

INICIANDO LA CONSTRUCCIÓN DE LAS RELACIONES DE SEMEJANZA

Trabajo de Grado

Viviana Alzate Velásquez

Yineth Aguirre Marín

Asesora: Luz Marina Díaz Gaviria

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

Medellín

2009

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN.....	1
¿QUÉ NOS IMPULSÓ?.....	3
MARCANDO LA RUTA.....	5
UNA TRAVESÍA INVESTIGATIVA.....	7
PUESTA EN ESCENA.....	17
NUESTROS CÓMPLICES.....	45
ANALIZANDO CATEGORÍAS.....	53
Relaciones entre Magnitudes.....	53
Construcción del Concepto de Semejanza.....	66
La Percepción.....	77
CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.....	89
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	91

TABLA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.....	20
Figura 2.....	20
Figura 3.....	26
Figura 4.....	32
Figura 5.....	33
Figura 6.....	40
Figura 7.....	41
Figura 8.....	46
Figura 9.....	49
Figura 10.....	50
Figura 11.....	51
Figura 12.....	52
Figura 13.....	55
Figura 14.....	56
Figura 15.....	59
Figura 16.....	62
Figura 17.....	63
Figura 18.....	67
Figura 19.....	69
Figura 20.....	70

Figura 21.....	72
Figura 22.....	78
Figura 23.....	80
Figura 24.....	81
Figura 25.....	83
Figura 26.....	84
Figura 27.....	85
Figura 28.....	86
Figura 29.....	87

AGRADECIMIENTOS

*A nuestra asesora Luz Marina Díaz Gaviria, por toda la paciencia,
el acompañamiento y la fortaleza que nos brindó en cada
encuentro, a los profesores Alexander Jiménez,
Fabián Posada, Gustavo Gallego, Yolanda Beltrán,
Denis Vanegas, Diana Jaramillo por todos sus consejos y
apoyo, a las maestras cooperadoras
por ayudarnos a crecer como maestras, al proyecto Escuelas de Calidad
para Medellín de la Universidad de Antioquia por los espacios abrió
y el apoyo que nos brindó;
a Nelly, Jose y Sebastián que siempre estuvieron
a nuestro lado y a Margarita y Cristina
nuestras compañeras de travesía.*

RESUMEN

TITULO: INICIANDO LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SEMEJANZA

AUTORAS

Viviana Alzate Velásquez

Yineth Aguirre Marín

Este trabajo centra su atención en las formas como inician, la construcción del concepto de semejanza entre figuras, los estudiantes del grado sexto de la institución educativa Héctor Abad Gómez.

Resaltamos aquí, la importancia de la enseñanza de la semejanza, desde edades tempranas, ya que en éstas, los niños se caracterizan por la constante exploración del espacio que los rodea y por una mayor sensibilidad hacia la geometría, convirtiéndose de esta manera, el acercamiento cualitativo a la geometría en una herramienta, que posibilitará en años posteriores una mejor aprehensión de este concepto geométrico, en su carácter más formal.

La investigación realizada fue de carácter cualitativo y desde un abordaje fenomenológico hermenéutico; se utilizó la metodología del estudio de casos, la cual a partir de una interrelación entre las respuestas de estudiantes, las opiniones de las investigadoras y a la luz de los referentes teóricos, permitió realizar un análisis de todos los datos obtenidos durante las actividades realizadas en esta investigación.

Al finalizar el trabajo pudimos evidenciar como, la percepción de figuras por medio de la comparación de relaciones interfigurales, fue la estrategia más utilizada por los estudiantes, y como el trabajo grupal con material concreto, que fue propuesto por las docentes, en las actividades desarrolladas con los niños, les permitieron iniciar en la construcción del concepto de semejanza entre figuras.

PALABRAS CLAVE: proporcionalidad, semejanza, campos conceptuales, relaciones interfigurales, geometría, medida.

¿QUÉ NOS IMPULSÓ?

“Los aspectos geométricos han sido tratados durante mucho tiempo de forma muy superficial, casi de pasada, como si lo importante y fundamental de las matemáticas, fueran sólo los cálculos numéricos y el trabajo del álgebra”, (Grupo Beta, 1998, p.98), con esta frase decidimos comenzar la justificación que le da sentido a nuestro trabajo, ya que al ser éste de carácter geométrico, es importante mencionar, algunas de las reflexiones que al respecto de esta se han realizado; reflexiones que nos han mostrado un camino muy amplio que podemos recorrer con nuestros estudiantes.

Como experiencia personal sabemos que en muchas instituciones educativas colombianas, no se interesan por la enseñanza de la geometría o no la ven como un aspecto fundamental en la formación integral del niño, porque aún tienen interiorizadas visiones como la matemática moderna, que descartan la geometría y puntualizan en la enseñanza numérica de las matemáticas, tal como lo propone Vasco (1994). Teniendo en cuenta los diferentes referentes teóricos como el Grupo Beta el cual es un grupo de investigadores interesados en las Matemáticas y la didáctica de las matemáticas, los Lineamientos Curriculares en Educación Matemática (1998) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2007), vemos ahora como la Educación Matemática en Colombia y en otros países está proponiendo cambios para que los procesos de enseñanza de cada uno de los pensamientos matemáticos, generen aprendizajes más significativos en los estudiantes.

Con referencia al pensamiento espacial, se sugiere trabajarlo desde una visión de la geometría activa, en la cual el estudiante esté en constante interacción, con su entorno, con la manipulación de materiales pensados y diseñados con el propósito de lograr la construcción de conceptos matemáticos que favorezcan su formalización y sin dejar a un lado la misma matemática, ya que en algunas ocasiones se considera que la utilización de material concreto, consiste sólo en un juego aislado totalmente de conceptos fundamentales de las matemáticas. En nuestro caso cada uno de los materiales

que propusimos, tuvieron como objetivo acercarse al concepto de semejanza entre figuras.

Para nosotras esta experiencia de aula fue muy enriquecedora, ya que al realizar las diferentes actividades¹, pudimos observar en los estudiantes un cambio de actitud ante la propuesta de trabajar interactuando con material concreto como: figuras planas, cuerpos geométricos, el tangram, entre otros y en grupos colaborativos en los cuales se socializaba y se conceptualizaba, por medio de la discusiones que se generaban en torno a los procesos que realizaban en cada una de las actividades.

De esta manera, consideramos que aunque logramos recoger experiencias muy positivas y aprendizajes significativos en los niños, en lo referente a la iniciación del concepto de semejanza entre figuras, el trabajo geométrico en esta Institución Educativa, aún está en sus inicios y debe fortalecerse mucho más. Nuestro trabajo busca resaltar la importancia de la enseñanza de la geometría, ya que a través de ella se pueden desarrollar paso a paso y teniendo en cuenta las edades de los niños, conceptos desde su carácter más básico hasta su concepción más formal.

¹ En nuestro trabajo se asume actividad, según lo propuesto por Ander-Egg (1991), quien indica que durante la realización de un taller se le proponen al estudiante diversas actividades en las que la teoría y la práctica deben interactuar, durante la construcción de un conocimiento por parte de un estudiante.

MARCANDO LA RUTA

Hemos elegido presentar nuestro trabajo como una narración, en la que damos cuenta más ampliamente de todo lo vivido durante el desarrollo de esta experiencia pedagógica, ya que deseamos mostrar que no sólo los conocimientos matemáticos cobran importancia en un trabajo de este tipo, sino que también los sujetos involucrados y su contexto forman parte vital del trabajo desarrollado. A continuación les relataremos los momentos vividos en el transcurso de nuestra experiencia, los cuales dividimos en los siguientes capítulos.

Una Travesía Investigativa, es el primer capítulo de la experiencia pedagógica de carácter investigativo que llevamos a cabo, en él encontraremos las motivaciones personales y académicas, que se constituyeron en la base a la hora de elegir el tema de investigación, también damos cuenta de algunos de los referentes teóricos que sustentan nuestro trabajo, la metodología, la pregunta y el objetivo de investigación, de igual manera las fases en las que los realizamos. Por último describimos el contexto de la Institución Educativa donde desarrollamos nuestra experiencia.

En el segundo capítulo llamado *Puesta en Escena*, hacemos un recuento descriptivo de las actividades que realizamos y las intenciones que nos propusimos para desarrollar cada una de ellas. De igual manera en este capítulo contamos cuál fue la estrategia metodológica para implementar cada una de las actividades, resaltando su importancia y pertinencia en nuestro trabajo.

También contamos sobre *Nuestros cómplices* que fueron todos los niños del grado sexto 2 y en especial sobre nuestros protagonistas, que fueron 4 niños que elegimos para realizar el análisis de las actividades propuestas.

En el capítulo *Analizando Categorías*, describimos las categorías emergentes que encontramos, al realizar una lectura exhaustiva de las evidencias recogidas en nuestra experiencia pedagógica y ponerlas en relación con los referentes teóricos y con las apreciaciones personales que construimos durante el desarrollo de nuestro proyecto.

Éstas categorías son: inicio del concepto de semejanza, relaciones entre magnitudes y la percepción.

En el último capítulo de nuestro trabajo, Conclusiones y Recomendaciones, damos cuenta de los aspectos obtenidos después de realizar el análisis, y con base en ellos proponemos algunas sugerencias y recomendaciones, que pueden ser utilizadas por un lector interesado, en realizar una futura investigación.

UNA TRAVESÍA INVESTIGATIVA

En la investigación es incluso más importante el proceso que el logro mismo.

Emilio Muñoz

Al iniciar nuestra práctica pedagógica, habíamos leído sobre la proporcionalidad como un concepto inscrito en los campos conceptuales de Vergnaud, pero al estar en la institución educativa, tuvimos que pensar en cómo podríamos trabajar este tema con los estudiantes de grado sexto. El trabajo con la maestra cooperadora fue decisivo en esta búsqueda, ya que éste estuvo enfocado hacia la enseñanza de conceptos geométricos; surgiendo así la idea de abordar la proporcionalidad en su contexto geométrico, puntualizando en el concepto de semejanza entre figuras, aunque éste no fuera un contenido propio del currículo colombiano (Lineamientos curriculares y Estándares curriculares) de matemáticas del grado sexto.

Tras una búsqueda de diferentes referentes teóricos alrededor de la proporcionalidad, encontramos algo que nos llamo la atención, Gilberto Obando y Olga Botero (2006) plantean que en la escuela se identifica una dificultad en relación al concepto de proporcionalidad, ya que éste no es abordado con la suficiente importancia en los planes de área de las instituciones, por este motivo, al enseñarlo, se presentan dificultades en la comprensión y por esto se decide enseñarlo como un tema separado de otras temáticas con las que tiene relación, por ejemplo la semejanza entre figuras.

Al realizar lecturas de diversos trabajos de grado e investigaciones en educación matemática, determinamos que en un contexto escolar, la investigación a realizar, debe proporcionar elementos que nos permitan elaborar un análisis de carácter cualitativo ya que “a diferencia de los estudios descriptivos, correlacionales o experimentales, más que determinar la relación de causa y efectos entre dos o mas variables, la investigación cualitativa se interesa más en saber cómo se da la dinámica o cómo ocurre el proceso en que se da el asunto o problema”(Vera, 1999, p.1); por tal motivo y como nuestro interés se centró, en analizar las sucesos presentes en actividades que desarrollan estudiantes en un aula de clase, optamos por el método de casos, el cual es una de las metodologías

investigativas con un abordaje fenomenológico hermenéutico, el cual consiste en las capacidades reflexivas del investigador sobre su objeto de estudio, por medio de la comprensión de los fenómenos que están alrededor de él; que permiten hacer análisis cualitativos de casos específicos. Para realizar el análisis nos apoyamos en diversos referentes teóricos que habíamos indagado previamente y en las observaciones que realizamos, a situaciones que tienen que ver con los inicios de la proporcionalidad, en un contexto geométrico.

En una de las búsquedas realizadas sobre metodología de investigación encontramos que Ponte (2006, p.2) define el método de caso como:

Un método que tiene como objetivo satisfacer una entidad bien definida como una persona, una institución, un curso, una disciplina, un sistema educativo, una política o cualquier otra unidad social, para entender en profundidad el cómo y el porqué de esa entidad, lo que indica su identidad y características de ellos mismos ... se centra deliberadamente en una situación concreta, que se cree especial o única, por lo menos en ciertos aspectos, tratando de encontrar que es más esencial y característica y, por tanto, contribuir a la comprensión global de un determinado fenómeno de interés.

Igualmente encontramos que un caso puede ser una situación, un programa de enseñanza o un acontecimiento específico. En nuestro trabajo el caso que ocupó la investigación fue el inicio del concepto de semejanza; caso que motivó la siguiente pregunta *¿Cómo inician la construcción del concepto de semejanza entre figuras los estudiantes del grado sexto?*; teniendo en cuenta que, al ser la semejanza un concepto que no hace parte de los contenidos de este grado, consideramos pertinente abordarlo en este trabajo, desde una mirada cualitativa, fundamentada en la geometría activa, con el fin de *Identificar las estrategias que utilizan los estudiantes de grado sexto al iniciar la construcción del concepto de semejanza entre figuras*, siendo este nuestro objetivo de investigación.

Decidimos realizar un trabajo de carácter investigativo sobre el aspecto geométrico de la proporcionalidad, y más específicamente sobre la semejanza entre

figuras, pero no lo abordaremos de la manera convencional como se realiza en el currículo colombiano correspondiente al grado noveno, con el teorema de Thales, ya que por la edad de los niños, no es pertinente hacerlo de este modo, debido a que los conceptos involucrados en la proporcionalidad de segmentos, es propia de una etapa cognitiva posterior a la que se encuentran los niños, tal como lo afirma Piaget (1978), motivo por el cual, iniciamos el concepto de semejanza desde una mirada cualitativa. Actualmente se ha visto un cambio de actitud ante la enseñanza de la geometría, éste no ha sido del todo fuerte y tal vez sólo han quedado las buenas intenciones en el papel; lo anterior lo pudimos apreciar durante nuestra experiencia pedagógica ya que en la institución educativa, los temas relacionados con la geometría siguen siendo abordados superficialmente o relegados a un último plano.

La enseñanza de la geometría desde las edades más tempranas de los niños, puede llegar a ser muy productiva en relación con la apropiación de conocimientos, esto debido a que los niños están más dispuestos a la exploración del espacio que los rodea, desarrollando así una mayor sensibilidad hacia la geometría, aspectos que según Grupo Beta (1998), son olvidados por los docentes, quienes enfocan casi por completo a la enseñanza de la aritmética en esta etapa

Aproximarse al concepto de la proporcionalidad desde la geometría, en los primeros años de escolaridad, tiene una importancia definitiva en la formación de los estudiantes, ya que al abordarla de manera adecuada en esta etapa, podemos potenciar en ellos, desde el reconocimiento de las relaciones entre los objetos, hasta conceptos mucho más abstractos, como lo afirma el Grupo Beta (1998, p. 99). “[...] se debe trabajar esta geometría pues por su riqueza permite al alumno desarrollar la intuición creadora y adquirir hábitos correctos de pensar, iniciarse en el razonamiento lógico y en la comprensión de lo que es una demostración”

De igual manera en Colombia se reconoce la importancia de la enseñanza de la geometría, podemos observar que en documentos normativos para el área de matemáticas como los Lineamientos Curriculares y los Estándares Curriculares en Matemáticas, procuran motivar a los docentes para la enseñanza de ésta, desde los primeros grados escolares; entendiendo y reconociendo que el primer paso para el

desarrollo de este pensamiento es de carácter cualitativo y posteriormente cuantitativo, “[...] en este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio [...]” (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2007 p. 61). Además proponen una interrelación entre el pensamiento espacial con los demás pensamientos y en los diferentes grados.

Encontramos que desde los Lineamientos Curriculares se resalta también, la importancia que tiene la geometría como "fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar procesos de nivel superior y en particular diversas formas de argumentación." (MEN, 1998, p.17), creemos que lo anterior tendría lugar al proponerle inicialmente a los estudiantes actividades que involucren situaciones reales o que les sean familiares, donde ellos puedan reconocer los elementos geométricos que lo componen, teniendo en cuenta lo que conocen y utilizando materiales concretos, según el Grupo Beta (1998, p.99) la geometría activa propone “[...] que el alumno tiene que ir elaborando su conocimiento en geometría, a partir de actividades sobre objetos reales y concretos”, ya que estas permiten que los estudiantes en grados más avanzados puedan seguir construyendo conceptos, utilizando expresiones matemáticas más adecuadas y analizando las situaciones con un pensamiento más formal.

El aprendizaje de cualquier tipo de concepto matemático, no siempre es espontáneo en los estudiantes, sino que en algunas ocasiones debe estar mediado por actividades pensadas desde diferentes aspectos como los disciplinares, didácticos y cognitivos que rodean al estudiante, al profesor y al contexto en el que se encuentran.

Desde el aspecto didáctico el psicólogo Gerard Vergnaud, con la teoría de los campos conceptuales, nos ubica en tratar a la proporcionalidad como un concepto perteneciente al campo conceptual de las estructuras multiplicativas; siendo consecuentes con su teoría asumimos a la proporcionalidad como parte de una estructura de conceptos y situaciones que interactúan para complementarse, modificarse y representarse de diversas maneras. Retomando lo dicho por Moreira un Campo conceptual es, “un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento,

conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición” (Vergnaud, 1982, p. 40. Citado en Moreira, 1999, p.2); resaltando de igual manera que el proceso de adquisición de este conocimiento no está determinado ni por un tiempo ni por unas edades específicas, igualmente que un conocimiento nunca está construido totalmente, sino que va evolucionando a la par con el estudiante, quien a través de diversas interacciones con el concepto mismo, con conceptos relacionados y en diferentes situaciones lo va complementando y estructurando de una manera más compleja. De esta manera decidimos abordar la proporcionalidad, proponiendo actividades que desarrollen uno de los conceptos relacionados con ella.

Para nuestro caso decidimos conocer otras formas en las que puede abordarse la proporcionalidad y por esto el concepto de semejanza entre figuras fue elegido, ya que desde su definición se relaciona con la proporcionalidad entendida como medida.

En nuestro trabajo la semejanza entre figuras será abordada según lo propone el Grupo Beta (1998) en el texto, Proporcionalidad Geométrica y Semejanza como:

[...] aquellas entre cuyos puntos se pueda establecer una aplicación biyectiva que cumpla las siguientes condiciones, a puntos alineados en la figura original corresponden puntos alineados en igual orden en la figura homotética, los segmentos homólogos son proporcionales y los ángulos homólogos son iguales. La razón de proporcionalidad entre segmentos homólogos se llama razón de semejanza y a la propia correspondencia se le llama semejanza (p. 77).

Encontramos que desde otras miradas se considera la semejanza entre figuras como: “Transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación $|A'B'| = k|AB|$, donde k es un número positivo llamado razón de semejanza” (Vinogradov, tomo 9-2, p.53. Citado en Escudero, 2005, p 380), también encontramos otra definición “la semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento, $S=H.M$ ” (Martínez et al., 1984, p.364. Citado en Escudero, 2005, p.380); vemos entonces como resaltan dos características comunes en las definiciones anteriores, la primera corresponde a que dos

figuras son semejantes si poseen ángulos iguales y la segunda hace referencia sus lados proporcionales.

