

**VARIABLE: DIALÉCTICA ENTRE EL LENGUAJE NATURAL Y EL  
LENGUAJE SIMBÓLICO**

**NATALIA MÚNERA ESCOBAR  
JAIME ESTEBAN RÍOS RESTREPO  
JADIR ALFONSO ALZATE MARÍN**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ARTES  
MEDELLÍN  
2009**



**VARIABLE: DIALÉCTICA ENTRE EL LENGUAJE NATURAL Y EL  
LENGUAJE SIMBÓLICO**

**NATALIA MÚNERA ESCOBAR  
JAIME ESTEBAN RÍOS RESTREPO  
JADIR ALFONSO ALZATE MARÍN**

**TRABAJO DE GRADO PARA OBTENER TÍTULO COMO LICENCIADOS EN  
EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**ASESORA  
DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO**

**MAESTRA COOPERADORA  
CLAUDIA PATRICIA QUINTERO QUINTERO**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ARTES  
MEDELLÍN**

**2009**

*A nuestro Dios, con  
mucho amor.*

*A nuestras familias,  
con cariño especial.*

## AGRADECIMIENTOS

Principalmente a la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por abrimos las puertas desde el primer día para comenzar nuestra práctica pedagógica, también a nuestra maestra cooperadora Claudia Patricia Quintero por ayudarnos en este proceso de iniciación como maestros investigadores. A Verónica Cerón, Ana María Sánchez y a Sergio Gómez, los protagonistas de este estudio, porque fue por ellos que esta investigación tomó sentido, por compartir con nosotros las vivencias de aprendizaje que se generaron dentro del aula de clase y por estar siempre dispuestos para todo lo necesario en la investigación. También a todos y cada uno de los entes académicos y administrativos de la institución por generar siempre un buen ambiente de trabajo. Y a nuestra asesora Diana Jaramillo, quien fue fundamental en la orientación y el desarrollo de este trabajo, ella sembró en cada uno de nosotros esa “semilla” de la investigación la cual esperamos hacer florecer en el transcurrir de nuestras vidas académicas. De la misma forma, agradecemos a nuestros compañeros Walter Gómez, Katherine Berrio y Diego Pérez por escucharnos siempre en los espacios del seminario de práctica, y por compartir con nosotros las sugerencias y dudas que ayudaron a construir este trabajo de investigación

Nuestro agradecimiento también es merecido a la Universidad de Antioquia por brindarnos los espacios físicos y académicos, que hicieron de nuestra formación como docentes la mejor experiencia, siempre guiada por la investigación.

A Dios por darnos fuerzas para tolerar las dificultades que se presentaban en algunas ocasiones, y por hacer de cada uno de nosotros personas más humildes a la hora del trabajo en equipo.

Finalmente, a nuestros padres por darnos siempre la seguridad en nosotros mismos, por apoyarnos en todo momento y por fundar siempre un excelente ambiente hogareño a la hora de reunirnos para el desarrollo de la investigación.

## TABLA DE CONTENIDO

1. Resumen	6
2. Abriendo Horizonte	7
3. Sobre el contexto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera	10
4. Nuestro Camino	13
5. Los protagonistas: personas en contexto	17
6. Entrando en análisis	21
6.1. "Mi significado de variable"	22
6.1.1. "Variable como número cualquiera"	23
6.1.2. "Variable como sinónimo de incógnita"	26
6.1.3. "Variable como representación de una letra"	31
6.2. "De las actividades de clase a la construcción del concepto de variable"	36
6.3. "Dialéctica entre lenguaje natural y lenguaje simbólico"	50
7. A modo de cierre	64
8. Referencias bibliográficas	67
9. Anexos	69

## 1. RESUMEN

### **TÍTULO:**

Variable: dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico<sup>1</sup>

### **AUTORES:**

Múnera Escobar, Natalia  
Ríos Restrepo, Jaime Esteban  
Alzate Marín, Jadir Alfonso

### **PALABRAS-CLAVE:**

Variación, Movimiento, fluencia, (re)significación, cambio, significado.

Esta investigación tiene como objetivo analizar el proceso de construcción del concepto de variable, desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera. La pregunta orientadora de esta investigación fue la siguiente: ¿Cómo es el proceso de construcción del concepto de variable, desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera? Para responder esta pregunta se consideró, en el aspecto metodológico, un enfoque cualitativo, con un abordaje fenomenológico-hermenéutico, donde básicamente se analizaron e interpretaron aquellos fenómenos que ocurrieron dentro del aula de clase, que posibilitaron las diferentes construcciones del concepto de variable por parte de los estudiantes, protagonistas de este estudio. En esta investigación se utilizó el estudio de casos, enmarcado en una investigación participante y en una investigación colaborativa apoyada por un grupo de profesores universitarios y profesores de instituciones educativas de básica y media. La recolección de datos de este trabajo tuvo como instrumentos entrevistas, observaciones, diarios de campo, cartas y otras actividades de clase. En este estudio de casos los protagonistas fueron tres estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera. Para el análisis de los datos se utilizaron categorías emergentes, resultado de una triangulación entre los datos, lo expresado por los autores que constituyeron el marco teórico, los diálogos con los colaboradores y nuestra apreciación personal. A partir de dicha triangulación surgieron tres categorías emergentes: La primera categoría esta “Mí significado de variable”, la cual incluye tres acepciones que son: “la variable como número cualquiera”, “variable como sinónimo de incógnita” y “la variable como representación de una letra”; la segunda categoría es “De las actividades de clase a la construcción del concepto de variable”; y, finalmente, la tercera categoría es “Dialéctica entre lenguaje natural y el lenguaje simbólico”.

---

<sup>1</sup> Nombre del trabajo de grado.

## 2. ABRIENDO EL HORIZONTE

Todo empezó aquel día en el que iniciamos nuestra práctica pedagógica en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera. Ingresamos al aula, la profesora cooperadora nos presentó y desde ese día este trabajo de investigación comenzó a “cultivarse”.

Dado que la profesora cooperadora por esos días estaba trabajando con sus estudiantes el concepto de función, necesariamente tuvo que discutirse al interior del aula, también, el concepto de variable. Comenzando con situaciones que se les presentaban a los estudiantes, En un principio se les preguntaba por la variable dependiente e independiente, pero llegó un momento (y este fue inevitable) en el cuál se les preguntó a los estudiantes por el significado de variable; sus respuestas e interpretaciones fueron tan diversas pero a la vez tan parecidas, que comenzamos a inquietarnos por el significado de variable, hasta tal punto de convencernos que nuestro trabajo tendría que relacionarse con dicho concepto. Y aunque eran notables las dificultades que los estudiantes presentaban cuando se trabajaba el concepto de variable, optamos por enfocar este trabajo de investigación hacia la interpretación que ellos hacían, tanto desde su forma de comunicar, como desde su forma de interpretar simbólicamente el concepto de variable.

En este trabajo de investigación desarrollamos, bajo un enfoque cualitativo y desde un abordaje fenomenológico–hermenéutico, un análisis e interpretación de algunos fenómenos que intervienen en la construcción del concepto de variable. Nuestro objetivo era analizar cómo es el proceso de construcción del concepto de variable, desde la dialéctica<sup>2</sup> entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.

Este trabajo de investigación se nutrió no solo de las observaciones que se hicieron en el aula de clase de la institución escolar (siendo ella un espacio

---

<sup>2</sup> Este término se retomará en capítulos más adelante, donde se aclarará desde donde se toma este concepto y con que fin se aborda.

importante en esta investigación), sino también de algunos autores como Cogollo (2006), Duval (1999), Lanner y Sousa (2008). Estos autores, entre otros, nos ayudaron en la construcción de unas categorías emergentes que dieron respuesta, de alguna forma, a la pregunta planteada para la investigación: ¿Cómo es el proceso de construcción del concepto de variable, desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera?

Las categorías emergentes que construimos en este trabajo de investigación fueron:

1. “Mi significado de variable”: en esta categoría se muestran algunos significados e interpretaciones que los estudiantes le asignaban a la variable. A partir de este significado que los estudiantes le dieron a la variable, nacieron unas acepciones que se dividen en “la variable como número cualquiera”, donde los estudiantes hablan de la variable como “algo” que puede tomar cualquier valor numérico; “Variable como sinónimo de incógnita”, donde los estudiantes interpretaban la variable como un valor a encontrar; y, finalmente, “Variable como representación de una letra”, donde los estudiantes interpretaban la variable, simplemente, como aquella letra que acompaña a un numeral en una expresión algebraica.
2. “De las actividades de clase a la construcción del concepto de variable”: en esta categoría, mostraremos como los estudiantes construyen el concepto de variable, a partir de una situaciones específicas dadas en el aula de clase.
3. “Dialéctica entre lenguaje natural y lenguaje simbólico”: en esta categoría mostraremos la relación que hubo entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, que posibilitó el que los estudiantes tuvieran un acercamiento al concepto de variable.

Dentro de este trabajo de investigación, también incluimos una lectura del contexto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, donde se presentan algunas características de su manual de convivencia, así como una

descripción tanto del contexto social que rodea a la comunidad educativa, como de la maestra cooperadora y de los estudiantes en general.

Para finalizar, presentamos un capítulo llamado "A modo de cierre". Aquí mostraremos algunas apreciaciones, suscitadas por la investigación, relacionadas con el análisis de los datos.

### **3. SOBRE EL CONTEXTO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA RAMÓN MÚNERA LOPERA**

Teniendo como base las experiencias que se tuvieron en el aula de clase, dentro de las prácticas pedagógicas que se realizaban en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, la pregunta de investigación, entonces, no nació cómo una pregunta aislada a un contexto, por el contrario, nació desde la observación de una población, de unas personas que tienen unas características específicas. De ahí, que a continuación presentamos una lectura del contexto de la institución, donde presentemos en que condiciones se da la creación de la institución creación, cuál es su misión, su visión, entre otros aspectos que hacen de su espacio, un espacio diferente para los estudiantes que acoge.

La Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, está ubicada en zona oriental de la ciudad de Medellín, en el barrio Manrique Oriental, donde el estrato socioeconómico de la comunidad oscila entre uno y tres.

El colegio está rodeado por zonas muy montañosas, y muchos de sus estudiantes viven en casas muy humildes ubicadas sobre las mismas. Dadas las condiciones socio-económicas de pobreza y marginación, los estudiantes de la institución han sido altamente vulnerables a la agresión, violencia y drogadicción. La mayoría de los alumnos proviene de familias cuyas madres son solteras o viudas; y en menor medida, provienen de familias nucleares.

Aunque las condiciones han mejorado un poco, la descomposición social generada de tiempo atrás ha influido en la mentalidad y en las acciones de los estudiantes. Sin embargo, en medio de la pobreza, la falta de oportunidades y la crisis de valores, y gracias a diferentes proyectos de convivencia realizados con la comunidad educativa, ya no se mira tanto la violencia como una alternativa válida para responder a sus necesidades de protagonismo social.

Es importante resaltar que muchas de las familias de la comunidad se dedican a la economía informal (ventas de chances, minutos de celular, dulces, frutas, entre otros) ubicando sus puntos de ventas en las calles, avenidas, en las

aceras de sus propias casas o en los alrededores de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.

A continuación, presentamos algunos apartes textuales del manual de convivencia de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, con el fin de hacer un acercamiento a las políticas de la institución:

### ***Principio filosófico***

“Formar personas sensibles al conocimiento dentro de una actitud creativa y científica con soporte holístico que conlleve a la solución de problemas “

### ***Misión***

“Contribuir a la formación académica y en valores de nuestros jóvenes, a través de métodos cognitivos que permitan el desarrollo del pensamiento autónomo y creativo, brindando espacios de reflexión y convivencia para asimilar y enriquecer de conocimientos desde sus propias experiencias y perspectivas, facilitando con ello la construcción de un mejor nivel de vida, con proyección a la comunidad”.

### ***Visión***

“Ser para el dos mil ocho (2008), el espacio predilecto para formación de los niños y jóvenes de la comunidad multicultural a la que pertenecen, por su excelente nivel académico, armonía y convivencia en el desarrollo de sus actividades, proyectando personas reflexivas y comprometidas con la sociedad.

La institución pretende desarrollar hábitos sociales que le faciliten, a los estudiantes, la adaptación al medio cultural desde el respeto y la práctica de los valores, así como la capacidad de interactuar, aceptar la diferencia, concertar y auto-valorarse, apreciar la vida en todas sus manifestaciones, ser tolerantes y justos; capaces de desarrollar liderazgo y en definitiva, ser personas alegres, sensibles, optimistas, capaces de apreciar el arte, la cultura propia y universal, coherentes en sus convicciones, capaces de amar y de establecer su entorno.”

Desde la misión institucional, lo pedagógico hace énfasis en el desarrollo de habilidades de pensamiento, como: resolución de problemas, comprensión de situaciones y textos, proposición y construcción de alternativas, argumentación de ideas y aplicación de conocimientos a la vida cotidiana.

Desde una re-contextualización (Esta recontextualización se hizo dentro de un seminario de investigación en el cual participaban algunas maestras de la institución, entre ellas, nuestra maestra cooperadora) que hace la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, se plantea que el aprendizaje significativo de las matemáticas potencializa el pensamiento lógico de los individuos y facilita la toma de decisiones en situaciones trascendentales de su vida personal y social. Esto implica enfrentar a los estudiantes a una nueva perspectiva metodológica: la investigación y la resolución problémica; por este motivo su trabajo en el área de matemáticas está centrado en la profundización del razonamiento lógico, enmarcado en la estrategia de la resolución de problemas, ya que se considera que este permite que el estudiante potencie habilidades para interpretar y solucionar problemas de la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana, conduciéndolo a diseñar herramientas, procedimientos, situaciones, conceptualizaciones y valoraciones.

La institución desde el área de las matemáticas propone una formación en concordancia con el perfil del estudiante que contribuya al desarrollo de su razonamiento lógico, analítico, sistemático, pero también como un ser racional, íntegro, con sentido crítico, analítico, que enfrente con responsabilidad y acierto el compromiso con la realidad personal, familiar y social de modo que sea capaz de proyectarse responsablemente hacia el futuro. Así mismo, una de las pretensiones de la institución es que los estudiantes dominen los conocimientos que construyen en el aula de clase, para tener mayores oportunidades de capacitarse en estudios superiores y de vincularse al mundo del trabajo.

#### 4. NUESTRO CAMINO

Lo que antes era un proyecto, poco a poco se fue cristalizando en nuestro trabajo de investigación; pues bien, después de tener clara la pregunta que lo orientaría y posteriormente su objetivo, debíamos pensar en el camino que nos conduciría a darle “vida” y esencia a dicho trabajo.

Esta investigación estuvo inmersa en dos proyectos, uno de investigación, llamado “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase”<sup>3</sup> financiado por la Universidad de Antioquia y Colciencias, y otro de extensión, llamado “interrelaciones en el aula de clase: una mirada desde el conocimiento matemático” financiado por el MEN. Dichos proyectos realizados en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, bajo la coordinación de la doctora Diana Jaramillo.

Por limitaciones temporales<sup>4</sup> para el desarrollo de esta investigación, el abordaje asumido fue el fenomenológico-hermenéutico, donde se realizaron análisis e interpretaciones de los fenómenos que intervienen en la simbolización matemática dentro del aula de clase.

La forma en la que recolectaron los datos fue por medio del estudio de casos, donde, parafraseando a López (2006), el objetivo principal de este tipo de estudio es comprender el significado de un fenómeno o una experiencia, de manera particular; así mismo, permite que desde el análisis minucioso de los datos surjan conceptos globales, de esta forma el estudio de casos se plantea con la finalidad de llegar a generar conjeturas a partir del establecimiento sólido de relaciones descubiertas, aventurándose a explicar relaciones causales que aparecen en un contexto concreto y dentro de un proceso dado.

---

<sup>3</sup> Este proyecto trabaja bajo un método cualitativo y una investigación colaborativa. Sus participantes son estudiantes de maestría, algunos estudiantes de pregrado de segunda y tercera práctica pedagógica y los sus gestores (Diana Jaramillo, Yolanda Beltrán y Gilberto Obando)

<sup>4</sup> Este trabajo de investigación tuvo dos grandes momentos: la visita a la institución (donde se conoció a los estudiantes, se creó el proyecto de investigación y se recolectaron los datos), y el análisis y escritura del trabajo. Todo esto se llevó a cabo en el periodo de dos años, aspecto por el cual no se podía profundizar lo suficiente en nuestro objetivo, como para llegar a construir estrategias metodológicas, o aspectos por el estilo.

