Razonamiento Algebraico en 3º grado

Ana Milena Sibaja y Surdely Soto Rodríguez

Mayo 2016.

Universidad de Antioquia.

Departamento Ciencias y Artes.

Trabajo de Grado.

Dedicamos este trabajo a:

Dios quien supo guiarnos por un buen camino y darnos la fuerza para no rendirnos en los obstáculos que se nos presentaron.

Nuestros padres y familiares, por su apoyo, consejos, comprensión y ayuda en todo este proceso, por motivarnos y darnos la mano cuando sentíamos que el camino se terminaba.

Nuestros maestros quienes nunca desistieron al enseñarnos e influyeron con sus lecciones y experiencias para formarnos como personas y estar preparadas para los retos que nos pone la vida.

Agradecimientos

Agradecemos a la Institución Educativa Andrés Bello por abrimos las puertas de su establecimiento, de igual manera a la maestra cooperadora Cecilia Pulgarin por permitirnos hacer parte de su clase, por su acompañamiento, apoyo, disposición, y por brindarnos su experiencia y permitirnos crecer como docentes en formación.

A nuestros asesores Hilduara Velásquez y José Wilde Cisneros por el acompañamiento, apoyo, motivación y paciencia que demostraron en todo momento, por brindarnos sus conocimientos, exigirnos responsabilidad y compromiso para sacar este trabajo adelante.

A nuestros compañeros por ser parte de este proceso, por su apoyo y aportes, que nos ayudan a crecer cada día como personas.

Agradecemos a nuestras familias, por ser fuente de apoyo constante e incondicional en esta carrera, por animarnos a continuar a pesar de las dificultades, por acompañarnos día a día. Y principalmente a Dios por regalarnos la vida y ser nuestro Guía en este camino.

Resumen

El proyecto de investigación se realiza en el marco de la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Se indaga por el desarrollo del Razonamiento Algebraico en niños de 3° grado de la I. E. Andrés Bello, a través de tareas asociadas a la identificación de patrones y regularidades, construcción de secuencias y generación de equivalencias. Se retoman aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), el razonamiento algebraico (Godino y Font, 2003; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012) y los niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014).

La investigación enmarcada en el paradigma cualitativo desde un Enfoque Interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2008) en el cual se busca explicar, comprender e interpretar los significados producidos por los niños durante las clases y el desarrollo de las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico.

Las actividades matemáticas realizadas por los niños se analizaron mediante los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) y de acuerdo con la tipología de las tareas (Mora, 2012) teniendo en cuenta los datos obtenidos, los referentes teóricos y la postura que asumimos como investigadoras. Durante la participación en el aula se logra un avance en del desarrollo del razonamiento algebraico en la medida que los niños logran resolver algunas tareas utilizando objetos intensivos (Aké, 2010) lo cual permite ubicar la solución de la tarea en los niveles 1 y 2 de algebrización.

Palabras Clave: Enfoque Ontosemiótico, Razonamiento algebraico, Niveles de Algebrización, Generalización, Secuencias, Patrones.

Abstract

The investigation project is realized in the frame of the pedagogic practice of the Degree in Basic Education emphatically in Mathematics. This research investigates about the development of the Algebraic Reasoning in children of 3 ° degree of the I. E. Andrés Bello, across tasks associated with the patterns identification and regularities, construction of sequences and generation of equivalences. Are taken up theoretical aspects of the Approach Ontosemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), the algebraic reasoning (Godino y Font, 2003; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012) and the levels of algebraization (Godino, Aké, Gonzato, y Wilhelmi, 2014).

The investigation is framed in the qualitative paradigm from an Interpretive Approach (Hernández, Fernández y Baptista, 2008), in which it is sought to explain, to understand and to interpret the meanings produced by the children during the classes and the development of the tasks associated with the Algebraic Reasoning.

The mathematical activities realized by the children were analyzed by means of the algebraization levels (Godino et al., 2014) and in agreement with the typology of the tasks (Mora, 2012) considering the obtained data, the theoretical references and the position that we assume as investigators. During the intervention in the classroom an advance is achieved a development of the algebraic reasoning in the measure that the children achieve to solve some tasks using intensive objects (Aké, 2010), which allows to locate the solution of the task in the levels 1 and 2 of algebraization.

Key words: Approach Ontosemiótico, Algebraic Reasoning, Algebrización's Levels, Generalization, Sequences, Bosses.

Tabla de contenido

Lista de figuras

Capítulo 1

Contextualización

Contexto

La Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia seccional Medellín, se realizó en la Institución Educativa Andrés Bello ubicada en el municipio de Bello (Antioquia), de carácter oficial, presta el servicio educativo en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media técnica con formación en comercio, logística y asistencia administrativa en convenio con el SENA.

En el proceso de reconocimiento institucional, se analizan algunos componentes del Proyecto Educativo Institucional (PEI), en el cual se plantea como modelo pedagógico la construcción activa del conocimiento. Sin embargo, en las observaciones de clase, se evidencia poca relación entre lo planteado en este modelo y las estrategias de enseñanza de la maestra cooperadora[1]; en las clases predominan la repetición, la transcripción de textos y la ejercitación de las operaciones básicas; lo cual hace que la clase sea de corte tradicional con una gestión protagónica por parte de la profesora.

En la Misión Institucional, la Institución propone educar desde la perspectiva social y cultural, basada en los principios de justicia, igualdad y equidad, de tal forma que los estudiantes, sean ciudadanos equilibrados, fortalecidos en sus competencias intelectuales, creativas, tecnológicas, científicas, ciudadanas, culturales y laborales, para su proyección de vida comunitaria con

[1] Docente titular del grupo donde se realiza la práctica.

calidad humana. En la Visión Institucional, se considera que la Institución será reconocida como una entidad integradora y abierta a la diversidad, líder en la formación personal, académica, técnica y axiológica de sus estudiantes, para que se proyecten de forma integral en los diferentes ámbitos nacionales e internacionales. En la Filosofía Institucional, se considera la persona como un proyecto, que está en evolución permanente, dado que las mismas realidades y contextos varían, es un ser en transformación que se vale de múltiples elementos simbólicos y significativos, como el lenguaje y el pensamiento, mediante los cuales elaboran, crean, recrean y aprehenden las realidades.

La Institución cuenta con una rectora, un coordinador académico, una coordinadora de convivencia, una secretaria, y el personal docente está organizado por profesorado para cada grado. En el grado tercero la maestra cooperadora tiene formación en Educación Especial.

Las edades de los estudiantes de grado 3º fluctúan entre los 9 y 10 años, más del 80% pertenecen a hogares de estrato socio-económico de niveles II y III; las familias se encuentran constituidas por padres, madres, hijos y en algunos casos por tíos y abuelos.

Planteamiento del problema

El problema de investigación se sustenta en tres aspectos fundamentales: el primero refiere al Plan de área institucional de matemáticas para grado 3° de primaria; el segundo, a los resultados institucionales de las Pruebas Saber en este grado y en el tercero, se vinculan las dificultades de los estudiantes al resolver tareas[2] asociadas al Razonamiento Algebraico.

En el Currículo Institucional, de los 22 indicadores de logro propuestos para el grado 3°, sólo uno de ellos corresponde al Pensamiento Variacional, la mayoría se ubican en el Pensamiento Numérico, enfocados principalmente a la ejercitación de las cuatro operaciones aritméticas básicas: suma, resta multiplicación y división de números naturales; lo cual evidencia la ausencia del desarrollo del Pensamiento Variacional en este grado. Aunque en el Plan de área se consideran los estándares relacionados con este Pensamiento, las temáticas referidas al Variacional no se incluyen en los indicadores de logro ni en las actividades que la maestra diseña para el trabajo de aula.

Por otra parte, los resultados institucionales de las Pruebas Saber del grado 3°, en los dos últimos años registran un bajo desempeño de los estudiantes en el componente numérico-variacional.

[2] Para el Enfoque Ontosemiótico (EOS), las tareas son entendidas como toda actividad matemática que produce un conocimiento, se constituyen en los procedimientos, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones requeridas para la solución, los cuales permiten la adquisición de conocimiento, pueden estar a cargo del profesor, los estudiantes o distribuidas entre ambos (Godino et al., 2014).

En la Figura 1 se muestran los resultados de las Pruebas Saber de 3° grado correspondientes a los años 2013 y 2014.

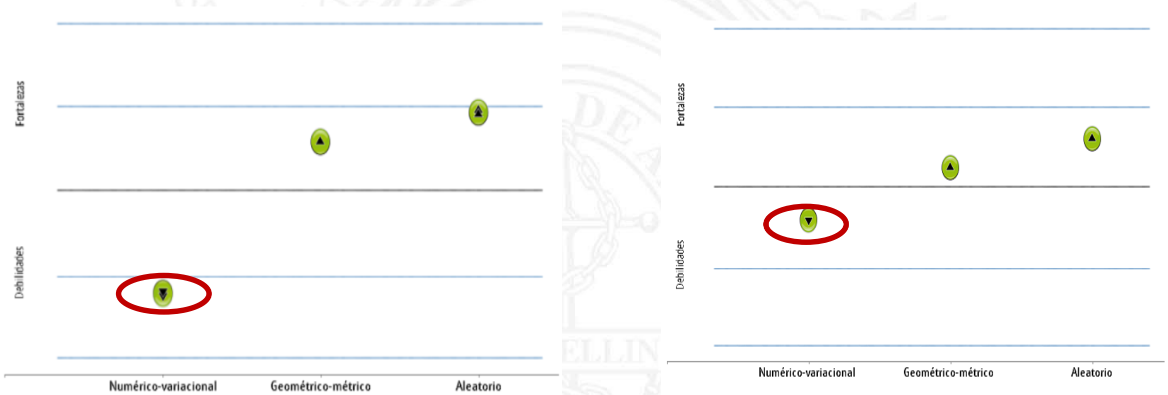


Figura 1. Resultados Pruebas Saber 2013 - 2014.

Estos resultados muestran que la Institución presenta un desempeño inferior al promedio nacional, lo cual pareciera natural, dado que se nota cierta ausencia del desarrollo del Pensamiento Variacional en el currículo matemático propuesto en la Institución.

En las observaciones de clase se pudo evidenciar una tendencia al uso exclusivo de tiza, tablero y el discurso de la maestra, pocas veces se utilizan materiales didácticos como mediadores del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo cual puede ser una de las causas que genera desinterés y desmotivación en los niños para aprender matemáticas.

Los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 1998 -2006) plantean el desarrollo del Pensamiento Variacional desde grado 1° de educación primaria; lo cual implica, que en el desarrollo del currículo se deben implementar tareas asociadas con la descripción e interpretación de variaciones y de cambio, representación de gráficos, dibujos, tablas, esquemas y predicción de patrones de variación en secuencias numéricas, geométricas o gráficas, los cuales deben focalizar la atención en las clases.

Sin embargo, en el diagnóstico que se realizó, al aplicar a los niños de 3° grado diversas tareas matemáticas para analizar las soluciones que daban a las mismas, se pudo reconocer algunas dificultades referidas a: la construcción y el reconocimiento de secuencias, la identificación de patrones, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos; así como en la descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos (verbales, icónicos, gráficos o algebraicos).

La Figura 2 muestra la tarea N° 1 del diagnóstico, donde los niños deben identificar el patrón de formación y completar las casillas que faltan de la secuencia numérica.

