



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Facultad de Educación

**El Pensamiento Variacional - Razonamiento Algebraico en libros de texto de los
grados 4° y 5° de primaria**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciadas en Educación
Básica con Énfasis en Matemáticas**

**GISELA AYOLA OQUENDO
SANDRA MILENA OROZCO CHAVARRIA
YOHANA MARCELA OSORIO FRANCO**

Asesores

HILDUARA VELÁSQUEZ

JOSE WILDE CISNEROS



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Biblioteca Digital CEDED

El Pensamiento Variacional - Razonamiento Algebraico en libros de texto de los grados 4° y 5° de primaria

Gisela Ayola Oquendo, Sandra Milena Orozco Chavarria y Yohana
Marcela Osorio Franco

Universidad de Antioquia.
Facultad de Educación.
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemática

Mayo 2016



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Biblioteca Digital CEDEP

Copyright © 2016 por Gisela Ayola Oquendo, Sandra Milena Orozco Chavarría y Yohana Marcela Osorio Franco. Todos los derechos reservados.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Resumen

En este trabajo de investigación se presentan los resultados de un estudio de caso en el cual se indaga por la propuesta que hacen libros de texto de 4° y 5° de primaria sobre el Pensamiento Variacional- Razonamiento Algebraico; se realizó el análisis y la adecuación de algunas Tareas presentes en ocho libros de texto de diversas editoriales de divulgación en el Valle de Aburrá con ediciones correspondientes a los últimos cuatro años (2011-2014).

En el análisis se retoman aspectos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), referentes teóricos del Pensamiento Variacional (MEN, 1998-2006; Vasco, 2002) y el Razonamiento Algebraico (Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi, 2012; Godino y Font, 2003; Godino, 2003; Kaput, 1999; Cooper y Warren, 2008). Se analiza la actividad matemática y los objetos matemáticos presentes en las Tareas referidas en los libros de texto como pertenecientes al Pensamiento Variacional.

Se indaga por ¿Cuál es la propuesta que hacen libros de texto de 4° y 5° grado de primaria para desarrollar Tareas asociadas al Pensamiento Variacional-Razonamiento Algebraico?

Entre los hallazgos obtenidos se encuentra que la propuesta que hacen la mayoría de los libros estudiados, se centran principalmente en el desarrollo del Pensamiento Numérico, específicamente en la solución de situaciones problema por medio del cálculo de las operaciones básicas. Se aprecia escasa exploración del reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la *variación* y el *cambio* en diferentes contextos; además presentan el proceso de modelación y de representación en pocos sistemas de representación, lo cual no reconoce la propuesta del MEN (1998).

Palabras clave: Pensamiento Variacional, Razonamiento Algebraico, Libros de texto, Enfoque Ontosemiótico.

Abstract

In this research are presented the results of a case study that investigates by the proposal that make the textbooks of 4° and 5° degree of primary about the Variational Thought - Algebraic Reasoning; there was realized analysis and adequacy of some present tasks in 8 textbooks of several publishing houses they spreading in Aburrá's Valley by the editions corresponding the past four years (2011-2014).

In the analysis are taken aspects of the onto-semiotic approach (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), theoretical referents of the Variational Thought (MEN, 1998-2006; Basque, 2002) and the Algebraic Reasoning (Godino, Castro, Aké, and Wilhelmi, 2012; Godino and Font, 2003; Godino, 2003; Kaput, 1999; Cooper and Warren, 2008). There are analyzed the mathematical activity and the mathematical objects present in the Tasks referred in the textbooks as belonging to the Variational Thought.

It is investigated for which is the offer that there do textbooks of 4° and 5° degree of primary to develop tasks associated with the Variational Thought-Algebraic Reasoning?

Inside the results of this investigation there is demonstrated that the offer that there do the majority of the books linked in the investigation, they centre principally on the development of the numerical thought, specifically in the solution of situations problem by means of the calculation of the basic operations. Little they explore the recognition, the perception, the identification and the characterization of the variation and the change in different contexts; in addition they limit the process of modeling and representation in different systems or symbolic records; which goes in counter route with the offer of the MEN (1998).

Key words: Variational Thought, Algebraic Reasoning, Books of text, Approach Ontosemiotic.

Tabla de Contenido

Lista de tablas	viii
Introducción	x
Capítulo 1. Planteamiento del problema	1
Justificación	4
Objetivos	7
Objetivo general.....	7
Objetivos específicos	7
Capítulo 2. Marco Teórico	8
Pensamiento Variacional	9
Razonamiento Algebraico	11
Generalización.....	14
Patrones o regularidades.....	15
Secuencia.....	15
Cambio.....	17
Variación.....	17
Enfoque Ontosemiótico (EOS)	17
Libros de texto.....	21
Capítulo 3. Metodología	24
Capítulo 4. Análisis de Tareas	28
Análisis N°1	28
Análisis N°2	29
Análisis N°3	31
Análisis N°4	33
Análisis N°5	34
Análisis N°6	35
Análisis N°7	37
Análisis N°8	38
Análisis N°9	40
Análisis N°10.....	41
Análisis N°11.....	42
Análisis N°12.....	44

Análisis N°13.....	46
Capítulo 5. Adecuación de Tareas.....	48
Adecuación N°1.....	49
Adecuación N°2.....	50
Adecuación N°3.....	52
Adecuación N°4.....	53
Adecuación N°5.....	55
Adecuación N°6.....	57
Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones.....	60
Referencias bibliográficas.....	64



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



Lista de tablas

<i>Tabla 1.</i> Registro del Pensamiento Variacional (P.V) en los libros de texto seleccionados. -----	3
<i>Tabla 2.</i> Fases de la investigación. -----	27
<i>Tabla 3.</i> Tabla propuesta en Adecuación N°1. -----	50
<i>Tabla 4.</i> Tabla propuesta en Adecuación N°4. -----	54
<i>Tabla 5.</i> Tabla propuesta en Adecuación N°5. -----	56
<i>Tabla 6.</i> Tabla propuesta en Adecuación N°6. -----	58
<i>Tabla 7.</i> Parámetros para que una tarea permita desarrollar el PV. -----	62

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Lista de figuras

<i>Figura 1.</i> Esquema conceptual.....	8
<i>Figura 2.</i> Tarea 2 - página 81 de la E1 4° grado.....	28
<i>Figura 3.</i> Tarea 3 - página 81 de la E1 4° grado.....	30
<i>Figura 4.</i> Tarea 2 - página 193 de la E1 4° grado.....	31
<i>Figura 5.</i> Tarea 6c - página 161 de la E4 5° grado.....	33
<i>Figura 6.</i> Tarea 1 - página 61 de la E3 5° grado.....	34
<i>Figura 7.</i> Tarea 2 - página 61 de la E3 5° grado.....	34
<i>Figura 8.</i> Tarea 3 - página 115 de la E4 4° grado.....	36
<i>Figura 9.</i> Tarea 1 - página 163 de la E2 5° grado.....	37
<i>Figura 10.</i> Tarea 3 - página 163 de la E2 5° grado.....	37
<i>Figura 11.</i> Tarea 1 - página 104 de la E4 5° grado.....	39
<i>Figura 12.</i> Tarea 2 - página 105 de la E4 5° grado.....	39
<i>Figura 13.</i> Tarea 4 - página 89 de la E1 5° grado.....	40
<i>Figura 14.</i> Tarea 1 - página 230 de la E1 5° grado.....	41
<i>Figura 15.</i> Tarea 1 - página 222 de la E1 5° grado.....	42
<i>Figura 16.</i> Tarea 1 - página 242 de la E4 4° grado.....	43
<i>Figura 17.</i> Tarea 2 - página 104 de la E3 4° grado.....	44
<i>Figura 18.</i> Tarea de la página 114 de la E4 4° grado.....	46
<i>Figura 19.</i> Tarea 2 - página 107 de la E3 4° grado.....	46
<i>Figura 20.</i> Adecuación de la Tarea 1 - página 81 de la E1 4° grado.....	49
<i>Figura 21.</i> Adecuación de la Tarea 3 - página 81 de la E1 4° grado.....	51
<i>Figura 22.</i> Adecuación de la Tarea 6c página 161 de la E4 5° grado.....	54
<i>Figura 23.</i> Adecuación de la Tarea 1 - página 61 de la E3 5° grado.....	56
<i>Figura 24.</i> Adecuación de la Tarea 3 - página 115 de la E4 4° grado.....	58

Introducción

El presente proyecto corresponde a la modalidad de Prácticas Pedagógicas en investigación de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y se realiza conforme al Reglamento de Prácticas Académicas para los programas de pregrado de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. El Reglamento¹ establece que las prácticas pedagógicas pueden ser desarrolladas por medio de una propuesta de docencia, de investigación o de extensión.

La investigación que se desarrolla está orientada al análisis y a la adecuación de algunas Tareas asociadas al Pensamiento Variacional propuestas en ocho libros de texto de matemáticas en formato impreso de los grados 4° y 5° de primaria de algunas editoriales de circulación en el Valle de Aburrá.

El primer capítulo presenta el planteamiento del problema, se toman referentes de la literatura nacional e internacional, concepciones de maestras en ejercicio y la búsqueda de Tareas en libros de texto de 4° y 5° de primaria referidas al Pensamiento Variacional (MEN, 1998-2006).