Mencionando a López (2006), el estudio de casos no es más que la descripción y el análisis de una situación real en la que se plantea o puede plantearse un problema, evitando en lo posible expresar juicios de valor. Esta metodología puede hacerse de forma individual o colectiva. Consideramos que en esta investigación el estudio de casos fue de mucha riqueza conceptual, dado que como eran varias personas, los datos que se obtuvieron no fueron los mismos, pudiendo proporcionar una comprensión más profunda del fenómeno. Teniendo presente que la investigación tendría en cuenta el estudio de caso, se escogieron tres estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, puestos a consideración de la maestra cooperadora Claudia Quintero y con el posterior permiso de los padres de familia (ver anexos 4, 5 y 6), de diferente rendimiento académico y diferente género.

Se escogieron tres estudiantes ya que:

- Esta investigación quería realizar una interpretación y análisis de un fenómeno en una población específica, pero no se querían realizar generalizaciones con respecto a tal fenómeno, de forma que sólo se escogieron tres estudiantes que quisieran participar de la investigación, y que desde su propio contexto nos ayudaran en este trabajo.
- Debido a cuestiones de tiempo (pues para la realización de esta investigación se contó con un año) no sería posible analizar los datos de muchos estudiantes con cierta profundidad, por esta razón se escogieron tres estudiantes, con diferente rendimiento académico, que permitieran vislumbrar desde diferentes puntos de vista el fenómeno que estábamos investigando.

Para la recolección de los datos, tuvimos como instrumentos:

- La observación participante realizada en nuestra visita a la institución, pues esta implicó una inmersión en la vida y en la cultura de los estudiantes.
- La entrevista: la cual fue una herramienta muy importante pues ella nos permitió un acercamiento más directo con los protagonistas de la investigación, detenernos en algunos puntos de análisis importantes. Esta entrevista fue semi-estructurada, pues, desde el ambiente que se

generaba en la entrevista y el diálogo que se establecía en ella, realizábamos algunas preguntas que no estaban en el formato o agregábamos unas que no habían estado contempladas.

Estas entrevistas se realizaron a los estudiantes protagonistas de la investigación (Sergio Gómez, Ana María Sánchez y Verónica Cerón)<sup>5</sup>, con el objetivo de analizar cómo es el proceso de construcción del concepto de variable, desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.

Se realizó, también, una entrevista a la maestra Claudia Patricia Quintero, con el objetivo de saber algunas estrategias que ella ha utilizado para ayudar a los estudiantes en el proceso de construcción del concepto de variable.

- Construcción, realización y socialización de algunas actividades para desarrollar. Entre ellas, destacamos las cartas y las guías de trabajo. Estas guías fueron planeadas por nosotros, y resueltas por los estudiantes, las cartas fueron elaboradas por los estudiantes. Dichas actividades posibilitaron vislumbrar aspectos sobre la construcción que los estudiantes hacían del concepto de variable, desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.

Posteriormente, construimos categorías de análisis emergentes, como el resultado de una triangulación entre la bibliografía revisada, los datos, la asesoría de la coordinadora del proyecto y nuestras apreciaciones. Utilizamos categorías emergentes, pues no queríamos sujetar los resultados a categorías establecidas *a priori*, respetando el movimiento histórico de los niños protagonistas del estudio. De ahí, que a medida en que los resultados fueron sugiriendo elementos y características clave, se fueron conformando las categorías que abarcaron dichos aspectos.

---

<sup>5</sup> Estos nombres son reales y se contó con la autorización de los padres para que ellos participarán de la investigación.

## **5. LOS PROTAGONISTAS: PERSONAS EN CONTEXTO**

Los protagonistas de la investigación son cuatro personas: la profesora Claudia, y los estudiantes Ana María, Verónica y Sergio.

### **LA PROFESORA COOPERADORA**



La profesora cooperadora, Claudia Patricia Quintero, desde nuestra perspectiva es una maestra que muestra interés por que sus estudiantes tengan aprendizajes significativos, aprendizajes donde los estudiantes comprendan la importancia de los contenidos que ven el área de matemáticas a partir de la implicación de estos su vida cotidiana; así es reflejado la labor de la maestra desde las actividades que propone y desde las discusiones y diálogos que posibilita en el aula de clase.

Desde nuestras observaciones, la práctica pedagógica de la maestra, “encaja” con las lecturas realizadas del texto “Pedagogía de la Autonomía. Saberes necesarios para la práctica pedagógica” de Paulo Freire, es decir, muchas de esas ideologías en las cuales Freire (1997) nos enseña a enseñar partiendo del ser profesor, son por así decirlo, características que evidenciamos en la profesora Claudia: una profesora reflexiva y crítica, consciente de su inacabamiento ( una muestra de ello es su asistencia a seminarios en la Universidad de Antioquia), que interpreta y propone estrategias y metodologías

educativas que le faciliten al alumno y a ella misma el proceso de enseñanza y aprendizaje, analizando y tratando de argumentar los porque de las situaciones vividas en clase y preguntándose las consecuencias de las cosas que propone.

Consideramos que la maestra no pretende, o no es su interés, “transmitir” a sus estudiantes sus conocimientos matemáticos, sino que mediante sus metodologías “innovadoras” pretende que entre todos lo construyan, preguntándose y preguntando sobre los conocimientos previos que tienen los estudiantes, y así contextualizar las actividades a sus “realidades”.

Además del saber específico que trabaja (matemáticas) con los estudiantes, también se le nota la consciencia que tiene de los mismos, los cuales antes que ser estudiantes son personas, por lo tanto enfatiza constantemente en el desarrollo de valores éticos y morales que les ayude a ser más responsables, respetuosos, honestos, humildes; valores que son mencionados en el manual de convivencia, y es que ella desde su ejemplo refleja con los estudiantes.

## **LOS ESTUDIANTES**

Las edades de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera oscilan entre los trece y los diez y siete años; y como en todos los contextos escolares, hay unos estudiantes más atentos y responsables con las actividades propuestas por la docente que otros.

Algunos, tal vez producto de su adolescencia (teniendo en cuenta que esta no es cronológica, sino lógica) se muestran mucho más interesados por otros asuntos como hablar de personas del sexo opuesto, fijarse demasiado en cómo está el cabello, las uñas, como se ven con el uniforme, preguntarse por el partido de fútbol que se jugará o se jugó en la Eurocopa 2008 (las jugadas que hizo Cristiano Ronaldo, Lampar, Makelele, etc.), o en muchas ocasiones no tienen una buena disposición para trabajar dedicándose al ocio (haciendo dibujos en los cuadernos, cartas de amor, o simplemente dedicarse a hacer “nada”) o cualquier otra cosa que los dispersan un poco de clase. En cuanto a las actitudes que se pueden observar en el aula por parte de los estudiantes, se nota la confianza que la profesora ha despertado en la clase para que puedan expresar todo lo que piensan, entienden o no entienden con respecto a

lo que están trabajando. En una primera impresión, se pensaría que por las edades que tienen los estudiantes, estos pueden respetar poco la palabra de los compañeros o burlarse con facilidad de lo que puede pensar el otro (es claro que este detalle no es del todo alejado del aula, y que por consiguiente se ve), pero lo cierto, es que se ve con poca frecuencia, predominando en el ambiente una actitud de respeto y escucha por el otro. Todo esto es solo el reflejo, desde nuestra mirada, de la ideología de la profesora Claudia.

Desde las apreciaciones que varios autores hacen con respecto al momento que puede vivir el alumno, no solo relacionado a su edad, sino también mirando cual es su contexto, la hora en la cual se dicta la clase y como está el clima de la ciudad en ese momento, se pudo observar que en realidad son factores que afectan la preparación de una clase e igualmente influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A modo general todos además de ser respetuosos con ellos mismos (como lo dijimos en párrafos anteriores), también lo son con la profesora, directivos y observadores, posibilitando que las relaciones dialógicas que se construyan en el aula sean muy positivas.

Centrándonos un poco más en los protagonistas de la investigación, queremos mencionar que una vez se les comunicó que habían sido escogidos para participar de la investigación estuvieron de acuerdo, además de que aceptaron que sus nombres reales fueran mencionados dentro de la investigación, claro está con el debido permiso de sus acudientes. La noticia fue recibida por los estudiantes con mucha calma y serenidad, aunque si se notaron algo “inquietos” con su participación en clase: se mostraron más activos, participativos, se les notaba el entusiasmo y la motivación por hacer las cosas bien, inclusive en los demás estudiantes se percibió una actitud positiva para con la clase.

Sergio, Verónica y Ana María son jóvenes que tienen deseos de salir adelante y crecer como personas, y que mejor camino que la educación, la cual debe conducir a la socialización y el bien-estar en la sociedad, donde nosotros como maestros debemos aportar a este bonito ideal, desde nuestro compromiso,

ética, responsabilidad. Al respecto Freire (1997, pág. 94) dice “otro saber del que no puedo ni siquiera dudar un momento en mi práctica educativo-crítica es el de que, como experiencia específicamente humana, la educación es una forma de intervención en el mundo”.

Concordamos con el autor, porque desde nuestra labor como maestros finalmente estamos educando tanto desde el área del saber como desde lo que somos como sujetos y esto tiene influencia en los estudiantes desde la lectura que estos hacen de sus maestros.

## **6. ENTRANDO EN ANÁLISIS**

Después de asistir por más de un año a la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, compartiendo con los estudiantes, profesores e investigadores, después de hacer una lectura de los registros y datos que habíamos obtenido y teniendo la mente llena de ideas que los autores leídos dejaban en nosotros, comenzamos a notar unas ciertas regularidades en las expresiones de los estudiantes, tanto desde su verbalización como desde su escritura. Regularidades, que nos permitieron comenzar a analizar algunos aspectos específicos relacionados con la construcción del concepto de variable y el uso del lenguaje natural y del lenguaje simbólico.

A partir de esos datos que pudimos seleccionar en los registros obtenidos, comenzamos a hacer una clasificación de ellos en tres partes. En una de ellas podíamos vislumbrar cuál era el significado que los estudiantes tenían del concepto de variable; en otra parte vislumbrábamos cómo ayudaban o no las actividades de clase para que los estudiantes identificaran, apropiaran y manipularan el concepto de variable; y, en la última parte, vislumbrábamos cómo era esa dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico en la construcción del concepto de variable.

Así pues, es desde esta clasificación de la información en las tres partes mencionadas anteriormente, que nacieron las tres categorías emergentes que mostraremos a continuación. Estas categorías las denominamos así:

1. “Mi significado de variable”.
2. “De las actividades de clase a la construcción del concepto de variable”.
3. “Dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico”.

## **6.1. “MI SIGNIFICADO DE VARIABLE”**

A esta categoría la hemos llamado “Mi significado de variable”, después de disfrutar de algunas vivencias con los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, donde compartimos momentos de clase con la maestra. Momentos en los que se podía reflexionar y analizar cómo eran algunas interpretaciones que ellos, los estudiantes, hacían de conceptos matemáticos que se abordaban en clase.

Profundizando un poco más en esas interpretaciones que los estudiantes hacían de algunos conceptos matemáticos, al realizar las entrevistas, desarrollar las guías y sostener las conversaciones con Ana María, Sergio y Verónica, fue posible percibir un poco más de cerca las construcciones que hacían de dichos conceptos.

Esta categoría nació de esos significados que los estudiantes expresaban acerca de la variable, de esa variable matemática que constantemente “manipulaban” en los ejercicios que hacían en el aula de clase. De estos significados, a su vez, nacieron las siguientes concepciones<sup>6</sup>:

- “Variable como un número cualquiera”
- “Variable como un sinónimo de incógnita”
- “Variable como una representación de la letra”

Antes de mostrar los significados que los estudiantes dan al concepto de variable, consideramos importante explicitar lo que significa en esta investigación *la variable*; para ello, nos basaremos en diferentes autores (que retomamos a lo largo del análisis de las categorías) que tendrán relevancia a lo largo de la presentación de los significados dados por los estudiantes. En esta investigación estamos asumiendo *la variable* como un concepto que, aunque no se puede definir de una manera muy precisa, pues sigue siendo un ente abstracto del álgebra, involucra para su comprensión dos procesos:

- Simbolización
- Generalización

---

<sup>6</sup> El nombre de estas concepciones son fragmentos que los protagonistas de la investigación decían durante las entrevistas o conversaciones de las actividades que se realizaron ellos, de ahí que los fragmentos se dejen sin modificaciones.

Desde la simbolización podemos hablar que la variable toma significado en las letras que se encuentran en las expresiones algebraicas. En la simbolización, las letras serían pues una forma de comunicar que algo está variando, aunque hay que tener en cuenta que en algunas ocasiones puede ser una incógnita. La simbolización sería un lenguaje que se utiliza, y el cual esta ligado del significado que cada sujeto construye, a partir de las representaciones, de los objetos que manipula.

Desde la generalización podemos hablar que la variable exige una mirada que no se basa en lo estático, por el contrario debe tener una mirada dinámica, mutable, tanto de las circunstancias y situaciones que se presentan en la vida cotidiana, como en las situaciones que se presentan en los enunciados matemáticos en clase; es decir, tanto el proceso de simbolización como el proceso de generalización, son los “medios” necesarios para llegar a una comprensión del concepto de variable, en el sentido que posibilitan no pensar en la variable solo como una letra, pero al mismo tiempo, por medio de la simbolización, tener una forma de expresar el movimiento y la mutabilidad de las situaciones.

### **6.1.1. “Variable como un número cualquiera”**

Son muchas las interpretaciones que los estudiantes hacen de la variable, aunque algunas de ellas están “cargadas” del sentido que ellos le dan, pero debemos resaltar los aspectos que implica el concepto de variable:

Citando a Alonso, et al. (1993, pág. 18) dice:

Adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos:

- Generalización: que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas.
- Simbolización: que permite expresar de forma abreviada lo que tiene en común todas las situaciones

En la entrevista realizada a Ana María, cuando se le preguntó cómo creía ella que se podía identificar una variable en un enunciado cualquiera, ella respondió:

Ana María: En un enunciado cuando no se menciona específicamente, por ejemplo, cuando hablan de  $5f$ , no están hablando de si son colores o si es un numero por ejemplo 5 veces 2, no, están diciendo es  $5f$ .

Jadir: Y en un enunciado ¿Tú como sabes cuál es la variable?

Ana María: Por eso, porque no hablan de ella específicamente, solamente dicen, dicen que no se conoce, en este caso se representaría con una  $f$ , con una letra que no se.

(Ana María, entrevista, 7 de julio de 2009)

Cuando Ana María dijo que “la variable no se menciona”, inferimos que ella asumió que, aunque la variable es una letra, ésta representa un conjunto, que si bien no se conoce, lo determina.

Estamos asumiendo la variable como un concepto que es dinámico, como lo sugieren Lanner y Sousa (2008). Según estas autoras la variable es un concepto que comprende dos aspectos importantes: el histórico-lógico y el de fluencia. Desde un aspecto histórico-lógico, se advierte, en primer lugar, la importancia que tiene la historia de los estudiantes en su aprendizaje, pues son esas vivencias y circunstancias las que permiten que los sujetos comprendan unos conceptos y otros no: Es desde las necesidades y los contextos en los que el sujeto se desenvuelve, que se posibilitan unas construcciones y otras no. Y, en segundo lugar se advierte la importancia que tiene una secuencia lógica<sup>7</sup> en el aprendizaje, pues para la construcción y comprensión de unos conceptos se hace necesario, en algunas ocasiones, que se tengan unos conocimientos previos.