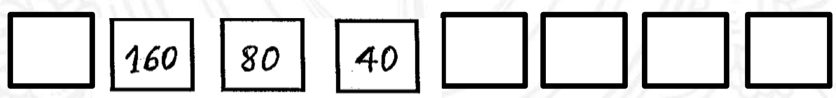


Figura 2.Tarea Nº 1. Prueba diagnóstica

En la Figura 3 se presenta la forma como un grupo de estudiantes completa las casillas que faltan en la secuencia.

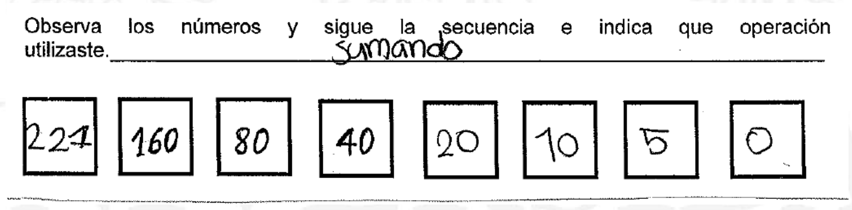


Figura 3.Solución de un grupo de niños

Los niños identifican el patrón de formación a partir del número 40 hacia la derecha de la secuencia y completan los números que faltan excepto la última casilla; lo anterior lleva a interpretar que, para los niños el número 5 no tiene mitad, por lo tanto, lo representan con “0”;

pero en la primera casilla donde requería del proceso de reversibilidad “el doble de”, se presentan dificultades para identificar el número que corresponde a esta casilla, no logran identificar la relación inversa.

Además, se identifican dificultades con las operaciones requeridas para dar solución a la secuencia numérica; por lo tanto, la solución de la tarea, hace que se ubique en el Nivel 0 de algebrización “ausencia de razonamiento algebraico” (Godino et al., 2014), dado que los niños estiman y comparan las expresiones para establecer un orden, utilizando la suma como objeto matemático, la cual se manifiesta como un proceso aritmético; es decir, no se caracteriza como un proceso algebraico, donde el niño logra describir y completar la secuencia numérica.

En la tarea N° 2 (Figura 4) se presenta a los niños una secuencia pictórica, que consiste en identificar el patrón de formación de las flechas y completar las cuatro que faltan.

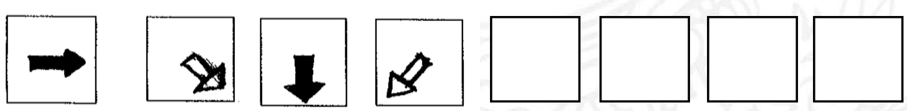


*Figura 4.*Tarea N° 2. Prueba diagnóstica. Secuencia pictórica.

En la Figura 5 se muestra la solución que da un grupo de niños, donde se observa la dificultad para identificar el patrón de formación. La solución se reduce a dibujar exactamente las mismas cuatro flechas dadas inicialmente en la misma posición, sin identificar el patrón de rotación y secuenciación, ni la variación en el sombreado de las flechas. Puede inferirse que, los niños presentan dificultades tanto en la percepción de la variación de representaciones gráficas, como en la comprensión de notaciones simbólicas y convencionales.

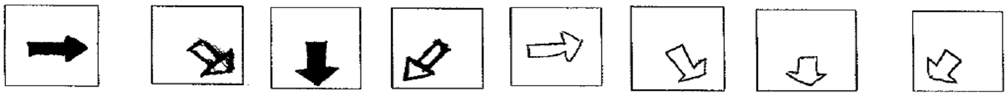


*Figura 5.*Solución de un grupo de niños.

De acuerdo con lo anterior, el proyecto gira entorno a la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo fortalecer el desarrollo del Razonamiento Algebraico en niños de 3° grado de la I. E. Andrés Bello?

Objetivos

Objetivo General

Fortalecer el desarrollo del Razonamiento Algebraico en niños de 3° grado de la I. E. Andrés Bello, a través de tareas asociadas a la identificación de patrones y regularidades, construcción de secuencias y generación de equivalencias.

Objetivos Específicos

- Analizar las soluciones dadas por los niños a tareas asociadas a la identificación de patrones y regularidades, construcción de secuencias y generación de equivalencias.
- Identificar los niveles de algebrización en la solución que dan los niños a tareas referidas al Razonamiento Algebraico.

Justificación

La concepción de Razonamiento Algebraico se referencia en investigaciones y teóricos en el contexto internacional, mientras que el Pensamiento Variacional se ubica principalmente en el contexto Colombiano a partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencia emitidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y autores como Vasco (2002).

En éstas conceptualizaciones se encuentran objetos matemáticos[3]que coinciden, algunos de ellos son: procesos de generalización, construcción de secuencias, identificación de regularidades y patrones de formación asociados a situaciones de variación y cambio; aspectos que se amplían con más detalle en el marco teórico.

Diversos autores proponen implementar actividades relacionadas con el Razonamiento Algebraico desde la edad temprana (Davis, 1985; Vergnaud, 1988; Carpenter, Franke y Levi, 2003) algunos la han denominado "Early álgebra". Incorporar en la escuela primaria, actividades asociadas al Razonamiento Algebraico, genera un ambiente de trabajo en matemáticas en la que los alumnos exploran, modelizan situaciones, predicen, discuten, argumentan y comprueban ideas, además de practicar habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2005).

[3] Se entiende por objetos matemáticos aquellas situaciones, acciones, lenguaje, conceptos – reglas, propiedades y argumentaciones, los cuales se ponen en juego en la actividad matemática, considerados como entidades primarias Godino (2002).

Así mismo, la inclusión del Razonamiento Algebraico en la básica primaria favorece mejores niveles de desempeño de los estudiantes en grados superiores, en cuanto al uso de ecuaciones, variables, funciones, la modelación de situaciones de cambio, variación de magnitudes y funciones polinómicas Derry, Wilsman y Hackbarth (2007) y la identificación de relaciones de cambio en diferentes representaciones. Estos son aspectos considerados en los Estándares Básicos de Competencia Matemática en los grados de la básica secundaria y media.

Por otro lado, la incorporación del Razonamiento Algebraico elemental en primaria, facilita la comprensión de las matemáticas (Kaput, 2000; Davis, 1985; Vergnaud, 1988). Ésta incorporación presupone cambiar la forma de concebir el álgebra como tal, de manera que al incluirla en este nivel educativo se tiene como finalidad fortalecer el desarrollo de dicho pensamiento en los niños.

El proyecto que presentamos retoma algunos aspectos del Enfoque Ontosemiotico (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) en el cual se articulan diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento y la instrucción matemática. El EOS permite el estudio y la comprensión de las nociones de objetos matemáticos y significados, constituidos por elementos lingüísticos que abarcan los símbolos, las representaciones, las gráficas, los términos y las expresiones matemáticas; los conceptos matemáticos, los procedimientos que incluyen técnicas, las operaciones y los algoritmos; las propiedades y los argumentos que pueden ser justificaciones, demostraciones o pruebas de las proposiciones, propuestas en toda tarea matemática.

El EOS favorece identificar e interpretar las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico, en términos de los niveles de algebrización, caracterizando el álgebra por medio de objetos y procesos que intervienen durante la práctica matemática la cual se desarrolla a través de los significados institucionales y personales que pueden ser construidos por los niños en la interacción con las tareas y el proceso mismo de enseñanza (Aké, 2013).

Se propone incluir los niveles de algebrización para analizar las acciones de los niños con respecto a las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico, donde las tareas se clasifican en cada uno de los niveles dependiendo de la solución de la misma Godino et al. (2014) "Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática, de acuerdo con el EOS del conocimiento y la instrucción matemática" (Godino et al., 2007; Godino, 2012).

La incorporación de las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico en el proceso de enseñanza de las matemáticas en el grado 3°, posibilitará mejores resultados en el desempeño de los niños en el componente numérico-variacional, no solo en la evaluación del aprendizaje en la Institución, sino también en las Pruebas Saber; además se espera que los maestros implementen diversas herramientas que fortalezcan el desarrollo del Razonamiento Algebraico en edad temprana, con el fin de evitar dificultades relacionadas a este desarrollo en grados superiores.

Capítulo 2

Marco teórico

El marco teórico considera las conceptualizaciones de Razonamiento Algebraico y Pensamiento Variacional; se incluyen los niveles de algebrización Godino et al. (2014) para el análisis de las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico desarrolladas por los niños; y algunas de las nociones teóricas del EOS sobre el conocimiento y la instrucción matemática.

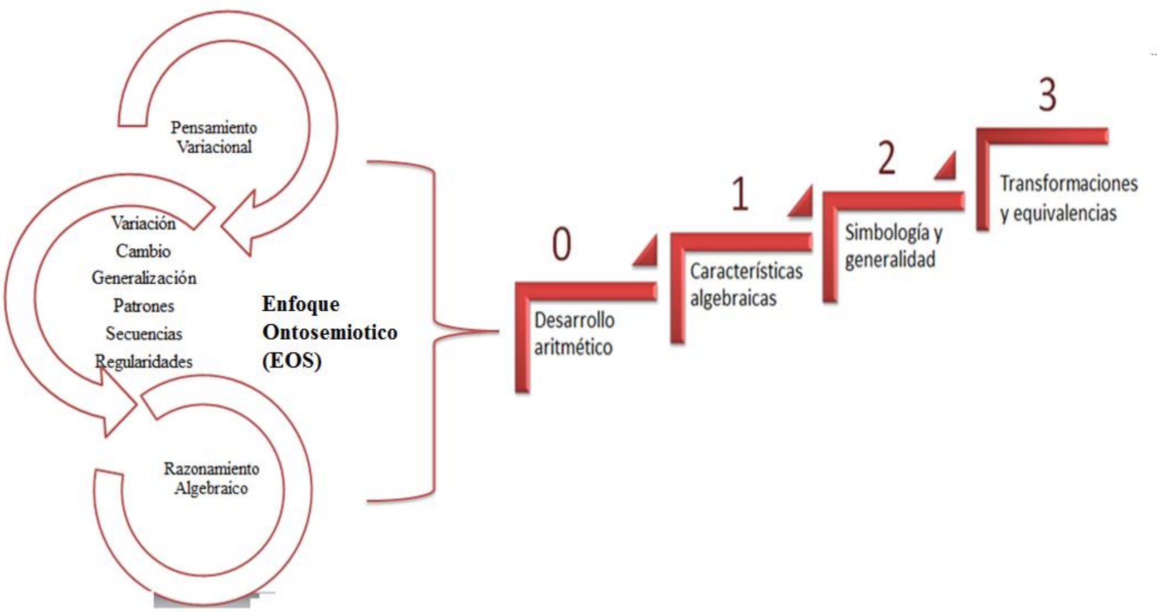


Figura 6.Esquema del marco teórico

Las dos conceptualizaciones teóricas Razonamiento Algebraico y Pensamiento Variacional proponen conexiones en cuanto al proceso de generalización (figura 6), construcción de secuencias, identificación de regularidades, cálculos numéricos y solución de ecuaciones numéricas, asociados con situaciones de variación y cambio; lo cual se produce por medio de la presencia transversal de características del Pensamiento Variacional con los demás pensamientos, implementando tareas asociadas al Razonamiento Algebraico.

Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento y la instrucción matemática, su enseñanza y aprendizaje Godino et al. (2007). Se propone una aproximación al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE[4]) que lo considera como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas en la básica primaria, en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, etc.).