El segundo capítulo presenta el marco teórico, se presenta el Pensamiento Variacional en los documentos curriculares colombianos - MEN (1998, 2006) y Vasco (2002-2006)-, y el Razonamiento Algebraico en el contexto internacional (Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi, 2012; Godino y Font, 2003; Godino, 2003; Kaput, 1999; Cooper y Warren, 2008) se presenta el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), y una conceptualización sobre libros de texto (Rotger, 1982; el informe Cockcroft, 1985; Rodríguez, 2006).

¹ Acuerdo 284 del 18 de septiembre de 2012.

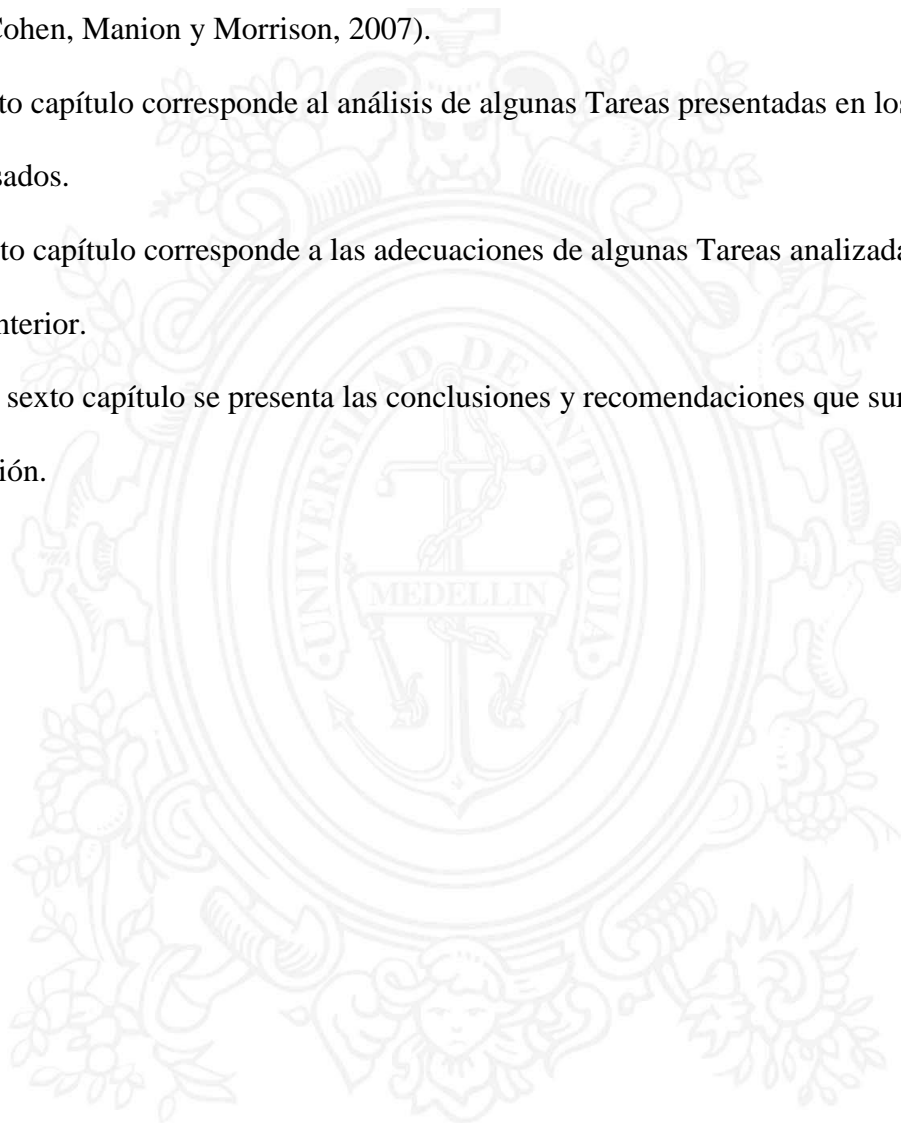


El tercer capítulo presenta la metodología de carácter cualitativo, enfocada en el estudio de caso (Cohen, Manion y Morrison, 2007).

El cuarto capítulo corresponde al análisis de algunas Tareas presentadas en los libros de texto revisados.

El quinto capítulo corresponde a las adecuaciones de algunas Tareas analizadas en el capítulo anterior.

Y en el sexto capítulo se presenta las conclusiones y recomendaciones que surgen de la investigación.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Capítulo 1

Planteamiento del problema

Los libros de texto son un referente para la preparación y gestión de los conocimientos matemáticos, por parte de los profesores (Rotger, 1982; el informe Cockcroft de 1985; Rodríguez, 2006).

Como parte de las acciones preliminares de ésta investigación para delimitar el problema y debido a la evidencia anecdótica que se tiene, se hizo un estudio de libros de texto en formato impreso de 4° y 5° de primaria de circulación en el área metropolitana y se encontró que el desarrollo teórico es deficiente en el estudio e identificación de *patrones*² y *regularidades* en distintos contextos matemáticos (Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio y Variacional) y extra matemáticos, en cuanto al reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de situaciones de *cambio* y *variación* en diferentes representaciones; asimismo, en la construcción de *secuencias* numéricas y geométricas utilizando las propiedades de los números y las figuras geométricas. Si bien enuncian los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y hacen una propuesta de Tareas asociadas al Pensamiento Variacional, presentan carencias en el desarrollo de los contenidos y en la aplicación de Tareas asociadas con este Pensamiento.

Adicionalmente, se identifica un limitado uso de representaciones en el contexto de la modelación, las cuales permiten al estudiante tener diversos registros de representación: gráfico, simbólico, icónico o pictórico de las *secuencias* numéricas (MEN, 2006).

² Los términos que aparecen en cursiva en este documento hacen parte fundamental del marco teórico, son elementos que permiten articular la literatura nacional e internacional en lo concerniente a la investigación.

Por otro lado, existen Tareas que están declaradas en los libros de texto como Tareas del Pensamiento Variacional, pero al indagar en ellas, se observa que corresponden a enunciados y procedimientos correspondientes al Pensamiento Numérico, más específicamente al ámbito de la aritmética³.

De igual forma, los libros de texto abordan las temáticas utilizando principalmente el lenguaje simbólico para el estudio del Pensamiento Variacional, lo cual parece poco apropiado para niños de primaria, en tanto que las representaciones simbólicas son solo una parte del Pensamiento Variacional. El uso de letras no es evidencia de desarrollo del Razonamiento Algebraico, ni la falta de ellas indica incapacidad de razonar algebraicamente (Mason, Graham, Pimm y Gower, 1985).

Las Tareas que presentan los libros de texto asociadas al Pensamiento Variacional, habitualmente usan enunciados que pueden generar confusiones conceptuales; por ejemplo, se presentan Tareas sobre la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, que se resuelven mediante un proceso de sustitución numérica, donde se introduce un simbolismo carente de significado.

La tabla 1 muestra el registro de la información preliminar de los ocho libros de texto de los grados 4° y 5° de primaria de diversas editoriales con respecto al Pensamiento Variacional.

Se encuentra que el número de páginas declaradas al Pensamiento Variacional es reducido en relación con el número total de páginas de cada libro de texto, asimismo

³ Según Mcintosh (citado por MEN, 1998) el Pensamiento Numérico trata sobre la comprensión e interpretación de los números, sus operaciones y propiedades que tiene una persona, además, de usarlos en contextos significativos. La Aritmética hace referencia al número en particular presentado a través de numerales o expresiones numéricas en donde hay una combinación entre números y los símbolos de las operaciones aritméticas (Godino y Font, 2003).

existen pocas Tareas asociadas a la caracterización de la *variación* y del *cambio* en diferentes contextos matemáticos. Lo mismo ocurre con la modelación y con la representación en distintos sistemas o registros simbólicos (icónicos, gráficos o algebraicos). En general, las temáticas abordadas proponen de forma escasa la identificación de *patrones* y *regularidades*, y en particular la relación con los demás Pensamientos (Numérico, Espacial, Métrico y Aleatorio).

Tabla 1. Registro del Pensamiento Variacional (P.V) en los libros de texto seleccionados.

<i>Editorial</i>	<i>Grado</i>	<i>Total Páginas del libro</i>	<i>N° de Páginas declaradas al P.V</i>	<i>N° de Tareas referidas al P.V</i>
E1	4°	256	4	8
E1	5°	256	20	42
E2	4°	256	0	0
E2	5°	254	22	56
E3	4°	272	32	0
E3	5°	272	18	50
E4	4°	256	8	17
E4	5°	256	26	55

Se preguntó sobre los criterios para elegir un libro de texto a algunas maestras colaboradoras en ejercicio docente, con varios años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en los grados 4° y 5° de primaria. Se encontró una marcada preferencia por libros que ofrezcan talleres para que los estudiantes apliquen conocimientos y conceptos aprendidos en clase. Generalmente, eligen libros que sean muy coloridos donde los niños aprendan recreándose y jugando, se interesan por libros que cumplan con todos los parámetros que exige la Secretaría de Educación y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Sin embargo no consideran como criterio de selección de los libros de texto, el tipo de Tareas enmarcadas en los Pensamientos Matemáticos, ni tienen en cuenta que

realmente sí se incluyan todos los Pensamientos como lo estipulan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

Tanto los criterios de selección de los libros por parte de las maestras como las características observadas en libros de texto dejan entrever una propuesta limitada para el desarrollo del Pensamiento Variacional en los grados 4° y 5° de primaria. Por lo tanto, la pregunta de investigación que orienta este proyecto es: ¿Cuál es la propuesta que hacen libros de texto de 4° y 5° grado de primaria para desarrollar Tareas asociadas al Pensamiento Variacional-Razonamiento Algebraico⁴?