Considerando el aspecto de fluencia, la variable es comprendida bajo las concepciones de posibilidad e imprevisibilidad, donde se tiene en cuenta que la variable abarca un campo de variación (sería como decir un campo o un espacio en el que se puede mover), y que va mediada por el lenguaje, por el cómo se nombre. Profundizando un poco más en este concepto de fluencia que Lanner y Sousa (2008, pág. 66) mencionan, tenemos:

[...] Fluencia, tiene referencia en Caraça (1998) que, con base en Heráclito, lo considera como una de las características de la realidad en que vivimos. Para este filósofo, todo está en constante movimiento

[...] De modo que, del extremo superior al inferior de la escala, del movimiento prodigioso de la expansión del universo, al movimiento, no

---

<sup>7</sup> Lógica vista como una forma coherente y jerárquica de aprender algunos conceptos.

menos prodigioso, de las partículas constituyentes del átomo, todo fluye, todo es, en todo momento, una cosa nueva.

La fluencia, como ya mencionamos, nos invita a pensar en el movimiento constante de los contextos. Consideramos que este concepto de fluencia va ligado al concepto de mutabilidad, pensando, este último, como el dinamismo que hay dentro de las situaciones diarias de los sujetos y de las cosas en general y que repercuten en la concepción que él construya de la variable.

Relacionado a este concepto de fluencia, en la entrevista hecha a Ana María, se expresaba esa percepción sobre la variable como algo que no es estático, la variable como algo que puede tomar más de un valor, dependiendo de la circunstancia en que se esté, veamos:

Jadir: ¿Qué crees que es variación?

Ana María: Lo que varía, por ejemplo, los colores, cuando usted dice los colores, no está hablando de un color en específico, entonces ahí hay variación

Jadir: ¿Variación?

Ana María: Cuando usted dice un número, no está hablando de cual número, está hablando de cualquier número

Jadir: ¿Cómo así? ¿Cuándo dices un número cualquiera eso es variación?

Ana María: Sí, porque varía, porque puede ser 4, puede ser 5, puede ser cualquiera  
(Ana María, entrevista, 7 de Julio de 2009)

En lo dicho por Ana María, percibimos una mirada de la variable como algo dinámico, que tiene un campo de variación. Cuando los estudiantes nos hablaban de un número cualquiera, podíamos decir que estaban pensando en esa imprevisibilidad que comprende el concepto de variable.

Otro concepto que Lanner y Sousa (2008) mencionan es el de variación, como un concepto que ayuda a los estudiantes, desde experiencias cualitativas y cuantitativas, a percibir la mutabilidad de su realidad, de sus vivencias, de su contexto y de las situaciones que se les presentan, teniendo una visión, no sólo numérica sino también una visión cualitativa. En la entrevista de Ana María, observamos una construcción del concepto de variación no sólo desde lo numérico, sino también desde lo cualitativo. Construcción que, tal vez, posibilitará que Ana María encuentre variables en todas las circunstancias y situaciones que vive.

En esta misma dirección Sergio dijo:

Jadín: ¿Qué crees que es la variación?

Sergio: Algo que va a cambiar o está cambiando

Jadín: ¿Por ejemplo?

Sergio: Pongámosle que puede ser una variación de invierno a verano y viceversa  
(Sergio, entrevista, 26 de junio de 2009)

Consideramos pues, que la concepción de los estudiantes de “variable como un número cualquiera” ayudaba a responder a un interrogante que como investigadores en algún momento nos hicimos, cuando los estudiantes hablaron y mencionaron las variables, ¿Ellos sabrían qué es una variable?

Esta concepción de “variable como un número cualquiera” nos mostró que los estudiantes tenían, aunque de manera implícita, una mirada de la variable como algo que no está fijo, algo que muta y algo que es dinámico, que se puede simbolizar; y esto, tal vez, posibilitaría que ellos llegaran a elaboraciones más elevadas de dicho concepto, donde signifiquen la variable no solo desde la letra, sino que vean la variable como “algo” que habla de un movimiento el cual se puede expresar con una letra.

### **6.1.2. “Variable como un sinónimo de incógnita”**

¿Podría ser la variable una incógnita? ¿Podrían ser los conceptos de variable e incógnita sinónimos? Pensado en una respuesta encaminada desde las matemáticas, no es posible que la variable y la incógnita sean lo mismo, o que por lo menos, lleguen a ser sinónimos; pues desde las matemáticas, tomamos la incógnita como un valor que es fijo pero el cual se desconoce, mientras que la variable trasciende el un lugar estático, para comprender un campo de variación, una mutabilidad, entre otros aspectos. La pregunta ahora sería: ¿Será que los estudiantes estaban confundiendo la variable con la incógnita? ¿O viceversa?

Esta acepción lleva el nombre de “Variable como sinónimo de incógnita”, pues desde los registros de clase, entrevistas y guías de trabajo que se realizaron con los estudiantes, y desde lo verbal, ellos manifestaron que la variable es un sinónimo de incógnita. Veamos, en este sentido, las afirmaciones de de Ana María:

Jadir: ¿Cuál crees que es la diferencia entre incógnita y variable?

Ana María: Variable es algo desconocido.

Jadir: ¿Incógnita, es algo que...

Ana María: ...Como una pregunta, ¿Me entiende? Uno se queda pensando.

Jadir: Algo que hay que responder. Algo que hay que encontrar

Ana María: Sí

Jadir: ¿Entonces esa es la diferencia

Ana María: Yo creo que no hay diferencia, son sinónimos.

Jadir: Variable e incógnita son sinónimos ¿Por qué?

Ana María: Porque sí, llevan a lo mismo.

Jadir: ¿Por qué es lo mismo?

Ana María: Porque vea, por ejemplo usted en un enunciado dice, hallar la incógnita, obviamente esa va a ser la variable.

(Ana María, entrevista, 7 de julio de 2009)

### Hablando sobre la diferencia entre variable e incógnita, Sergio dijo:

Sergio: Para mí existe diferencia entre variable e incógnita, porque una variable es una incógnita que hay que resolver, entonces es como una asociación que hay entre las dos.

Jadir: ¿Entonces, ¿Qué es variable y qué es incógnita?, ¿Cuál es la diferencia?

Sergio: Es que las dos son como sinónimos, una incógnita puede dar resultados determinados al igual que una variable

Jadir: O sea que cuando estás hablando de una variable, ¿Estás hablando de una incógnita?

Sergio: Sí, de una incógnita.

(Sergio, entrevista, 26 de junio 2009)

Tratando de encontrar una explicación del por qué los estudiantes afirman que variable es un sinónimo de incógnita, retomamos lo que Lanner y Sousa (2008, pág. 65) nos mencionan sobre el lenguaje, donde este es una forma de expresar y argumentar las construcciones que cada sujeto ha realizado, que está cargada de sentidos y significados culturales y sociales. Las autoras plantean tres formas de lenguaje que se pueden utilizar en la interpretación y construcción del concepto de variable, las cuales son:

a) Retórica o de las palabras (la palabra variable).

b) Sincopada, que mezcla palabras y símbolos (la variable como "numeral").

c) Simbólica (la variable como letra)".

Nos parece que cuando los estudiantes dicen que la variable es sinónimo de incógnita, es porque tienen toda una construcción basada en lenguaje que dice que ambos conceptos están estrechamente relacionados.

Cogollo (2006), en su trabajo de investigación realizado con estudiantes de séptimo grado, propuso tres categorías que responden a su inquietud con respecto a cómo es la interpretación de los estudiantes sobre el concepto de variable en actividades algebraicas. Dentro de estas categorías, se encuentra una llamada la "variable como *número escondido*, expresando que los estudiantes "le dan sentido a la variable como una *incógnita* que siempre hay que encontrar" (Cogollo 2006, Pág. 42), y es desde ese querer encontrar un valor que ellos llaman a la variable incógnita.

Consideramos que el hecho de los estudiantes tomen la variable como una incógnita o como un sinónimo de la incógnita, tiene su origen en las experiencias y ejercicios que se les presentan en las actividades propuestas, donde se le dan unos u otros significados a los símbolos y al procedimiento con los datos que se tienen. En ese sentido Lanner y Sousa (2008) mencionan la importancia de las experiencias que los estudiantes tengan fuera y dentro del aula de clase en la construcción de un concepto. Son, entonces, las experiencias y el cómo se manejan, las que permiten que se utilice un lenguaje específico para designar el significado de un concepto. Al respecto, Cogollo (2006, pág. 43) expresa sobre el sentido que los estudiantes dan a la variable como incógnita:

Este sentido que los estudiantes le dieron a la variable puede ser explicado porque nosotros como profesores acostumbramos a describir la  $x$  con un sinnúmero de palabras diferentes, como incógnita —dependiente o independiente—, letra, parámetro, casilla, etc., y, también, a que en la mayoría de las veces no las usamos apropiadamente, causando confusión entre los estudiantes.

Consideramos que son estas diferentes formas, desde los símbolos, en la mayoría de casos, el docente manifiesta un significado, las que pueden confundir al estudiante para referirse a lo que es una variable y una incógnita.

Viendo la importancia que tiene el lenguaje, como una forma de expresar y argumentar las ideas que cada sujeto tiene, en las construcciones que se

hagan del concepto de variable, Serrano (2005) expresa que para una manipulación del lenguaje en matemáticas, los estudiantes deben:

- Conocer el sistema de signos y reglas de la ciencia, teniendo como foco un reconocimiento de las expresiones, los gráficos y los símbolos que ella maneje.
- Hacer un uso de su lenguaje natural y de las representaciones que construyen de los objetos.

En lo que manifestaban los estudiantes, se percibió un reconocimiento de las expresiones que se usan en matemáticas, cuando se refieren a variables e incógnitas, pues son términos que son usualmente utilizados; es decir, los estudiantes hacían un uso del lenguaje matemático. Entonces, la pregunta ahora sería ¿Qué significado tenía para estos estudiantes la variable y la incógnita en un enunciado matemático, que las estaban confundiendo?

Con respecto al significado que los estudiantes pueden asignar a los conceptos, Duval (1999) nos habla de representaciones como esquemas mentales que los sujetos construyen para la comprensión de un objeto. Igualmente, este autor habla de sistemas de representaciones, como un conjunto de representaciones que tienen relaciones entre ellas y que están basadas en reglas específicas. A partir de lo planteado por Duval (1999) y de las experiencias más comunes que se tienen en el aula de clase, podemos decir que la representación de la variable y la representación de la incógnita se encuentran dentro de un mismo sistema de representaciones, siendo representaciones diferentes, pero que constantemente se traen a colación de una forma muy similar en las situaciones que se les proponen a los estudiantes. Son las situaciones a las que están acostumbrados los estudiantes, las que hacen que puedan confundir los conceptos de variable e incógnita. Un ejemplo de estas situaciones es: un número aumentado trece unidades es equivalente a 30; expresión que es muy parecida a: un número aumentado trece unidades es equivalente a otro número. Es claro que en ambas situaciones hay que hallar un valor, sin embargo la diferencia radica, básicamente, en que en el primer ejemplo el número del que nos habla el enunciado es una incógnita, y en el segundo los números de los que nos habla

el enunciado son variables (tiene un valor pero dentro de un campo de variación); pero en ambos hay que hallar algo que no se sabe.

En una segunda actividad realizada con los estudiantes, unida a lo expresado anteriormente, Sergio respondió:

Jadir: ¿Qué puedes decir de  $a$ ? si  $a+6=9$

Sergio: Puedo decir que  $a$  es igual a 3 porque  $a$  vale 3

Jadir: ¿Por qué?

Sergio: Porque  $3+6=9$

Jadir: ¿Cómo hallaste ese valor de  $a$ ? ¿Por tanteo? ¿Cómo lo hiciste? ¿Por qué dices que  $a$  vale 3?

Sergio: Porque el 6 pasa a restar al 9, y da el valor de la variable.

Jadir: Entonces ¿La  $a$  es la variable?

Sergio: Sí

(Sergio, conversación sobre la actividad 2, 12 de mayo de 2009)

La respuesta de Sergio no va muy lejos de esa confusión que pueden tener los estudiantes al referirse en forma verbal a la variable, pues como se ve en su respuesta, lo que hizo él fue hallar algo que no sabía.

Después de ver esta concepción que tienen los estudiantes de la “variable como sinónimo de incógnita”, consideramos que aunque los estudiantes pueden ver a la variable como un objeto que es mutable y que es dinámico (como se expresó en la “la variable como un número cualquiera”), ellos se confunden al mencionarlo en su lenguaje natural, pues las situaciones en las que se les presentan ambos conceptos son muy parecidas.

### 6.1.3. “Variable como una representación de la letra”

En la concepción presentada anteriormente sobre el significado que los estudiantes dan a la “variable como sinónimo de incógnita”, se expresaba la importancia de las experiencias que tienen los estudiantes para que puedan tener una interpretación u otra de un concepto. La concepción de “variable como representación de la letra”, es la resultante de analizar algunas expresiones mencionadas por los protagonistas de la investigación, donde, teniendo aun presente el concepto de fluencia que transversaliza al concepto de variable, hay una concentración en la letra por parte de los estudiantes, donde se prioriza su simbolización.

En la entrevista realizada a la estudiante Ana María se habló de la segunda guía de trabajo, la cual se realizó en el aula de clase, donde se encontraba un problema que preguntaba por el número de personas en una hora específica (observar anexo 1), donde la estudiante respondió:

Jadir: Si de pronto yo te dijera que esta expresión que hay acá  $n \cdot n + 1$  sobre 2 tiene algún tipo de relación con lo que yo te estoy pidiendo ¿Tú cómo lo comprobarías?

Ana María: También reemplazando

Jadir: ¿Reemplazando qué?

Ana María: La cantidad donde está la variable

Jadir: Y ¿Quién es la variable en este momento?

Ana María:  $n$

Jadir: ¿Por qué  $n$ ?

Ana María: Porque es la letra que está representando lo que no se sabe y lo que no se sabe es cuántas personas van a ir al bazar, en las horas que este está abierto.

(Ana María, entrevista, 7 de julio de 2009)

En este punto podemos retomar a Alonso et al. (1993) cuando nos hablan de los componentes de la variable: la simbolización y la generalización.

En la respuesta dada por Ana María, muestra que reconoció de la variable en la expresión algebraica y tuvo en cuenta lo que ella representaba; de esta forma, la estudiante dio cuenta de una idea de variable que no se limita a la simbolización, pues aunque sabía que ésta representaba algo, ese algo se refería a un conjunto de valores que se pueden tomar.

Por otro lado, en el siguiente aparte de la entrevista realizada a Verónica, se pudo percibir el énfasis dado por la alumna a la parte simbólica, donde la variable, como tal, se limitó a ser una letra, una letra de la cual no se sabía el valor; pero primordialmente la letra representaba un símbolo:

Jadir: ¿Cómo sabe usted cuándo algo es una variable en un enunciado?

Verónica: Pues una variable es por ejemplo  $a$  y  $b$ , ¿sí me entiende?, varía

Jadir: ¿Cuándo son qué?, ¿Letras?

Verónica: Letras

Jadir: ¿Qué letras? ¿La  $a$  y la  $b$ ? ¿Solamente?

Verónica: La  $y$  la  $m$ , cualquier letra.

Jadir: Entonces ¿Cuál es la relación o diferencia entre ese algo que no se sabe y esas letras que usted dijo que eran la variable?

Verónica: Pues que la incógnita no se sabe, y la variable tiene una letra respectiva.

(Verónica, entrevista, 7 de julio de 2009)

En ese sentido Alonso et al. (1993, pág. 78) hacen la siguiente observación:

La introducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico no se realiza de una manera automática, incluso conociendo y comprendiendo ambos. El origen de los errores es doble: por un lado los errores vienen de la estructura e interpretación de las expresiones algebraicas, pero encontrar la expresión simbólica adecuada para trasladar el significado del enunciado al nuevo lenguaje es una tarea distinta y que requiere, además del conocimiento adecuado de la estructura y la sintaxis algebraica, un entrenamiento específico en esta dirección.

Retomando lo dicho por Alonso et al. (1993), esa introducción del lenguaje simbólico no es fácil, y es el cómo se manejan las experiencias (como lo hemos dicho en párrafos anteriores) de los estudiantes, las que contribuirán a que ellos construyan una interpretación y procuren una comprensión de los símbolos que utilizan en las expresiones algebraicas. En la respuesta dada por Verónica, se hizo visible una utilización de símbolos, aspecto importante en el aprendizaje y manipulación del álgebra. Pero llamamos la atención a que la parte simbólica sola no permite vislumbrar lo que abarca la variable, su otra parte, la generalización completa el sentido de la misma. El pensar en las variables sólo como letras, da cuenta de una dificultad en la comprensión del concepto que repercute en la construcción de su significado.