Así mismo, en este enfoque se considera "la práctica matemática como toda actuación o expresión (verbal, grafica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino, 2006, p. 658). Por lo tanto, se entiende por prácticas operativas aquellas acciones ejecutadas por alguien para resolver problemas matemáticos y realizar argumentaciones sobre estos; las prácticas discursivas permiten comunicar a otros una justificación de la validez de las soluciones; es decir que a través de éstas los niños pueden argumentar las soluciones de las

---

[4] Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), es entendido como los rasgos característicos que se producen en las actividades algebraicas, sobre objetos matemáticos determinados (Godino et al., 2015).

tareas asociadas al Razonamiento Algebraico por medio de una justificación que les permita comprobar su validez.

Este enfoque es un modelo teórico que asume una perspectiva sistémica e interdisciplinaria (Steiner, 1985) para trabajar la complejidad de la educación matemática como un campo de investigación, desarrollo y práctica. Algunos de sus objetos de indagación son: el estudio de la relación entre los significados personales e institucionales que se le atribuyen a un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión; y el estudio de los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos usados en las interacciones didácticas. Aunque algunos autores consideran la comprensión como proceso de pensamiento; el EOS entiende la "comprensión" como una competencia, es decir, que los sujetos aplican de manera competente los objetos matemáticos en diferentes prácticas (Font, 2001).

Los significados institucionales son el sistema de prácticas operativas y discursivas, que tienen lugar en el aula de matemáticas, las cuales se constituyen en referencia para el estudio de los alumnos y la evaluación de sus aprendizajes (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006); así mismo, los significados personales se entienden como el sistema de prácticas realizadas por una persona individualmente en diferentes campos, mediante éstos significados, se describen los procesos de aprendizaje de los niños durante la práctica matemática (Godino y Batanero, 1994).

El EOS propone una tipología de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas, considerándose así, los objetos intensivos-extensivos; "un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que es intensivo, si interviene como un tipo clase o generalidad" (Aké, 2010, p. 59).

Los objetos matemáticos inmersos en este proyecto son: procesos de generalización, construcción de secuencias, identificación de regularidades y patrones de formación asociados a situaciones de variación y cambio; dichos objetos al ser analizados mediante el EOS y los niveles de algebrización permiten una caracterización de los significados que los niños construyen de dichos objetos matemáticos.

Razonamiento Algebraico

El Razonamiento Algebraico en la escuela primaria está asociado con la identificación y comprensión de patrones y relaciones usando diferentes reglas; a la identificación de secuencias y la generalización de las mismas, a la representación y análisis de situaciones y estructuras matemáticas usando diferentes representaciones y lenguajes; al uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y al análisis de la variación y el cambio en diversos contextos. Es decir, "implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones" (Godino y Font, 2003, p. 774).

En el Razonamiento Algebraico se incluyen características que deben ser conocidas por los maestros y adquiridas por los niños a través de la implementación de tareas, que surgen de manera natural en el uso de patrones o regularidades que se encuentran en diferentes formas (físicas, geométricas y numéricas) usando símbolos que permiten expresar las generalizaciones de los patrones, destacando los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones; las variables son símbolos que tienen significados diferentes dependiendo de sí se usan como representaciones de cantidades, como valores específicos o como fórmula. Así mismo, las funciones son reglas que se asocian a los elementos de un conjunto con los de otro, se expresan en contextos reales mediante gráficas, tablas o enunciados (Godino et al., 2012).

El "álgebra escolar" incluye no sólo las funciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino también el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructuras isomorfas[5] (Godino y Font 2003, p. 4)

El término Razonamiento Algebraico hace referencia "a la actividad de los estudiantes de generalizar sobre datos y relaciones matemáticas, estableciendo esas generalizaciones a través de conjeturas y argumentaciones y expresándolas en formas cada vez más formales" Kaput (1999, citado por Bressan y Gallego, 2010, p. 10). Es decir, que los niños en el desarrollo de las tareas matemáticas comienzan a utilizar símbolos que les permiten lograr un proceso de identificación de patrones y posteriormente la generalización de los mismos.

A continuación, se definen los objetos matemáticos involucrados en este proyecto.

[5] En la RAE, se entiende por estructuras isomorfas aquellos objetos matemáticos que están constituidos por la misma forma o estructura.

Patrones de formación

Los patrones de formación se presentan de forma periódica, se repiten con determinada regularidad por medio de signos, se construyen por medio de una regla o algoritmo; los patrones son reconocidos en la investigación por su importancia en la introducción al álgebra, así mismo; “los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes” (Godino, 2004, p. 386) es decir, en la solución de las tareas implementadas a los niños, emergen patrones, ya sean numéricos, icónicos, geométricos.

Así mismo, un patrón puede entenderse como un camino para discernir reglas generales, es decir, es una vía hacia la generalización; el patrón se puede observar a partir de la repetición de una situación con regularidad (Merino, 2012).

Secuencias

“Las secuencias son un conjunto de signos ordenados (orales, gestuales, físicos, comportamentales, gráficos, numéricos, etc.) llamados términos que se constituyen a partir de una regla de repetición de un patrón” (Mora, 2012, p. 4). La autora clasifica las secuencias en seis formas diferentes: secuencias con el cuerpo en donde se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos; secuencias manipulativas, utilizando materiales manipulativos (fichas); secuencias figurativas o icónicas utilizando figuras o gráficos; secuencias grafico-numéricas, donde se utilizan gráficos relacionados con números; y secuencias numéricas que aluden a una lista de números con un patrón de formación determinado.

De igual modo, “Una secuencia es un número de cosas o acontecimientos que se presentan uno detrás del otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón definido, por lo general moviéndose en etapas hacia un resultado particular” (Collins, citado por Castro, 1995, p. 44).

Generalización

Es un proceso que tiene como objetivo encontrar y analizar sistemáticamente una ley de formación. Se considera como “el nivel más alto de la modelación” (MEN, 1998, p. 77). La generalización se establece expresando la conjetura y la argumentación cada vez más formales Mora (2012). Es uno de los procesos que ocurren en cualquier nivel del pensamiento matemático y que está incluido en uno más global, el proceso de abstracción; “generalizar es inducir de casos particulares, identificar aspectos en común, para expandir dominios de validez” (Dreyfus, 1991, p. 35, traducción libre realizada por Mora, 2012).

Además, “La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas” (Godino y Font, 2003, p. 777). La generalización se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas –gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades, etc. que permiten el tratamiento de situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas (MEN, 2006).

Cambio

El cambio puede entenderse como la modificación en la cantidad de una magnitud. Gómez (2008). El cambio implica necesariamente comparaciones, para que un objeto cambie o no, es necesario un referente de comparación, si cambia es preciso tener en cuenta con respecto a qué cambia, si no cambia también es necesario tener en cuenta respecto de qué no cambia. El estudio del cambio puede entenderse como una de las formas de pensar, como ocurre con el análisis de relaciones entre cantidades y la identificación de estructuras (Callejo, 2015).

Variación

Este término puede identificarse en los cambios de magnitud, específicamente la tasa de cambio en relación con el tiempo; por ejemplo, la aceleración es un cambio de velocidad con respecto al tiempo MEN (2006). La variación permite explicar de qué forma cambia una magnitud con respecto a otra, y se logra por ejemplo cuando los alumnos preparan tablas con los valores correspondientes a cantidades de dos magnitudes relacionadas (Godino y Font, 2003).

El estudio de la variación puede iniciarse desde los primeros grados escolares, a través de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de variación y cambio de la vida práctica y del mundo real de los niños, esto les permitirá familiarizarse con este objeto matemático (MEN, 1998).

Niveles de algebrización

Los niveles distinguen las acciones de los estudiantes frente a la solución de tareas matemáticas, a las que se les concede cierto carácter algebraico (Godino et al., 2014).

> El fundamento para definir los distintos niveles de algebrización es de índole Ontosemiótica; esto es, se tiene en cuenta la diversa naturaleza de los objetos y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas operativas y discursivas que realiza un sujeto epistémico o ideal (punto de vista institucional) (Godino et al., 2015, p.4).

Así mismo, de acuerdo con el EOS, los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática (Godino et al., 2007; Godino, 2012). "El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad[6] matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro" (Godino et al., 2014, p. 4). Los cuatro niveles son definidos de la siguiente manera:

Nivel 0 de algebrización: ausencia del razonamiento algebraico

En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, se opera con objetos particulares con lenguajes natural, numérico, icónico y gestual; en este nivel las tareas son netamente aritméticas, no existen características algebraicas (símbolos, letras).

Si ante el siguiente problema: *Si Juan tiene 15 libros y Ana tiene el doble de los libros que tiene Juan, aumentando en 5 libros. ¿Cuántos libros en total tiene Ana?*, un niño razona de la siguiente manera; si Juan tiene 15 libros, el doble seria 30 libros, ahora como se dice que Ana tiene el doble de libros que Juan aumentado en 5, entonces al 30 le suma 5 libros, para obtener un total de 35 libros.

[6] Se entiende por actividad, el desarrollo o solución que los niños le den a una tarea (Godino et al., 2014).

En el desarrollo de este problema el niño utiliza objetos extensivos a través de una operación aritmética y asume la igualdad como resultado de la operación; pero estos procesos de particularización no se estiman propios del Razonamiento Algebraico; por lo tanto, se le asigna un nivel 0 de algebrización a la solución.

Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

Este nivel pone en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica. "Existe un primer encuentro con el «número general», identificación de propiedades generales de las estructuras algebraicas de los números naturales, la igualdad como equivalencia. O sea, adquisición de los primeros pasos del pensamiento relacional" (Godino et al., 2015, p. 129).

Dada la siguiente igualdad: 20 + ____ = 25 + 25, el niño puede solucionarla así

20 + __ = 25 + 25
20 + ___ = 20 + 5 + 25
20 + ___ = 20 + (5 + 25)
20 + ___ = 20 + 30 y razonar que el número que falta es el 30.

A través de la descomposición del número 25 y la aplicación de la propiedad asociativa, se logra identificar la cantidad desconocida, aplicando las propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales. Por consiguiente, ésta solución se podría ubicar en el nivel 1 de algebrización.

Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

En este nivel se inicia el primer encuentro con la representación alfanumérica de ecuaciones, funciones y simplificación de expresiones. A partir del uso de la simbología algebraica y el reconocimiento de la generalidad, con valores particulares y operaciones aritméticas.

Dada una secuencia de cuadrados construidos con palillos, en la cual se indaga por el número de palillos necesarios para construir las figuras de las posiciones 4 y 30.

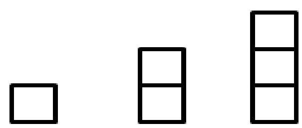


*Figura 7.*Secuencia de cuadrados construidos con palillos

Una solución a la secuencia podría ser la siguiente: un cuadrado requiere de 4 palillos, por lo tanto, la figura de la posición *n* requiere de 4*n* palillos. Sin embargo al ubicar los cuadrados conjuntamente se eliminan palillos; es decir, en la figura de la posición 2 se elimina 1, en la 3ª se eliminan 2, en la 4ª se eliminan 3; por lo tanto para hallar el número de palillos se aplica la expresión: $4n – (n – 1)$. Entonces, para hallar la posición 4 sería, $4(4) – (4 – 1) = 16 - 3 = 13$ y para la posición 30, sería: $4(30) – (30 – 1) = 91$

> Se trata de una generalización de tipo mixto, contextual y simbólico. La regla que proporciona el número de palillos en una posición cualquiera se relaciona con la forma y posición ordinal de la figura. La fórmula dada no es transformada operando con la variable para obtener la forma canónica de la expresión algebraica (Godino et al., 2014, p. 12).