Justificación

Los libros de texto cumplen un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, éstos son asumidos por los maestros como guía de enseñanza, y por los estudiantes como fuente de aprendizaje para desarrollar el estudio de la matemática en primaria (Rotger, 1982; el informe Cockcroft de 1985; Rodríguez, 2006), lo cual hace conveniente revisar, analizar y cuestionar las Tareas propuestas en los libros de texto de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y referentes teóricos de la Educación Matemática.

⁴ En esta investigación se toma el Pensamiento Variacional en el contexto colombiano, según los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) y autores como (Vasco, 2002-2006) y se entiende el Razonamiento Algebraico en el contexto internacional. Se adopta la propuesta de (Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi, 2012), en cuanto asumen las conceptualizaciones de Razonamiento Algebraico y Pensamiento Algebraico, como equivalentes, por la inclusión del álgebra en el currículo escolar elemental, el cual supone aspectos simbólicos y procedimentales interrelacionados con el Razonamiento Algebraico.

Los libros de texto son una herramienta esencial en la preparación y desarrollo de las clases por parte del profesor, lo cual hace necesario implementar el análisis de Tareas asociadas al desarrollo del Pensamiento Variacional-Razonamiento Algebraico, objeto de interés de ésta investigación, para detectar las posibles dificultades y limitaciones que se puedan presentar en el planteamiento de dichas Tareas.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se definen cinco procesos generales que se deben desarrollar en el área de matemáticas; uno de ellos es la modelación, la cual permite simplificar y representar situaciones cotidianas, científicas y matemáticas de diversas formas, ya sea mental, gestual, gráfica o por medio de símbolos involucrados en la resolución de problemas.

El Pensamiento Variacional está relacionado con la resolución de problemas basados en el estudio de la *variación*, el *cambio* y la modelación, permitiendo relaciones con la vida cotidiana, con otras ciencias y con las matemáticas mismas (MEN, 2006). De igual manera, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se promueve el desarrollo del Pensamiento Variacional desde los primeros grados de la Educación Básica, éste involucra conceptos y procedimientos que permiten analizar y modelar matemáticamente situaciones problema tanto de la vida cotidiana como de otras ciencias, en donde la *variación* cumple un papel fundamental.

El álgebra se propone como un instrumento de modelación que promueve el desarrollo de los demás Pensamientos y que permite analizar, *generalizar* y justificar las soluciones de diversos tipos de problemas matemáticos (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014).

El Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción (EOS) articula diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático (Godino et al., 2007).

El EOS permite relacionar el Pensamiento Variacional con conceptualizaciones asociadas al Razonamiento Algebraico y con objetos matemáticos como: la *generalización*, identificación de *patrones* o *regularidades*, las *secuencias*, el *cambio* y la *variación*.

Este Enfoque favorece el estudio y la comprensión de las nociones de objetos matemáticos y significados, como elementos lingüísticos que abarcan los símbolos, las representaciones, las gráficas, los términos y las expresiones matemáticas; los conceptos matemáticos, los procedimientos que incluyen técnicas, las operaciones y los algoritmos; las propiedades y los argumentos que pueden ser justificaciones, demostraciones o pruebas de las proposiciones, propuestas en toda Tarea matemática.

En el Proyecto se establece una relación entre el Pensamiento Algebraico y el Razonamiento Algebraico en tanto asumen dichas conceptualizaciones como equivalentes, dado que a través de la inclusión del álgebra en el currículo escolar elemental, se suponen aspectos simbólicos y procedimentales interrelacionados con el Razonamiento Algebraico (Godino et al., 2012).



Objetivos

Objetivo general. Analizar la propuesta que hacen libros de texto de 4° y 5° grado de primaria para desarrollar Tareas asociadas al Pensamiento Variacional-Razonamiento Algebraico.

Objetivos específicos

- Analizar las Tareas vinculadas con situaciones de *generalización, variación, cambio, secuencias, regularidades y patrones* en diferentes contextos matemáticos, propuestas en libros de texto de 4° y 5° de primaria.
- Adecuar algunas Tareas asociadas al Pensamiento Variacional de libros de texto de los grados 4° y 5° de primaria, de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) para estos grados.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Capítulo 2

Marco Teórico

El marco teórico considera cuatro ámbitos conceptuales: Pensamiento Variacional, Razonamiento Algebraico, Enfoque Ontosemiótico (EOS) y literatura sobre el uso de los Libros de texto.

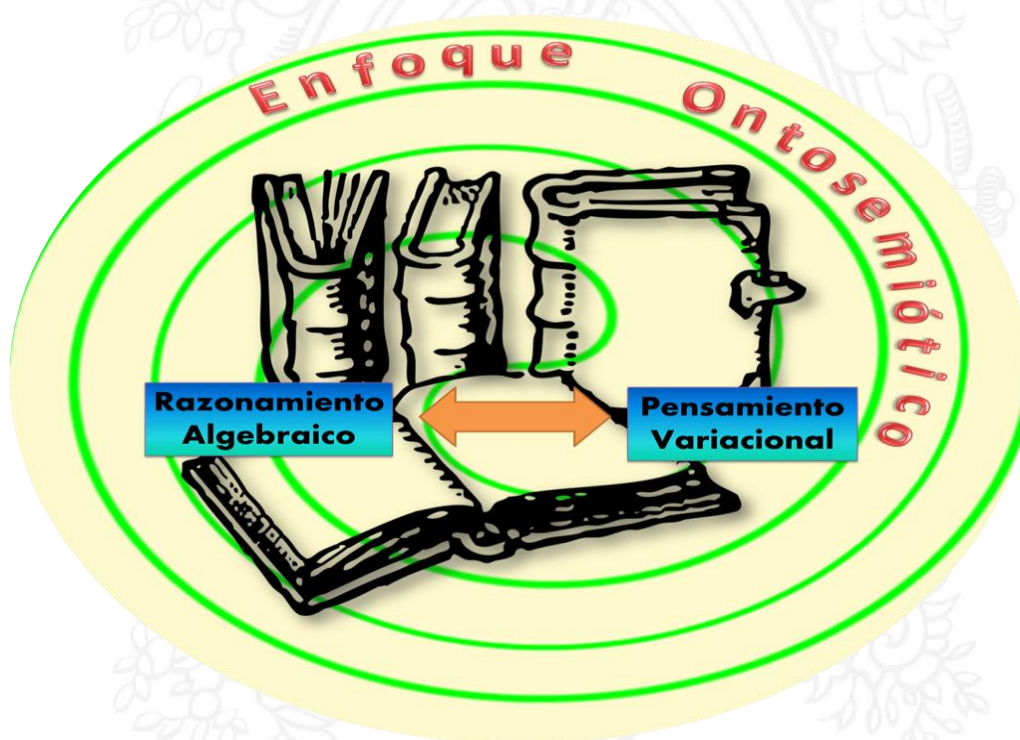


Figura 1. Esquema conceptual.

De la literatura nacional se toma el Pensamiento Variacional según la postura de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y autores como (Vasco, 2002 -2006); de la literatura internacional se estudia la conceptualización sobre el Razonamiento Algebraico (Godino y Font, 2003; Godino, 2003; Kaput, 1999; Cooper y Warren, 2008).

Del EOS se toma la noción de objeto matemático, para el análisis de las Tareas presentadas en libros de texto, en tanto que favorece describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de Tareas matemáticas y el reconocimiento de los procesos representativos como los elementos lingüísticos, los conceptos, los procedimientos, las propiedades y los argumentos para el desarrollo del Razonamiento Algebraico (Font, Godino y D'Amore, 2007).

Se aborda el estudio de libros de texto usando la propuesta de autores como (Danisova, 2006; Rodríguez, 2006) y el informe Cockcroft de 1985, los cuales resaltan la idea de libro de texto como una herramienta de amplio uso por el maestro para la preparación de las clases y como medio de instrucción.

Pensamiento Variacional

El Pensamiento Variacional “puede describirse como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los *patrones* de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud” (Vasco, 2002, p.138). Así, el Pensamiento Variacional está asociado a la modelación de la covariación entre magnitudes relacionadas entre sí y al estudio de los procesos de *variación* y *cambio* por medio de representaciones gráficas, icónicas, verbales, gestuales y tabulares.

La noción Variacional está relacionada con el término *variación*, como una cuantificación del *cambio* (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). La *variación* es un elemento importante para los investigadores en Educación Matemática, por su vínculo con algunos

conceptos matemáticos como: la proporcionalidad, la tasa de *variación*, la función, las derivadas, entre otros (Villa, 2010).

Uno de los propósitos del Pensamiento Variacional, en la Educación Básica Primaria, es la construcción de diversos caminos para la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos como funciones y sus sistemas analíticos para obtener un aprendizaje significativo del cálculo numérico y algebraico (Vasco, 2006).