Al desarrollar el concepto de semejanza entre figuras se presenta diferentes momentos, uno de ellos es el de la comparación interfigural que es definido como “la correspondencia entre los elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar la figura en otra” (Lemodinis 1991, citado en Escudero, 2005, P.380), de acuerdo a esto Piaget (1985) afirma

Viene luego una etapa caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de transformaciones que relacionan las figuras según múltiples formas de correspondencia, [...]. Es el período durante el cual domina la geometría proyectiva. Esta etapa será denominada interfigural. (p. 106)

El aspecto cognitivo, para nosotras jugó un papel definitivo en el desarrollo de nuestro trabajo, el cual se interesó en cómo iniciaban los estudiantes la construcción del concepto de semejanza entre figuras a partir de una serie de actividades propuestas. Debido a esto, encontramos que Piaget (1978) pone de manifiesto en sus estudios que, “la noción de proporcionalidad se inicia siempre de una forma cualitativa y lógica antes de estructurarse cuantitativamente” (p. 141), de igual manera afirma que la construcción de un concepto se da por medio de procesos de asimilación y acomodación, así mismo con la elaboración de esquemas, concepto que también desarrolla más profundamente Vergnaud, en su teoría de los campos conceptuales. Igualmente Piaget afirma que “Se ve aparecer, a los once-doce años, la noción de las proporciones en ámbitos muy diferentes, y siempre en la misma forma inicialmente cualitativa. Estos ámbitos son entre otros: las proporciones espaciales (figuras semejantes)”; (p. 141), este trabajo lo realizamos con estudiantes de sexto grado con edades entre los 10 y 12 años, encontrando que según lo propuesto por estos autores, las edades de los estudiantes que elegimos es propicia para comenzar a trabajar los conceptos relacionados con la proporcionalidad y como tal, la semejanza entre figuras, aunque debemos tener en cuenta que este aspecto cognitivo no fue el único ni el más decisivo, otros aspectos

como veremos más adelante también fueron los que nos motivaron a trabajar con estos estudiantes.

Consideramos igualmente importante abordar una concepción sobre la proporción, para esto Piaget nos ilustra ampliamente sobre la relación entre este concepto con las estructuras cognitivas de los niños, determinando que la noción de proporción, se encuentra en el nivel de las operaciones formales, es decir, en este nivel las operaciones que se realizan no se dan directamente sobre los objetos sino que son operaciones sobre las operaciones. De igual manera y al ser las proporciones relaciones entre relaciones es definitiva la intervención de lo formal, por más concretas que estas relaciones sean.

Piaget (1972) afirma que la adquisición de la noción de proporcionalidad supone:

El paso de una forma cualitativa a una cuantificación, el descubrimiento de compensaciones que son anticipaciones cualitativas bajo la forma de compensaciones mediante la equivalencia de proposiciones lógicas, la intervención de la abstracción reflexiva a partir de la multiplicación. (p. 125)

Con respecto a la actividad geométrica que realizan los niños, Duval (1998) propone que esta requiere de 3 procesos cognitivos, éstos procesos aunque pueden hacerse separadamente, debe interrelacionarse por ejemplo el orden en que se den dichas interacciones puede representar la forma de encontrar el orden de construcción para una figura dada o las formas de describir un orden de construcción.

Otro de los aspectos que tuvimos en cuenta para el desarrollo de nuestro trabajo, fue el entorno del estudiante y como se relaciona con él, lo cual fue fundamental tanto para la implementación de las actividades como para el análisis que realizamos, ya que como lo expresan los Lineamientos Curriculares, MEN (1998):

Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se

concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (p. 19)

La experiencia pedagógica de carácter investigativo, la llevamos a cabo en la Institución Educativa Héctor Abad Gómez¹ “La Escuela de la Inclusión”, una de las 10 instituciones de calidad para Medellín, proyecto que tiene como premisa mejorar el servicio educativo y dar mayor cobertura educativa. Ésta institución está ubicada en el centro de la ciudad de Medellín, sus estudiantes son procedentes de todo el Vallé de Aburra y de todos los estratos socioeconómicos, pero donde predominan los estratos 1, 2 y 3. En nuestra estadia, la institución atravesó un proceso de cambio, se estaba reestructurando y repensando, tanto lo físico, como lo administrativo, académico y pedagógico, por lo cual se llevaron a cabo diferentes actividades que redujeron de diferentes manera los espacios y tiempos para realizar las actividades propuestas por nosotras, para el desarrollo de dicho proyecto.

Las actividades se realizaron en el grado sexto, los estudiantes seleccionados para el análisis pertenecen al grupo sexto dos. Este grupo cuenta aproximadamente con 40 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 10 y 14 años de edad y se caracteriza por ser muy dispuesto a la realización de trabajos tanto curriculares como extra curriculares, es también un grupo muy variado en cuanto a las edades y el género de sus estudiantes, resalta en este grupo la cantidad de niños con respecto a las niñas. En éste grupo estuvimos presentes en el aula, las dos maestras en formación y la maestra cooperadora² durante la puesta en escena de las actividades, las cuales sirvieron como instrumentos para la recolección de datos.

Durante la práctica pedagógica, desarrollamos nuestro proyecto de investigación, el cual contó con los siguientes momentos, en el primer momento realizamos una observación reflexiva sobre las interacciones presentes en el aula de clase entre el estudiante, el docente y el conocimiento; de igual manera en este momento trabajamos

¹ La I. E Héctor Abad Gómez se asume como una escuela de la inclusión ya que se enfoca en la diversidad cultural como un recurso y una oportunidad para el aprendizaje.

² Maestra cooperadora: Docente perteneciente al centro de práctica, que acompaña a la(s) maestra(s) en formación durante el tiempo que permanezca en la institución.

con los estudiantes siguiendo el plan de aula propuesto por la docente cooperadora, clases³ que fueron en su mayoría de carácter geométrico, experiencia que propició que tomáramos la decisión de enfocarnos en la proporcionalidad geométrica y que nos dio insumos para el diseño de la actividad diagnóstica. En el segundo momento diseñamos y pusimos en práctica la actividad diagnóstica, cuya intención era dar una primera mirada a los conocimientos sobre la semejanza entre figuras, que tenían nuestros estudiantes y que nos permitió elaborar el tercer momento de nuestro proceso investigativo, en éste, diseñamos y pusimos en marcha 5 actividades en las cuales tuvimos en cuenta el análisis realizado a la actividad inicial y dos principios que propone Vergnaud “un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones” (Vergnaud, 1994, p.46. Citado en Moreira, 1999, p.18) al igual que “un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situación; una situación no se analiza con un solo concepto” (Vergnaud, 1983a, p. 393. Citado en Moreira, 1999, p.4), dado que cada una de las actividades era pensada teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la actividad anterior, sin dejar a un lado nuevos conceptos que se relacionaran con los inicios de la semejanza entre figuras.

En las cuatro primeras actividades la intención que teníamos, era abordar conceptos como: la comparación entre medidas de lados correspondientes y de figuras semejantes, y variación de las magnitudes longitud y superficie. Por último llevamos a cabo una actividad, en la que pretendíamos que los estudiantes logaran dar un primer paso a la cuantificación de magnitudes y a la construcción del concepto de semejanza entre figuras.

Las actividades fueron las siguientes:

Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades

Objetos, medios y medidas

Mide y compara con el tangram

³ En este trabajo llamaremos clase a las actividades desarrolladas por las maestras en formación entorno al plan de aula de las docentes cooperadoras.

*Reconozcamos las semejanzas**Gigantes y pequeños**Comparando y relacionando figuras semejantes*

El último momento de nuestra investigación corresponde al análisis que realizamos, por medio de una interrelación de las respuestas obtenidas por cuatro estudiantes del grado 6-2, de nuestras opiniones y a la luz de los referentes teóricos abordados. Realizamos una recolección de información a partir de las respuestas dadas en cada uno de los talleres, las entrevistas a los estudiantes seleccionados entendidas como “conocer la perspectiva y el marco de referencia a partir del cual las personas organizan su entorno y organizan su comportamiento” (Patton, 1980, citado en Bonilla y Rodríguez, 1997, p. 93), los diarios reflexivos que según Jaramillo (2003) son “Registros elaborados sistemáticamente por el futuro profesor después de cada clase. En estos registros el profesor describe y analiza hechos y detalles de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y de la práctica pedagógica en general (p. 6), las fotos, las observaciones realizadas a cada una de las actividades y los videos, se convirtieron en registros que permitieron apreciar más detalladamente el proceso realizado por los estudiantes en cada una de las actividades tipo taller que realizaron, y se convirtieron en datos a partir de los cuales se realizó el análisis y permitió encontrar las categorías emergentes.

PUESTA EN ESCENA

Un niño aprende poniendo a prueba sus habilidades, los hábitos y actitudes de los que lo rodean y su propio mundo.

Frederick Moffet

Al momento de iniciar en la institución y con los estudiantes nuestro proyecto, elegimos el taller como estrategia metodológica a continuación contaremos cuáles fueron las actividades propuestas y el por qué de la elección.

Desde una visión pedagógica encontramos que el taller supone haber pensado en unos objetivos, una metodología y una población específica y desde su definición “es una forma de enseñar y sobre todo aprender, mediante la realización de algo” (Ander-Egg 1991, p.3), destacando así la importancia de la práctica¹ en el proceso de construcción del aprendizaje. Por esto reconocimos la importancia de que los estudiantes, estuvieran constantemente trabajando con diversos mediadores los cuales son entendidos según Gimeno (1985, p. 195) “como todo aquello que sirve para lograr un objetivo” estos mediadores se convierten en recursos realmente didácticos cuando favorecen las relaciones entre el conocimiento, el maestro y el estudiante y por tanto la comprensión de los conceptos que se trabajan en las clases.

Los recursos que utilizamos en nuestras actividades fueron: las guías, el docente, preguntas orientadoras que llevaran a los estudiantes a analizar cada uno de los procedimientos que realizaban en las actividades y por último el material concreto, el cual fue pensado y diseñado con el fin de que los estudiantes interactuaran con él de manera tal que pudieran realizar un verdadero trabajo mental y que sirviera como base para el aprendizaje significativo de los conceptos abordados, y no como una simple manipulación de objetos sin ningún significado.

A nivel escolar, este mismo autor sostiene que se debe procurar que las actividades tipo taller propuestas a los estudiantes, estén relacionadas con su contexto,

¹ Práctica: entendida según Ander-Egg (1991) como un aprender por medio de la realización de algo, no solo como la acción sino la reflexión sobre el trabajo que se realiza.

con situaciones de la vida cotidiana o real, esto con el fin de alcanzar los objetivos propuestos de una manera en que los estudiantes se sientan más cercanos al conocimiento.

Unas características importantes de la estrategia metodológica utilizada y que tuvimos en cuenta para el diseño y puesta en escena, son entre otras la metodología participativa que el taller lleva implícita y la reflexión que sugiere hacer sobre la acción realizada, se tuvieron en cuenta dos aspectos en las actividades que propusimos, debido a que consideramos que el conocimiento no es algo finalizado ni ajeno al estudiante, quien en su entorno, está en constante aprendizaje de diversos conceptos, sólo que en la escuela éstos pueden o no llegar a institucionalizarse², desde este punto de vista, el estudiante debió cumplir con funciones de observador y conceptualizador, por tanto su papel no fue pasivo frente a la construcción de conocimientos. Consideramos también, la función de la socialización como un aspecto muy importante en el trabajo de los estudiantes, tal como lo afirma Chamorro (2003)

Una manera de ver cómo y qué conexiones realizan las personas es a través de la comunicación y explicación de lo realizado [...] por otra parte, la exigencia de la comunicación hace que los alumnos tengan que pensar sobre lo hecho y puede que tengan que pensar sobre lo realizado desde puntos de vista diferentes como consecuencia de la exigencia de tener que explicar y comunicar a sus compañeros desarrollando aspectos del pensamiento estratégico. (p. 21)

Por tanto al conocer la opinión del otro, los estudiantes pueden reafirmar o modificar sus concepciones, lo cual, como se dijo anteriormente es fundamental para el aprendizaje; además la socialización tiene una implicación desde la formación integral de los estudiantes, apuntando al respeto por las opiniones de los demás y al trabajo en equipo, fomentando así, no sólo el desarrollo de los conocimientos conceptuales y procedimentales, sino también los conocimientos actitudinales.

² Institucionalización del saber: Según la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, en ésta los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos. Chavarría, J. *Teoría de las situaciones didácticas*. 2006.

Para el diseño de los talleres, tuvimos en cuenta trabajar el pensamiento espacial en relación con el métrico y con el variacional. Ya que como dicen los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998, p. 17).

Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones.

Las actividades propuestas, las describimos a continuación, mencionando, la intención de cada una, de acuerdo con lo que pretendíamos lograr en nuestra experiencia pedagógica. Inicialmente realizamos una actividad diagnóstica con el fin de conocer las concepciones previas que tenían los estudiantes, en relación con la semejanza entre figuras, y posteriormente teniendo en cuenta dicha actividad pusimos en práctica cinco actividades, con las cuales quisimos abordar conceptos relacionados con la iniciación de la construcción del concepto de semejanza entre figuras.

Las actividades que realizamos fueron dirigidas, entregábamos a nuestros estudiantes guías escritas que contenían las preguntas y espacio para sus respuestas, a excepción de una de las actividades, en la cual la guía fue oral, pero de igual manera entregamos una hoja donde los niños podían expresar sus respuestas, esta última actividad fue “Reconozcamos las Semejanzas”. Durante la realización de las actividades quisimos resaltar la importancia del trabajo en grupos colaborativos que venía desarrollando la docente cooperadora, por ello las actividades, las desarrollamos principalmente en forma grupal siguiendo esta metodología de trabajo, con la que los estudiantes estaban familiarizados, aunque en una ocasión debido a los propósitos planteados, el desarrollo de actividad fue individual.



Figura 1. Apoyo de la docente cooperadora durante las actividades

Al poner en escena las actividades que realizamos con los estudiantes tuvimos en cuenta tres momentos que consideramos importantes, organización de los equipos, puesta en marcha de la actividad y por último la socialización y conceptualización.

<i>Actividad</i>	<i>Nombre de la actividad</i>
Diagnóstica	Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades...
I	Objetos, medios y medidas
II	Mide y compara con el Tangram
III	Reconozcamos las semejanzas
IV	Gigantes y pequeños
V	Comparando y relacionando figuras semejantes

Figura 2. Nombre de las actividades desarrolladas con los estudiantes durante el proyecto de investigación

En la actividad diagnóstica *Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades*, la intención fue conocer las relaciones que establecían los estudiantes en actividades que involucraran la observación, la comparación y la descripción de objetos que guardan entre si alguna relación de semejanza. Esta actividad tuvo una duración de 2 horas clase para las actividades y 1 hora clase para la socialización.

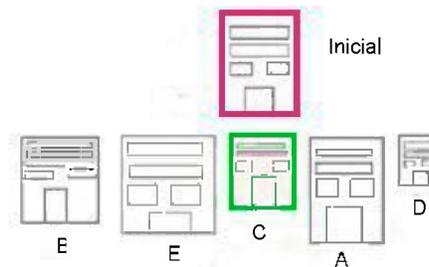
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
 FACULTAD DE EDUCACIÓN
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN"
 MATEMÁTICAS

ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

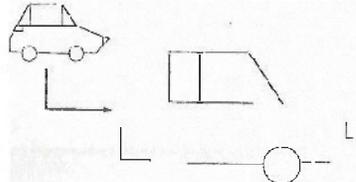
OBSERVA, MIDE, COMPARA Y COMPRUEBA TUS HABILIDADES...

HOJA DE PREGUNTAS

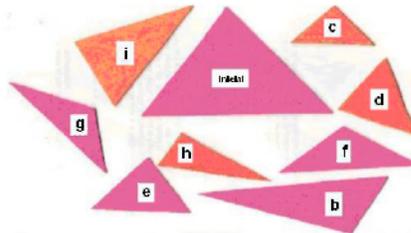
1. Describe la figura inicial y encuentra la que más se le parezca. Justifica tu respuesta.



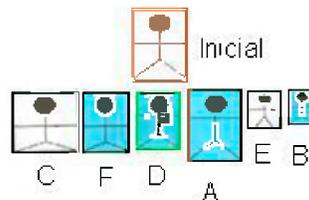
2. Completa la figura a la que le falta algunos trazos y luego dibújala más grande.



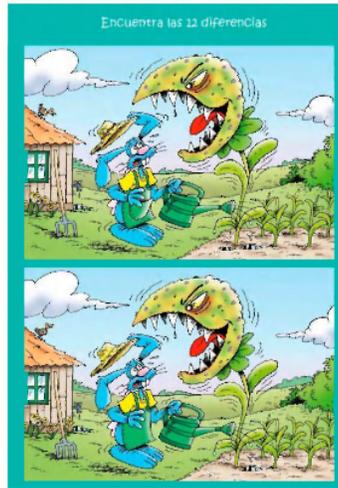
3. Elige y describe cuáles son los triángulos que tienen algo en común, y luego sepáralos de los demás.



4. Escoge cuál de las siguientes figuras se parece a la que te dimos inicialmente.



5. Encuentra 12 diferencias entre los siguientes dibujos



HOJA DE RESPUESTAS ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

1. Escribe aquí las letras de las figuras que escogiste y explica porque las escogiste.

2. Pega aquí el dibujo ampliado

3. Escribe aquí las letras de las figuras que escogiste y la descripción que hiciste

4. Escribe aquí las letras de las figuras que escogiste y explica porqué las escogiste.

NOMBRES: _____

Esta actividad fue tipo carrusel³, cada uno de los puntos de la actividad se encontraba en un sobre que contenía la pregunta y los elementos necesarios para desarrollarlo. A los estudiantes se les rotaban los sobres con las preguntas en un tiempo determinado.

Consideramos importante explicar la intención de cada una de los puntos que desarrollamos durante esta actividad, el propósito del primer punto, fue que los estudiantes establecieran relaciones entre el largo y el ancho del contorno del edificio y de las ventanas, comparando los otros edificios entre sí, con el fin de escoger el que más se le parece teniendo en cuenta características como: cantidad de ventanas, y el tamaño y forma de las ventanas y puertas. En esta actividad les entregamos las figuras de edificios, realizados en diferentes materiales como: fomi, cartón paja, cartulina, cartulina plana y papel bond, con el fin de verificar si para ellos era significativo el tipo de material, como característica esencial para establecer una comparación.

En el segundo punto, la actividad⁴ constaba de dos aspectos el primero: completar la figura, y el segundo: ampliar la figura que se completó. Les entregamos a los estudiantes una hoja que contenía una figura pequeña completa, y otra proporcionalmente ampliada a la que le faltaban unos trazos para ser igual (en la forma) a la inicial. Pretendíamos con este primer aspecto que los estudiantes dada una figura inicial, completaran la segunda teniendo en cuenta que ésta debía quedar con características similares y con el segundo aspecto pretendíamos que los estudiantes ampliaran la figura teniendo en cuenta las medidas del largo y el ancho simultáneamente y no sólo la forma.