Nivel consolidado de algebrización (nivel 3)

En este nivel ocurre el primer encuentro con el tratamiento de las incógnitas y variables aplicando propiedades estructurales (cancelación, sustitución…) algebraica y funcional. El alumno usa y comprende la simbología algebraica, para operar con ella y realizar transformaciones en sus expresiones, conservando siempre la equivalencia.

En la situación anterior (secuencia de cuadrados), se podría formalizar asociando la expresión general para n cuadrados, como $3n + 1$ con n = posición de la figura. La solución de la secuencia permite la sustitución de la variable n, de acuerdo a la posición respectiva. Por lo tanto, para el caso de la posición 30, resuelve $3(30) + 1 = 91$ palillos. Lo cual ubica la solución en el nivel consolidado de algebrización, en la medida en que se plantean ecuaciones, se opera con ellas y se aplican técnicas algebraicas para resolver la situación dada.

Capítulo 3

Metodología

En la investigación se hace un análisis cualitativo de los datos recolectados; los cuales constituyen la esencia en el análisis de las actividades matemáticas realizadas por los niños, cuando se enfrentan a dar solución a tareas asociadas al Razonamiento Algebraico. En este análisis se tienen en cuenta los niveles de algebrización (Godino et al., 2014).

En el estudio se busca comprender[7], describir e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por la experiencia de los participantes (Hernández et al., 2008). En este caso en particular, los niños de 3º grado de la I. E Andrés Bello. La interpretación de los significados se hace desde el soporte teórico del EOS y el Razonamiento Algebraico en cuanto a los objetos matemáticos (construcción de secuencias, patrones de formación o regularidades, generalización, situaciones de variación y cambio).

El proyecto entrelaza la descripción de los eventos con el análisis de éstos, destaca las acciones más relevantes y se esfuerza por representar "lo que es", lo que sucede en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para tomar en primer plano la realidad de los hechos (Cohen, Manion y Morrison, 2007). Se desarrolla bajo un enfoque interpretativo, que busca, explicar, comprender e interpretar los significados de las acciones, las argumentaciones, representaciones y percepciones

[7] Comprender: "entendido como la captación, del sentido de lo que el otro o los otros quieren decir a través de sus palabras, sus silencios, sus acciones y sus inmovilidades a través de la interpretación y el diálogo" (Sandoval, 2002, p. 32).

de los niños durante las clases y la solución que los niños dan a las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico.

Diseño de la investigación

La investigación se realiza en tres fases durante cuatro semestres de la práctica pedagógica, éstas corresponden al reconocimiento del contexto, el diseño de la experiencia y la sistematización del informe; las cuales se describen a continuación.

Fase 1. Reconocimiento institucional

En el I semestre de la práctica pedagógica (semestre 2014 2) se hace un reconocimiento del contexto institucional, a través del análisis del Plan de área de matemáticas, el Proyecto Educativo Institucional (PEI), los resultados de las Pruebas Saber de grado 3° en los dos últimos años, algunas observaciones de clases, diálogo con la maestra cooperadora y revisión bibliográfica para soporte de la investigación. Finalizando el semestre se aplicaron algunas tareas diagnósticas referidas al Razonamiento Algebraico con el propósito de analizar las soluciones que daban los niños de grado 3º y lograr identificar las dificultades y plantear el problema de investigación.

Fase 2. Diseño de la experiencia en el aula

En esta fase se diseñan y aplican diversas tareas asociadas al Razonamiento Algebraico durante el II y III semestre del trabajo en el aula (semestres 2015 – 1 y 2015 – 2), tomando como referencia los Estándares Básicos de Competencia Matemáticas para este grupo de grados (1° a

3°) y la fundamentación teórica. La experiencia en el aula se realizó durante dos semestres simultáneamente, mediante la utilización de estrategias alternadas de acuerdo al Plan de Área de Matemáticas de la Institución.

Fase 3. Análisis de información y sistematización del informe

Durante el último semestre de la práctica pedagógica (semestre 2016 – 1) se hace el análisis de las soluciones de las tareas resueltas por los niños, teniendo en cuenta los diferentes momentos en que se aplicaron; es decir, al inicio, durante y al final de la experiencia, además se tuvo en cuenta que las tareas correspondieran a objetos matemáticos referidos al Razonamiento Algebraico y que éstos se evidenciaran en las soluciones y la posibilidad de que éstas correspondieran a los diferentes niveles de algebrización. Se tiene en cuenta los referentes teóricos, para efectuar la sistematización de la información y presentar el informe de investigación.

En el capítulo 4 se presenta el análisis de la actividad matemática de once tareas, las cuales se organizaron de acuerdo a la tipología de las mismas, diferenciando secuencias icónicas, gráfico-numéricas, numéricas y geométricas Mora (2012), relaciones de equivalencia y situaciones de cambio. Estas unidades de análisis tienen correspondencia con los Estándares del Pensamiento Variacional para el conjunto de grados de 1° a 3°, los cuales hacen referencia a: el reconocimiento y descripción de regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, gráfico numérico e icónicos); al reconocimiento y generación de equivalencias entre expresiones numéricas; la construcción de secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas (MEN, 2006).

Capítulo 4

Análisis de las tareas

En los siguientes párrafos se muestran las tareas asociadas al Razonamiento Algebraico realizadas con los niños de grado 3º y el análisis de las soluciones de éstas, basadas en los Lineamientos Curriculares para el Pensamiento Variacional, el Razonamiento Algebraico y los niveles de algebrización. Estos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización y un tercer nivel, en el cual la actividad matemática puede considerarse propiamente algebraica (Godino et al., 2012).

Además, para el análisis de las tareas se tuvo en cuenta la tipología de éstas, las secuencias se clasificaron de acuerdo a lo que propone Mora (2012) en las tareas de tipo 1 se presentan las secuencias icónicas, tareas de tipo 2 secuencias grafico – numéricas, tareas de tipo 3 secuencias numéricas, tareas de tipo 4 secuencias geométricas, así mismo la tarea de tipo 5 corresponde a relaciones de equivalencia, finalmente la tarea de tipo 6 es una situación de cambio. El diseño de las tareas fue realizado por las maestras en formación, algunas de estas fueron tomadas y modificadas de algunos libros de texto del grado 3°.

Tareas de tipo 1: Secuencias icónicas

Tarea Nº 1. Se les plantea a los niños la tarea N° 1, con el propósito de completar la secuencia de semicírculos e identificar el patrón de formación a través de un lenguaje natural y gráfico, como se muestra en la figura 8.

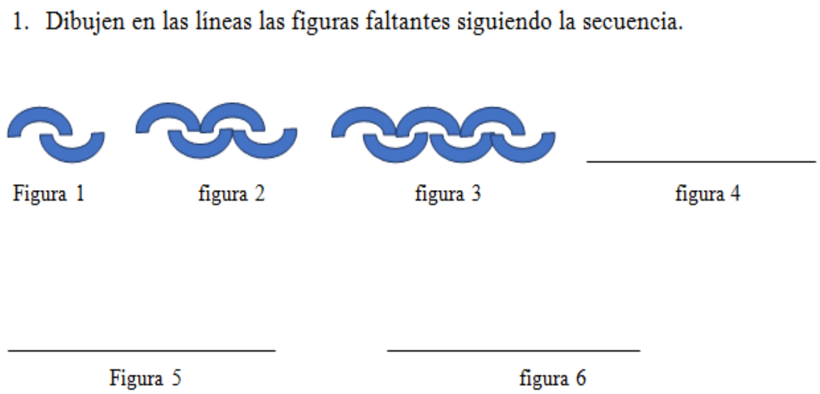


Figura 8.Tarea N° 1. Secuencia de semicírculos

En la solución de ésta tarea, los niños logran completar la secuencia correctamente al dibujar las figuras faltantes, como se muestra en la figura 9. Se asume que los niños encuentran el patrón de formación cuando grafican el mismo número de semicírculos en la parte superior e inferior de la secuencia.

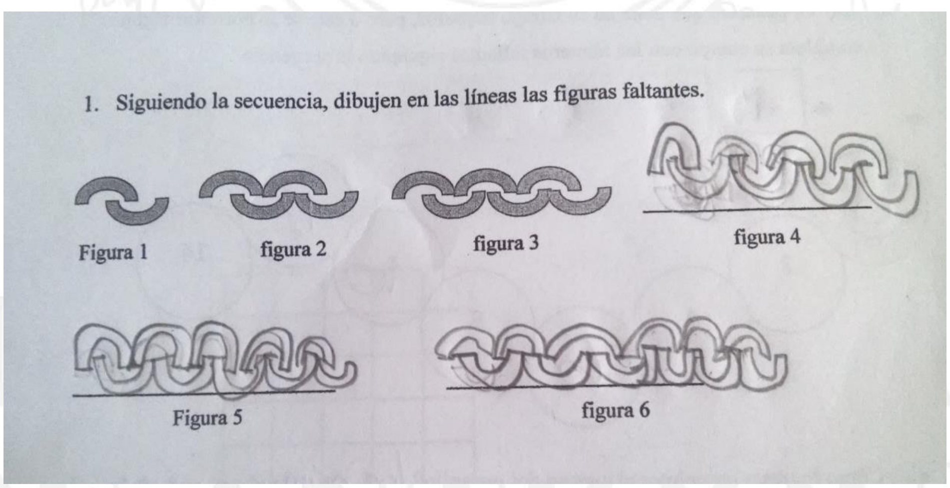


Figura 9.Solución de la tarea N° 1. Secuencia de semicírculos

El nivel de algebrización de la actividad matemática se ubica en un nivel 0 (ausencia del razonamiento algebraico), debido a que los niños utilizan objetos extensivos mediante un lenguaje icónico y numérico (conteo), aunque dichos objetos refieren a un valor desconocido, tal valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares; el hecho de hallar el término siguiente en la parte superior e inferior de la secuencia no implica la generación de una regla que relacione los casos particulares en el desarrollo de ésta.

Tarea Nº 2. Se plantea la tarea N° 2, en la cual se pretende que los niños avancen en los niveles de algebrización e identifiquen el patrón de formación y su afinidad con los números naturales y la relación parte-todo, de acuerdo al número de las hojas sombreadas y no sombreadas de las flores que se presenta en la figura 10.

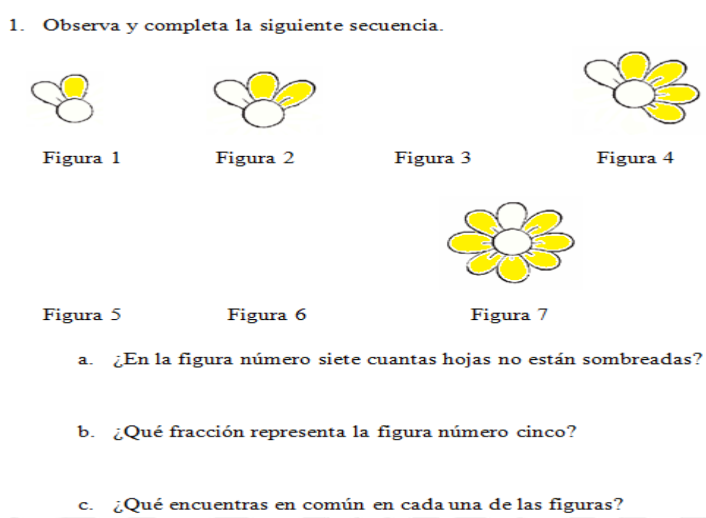

1. Observa y completa la siguiente secuencia.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Figura 5 Figura 6 Figura 7

a. ¿En la figura número siete cuantas hojas no están sombreadas?

b. ¿Qué fracción representa la figura número cinco?

c. ¿Qué encuentras en común en cada una de las figuras?