El Pensamiento Variacional es considerado como una herramienta de modelación de situaciones asociadas a la cuantificación, la *generalización*, la identificación de *patrones* y *regularidades*, el *cambio* y la *variación*, en contextos matemáticos, de otras ciencias y de la vida real; señalando como desarrollos propios de este Pensamiento, la resolución de problemas, las diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales, la *variación* y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables (MEN, 1998).

El Pensamiento Variacional está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la *variación* y el *cambio* en diferentes contextos matemáticos (Numérico, Métrico, Aleatorio, Variacional y Espacial) y de otras ciencias a través del proceso de modelación; se desarrolla a partir del estudio de *regularidades*, comprendidas como unidades de repetición, las cuales tienen lugar en la identificación y el reconocimiento de *patrones* que se repiten de una manera periódica en sucesiones o *secuencias* que presentan objetos, eventos, acontecimientos o formas (MEN, 2006).

Para el desarrollo del Pensamiento Variacional, el MEN (2006) establece cinco Estándares para los grados 4° y 5° de primaria, los cuales hacen referencia a:

- Describir e interpretar *variaciones* representadas en gráficas.

- Predecir *patrones* de *variación* en una *secuencia* numérica, geométrica o gráfica.
- Representar y relacionar *patrones* numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizar y explicar relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta *regularidad* en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
- Construir igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

De forma genérica, estos Estándares articulan el desarrollo de los cinco procesos generales de la actividad matemática propuestos por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y retomados por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006): formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Razonamiento Algebraico

Diversos autores (Kaput, 2000; Kieran, 1996; Burkhardt, 2001) formulan una aproximación al Razonamiento Algebraico en términos de la práctica, el objeto y el proceso matemático expuesto en el EOS. El Razonamiento Algebraico es el conjunto de prácticas operativas y verbales en la resolución de Tareas, en las cuales actúan objetos y procesos algebraicos como la simbolización, las incógnitas, las variables, las relaciones, las ecuaciones, la modelación, los *patrones* y la *generalización* (Godino et al., 2007).

Los *patrones* numéricos hacen alusión a la resolución de problemas para desarrollar el Razonamiento Algebraico (Herbert y Brown, 1997). La inclusión del desarrollo del Razonamiento Algebraico en las diferentes formas de Pensamiento implica el uso de símbolos en actividades matemáticas, particularmente las relaciones entre cantidades, el estudio del *cambio*, la *generalización* y la modelación (Kieran, 2004).

Además, “...este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas, concebida como la ciencia de los *patrones* y el orden, la mayoría de las áreas en matemáticas se centran en formalizar y *generalizar*” (Godino y Font, 2003, p.774).

Toda actividad matemática debe referenciar los procesos de *generalización* y de relaciones matemáticas (Kaput, 1999). El proceso de la *generalización* es característico del Razonamiento Algebraico; al igual, la simbolización, las indeterminaciones (uso de incógnitas y ecuaciones) para modelar situaciones (Mason, 1996; Mason y Pimm, 1984; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008).

La *generalización* es el centro del Razonamiento Algebraico (Schliemann, Carraher, Brizuela y Ernest, 2006). En este sentido, el proceso de *generalización* y el uso de símbolos, constituyen el núcleo esencial del Pensamiento Algebraico (Carpenter y Levi, 2000).

El Razonamiento Algebraico hace referencia a la actividad matemática orientada a la *generalización* y a la abstracción, a través del uso del lenguaje, la argumentación y la comunicación; como procesos cada vez más formales (Kaput, 1999). Además, comprende un Pensamiento Relacional que considera relaciones numéricas entre términos y ecuaciones de una expresión; este Razonamiento implica desarrollar un conocimiento sobre los objetos

matemáticos (números o variables), sus operaciones y propiedades (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005).

Se define el Razonamiento Algebraico en la Educación Primaria como el conjunto de prácticas tanto operativas como discursivas en toda resolución de Tareas, en las cuales participan objetos y procesos algebraicos (Castro, Godino y Rivas, 2010).

El Razonamiento Algebraico está asociado a la representación, la *generalización* y la formalización de *patrones* y *regularidades* en cualquier ámbito de las matemáticas (Numérico, Espacial, Aleatorio, Métrico, Variacional) o de otras ciencias (Godino y Font, 2003). A medida que se avanza en el estudio de esos objetos matemáticos se va adquiriendo mayor dominio en el uso del lenguaje y del simbolismo que permite comunicar el Pensamiento Algebraico, especialmente las ecuaciones, las funciones y las variables.

El Pensamiento Algebraico tiene que ver con el estudio de la *generalización* de *patrones* en diferentes contenidos de las matemáticas y se desarrolla a partir de *secuencias*, *patrones*, representaciones, gráficos, símbolos, entre otros (Mora, 2012). Además, el Pensamiento Algebraico se considera más general que el Pensamiento Aritmético. (Esquinas, 2008).

El Pensamiento Algebraico es un proceso de algebrización en donde la *generalización* cumple un papel fundamental (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). Estudia y analiza las cantidades indeterminadas, la expresión semiótica de sus objetos asociados a la *generalización*; además, relaciona el álgebra con objetos de naturaleza indeterminada, como por ejemplo, las incógnitas y las variables (Radford, 2010).

Por los aspectos comunes entre el Pensamiento Algebraico y el Razonamiento Algebraico, ambas conceptualizaciones se toman como equivalentes (Godino et al., 2012). A medida que se desarrolla el razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el

simbolismo necesario para apoyar y comunicar el Pensamiento Algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones (Godino, 2003). La inclusión del álgebra en el currículo escolar elemental supone aspectos simbólicos y procedimentales interrelacionados con el Razonamiento Algebraico, lo cual da cuenta de la equivalencia con el Pensamiento Algebraico (Godino et al., 2012).

De acuerdo con los autores citados se encuentran coincidencias en objetos matemáticos, entendidos como “patrones fijos de la actividad reflexiva, incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006, p. 111), en otras palabras “los objetos matemáticos emergen de sistemas de prácticas matemáticas, entendiéndose por práctica toda expresión (verbal, gráfica, simbólica, etc.) realizada por una o varias personas para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, generalizarse a otros contextos” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Los objetos matemáticos considerados en esta investigación y que se amplían a continuación son: *generalización, patrones o regularidades, secuencias, cambio y variación.*

Generalización. Es un proceso que tiene como objetivo encontrar y analizar sistemáticamente una ley de formación. Se considera como “el nivel más alto de la modelación” (MEN, 1998, p.77). La *generalización* se establece expresando la conjetura y la argumentación cada vez más formales (Mora, 2012). Es uno de los procesos que ocurren en cualquier nivel del Pensamiento Matemático y que está incluido en uno más global, el proceso de abstraer; “*generalizar* es inducir de casos particulares, identificar aspectos en común, para expandir dominios de validez” (Dreyfus, 1991, p.3).

“La *generalización* se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado, como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas” (Godino y Font, 2003, p.777). La *generalización* se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas –gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades, etc. – que permiten el tratamiento de situaciones de *variación* y dependencia en la resolución de problemas (MEN, 2006).

Patrones o regularidades. Son entendidos como unidades de repetición, se encuentran en sucesiones o *secuencias* que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un *patrón* (MEN, 2006), es “el núcleo o unidad de un *patrón* de repetición que forma la cadena más corta de elementos que se repiten” (Godino y Font, 2003, p.817) y puede entenderse como la unidad que se repite con *regularidad*.

Existen dos tipos de núcleos o *patrones*: *patrones* de repetición que son aquellos que se presentan de forma periódica, e inducen a la observación de *regularidades* y *secuencias* relacionadas con el proceso de la *generalización*; y *patrones* por recurrencia, en los cuales el núcleo cambia según alguna *regularidad* determinada por los términos de la *secuencia* (Bressan y Gallego, 2010). Los *patrones* existen y aparecen de manera natural en las matemáticas, pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados; los *patrones* existen en situaciones físicas, geométricas y numéricas (Godino y Font, 2003).

Secuencia. Las *secuencias* son un conjunto de signos ordenados ya sea orales, gestuales, físicos, comportamentales, gráficos y numéricos, que se forman a través de una regla de

repetición, dando origen al *patrón* de formación (Mora, 2012). Además, diferencia varios tipos de *secuencias*, clasificándolas en:

- *Secuencias* figurativas o icónicas representadas por medio de figuras o imágenes.
- *Secuencias* gráfico-numéricas son aquellas presentadas en gráficas y a su vez, se pueden representar por medio de números.
- *Secuencias* numéricas, se representan a través de los números.
- *Secuencias* por recurrencia hacen mención a las sucesiones, es decir, términos en los cuales se hallan en base al anterior, por ejemplo, la sucesión de Fibonacci.
- *Secuencias* tabulares hace mención aquellas *secuencias* que se presentan en tablas.