En el punto tres de la actividad les entregamos a los estudiantes, triángulos equiláteros y escalenos con ángulos agudos y obtusos, también triángulos que tuvieran

³ En esta actividad se formaron grupos, donde los estudiantes se debían rotar cada uno de los sobres que contenía las preguntas a desarrollar, se contó con un tiempo determinado en el que los estudiantes debían llevar a cabo cada punto.

⁴ Esta actividad fue adaptada de la propuesta hecha en el libro proporcionalidad geométrica y semejanza del Grupo Beta, página 150.

una relación de proporcionalidad entre las medidas de alguno de sus lados, o de lados completamente proporcionales. Con este punto pretendíamos que observaran las características de los diferentes triángulos y encontraran los que para ellos se relacionaran por algo en común, tal como sus lados, sus ángulos, el color o su forma (equilátero, escaleno), también para que logaran percibir relaciones existentes entre los lados de los triángulos y la cantidad de veces que cabían en el inicial.

En el punto cuatro le hicimos entrega a los estudiantes de un *muñeco de alambre*⁵ inicial y otros con características diferentes como son el tamaño de la cabeza, distancia entre la cabeza y los brazos, el ángulo formado por las piernas, la altura o el ancho del muñeco y realizados en diferentes materiales como cartulina plana, el cartón paja y hojas de papel bond. Pretendíamos que los estudiantes establecieran relaciones según las características de los muñecos entregados y del material en el que estaban elaborados, con el fin de verificar si para ellos era significativo este material como característica esencial para establecer la comparación.

Y finalmente en el punto quinto entregamos a los estudiantes dos dibujos aparentemente iguales pero que contenían 12 diferencias, que ellos debían encontrar. Pretendíamos en este punto que los estudiantes por medio de la percepción visual del dibujo, identificaran cuáles eran las diferencias existentes entre ambos.

Continuamos con la actividad, *Objetos, medios*⁶ *y medidas* la cual se realizó en dos horas clase para las actividades y 1 hora clase para socialización, su intención fue que los niños reconocieran los aspectos que son medibles en algunos objetos propuestos como: un tetraedro, un cilindro, un prisma base triangular, una pelota de pin pon y las diferentes unidades de medida que utilizaban o que podían utilizar para realizar las mediciones.

⁵ Muñeco de alambre será tratado en este trabajo a aquel formado por un círculo y líneas.

⁶ En esta actividad entenderemos como medios a los instrumentos de medición utilizados por los estudiantes.

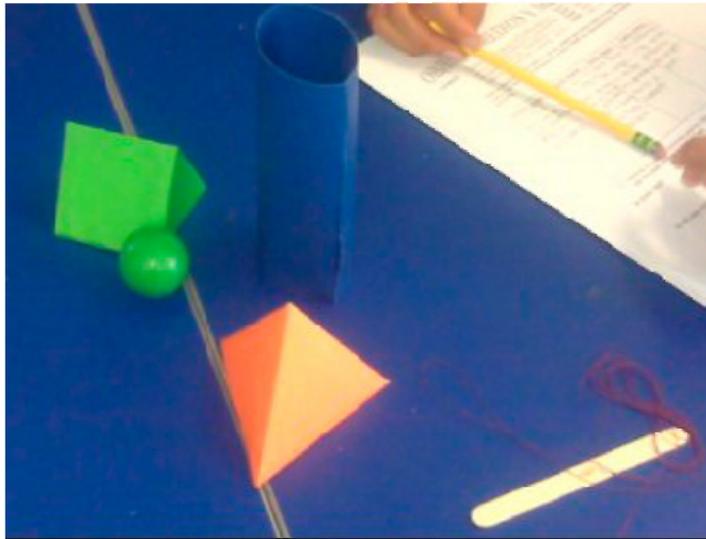


Figura 3, objetos e instrumentos utilizados en esta actividad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
 FACULTAD DE EDUCACIÓN
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN"
 MATEMÁTICAS

OBJETOS, MEDIOS Y MEDIDAS

NOMBRES: _____ EDAD: _____

1. Observa detalladamente cada uno de los objetos que tienes sobre la mesa escoge cuatro de ellos y descríbelos teniendo en cuenta TODAS las características que puedas encontrar.
- 2.

Primer objeto	Segundo objeto	Tercer objeto	Cuarto objeto

3. Teniendo en cuenta la actividad anterior dinos qué puedes medir de estos objetos, que no puedes medir y explica por qué.

Se puede medir:

No se puede medir:

4. Toma todas las medidas posibles de estos objetos usando diferentes instrumentos. Escribe las medidas explicando a qué corresponde cada una. ¿Qué dificultades encontraste al momento de tomar las medidas?



Escribe en la siguiente tabla todas las medidas que encontraste utilizando regla u otros instrumentos

	Instrumento 1	Instrumento 2	Instrumento 3	Instrumento 4
Primer objeto				
Segundo objeto				
Tercer objeto				
Cuarto objeto				

4. Ahora mide tu mesa de trabajo con las cintas y explica cómo lo hiciste.

- Después de realizar la medición de tu mesa de trabajo ¿Crees que la cinta que escogiste es la más adecuada? Justifica tu respuesta.

5. Ahora escoge otras cintas para medir teniendo en cuenta:

- Que pueda caber una cantidad exacta de veces en el borde horizontal.
- Que pueda caber una cantidad exacta de veces en el borde vertical.

¿Cuáles fueron las cintas que elegiste?

6. Escoge una sola cinta con la que puedas medir, tanto el borde horizontal como el vertical una cantidad exacta de veces, escribe cuál cinta escogiste y cómo la elegiste.

Analiza bien la cinta que escogiste y dinos:

- ¿Con qué instrumento que ya conoces la asocias?
- ¿Cuánto crees que puede medir la cinta que elegiste, y cómo lo puedes comprobar?

El propósito que nos planteamos para desarrollar cada uno de los puntos de esta actividad, fue que los estudiantes pudieran reconocer las cualidades que poseen los objetos que les entregamos, con el fin de realizar una descripción de éstos, de esta manera nos acercáramos a reconocer los conocimientos previos que tenían los estudiantes alrededor de la magnitud de longitud, tomando en cuenta que ésta hace referencia a las características que son observables y están en los objetos, según lo dice el Grupo Beta (1998, p. 51) “una magnitud de las que trabajan nuestros alumnos, responde a una característica física, a un atributo observable de los objetos; piénsese, por ejemplo, en la longitud, masa, superficie, etc.” También posteriormente observar cuáles procedimientos utilizaban los estudiantes para realizar una medición.

De igual manera durante la actividad les proporcionamos a los estudiantes diversos instrumentos (cintas⁷, hilo, palitos de paleta), con los que ellos debían realizar las mediciones, con el propósito de, identificar que estos serían la unidad patrón⁸ para expresar sus mediciones. Específicamente en uno de los puntos, les entregamos a los estudiantes unas cintas de diferentes tamaños, una de ellas cabía un número exacto de veces sólo en el lado horizontal de la mesa de trabajo de los niños, otra cabía exactamente sólo en el lado vertical, de igual manera elaboramos otra que pudiera caber un número exacto de veces tanto en el lado vertical como horizontal; también entregamos cintas que no cabían exactamente en ninguno de los dos lados; lo anterior con el fin, de que identificaran la unidad patrón más adecuada para cada una de las mediciones propuestas, usando la exploración que también los llevó a realizar estimaciones y aproximaciones.

Mide y compara con el tangram, es la segunda actividad propuesta, tiene dos intenciones, la primera en torno a las mediciones con una unidad patrón, y la segunda las comparaciones para encontrar relaciones tales como, la cantidad de veces que cabe una figura en otra, y las comparaciones entre las figuras semejantes que se encontraban presentes.

⁷ Cintas: Trozos de cartulina de 2 cms de ancho y de diferentes tamaños de largo, entregados a los estudiantes para realizar mediciones.

⁸ Patrón: unidad física invariable que sirve de referencia primaria, para realizar una medición. Módulo de pensamiento métrico y sistemas de medidas, 2006.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN"
MATEMÁTICAS
HISTORIA DEL TANGRAM

El Tangram es un juego chino muy antiguo llamado "Chi Chiao Pan" que significa "juego de los siete elementos" o "tabla de la sabiduría". Existen varias versiones sobre el origen de la palabra Tangram, una de las más aceptadas cuenta que la palabra la inventó un inglés uniendo el vocablo cantonés "tang" que significa chino, con el vocablo latino "gram" que significa escrito o gráfico. Otra versión narra que el origen del juego se remonta a los años 618 a 907 de nuestra era, época en la que reinó en China la dinastía Tang de donde se derivaría su nombre.

No se sabe con certeza quién inventó el juego ni cuándo, pues las primeras publicaciones chinas en las que aparece el juego datan del siglo XVIII, época para la cual el juego era ya muy conocido en varios países del mundo. En China, el Tangram era muy popular y era considerado un juego para mujeres y niños.

MIDE Y COMPARA

1. Observa el tangram que te entregamos y dinos ¿Cuál es el nombre de las figuras que lo forman?
2. Escoge la figura que sea la más pequeña del tangram y dibújala.
3. Encuentra las relaciones entre todas las figuras que forman el tangram y la más pequeña.
4. ¿Cuántos triángulos pequeños necesitarías para cubrir cada una de las figuras? Explica como lo hiciste.

	figura 1	figura 2	figura 3	figura 4	figura 5	figura 6	figura 7
cantidad de triángulos pequeños							

5. Del punto anterior que conclusiones puedes sacar.
6. Para cubrir el cuadrado grande ¿cuántos triángulos pequeños necesitas? Explica como lo hiciste.
7. Observa el cuadrado pequeño, el paralelogramo y el triángulo mediano y di qué tienen de igual y qué tienen de diferente. Explica tu respuesta.
8. ¿Cuántos triángulos diferentes hay en el tangram? dinos en qué se parecen o se diferencian sus lados y sus ángulos.
9. Une los dos triángulos grandes para formar un cuadrado y compara el lado pequeño del triángulo 1 con el borde del cuadrado que acabas de formar, ¿Qué puedes decir?
10. Ahora compara el lado pequeño del triángulo 1 con el borde del cuadrado pequeño y responde. ¿cabe un número exacto de veces?; ¿Cuántas veces cabe?
11. ¿Qué conclusiones puedes sacar de los dos puntos anteriores?

Cada uno de los puntos de esta actividad tuvieron una intencionalidad, tales como: el reconocimiento de las figuras geométricas que conformaban el tangram, la descripción de sus características en cuanto al tamaño y la forma, reconocimiento de la unidad patrón de superficie, para un acercamiento al concepto de área, y que encontraran las posibles relaciones entre estas figuras, por medio de la exploración que estuvo siempre de manifiesto en ésta actividad. También fue muy importante para nosotras, proponer preguntas en las que los estudiantes tuvieran que justificar verbalmente todos los procesos, decisiones y respuestas que obtuvieran en cada uno de los puntos, esto debido a la propuesta que hacen los Lineamientos “El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de sus competencias [...]” (MEN, 1988, p.7), por tal motivo lo esencial es tener en cuenta que cualquier actividad que se le plantea a los estudiantes, debe apuntar a desarrollar competencias, en este caso la argumentación.

Otra de las intenciones planteadas en los puntos finales de esta actividad, estuvo enfocada en observar si los estudiantes, establecían relaciones de semejanza entre los tres tamaños de triángulos que hacían parte del tangram, y si tenían en cuenta las mediciones⁹ que habían realizado previamente para indicar las posibles relaciones. Ya que en las actividades anteriores se había abordado las medidas de longitudes y aquí se quería explorar la medición con relación a las superficies.

⁹ Las mediciones realizadas en esta actividad fueron, correspondientes a la medición de superficies.

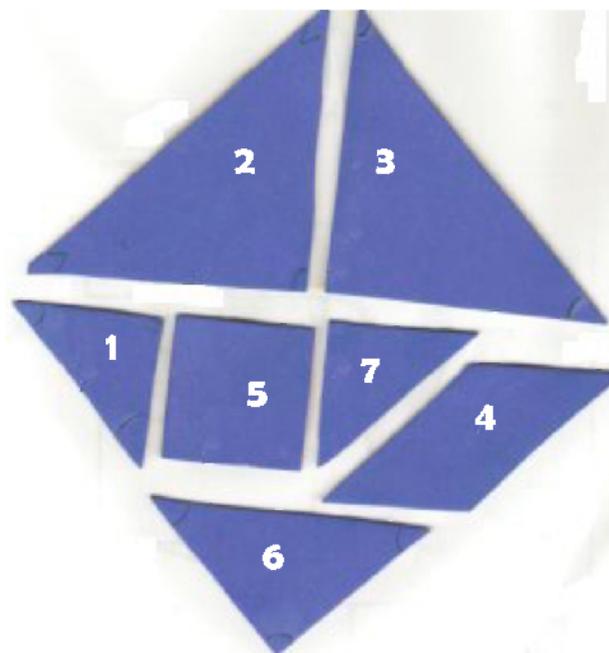


Figura 4, Tangram entregado a los estudiantes para la actividad 2.

La actividad III *Reconozcamos las semejanzas*, se realizó en 3 horas, de las cuales 1 fue de socialización, tuvo como intencionalidad principal, reconocer las relaciones que establecen los estudiantes entre las medidas de los lados correspondientes de algunos rectángulos semejantes y no semejantes, ya que siguiendo lo afirmado por el Grupo Beta (1998) “ Tienen los rectángulos una propiedad interesante que los hace adecuados para el estudio de la semejanza en general, es ésta que, teniendo todos sus ángulos iguales permite sólo fijarse en la proporcionalidad entre los lados como criterio de semejanza[...]” (p. 154), lo cual permite en esta actividad abordar el aspecto correspondiente a la proporcionalidad de los lados, que deben cumplir las figuras semejantes.

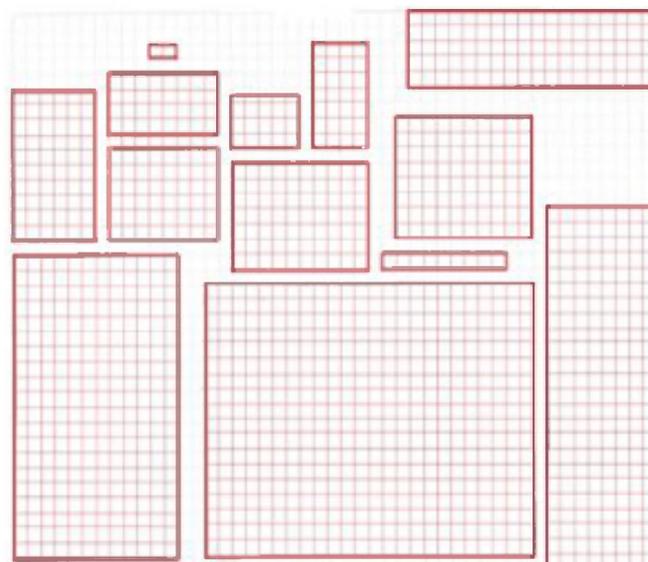


Figura 5, paquete de rectángulos entregado a los estudiantes para desarrollar esta actividad

Les entregamos a los estudiantes un paquete con varios cuadriláteros, 13 corresponden a rectángulos como se ve en la figura anterior los cuales tienen aspectos comunes como uno o ambos lados de igual tamaño o proporcionales y los otros aunque son cuadriláteros no se relacionaron con los rectángulos, esto último con el fin de observar si los estudiantes entienden lo que se quiere decir con igual o similar forma. La actividad fue dirigida con una guía oral y en parejas donde cada punto fue socializado inmediatamente se realizó. Dichos cuadriláteros se entregaron en papel cuadriculado, con el fin de que se reconociera el cuadrado como la unidad patrón de superficie, y el lado del cuadrado como la unidad patrón de longitud.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE
LA INCLUSIÓN"
MATEMÁTICAS

RECONOZCAMOS LAS SEMEJANZAS.

Preguntas:

1. Del grupo de figuras que se te entregó escoge las que más se parezcan y sepáralas de las otras dando las características de cada grupo que formes.
2. Dinos en qué se parecen las figuras que elegiste.
3. ¿Qué nombre reciben las figuras que elegiste en cada grupo?
4. Cada uno de los rectángulos esta cuadrulado, dinos cuántos cuadritos tiene cada uno? y escríbelo en la tabla que se te entregó
5. Observa y compara el lado horizontal y vertical (ancho y largo, esto se acordó previamente con ellos) de los rectángulos y dinos cuáles se relacionan y en qué?
6. Compara el rectángulo a con el rectángulo b y escribe las relaciones que encuentras entre ellos.
7. Divide la medida del lado grande entre la medida del lado pequeño de cada uno de los rectángulos que ¿resultado obtuviste?
8. Ahora encuentra entre los rectángulos que quedan otras parejas que también se relacionen.
9. Compara el rectángulo menor con el rectángulo mayor que razones puedes establecer.
10. Compara el rectángulo menor con el rectángulo mayor que razones puedes establecer.
11. Con todo lo anterior a qué conclusión podemos llegar.

En el punto uno de esta actividad el propósito era, que los estudiantes reconocieran dentro de una clase de cuadriláteros, alguna característica especial y diferenciadora, con la cual pudieran formar subgrupos teniendo en cuenta dicha o dichas características, la clasificación que allí se les proponía es muy importante, ya que los conceptos de clasificación y ordenación según el Grupo Beta (1998) “[...]son fundamentales para entender el concepto de magnitud y el de cantidad” (p. 50), que de igual forma tratamos de abordar en nuestro trabajo, por su relación con la medidas de los lados proporcionales de las figuras semejantes.

La finalidad del punto dos era que los estudiantes argumentaran desde lo que observaban en los rectángulos, las relaciones existentes entre figuras similares (familia de rectángulos), anotando alguna característica especial, con el fin de conocer los aspectos que ellos consideraban importantes al indicar que dos figuras eran similares, concepción que es cercana a la semejanza entre figuras.

El punto tres pretendía indagar si los estudiantes reconocían el nombre de las figuras entregadas, en este caso rectángulos, y si los consideraban pertenecientes al conjunto de los cuadriláteros, de esta misma manera la intención del punto cuatro se dirigió a que los estudiantes, pusieran de manifiesto las estrategias utilizadas para contar la cantidad de cuadritos que componía la figura e identificando a estos “cuadritos” como unidad patrón para la superficie y para la medida de los lados, la longitud del lado del “cuadrado”, con el fin de que ellos conocieran las medidas de los lados de las figuras, para realizar posteriormente relaciones entre éstas medidas.

Lo que pretendíamos en los puntos quinto y sexto era que los estudiantes, inicialmente desde una mirada cualitativa y teniendo en cuenta, los lados de los rectángulos, establecieran relaciones entre la magnitud ancho y largo de varios rectángulos, e indicaran la forma en que dichos lados cabían unos en otros, aproximándonos de esta manera a la proporcionalidad de segmentos, indispensables para la construcción formal de la definición de figuras semejantes.