*Figura 10.*Tarea N° 2. Secuencia de flores

En el desarrollo de la tarea, los niños identifican el patrón de formación al dibujar las flores en la secuencia (figura 11). Ubican al frente de cada flor, el símbolo que representa la fracción sombreada, así: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$

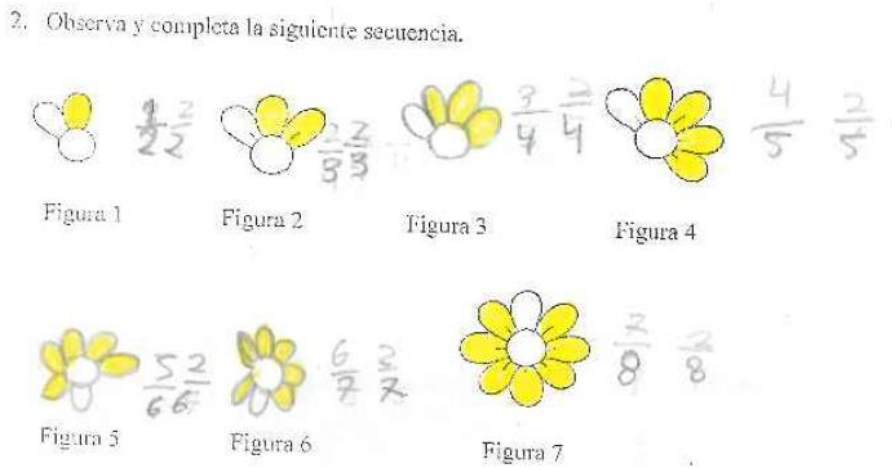


*Figura 11.*Solución de la tarea N° 2. Secuencia de flores

La actividad matemática que realizan, puede ser clasificada en un nivel incipiente de algebrización (nivel 1), debido a que los niños utilizan objetos intensivos, que se expresan por medio de un lenguaje numérico, al resolver la tarea relacionando la representación icónica con la simbólica y simultáneamente logran establecer una correspondencia con la relación parte-todo en la secuencia presentada en la parte sombreada, como se aprecia en la figura 11.

Lo anterior, permite asumir que el álgebra inducida en niveles tempranos a través de tareas puede ayudar a fortalecer el Razonamiento Algebraico en los niños, estos logran identificar relaciones de equivalencia y construir secuencias, independiente de si usan símbolos algebraicos o no (Smith, 1996; Strother, 2010).

Durante el proceso matemático desarrollado por los niños, se ha detectado un conflicto semiótico, el cual desde el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 7) se entiende como "cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas e instituciones", dicho conflicto se manifiesta cuando los niños completan la secuencia de la parte no sombreada de las flores, al incluir el centro de la flor como una hoja más y obtienen la siguiente secuencia $\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\frac{2}{6},\frac{2}{7},\frac{2}{8}$. Se observa como al escribir $\frac{2}{2}$ no se tiene en cuenta la relación parte-todo, es decir, los niños debieron representar la secuencia como $\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\frac{2}{6},\frac{2}{7},\frac{2}{8}$.

Los niños podrían no estar acostumbrados al proceso de generalización en el que intervienen secuencias icónicas, por lo que quedaría la tarea incorrecta, los niños están estableciendo procesos de representación y significados personales, pero sin interpretar los resultados en el contexto de la situación sobre las representaciones gráficas y su uso. Goldenberg (citado por Castro, 2014) concluyó que las gráficas tienen convenciones y ambigüedades propias y pueden ser poco accesibles a los niños que se inician en el estudio del álgebra.

Tareas de tipo 2: Secuencias gráfico-numéricas

Tarea Nº 3. En la tarea N° 3 se debe hallar un patrón de formación al completar la secuencia, como se muestra en la figura 12.

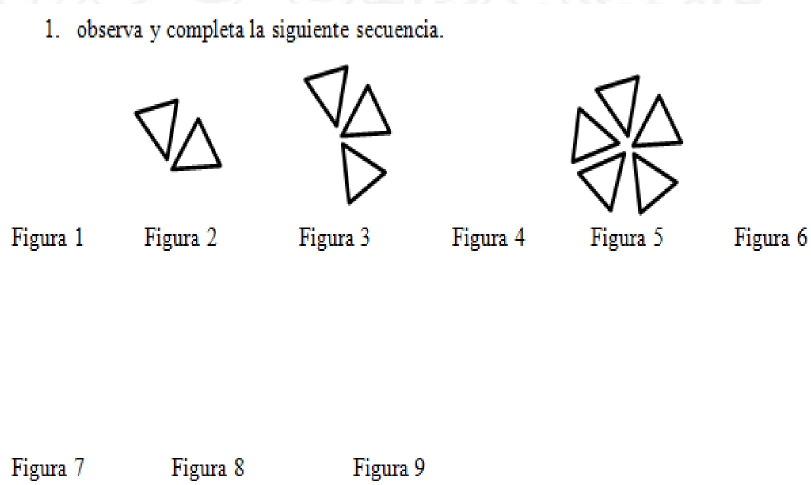


*Figura 12.*Tarea N° 3. Secuencia de triángulos

En la solución de la actividad matemática, un grupo de niños identifican el patrón de formación, lo cual se observa cuando dibujan los triángulos en la secuencia (figura 13). Los niños han dibujado el número de triángulos de acuerdo al número de la figura.

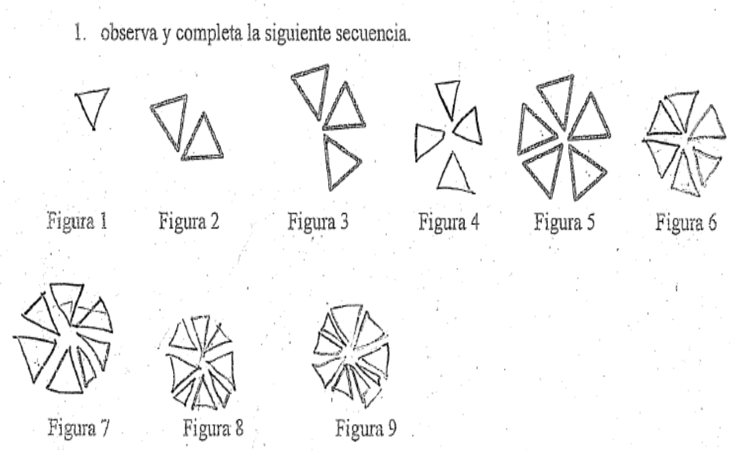


*Figura 13.*Solución de la tarea N° 3 por un grupo de niños

Al mismo tiempo, otro grupo de niños completó la secuencia de la misma manera, sin embargo, al dibujar el número de triángulos para cada figura, éstos no conservaron la forma circular como se ubican los triángulos, como se evidencia en la figura 14.

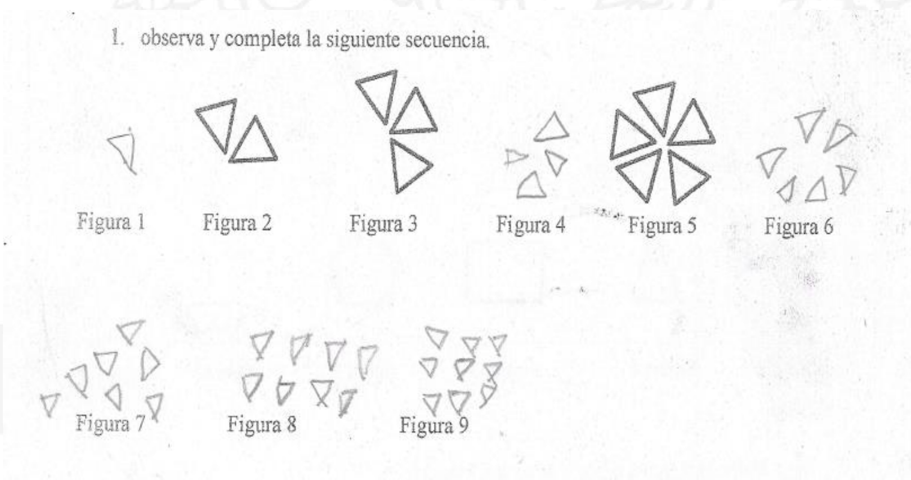


*Figura 14.*Otra solución de la tarea N ° 3

En consecuencia se pueden establecer las actividades matemáticas en un nivel 0 de algebrización, debido a que los niños hallan una regla de formación que relaciona la figura anterior con la siguiente, el hecho de hallar el termino siguiente no implica la generación de una regla que relacione las figuras en el desarrollo de ésta, además utilizan objetos extensivos mediante un lenguaje gráfico, este lenguaje se utiliza para encontrar un dato desconocido y no es suficiente para determinar la actividad propia de Razonamiento Algebraico.

Tarea N° 4. Para dar una mayor solidez al fortalecimiento del razonamiento algebraico, se plantea la tarea N° 4, cuyo objetivo es la construcción de secuencias y la identificación de patrones de formación, teniendo en cuenta el número de cuadrados sombreados y no sombreados, como se muestra en la figura 15.

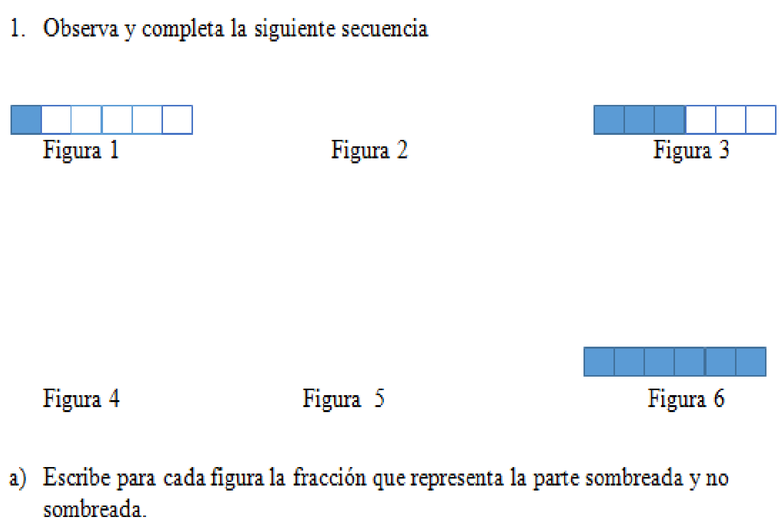


Figura 15.Tarea N° 4. Secuencia de cuadrados

Durante la actividad, los niños encuentran un patrón de formación con referencia al número de cuadrados sombreados correspondientes a cada figura.

Los niños logran establecer una conexión entre los números racionales y la relación parte-todo de la representación icónica, al lograr exponer simbólica y numéricamente la fracción que representa cada figura, como se aprecia en la figura 16.