De manera general, las *secuencias* se pueden representar de tres formas diferentes, la enactiva, la icónica y la simbólica. La representación enactiva tiene que ver en cómo el sujeto representa los hechos, los acontecimientos y las experiencias por medio de la acción. Este tipo de representación está relacionado con la fase sensoriomotora propuesta por Piaget, es decir, con las sensaciones cenestésicas que tiene el sujeto al realizar una acción. En esta representación se puede hacer alusión a las que son de tipo manipulativo (Godino y Font, 2003). La representación icónica “se refiere a la representación de una situación mediante imágenes, esquemas, dibujos, iconos que modelen aquello que se quiere representar” (Mora, 2012, p. 8). La representación simbólica es la fase más abstracta, en donde se elige un símbolo arbitrario que no tiene relación directa con el objeto representado, con el fin de anunciar la situación que se quiere representar.



Cambio. Puede entenderse como la modificación en la cantidad de una magnitud. El *cambio* implica necesariamente comparaciones, para que un objeto cambie o no, es necesario un referente de comparación, si cambia es preciso tener en cuenta con respecto a qué cambia, si no cambia también es necesario tener en cuenta respecto de qué no cambia (Gómez, 2008). El estudio del *cambio* puede entenderse como una de las formas de pensar, como ocurre con el análisis de relaciones entre cantidades y la identificación de estructuras (Callejo, 2015).

Variación. Puede identificarse en los *cambios* de magnitud, específicamente la tasa de *cambio* en relación con el tiempo (MEN, 2006); por ejemplo, la aceleración es un *cambio* de velocidad con respecto al tiempo. La *variación* permite explicar de qué forma cambia una magnitud con respecto a otra (MEN, 1998). La *variación* se trata de un valor que cambia con relación a otro, y se logra por ejemplo cuando los alumnos preparan tablas con los valores correspondientes a cantidades de dos magnitudes relacionadas (Godino y Font, 2003).

Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS inicia a partir de la formulación de una ontología de objetos matemáticos que consideran a la matemática como actividad, con el objetivo de resolver problemas a través del lenguaje simbólico, del ámbito social y del sistema conceptual lógicamente organizado (Godino et al., 2007); por tal motivo es importante hacer alusión a los conceptos teóricos de práctica, objeto personal e institucional y el significado del proceso matemático (la

simbolización, relación, variables, incógnitas, *patrones*, *generalización* y modelación) de la cognición y la instrucción matemática.

En el EOS los objetos matemáticos primarios están relacionados, formando a su vez, configuraciones entendidas como redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas. Además, la cognición matemática considera la faceta personal, la cual hace referencia al resultado de la correlación entre el Pensamiento y la acción del sujeto individual ante una serie de problemas; y la faceta institucional que es el resultado de la interacción entre un grupo de individuos pertenecientes a una comunidad de prácticas, las cuales se construyen a partir del planteamiento y la resolución de situaciones problema (Godino, Batanero y Font, 2010).

Los sistemas de prácticas hacen referencia a prácticas operativas, discursivas y normativas que son puestas entre un grupo de personas, ante ciertos tipos de problemas. A partir de esta formulación del EOS, se admite una epistemología pragmática-antropológica de las matemáticas tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico) para resolver situaciones problema (Godino y Batanero, 1994).

Frente a la posición pragmatista del EOS, se entiende la comprensión como competencia y no como proceso mental, en otras palabras, se dice que un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en distintos escenarios de prácticas (Font, 2001). Por otro lado, al considerar las funciones semióticas como parte fundamental en el proceso relacional entre las entidades dentro de una práctica matemática, se entiende la comprensión en términos de funciones semióticas; es decir, se puede analizar la comprensión de un objeto matemático por parte de un sujeto ya sea como individuo o institución, en relación a las funciones semióticas que el sujeto puede establecer en la que

se considera al objeto como expresión o contenido. Cada función semiótica conlleva un acto de semiosis por un sujeto que interpreta y que a su vez establece un conocimiento; este último término, implica hablar del contenido de una o varias funciones semióticas (Godino y Aké, 2013).

Este enfoque plantea que el conocimiento matemático desarrolla las nociones de objetos y significados como una forma de describir las prácticas matemáticas desarrolladas en la resolución de un problema matemático (Castro, Godino y Rivas, 2011) y a su vez, la identificación de los tipos de objetos algebraicos en toda actividad matemática, como son: los elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas, símbolos, representaciones gráficas) que pueden ser de forma escrita, gráfica, oral o gestual; conceptos-definición que son entidades matemáticas para las cuales se pueden formular una definición (recta, punto, número); procedimientos (técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos), proposiciones (enunciados sobre conceptos) y los argumentos (enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, justificaciones, demostraciones o pruebas de las proposiciones usadas) (Font et al., 2007).

En la práctica matemática algebraica se presentan objetos y procesos algebraicos. Si bien, el EOS no propone una definición como tal acerca de lo que es un “proceso”, si rescata diferentes tipos de procesos en la actividad matemática, tales como procesos de instrucción, procesos de *cambio*, procesos sociales, procesos como consecuencia de prácticas, procesos cognitivos y metacognitivos (Godino et al., 2010).

En el EOS, las prácticas y los objetos matemáticos que intervienen pueden hacer referencia a diferentes puntos de vista de acuerdo al contexto y al lenguaje en el que se estén desarrollando (Godino et al., 2012). Estos tipos de objetos matemáticos se pueden

representar por medio del lenguaje alfanumérico en un contexto algebraico (Kieran, 1989), mientras que en el contexto escolar, se pueden dar otros tipos de representaciones, como el tabular, el gráfico, el gestual y el icónico (Radford, 2003; Arzarello, 2006).

Los objetos matemáticos se definen como una expresión ya sea verbal, gráfica, simbólica, etc. o acción realizada por uno o varios individuos con el objetivo de resolver problemas matemáticos y socializar la solución obtenida (Godino y Batanero, 1994). Los objetos matemáticos hacen alusión a dos niveles fundamentales; como primer nivel, hace referencia a todas las características y entidades observables en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones) y como segundo nivel, a la necesidad de las diferentes maneras de emerger el objeto, ya sea hablar, operar, ver, entre otros (Godino y Batanero, 1994).

En todo proceso de *generalización* se obtiene como resultado un tipo de objeto matemático llamado objeto intensivo, que hace alusión a la regla o generalidad que componen los elementos de un conjunto finito o infinito; en cambio, cuando se hace referencia a los objetos particulares, se refiere a los objetos extensivos (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

De esta manera, los objetos matemáticos no hacen alusión al concepto sino a cualquier entidad (objetos, cosas) ya sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo que intervienen en toda actividad matemática (Godino et al., 2007).

Las Tareas matemáticas pueden tener diferentes objetivos a la hora de solucionarlas, existen Tareas en donde se ponen en juego las relaciones binarias, las operaciones, las funciones, las estructuras, mientras que existen otras, que hacen énfasis en los diferentes

modos de expresión, específicamente del paso del lenguaje (natural, icónico, gestual) al lenguaje alfanumérico (Godino et al., 2012).

Bajo este enfoque, las Tareas se entienden como los procedimientos (actividades, ejercicios, talleres) requeridos para la solución de situaciones problema; lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos, con el propósito de generar conocimiento matemático (Godino, 2002).

Libros de texto

Un libro de texto es una publicación que tiene como objetivo guiar al profesor en el proceso de enseñanza de las temáticas, además está compuesto por contenidos didácticos ajustados a un referente curricular nacional. Es un instrumento que materializa el conocimiento referido al diseño de actividades que regulan la evaluación del proceso de aprendizaje del estudiante (Danisova, 2006).

Los libros de texto se definen como una herramienta esencial en la preparación y desarrollo de las clases por parte del profesor (Informe Cockcroft de 1985). Además, el libro de texto puede ser utilizado como currículum en relación con otros materiales didácticos y puede servir como un medio de instrucción (Rodríguez, 2006).

También, puede ser llamado como manual escolar, libro de clases, libro elemental, etc. con el objetivo de formular nociones importantes de una disciplina en particular (Choppin,

1980). Además las entidades educativas como la Biblioteca de Francia (1968) consideran que la función de los libros escolares es fundamentalmente en relación a la enseñanza.

Existe una distinción entre lo que son libros de texto y libros escolares, los libros de texto hacen referencia a su uso específicamente en la enseñanza, y aunque el libro escolar también se utiliza para la enseñanza, este no está relacionado con aspectos pedagógicos (Jhonsen, 1996).

El libro de texto es un recurso de material impreso técnico-educativo, el cual está estructurado de manera sistemática en relación a lo que proponen los programas de estudio y su uso radica en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Argibay, Celorio y Urkola, 1991).

Los libros de textos cumplen con seis características esenciales que la hacen diferenciar de otros géneros literarios escolares (Selander, 1990), las cuales son:

La forma en cómo se encuentran escritos los libros de textos orientados en los objetivos institucionales.

La función del libro de texto como reproductora de conocimientos ya existentes y no induce a la creación de nuevos conocimientos.

Como proceso pedagógico, en donde el estudiante adquiere el conocimiento a través de los libros y también por parte de los profesores.