En el punto siete la intención se centró, en establecer relaciones como: ser el doble, el triple, la mitad, la tercera y la cuarta parte de, entre las figuras entregadas. También que encontraran figuras que cubrieran a otra u otras un número exacto de veces. En el punto ocho los estudiantes debían interpretar los resultados obtenidos, para acercarse a lo que hemos mencionado en oportunidades anteriores sobre la proporcionalidad de los lados de los rectángulos.

El propósito de los puntos diez y once, fue que identificaran como una ampliación o como una reducción, las figuras que se estaban comparando con el apoyo del material entregado (rectángulos), esperábamos percibir en los procedimientos hechos por los estudiantes el uso de las relaciones multiplicativas; de igual manera que los estudiantes argumentaran, valoraran y opinaran sobre sus procesos y los resultados obtenidos.

Gigantes y pequeños se realizó en 2 horas clase y contó con la intención de identificar las relaciones multiplicativas, que utilizaron los estudiantes en actividades en las que se propone algún tipo de variación de las medidas de las magnitudes, dando un avance hacia la cuantificación por medio del uso del sistema métrico, ya que la semejanza es un concepto relacionado con la proporcionalidad y por ende con las estructuras multiplicativas, consideramos que esto era de importancia para conocer un posible avance en las concepciones del niño sobre la semejanza entre figuras, entendido como una posible ampliación o reducción, manteniendo la misma forma pero multiplicando o dividiendo el tamaño de la misma.

Por medio de la utilización del cuento, llevamos a cabo el desarrollo de esta actividad, este cuento fue una adaptación que realizamos a la propuesta hecha por el Grupo Beta donde retomaban la historia de Gulliver, para establecer relaciones de proporcionalidad. En nuestro caso la adaptación estuvo dirigida a las intenciones que mencionamos a continuación.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN"
MATEMÁTICAS
NOMBRES:

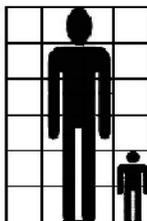
GIGANTES Y PEQUEÑOS

Había una vez, un hombre llamado John que vivía en el país Azul, a él le gustaba mucho navegar por el océano, un día una terrible tormenta hizo que su barco naufragara, pero él era muy cuidadoso y llevaba puesto un salvavidas, de ésta manera el nadó hasta llegar a una de las dos islas que habían cerca de donde ocurrió el naufragio.

El empezó a recorrer ésta isla la cual se llamaba Amarilla, con el fin de encontrar algo que comer o ver si había gente que le ayudara a regresar a su casa, pero se llevó una gran sorpresa cuando encontró que la gente y las cosas de esta isla eran más pequeñas que él, muchísimo más pequeñas, convirtiéndose de esta manera en un gigante para esas personas. El quiso saber que tan pequeñas eran las cosas y la gente de esta isla y empezó a hacer comparaciones.

John medía 180 centímetros, y recordaba que en su país un caballo mide 210 centímetros y una casa de 1 piso mide 240 centímetros de alto, al compararse con uno de los habitantes de la isla Amarilla que conoció llamado Mark, encontró que él medía 60 centímetros.

- Analiza el siguiente dibujo y encuentra la relación entre la medida de la estatura de John y la estatura de Mark.



- Podrías decir cuántas veces es más grande John que Mark.
- Escribe de diferentes maneras la relación que encontraste entre John y Mark.

Completa el siguiente cuadro, teniendo en cuenta la relación que encontraste en el punto anterior

MEDIDAS		
	PAIS AZUL	ISLA AMARILLA
ESTATURA HOMBRES	180 CMS	60 CMS
ESTATURA CABALLOS	210 CMS	
ALTURA ÁRBOLES		120 CMS
ALTURA CASAS	240 CMS	
LARGO DE LOS COLCHONES		60 CMS
ALTURA MESA	120 CMS	



- Analiza los datos de la tabla los que están en la misma fila. ¿Qué relación encuentras entre ellos?
- Escribe de diferentes maneras la relación que encontraste.

Después de encontrar esto decidió que iba a ir a la otra isla llamada Verde, para ver si podía encontrar gente de su misma estatura que lo pudiera ayudar, pero cuando llegó, allí, se encontró en una isla de gigantes que median 3 veces más que él. Ayudemos a John a conocer el tamaño de las cosas de la isla verde.

MEDIDAS

	PAIS AZUL	ISLA VERDE
ESTATURA HOMBRES	180 CMS	
ESTATURA CABALLOS		
ALTURA ARBOLES		
ALTURA CASAS		
LARGO DE LOS COLCHONES		
ALTURA MESA		

- Analiza los datos de la tabla los que están en la misma fila. ¿Qué relación encuentras entre ellos?
- En la siguiente hoja dibuja a John y a un habitante de la isla Verde. Explica como lo hiciste.

En la isla verde John se hizo amigo de un hombre llamado Erik, quien le ayudo a construir una balsa, ésta balsa por su tamaño, era como un gran barco para John, con esta ayuda John logró volver a su casa en el país Azul, llevando recuerdos de cada una de las islas. Cuando llegó al país Azul decidió contarle la aventura a su madre, mostrándole los objetos que había llevado y algunos dibujos de los objetos que no pudo llevar por su tamaño.

En la hoja que se te entregará están los dibujos de los objetos que pertenecen a las islas donde estuvo John, ahora debes dibujarlas en los tamaños que se te piden

Después de hacerlo responde las siguientes preguntas.

1. Explica que cambio le ocurrió a los objetos iniciales.
2. ¿Qué tuviste en cuenta para hacer el cambio al objeto?
3. Al ampliar o reducir la figura ¿qué permanece igual y qué cambia?
4. Escoge uno de los dibujos, mide las dimensiones del que te entregaron y del que realizaste, compara esa medidas, ¿Qué puedes concluir?

En los primeros puntos de esta actividad nos propusimos determinar las relaciones que podían encontrar los estudiantes, al observar dos figuras que fueran proporcionales, tal como lo muestra la imagen de este punto, que dieran cuenta no sólo de la igualdad de la forma de la figura, sino de la medida de la altura de ambos hombres y que compararan las medidas obtenidas indicando si la más pequeña cabía en la grande un número exacto de veces, con el fin de que se acercaran a la cuantificación de magnitudes por medio de la utilización del sistema métrico decimal.

También consideramos como un aspecto muy importante el encaminar al niño a expresar de diversas maneras, las relaciones entre las medidas de las magnitudes, ya que como afirma Vergnaud (1998), dentro de un campo conceptual deben haber situaciones, conceptos y representaciones de diferentes tipos pero siempre relacionados, en este caso pretendíamos que los estudiantes, aparte de la expresión en su lenguaje cotidiano, que primaba en todas sus respuestas, pudieran trasladar dichas expresiones a otras en las que utilizaran números o símbolos.

En los puntos siguientes, la intención que tuvimos al plantear esas preguntas fue, conocer si por medio de la completación e interpretación de los datos de una tabla, los estudiantes podían encontrar un elemento constante de cambio entre las medidas de un país con relación al otro, debido a la importancia que tiene para la semejanza entre figuras la construcción del término *razón*, el cual está relacionado con la forma en que las figuras amplían o reducen el tamaño de sus lados.

En los últimos puntos propusimos a los niños, que realizaran ampliaciones y reducciones de figuras bidimensionales, tridimensionales y curvas¹⁰, en las que debían tener en cuenta las razones de cambio que habían encontrado en los puntos anteriores, al momento de realizarlas, de igual forma y apuntando a fortalecer en ellos la argumentación y la descripción. Les pedimos que nos contaran como habían desarrollado los puntos y que aspectos cambiaban o permanecían iguales en la figura en

¹⁰ Estas figuras fueron presentadas a los estudiantes intencionalmente, con el fin que establecieran relaciones entre 2 o más variables y no con una sola, como se venía haciendo en las otras actividades.

la que hacían la ampliación o la reducción, con el fin de que explicaran estos dos aspectos tan importantes en la definición de la semejanza entre figuras.

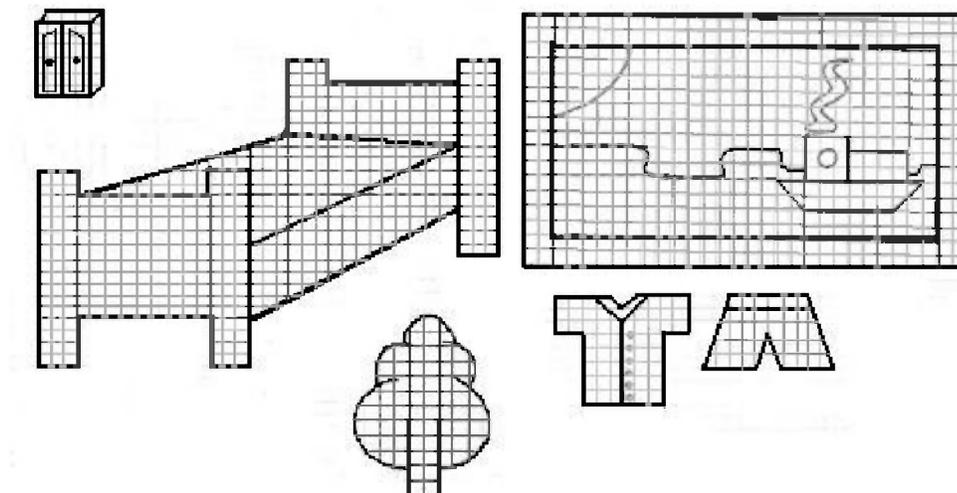


Figura 6, paquete de figuras entregadas en papel cuadriculado, a los niños para realizar las ampliaciones y reducciones

Y por último presentamos la actividad V *Comparando y relacionando figuras semejantes* la cual se realizó en 2 horas clase y cuya intención fue reconocer las características y relaciones que cumplen las figuras semejantes, ya que al ser la última intervención era importante proponer actividades en las que se involucraran las relaciones que se establecen entre las características que definen a dos figuras como semejantes, muy especialmente en los procesos de cuantificación de las magnitudes involucradas.

A los niños se les entregó dos paquetes, uno contenía un juego de tres triángulos escalenos semejantes¹¹ y el otro contenía tres rectángulos también semejantes, la manipulación y exploración del material favorecen la interpretación y la argumentación de las preguntas planteadas.

¹¹ Figuras con lados proporcionales y ángulos iguales.

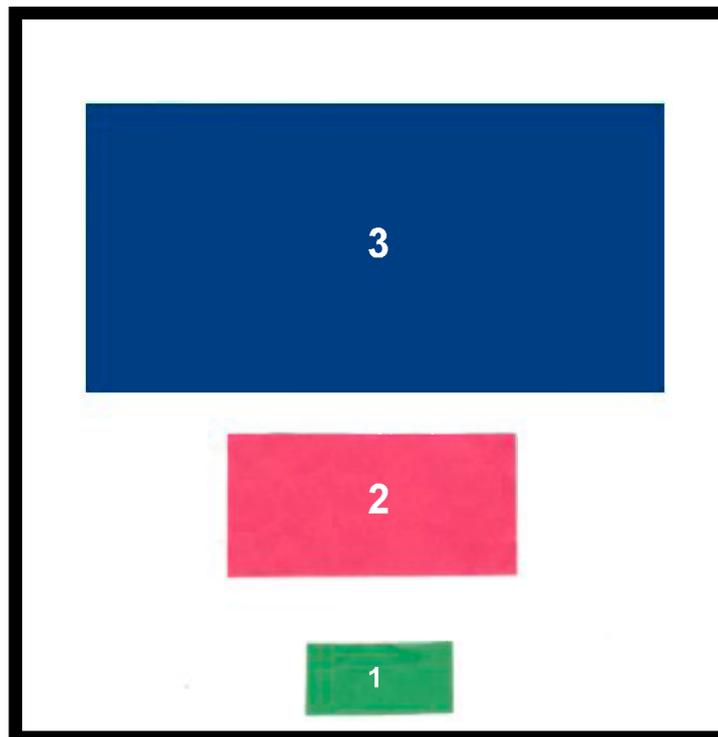
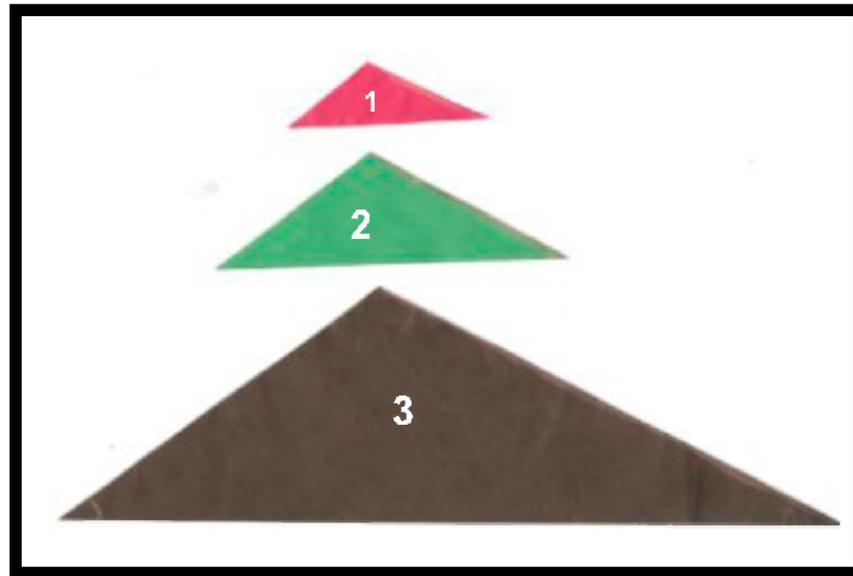


Figura 7, juego de triángulos escalenos y de rectángulos entregado a los estudiantes



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN"
MATEMÁTICAS

NOMBRES:

COMPARANDO Y RELACIONANDO FIGURAS SEMEJANTES...

1. ¿Cómo son los triángulos que tienes sobre la mesa?
2. Escoge un color y pinta del mismo color los ángulos iguales de los triángulos que tienes sobre la mesa.
3. Observa los triángulos que se te entregaron y dibújalos.

Pinta del mismo color el lado más grande de cada triángulo.
Pinta del mismo color el lado mediano de cada triángulo.
Pinta del mismo color el lado más pequeño de cada triángulo.

4. Observa los lados de los triángulos a los que les corresponde el mismo color y compara las medidas de sus lados.

MEDIDAS	TRIÁNGULO 1	TRIÁNGULO 2	TRIÁNGULO 3
LADO MAYOR			
LADO MEDIANO			
LADO MENOR			

5. Escoge el triángulo 1 como unidad de medida y analiza cuántas veces caben sus lados en los lados similares del triángulo 2 y 3

LADO SIMILAR	TRIÁNGULO 2	TRIÁNGULO 3
LADO MAYOR		
LADO MEDIANO		
LADO MENOR		

6. Expresa en forma numérica la relación entre los lados correspondientes de las figuras.
7. ¿Qué puedes concluir sobre los lados y los ángulos de los triángulos dados?
8. Observa los cuadriláteros que se te entregaron y dibújalos.
9. Pinta del mismo color los lados correspondientes de cada uno de los rectángulos.



10. Compara los lados de los rectángulos a los que les corresponde el mismo color y dí en qué se relacionan las medidas de sus lados.

MEDIDAS	RECTÁNGULO 1	RECTÁNGULO 2	RECTÁNGULO 3
Lado a			
Lado b			
Lado c			
Lado d			

11. Escoge el rectángulo 1 como unidad de medida y analiza cuántas veces caben sus lados en los lados correspondientes del rectángulo 2 y 3

LADO CORRESPONDIENTE	RECTÁNGULO 2	RECTÁNGULO 3
Lado a		
Lado b		
Lado c		
Lado d		

12. Expresa en forma numérica la relación entre los lados correspondientes de las figuras.

13. Colorea del mismo color los ángulos iguales de los rectángulos. ¿Qué puedes concluir sobre los lados y los ángulos de los rectángulos dados?

14. Toma el triángulo 2 y amplía todas las medidas de sus lados al doble, describe cómo lo hiciste.

15. Toma el rectángulo 3 y reduce todas las medidas de sus lados a la mitad, describe cómo lo hiciste.

16. Al realizar esto, explica que cambia y que permanece igual en la figura.

17. ¿Qué aspectos del triángulo y del rectángulo tuviste en cuenta para que al realizar la ampliación o la reducción las figuras siguieran siendo parecidas?

Los propósitos que tuvimos en esta actividad estuvieron divididos, en los que se pretendían para el trabajo con los triángulos específicamente, en los de los cuadriláteros y los comunes a ambos grupos, siguiendo lo propuesto por el Grupo Beta (1998).

Con referencia al primer propósito, estuvimos encaminadas a determinar si los estudiantes reconocían las características de los triángulos entregados, la igualdad de los ángulos correspondientes y las relaciones entre las medidas de los lados correspondientes, teniendo en cuenta que “[...] es fundamental el estudio del triángulo pues cualquier figura poligonal puede descomponerse en un conjunto de triángulos. Dos triángulos semejantes tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados correspondientes proporcionales” (Grupo Beta, 1998, P.80).

En las preguntas que hacían referencia al trabajo con los cuadriláteros retomamos la importancia de trabajar con ellos, según lo explicado en la actividad III, por la ventaja que tienen ante otras figuras, debido a la igualdad de sus ángulos.

Por tanto en estos puntos queríamos que los estudiantes relacionaran las características invariantes (ángulos correspondientes) de los triángulos, con las características invariantes de los rectángulos, y de esta manera ir acercando a los estudiantes a otra de las características fundamentales de la semejanza entre figuras.

En cuanto al aspecto común, pretendíamos determinar y motivar a los estudiantes a expresar en términos matemáticos¹² las relaciones encontradas, identificar si los estudiantes relacionaban las expresiones “ser el doble” y “ser la mitad” con las razones de cambio entre las medidas de los de los lados tanto de los triángulos, como de los rectángulos, con el fin de dar un primer paso hacia las relaciones de proporcionalidad existentes entre los lados de las figuras semejantes.

Todos estos talleres fueron implementados a los estudiantes, y sirvieron como instrumentos para la recolección de datos, las respuestas que obtuvimos de ellos, fueron los registros que utilizamos para el análisis.

¹² Utilización de símbolos matemáticos.

NUESTROS CÓMPLICES

Para del desarrollo de las actividades anteriormente descritas, contamos con la participación de todos los estudiantes de grado 6-02 de los cuales elegimos a cuatro estudiantes, para realizar el análisis. Estos cuatro estudiantes fueron elegidos debido a su participación y actitud en las clases de matemáticas durante el año que estuvimos en la institución. Es de aclarar que contamos con la autorización escrita de sus padres y por ello los nombres que se usaran son los reales.