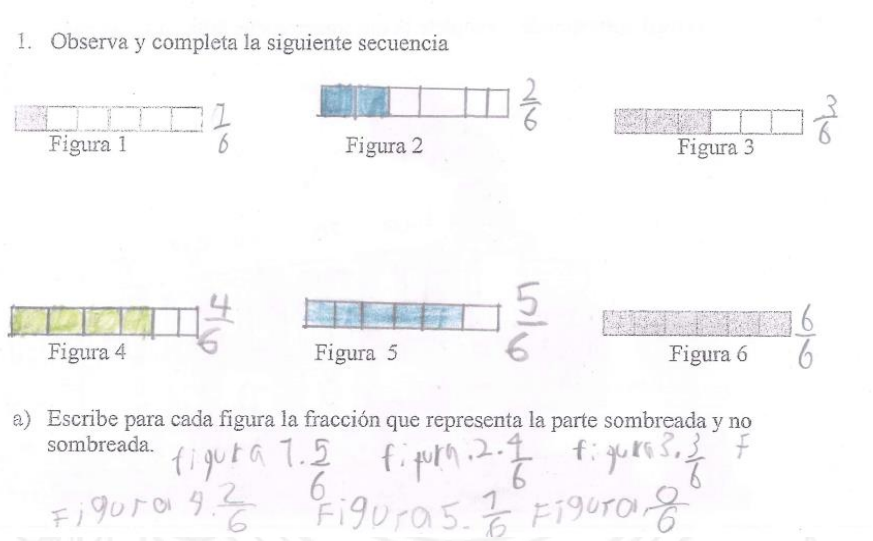


*Figura 16.*Solución de la tarea N° 4

El hecho de asignar un símbolo como representación de valor numérico, significa que los niños utilizan objetos intensivos para identificar patrones y encontrar secuencias, expresándolas como una función explícita de asignación de un símbolo a su respectiva secuencia pictórica. La resolución propuesta por los niños excede el campo meramente aritmético, por esta razón se establece la actividad matemática en un nivel incipiente (nivel 1) de algebrización.

Se infiere que los niños han logrado desarrollar el pensamiento relacional, es decir, distinguieron relaciones numéricas entre los cuadrados de la secuencia y cada una de las diferentes figuras. De igual manera han conseguido avanzar en el reconocimiento de operaciones entre objetos y sus propiedades de relación cuantitativa (igualdad).

De acuerdo a lo anterior, se vislumbra un avance en el desarrollo del Razonamiento Algebraico de los niños, lo anterior se evidencia en el desarrollo de las tareas que le han permitido usar símbolos para expresar patrones y relaciones funcionales que asocian los elementos de una secuencia de figuras pictóricas con los números fraccionarios en su relación parte-todo, de manera que a cada elemento de la secuencia pictórica le hiciera corresponder uno y sólo un número fraccionario.

Tarea N° 5. La tarea invita a los niños observar y completar las figuras faltantes en la secuencia como se muestra en la figura 17, de tal manera que identifiquen el patrón de formación para establecer una generalización.

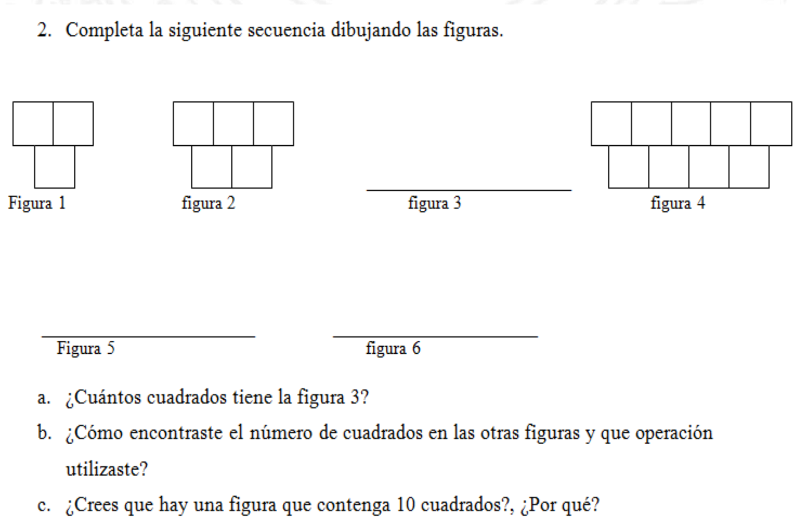

2. Completa la siguiente secuencia dibujando las figuras.

Figura 1 figura 2 ________ figura 3 figura 4

________ Figura 5 ________ figura 6

a. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 3?
b. ¿Cómo encontraste el número de cuadrados en las otras figuras y que operación utilizaste?
c. ¿Crees que hay una figura que contenga 10 cuadrados?, ¿Por qué?

Figura 17.Tarea N° 5

En la actividad matemática desarrollada por un grupo de niños, se evidencia que identifican el patrón de formación, como se muestra en la figura 18.

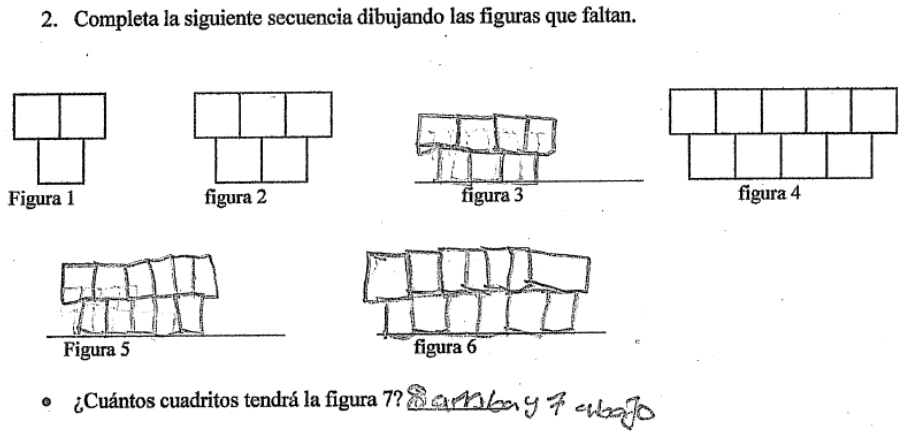


Figura 18. Solución de la tarea 5

Se infiere que los niños encuentran el patrón de formación porque dibujaron en cada secuencia de la parte superior un cuadrado más que en la secuencia de la parte inferior para cada una de las figuras; en consecuencia se puede establecer la actividad matemática en un nivel 1 de algebrización, donde los niños utilizan objetos intensivos a través de un lenguaje icónico y numérico natural, la tarea se resuelve operando con los números naturales sobre objetos en particular que intervienen en la secuencia. En la actividad matemática hay un uso de la generalización al producir los términos de la figura 7, sin construir la figura, encuentra las cantidades desconocidas cuando se aumenta un cuadrado en la parte superior y en la parte inferior de la secuencia.

Tarea N° 6. La tarea pretende inducir a los niños al proceso de generalización, para ello se les presenta una secuencia de figuras pictóricas acompañadas de una tabla, la cual indaga por el número de palillos y la cantidad de triángulos con los que puede formarse una figura cualquiera.

2. Con palillos se construyen figuras como las siguientes.

Figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 figura 5

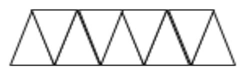


Figura 6 figura 7 figura 8 figura 9 figura 10

2.1. Completa la siguiente tabla especificando el número de palillos y de triángulos.

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N° de palillos	3			9								
N° de Triángulo		2			5				9			

a. ¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 15?
____

b. ¿Cuántos palillos tendrá la figura de la posición 15?
____

c. Si hay una figura de 20 triángulos ¿En qué posición se encontraría? y ¿Por qué?
____

d. ¿Qué relación hay entre el número de triángulos y la cantidad de palillos?
____

e. En alguna posición, ¿Habrá una figura con 25 palillos? SI______ NO_____,
Justifique:____

f. Explica como encontraste la cantidad de palillos de cada figura.
____

Figura 19.Tarea N° 6

Durante la actividad matemática, los niños logran completar la secuencia grafico – numérica y a la vez dan respuesta a los interrogantes planteados complementando la tabla, (figura 20).

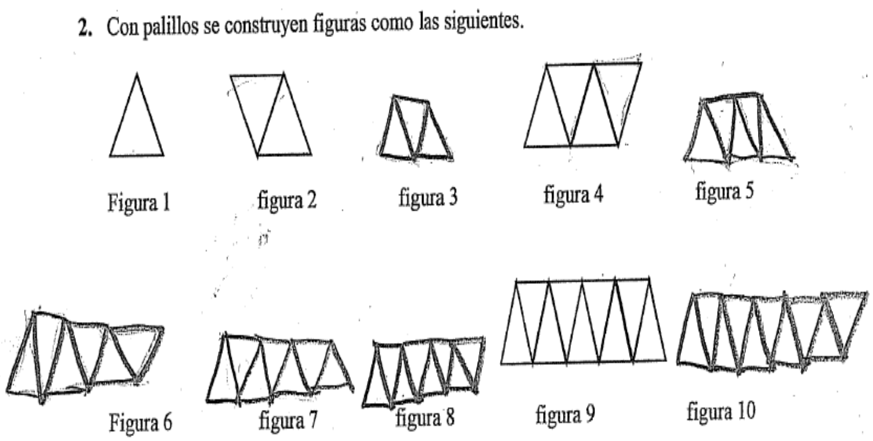


Figura 20. Solución de la tarea N° 6 por un grupo de niños

La figura geométrica triángulo, se presenta como entidad unitaria, general; pero, al mismo tiempo, la construcción de la secuencia a partir del triángulo inicial se va transformando, para obtener otro tipo de figura como el trapecio o el paralelogramo, dicha transformación "pasa por distintos momentos y contextos, cada uno de los cuales le impregna de significados parciales y distintos niveles de generalidad" (Godino et al., 2012, p. 496).

El proceso de pasar de lo particular a lo general, sugiere la importancia del papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del álgebra (Godino et al., 2012). Se asume que la actividad realizada por los niños permite fortalecer un desarrollo de diferentes tipos de algebrización, así como se observa a partir de la descripción de la figura 20, la cual evidencia cómo los niños pueden establecer una regla general expresada en un lenguaje numérico y simbólico, ello manifiesta el reconocimiento de una regla recursiva indica que una acción (agregar dos palillos) genera la colección de figuras, se reconoce y expresa con lenguaje natural, como se evidencia en la figura 21.