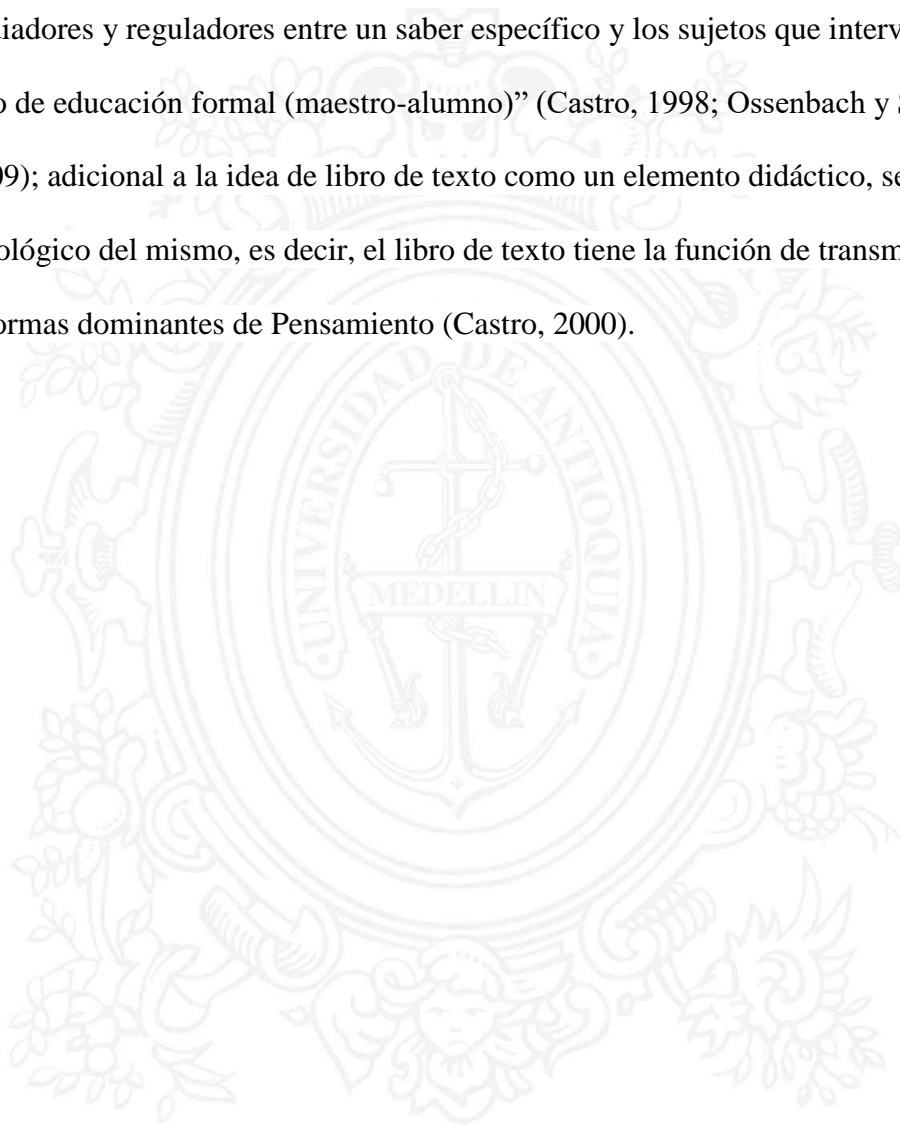
La forma en cómo se presentan los contenidos de tal manera que se puedan adaptar al conocimiento básico de los estudiantes.

Los libros de texto deben tener instrucciones y orientaciones que permitan la regulación de las lecturas.

Los libros de texto deben enmarcarse en el mundo real del estudiante.



Los libros de texto deben ser entendidos como “instrumentos didácticos que sirven como mediadores y reguladores entre un saber específico y los sujetos que intervienen en un proceso de educación formal (maestro-alumno)” (Castro, 1998; Ossenbach y Somoza, 2000, p.109); adicional a la idea de libro de texto como un elemento didáctico, se suma el aporte ideológico del mismo, es decir, el libro de texto tiene la función de transmitir diversas formas dominantes de Pensamiento (Castro, 2000).



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Capítulo 3

Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativa, que consiste en un conjunto de prácticas que buscan describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). En el caso particular de esta investigación corresponde a un análisis interpretativo de algunas Tareas asociadas al Pensamiento Variacional en algunos libros de texto de Matemáticas de los grados 4° y 5° de primaria.

Los enfoques de investigación naturalista, fenomenológica, interpretativa o etnográfica contiene una serie de concepciones, visiones, técnicas y estudios no cuantitativos (Hernández et al., 2010). El enfoque de este trabajo de investigación es naturalista e interpretativa porque se estudia los objetos matemáticos en su contexto, es decir, se hace un análisis interpretativo de los significados que tienen los objetos matemáticos (*secuencia, patrón, generalización, etc.*) presentes en las Tareas matemáticas asociadas al componente variacional en libros de texto.

Por otro lado, para la recolección de los datos cualitativos⁵ en la investigación se utilizan algunas técnicas como entrevistas semiestructuradas, donde se pueden realizar preguntas abiertas ya sea a través del lenguaje escrito, visual, verbal o no verbal, con el objetivo de analizarlos (Todd, 2005); además, la revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales e interacción con grupos, individuos, comunidades o colectivos (Hernández et al., 2010).

⁵ Los datos cualitativos son entendidos como descripciones de situaciones, eventos, perspectivas, puntos de vista, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones (Patton, 1990).

Los siguientes criterios se usaron para la elección de la muestra de los libros de textos:

Sugerencias de las maestras colaboradoras sobre los libros.

Ediciones correspondientes a los últimos cuatro años (2011-2014) de libros en formato impreso de diversas editoriales de divulgación en el Valle de Aburrá.

Declaración de las temáticas o componentes, es decir, que diferenciarán las temáticas y actividades de acuerdo al tipo de Pensamiento.

En la parte preliminar de la investigación se eligieron tres maestras, dos de ellas licenciadas en Educación Matemática, y otra licenciada en Primaria, y se les informó la finalidad del trabajo de investigación. En la selección de las maestras se tuvo en cuenta su disponibilidad horaria, su interés por participar en la investigación y adquirir aprendizajes significativos para el desarrollo de sus clases. Los datos se recogieron mediante tres entrevistas semiestructuradas con la finalidad de obtener información sobre los libros de texto utilizados por ellas y el uso que de ellos se hace para la enseñanza de las matemáticas; indagar sobre las nociones que tienen las maestras sobre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998); indagar por la inclusión de las propuestas de los Estándares y Lineamientos en la planeación de sus clases y por los conocimientos que las maestras tienen acerca del Pensamiento Variacional.

Esta investigación está enfocada bajo un estudio de caso, el cual no hace énfasis en la elección de un método sino en la elección de un objeto de estudio, en este caso, libros de texto (Stake, 1994).

El estudio de caso se inclina más por la observación y el análisis en vez de la *generalización* cuantitativa de los datos, con el fin de desarrollar teorías que permitan

entender los fenómenos o situaciones a estudiar (Robson, 2002). El estudio de caso se establece en un contexto organizacional o institucional, de tal manera que todo lo que se pueda extraer del caso, pueda ser definido por las características determinadas por individuos y grupos involucrados; es decir, el estudio de caso implica observar un caso o fenómeno en su contexto real (organizacional o institucional) (Hitchcock y Hughes, 1995).

Esta investigación es considerada un estudio de caso dado que sólo se seleccionaron algunos libros de texto de matemáticas de 4° y 5° grado de primaria, usados en el ámbito escolar del Valle de Aburrá.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se hace un análisis interpretativo de los objetos matemáticos considerados en esta investigación que son *generalización, patrones o regularidades, secuencias, cambio y variación*; los cuales se utilizaron en el análisis y la adecuación de algunas Tareas matemáticas, presentadas en ocho libros de texto de matemáticas de los grados 4° y 5° de primaria.

La investigación se desarrolla en tres fases comprendidas entre el II semestre del 2014 y el I semestre del 2016. Las diferentes fases estuvieron permeadas por la revisión bibliográfica y la reflexión constante como maestras en formación, con una mirada crítica e investigativa de algunos los libros de texto de matemáticas de los grados 4° y 5° de primaria. En la Tabla 2 se describen cada una de éstas fases.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Tabla 2. Fases de la investigación.

Fase 1: Contextualización de la investigación	Fase 2: Recolección de datos	Fase 3: Sistematización
Semestre II – 2014	Semestre I y II – 2015	Semestre I – 2016
<p>Diseño y aplicación de tres entrevistas semiestructuradas a tres maestras colaboradoras.</p> <p>Selección de libros de texto de matemáticas para el análisis.</p> <p>Planteamiento de objetivos.</p> <p>Inicio de la revisión bibliográfica que apoya el proceso investigativo.</p>	<p>Identificación, indagación y selección de algunas Tareas asociadas al Pensamiento Variacional de los 8 libros de texto seleccionados.</p> <p>Análisis preliminares de las Tareas.</p> <p>Revisión bibliográfica como soporte teórico de la investigación.</p> <p>Delimitación del marco teórico y del enfoque metodológico.</p>	<p>Análisis y adecuación de Tareas asociadas al Pensamiento Variacional, de acuerdo con la fundamentación teórica de la investigación y los objetos matemáticos establecidos.</p> <p>Sistematización del informe.</p>

Capítulo 4

Análisis de Tareas

En este capítulo se presenta el análisis de 13 Tareas, declaradas en 8 libros de texto de 4° y 5° grado, como asociadas al Pensamiento Variacional. El análisis se realizó con base a lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas referidos al Pensamiento Variacional (MEN, 2006), la documentación internacional alusiva al Razonamiento Algebraico y los objetos matemáticos definidos como entidades conceptuales (objetos, cosas) ya sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo que intervienen en toda actividad matemática (Godino et al., 2007).