Wilton es un estudiante que se caracteriza por su poca participación durante las clases, pero al realizarse un trabajo más cercano con él, demostró interés por las actividades planteadas; por el contrario Diego quien mostraba mucho interés en las clases y participaba activamente de ellas, aunque sus aportes en algunas ocasiones no daban una respuesta completa a las preguntas planteadas, ésto no se convertía en un impedimento para que él continuara participando, Yaricsa es una estudiante de la cual pudimos evidenciar el rol activo que asume durante las clases, con participaciones constantes y preguntas que permitieron observar que ella hacia un análisis de las situaciones que se le planteaban; por último y no menos importante, está Brahian quien se desatacó en el grupo por ser un líder positivo muy receptivo y por encontrar las soluciones a las actividades planteadas de una manera ágil, analizando y justificando sus respuestas adecuadamente para el trabajo que se desarrollaba en las clases.



Figura 8, nuestros protagonistas

Wilton Aristizabal es un estudiante de 13 años de edad que vive en el barrio San Diego con su madre, su hermano y otros familiares, a él en su tiempo libre le gusta ver televisión y jugar con sus amigos. En el aspecto académico nos cuenta que tiene mucho interés por las ciencias naturales ya que le gustan los animales y explorar cosas nuevas; y de las clases de matemáticas le gusta cuando varían llevándoles juegos, dinámicas y materiales porque así se hacen mas divertidas.

También tiene varios amigos en su salón de clases con quienes le gusta compartir y trabajar, no obstante, con algunos de ellos se distrae fácilmente durante las clases, lo que hace que su trabajo en ellas no sea muy constante. Es un niño que participa tímidamente en las clases y con poca frecuencia, pero se siente muy bien cuando su aporte es pertinente y tomado en cuenta por sus profesores. Observamos que durante las

clases de matemáticas en las que nosotras éramos las encargadas¹, él tomaba una actitud muy positiva y trataba de no permitir que sus compañeros lo distrajeran de las actividades o explicaciones.

Diego Castro también tiene 13 años, vive en el barrio Las Palmas con sus padres y tres hermanos, de los cuales él es el mayor y se siente responsable de cuidarlos y jugar con ellos. En su tiempo libre le gusta hacer las tareas, jugar con sus amigos y ver televisión. En lo académico piensa que la educación física es la mejor materia porque en ella está en constante movimiento y haciendo deporte, también le gusta porque le enseñan cosas que él no sabe.

De los contenidos en matemáticas que ha trabajado durante este año le gusta mucho el tema relacionado con los fraccionarios; con respecto a la forma en que se desarrollan los talleres, indica que se siente bien porque son creativas, con materiales y en las que puede trabajar con sus compañeros en equipos. Diego es un niño que participa en clase, dando opiniones muy libres de lo que piensa del tema, sin tener en cuenta lo adecuadas o no que estas sean.

La única mujer del grupo de los estudiantes elegidos para realizar el análisis es Yaricsa Martínez, tiene 12 años de edad, vive en el barrio San Diego con sus padres, su hermano y su abuela, en sus ratos libres le gusta jugar con sus amigos y hacer las tareas. Ella nos manifestó que de su colegio la clase de artística es su preferida, porque las actividades que les proponen son muy creativas y le permiten utilizar materiales y realizar manualidades.

Durante este año Yaricsa se ha destacado por ser una alumna ejemplar, una evidencia de esto fue ser seleccionada por sus profesores como la mejor estudiante, de todo el grupo. De las clases de matemáticas le gustan los temas y actividades relacionadas con los fraccionarios, ya que como dice “me va muy bien haciendo esos ejercicios”, le parece una materia muy importante e interesante porque siempre hay temas nuevos para aprender.

¹ En estas clases la docente cooperadora, sólo estaba como observadora y el desarrollo de todos los momentos de la clase eran dirigidos por las maestras en formación

El menor de los cuatro estudiantes es Brahian Cano tiene 11 años de edad, vive en el barrio Caicedo con sus padres y su hermano, en su tiempo libre le gusta jugar y estudiar. Con respecto a lo académico nos contó que le gustan las matemáticas porque las entiende muy bien y por que son muy creativas.

Durante el desarrollo de las actividades manifestó en continuas ocasiones que trabajar en grupo era muy interesante, ya que podía conocer las opiniones de sus compañeros, sin embargo se pudo observar que en los grupos donde él estaba, tomaba la vocería, delegaba funciones y argumentaba porque sus respuestas eran las más apropiadas para las preguntas.

Al finalizar cada una de las actividades, realizamos una entrevista con los cuatro estudiantes en las que pretendíamos conocer más a fondo los procesos y concepciones que ellos tenían. Las entrevistas fueron muy enriquecedoras ya que las diferencias que se pusieron de manifiesto en sus gustos y formas de trabajar, permitieron observar diversas perspectivas para el acercamiento a la construcción de un conocimiento como es la semejanza entre figuras.

Para poder usar la información obtenida a través de las actividades, entrevistas, fotografías y videos, se contó con el visto bueno de los padres de familia, el siguiente formato evidencia su autorización.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Medellín, 10 de noviembre de 2008

Señores
Padres de familia

E.S .M

Cordial saludo,

En la clase de matemáticas se está desarrollando un proyecto de investigación, sobre la proporcionalidad en el contexto de lo geométrico, denominado LA SEMEJANZA COMO EXPRESION DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL, el cual cuenta con la autorización de la institución. Su hijo *Brahian Cano Urrego* fue seleccionado para participar en el equipo de investigación.

Es muy importante para nosotros formalizar con ustedes la autorización, para utilizar el nombre de su hijo en el informe final del trabajo.

Agradecemos su colaboración.

Carmelita - Anita
Estudiantes investigadoras

Prof. Maria Diaz G
asesora del proyecto

Autorizo a mi hijo *Brahian Cano Urrego* a participar del proyecto.

[Firma]
Firma acudiente

[Firma]
Firma docente cooperadora.

Figura 9. Carta de autorización *Brahian Cano*



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Medellín, 10 de noviembre de 2008

Señores
Padres de familia
E.S .M

Cordial saludo,

En la clase de matemáticas se esta desarrollando un proyecto de investigación, sobre la proporcionalidad en el contexto de lo geométrico, denominado LA SEMEJANZA COMO EXPRESION DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL, el cual cuenta con la autorización de la institución. Su hija *Yaricsa Zulay Martinez* fue seleccionado para participar en el equipo de investigación.

Es muy importante para nosotros formalizar con ustedes la autorización, para utilizar el nombre de su hija en el informe final del trabajo.

Agradecemos su colaboración.

Cristina Jhatis - Yulita A.
Estudiantes investigadoras

Ros Marina Pizarro G
Asesora del proyecto

Autorizo a mi hija *Yaricsa Zulay Martinez* a participar del proyecto.

Yaricsa Zulay Martinez A.
Firma acudiente

Ros Marina Pizarro G
Firma docente cooperadora.

Figura 10. Carta de autorización Yaricsa Martinez



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1802

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Medellín, 10 de noviembre de 2008

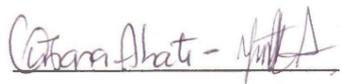
Señores
Padres de familia
E.S .M

Cordial saludo,

En la clase de matemáticas se esta desarrollando un proyecto de investigación, sobre la proporcionalidad en el contexto de lo geométrico, denominado LA SEMEJANZA COMO EXPRESION DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL, el cual cuenta con la autorización de la institución. Su hijo *Diego Alejandro Castro* fue seleccionado para participar en el equipo de investigación.

Es muy importante para nosotros formalizar con ustedes la autorización, para utilizar el nombre de su hijo en el informe final del trabajo.

Agradecemos su colaboración.


Estudiantes investigadoras


Asesora del proyecto

Autorizo a mi hijo *Diego Alejandro Castro* a participar del proyecto.


Firma acudiente


Firma docente cooperadora.

Figura 11. Carta autorización Diego Castro



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Medellín, 10 de noviembre de 2008

Señores
Padres de familia
E.S .M

Cordial saludo,

En la clase de matemáticas se está desarrollando un proyecto de investigación, sobre la proporcionalidad en el contexto de lo geométrico, denominado LA SEMEJANZA COMO EXPRESION DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL, el cual cuenta con la autorización de la institución. Su hijo *Wilton Stiven Aristizabal* fue seleccionado para participar en el equipo de investigación.

Es muy importante para nosotros formalizar con ustedes la autorización, para utilizar el nombre de su hijo en el informe final del trabajo.
Agradecemos su colaboración.

² El nombre del proyecto varió: Iniciación de la construcción del concepto de semejanza entre figuras

Estudiantes investigadoras

Asesora del proyecto

Autorizo a mi hijo *Wilton Stiven Aristizabal* a participar del proyecto

Firma acudiente

Firma docente cooperadora.

ANALIZANDO CATEGORÍAS

Relaciones entre magnitudes

“El concepto de magnitud están palpable como la mesa de estudio, sólo que hay que saber tocarlo, y tan primario que será difícil aprenderlo a edad no idónea, como lo es aprender a montar en bicicleta de mayor”

José Leandro de María

El concepto de magnitud, es muy importante a la hora de abordar aspectos relacionados con la semejanza entre figuras, debido a esto y al realizar un primer análisis a las respuestas que dieron los estudiantes, en cada una de las actividades, encontramos que ellos tienen una dificultad al establecer relaciones entre varias magnitudes a la vez, aspecto que determina la forma en que ellos se acercaron al concepto de semejanza, tal como lo veremos más adelante. Con respecto a las magnitudes, Chamorro y Belmonte (1994) plantean que:

La medida en una magnitud es un acto que los niños no pueden realizar de una forma fácil y espontánea y, por ello, es casi imposible la práctica de la medición hasta bien avanzada la enseñanza elemental. Esta dificultad se debe a que la realización del acto de medir requiere una gran experiencia en la práctica de estimaciones, clasificaciones y seriaciones, una vez establecido el atributo o la magnitud con respecto a la cual se va a medir. (p. 15)

Durante el desarrollo de la actividad *Objetos, Medios y Medidas*, les proporcionamos a los estudiantes objetos y diferentes instrumentos para que realizaran las posibles mediciones de éstos.

Al preguntarles, que puedes medir y que no puedes medir de los objetos entregados, Brahian manifestó:

“en la pirámide se puede medir su largo y su ancho, en el cilindro se le puede medir la base y la altura, en el prisma se le puede medir el largo y el ancho y no se puede medir la esfera por que no tiene caras ni bases”

(Entrevista posterior a la actividad; Objetos, medios y medidas, 4 Agosto 2008)

Ante la misma pregunta Diego y Yaricsa consideraron

“se puede medir la base, o sea, altura y de ancho o sea todo se puede medir”.

(Entrevista posterior a la actividad; Objetos, medios y medidas)

En estas respuestas podemos observar que los estudiantes, indican lo que es medible en un objeto y reconocen únicamente por sus nombres las magnitudes a las que hacen referencia (alto, ancho, entre otras), aunque hacen mucho énfasis en que sólo son medibles, aquellas magnitudes que se observan como líneas rectas, descartando de esta manera la posibilidad de medir por ejemplo el diámetro del pin pon, con referencia a esto Chamorro y Belmonte (1994) afirman que “Interesa resaltar que no todas las cualidades o atributos de los objetos son susceptibles de magnitud, al menos en el sentido estrictamente matemático ...”(p.110), por tanto para estos estudiantes el diámetro del pin pon no corresponde a una magnitud.

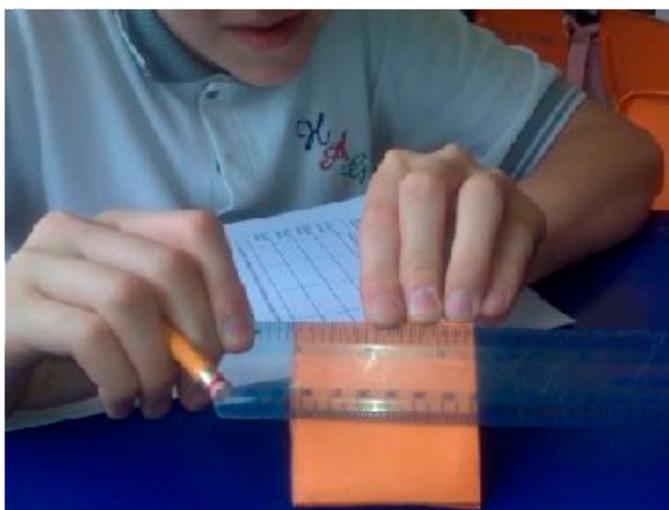




Figura 13, Wilton y Yaricsa realizando mediciones

En las últimas preguntas utilizamos un material adicional, estos fueron unas cintas de diferentes tamaños, con las que se podían realizar mediciones al largo y al ancho. Al enfrentar la pregunta, explica como mediste tu mesa de trabajo con las cintas¹ que se te entregaron, Diego y Yaricsa afirmaron:

56 cms mide la mesa donde trabajamos
no, no creo que es la más adecuada
para medir la mesa por eso utilizamos la
regla

(Actividad: Objetos, medios y medidas, 4 Agosto 2008)

¹ Cintas: Trozos de cartulina de 2 cms de ancho y de diferentes tamaños de largo, entregados a los estudiantes para realizar mediciones.

A esta misma Brahian indicó:

la mesa mide de alto 76.8 y de ancho
 S.6 Explicación: Hicimos la medición con una
 escuadra la longitud y la anchura

(Actividad: Objetos, medios y medidas, 4 Agosto 2008)

Teniendo como referencia estas respuestas, se evidencia que los estudiantes, no reconocieron las diferentes cintas que les entregamos, como instrumentos medida o unidades patrón, que les sirvieran para responder la pregunta, debido a esto optaron por utilizar el instrumento (regla en centímetros) al que siempre han recurrido al momento de realizar alguna medición, lo cual deja claro que estos estudiantes no tienen interiorizado lo que es el concepto de unidad patrón en longitudes para trabajarlo con cualquier unidad de medida.



Figura 14, Utilidad que le dieron a las cintas

Es importante que los estudiantes identifiquen la existencia de diferentes unidades patrón, y que cualquiera de ellas es válida para expresar una medida, con

relación a esto Chamorro (2003) indica que en la aulas de clase, se presenta una dificultad a la hora de abordar temas relacionados con la medición, ya que, los instrumentos con los que cuenta el maestro son mínimos, por tanto las actividades de tipo práctico son muy escasas y con muchos obstáculos materiales.

Igualmente Chamorro y Belmonte (1994) indican que “Para medir en la práctica, es necesario servirse de instrumentos, como [...] reglas y objetos de todo tipo. Aunque hay muchas formas de medir usando distintos instrumentos, el resultado de la medición debe ser único cuando se usa la misma unidad” (p. 111)

Con respecto a esto, podemos observar como Brahian, a pesar de los diferentes instrumentos que le suministramos, él eligió utilizar la regla, el trasportador y la escuadra los cuales, aunque representaban la misma unidad de medida, proporcionaron a este estudiante resultados diferentes, tal como se muestra en la siguiente tabla, dejando de manifiesto que las prácticas sobre la medición que se han venido trabajando con él son muy escasas, lo cual se constituirá en un obstáculo para el abordaje de otros conceptos.

	instrumento 1	instrumento 2	instrumento 3	Instrumento 4
Primer objeto	con la Regla; altura: 1.5 Base: 2.2	transportador; altura: 4.6 base: 8.6	escuadra; altura: 7.7 base: 8.9	hilo altura: 8.8 base: 8.9
Segundo objeto	Regla; altura: 11.2 Base: 9.3	transportador; altura: 11.3 Base: 4.7	escuadra; altura: 11.3 base: 4.4	Hilo; altura: 11.2 base: 4.7
Tercer objeto	Regla altura: 5.6 base: 6.2	transportador altura: 5.6 base: 6.7	escuadra altura: 6.6 base: 6.6	hilo altura: 7. base: 3.1
Cuarto objeto	Regla altura: base	transportador altura base	escuadra altura base	hilo altura: 41.9 base: 4.9

(Actividad: Objetos, medios y medidas, 4 Agosto 2008)

Los objetos que midió Brahian fueron: 1) Pirámide, 2) Cilindro, 3) Prisma y 4) Esfera.

Es necesario trabajar con los estudiantes medidas arbitrarias con instrumentos de medida distintos a los convencionales.

En la actividad *Reconozcamos las Semejanzas*, al explorar la medida en superficies, le preguntamos a los estudiantes cuántos cuadritos tiene cada uno de los rectángulos que les entregamos, la estrategia que Brahian utilizó fue:

“Lo que hice fue multiplicar el largo por el ancho del rectángulo y así encontraba el total de cuadros de cada rectángulo”

(Entrevista posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Y Diego lo realizó:

“contando cuadrito por cuadrito”

(Entrevista posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Estas respuestas, dan cuenta de las estrategia que utilizaron para conocer la medida de la superficie de la figura, en una de ellas se ve como la estructura multiplicativa está presente y en la otra como aún el estudiante se encuentra en la aditiva; la utilización de las operaciones que hacen parte de la estructura multiplicativa son una de las características que son la vía para una buena construcción de la proporcionalidad, concepto fundamental en la concepción formal de la semejanza entre figuras. Teniendo en cuenta esta dificultad, causada posiblemente por las edades de los niños y por los diferentes niveles en el manejo de la medida, la condición de lados proporcionales entre las figuras no fue abordada por ellos de una manera adecuada. Con respecto a esto:

Para resolver este tipo de problemas multiplicativos usando la suma, los niños utilizan modalidades diferenciadas de la llamada adición repetida (Fischbein y otros, 1985) [...] como la suma reiterada es la manera más natural que los niños tienen para resolver estos problemas, entonces, en muchos libros de texto se presenta como el camino a seguir para llegar a la multiplicación. Por supuesto, este déficit tiene efectos muy difíciles de superar en la construcción de la división, en el manejo de las medidas de superficie y volumen”. (Orozco, La estructura multiplicativa. Internet, p. 3)