El pensar en la variable como sólo una letra puede traer sus complicaciones, pues desde lo propuesto por Mason et al. (1985), citado por Alonso et al. (1993), se llama la atención frente a los pasos para llegar a comprender la generalización, ellos son:

- a. Ver: hay que distinguir entre lo que es propio de cada situación y lo que es común a todas ellas, lo que no varía. Observando las regularidades, se hace más fácil el hecho de ver reglas de formación de figuras que viendo los números solos, pues esto último requiere de un proceso más abstracto.

No hay que olvidar que “la generalidad es una actividad continúa en la actividad intelectual y se da a todos los niveles” (Alonso et al., 1993, pág. 36), por tanto es una labor inacabada, que dependiendo de las situaciones, le exige más y más al estudiante.

- b. Describir

Según Alonso et al, (1993, Pág.37):

Esta descripción en el lenguaje natural es un paso que se da habitualmente al generalizar, y que permite posteriormente expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido. Con la expresión oral se trata de comunicar lo que se ha visto, la regularidad, el modelo detectado.

Hay que tener presente que la descripción ayuda a la verificación de hipótesis mentales que los alumnos estén haciendo y, por tanto, a la construcción de las representaciones que ellos vayan construyendo del concepto.

Estos autores enfatizan que expresarse no es fácil, deben propiciarse las condiciones necesarias, en cuestión de ambientes de trabajo y espacios, para que por medio de la discusión puedan ser productivas las descripciones que los estudiantes hacen sobre lo que vieron.

### c. Escribir

En este sentido, (Alonso et al., 1993, pág. 38) dicen "...el estudio de la generalización dentro del aprendizaje del álgebra tiene como objetivo la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones que se observan..." Es decir, es muy importante el registro simbólico que se hace, ya que es una abstracción más elaborada de los procesos anteriores, pues requiere de una buena comprensión, tanto desde la parte oral como desde la parte de la descripción, del objeto que se está trabajando. Sin embargo, consideramos que este no se debe quedar solo ahí, siempre hay que acompañarlo de la parte descriptiva, para dar un mayor sentido.

Al priorizar el símbolo de la variable, los estudiantes pueden tener una concepción de la variable como letra, que aunque puede mostrar un poco de lo *dinámico* de la variable, se basa en una interpretación de la letra como la inicial de alguna palabra simbolizada. Esto lo pudimos evidenciar en una de las conversaciones que sostuvimos con Verónica, ella hablaba sobre el ejercicio de primera guía (ver el numeral 9 del anexo 2), respondiendo:

Jadír: ¿100 personas dónde?

Verónica: Arriba

Jadír: ¿Y 100 dónde más?

Verónica: Abajo y a los lados 2

Jadír: Cuando es cualquier cantidad de personas ¿Cómo lo haría?

Verónica: Depende de la cantidad de personas

Jadir: ¿Y si no tienes el número de personas entonces cómo lo harías?, es decir, cuando son 2 mesas son 2 arriba 2 abajo y 2 a los lados, cuando son 3, 3 arriba, 3 abajo y 2 a los lados y cuando son 100, 100 arriba, 100 abajo y 2 a los lados, cuando son  $n$  entonces ¿Cómo es?

Verónica: Arriba nada y abajo nada

Jadir: ¿Y a los lados cuánto?

Verónica: Nada

Jadir: ¿Nada?

Verónica: Porque es  $n$ , entonces uno no sabe cuántas son.

(Verónica, entrevista, 7 de Julio de 2009)

Desde lo dicho por Verónica, pudimos interpretar ese “nada”, como algo que está representado por la “ $n$ ”, deteniéndose en una interpretación de la letra, que aunque está cambiando, representa la inicial de la palabra. De la misma forma, podría presentarse que los estudiantes puedan interpretar una variable “ $m$ ” como mesas y no, por ejemplo, como el número de mesas.

Este aspecto de la variable como una letra, atraviesa, por así decirlo, las representaciones y las transformaciones de esas representaciones que los estudiantes construyen. Con respecto a esto, Duval (2004) plantea que hay dos tipos de transformaciones que se pueden realizar a las representaciones.

Recordemos que, según este autor, las representaciones son esquemas mentales que los sujetos construyen para comprender un objeto, y que ellas se agrupan en sistemas de representaciones unidas por unas reglas y relaciones. Por ejemplo, podemos tener un sistema de representaciones donde se encuentran los enunciados matemáticos, donde cada enunciado está representando una situación y que tienen unas reglas de redacción que todos los enunciados deben cumplir, y por otro lado, tenemos el sistema de representaciones que comprende la simbolización de dichos enunciados. Pasar del enunciado a la expresión algebraica, ejercicio que se pide con frecuencia en las actividades matemáticas, implicaría hacer una transformación de una representación a otra que están en sistemas de representaciones diferentes, llamándole a esta transformación: conversión. Pero hacer este tipo de transformaciones no es tan fácil como parece, pues se debe tener muy claro que es lo qué se está representando, cuál es el objeto que se está trabajando y manejar bien los sistemas de representaciones.

El ver la variable como una letra, y ver esa letra como la inicial de una palabra, nos hace pensar sobre el hecho de que no se tenga muy claro el objeto que se está representado, en este caso sería el concepto de variable, teniendo repercusiones reflejadas en malas conversiones o interpretaciones de conversiones que no son.

## 6.2. “DE LAS ACTIVIDADES DE CLASE A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE”

Esta categoría ha sido llamada “*De las actividades de clase a la construcción del concepto de variable*”, pues es en esta categoría donde se muestra, como desde algunas actividades en la clase de matemáticas, los estudiantes interpretaron y (re)significaron el concepto de variable.

Esta categoría se divide, básicamente, en dos partes: en la primera trataremos de discutir un poco lo que comprendemos por actividad; y en la segunda parte discutiremos la relación de las actividades con la construcción del concepto de variable en los alumnos.

### **Sobre la actividad**

Dentro del ambiente de clase, es muy común decirle a los estudiantes que se preparen para hacer una actividad, pero en muchas ocasiones la actividad se limita a realizar ejemplos o proponer ejercicios que ilustren lo que se ha trabajado en clase.

Durante el diseño de lo que en un principio llamamos talleres y luego se convirtieron en actividades, encontramos toda una teoría que la fundamenta, y que se denomina “Teoría de la Actividad”.

En primer lugar quisiéramos mencionar la concepción que tiene Moura (2009, pág. 1) del maestro, veamos:

Ser profesor es necesariamente transformar a otra persona, cambiar su modo de ser y actuar creemos que el sujeto, que es fruto de nuestra acción educativa, va a adquirir un cierto conocimiento que le va a capacitar para actuar de una determinada forma en el medio en el que viva. Su aprendizaje le va a capacitar para comprender algún fenómeno de alguna forma. Y esto le va a permitir usar ese nuevo conocimiento para impactar la realidad.

A partir de lo dicho por Moura (2009) el hecho de ser maestros es tan impactante en nuestros estudiantes, que permite generar en ellos un cambio. Podríamos hablar en este punto de una dialéctica (este concepto se explicará con mayor profundidad en la próxima categoría), donde el estudiante es

transformado por la relación que establece con el maestro y, a su vez, el maestro es también transformado por el estudiante. Recalcamos que estas transformaciones que se generan, en esa relación entre el maestro y el estudiante, no sólo el estudiante modifica su pensamiento y su forma de actuar en ciertas situaciones gracias a los conocimientos que ha adquirido, de la misma forma, el maestro se transforma como sujeto que interactúa con otro sujeto. Al respecto Moura (2009, pág. 2) dice:

Es claro que en la sociedad las múltiples interacciones son situaciones de enseñanza y aprendizaje. Basta con integrarnos para que tengamos aprendizajes. En la interacción, compartimos significados. Modificamos la realidad cognitiva de los sujetos con quienes nos integramos y al mismo tiempo estamos sufriendo alteraciones en nuestros esquemas cognitivos en el esfuerzo de producir síntesis que posibiliten comunicar nuestras interacciones.

Vemos, desde Moura, la importancia que tienen las interacciones del sujeto con todo y todos los que lo rodean. Desde este punto de vista, para que como maestros generemos transformaciones, y las interacciones que el estudiante tenga con el maestro, y el maestro con el estudiante, sean significativos, se hace necesario que el maestro piense en acciones intencionadas para desarrollar con el estudiante. Relacionado con este aspecto, Moura (2009, pág. 2) expresa:

Tener la profesión de profesor es organizar situaciones cuyos resultados son las modificaciones de los sujetos a quien intencionalmente queremos modificar.

El profesor organiza sus acciones de algún modo para vincular un contenido. La didáctica es un elemento de la formación del profesor. Regula, en un sentido amplio, el comportamiento de ser profesor.

Y organizar la enseñanza es tener presente cuales son los elementos constitutivos de la actividad de enseñar. Esto es, el profesor precisa adquirir consciencia de los varios factores presentes en el acto de enseñar.

[...] Otro aspecto que influencia el modo en que se organiza la enseñanza es la comprensión sobre las finalidades de lo que se aprende. El modo como miramos el mundo y lo concebimos puede definir los fines del conocimiento que buscamos a cada momento.

Hay que prestar atención a la realidad del alumno considerando los elementos culturales que pueden ser importantes factores a ser considerados en la organización de la enseñanza (D'Ambrósio, 1986; Bruner, 1997). La relevancia sobre los aspectos psicológicos, en el caso del aprendizaje de la matemática, debe tener especial atención.

De esta forma, Moura habla de las actividades que se hacen en el aula de clase, como acciones que tienen toda una intencionalidad, que están bien pensadas por el maestro y que están en concordancia con el contexto del estudiante.

Pensando en esta concepción que plantea Moura, el diseño de las actividades que se presentaron durante la etapa de recolección de datos, tuvieron los siguientes aspectos:

1. Intencionalidad: cada ejercicio y situación que se propuso tenía un objetivo puntual, el de analizar el proceso de construcción del concepto de variable, desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico; por tal razón, se plantean actividades desde la parte simbólica, para ver las interpretaciones que hacían los estudiantes de las letras que se les presentaban y como las (re)significaban en el lenguaje natural, y se planteaban actividades desde el lenguaje natural, para ver que interpretaciones hacían de las situaciones presentadas y cómo las (re)significaban a partir de símbolos.

De la misma forma, la intención de las actividades era que los estudiantes se sintieran motivados a realizarlas, en el sentido de ver la importancia que mostrábamos para llevarles actividades nuevas y diferentes al aula de clase, donde no fueran actividades a “blanco y negro” llenas de preguntas, sino que por el contrario estuvieran, desde una parte visual, dispuestos y atraídos a realizarlas.

Hay que mencionar, igualmente, que cada numeral de las actividades fue diseñado pensando en las posibles respuestas que los estudiantes podían planear, de forma que las respuestas si nos pudieran ayudar a responder nuestra pregunta de investigación.

2. Contextualización: cada ejercicio y situación que se propuso, tenía muy presente el contexto, se propusieron situaciones que se acercaron a las vivencias que podían tener los estudiantes en su cotidianidad.

### **La relación de las actividades con el concepto de variable**

Teniendo presente los aspectos anteriormente mencionados, construimos las siguientes actividades:



Institución Educativa Ramón Mármora Lopez

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Actividad 1



Nombre: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_

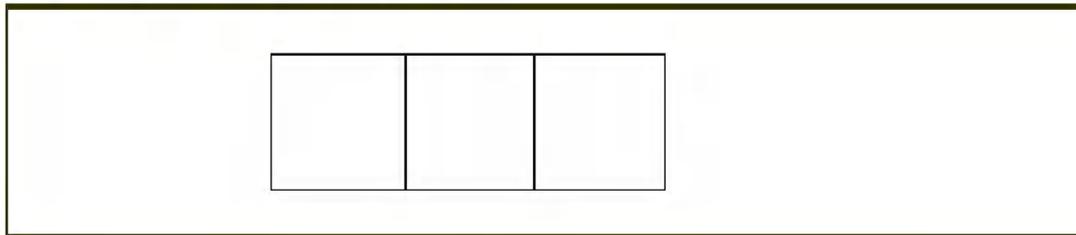
Fecha: \_\_\_\_\_

- Objetivo: Identificar, representar e interpretar las variables en una situación determinada.

Laura cumplirá 15 años, para esto sus padres alquilaron el salón de la acción comunal. Con el alquiler del salón prestaron 50 mesas cuadradas.

Los padres de Laura al ver el espacio tan pequeño pensaron en ubicar las mesas unidas por un lado (como indica la figura y a modo de ejemplo) alrededor del salón, con el fin de poder bailar en el centro del mismo. Como el salón es pequeño, los padres deben saber cuántas personas podrían invitar, donde se incluyan familiares y amigos de Laura.

Hay que tener en cuenta que solo una persona se puede sentar por cada lado de la mesa, para que los invitados no se sientan incómodos.



Para ayudar a los padres de Laura en los preparativos, realice las siguientes actividades:

1. Haga un dibujo de cómo deberían ir distribuidas las mesas en el salón
2. Si fuera una mesa, ¿cuántas personas se podrán sentar?
3. Si fueran dos mesas, ¿cuántas personas se podrán sentar?
4. Si fueran tres mesas, ¿cuántas personas se podrán sentar?
5. Si fueran diez mesas, ¿cuántas personas se podrán sentar?
6. Como son 50 mesas ¿cuántas personas se podrán sentar y así poderlas invitar?
7. Dado el caso que los padres de Laura alquilaran un salón más grande, donde se pudieran distribuir de la misma forma 103 mesas, ¿cuántas personas se podrían invitar?
8. Escriba una expresión que indique cuántas personas se pueden invitar a una fiesta, donde se puedan distribuir cualquier número de mesas.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA RAMÓN MÚNERA LOPERA  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN



NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_  
GRADO: \_\_\_\_\_

### ACTIVIDAD No.

Objetivo: Identificar e interpretar la variable en diferentes situaciones.



1) Si se tiene que  $a+b=34$ , entonces qué podrías decir de  $a+b+3=$

2) Si se tiene que  $e+f=9$ , entonces qué podrías decir de  $e+f+g=$

3) ¿Qué puedes decir de  $a$ , si  $a+6=9$ ?

4) ¿Qué puedes decir de  $u$ , si  $u=v$  y  $v=2$ ?

5) Escribe una expresión algebraica para los siguientes enunciados:

a) añade  $4a$   $5n$

b) suma  $4a$   $5n$

c) aumenta  $4a$   $5n$

6) ¿Quién es mayor entre  $3n$  y  $n+3$ ? Explique

7) Si en la expresión  $c+d=11$ ,  $c$  es mayor que  $d$ , ¿Qué podrías decir de  $C$ ?

8) ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad?  $L+n+m=L+p+m$

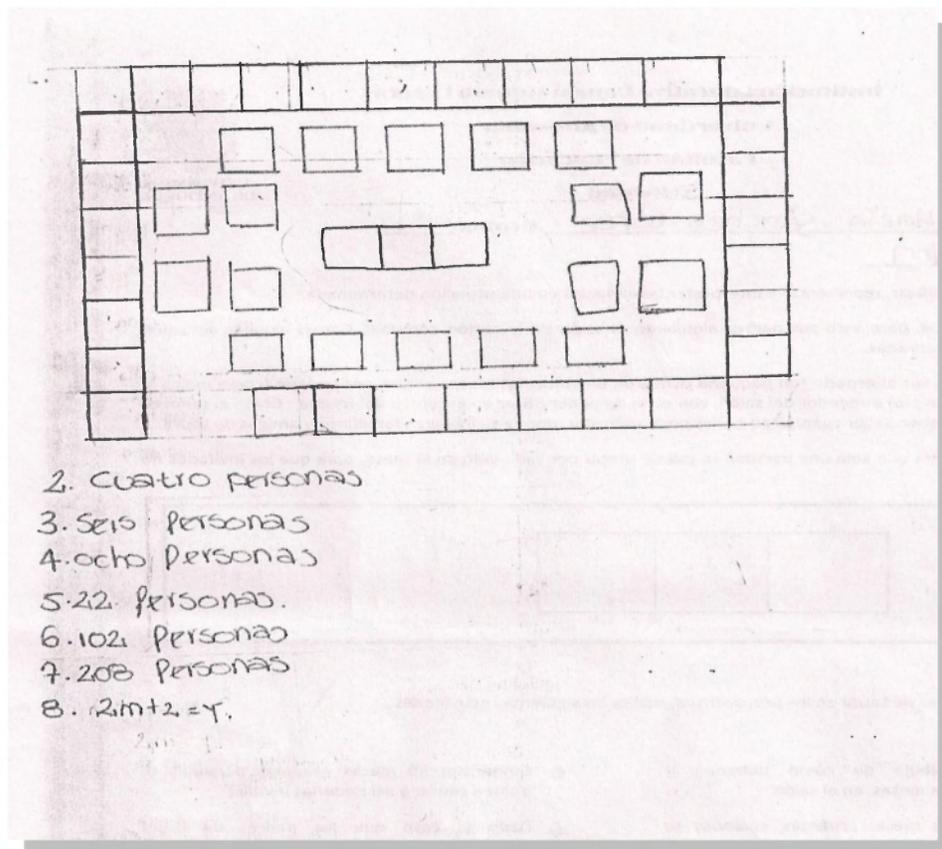
9) Resuelve la siguiente situación:



En una rifa que se hizo en el colegio, donde participaron todos los grupos, el ganador fue 9-1. Este grupo será premiado con dulces. El director quiere saber cuántos dulces debe comprar si a cada estudiante se le dará el número de dulces igual al número que cada uno sea en la lista del director de grupo (ejemplo: el estudiante que sea el número uno en la lista se llevará un dulce, el estudiante que sea el número 20 se llevará 20 dulces) ¿Cuántos dulces deberá comprar el director del colegio para que los 50 estudiantes de 9-1 tengan el número de dulces respectivo? Si fuera un grupo de 100 estudiantes ¿Cuántos dulces deberá comprar el director? Si fuera un número cualquiera de estudiantes ¿Cuántos dulces debería comprar el director?

El interés en el planteamiento de las actividades iba mucho más allá de que los estudiantes arrojaran respuestas sobre las preguntas que les hacíamos. Nos interesaba saber el por qué de las respuestas, y de ahí que las actividades no se terminaran cuando se acababa la clase matemáticas, pues después de cada actividad se realizaban conversaciones sobre las respuestas que los protagonistas habían expresado. Las conversaciones, así como las actividades, tenían su intencionalidad, pues estas nos permitirían ver la dialéctica entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural, reflejándose en las expresiones que utilizaban tanto desde lo verbal como desde lo escrito.

La respuesta escrita de Ana María al numeral 8 de la primera actividad fue la siguiente:



(Ana María, actividad 1, 21 de abril de 2009)

A partir de lo escrito, en la conversación Ana María argumenta:

Natalia: La quinta pregunta dice que si fueran 10 mesas, cómo hiciste para llegar al cálculo que eran 22 personas

Ana María: Pues solamente dándole lógica, imaginándome las 10 mesas, entonces serían 10 personas arriba, 10 abajo y dos a los lados

Natalia: El sexto punto dice que contextualizando con el problema que eran 50 mesas, cuántas personas se podrían invitar a la fiesta, y dijiste que 102 personas. ¿Por qué?

Ana María: También por lo mismo, sería las mismas 50 arriba y las 50 abajo y las de los lados

Natalia: Y la de 103 que era el séptimo punto

Ana María: También igual

Natalia: La última te pide una expresión que responda cuantas personas se pueden invitar si son 1000 mesas, 5000 mesas o cualquier número de mesas, cuántas personas podrían invitar.

Para ello tu planteaste esta expresión algebraica que dice  $m+m=y$

Ana María: Bueno yo la hice  $m+m$  porque sería  $m$  el lado de la mesa de la parte de arriba y la otra  $m$  por la misma situación y la  $y$  es la suma de todo

Natalia: Listo, pero te hago una pregunta, ¿ $m$  que significa acá?

Ana María: Pues sería el número de personas se pueden sentar

Natalia: Entonces ¿ $y$  qué es?

Ana María: No, es al contrario  $m$  serían las mesas y  $y$  las personas

Natalia: Entonces ¿Cómo sabrías con cualquier número de mesas, el número de personas que se pueden invitar?

Ana María: Pues reemplazando en la expresión, ya te dije.

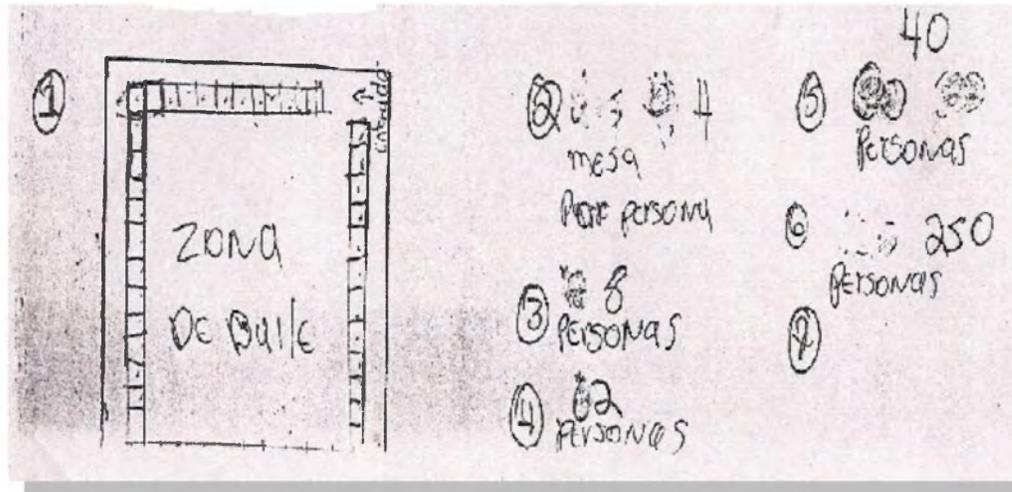
Natalia: ¿Y en los puntos que ya vimos la respuesta sí es verdadera?

Ana María: ... me acabo de dar cuenta que no, pues me faltó colocar las personas de los lados, entonces la expresión debe ser  $m+m+2=y$ , que sería lo mismo que  $2m+2=y$

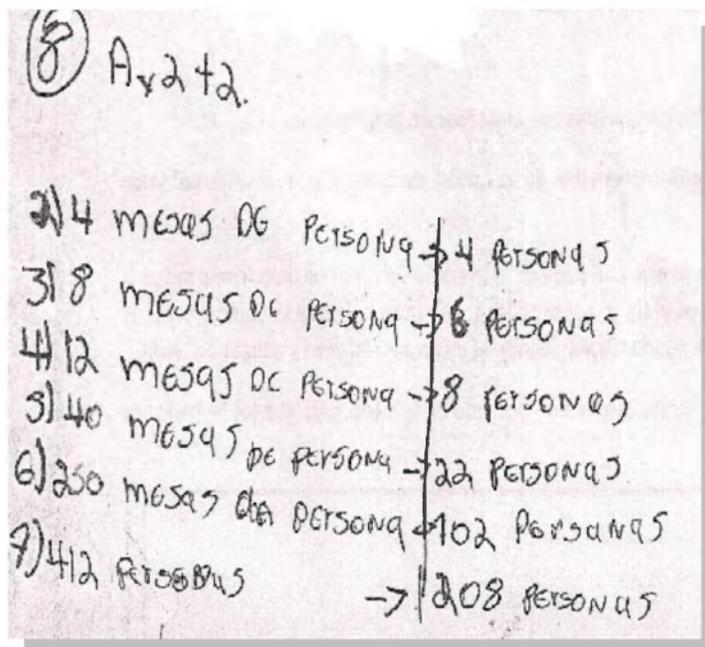
(Ana María, conversación sobre actividad 1, 21 de abril de 2009)

Los lectores podrían confundirse al ver este dato que se presenta, pues en la evidencia escrita aparece que Ana María mostró la expresión algebraica que se le estaba solicitando:  $2m+2=y$ . Pero cuando comenzó la conversación, ella dijo que  $m+m=y$ . Podríamos decir que aunque se hizo la socialización en el grupo, y ella estaba muy segura de su respuesta, en el momento en que se estaba haciendo la conversación, ella tuvo en cuenta que la respuesta que había dado no era la correcta, y al terminar la conversación cambió la respuesta escrita.

Algo parecido a lo que pasó con Ana María, pasó con Sergio, pues en la parte donde respondía las preguntas de forma escrita respondió de una forma, y en la conversación (re)significó su respuesta. Aclarando lo anterior, la siguiente respuesta es la expresada por Sergio, en el punto 8 de la primera actividad, cuando se le pidió que diera una expresión de la situación cuando fuera un número cualquiera de mesas.



(Sergio, actividad 1, 21 de abril de 2009). Esto fue antes de la conversación (ver anexo 3).



(Sergio, actividad 1, 21 de abril de 2009). Esto fue después de la conversación.

Desde la respuesta escrita de Sergio, en la conversación él argumentó:

[...] Esteban: Cuando yo te preguntaba por las 50 mesas tu me dabas un número, cuando te preguntamos si eran 103 mesas nos dabas otro número. Entonces yo ahora te pregunto por una expresión que me indique cuántas personas debo invitar dependiendo del número de mesas que yo tenga, es decir, por ejemplo, si yo tengo 200 mesas ¿Cuántas personas debo invitar?

Sergio: En el ejemplo que usted da se pueden invitar 402 personas

Esteban: Muy bien, ¿Por qué?

Sergio: Por lo que dije ya ahorita, se multiplica por 2 y se le suman 2

Esteban: Bueno, entonces en el numeral 8, te estamos pidiendo una expresión que me indique lo que me estás diciendo con tus palabras ¿Cómo lo harías?

Sergio: Entonces yo diría  $a*b+2$

Esteban:  $a*b+2$  entonces ¿Qué sería  $a$ ?, ¿Qué sería  $b$ ?, y ¿Por qué  $a*b$ ?

Sergio:  $a$  llegaría a ser el número de mesas y  $b$  las personas que vayan a asistir más 2 que sean los de los extremos

Sergio: ...pero espera, porque  $a$  llegaría a ser el número de mesas por 2 porque es de los de arriba y los de abajo, más 2 que se van a sentar a los extremos entonces sería  $a*2+2$

Esteban: En esta expresión, ¿Cuál sería la variable?

Sergio: La  $a$

Esteban: La  $a$ . ¿Por qué sería esa la variable?

Sergio: Porque se puede reemplazar por cualquier número de mesas.

(Sergio, conversación sobre actividad 1, 21 de abril de 2009)

Para efectos de la investigación, el que los estudiantes (re)significaran sus respuestas fue importante, pues además del cambio que se produce en el estudiante en el momento de hacer una socialización más directa y personalizada, permitió vislumbrar que desde algunas situaciones planteadas intencionalmente, a los estudiantes se les hace más fácil llegar a la simbolización de una generalización.

En los estudiantes, desde los ejemplos vistos, se pudo percibir un “deseo” por crear una expresión que contuviera la variable que habían encontrado en la situación. Este “deseo” de escribir una expresión algebraica, vislumbra una idea de variable, de una variable que está simbolizada por medio de una letra, y que representará un número cualquiera, un valor dentro de un campo de variación como se mencionaba en la primera categoría. Igualmente, se pudo percibir, como algunos estudiantes, aunque ligaron mucho la variable a la letra que simboliza la misma<sup>8</sup>, la asumían como una instancia que cambia y que tenía un cierto grado de imprevisibilidad.

Así mismo, desde las actividades se pudo ver que los estudiantes hicieron una construcción e identificación del concepto de variable, pues si bien es una letra, es una letra que representa un número cualquiera, dentro de situaciones cuantitativas como las presentadas en dichas actividades. Estas variables que

---

<sup>8</sup> Como lo menciona Cogollo (2006) en su texto los estudiantes pueden ver la variable como una cosa, es decir, si la variable es  $m$ , eso quiere decir que se está hablando de mesas y no, por ejemplo, de un número cualquiera de mesas. Desde este aspecto, la letra, más que una variable en una situación, es una letra que me representa un objeto.

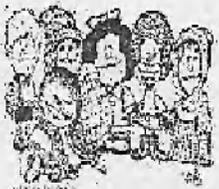
los estudiantes identificaron cobraron un significado, pues las actividades posibilitaron “crear” un ambiente que es familiar para el estudiante, que les permitieran hacer un reconocimiento de las mismas. Al respecto Morales y Díaz (2003) manifiestan:

Según Wagner, los símbolos para las variables matemáticas adquieren un significado cuando aparecen en un contexto y representan algún referente. El símbolo y su referente determinan el papel semántico de una variable. El símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable [...] Esto es, el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable.

De esta forma, Morales y Díaz (2003) apoyan la idea de presentar a los estudiantes actividades intencionadas, donde las variables presentadas en estas actividades, representan situaciones específicas que están contextualizadas, de manera que los estudiantes puedan, con mayor facilidad, interpretar e identificar las variables que se les presenten.

Como último ejemplo de esta categoría, presentamos la respuesta dada por Sergio en la actividad 2, expresando de forma escrita:

**9)** Resuelve la siguiente situación:



En una rifa que se hizo en el colegio, donde participaron todos los grupos, el ganador fue 9-1. Este grupo será premiado con dulces. El director quiere saber cuantos dulces debe comprar si a cada estudiante se le dará el número de dulces igual al número que cada uno sea en la lista del director de grupo (ejemplo: el estudiante que sea el número uno en la lista se llevará un dulce, el estudiante que sea el número 20 se llevará 20 dulces) ¿Cuántos dulces deberá comprar el director del colegio para que los 50 estudiantes de 9-1 tengan el número de dulces respectivo? Si fuera un grupo de 100 estudiantes ¿Cuántos dulces deberá comprar el director? Si fuera un número cualquiera de estudiantes ¿Cuántos dulces debería comprar el director?

1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51
9	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	-

141	105	78	42
132	96	69	33
123	99	60	24
114	87	51	15
510	387	258	9
510			123
387			
258			
123			
275			

4	70	80	90
60	71	81	91
61	72	82	92
63	73	83	93
64	74	84	94
65	75	85	95
66	76	86	96
67	77	87	97
68	78	88	98
69	79	89	99
62	743	843	943
43			

210	1043	643	843	743
3372				
1275				
4550	5050			

Al respecto, Sergio expresó en su oralidad lo siguiente:

Jadir: y ¿Cómo hiciste el cálculo en el octavo punto?

Sergio: Sumando todos los números, simplemente no me sabía la formula, entonces me tocó.

Jadir: ¿Por tanteo?

Sergio: Sí, por tanteo

Jadir: Entonces, el siguiente punto dice, si fuera un grupo de 100 estudiantes, ¿cuántos dulces debería comprar el director?

Sergio: 54000. Ah, no, vea 50050

Jadir: ¿Cómo lo hiciste?

Sergio: Por suma, sume ya los resultados

Jadir: Entonces por tanteo.

Sergio: Sí.

Jadir: OK, entonces la pregunta que sigue es: si fuera un número cualquiera de estudiantes ¿Cuántos dulces debería comprar el director? No son ni 50, ni 15, ni 100 sino, son cualquier numero ¿Cómo lo harías?

Sergio: Sabiendo la formula, simplemente reemplazaría el número que sea y sabría la cantidad de dulces, pero no sé cómo construir la formula.

Jadir: Y supongamos que son 200 estudiantes ¿Cómo lo harías?

Sergio: Reemplazaría 200 en la letra variable de la formula y ya.

(Sergio, conversación sobre actividad 2, 12 de junio de 2009)

Así como en los ejemplos anteriores, Sergio comenzó a identificar la variable; después de identificarla, creó una especie de algoritmo que respondiera las preguntas que se le hicieron, tratando de llegar a una expresión algebraica que se cumpliera para cualquier número. Desde este punto, se puede decir que hay, como ya se mencionó, un (re)conocimiento de la variable como campo de variación donde, se tiene una posibilidad e alguna imprevisibilidad.

Como ya hemos dicho, las actividades son acciones que tienen una intencionalidad y que están pensadas para un contexto específico.