Análisis N°1

En el libro de texto de 4° de la editorial E1 se presenta la siguiente Tarea con el objetivo de completar la tabla y responder la pregunta de acuerdo con la información acerca del número de huevos que pone cierta cantidad de gallinas en un tiempo determinado. La Tarea indaga por la *variación* que se presenta en la tabla.

2 Estrategia: completar una tabla

Lee y completa la tabla. Luego, responde.

Las técnicas modernas de crianza de gallinas han elevado la producción de huevos por año. Así, una gallina puede llegar a poner cerca de 300 huevos en un año. Además, se estima que una persona puede llegar a consumir 170 huevos al año.

Número de personas	Cantidad de huevos

Número de gallinas	Cantidad de huevos

- Suponiendo que cada gallina pone 300 huevos en un año, ¿cuántas gallinas se necesitan como mínimo para cubrir las necesidades de una familia de 6 personas?

Figura 2. Tarea 2 - página 81 de la E1 4° grado.

La *variación* puede encontrarse en los *cambios* de una magnitud con respecto al tiempo (MEN, 1998-2006); es decir, la *variación* explica el *cambio* de una magnitud con respecto a

otra y se explicita a través de la elaboración de tablas con los valores correspondientes a cantidades de magnitudes relacionadas (Godino y Font, 2003).

No obstante, la pregunta formulada en la Tarea no explora el objeto matemático *variación* de forma que favorezca el desarrollo del Pensamiento Variacional, dado que está enfocada en la resolución de una situación problema que no permite razonar, establecer relaciones de dependencia o identificar la *variación* en la tabla.

El hecho de que la indicación principal de la Tarea sea completar la tabla dada, posiblemente hace que la aproximación a la *variación* se dé mediante procesos aritméticos tales como la suma y la multiplicación. Ahora bien, la Tarea hace referencia a objetos particulares (objetos extensivos) (Godino et al., 2011), dado que se limita el estudio variacional lo cual depende de la extracción de datos de la tabla y no enfatiza en la *variación* como medio para lograr un proceso de *generalización*.

En consecuencia, la Tarea no indica procesos del Pensamiento Variacional, debido a que éste no se desarrolla por medio de la organización de la *variación* en la tabla (MEN, 1998).

Análisis N°2

En el libro de texto de 4° de la editorial E1 se presenta una Tarea que consiste en responder tres preguntas, de acuerdo con la gráfica que representa la población de Bogotá durante un rango de tiempo; en la gráfica, se observan dos variables: Años (fechas) y Número de habitantes (en miles). La Tarea indaga por la *variación* del número de habitantes en un tiempo determinado.

3 Estrategia: extraer datos de una gráfica

Observa la gráfica. Luego, responde.

La gráfica muestra la población aproximada de Bogotá durante algunos años hasta el 2005.

- ¿Cuál fue la población en 1993?

- ¿En cuánto varió la población entre los años 1964 y 2005?

- ¿En cuánto varió la población entre los años 1951 y 1973?



Figura 3. Tarea 3 - página 81 de la E1 4º grado.

El objeto matemático *variación* adopta en la Tarea el significado de operación de resta entre los datos de la población; las preguntas formuladas conducen a ese procedimiento matemático.

Se observa en la gráfica que en el eje horizontal no existe una distribución proporcional entre los años y la amplitud de sus intervalos; es decir, mientras que la distancia de un intervalo a otro es la misma, la cantidad de años no lo es.

Por otro lado, la Tarea no se orienta en describir e interpretar las *variaciones* representadas en la gráfica, ni analiza, ni indaga por las relaciones de dependencia entre la cantidad de habitantes y años, los cuales son procesos recomendados desde los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006).

En ese sentido, la Tarea no evidencia procesos del Pensamiento Variacional, puesto que, éste involucra conceptos y procedimientos que permiten analizar y modelar matemáticamente situaciones problema tanto de la vida cotidiana como de otras ciencias, en donde la *variación* cumple un papel fundamental (MEN, 1998).

Análisis N°3

En el libro de texto de 4° de la editorial E1, la Tarea presenta cuatro ecuaciones, cada una con cuatro opciones para reemplazar el dato que hace falta. Cada ecuación tiene en el lado izquierdo una suma o una resta de dos términos, uno de ellos representado por un triángulo, el cual adquiere el significado de una incógnita.

2 Marca con un \checkmark el número que se puede cambiar por el Δ para que se cumpla la igualdad.

$5 + \Delta = 20$	$8 - \Delta = 2$	$9 - \Delta = 5$	$2 + \Delta = 10$
<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 15	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 9

Figura 4. Tarea 2 - página 193 de la E1 4° grado.

El objeto institucional que interviene en la Tarea es la ecuación, ya que consiste en encontrar el valor numérico de la incógnita. En ese sentido, toma relevancia el papel que juegan los conceptos, propiedades, relaciones y procedimientos vinculados con el lenguaje para hallar el valor de la incógnita en la solución algebraica, representada por una ecuación (Godino y Castro, 2008).

En las ecuaciones, el símbolo “Triángulo” representa la incógnita. El uso de símbolos permite expresar de manera eficaz las *generalizaciones de patrones* y relaciones (Kieran, 2004). Entre los símbolos se destacan los que representan variables o incógnitas y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.

...las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como



representaciones de cantidades que varían, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula (Godino et al., 2014, p.4).

La forma en que se presenta la Tarea, induce a que el proceso de solución consista en reemplazar los números que se dan en cada columna, hasta encontrar el que cumpla con la igualdad; es decir, un proceso de ensayo y error aplicando el algoritmo de la suma o resta. Se reduce a la validación de un resultado o a la realización de operaciones en el lado izquierdo de la igualdad reemplazando el símbolo “Triángulo” por las cantidades dadas; cabe resaltar que el símbolo asume el rol de variable haciendo ver la Tarea como de tipo algebraico, lo cual hace referencia al objeto institucional que brinda el texto.

Además, el símbolo que representa la incógnita se presenta siempre en la misma posición; es decir, como segundo componente en el lado izquierdo de la igualdad, lo cual estigmatiza una posición estática de la variable o incógnita en una ecuación.

Por otro lado, el significado institucional del signo igual ($=$) en la Tarea se presenta como un resultado y no como una relación de equivalencia, en oposición a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) que estipulan, el reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas. De igual manera, en la estructura de la Tarea, se observa que las cuatro ecuaciones están compuestas siempre por tres elementos, donde dos se operan y dan como resultado un tercer elemento. Esto crea una tendencia sistémica en la representación de ecuaciones.

En conclusión, la forma de presentación de la Tarea la ubica principalmente en el Pensamiento Numérico y no en el componente Variacional.

Análisis N°4

En el libro de texto de 5° de la editorial E4, se encuentra una Tarea que presenta información del rebote de una pelota, y plantea tres preguntas, las cuales indagan por la altura alcanzada por la pelota en un determinado rebote.

- Una pelota que es lanzada desde una gran altura rebota 1,94 metros la primera vez y las siguientes veces, la mitad de lo que rebotó la vez anterior.
- ¿Qué altura alcanza en el segundo rebote?

 - ¿Qué altura alcanza en el quinto rebote?

 - ¿Qué altura alcanza en el décimo rebote?



Figura 5. Tarea 6c - página 161 de la E4 5° grado.

La Tarea presenta el *patrón* de formación, como objeto matemático, al mencionar que la altura alcanzada por la pelota en un rebote, es la mitad de la alcanzada en el rebote anterior. Los *patrones* existen y aparecen de manera natural en las matemáticas, existen en situaciones físicas, geométricas y numéricas (Godino y Font, 2003). De hecho, la Tarea surge de un contexto natural, lo cual la hace interesante para los niños; sin embargo, no permite que el estudiante descubra el *patrón* mediante la exploración de la Tarea.

La Tarea al presentar el *patrón* de formación, induce a que la solución se realice por medio de divisiones sucesivas por dos y no a indagar por la *regularidad* y las relaciones entre los rebotes de la pelota. En ese sentido, la Tarea corresponde al Pensamiento Numérico, debido a que se resuelve al dividir por dos el término anterior teniendo como primera altura 1.94 metros. Al obtener estos valores se puede dar respuesta a las preguntas planteadas; además, la Tarea no permite representar y relacionar el *patrón* numérico que se establece en la situación, como lo establece los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). La definición de las matemáticas que va más allá de la

descripción usual de ellas como la ciencia del espacio y el número, es que las matemáticas parten de una base empírica para detectar en ella esquemas que se repiten, que podemos llamar “modelos” o “patrones” (“patterns”), y en la multitud de esos modelos o patrones detectar de nuevo otros más y teorizar sobre sus relaciones para producir nuevas estructuras matemáticas, sin poner límites a la producción de nuevos modelos mentales, nuevas teorías y nuevas estructuras (Steen, 1988).