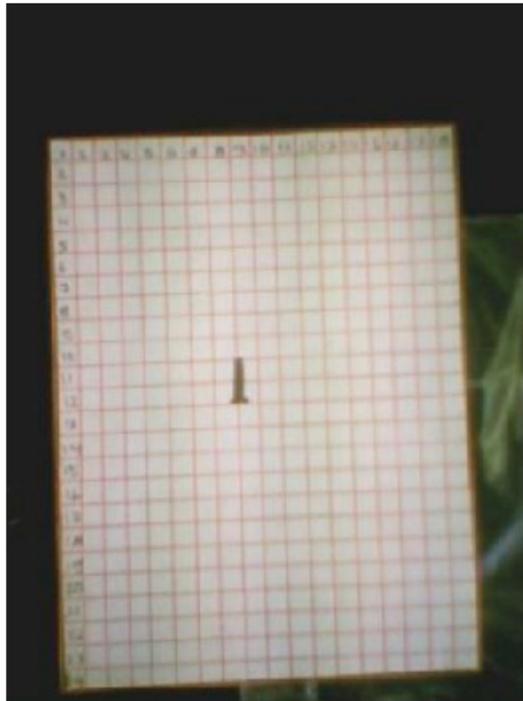
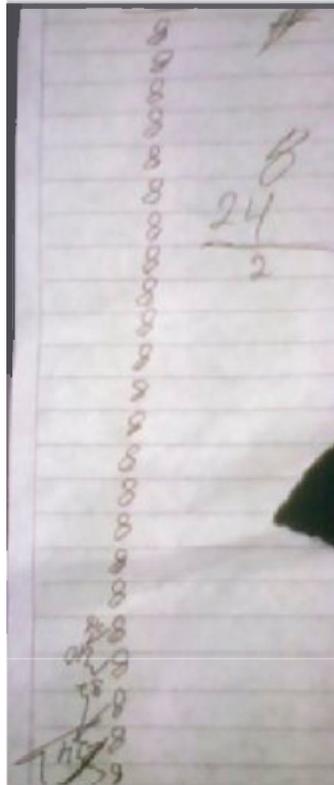
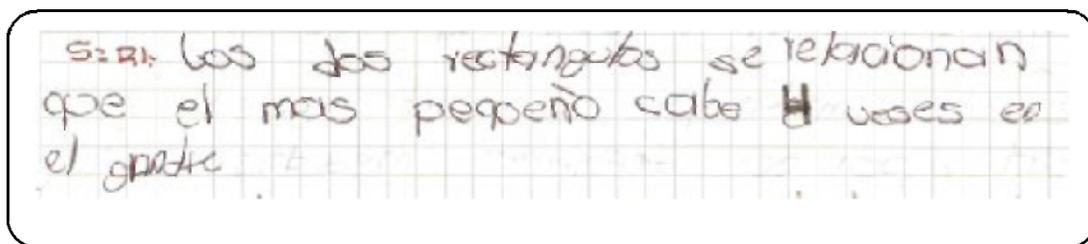


Figura 15, estrategias utilizadas por los estudiantes para encontrar la medida de los lados y la cantidad de cuadritos que conforman los rectángulos

Al observar y comparar la longitud del lado horizontal y el vertical de algunos rectángulos, se les preguntó cuáles y en qué se parecen, a esto Brahian contestó:



(Actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Consideramos, importante presentar figuras, en las que las medidas de sus lados conservaran una relación de proporcionalidad entre segmentos, aspecto necesario a la momento de abordar la definición de figuras semejantes, podemos ver como Brahian establece una relación muy importante entre las dos medidas analizadas, indicando que una cabe en la otra, aproximándose a la idea de ampliación teniendo en cuenta una medida inicial, por lo cual le preguntamos, ¿cuánto más grande es este lado que el otro?, él indicó:

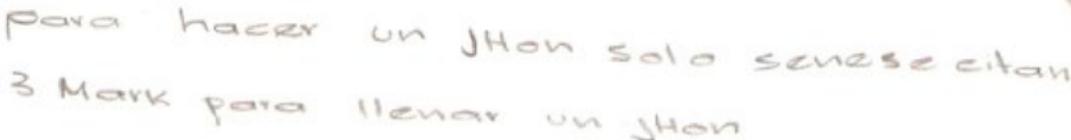
“este lado es 4 veces más grande que este otro”

(Entrevista posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Con relación a lo anterior Chamorro (2003) expone:

Una longitud puede quedar determinada de dos maneras, una de ellas es utilizando un patrón o una unidad, en este caso, basta con trasportar dicho patrón sobre la longitud en cuestión y ver cuántos patrones hay que poner para cubrir por completo la longitud de un objeto. (p. 238)

En la actividad *Gigantes y pequeños*, podemos encontrar el paso que se da a la cuantificación de magnitudes, les planteamos a los estudiantes una pregunta en la que debían decir cuanto más grande era un muñeco con respecto al otro, a lo que Wilton respondió:



para hacer un John solo se necesitan
3 Mark para llenar un John

(Actividad: *Gigantes y Pequeños*, 27 Octubre 2008)

A la misma pregunta Brahian respondió:

“Mark cabe 3 veces en John, lo encuentro al dividir 180 entre 60.”

(Entrevista posterior a la actividad: *Gigantes y pequeños*, 27 Octubre 2008)

En estas respuestas los niños ponen de manifiesto, lo dicho anteriormente, sobre la escogencia de una unidad patrón para realizar la medición, en este caso Mark, sería el objeto que sirve para indicar la medida de John. También podemos observar como uno de los estudiantes, Brahian, se acerca a establecer una relación entre las medidas de las alturas de ambos objetos, indicando que una medida es 3 veces más que la otra.

Les entregamos a los estudiantes los siguientes dibujos, en papel cuadrado.

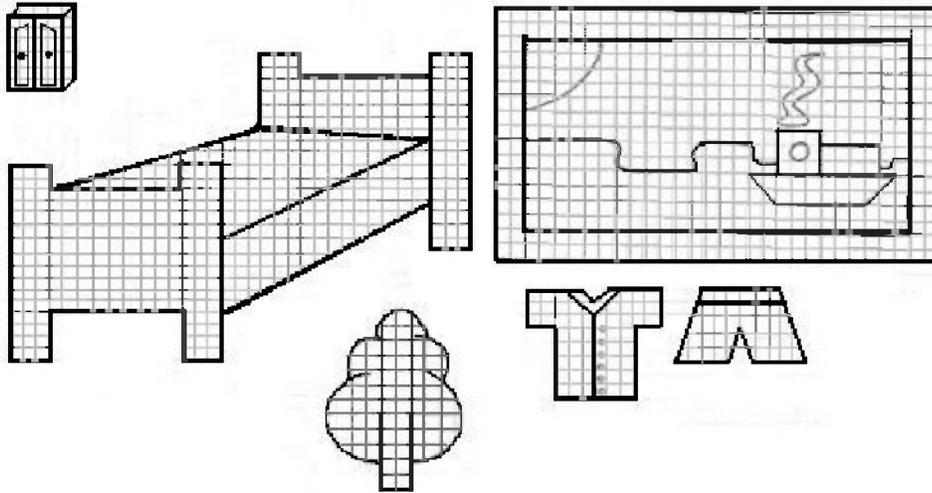


Figura 16, dibujos entregados para la ampliación o reducción

Y al preguntares que cambio ocurrió en estos los objetos iniciales, encontramos que Wilton argumentó:

“para engrandecer el closet sume 3 closet de la isla amarilla y forme un closet del pais azul, el cuadro de la isla verde le reste 2 medidas de John y forme un cuadro más pequeño y la camisa es de la misma medida de John y queda igual”

(Entrevista posterior a la actividad: Gigantes y pequeños, 27 Octubre 2008)

Asi mismo Brahian respondió:

“los calzones de John quedan de la misma medida, la cama la divido por 3 y el árbol lo multiplico por 3”

(Entrevista posterior a la actividad: Gigantes y pequeños, 27 Octubre 2008)

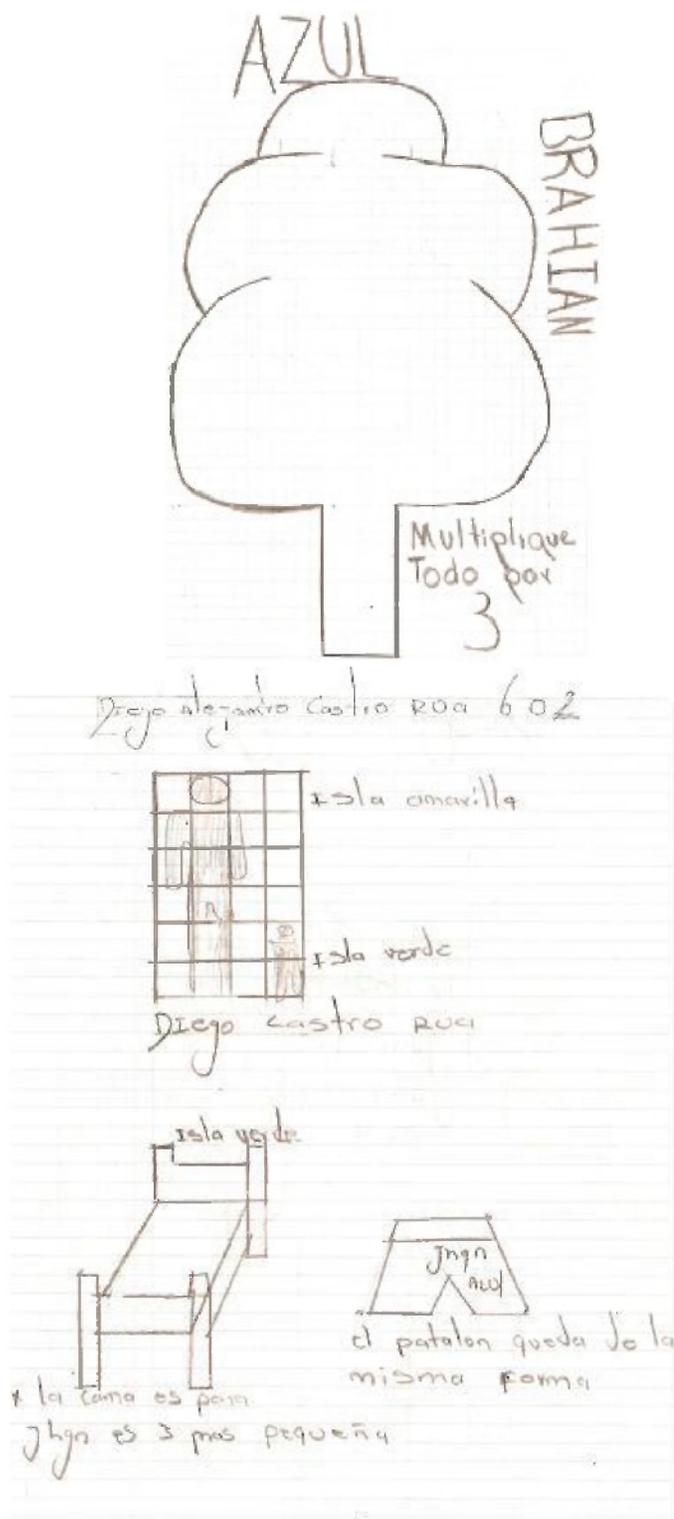


Figura 17, ampliaciones y reducciones realizadas por Brahian y Diego

Ambas respuestas nos remiten a la identificación de la utilización o no utilización de las estructuras multiplicativas, ya que la forma en que los niños describen lo que hicieron da a entender que Brahian si ve la multiplicación y la división como estrategia de solución ante el problema planteado o sea que dio un paso de lo cualitativo a lo cuantitativo, aunque no explica a cuáles magnitudes le realiza la ampliación o reducción de las figuras bidimensionales y tridimensionales² entregadas, lo que pone de manifiesto una posible ausencia del manejo de dos variables al mismo tiempo que es lo que da cuenta de la estructura multiplicativa en lo geométrico.

En la actividad *Comparando y relacionando figuras semejantes*, Brahian y Diego plantean como respuesta a la pregunta sobre ¿cómo encontraron el número de veces que caben los lados del rectángulo uno en los lados correspondientes de los rectángulos 2 y 3?, lo siguiente:

“Lo que hicimos fue cubrir cada lado del rectángulo 1 en los lados del rectángulo 2 y 3”

*(Entrevista posterior a la actividad: Comparando y relacionando figuras semejantes, 10
Noviembre 2008)*

Aquí queda de manifiesto, como los niños ahora si ven la necesidad de la utilización de diversas unidades patrón, que ellos consideraron pertinentes para dar respuesta a las preguntas y como sólo relacionan una sola magnitud a la vez.

De manera general de esta categoría, podemos concluir que se evidenció en los estudiantes, como fueron reconociendo otras unidades patrón, para expresar las medidas de las longitudes de ancho y alto, dejando a un lado la idea que las medidas sólo se podían obtener utilizando como instrumento la regla y como unidad de medida los centímetros, metros, entre otros más conocidos.

² Estas figuras fueron presentadas a los estudiantes intencionalmente, con el fin que establecieran relaciones entre 2 o más variables y no con una sola, como se venía haciendo en las otras actividades.

También ratificamos lo mencionado al principio de esta categoría, sobre la dificultad que presentan los estudiantes al tener que relacionar dos magnitudes como el alto y el ancho al mismo tiempo, aunque podemos afirmar que si hubo un acercamiento a este procedimiento, pero no fue constante en todas las situaciones que lo requerian.

Inicio del concepto de Semejanza

“Sin duda alguna tienen razón los filósofos cuando nos dicen que nada es grande o pequeño sino por comparación”

J. Swift

Al comenzar el análisis de esta categoría, retomamos el motivo de nuestra investigación, *Los Inicios de la Semejanza* y encontramos sobre esto, diversas expresiones de los estudiantes como: “mire que si se parece, es la misma pero más pequeña o más grande” en las que pudimos observar claramente, que durante el desarrollo de todas las actividades, ellos tuvieron siempre presente una noción inicial de carácter cualitativo sobre el concepto de semejanza, pero a medida que se les presentaban nuevas actividades, que se relacionaban con conceptos alrededor de la semejanza, pudimos observar como ellos, con el mismo carácter cualitativo agregaban aspectos que les parecían importantes, enriqueciendo la concepción inicial y acercándose a la definición que retomamos en nuestro trabajo. A continuación veremos algunas de las respuestas de los estudiantes que fueron significativas y reflejaban los “avances” de sus concepciones.

Pero antes de iniciar este análisis es muy importante que recordemos la definición de semejanza, adoptada en la realización de este trabajo.

Dos figuras semejantes son:

“aquellas entre cuyos puntos se pueda establecer una aplicación biyectiva que cumpla las siguientes condiciones, a puntos alineados en la figura original corresponden puntos alineados en igual orden en la figura homotética, los segmentos homólogos son proporcionales y los ángulos homólogos son iguales. La razón de proporcionalidad entre segmentos homólogos se llama razón de semejanza y a la propia correspondencia se le llama semejanza” (Grupo Beta, 1998, p.77).

Desde esta mirada, propusimos diferentes actividades para iniciar la construcción del concepto de semejanza entre figuras, inicialmente nuestro interés es que reconocieran las relaciones entre lados correspondientes y los ángulos de las figuras propuestas.

Durante el desarrollo de la actividad *Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades*, se evidenció un carácter perceptual muy marcado en las respuestas de los estudiantes, ya que proponían afirmaciones sencillas alrededor de lo que observaban en las figuras entregadas. Les proporcionamos a los estudiantes, una figura inicial y otras figuras muy parecidas, pero que se diferenciaban por las relaciones que se daban entre las medidas de sus lados y por los elementos que las conformaban.

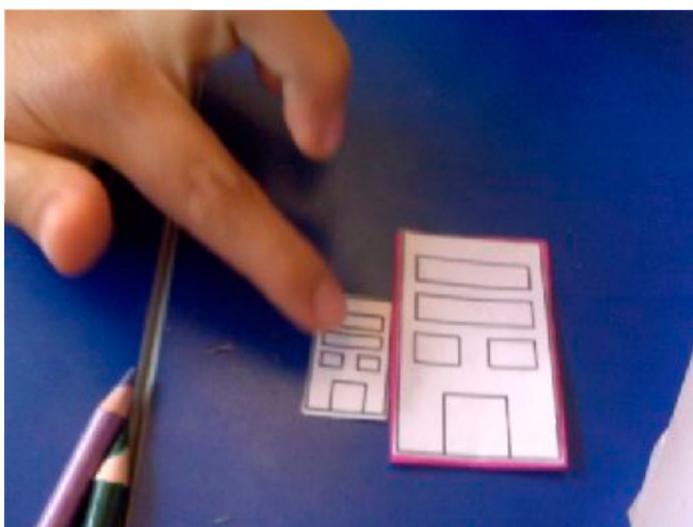


Figura 18, comparación realizada por uno de los estudiantes

Al preguntar cuál era la figura más parecida con respecto a la figura inicial, Brahian manifestó que:

la más parecida es la D porque es la misma pero tiene el tamaño disminuido

(Actividad: *Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades*, 4 Junio 2008)

De igual manera Wilton dijo:

la que se parece a la Inicial es la d
 porque la d así sea pequeña es igual

(Actividad: Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades, 4 Junio 2008)

Las respuestas de los estudiantes permiten observar, como relacionan desde su lenguaje cotidiano, la palabra parecido, con la concepción de semejanza entre figuras, ya que justifican su elección, desde la igualdad en la forma de la figura, o sea que ambas figuras, tanto la inicial como la que escogieron tuvieron los mismos elementos.

Por ejemplo, algunas de las figuras tenían la misma cantidad de elementos, pero en diferentes tamaños o posiciones, éstas fueron descartadas por los estudiantes, bajo la justificación, de que estas al tener diferentes elementos, no podían ser parecidas a la inicial.

Elige y describe cuáles son los triángulos que tienen algo en común, y sepáralos de los demás, fue otra de las preguntas que les hicimos a los estudiantes; para ello entregamos un paquete de triángulos que permitió hacer las comparaciones necesarias; Yaricsa en este punto, hace referencia a una de las dos características que tuvieron muy en cuenta los estudiantes al momento de realizar las comparaciones de las figuras semejantes,

E- porque es la misma forma de la inicial

(Actividad: Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades, 4 Junio 2008)

Es muy importante el aporte que hace esta estudiante, ya que permite ver, que para poder elegir una figura que tenga algo en común con otra presentada inicialmente, es indispensable que estas dos tengan la misma forma, reconociendo lo propuesto por el Grupo Beta (1998).

En el lenguaje vulgar, el término “semejante” se suele identificar con el término “parecido”. En el lenguaje científico, el concepto que implica la semejanza de dos figuras es el de dos figuras de la “misma forma”, aunque puede ser distinto el tamaño. (p. 83)

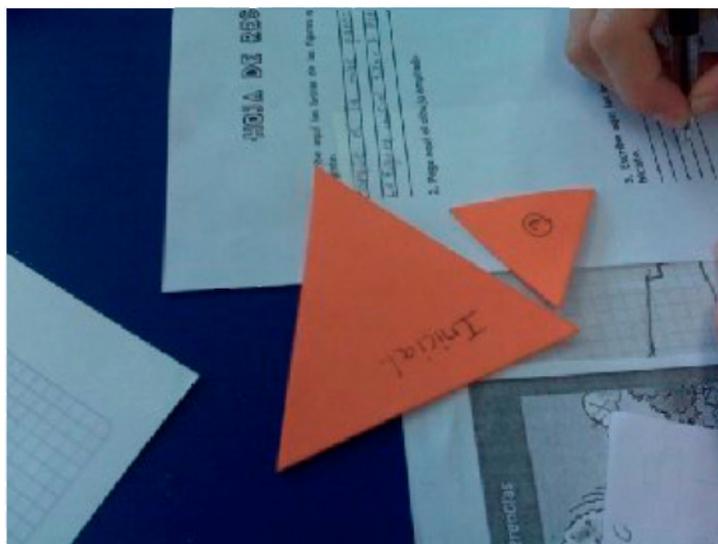


Figura 19, Respuesta obtenida por Yaricsa

Durante la actividad *Reconozcamos las semejanzas*, también encontramos unas respuestas, que permiten observar, cuáles fueron las características que inicialmente, los niños consideraron como fundamentales, para determinar la relación de semejanza entre dos cuadriláteros.