Con respecto a las actividades que la maestra realizaba dentro del aula de clase, ella nos expresó:

He implementado actividades en las que el estudiante, bien sea en grupo o a nivel individual, deba recurrir a su bagaje matemático para resolver la situación planteada. Por ejemplo, actividades de identificación de magnitudes constantes y variables; actividades de relación tanto de semejanza como de diferencia entre ambas; actividades en las que el alumno deba expresar algebraicamente un enunciado dado en lenguaje natural; actividades de representación gráfica (en el sentido amplio). Todas ellas deben ser argumentadas y luego socializadas.

(Claudia, entrevista, 11 de agosto de 2009)

Es notable que la maestra tiene una intencionalidad a la hora de plantear las actividades, en ellas se refleja un interés porque el estudiante tenga una comprensión conceptual, vea aplicaciones, y las diferentes representaciones. De ahí que la maestra tenga en cuenta tanto el lenguaje natural como el lenguaje simbólico que el estudiante maneja, expresando:

[...] Tengo presente el llevarles a los estudiantes situaciones propias de su contexto que les permita crear relaciones con el concepto y hacer sus propias construcciones. [...] En la misma línea, pienso en situaciones que sean significativas para ellos y en las que, por medio de preconceptos matemáticos que ellos posean, los estudiantes vean la necesidad de generalización para representar la situación planteada. Ambos tipos de situaciones, que en realidad van interconectadas, las presento con diferente grado de dificultad, a fin de movilizar en ellos diferentes procesos de razonamiento.  
(Claudia, entrevista, 11 de agosto de 2009)

En la respuesta de la maestra notamos un interés por despertar en los alumnos, o más bien mostrarles, la necesidad que se tiene de generalizar, por medio de situaciones concretas donde ellos, identificando patrones y regularidades lleguen a una expresión algebraica.

Con respecto al reconocimiento de patrones, MEN (2003, pág. 67) expresa:

[...] El estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. [...] Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado.

Igualmente, el reconocer esos patrones y generalidades trae implícito el estar pensando en una variable, pues como ya se ha mencionado, la variable, desde Lanner y Sousa (2008), implica el re-conocimiento de la fluencia, entendida como mutabilidad y dinamismo. Esos patrones y regularidades que los

estudiantes pueden encontrar, estarán ligados, de alguna forma, a la mutabilidad de las situaciones, pues al haber un movimiento o un cambio, el estudiante comienza a identificar aspectos que se pueden repetir, para llegar a un campo de variación donde puede tener unas posibilidades e imprevisibilidad en los resultados que se pueden obtener. Al respecto, la maestra respondió al ser indagada por la enseñanza del concepto de variable:

El concepto de variable es importante trabajarlo porque es el concepto base para el concepto de variación. Es la esencia para la comprensión de la existencia de magnitudes que cambian; es la primera aproximación que hacemos en el camino del entendimiento de que todo en nuestro entorno, es cambiante, es modificable.

(Claudia, entrevista, 11 de agosto de 2009)

### 6.3. “DIALÉCTICA ENTRE LENGUAJE NATURAL Y LENGUAJE SIMBÓLICO”

Esta categoría la hemos llamado “*dialéctica entre lenguaje natural y lenguaje simbólico*”, pues es en este capítulo donde expresaremos cómo es que se da esa dialéctica entre lenguaje natural y el lenguaje simbólico, posibilitando que se haga una construcción del concepto de variable.

Ya hemos mencionado la influencia de las actividades de clase y de las experiencias que los estudiantes tienen en la construcción que realizan de un concepto. Será entonces en esta categoría donde se explicita la influencia del lenguaje, tanto del lenguaje natural como del lenguaje simbólico, en los significados y sentidos dados por los estudiantes en su proceso de construcción de los conceptos.

Esta categoría nació como el resultado de analizar algunas respuestas que los estudiantes dieron a las actividades, tanto desde la verbalidad como desde su escritura, pues a partir de la comparación de estas dos formas de expresión que manifestaron los estudiantes, se pudieron encontrar algunas similitudes, algunas dificultades y algunas apreciaciones interesantes que permitieron vislumbrar construcciones que los estudiantes habían hecho del concepto del variable.

Para comenzar esta categoría, se hace necesario que definamos y re-signifiquemos lo que son los tres elementos básicos que la constituyen:

- Lenguaje natural;
- Lenguaje simbólico; y
- Dialéctica

Al (re)significar los tres elementos antes mencionados, podremos realizar un análisis más profundo, con respecto a esa dialéctica que hay entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico en la construcción del concepto de variable.

## **Lenguaje natural y lenguaje simbólico**

En el diccionario de la Lengua Española PLUS (2000, pág. 456) definen el lenguaje como “Capacidad adquirida del hombre para expresarse con sonidos articulares. Lengua o conjunto de palabras con que se expresa en un país o nación. Manera específica de hablar de determinado grupo de personas”. En esta definición menciona que este se puede definir como una lengua o conjunto de palabras. En el mismo diccionario, PLUS (2000, pág. 456), se define lengua como:

“sistemas de signos lingüísticos que utiliza una comunidad social para su comunicación”.

Podríamos decir entonces, desde las definiciones de la Lengua Española, que el lenguaje, además de posibilitar al hombre o a una comunidad para expresarse, es el conjunto de signos y símbolos que utilizan para tal comunicación.

Al respecto, sobre el significado de lenguaje, Serrano (2005) menciona que el lenguaje está compuesto por dos partes: la lengua y el habla. Desde la parte de la lengua, el autor expresa que ella es una propiedad social, un sistema de signos, y que la lengua es algo que se lleva en la memoria, pero una memoria que se re-construye constantemente al pasar de las generaciones. Desde la parte del habla, el autor expresa que es el uso de la lengua en una situación específica, que es una codificación de un mensaje.

Igualmente, Serrano (2005) menciona que para acceder a la lengua es necesario conocer los sistemas de signos que se manejan, y que para acceder al habla es necesario observar y analizar el contexto en el que se mueve el sujeto.

Serrano (2005), desde su texto, así como se expresa del lenguaje como “ente” general, especifica que no hay mucha diferencia entre él y el lenguaje matemático, el cual está igualmente compuesto por la lengua y el habla. De esta forma, para acceder al lenguaje matemático es necesario que desde la lengua, el sujeto conozca los símbolos matemáticos y las gráficas que se utilizan; de igual manera, es necesario que desde el habla, el sujeto conozca las representaciones que se tienen de los objetos que se manejan; y, también,

el sujeto debe conocer cómo se “traduce” su lenguaje natural en un lenguaje matemático.

Sobre el lenguaje, la maestra Claudia dijo:

Cuando hablamos de lenguaje natural, presuponemos todo lo expresado por los estudiantes para referirse a cualquier situación desde las palabras y expresiones que cada uno conoce, y cuando hablamos de lenguaje simbólico hablamos de todas aquellas representaciones que se pueden hacer de un objeto diferentes del lenguaje natural.

El lenguaje simbólico es la representación del significado del lenguaje natural, es otra forma (matemática) de expresar lo dicho naturalmente. Es la puerta que cruzan los estudiantes hacia la modelación de la situación planteada.

(Claudia, entrevista, 11 de agosto de 2009)

Es decir, estamos tomando el lenguaje natural como el lenguaje que los estudiantes, y cualquier sujeto, utilizan para expresarse en su vida cotidiana. En este lenguaje se pueden tener presentes las jergas como esas formas que tienen de expresarse algunos grupos sociales, haciendo codificaciones subjetivas de algunos mensajes. Consideramos pues, que el lenguaje natural abarca toda expresión que el sujeto conoce y usa para hablar, escribir o expresar una idea, donde las palabras y expresiones ya están interiorizadas, y tiene un sentido y significado para ese sujeto específico persona. Hay que tener en cuenta que esas palabras y expresiones hacen parte de las representaciones que el sujeto construye, pues es a partir de esas representaciones que ya construyó e interiorizó, que puede hacer tratamientos o conversiones (como se mencionaba en la primera categoría con lo expresado por Duval (1999)) a las representaciones que maneja. Un ejemplo del lenguaje natural es la siguiente frase: “ayer jugué fútbol”. En esta frase se articulan palabras que el sujeto conoce y manipula, y de las cuales conoce muy bien su significado; de hecho, cada palabra que el sujeto expresa representa algo para él en su mente.

Por otro lado, consideramos que el lenguaje simbólico serían ese conjunto de símbolos que son el intermedio entre dos aspectos: lo tangible, lo que se puede percibir y es conocido; y la representación, desde una parte más abstracta, intangible y casi desconocida para el sujeto. De alguna forma, el lenguaje simbólico sería un conocimiento subjetivo (aunque es el resultado de una creación colectiva) que se maneja y al cual los estudiantes, en el caso de esta

investigación, tratan de acceder de forma consciente, por medio del (re)conocimiento de sus símbolos. Esto trae como consecuencia que cuando nos encontramos frente a la expresión de un determinado concepto, a través de su manifestación simbólica, necesariamente se produce un proceso de decodificación de significados.

Es decir, consideramos que el lenguaje simbólico sería una forma de escribir y expresar una idea interiorizada en el lenguaje natural, pero por medio de símbolos que se construyen dentro de un grupo social. Un ejemplo del lenguaje simbólico serían las expresiones algebraicas que se enseñan en la clase de matemáticas, las cuales han sido construidas por un grupo de personas, pues las letras de esas expresiones representan situaciones que se pueden expresar en un lenguaje natural, así como el lenguaje natural puede expresar lo que representa una letra dentro de una expresión algebraica.

## **Dialéctica**

Habiendo (re)significado el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, queremos manifestar que entendemos por dialéctica, para poderla relacionar con el lenguaje.

A continuación, se muestran definiciones que dan algunos autores sobre el concepto de dialéctica, como son:

Kopnin, citado por Wikipedia (2009), menciona que:

La dialéctica es el discurso en el que se contraponen una determinada concepción o tradición, entendida como tesis, y la muestra de los problemas y contradicciones, entendida como antítesis. De esta confrontación surge, en un tercer momento llamado síntesis, una resolución o una nueva comprensión del problema.

George Wilhelm Friedrich Hegel, citado por Wikipedia (2009), menciona que:

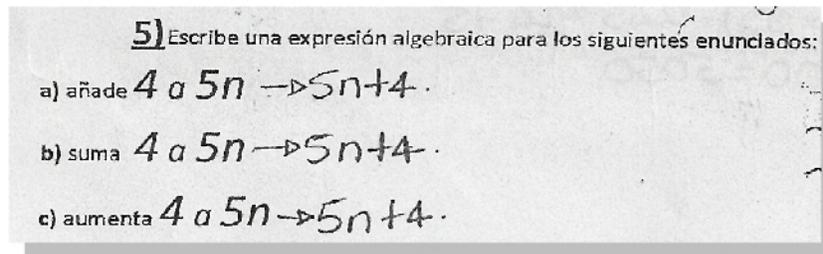
La dialéctica a su sistema filosófico y a su lógica centrada en el devenir, la contradicción y el cambio, que sustituye los principios de identidad y no contradicción, por los de la transformación incesante de las cosas y la unidad de los contrarios. Hegel pensaba que la evolución de la Idea se produce a través de un proceso dialéctico, es decir, un concepto se enfrenta a su opuesto y como resultado de este conflicto, se alza un tercero, la síntesis. La síntesis se encuentra más cargada de verdad que los dos anteriores opuestos.

Karl Marx, citado por Wikipedia (2009), aplicaba el concepto de dialéctica a los procesos sociales y económicos. El llamado materialismo dialéctico de Marx es con frecuencia considerado como una revisión del sistema hegeliano. Este proponía una solución a un problema generalizado de extremos económicos por medio de los tres conceptos: tesis, antítesis y síntesis. La primera era la fuente del problema, en este caso la propiedad del capital concentrada en la clase burguesa. La segunda, la clase proletaria creadora del valor con su trabajo y despojada de todo medio de producción. Estas dos darán como síntesis el comunismo, la propiedad social de los medios de producción.

Después de analizar lo expresado por algunos autores sobre lo que significa dialéctica y después de varias interpretaciones para nuestro trabajo, consideramos que dialéctica es ese movimiento que hay entre varios “entes”, transversalizado por un conocimiento. De esta forma, los “entes” que están interactuando, se (re)configuran y (re)significan constantemente, en la medida que se relacionan. Como resultante de esta interacción se tiene, pues, un nuevo “ente” significado por ese movimiento.

La dialéctica toma sentido y vida en esta investigación, en la medida que hay un movimiento entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, ayudando a la construcción y producción del conocimiento matemático. Este movimiento se pudo percibir cuando los estudiantes transformaban un enunciado en una expresión algebraica, o cuando hacían lo contrario, transformando una expresión algebraica en un enunciado. Pero la dialéctica no se encuentra sólo en el hecho de que ellos, los estudiantes, realizaran dichas transformaciones; la dialéctica se encuentra en la medida que ellos (re)significaban y se apropiaban de expresiones algebraicas, como lenguaje simbólico, y, a su vez, desde el lenguaje natural, eran capaces de expresar ideas de esas expresiones algebraicas. Es en ese movimiento, entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, que los estudiantes pudieron comprender e interpretar las diferentes variables en las situaciones propuestas.

Un ejemplo de las transformaciones que hacían los estudiantes de un lenguaje a otro es el siguiente:



(Ana María, actividad 2, 12 de junio de 2009)

Cuando conversamos sobre dicha actividad, Ana María respondió:

Jadir: El quinto dice: escriba una expresión algebraica para los siguientes enunciados.

Primero Añade 4 a  $5n$

Ana María: sería  $5n+4$  porque añadir es sumar

Jadir: Entonces suma 4 a  $5n$

Ana María: También es sumar  $5n+4$

Jadir: ¿Por qué lo mismo?

Ana María: Porque añadir y sumar son sinónimos

Jadir: Y si te piden aumenta 4 a  $5n$

Ana María: También

Jadir: ¿Por qué también?

Ana María: Porque aumentar, añadir y sumar vendrían a ser prácticamente lo mismo

(Ana María, conversación sobre actividad 2, 12 de mayo de 2009).

En el ejemplo anterior, las palabras de la actividad ya tenían un significado y su representación en el lenguaje simbólico. Con respecto a esos significados que los estudiantes construyen de algunos conceptos, Vasco (1989) expresa:

Algunas palabras son básicas para cualquier descripción matemática, y no sólo matemática. Pero no pueden enseñarse por definición, sino por un juego de inducción sobre la utilización paulatina en una gran diversidad de contextos. Afortunadamente, una vez dada una serie de ejemplos particulares, de traducción en frases en las intervengan la palabra cuyo sentido se debe precisar, y una indicación de cuáles son las particularidades que deben desatenderse u olvidarse, todo el mundo parece comprender esas palabras.

(Vasco, 1989, pág. 9)

Desde lo planteado por el autor, hay palabras que en la enseñanza no se definen, que se muestran contextualmente y que desde allí se les da un sentido, al mismo tiempo que se tratan de definir mencionando o retomando sus sinónimos; de ahí que estas palabras sean conceptos-límite que se generan de un olvido activo, pues aunque no se tienen presentes constantemente, son palabras que cobran sentido desde un contexto dado, y en el momento que se utilizan tiene el sentido que se quiere mostrar.

En la respuesta que dio Ana María no hay una definición como tal de lo que es aumentar, añadir o sumar, pero ya se creó o construyó un sentido para estas palabras que denotan una operación matemática. Hay que tener en cuenta que este sentido que los estudiantes dieron a las palabras aumentar, añadir y sumar, son el resultado de la construcción de una representación, una representación que es manipulable dentro de un sistema de representaciones que se someten a reglas específicas (como se ha mencionado anteriormente en la categoría “mi significado de variable”); pero la construcción de estas representaciones no se hace por otro medio que no sea el lenguaje. Por un lado, tenemos la utilización del lenguaje natural, al momento de contextualizarla y darle un sentido desde las expresiones cotidianas; y, por otro lado, tenemos la utilización de un lenguaje simbólico que denota un símbolo para la representación de estas palabras, de esas representaciones construidas.

Observemos otro ejemplo de expresiones en lenguaje natural y simbólico que, en este caso, Verónica manifestó sobre el siguiente enunciado:

7) Si en la expresión  $c+d=11$ ,  $c$  es mayor que  $d$ , ¿Qué podrías decir de  $c$ ?

7. Que  $c$  podría ser cualquier número mayor que  $d$ . Pero que la suma de los dos sea igual a 11.

(Verónica, actividad 2, 12 de junio de 2009).