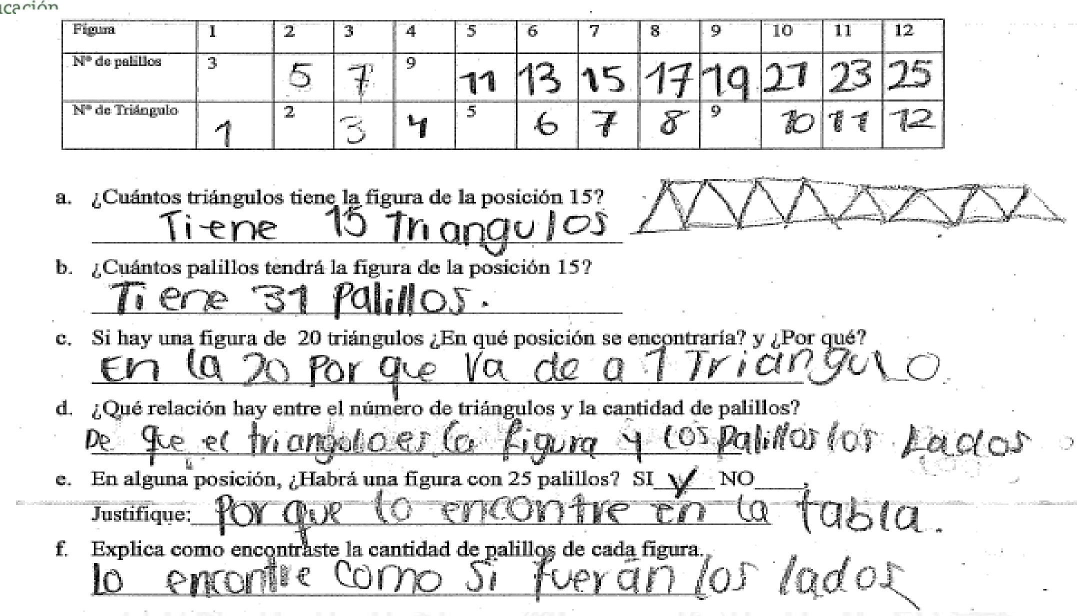


Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº de palillos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Nº de Triángulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

a. ¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 15?
Tiene 15 triangulos

b. ¿Cuántos palillos tendrá la figura de la posición 15?
Tiene 31 palillos.

c. Si hay una figura de 20 triángulos ¿En qué posición se encontraría? y ¿Por qué?
En la 20 por que va de a 1 Triangulo.

d. ¿Qué relación hay entre el número de triángulos y la cantidad de palillos?
De que el triangulo es la figura y los palillos los Lados.

e. En alguna posición, ¿Habrá una figura con 25 palillos? SI ✓ NO____
Justifique: por que lo encontre en la tabla.

f. Explica como encontraste la cantidad de palillos de cada figura.
lo encontre como si fueran los lados

Figura 21. Otra solución de la tarea N° 6

Por todo lo anterior, la actividad se enmarca en un nivel incipiente de algebrización (nivel 1). La emergencia de objetos intensivos (generalidades), es una manifestación para identificar a la actividad matemática elemental, al respecto Godino et al. (2012) consideran que:

> La presencia de objetos intensivos en una práctica matemática nos sirve para reconocer indicios de un cierto nivel de abstracción o generalización. La emergencia de los objetos intensivos atraviesa por distintos momentos o etapas, cada una de las cuales le aporta distintos niveles o capas de generalidad. (p. 496)

Tareas de tipo 3: Secuencias numéricas

Tarea N° 7. Cuyo propósito es identificar un patrón de formación en una secuencia numérica ubicada en un laberinto, como se muestra en la figura 22.

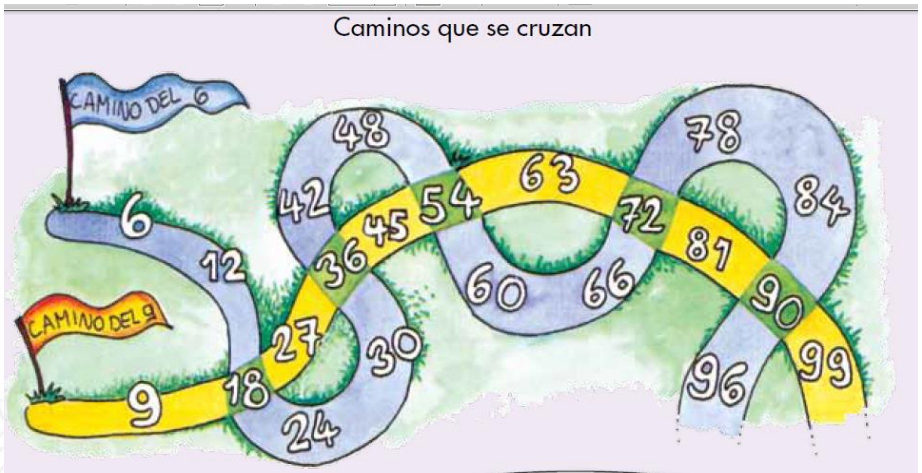
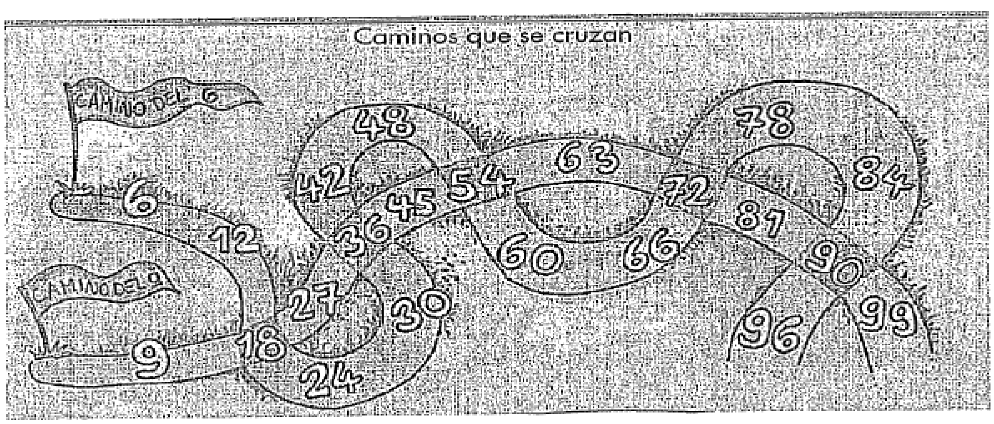


Figura 22. Tarea N° 7. Secuencia numérica en laberinto

Durante la actividad matemáticas los niños identifican el patrón de formación, al encontrar los múltiplos de tres (6, 9, 12, 18, 24, 36…). Se asume que asocian el patrón de formación con los múltiplos de tres, debido a su justificación, lo cual logra apreciarse en la figura 23.


2. Observa la imagen.

a. ¿Cuáles de estos números son múltiplos de 3?
27 6 9 12 30 18 24

b. ¿Por qué crees que son múltiplos de 3?
por que son de 3 en 3

Figura 23. Solución de la tarea N° 7

Los niños indican que la secuencia va de tres en tres, lo cual es la forma en que calculan el término siguiente. En esta actividad se infiere el uso de la propiedad conmutativa, puesto que la forma de sumar dos términos es irrelevante, lo fundamental es que logran establecer la relación genérica entre los números y la propiedad de la operación que interviene. A partir de este momento, se establece un primer paso hacia la algebrización (Godino, Aké y Gonzato, 2012), teniendo en cuenta lo anterior, se ubica la actividad matemática en un nivel incipiente de algebrización (nivel 1).

Tarea N° 8**. S**e plantea la tarea N° 8, cuyo objetivo es completar una piramide a través de la identificación de un patrón de formación, como se observa en la figura 24.

1. Completa la siguiente pirámide.

			90				
		64		90			
			64		90		
12	25	38				90	

a. Explica como completaste la pirámide.

____

b. ¿Qué operación utilizaste para completar la pirámide?

____

Figura 24. Tarea N° 8.

Los niños logran incrementar el patrón numérico identificando la cantidad aumentada para completar la pirámide. En este caso, se continúa la secuencia cuando reconocen la regla para hallar el término siguiente a través de la utilización de una operación matemática.

En la solución de esta actividad matemática se asume que los niños recurren a la utilización de objetos intensivos a través de un lenguaje icónico y numérico natural, ésta se resuelve operando con los números naturales y la suma de manera periódica, se logra hallar un patrón de formación, el cual corresponde a sumar el número 13 como se evidencia en la (figura 25); de este modo se asocia dicha actividad matemática en un nivel 1 de algebrización.

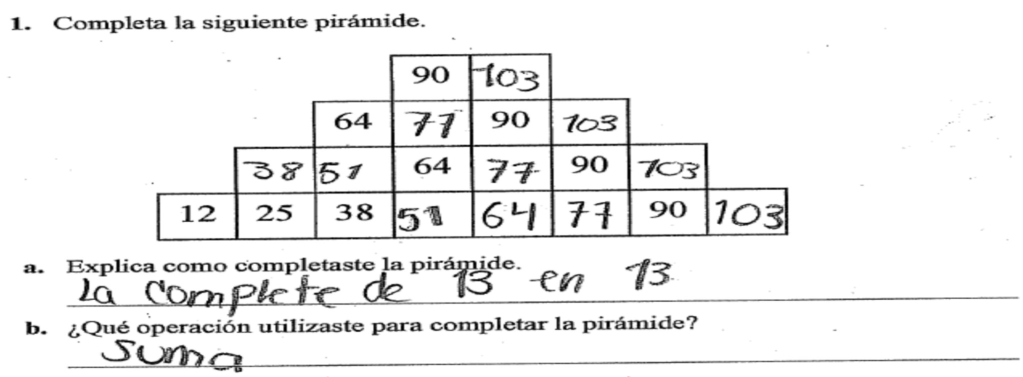


Figura 25. Solución de la tarea N° 8

Tareas de tipo 4: Secuencia geométrica

Tarea N° 9. La tarea planteada tiene como propósito que los niños reconozcan la formación de las figuras geométricas, que identifiquen el patrón de formación y completen las figuras que faltan, como se observa en la figura 26.

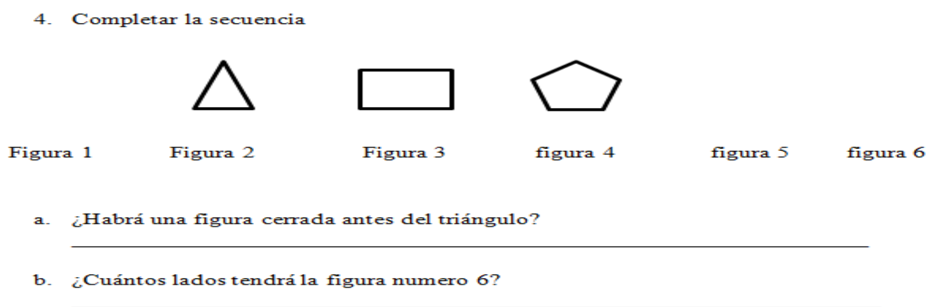


Figura 26. Tarea N° 9

En una de las soluciones (figura 27), un grupo de niños logra completar la secuencia de figuras, indicando una figura cerrada (círculo) antes del triángulo; dado que no existe figura cerrada con 2 lados. Además, se infiere que los niños logran identificar el patrón de formación en la medida que dibujan la figura 5 y 6 considerando el número de lados que debe tener la figura, aunque en la figura 6 se evidencia que no hay claridad para los niños en cuanto a los polígonos regulares.

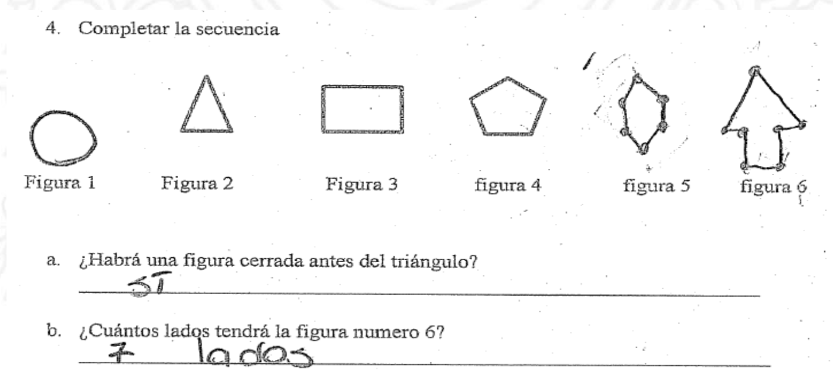


Figura 27. Solución de la tarea N° 9 por un grupo de niños.