En esta actividad pedíamos a los niños que realizaran una comparación, entre las figuras de un grupo de cuadriláteros, y que formaran unos subgrupos, según características que ellos mismos determinarían. Con respecto al trabajo con rectángulos, el Grupo Beta (1998), propone que: “Tienen los rectángulos una propiedad interesante que los hace muy adecuados al estudio de la semejanza en general, y es ésta, teniendo

todos sus ángulos iguales permite fijarse sólo en la proporcionalidad entre lados como criterio de semejanza” (p. 154).

La respuesta que más tuvo en cuenta características necesarias para acercarse al concepto de semejanza entre figuras, fue la de Yaricsa ante el grupo de figuras que se le entregó; al proponérsele que escogiera las más parecidas y que las clasificara según las características que ella viera conveniente, indicó:

“la característica que tuve en cuenta fue la misma forma y tamaños diferentes”

(Entrevista realizada posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Con esta afirmación, encontramos que ya adicionalmente a la característica *misma forma* que expresaban en la actividad anterior, incluyen el *tamaño diferente* como otra característica fundamental.

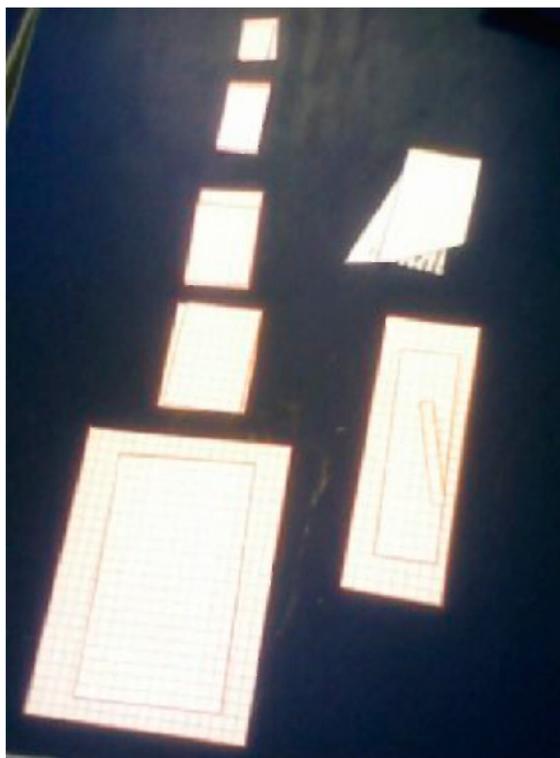


Figura 20, clasificación realizada por la estudiante

Al pedirle que justificara la clasificación que realizó, Brahian argumentó:

“unos son rectángulos con la misma forma y diferente tamaño”

(Entrevista realizada posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Ante la misma pregunta Wilton afirma:

“en que tienen la misma forma y diferente tamaño”

(Entrevista realizada posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas)

También al comparar el rectángulo a con el rectángulo b, Brahian encuentra las siguientes relaciones:

“que el rectángulo A es el doble del B que el B es la mitad del A o sea que el B cabe dos veces en el A”

(Entrevista realizada posterior a la actividad: Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

De esta actividad podemos determinar, que para los estudiantes es fundamental que la relación de semejanza entre dos figuras, este dada por la misma forma, así mismo, sobre el tamaño de las figuras indican en su mayoría que debe ser diferente, pero aún no justifican esta afirmación con las medidas que pueden tener los lados correspondientes de dichas figuras, por lo tanto los procesos de cuantificación de magnitudes aun no están presentes en los procedimientos de los estudiantes.

Solamente uno de los estudiantes, realiza una comparación en la que determina, que la medida de los lados correspondientes de las figuras analizadas, caben exactamente uno en el otro, pero no concluye que esta relación sobre las medidas de los lados es una de las características fundamentales en la definición del concepto de semejanza entre figuras.

Al realizar la actividad *Gigantes y Pequeños*; pudimos observar, como los estudiantes, en algunas ocasiones utilizaban las estructuras multiplicativas, para dar solución a situaciones que involucraban la semejanza entre figuras. Para esto fue

fundamental la utilización de una tabla que permitía explorar diversas maneras de relacionar los datos allí registrados.

Ante la pregunta *Escribe de diferentes maneras la relación que encontraste entre John y Mark*; Wilton expresa que:

La relación entre John que Mark de grande son 3 veces de grande

(Actividad: Gigantes y Pequeños, 27 Octubre 2008)

De la misma manera cuando se les pide explicar qué relación encuentran entre los datos que ingresaron en la siguiente tabla

	MEDIDAS	
	PAIS AZUL	ISLA AMARILLA
ESTATURA HOMBRES	180 CMS	60 CMS
ESTATURA CABALLOS	210 CMS	70 CMS
ALTURA ÁRBOLES	360 cms	120 CMS
ALTURA CASAS	240 CMS	80 cms
LARGO DE LOS COLCHONES	180 cms	60 CMS
ALTURA MESA	120 CMS	40 cms

Figura 21, tabla elaborada por Wilton

Wilton indica:

en la tabla, encuentre que todos caben 3 veces en todos los números

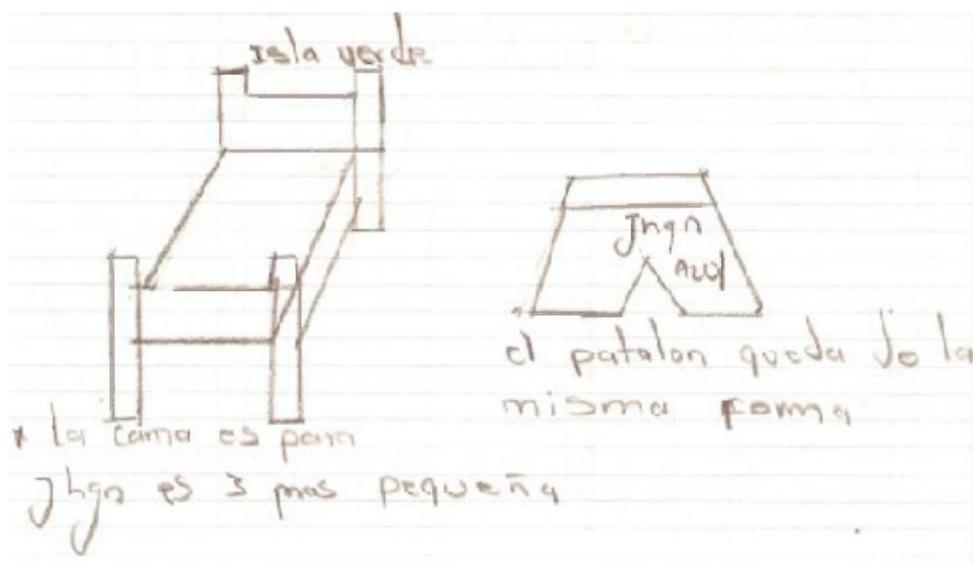
(Actividad: Gigantes y Pequeños, 27 Octubre 2008)

Con respecto a esta misma pregunta Brahian afirmó:

“para encontrar la medida de la isla amarilla dividido por 3 y para encontrar el del país azul multiplico por 3”

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Gigantes y Pequeños, 27 Octubre 2008)

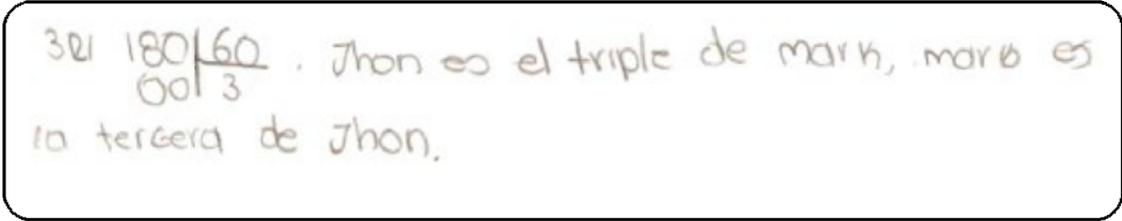
Al realizar las ampliaciones y reducciones les preguntamos a los niños, que permanece igual y que cambia en la figura, ante ésto Diego dibujó lo siguiente:



(Actividad Gigantes y Pequeños, 27 Octubre 2008)

Pudimos observar en esta actividad que los niños, expresan de manera verbal la razón de cambio entre las islas y el país de origen, al indicar en las ampliaciones y reducciones que lo cambiante es el tamaño mientras que la forma continúa igual, y

también dejan ver los procedimientos de la estructura multiplicativa como la multiplicación y división, que utilizan para encontrar las medidas solicitadas.



321 180 | 60 . Jhon es el triple de mark, mark es
001 3
la tercera de Jhon.

(Actividad: Gogantes y pequeños, 27 Octubre 2008)

Los niños siguen manteniendo la afirmación, sobre lo que hace parecidas las figuras presentadas, como la forma y el tamaño aunque reducido o ampliado; pero en esta ocasión, complementan la afirmación indicando la cantidad de veces que se amplía o disminuye la medida de la figura, teniendo en cuenta las razones de cambio que encontraron, al analizar las tablas.

Las siguientes respuestas, dan cuenta, de lo que alcanzaron los estudiantes en el proceso de construcción del concepto de semejanza entre figuras.

Al preguntarles cómo son los triángulos que les entregamos, Diego indicó:

“son grande, mediano y pequeño”

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Comparando y relacionado figuras semejantes, 10 Noviembre 2008)

Ante la misma pregunta, Brahian dijo:

“los triángulos son escalenos de diferentes tamaños y color”.

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Comparando y relacionado figuras semejantes, 10 Noviembre 2008)

Yaricsa y Wilton al preguntares que tuvieron en cuenta para indicar cuáles eran los ángulos iguales de los triángulos manifestaron:

“colocamos los triángulos de tal forma que coincidieran los lados y los ángulos y los pintamos de diferente color”.

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Comparando y relacionado figuras semejantes, 10 Noviembre 2008)

Y sobre lo que tuvieron en cuenta para determinar cuáles eran los lados homólogos de los triángulos indicaron.

“miramos los diferentes tamaños de los lados”

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Comparando y relacionado figuras semejantes, 10 Noviembre 2008)

Al final de la actividad les preguntamos sobre una conclusión que pudieran dar sobre los lados y los ángulos de los triángulos propuestos, y ellos argumentaron:

“que los ángulos son iguales y los triángulos tienen los mismos lados pero de diferente tamaño”

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Comparando y relacionado figuras semejantes, 10 Noviembre 2008)

Vemos en este recorrido de respuestas como los estudiantes, identificaron dos características fundamentales, de la semejanza, y se aproximan a dar una definición sobre las relaciones de semejanza presentes en las figuras propuestas.

Diego y Brahian, al hacer una comparación entre los lados de los rectángulos a los que les correspondía el mismo color (lados correspondientes), indicaron:

“que el lado de un rectángulo es el doble del otro y también es la mitad”

(Entrevista realizada posteriormente a la actividad: Comparando y relacionado figuras semejantes, 10 Noviembre 2008)

En esta actividad observamos como los estudiantes, determinan la importancia de que las figuras estén en la misma posición para poder realizar las comparaciones de semejanza. De igual manera vemos como avanza la definición de semejanza, ya no sólo es fundamental la forma y el tamaño, ahora la medida de los ángulos adquiere una relevancia en sus respuestas.

En el caso de los triángulos el Grupo Beta (1998) afirma que “dos triángulos semejantes tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados correspondientes proporcionales” (p. 80), con base en esto, y en la actividad desarrollada, debemos aclarar que ellos no encuentran la razón de proporcionalidad entre las longitudes de los lados. Esto lo podemos concluir ya que en sus respuestas, siempre dicen que son más grandes o más pequeñas, pero no dicen cuanto más grandes o pequeñas son las medidas de los lados, dejando claro que al realizar las mediciones de los lados de las figuras no encuentran ninguna relación entre dichas medidas, pero al hacer comparaciones por medio de la superposición de figuras, sí encuentran relaciones entre estos lados.

Finalmente es importante aclarar que los estudiantes, sólo abordaron los conceptos relacionados con la semejanza desde una mirada cualitativa lo cual se pudo evidenciar cuando expresaron desde su lenguaje una primera aproximación de la definición de semejanza entre figuras: igual forma, ángulos iguales y diferente tamaño de sus lados, dejando de manifiesto que ya no ven la figura en su totalidad como se hacía al principio, sino que ahora son capaces de ver la figura teniendo en cuenta las partes que la conforman. Debido a la edad de los estudiantes, y a que el propósito de las actividades fue iniciar un camino para abordar el concepto de semejanza entre figuras, la proporcionalidad definida como una razón de cambio, que caracteriza la definición formal de la semejanza no fue un aspecto alcanzado en su totalidad por los estudiantes.

La percepción de los estudiantes

“La percepción es una fuente de experiencias sensoriales”

Juan C. Gonzalez

Durante el desarrollo de cada una de las actividades propuestas, los estudiantes vivieron experiencias sensoriales (visual, táctil) las cuales mediaron en la forma en que ellos se aproximaban a algunas concepciones alrededor de la semejanza entre figuras. Teniendo claro que:

La percepción es el proceso mental de interpretar y dar significado a la sensación de un objeto determinado. Es un proceso mental; pero, sin embargo, está asociado íntimamente con las actividades corporales; es decir, de los órganos sensoriales y del sistema nervioso (Kelly, 1972, p. 79 citado en Feria, 2006, p. 20)

Uno de los aspectos que más llamó nuestra atención, fue ver la forma en que ellos tomaban cada una de las figuras o elementos entregados y por medio de comparaciones tales como superposición de las figuras o al ponerlas una al lado de la otra, obtenían lo que ellos consideraban necesario para indicar su respuesta. Lo que deja de manifiesto como la percepción espacial, considerada por Feria (2006) como la destreza para determinar las relaciones presentes dos o más objetos, fue la estrategia más utilizada por los estudiantes, para encontrar soluciones a las actividades propuestas.

En la actividad *Observa, mide, compara y comprueba tus habilidades...*, los estudiantes observaban las características que componían los objetos y determinaban como requisito indispensable que estas fueran iguales (aunque en tamaños diferentes), la respuesta que nos brindó Yaricsa al preguntarle cuales eran los triángulos que tenían algo en común, fue:

E- por que es la misma forma de la inicial, el mismo triángulo.

(Actividad: Mide, compara y comprueba tus habilidades, 4 Junio 2008)

Esta respuesta da cuenta del manejo de las principales percepciones espaciales como son las de tamaño, forma, entre otras, las cuales según Feria (2006) se convierten en el fundamento de muchas formas superiores de conocimiento.

Algunas de las habilidades de la percepción espacial son la superposición, encontrar semejanzas y diferencias y la completación de figuras. Las actividades que propusimos a los estudiantes, nos permitieron ver como aplicaban estas habilidades y como por medio de ellas iniciaron la construcción del concepto de semejanza entre figuras.

En otro punto de esta misma actividad les pedimos a los estudiantes que completaran la figura de un carro y posteriormente la dibujaran más grande, tal como lo vemos en esta imagen,

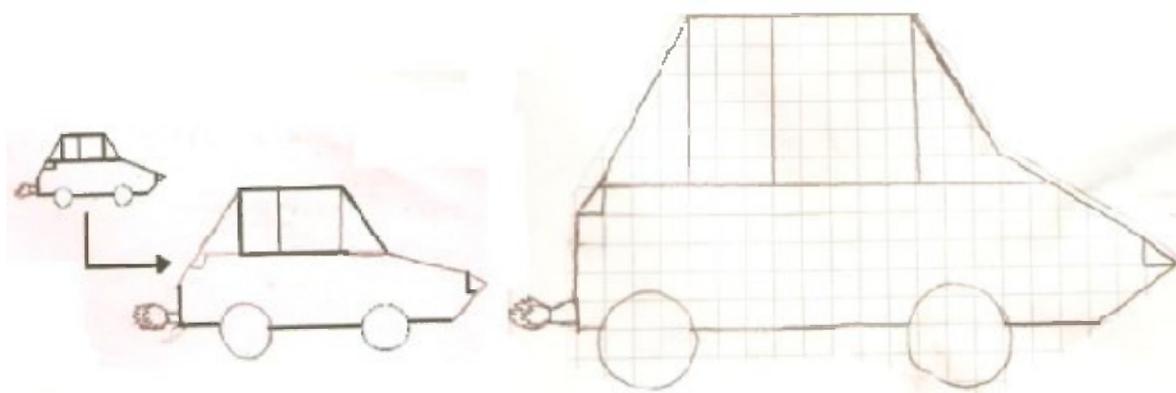


Figura 22, Ampliación hecha por Wilton

En esta oportunidad los niños no explicaron en sus hojas de respuestas, cómo habían realizado lo que les solicitamos en este punto, pero al hablar con ellos, nos explicaron lo que hicieron; Wilton indicó que

“vimos el carrito pequeño y pusimos las rayas en donde faltaba para que quede bien parecido”

(Entrevista posterior a la actividad diagnóstica, 4 Junio 2008)

Se observa entonces como nuevamente, los estudiantes tienen en cuenta únicamente la característica del *parecido*, ya que la figura fue ampliada, sin tener en cuenta ninguna de las medidas del alto o el ancho de la figura inicial, lo cual significa que no establecieron relaciones entre las medidas de las magnitudes de la figura, a la hora de realizar la ampliación. Pero hay que tener en cuenta, que estas actividades son muy beneficiosas para los estudiantes, ya que por ser una nueva experiencia a la que se enfrentan y por los elementos implícitos que aportan alrededor del concepto de semejanza, los estudiantes pueden, con estas actividades ampliar, fortalecer y enriquecer sus concepciones iniciales.

Les propusimos también en esta actividad, una comparación entre dos imágenes que contenían cierta cantidad de diferencias, en esta pudimos ver como los estudiantes describían cada una de las imágenes con el fin de encontrar, alguna característica que las hiciera diferentes; los estudiantes plantearon sus respuestas en torno a lo que veían, indicando diferencias como: una pequeña línea, la inclinación de un objeto, la cantidad de objetos que estaban presentes de cierta manera en una imagen, con respecto a la otra. Esta actividad fue muy motivadora para los estudiantes, ya que la concibieron como un juego, pero sin saberlo allí dejaron muy claras, las concepciones que tenían sobre, diferente, igual o similar.