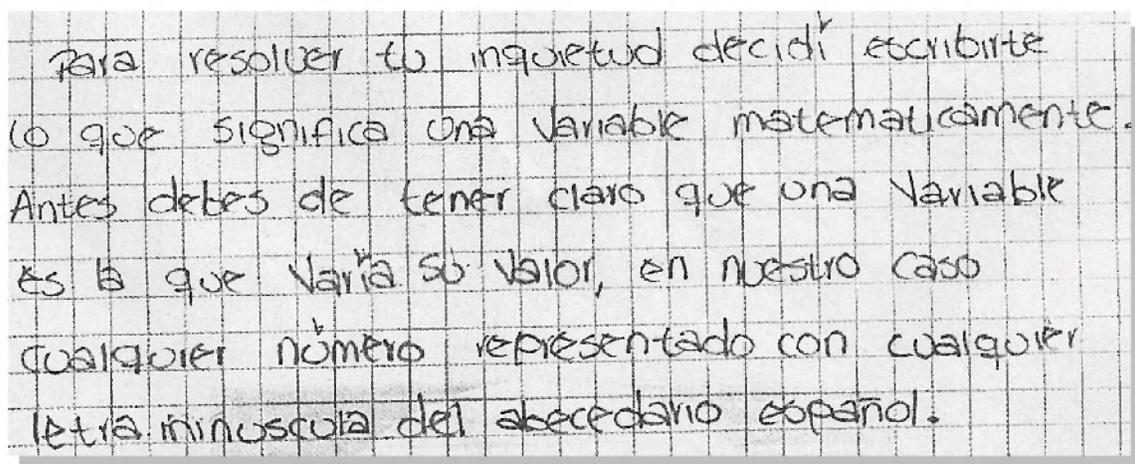
En la conversación sobre dicha actividad, Verónica dijo:

Jadir: El ejercicio 7 dice: si en la expresión  $c+d=11$  pero sabemos que  $c > d$ . ¿Qué podrías decir de  $c$ ?

Verónica: Que  $c$  podría ser cualquier número que sumándolo con  $d$  dé 11 pero siempre y cuando sea el número mayor, por ejemplo sería  $6+5$  ó  $10+1$ , pero siendo siempre  $c$  la mayor.  
(Verónica, conversación sobre la actividad 2, 12 de junio de 2009)

Haciendo una comparación entre lo que Verónica dijo y escribió sobre el punto 7 de la actividad 2, podríamos decir que lo expresado verbalmente complementa lo escrito. Desde aquí, y retomando lo planteado por Duval (2004), se puede observar como los estudiantes hacen uso de las diferentes representaciones de un objeto y constantemente realizan conversiones, en este caso una conversión que va de una representación que está en un sistema de representaciones ubicada en lo simbólico ( $c+d=11$ ), a una representación que está en un sistema de representaciones ubicado en el lenguaje natural, donde tiene un significado y un sentido.

Otro ejemplo de la relación que hay entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, es una parte de la carta que Ana María escribió a uno de sus compañeros de clase (ver anexo 1):



Para resolver tu inquietud decidí escribirte lo que significa una variable matemáticamente. Antes debes de tener claro que una variable es la que varía su valor, en nuestro caso cualquier número representado con cualquier letra minúscula del abecedario español.

(Ana María, carta, 30 de marzo de 2009)

Así como Ana María escribe sobre la variable y del significado que este concepto tiene para ella, lo (re)significa cuando de forma oral se le preguntó por su significado, como en el siguiente aparte:

Jadir: ¿Cómo crees tú que podemos identificar o saber que algo es una variable en un enunciado?

Ana María: En un enunciado la reconocemos porque no se menciona específicamente, por ejemplo, cuando hablan de  $5f$ , no están hablando de si son colores o si es un numero por ejemplo 5 veces 2. No, están diciendo es  $5f$ .

Jadir: Y en un enunciado ¿Tú como sabes cuál es la variable?

Ana María: Por eso, porque no hablan de ella específicamente, solamente dicen que no se conoce, en este caso se representaría con una  $f$ , con una letra que no se conozca.

Jadir: Algo que no se conozca, o sea que si te dicen  $2x+3y$ , o el doble de una cantidad que se expresa  $2x$ , esas  $x$  son las que llamas variables

Ana María: Sí

Jadir: Y si te dicen que  $x$  es igual 3

Ana María: Ya no es variable

Jadir: ¿Por qué?

Ana María: Ya no varía, porque le están dando un número específico

Jadir: ¿Y cuál sería en este caso?

Ana María: El número 3

(Ana María, entrevista, 7 de julio de 2009)

Desde lo anterior, podemos ver como Ana María en su escritura, expresa un significado de variable, el cual no se aleja de lo que expresó en su discurso oral y el cual tiene el mismo significado desde la parte algebraica. En este caso es apreciable como lo dicho, escrito, y simbólico se complementan para que Ana María construya un significado de variable desde diferentes representaciones.

Pensando en esa (re)significación que implica la dialéctica, veamos como, en el siguiente aparte, Sergio (re)construyó lo que había expresado en la escritura, con lo que pudo expresar verbalmente, a partir de una expresión algebraica. Sergio respondió al siguiente enunciado en la actividad 2 así:

2) Si se tiene que  $e+f=9$ , entonces que podrías decir de  $e+f+g=9g$

(Sergio, actividad 2, 12 de junio de 2009)

Después de la actividad, como era ya costumbre, tuvimos una conversación sobre ella, en la cual Sergio respondió lo siguiente:

Jadir: Si se tiene que  $e+f=9$ , entonces ¿Qué podrías decir de  $e+f+g$ ?

Sergio: Que si  $e+f=9$  entonces podemos decir que  $e+f+g$  es  $9g$  porque como  $g$  no tiene ningún valor, se le suma al nueve que vale  $e+f$

Jadir: Entonces tú aquí tienes  $9g$

Sergio: Sí

Jadir: Es  $9g$  ó  $9+g$

Sergio:  $9g$

Jadir: ¿ $9g$ ? ¿Por qué? ¿Qué operación esta realizando  $e+f$  con  $g$ ?

Sergio: Multiplicando

Jadir: Pero tienes  $e+f+g$

Sergio: ¡Ah! entonces debería ser  $9+g$

Jadín: ¿Por qué?

Sergio: Porque está sumando, entonces si aquí está sumando pasa a sumar en el otro, entonces me equivoqué, pues si tenemos  $e+f+g$  sería igual a  $g+f+e$

(Sergio, conversación actividad 2, 12 de junio de 2009)

En lo expresado por Sergio, es notable que hay una (re)construcción de la expresión que escribió y de la expresión que reafirmó en un principio en la conversación (siendo ambas las mismas). Pero la (re)significación de lo que el enunciado le estaba pidiendo y lo que el había escrito se realizó por medio de ese diálogo que se entabló con él. El diálogo que posibilitó que Sergio pusiera en juego las representaciones que él ya hubiera construido de las operaciones que le indicamos y de las letras que aparecían en la expresión algebraica. Fueron precisamente esas contradicciones, que Sergio encontró en medio del discurso, las que posibilitaron que él llegará a una última expresión que resultaba del movimiento generado entre lo que el enunciado le decía, lo el que había escrito y el diálogo que había entablado con el entrevistador. Es entonces en este punto, donde la dialéctica toma vida y se convierte en un medio para que el estudiante (re)signifique su conocimiento.

Ahora, analicemos un aparte de la actividad 2, donde Verónica respondió:

**8) ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad?  $L+n+m=L+p+m$**

pienso que  $n$  y  $p$  deben representar el mismo número para que haya igualdad

(Verónica, actividad 2, 12 de junio de 2009)

A partir de la respuesta que Verónica expresó en la actividad, se le preguntó, en la conversación, el por qué de ella:

Jadín: ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad?  $l+n+m=l+p+n$ . Tú respondiste: "Pienso que  $n$  y  $p$  deben representar el mismo número para que haya igualdad"

Verónica: Sí, yo pienso que la  $m$  y la  $p$  deben ser iguales, pues la  $l$  y la  $m$  que tenemos en ambos lados de la igualdad, son iguales. Por tanto la  $m$  y la  $p$  deben ser iguales para que la igualdad se siga dando. La  $m$  y la  $p$  deben representar el mismo número.

(Verónica. Conversación de la actividad 2, 12 de junio de 2009)

En este ejemplo de Verónica, así como en los ejemplos anteriores se (re)significó un concepto o apreciación de la estudiante, en este caso, el movimiento que se generó entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural, ayudó a reafirmar la concepción de igualdad que la estudiante tenía.

No hay que olvidar, que la dialéctica dada entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico no se aleja de las interacciones del sujeto —sociales y culturales— y, consecuentemente, de las experiencias que viva; pues es dentro del contexto en el que se mueve el sujeto que constantemente (re)significa las construcciones que hace a partir del lenguaje. Es decir, consideramos, que es en esas interacciones que se construye el significado, y se codifican y decodifican expresiones y palabras con el fin de tener una mejor comunicación entre los mismos sujetos.

A partir de esas situaciones, algo cotidianas de los estudiantes, expresadas en su lenguaje natural, es en las que se comienza a construir una idea de variable, que al mismo tiempo, posibilitan la utilización de un conjunto de símbolos que hablen de forma diferente de la misma situación. La influencia del contexto social, cultural y económico de los estudiantes, consideramos, es importante a la hora de la clase de matemática.

Los Estándares presentan el pensamiento variacional como:

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.  
MEN (2003, pág. 67)

Con respecto a esa idea de pensamiento variacional, la maestra expresó:

El pensamiento variacional es la capacidad que todos poseemos para modelar intuitivamente fenómenos relacionados con la variación y el cambio... Es crucial su desarrollo cognitivo, pues la misma naturaleza dinámica de tal pensamiento, posibilita conectar la realidad con los saberes escolares y, específicamente, con los saberes matemáticos.  
(Claudia, entrevista, 11 de agosto 2009)

Hay que tener presente que la dialéctica de la que hablamos en esta investigación, no es una dialéctica que sólo se da en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; por el contrario, ese movimiento (o esa dialéctica) entre los otros y el sujeto, las interacciones que se generan con el

entorno del sujeto, son los que constantemente generan nuevas construcciones intelectuales con respecto a cualquier concepto y con respecto a la concepción que cada sujeto tiene de sí mismo. En este sentido, el tener presente el contexto del estudiante para que él (re)signifique lo que aprende en la escuela desde y para lo que vive en su cotidianidad, constata importancia que tiene esta dialéctica en sus procesos de aprendizaje.

La importancia del (re)conocimiento del contexto en el aula de clase, no es desconocido por la profesora, mencionando: “Una de las dificultades que tienen los estudiantes es la interiorización del lenguaje algebraico y por lo tanto, su utilización en diferentes contextos”, de ahí que exprese:

[...] Tengo presente el llevarles a los estudiantes situaciones propias de su contexto que les permita crear relaciones con el concepto y hacer sus propias construcciones [...] Pienso en situaciones cotidianas que sean significativas para ellos y en las que, por medio de preconcepciones matemáticas que ellos posean, los estudiantes vean la necesidad de generalización para representar la situación planteada. Ambos tipos de situaciones, que en realidad vean interconectadas, las presento con diferente grado de dificultad, a fin de movilizar en ellos, diferentes procesos de razonamiento.

(Claudia, entrevista, 11 de agosto de 2009)

Esto (re)afirma la importancia que algunos autores le dan, en primer lugar, a las experiencias que viva el estudiante y, en segundo lugar, a la importancia de conocimientos previos y a los procesos que se dieron para que se aprendieran dichos conocimientos.

Por último, la historia de la matemática nos ha mostrado que la necesidad es la base que ha permitido que se puedan generar nuevos conocimientos, pues a partir de la necesidad que tiene el sujeto de realizar cosas o procedimientos de una forma más fácil, o simplemente realizarlos, es lo que ha hecho que se generen preguntas, que se generen respuestas y que se generen más preguntas. El aprendizaje en el aula de clase no se aleja mucho de la historia de la matemáticas, pues si el estudiante no tiene la necesidad de realizar un procedimiento o de hacerlo de una manera más fácil ¿Para qué se va hacer preguntas sobre este procedimiento? Si el estudiante resuelve todas sus preguntas con los conocimientos y con los conceptos que ya tiene aprendidos o interiorizados ¿Para qué construir nuevos conceptos? Es pues, desde este punto de vista que la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico

se debe propiciar, de forma que se logre (en el caso de esta investigación) una visualización y comprensión de la generalización, así como su simbolización.

## 7. A MODO DE CIERRE

En este último capítulo queremos resaltar que a causa de la complejidad que se percibe para definir el concepto de variable, se hace difícil que los estudiantes del grado noveno, protagonistas de la investigación, tengan una mirada clara con respecto a lo que dicho concepto implica, significa y representa dependiendo del contexto o el campo de variación en el que se encuentre. Podríamos decir que en la medida en que el estudiante se relacione más con situaciones de cambio y de variabilidad que ayuden a (re)significar el concepto, el estudiante tendrá mayores posibilidades de aproximarse al concepto de variable.

También hay que mencionar que la enseñanza de los procesos de generalización no se debe, solamente, trabajar en el grado noveno, así como lo expresó la maestra cooperadora Claudia: “pienso que se debe considerar desde el nivel de preescolar, dada la importancia del fortalecimiento del pensamiento variacional”, y como lo plantean los Estándares Curriculares. Creemos en que dichos procesos se deben trabajar desde los primeros años escolares, aumentando paulatinamente el grado de complejidad a medida que se avanza en el grado de escolaridad, y así ir generando en los estudiantes bases sólidas en cuanto al concepto de variable, el cual está estrechamente relacionado con el proceso de generalización. De igual forma, el MEN (2003) resalta la importancia que presenta el concepto de variable en el desarrollo del pensamiento variacional, pues este pensamiento se convierte en la base para la resolución de problemas. Así pues, se relacionaría el pensamiento variacional (al cual se le asocia con el reconocimiento de lo que son patrones, regularidades, entre otras) y la variable (como concepto que abarca el reconocimiento de patrones y generalidades y, a su vez, la simbolización de los elementos reconocidos). De esta forma, al reconocer la importancia que tiene el concepto de variable, partiendo de las interpretaciones de esta investigación, dentro del aula de clase se deben priorizar los procesos de simbolización y los procesos de generalización, posibilitando que los estudiantes lleguen a concepciones de variable donde no se “anclen” en la letra, y donde los

patrones, los movimientos y las regularidades que observan en su entorno las puedan expresar (sea desde un lenguaje retórico, sincopado o simbólico).

Pensamos que el concepto de variable debe trabajarse desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, donde el concepto de variable implique tanto la generalización como la simbolización para que los estudiantes no se queden con una idea de la variable como una letra, incógnita o la representación de un objeto en una letra, o interpreten las expresiones algebraicas como simples formulas. La construcción y comprensión del concepto de variable, pensada desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, posibilitará que los estudiantes vean el álgebra como una forma de expresar situaciones de su vida cotidiana y hallen ese punto de encuentro entre las matemáticas y su contexto social, cultural y económico.

Uno de los aspectos a resaltar con mayor fuerza en este trabajo de investigación, es que los estudiantes Sergio, Verónica y Ana María tuvieron una concepción de variable que no se aleja de esos procesos que implica su comprensión: simbolización y generalización. Sin embargo, en las concepciones que los estudiantes mostraron, se pudo observar que, en efecto, se puede hablar de una dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, pues en algunas situaciones los estudiantes hicieron una acertada interpretación del concepto de variable desde lo simbólico, pero con algunos vacíos desde su argumentación oral. En otras situaciones se observó que los estudiantes tenían, desde su argumentación oral, una buena interpretación del concepto, pero con algunas dificultades a la hora de representar lo que se expresaba en forma simbólica. Cuando los estudiantes lograron encontrar ese sentido, esa armonía (aunque fuera por instantes) entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, percibimos algunas transformaciones en su aprendizaje, ya que sus ideas eran más fluidas y más significativas desde su discurso, al igual que la forma en que interpretaban la variable en determinado contexto.