En otra solución los niños realizan la secuencia, donde se asume que la regla de formación que ellos establecen para completar dicha secuencia, la asocian con el número de lados de los polígonos más uno, es así como ellos infieren que no existe una figura cerrada antes del triángulo, como se evidencia en la figura 28.

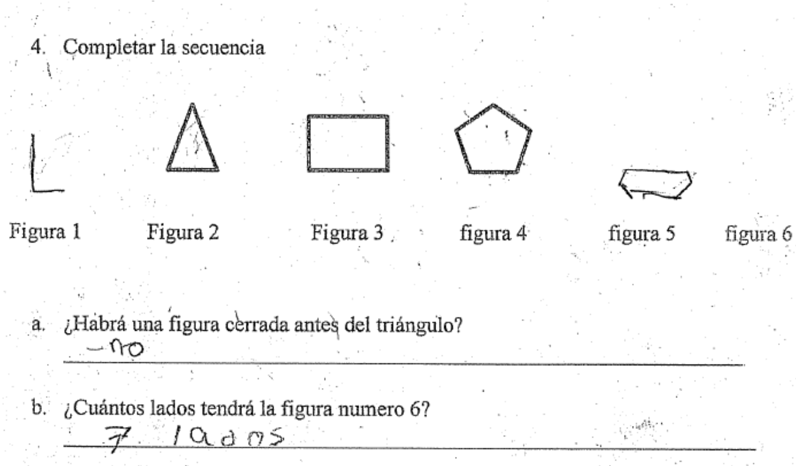

4. Completar la secuencia

Figura 1 Figura 2 Figura 3 figura 4 figura 5 figura 6

a. ¿Habrá una figura cerrada antes del triángulo?
- no

b. ¿Cuántos lados tendrá la figura numero 6?
7 lados

Figura 28. Otra solución de la tarea N° 9 por otro grupo de niños

En esta actividad matemática se admite que los niños logran establecer una regla general expresada en un lenguaje simbólico al completar la secuencia, estableciendo una relación entre la posición de la figura y el número de lados de los polígonos. Dibujan las figuras a través del conteo de los lados de dichos polígonos, mas no aplican el concepto de polígono regular; es decir, los niños no tienen un significado personal de éstos. Lo anterior permite ubicar la solución de la tarea en un nivel incipiente de algebrización (nivel 1); debido a que se infiere que ellos expresan la relación entre la posición de la figura y el número de lados de dichas figuras, mediante objetos intensivos.

Tareas de tipo 5: Relación de equivalencia

Tarea N° 10. En esta tarea, se debe escribir el número faltante en el recuadro, de forma que se cumpla la igualdad de la expresión (figura 29).

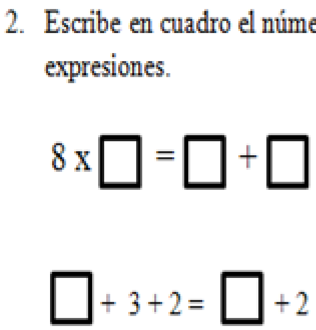


Figura 29. Tarea Nº 10

La tarea consiste en encontrar el número particular que se debe asignar al cuadro en blanco en ambos lados de la igualdad, donde el signo (=) adquiere la connotación de equivalencia entre ambos miembros de la igualdad. En la figura 30 se observa una de las soluciones que dan los niños.

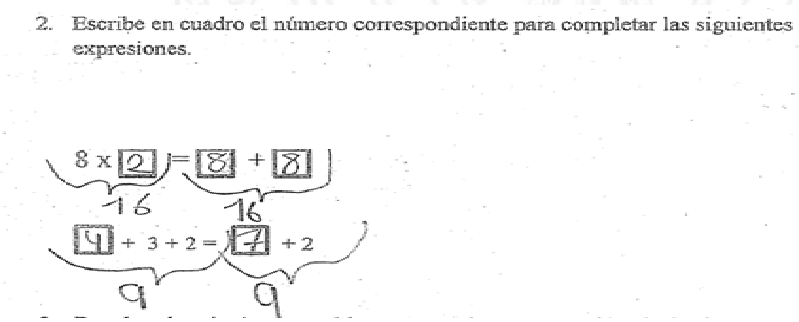


Figura 30. Solución de la tarea Nº 10

La actividad matemática que realizan los niños responde al algoritmo de la suma y la multiplicación; los niños en la primera expresión operan con el algoritmo de la multiplicación y establecen la equivalencia: 2 veces ocho es igual a sumar dos veces 8; mientras que en la segunda expresión, se infiere que los niños utilizan la propiedad asociativa de la suma, cuando en el lado derecho de la igualdad completan con 7, dado que asocian 4 + 3 del otro lado de la igualdad.

Por lo anterior, la actividad matemática realizada se puede establecer en un nivel 1 de algebrización, dado que utilizan propiedades y algoritmos de las operaciones de suma y multiplicación de números naturales.

Tareas de tipo 6: Situación de cambio

Tarea N° 11. Plantea un problema donde intervienen elementos propios del Razonamiento algebraico elemental, la intencionalidad es que el niño haga uso de variables, plantee ecuaciones y dé solución al problema (figura 31).

- Entre Laura, Andrea y Pablo tienen 65 gallinas encerradas en un corral. Si Laura tiene 15 gallinas y Pablo 7 más que Laura. ¿Cuántas gallinas tendrá Andrea?

Figura 31. Problema propuesto

En la figura 32 se observa que los niños interpretan el signo igual como relación de equivalencia.

$15 + 7 = 22 - 65 = 43$

$L + A + P = 65$

$15 + A + 22 = 65$

$L + A + P = 65$

$15 + 28 + 22 = 65$

$$\begin{array}{r} 15+ \\ 22 \\ \hline 37 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65- \\ 37 \\ \hline 28 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15+ \\ 28+ \\ 22 \\ \hline 65 \end{array}$$

Figura 32. Solución del problema

Los niños utilizan letras para representar las incógnitas, es decir, logran establecer las relaciones mediante una ecuación, operan con incógnitas al asociarlas a las letras (símbolos) iniciales de los nombres de los personajes que involucra el problema. Los niños aplican conceptos de incógnita y ecuación lo cual implica la transformación del enunciado de lenguaje natural a un lenguaje alfanumérico y aplican las propiedades de las operaciones aritméticas que se involucran en la solución del problema.

Este desarrollo del problema implica el uso de objetos intensivos a través de la aplicación de propiedades relacionales y estructuras de los naturales, por lo tanto, se le asigna un nivel 2 de algebrización.

En consecuencia, se puede decir que se evidencia un avance en el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños. La actividad matemática ha permitido representar, formalizar patrones y generalizar regularidades en diferentes contextos matemáticos, además, han avanzado en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el Razonamiento Algebraico (Mora, 2012). Así mismo a través del análisis realizado a las actividades matemáticas, mediante los niveles de algebrización, se evidencio un avance de los niños en cuanto a la construcción de los objetos matemáticos planteados en el proyecto y al proceso algebraico empleado en las tareas matemáticas.

Conclusiones

En los siguientes párrafos se enuncian algunas conclusiones del proyecto, que emergieron durante la realización de la Práctica Pedagógica, a través de la implementación de diversas tareas asociadas al Razonamiento Algebraico con niños de grado 3° de la Institución Educativa Andrés Bello.

Durante la experiencia en el aula se lograron avances en el fortalecimiento del Razonamiento Algebraico. En la solución de las tareas, los niños avanzaron en el nivel de algebrización; en los análisis se observa que las primeras tareas correspondían a un nivel 0, donde utilizaban principalmente objetos matemáticos extensivos, acudían generalmente a procesos aritméticos para dar solución a las tareas; pero al avanzar en el proceso, se observa como los niños resuelven las tareas, completan las secuencias, identifican los patrones de formación y formalizan generalizaciones, mediante el uso de un lenguaje simbólico y natural, donde intervienen objetos intensivos, valores particulares para operar aritméticamente con ellos (Godino et al., 2014). Lo cual constituye un avance significativo en la medida que este tipo de tareas no hacía parte del currículo escolar de este grado.

La actividad investigativa desarrollada nos permitió estudiar la realidad escolar, a las situaciones del diario vivir de un docente, donde se deben establecer estrategias de enseñanza que posibiliten el desarrollo del pensamiento matemático. La práctica nos permitió contrastar los saberes didácticos, pedagógicos y disciplinares, recibidos en el plan de formación como futuras maestras de matemáticas. La práctica se constituye en una experiencia que nos permite ratificar la complejidad de la labor docente, donde se aprende a "ser maestro" en el contacto directo con los estudiantes en la realidad misma de la escuela.

Se requiere que en las Instituciones Educativas se incorporen procesos formativos para los maestros de primaria, para que posibiliten espacios de estudio, donde se aprecie la importancia de incluir el razonamiento algebraico en edad temprana, de tal manera que se adquieran habilidades en la construcción de objetos matemáticos y de procesos algebraicos, mediante la utilización de herramientas didácticas que ayuden a fortalecer el álgebra elemental y así evitar mayores conflictos con el álgebra en los grados superiores.

Referencias Bibliográficas

Aké, L. (2010). Una aproximación al razonamiento algebraico elemental desde el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Tesis de Fin de Máster, Universidad de Granada, España.

Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, España.

Aké, L., Godino, J., y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en educación Primaria. *Revista Unión*. 33, 39-52.

Bressan, A. y Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. Correo del maestro, Nº 168. Entre nosotros.

Callejo, M. (2015). Generalización y pensamiento algebraico. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. (68), 5 – 8.

Castro, W. (2014). Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula. *Revista científica*. 20.

Carpenter, T., Frankle, M., Levi, L. (2003). Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cohen, L. Manion, L y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. (6th ed). New York.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking processes. En: D. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. Netherlands: Kluwer. 25 – 41

Davis, R. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 195-208.

Derry, S. J., Wilsman, M. J., y Hackbarth, A. J. (2007).Using constrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 305-329.

Font, V. (2001). Procesos mentales versus competencia. Departamento de Didáctica de les CCEE de la matemática de la UB, Biaix 19, 33-36.

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-173.

Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2.3), 237-284.

Godino, J y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. 767 – 826.76.

Godino, J., Contreras, A y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J., Batanero, C y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, Rio Claro (SP), 26(42B), 483-511.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matematicas escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias*, 32 (1), 199 – 219.

Godino, J., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. y Wilhelmi, M. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33 (1), 127-150.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 117 – 142.

Gómez, E. (2008). La construcción de la noción de variable (tesis doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/Gomez_2008.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2008). Metodología de la investigación. (Vol. 4). México: Mc Graw Hill.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from a engine of inequity fo an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea generalización. (Tesis de maestría, Universidad de Granada). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1926/1/Merino2012PatronesRepresentaciones.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en matemáticas. Bogotá.

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Universidad pedagógica nacional, 1- 24.

Posada, F. A y et al. (2006). Módulo 2, Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico (1a. ed.). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. [s.n.]

Sandoval, C. (2002). Investigación cualitativa. Enfoques y modalidades de investigación cualitativa: Rasgos básicos. Bogotá.

Vergnaud G. (1988): Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. En: C. Laborde, N. Balacheff (eds.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique, 189-199, La Pensée Sauvage, Grenoble, Paris.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1-14.

.