Figura 23, Diferencias encontradas por Diego

“Todo el mundo ve aproximadamente las mismas cosas, pero lo que éstas significan depende de las experiencias pasadas y de los intereses actuales del individuo” (Feria, 2006, p. 32),

Al solicitarles que describieran ciertos objetos³ que les entregamos, en la actividad *Objetos, medios y medidas*, encontramos que los niños no sólo describieron lo que observaban, si no que trataron de hacer relaciones entre estos objetos con objetos que conocían desde su contexto familiar y escolar, por ejemplo Diego y Yaricsa nos cuentan con respecto a los objetos que les entregamos que:

³ Los objetos entregados fueron: un cilindro, un pirámide, un prisma elaborados en cartulina y una esfera (pin pon)

Primer objeto	Segundo objeto	Tercer objeto	Cuarto objeto
es azul es largo es redonda es un cilindro	tiene forma de triángulo tiene forma de pirámide es pequeña y es triangular y da tiene 3 bases.	tiene forma de carpa, es verde es piramidal, tiene 6 caras	es redondo color verde pequeño es un pin- pon.
CILINDRO	PIRÁMIDE	PRISMA	ESFERA

Figura 24, hoja de respuestas de Diego y Yaricsa

Cuando describimos por medio de la percepción, no lo hacemos sólo recurriendo a lo que vemos, sentimos, oímos, olemos o gustamos; sino que también esta presente lo que ya conocemos, al describir recordamos lo que ya hemos visto o vivido, tal como lo afirma Feria (2006) “el grado de eficiencia y confianza que puede inspirar la percepción depende de lo completo y exacto de la sensación, de la asociación de ésta con experiencias sensibles pasadas y de lo extenso y correcto de dicha asociación” (p. 33); un ejemplo de esto fue, ante un tetraedro, un prisma triangular y una esfera, los niños los relacionaron con una pirámide, una carpa y un pin pon respectivamente. Quedando de manifiesto la importancia que tiene la experiencia para la construcción de cualquier concepto y en particular el poco acercamiento que tenían los estudiantes a diversos conceptos geométricos.

Brahian hizo un aporte muy interesante en el que se puso de manifiesto, cómo los conocimientos previos, adquiridos a través de la experiencia juegan un papel muy importante a la hora de hacer una descripción, al preguntarle qué es medible en los objetos que le entregamos; él respondió:

Se puede medir:
 en la **pirámide** se puede medir su largo y su ancho,
 el **cilindro** se le puede medir la base y la altura,
 el **Prisma** se le puede medir el largo y el ancho

No se puede medir:
 la **esfera** no se puede medir por que no tiene caras ni bases

(Actividad: Objetos, medios y medidas, 4 Agosto 2008)

Como afirma el profesor Orlando Mesa Betancur (2000), la percepción de las formas “Son todas las relaciones que se pueden encontrar con base en las propiedades de los objetos, en las dimensiones del espacio y en el reconocimiento progresivo de invariantes...” (p. 22), durante la actividad propuesta *Mide y compara con el Tangram*, nuestros estudiantes teniendo en cuenta las propiedades que conocían de los objetos que eran principalmente sobre objetos planos y muy poco sobre los cuerpos geométricos, pudieron describir y explicar algunas de las preguntas que les hicimos alrededor de esto, veamos algunas de ellas.

Les pedimos que observaran el Tangram y dijeran por cuáles figuras estaba formado, a esta Wilton contestó

“triángulos, cuadriláteros”

(Entrevista posterior a la actividad *Mide y compara con el tangram*, 16 Septiembre 2008)

Es claro que para poder indicar esto, Wilton debía conocer las características especiales que hacen a una figura, recibir el nombre de triángulo (tres lados) y cuadrilátero (cuatro lados). De igual manera al preguntarles por las características iguales y diferentes que tenían el paralelogramo, el triángulo mediano y el cuadrado pequeño, Brahian argumentó:

“todas son formadas por triángulos, aunque las figuras son diferentes en todas caben triángulos”

(Entrevista posterior a la actividad Mide y compara con el tangram, 16 Septiembre 2008)

De lo anterior, podemos afirmar que Brahian encontró y expresó de manera cualitativa una característica que hace que éstas figuras, se relacionen sin importar que su forma o tamaño sean diferentes, tal como lo es el área de sus superficies.



Figura 25, comparación que realizaron los niños con el triángulo pequeño

Con respecto a esto, la actividad *Reconozcamos las semejanzas*, permitió ver las relaciones o las características que los niños consideraron importantes para formar grupos de figuras *parecidas*. Ellos establecieron una categorización en la que las características forma y tamaño fueron predominantes.

Al preguntarle a Yaricsa, que indicara las relaciones entre dos rectángulos respondió:

“se relacionan en lo parecido con la forma de los rectángulos y en lo diferente en el número de cuadritos de cada rectángulo”

(Entrevista posterior a la actividad Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Lo anterior permite ver cómo expresan verbal y cualitativamente las relaciones de semejanza que se encuentran presentes en las figuras, lo cual es un paso muy importante por la edad de los estudiantes y el grado escolar en que se encuentran, teniendo en cuenta que la semejanza es un tema correspondiente al grado noveno y como afirma Piaget (1978) la proporcionalidad implícita en la semejanza es un concepto que se *desarrolla* en la etapa de las operaciones formales del niño.

La percepción de las formas, también se da cuando los niños establecen relaciones intrafigurales e interfigurales, al respecto el profesor Orlando Mesa (2000) indica que “Cuando se habla de relaciones interfigurales se hace referencia a aquellas que permiten comparar y clasificar los cuerpos y figuras geométricas entre sí, estableciendo diferencias, semejanzas y analogías...” (p. 23), nuestros estudiantes, en varias de las actividades manifestaron lo anterior, una de ellas fue la actividad diagnóstico y las siguientes fotos dan cuenta de las diversas comparaciones interfigurales que establecieron en el desarrollo de esta actividad:

Las comparaciones interfigurales que hicieron los niños, tuvieron una característica especial, debido a que la comparación no siempre la hacían ubicando una figura al lado de la otra sino que las ubicaban dentro de la misma figura para compara sus lados o sus ángulos, así:



Figura 26, sobreposición

En otros grupos durante la misma actividad, los estudiantes ubicaban también las figuras dentro de la inicial pero de manera concéntrica, éste fue el tipo de sobreposición⁴ predominante en casi todas las intervenciones.



Figura 27, sobreposición concéntrica

En la actividad del tangram los estudiantes no solo utilizaron este tipo de comparación (sobreposición concéntrica) veamos algunas de las imágenes:

⁴ Sobreposición o superposición de figuras, consiste en poner sobre una de las figuras, las demás con el fin de encontrar relaciones.

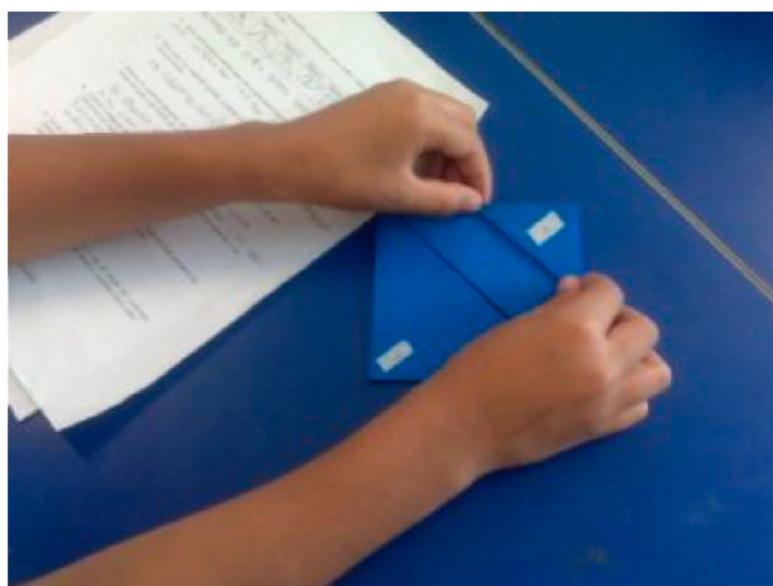


Figura 28, comparaciones interfigurales

En la primera foto podemos observar como tomaron los 5 triángulos que forman el trigram y los ubicaron de mayor a menor y en la misma posición, dejando ver claramente la importancia que le dan a la posición en la que esta la figura para indicar que son iguales, parecidos o diferentes. En la segunda imagen, la sobreposición vuelve a jugar un papel fundamental para la comparación entre la figura más pequeña y la mas grande, ya que de esta manera indicaron las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos que hacen parte del Tangram.

En la actividad *Reconozcamos las semejanzas*, realizaron comparaciones interfigurales, para dar solución a diversas preguntas, por ejemplo, en una pregunta se le pedía a los estudiantes formar grupos de los cuadriláteros que más se parecieran, los grupos que formaron los niños fueron los siguientes:

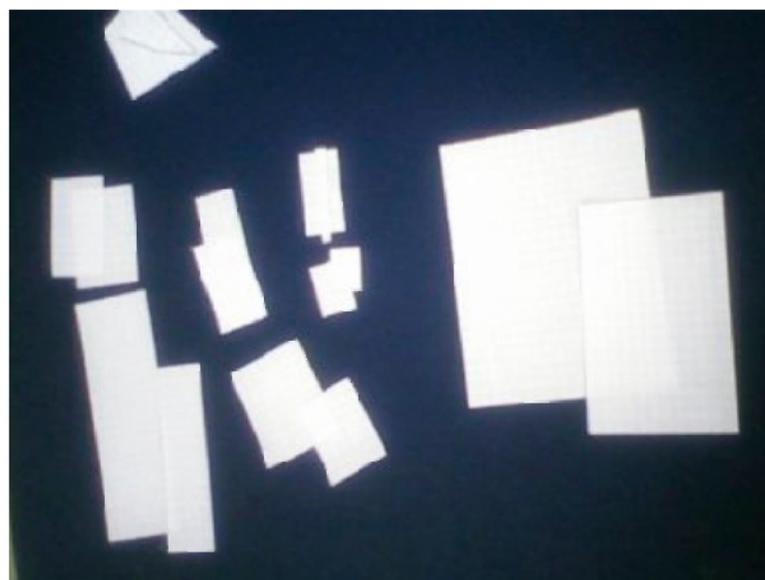
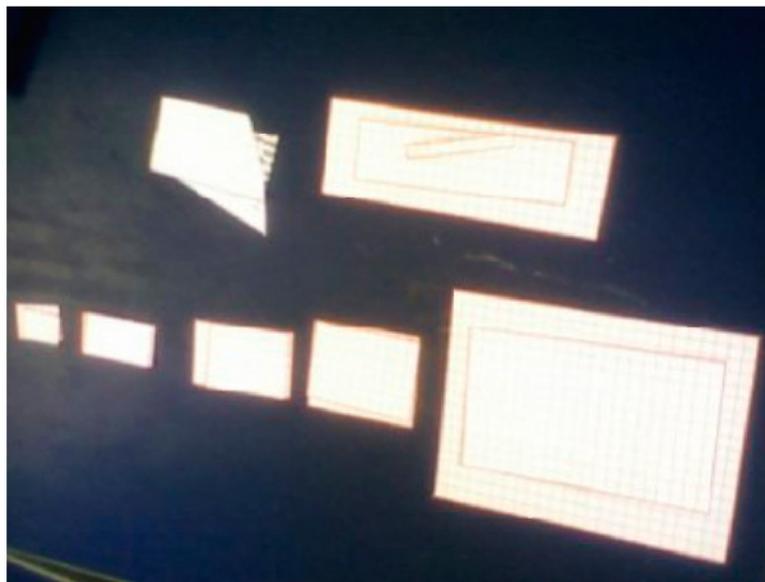


Figura 29, grupos de cuadriláteros formados por los estudiantes

En las fotos podemos ver como es predominante en los niños, la necesidad de ubicar en la misma posición las figuras para realizar una agrupación. En la primera organizan los grupos teniendo en cuenta que el lado más largo quede ubicado verticalmente y forman parejas con las dos figuras más parecidas, en la segunda foto forman las mismas parejas pero el lado mas corto es el que ubican de manera verticalmente.

Al preguntarles por las relaciones que encontraban entre dos o más rectángulos, pertenecientes al mismo grupo Brahian dió la siguiente respuesta:

“tuve en cuenta lo que media el largo y ancho de las figuras, por que unas median lo mismo y las otras cabían varias veces en un lado pero en el otro no”;

“lo que hice fue fijarme en el tamaño de los lados y así encontré que unos rectángulos eran el doble, el triple, la mitad que el otro y en algunos, que solo se relacionaban en el largo o en el ancho.”

(Entrevista posterior a la actividad Reconozcamos las semejanzas, 29 Septiembre 2008)

Estas respuestas dan cuenta de las comparaciones que él hacía sobre las medidas alguno de los lados o ambos lados de las figuras encontradas.

Vemos en cada una de estas imágenes como las comparaciones interfigurales que hacían los niños por medio de la sobreposición de las figuras, fue la estrategia más utilizada por los estudiantes para encontrar las relaciones que podían existir entre las diversas figuras que les entregamos. Estos procedimientos ayudaron a construir ideas muy importantes sobre la semejanza entre figuras y brindaron nuevas experiencias al estudiante, que permitirán más adelante la aprehensión de nuevos conocimientos, donde ellos de relacionar todos estos aspectos cualitativos de la semejanza entre figuras, con la cuantificación de magnitudes en la proporcionalidad.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para finalizar nuestra experiencia, damos a conocer las diferentes conclusiones alrededor de las observaciones y a la luz de los análisis realizados a las categorías anteriormente descritas, en estas conclusiones mencionamos las diversas estrategias utilizadas por los estudiantes para construir el concepto de semejanza entre figuras.

- ✓ En la construcción del concepto de semejanza entre figuras los estudiantes del grado sexto de la institución educativa Héctor Abad Gómez lograron dar un paso en la verbalización del concepto de semejanza que tenían inicialmente, ya que hacia el final de la experiencia, no sólo expresaban dicha relación teniendo en cuenta las premisas iniciales, igual forma y diferente tamaño, si no que además de esto, lograron reconocer la importancia de la igualdad de los ángulos homólogos, en la construcción de la definición de la semejanza entre figuras.
- ✓ Pudimos evidenciar durante el desarrollo de las diferentes actividades propuestas a los estudiantes, que se les dificultó establecer relaciones entre dos magnitudes a la vez, por tanto se convierte en un obstáculo al momento de abordar temas relacionados con la estructura multiplicativa, la cual es fundamental en el aprendizaje de la semejanza entre figuras.
- ✓ Con respecto a la percepción espacial, el análisis reflejó que fue la principal estrategia utilizada por los estudiantes, para encontrar las relaciones de semejanza entre las figuras, ya que los procedimientos que realizaron durante la mayoría de las actividades, daban cuenta de comparaciones entre las figuras al establecer relaciones interfigurales, por medio de la sobreposición. De igual manera se resalta la importancia de plantear nuevas experiencias que permitan desarrollar habilidades de la percepción espacial, en los niños para posibilitar de esta manera la aprehensión de nuevos conocimientos.

- ✓ El estudio de la geometría es sumamente importante ya que permite a los estudiantes darle sentido al mundo que los rodea, además al su estudio abordarlo cualitativamente, brinda unas bases desde la experiencia para futuros aprendizajes.
- ✓ Generalmente los estudiantes expresaban en forma verbal o escrita con un lenguaje cotidiano, las relaciones correspondientes a la razón de cambio entre las figuras que se les presentaron en las actividades, y muy pocas veces hacían referencia a estas relaciones con expresiones propias de la matemática.
- ✓ Consideramos que siguiendo lo propuesto por la geometría activa, y el acercamiento cualitativo a conceptos geométricos, se pueden abordar temas que comúnmente se asumen para jóvenes, con niños en edades más tempranas, como son la proporcionalidad y mas específicamente la semejanza entre figuras.

Por último y para futuras investigaciones les hacemos a los lectores la siguiente recomendación:

- ✓ Otro camino que se puede seguir para iniciar el concepto de semejanza, es abordando en principio los conceptos de paralelismo y perpendicularidad con los estudiantes, debido a la importancia que tienen estos conceptos para avanzar a una construcción más formal de la semejanza como es el teorema de Thales.
- ✓ Siguiendo línea en la que llevamos a cabo nuestro proyecto de investigación, la actividad que continuaría, debe estar enfocada en la realización de ampliaciones y reducciones (homotecias) con el fin de reconocer la razón de cambio presente en esas transformación y seguir construyendo más puntualmente el concepto de semejanza entre figuras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ander-Egg, E. (1991). *La estrategia metodológica el taller*. Argentina: Magisterio del Rio de la Plata
- Bonilla, E & Rodriguez, P. (1997). *Más allá del dilema de los métodos. La investigación en ciencias Sociales*. Bogotá: Ediciones Uniandes-Editorial Norma
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Prentice Hall
- Chamorro, M & Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis
- Da Ponte, J. P. (2006). *Estudos de caso em educação matemática [Estudio de caso en educación matemática]*. Recuperado en mayo 10, 2009 disponible en [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20\(Estudo%20caso\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels [Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales]*. Berne: Peter Lang, Collection Exploration. Traducción: *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Peter Lang y Universidad del valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 1999
- Duval, R. (1998e). *Geometry from a cognitive point a view, dans Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. La geometría desde un punto de vista cognitivo*. Traducción: Hernández, Víctor y Villalba, Martha PMME-UNISON. 2001. Disponible en <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>
- Escudero, I. *la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica*. Recuperado en abril 8 de 2008, disponible en <http://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/Escudero03.pdf>

Escudero, I. (2005). *Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. Enseñanza e las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 379-392. Recuperado en abril 12, 2009 disponible en <http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v23n3p379.pdf>

Feria, M; Espinoza, L & Martinez, N. (2006). *Percepción espacial y geometría intuitiva*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Fiol, M & Fortuny, J (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis

Gimeno, J. (1985). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del curriculum*. Madrid: Anaya

Grupo Beta. (1998). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis

Jaramillo, D. (2003). *La práctica pedagógica en matemáticas: hacia la reflexión e investigación en la clase de matemáticas*. Medellín: Facultad de Educación Universidad de Antioquia.

Martinez, A & Rivaya, F. (1998) *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis

Mesa, O & Sierra, G & Serna, O. (2000). *Iniciación a la geometría*. Medellín: Universidad de Antioquia

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá

Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Estándares curriculares en matemáticas*. Bogotá.

Moreria, M. (1999). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, enseñanza de las ciencias y la investigación en el área*. Recuperado en septiembre 3, 2007 disponible en <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf>

Piaget, J & Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos aires: Páidos.

Piaget, J. (1978). *Psicología del niño* (8ª ed.). Madrid: Morata

Piaget, J. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Siglo XXI editores

Rodriguez, A & Perez, J. R. (2003) *La noción de proporcionalidad*. *Ethos educativo*. Morelia:

Ruiz, E & Valdemoros, M. (2006). *Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina*. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Recuperado en octubre 23, 2007 disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33590207.pdf>

Torregosa, G & Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en geometría*. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Recuperado en enero 15, 2009 disponible en <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2362684>

Universidad de Antioquia y Gobernación de Antioquia (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico: Módulo 2*. Medellín: secretaria de educación para la cultura.

Universidad de Antioquia y Gobernación de Antioquia (2006). *Pensamiento métrico y sistema de medidas: módulo 3*. Medellín: secretaria de educación para la cultura.

Vasco, C. E. (1994). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

Vera, L. (1999) *La investigación cualitativa*. Recuperado en marzo 18, 2008 disponible en http://ponce.inter.edu/cai/reserva/lvera/INVESTIGACION_CUALITATIVA.pdf