Pensamos que es importante que se genere en el aula de clase un ambiente agradable para el diálogo, la comunicación y el aprendizaje, claro está con la responsabilidad que debe asumir tanto el maestro como el estudiante en su respectiva "posición". Son muchas las anécdotas para mostrar en cuanto a lo que tiene que ver con el desarrollo de la investigación, entre estas, queremos

resaltar lo importante que han sido las interacciones que se tejieron entre los protagonistas de la investigación, la profesora cooperadora y nosotros los investigadores, pues en gran medida, estas interacciones, facilitaron la recolección de los datos y la (re)significación que hicieron los estudiantes en aquellos aspectos que tienen que ver con el concepto de variable. En la medida en que los estudiantes se sintieron escuchados, respetados e “importantes”, se mostraron más interesados en dar mejores argumentos cada vez que se les preguntaba por el concepto de variable, y para nosotros fue mucho mejor trabajar con ellos ya que cada conversación (re)significaba nuestra investigación a partir de sus apreciaciones y significados del concepto de variable.

Para finalizar, consideramos que no hay una sola forma de llegar a construir el concepto de variable, pues no sólo desde lo simbólico la variable se ejemplifica, igualmente, desde situaciones de variación que vivan los estudiantes, los significados que ellos construyen y las (re)significaciones que van teniendo del concepto, es que se puede lograr tener una amplia comprensión del concepto de variable. Así pues, desde los (re)significados que como docentes podamos dar al concepto de variable (tanto desde la simbolización como desde el lenguaje natural), podríamos decir, ayudaremos en esos procesos de procesos de aprendizaje (que son individuales) de los estudiantes durante la construcción y el intento de comprender el concepto de variable.

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., Ortiz, M., Riviere, V. & Veiga, C. (1993) Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Editorial SÍNTESIS.

Cogollo. (2006). La variable: "cosa", "letra acompañante" o "número escondido. Tesis de maestría. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Diccionario de la lengua española plus, nueva edición (2008). Norma

Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Freire, P. (1997). (Palacios, 1997 trad). Pedagogía de la autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa. México: siglo veintiuno editores.

Lanner, A., & Sousa, M. (2008) Dando movimiento ao pensamento algébrico. ZETETIKÉ. v. 16- n. 30- jul/dez.

López, F (2006). Investigación cualitativa: nuevas formas de investigar en el ámbito universitario.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares Curriculares de Matemáticas

Morales, L. & Díaz, J. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. Artículo no publicado. Reporte de tesis de Maestría. Universidad de Sonora.

Moura, M.O. (2009).. A atividade de ensino como ação formadora. Manuscrito no publicado. Faculdade de Educação – USP

Serrano, W. (2005). ¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático? Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental libertador. SAPIENS: Revista Universitaria de Investigación.

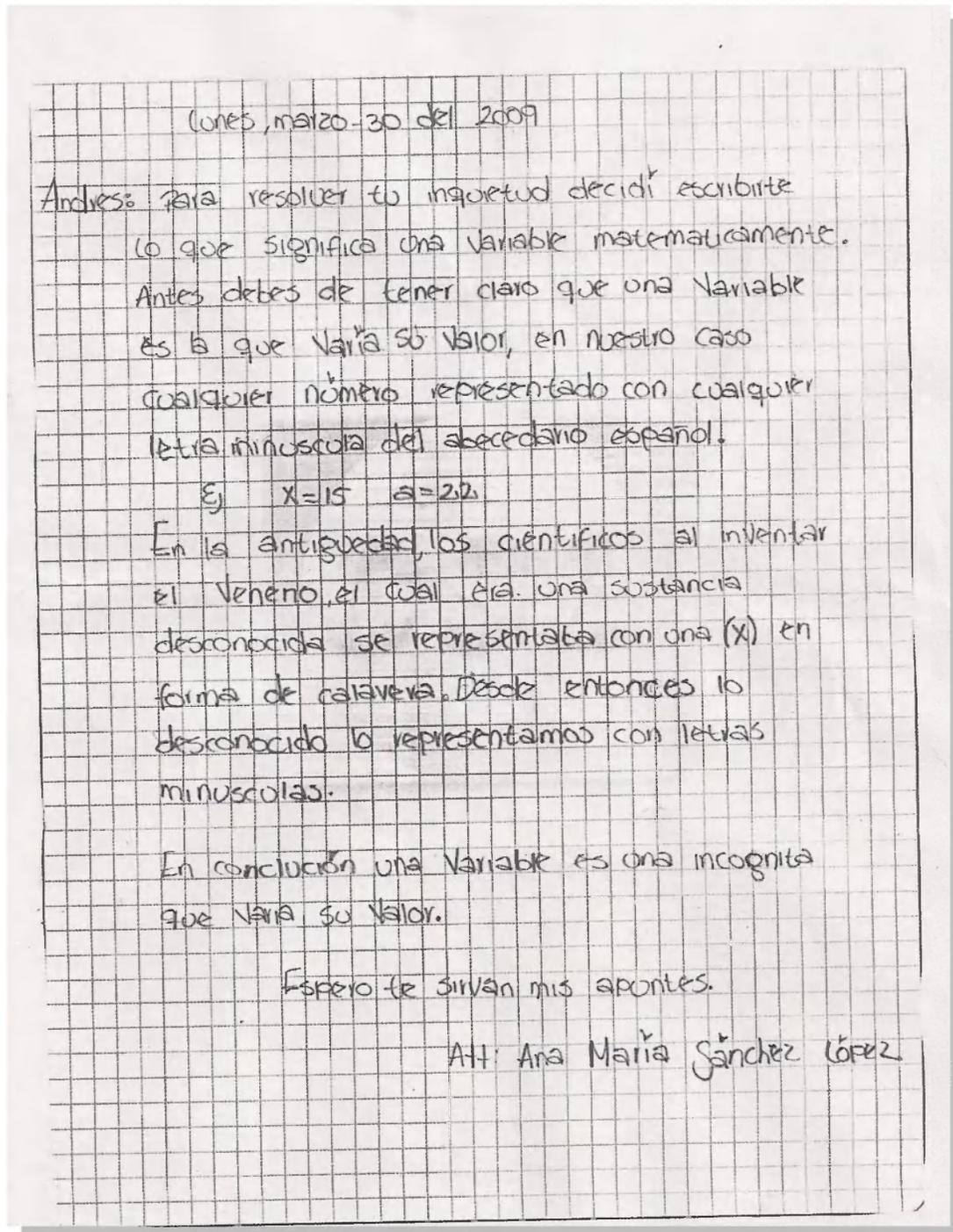
Vasco, E. (1989). El concepto de sistema como clave del currículo de matemáticas.

Wikipedia: Dialéctica. *Recuperado el 24 de septiembre de 2009, de* <http://es.wikipedia.org/wiki/Dial%C3%A9ctica>

## 9. ANEXOS

### ANEXO 1

Este anexo es la carta que Ana María escribió a uno de sus compañeros a raíz de una actividad planteada en durante el período de recolección de datos.



**ANEXO 2**

Este anexo es el registro tomado de la segundo actividad, respondida por Verónica, realizada el 11 de junio de 2009.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA RAMÓN MÚNERA LOPERA  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN



NOMBRE: VERÓNICA CELOU FECHA: 11/6/09  
GRADO: 9º

**ACTIVIDAD N°2**

Objetivo: Identificar e interpretar la variable en diferentes situaciones..



1) Si se tiene que  $a+b=34$ , entonces qué podrías decir de  $a+b+3=37$

2) Si se tiene que  $e+f=9$ , entonces que podrías decir de  $e+f+g=9+g$

3) ¿Qué puedes decir de  $a$ , si  $a+6=9$ ?  $a=3$

4) ¿Qué puedes decir de  $u$ , si  $u=v$  y  $v=2$ ?  $v=2$

5) Escribe una expresión algebraica para los siguientes enunciados:

a) añade  $4a$   $5n$   $4+6n$

b) suma  $4a$   $5n$   $4+5n$

c) aumenta  $4a$   $5n$   $4+5n$

6) ¿Quién es mayor entre  $3n$  y  $n+3$ ? Explique

7) Si en la expresión  $c+d=11$ ,  $c$  es mayor que  $d$ , ¿Qué podrías decir de  $C$ ?

8) ¿Cuándo es cierta la siguiente igualdad?  $L+n+m=L+p+m$

9) Resuelve la siguiente situación:





En una rifa que se hizo en el colegio, donde participaron todos los grupos, el ganador fue 9-1. Este grupo será premiado con dulces. El director quiere saber cuantos dulces debe comprar si a cada estudiante se le dará el número de dulces igual al número que cada uno sea en la lista del director de grupo (ejemplo: el estudiante que sea el número uno en la lista se llevará un dulce, el estudiante que sea el número 20 se llevará 20 dulces) ¿Cuántos dulces deberá comprar el director del colegio para que los 50 estudiantes de 9-1 tengan el número de dulces respectivo? Si fuera un grupo de 100 estudiantes ¿Cuántos dulces deberá comprar el director? Si fuera un número cualquiera de estudiantes ¿Cuántos dulces debería comprar el director?

### ANEXO 3

Este anexo es el registro tomado de la primera actividad, respondida por Sergio, realizada el 11 de junio de 2009.



**Institución Educativa Ramón Múnera Lopera**  
**Universidad de Antioquia**  
**Facultad de Educación**



**Actividad**

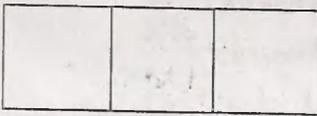
Nombre: Sergio Estiven Gomez P. Grado: 4º  
 Fecha: 27/04/09

- Objetivo: Identificar, representar e interpretar las variables en una situación determinada.

Laura cumplirá 15 años, para esto sus padres alquilaron el salón de la acción comunal. Con el alquiler del salón prestaron 50 mesas cuadradas.

Los padres de Laura al ver el espacio tan pequeño pensaron en ubicar las mesas unidas por un lado (como indica la figura y a modo de ejemplo) alrededor del salón, con el fin de poder bailar en el centro del mismo. Como el salón es pequeño, los padres deben saber cuántas personas podrían invitar, donde se incluyan familiares y amigos de Laura.

Hay que tener en cuenta que solo una persona se puede sentar por cada lado de la mesa, para que los invitados no se sientan incómodos.



Para ayudar a los padres de Laura en los preparativos, realice las siguientes actividades:

- Haga un dibujo de cómo deberían ir distribuidas las mesas en el salón
- Si fuera una mesa, ¿cuántas personas se podrán sentar?
- Si fueran dos mesas, ¿cuántas personas se podrán sentar?
- Si fueran tres mesas, ¿cuántas personas se podrán sentar?
- Si fueran diez mesas, ¿cuántas personas se podrán sentar?
- Como son 50 mesas ¿cuántas personas se podrán sentar y así poderlas invitar?
- Dado el caso que los padres de Laura alquilaran un salón más grande, donde se pudieran distribuir de la misma forma 103 mesas, ¿cuántas personas se podrían invitar?
- Escriba una expresión que indique cuántas personas se pueden invitar a una fiesta, donde se puedan distribuir cualquier número de mesas.

①



② 5 4  
mesa  
por persona

③ 8  
PERSONAS

④ 2  
PERSONAS

⑤ 40  
PERSONAS

⑥ 250  
PERSONAS

## ANEXO 4

Los siguientes anexos son las cartas de autorización de los padres de familia de los protagonistas de la investigación, aprobadas por la maestra colaboradora y por nuestra asesora.

Medellín, 10 de Junio de 2009

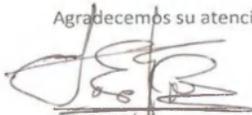
Señora  
**Blanca Lila Cano Ramírez**  
Madre de Familia

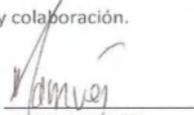
Reciba un cordial saludo.

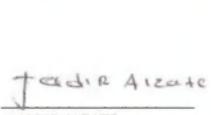
En la clase de Matemáticas del grado 9-1, orientada por la profesora Claudia Quintero Quintero, en la cual participa su hija, estamos desarrollando un proyecto de investigación denominado "Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico", dicho proyecto fue conocido por usted el día 3 de abril en la entrega de notas. El objetivo de dicho proyecto es analizar el proceso en la construcción del concepto de variable en la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.

Queremos, de manera formal, solicitar su autorización para que la estudiante VERÓNICA CERÓN forme parte de nuestra investigación, como protagonista de la misma y, consecuentemente, presentar a su hija en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabaciones, fotos, videos, las guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

  
ESTEBAN RÍOS  
Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

  
NATALIA MÚNERA  
Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

  
JADIR ALZATE  
Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

  
DIANA JARAMILLO  
Orientadora de la Investigación  
Profesora UdeA

  
CLAUDIA QUINTERO QUINTERO  
Maestra cooperadora  
Institución Educativa Ramón Múnera L.

Autorizamos la participación de nuestra hija VERÓNICA CERÓN en el proyecto "Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico"

  
FIRMA DE LA MADRE

  
FIRMA DEL ESTUDIANTE

ANEXO 5



Medellín, 10 de Junio de 2009



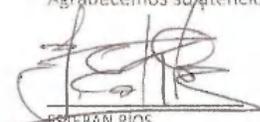
Señora  
**Gloria Estela Gómez**  
Madre de Familia

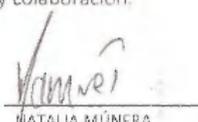
Reciba un cordial saludo.

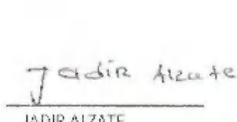
En la clase de Matemáticas del grado 9-1, orientada por la profesora Claudia Quintero Quintero, en la cual participa su hijo, estamos desarrollando un proyecto de investigación denominado "Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico", dicho proyecto fue conocido por usted el día 3 de abril en la entrega de notas. El objetivo de dicho proyecto es analizar el proceso en la construcción del concepto de variable en la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.

Queremos, de manera formal, solicitar su autorización para que la estudiante SERGIO ESTIVEN GÓMEZ forme parte de nuestra investigación, como protagonista de la misma y, consecuentemente, presentar a su hijo en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hijo en forma de grabaciones, fotos, videos, las guías de clase, entre otras.

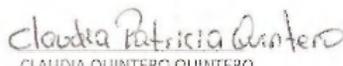
Agradecemos su atención y colaboración.

  
ESTEBÁN RÍOS  
Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

  
NATALIA MÚNERA  
Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

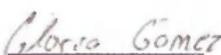
  
JADIR ALZATE  
Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

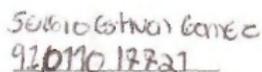
  
DIANA JARAMILLO  
Orientadora de la investigación  
Profesora UdeA

  
CLAUDIA QUINTERO QUINTERO  
Maestra cooperadora  
Institución Educativa Ramón Múnera ...

los Autorizo

Autorizamos la participación de nuestro hijo SERGIO ESTIVEN GÓMEZ el proyecto "Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico"

  
FIRMA DE LA MADRE

  
FIRMA DEL ESTUDIANTE

ANEXO 6



Medellín, 10 de Junio de 2009



Señora  
Ana Lucía López Montoya  
Madre de Familia

Reciba un cordial saludo.

En la clase de Matemáticas del grado 9-1, orientada por la profesora Claudia Quintero Quintero, en la cual participa su hija, estamos desarrollando un proyecto de investigación denominado "Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico", dicho proyecto fue conocido por usted el día 3 de abril en la entrega de notas. El objetivo de dicho proyecto es analizar el proceso en la construcción del concepto de variable en la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.

Queremos, de manera formal, solicitar su autorización para que la estudiante ANA MARÍA SANCHEZ LOPEZ forme parte de nuestra investigación, como protagonista de la misma y, consecuentemente, presentar a su hija en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabaciones, fotos, videos, las guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

ESTEBAN RÍOS

Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

NATALIA MÚNERA

Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

JADIR ALZATE

Estudiante investigador  
Lic.Edu. Bas. Matemáticas UdeA

DIANA TRUJILLO

Orientadora de la investigación  
Profesora UdeA

CLAUDIA QUINTERO QUINTERO

Maestra cooperadora  
Institución Educativa Ramón Múnera L.

Autorizamos la participación de nuestra hija ANA MARÍA SANCHEZ LOPEZ en el proyecto "Variable: una construcción desde la dialéctica entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico"

FIRMA DE LA MADRE

FIRMA DEL ESTUDIANTE