Análisis N°5

En el libro de texto de 5° de la editorial E3, se presentan dos Tareas que proponen *secuencias* gráficas. Lo que pretenden ambas Tareas es que se completen las *secuencias*, específicamente que se identifique la posición cinco, lo cual induce pensar que las *secuencias* son finitas y que terminan en esa posición.

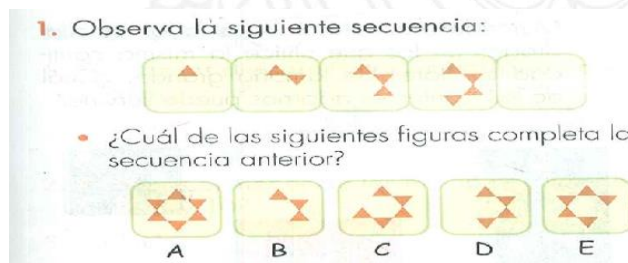


Figura 6. Tarea 1 - página 61 de la E3 5° grado.

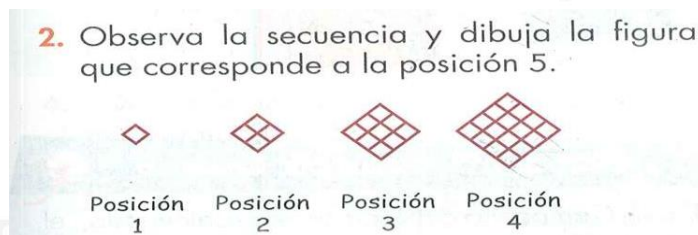


Figura 7. Tarea 2 - página 61 de la E3 5° grado.

En la Tarea 1, ofrecer las opciones de respuesta limita la exploración e indagación que pudiera hacer quien resuelve la situación acerca de las diferentes estrategias que se pueden emplear para completar la *secuencia*.

El objeto matemático institucional que se identifica en las Tareas es la *secuencia*, dado que ambas buscan que se complete la posición siguiente a la derecha en el arreglo de las figuras. En las Tareas, el significado que se presenta sobre las *secuencias* da cuenta de un conjunto de signos gráficos (Mora, 2012); pero no explora, ni indaga por el *patrón* de formación en las *secuencias*.

Las Tareas se apoyan en el Estándar “predecir *patrones* de *variación* en una *secuencia* numérica, geométrica o gráfica”, dado que exploran el objeto matemático *secuencia*, pero lo hacen de manera superficial y asume la *secuencia* como finita, al indagar solo por la figura de la 5° posición.

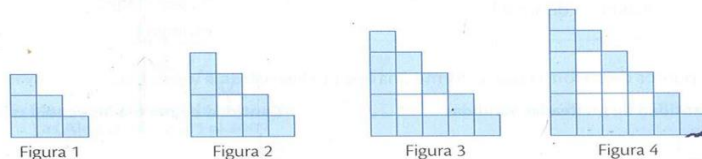
Ambas Tareas están en concordancia con objetos matemáticos propios del Pensamiento Variacional, pero imposibilitan el proceso de *generalización* -aspecto predominante en este Pensamiento- dado que no indagan por el reconocimiento del *patrón* de formación ni por la *regularidad* en el número de triángulos de cada figura (Tarea 1) o en el número de cuadrados de cada figura (Tarea 2), lo cual tiene lugar en sucesiones o *secuencias* que presentan objetos, eventos, acontecimientos o formas (MEN, 2006).

Análisis N°6

En el libro de texto de 4° de la editorial E4 se presenta una Tarea que ofrece las cuatro primeras posiciones de una *secuencia* gráfico numérica (Mora, 2012) con arreglos de cuadrados azules y cuadrados blancos, una tabla para completar los datos y una pregunta

que indaga por la ley de formación para los cuadrados azules, y se pide completar las posiciones cinco y seis de la *secuencia*.

3. Observa los cuatro primeros pasos de la secuencia. Luego, resuelve.



Completa la tabla.

Figura	1	2	3	4
Cuadros azules				
Cuadros blancos				

Responde. ¿Cuál es la ley de formación para los cuadrados azules?

Dibuja las figuras 5 y 6 que continúan la secuencia.

Figura 5

Figura 6

Figura 8. Tarea 3 - página 115 de la E4 4° grado.

En la Tarea está presente el objeto matemático *secuencias* figurativas o icónicas, las cuales se refieren a un conjunto de figuras que se forman a través de una regla de repetición o una ley de formación (Mora, 2012).

La Tarea indaga por la ley de formación de los cuadrados azules específicamente, pero no retoma la ley de formación de los cuadrados blancos o del número total de cuadrados de la *secuencia*. Aunque la Tarea corresponde al Pensamiento Variacional, las preguntas planteadas no conlleva al proceso de *generalización*; la Tarea podría explorar *regularidades*, las relaciones entre el número de cuadrados blancos y el número de cuadrados azules. Además, se indaga por las figuras que continúan a su derecha, lo cual no permite cuestionar por el proceso de reversibilidad.

Análisis N°7

En el texto de 5° de la editorial E2, se presentan dos Tareas que proponen el objeto matemático- proporcionalidad directa e inversa. La Tarea 1 ofrece cuatro parejas de magnitudes con la intención de comprobar si la correlación entre ambas es directa o inversa.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Para cada pareja de magnitudes, decide si su correlación es directa o inversa.
 - a. Número de helados y costo.
 - b. Número de buses y cantidad de pasajeros.
 - c. Número de niños y cantidad de dulces en una bolsa que le corresponde a cada uno.
 - d. Distancia recorrida en un viaje y distancia que queda por recorrer.

Figura 9. Tarea 1 - página 163 de la E2 5° grado.

La Tarea 3 presenta un enunciado referido al dinero que recibe alguien para gastar en una semana y una gráfica en la cual se relaciona el dinero total gastado y el dinero que queda.

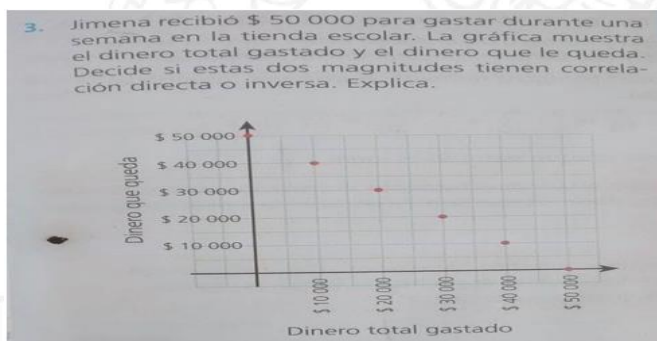


Figura 10. Tarea 3 - página 163 de la E2 5° grado.

La Tarea 1 presenta parejas de magnitudes a partir de enunciados; mientras que la Tarea 3 presenta la relación entre las magnitudes: dinero gastado y dinero que queda,

mediante dos representaciones, una textual y una gráfica; sin embargo, la manera cómo se presenta limita la interpretación de la correlación y la proporcionalidad de los datos, al dar indicaciones tácitas de utilizar el algoritmo de la resta entre el dinero total y el que se gasta, para obtener el dinero que queda. La Tarea se limita a preguntar si la correlación es directa o inversa y no pide justificación para la respuesta. Además, la gráfica brinda la información y no ofrece la posibilidad de completarla o manipularla, por lo que no es posible alcanzar una interpretación propia de la gráfica, ni tampoco identificar la *variación* entre las magnitudes. Las Tareas exploran el objeto matemático correlación entre magnitudes y por la proporcionalidad directa e inversa entre ellas, pero lo hacen de una forma superficial, es decir, no exploran en las situaciones la *variación* entendida como el *cambio* de una magnitud con respecto a otra.

El tratamiento de las magnitudes y sus procesos de medición se constituyen en la base conceptual sobre la cual se organizan los procesos conceptuales de cada Pensamiento. El estudio de la *variación* hace necesaria una referencia a la identificación de variables, y por tanto, al reconocimiento de las magnitudes y de las medidas de las cantidades asociadas (MEN, 2006, p. 69).

Análisis N°8

En el texto de 5° grado de la editorial E4, se presentan dos Tareas que exploran de diferentes maneras, la ley de formación (*patrón*) en *secuencias* numéricas. La Tarea 1 presenta dos *secuencias* para identificar la ley de formación (*patrón*), mientras, que la Tarea 2 proporciona la ley de formación y el primer término para construir las *secuencias*.

1. Completa cada secuencia. Luego, escribe la ley de formación.

▶ $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \square, \frac{5}{2}$ ▶ $\frac{3}{4}, \frac{15}{4}, \frac{75}{4}, \square, \square, \square$

Ley de formación _____ Ley de formación _____

Figura 11. Tarea 1 - página 104 de la E4 5° grado.

2. Construye cada secuencia de fracciones, teniendo en cuenta la ley de formación y el primer término.

▶ Ley de formación: restar $\frac{1}{3}$ Primer término: $\frac{27}{5}$

▶ Ley de formación: multiplicar por 6 Primer término: $\frac{3}{4}$

Figura 12. Tarea 2 - página 105 de la E4 5° grado.

La Tarea 1 se soluciona comparando cantidades sucesivas o aplicando las operaciones de suma y resta entre fracciones. La Tarea 2 se resuelve iniciando las *secuencias* con el primer término y aplicando las operaciones de resta o multiplicación para hallar los demás términos de la *secuencia*, lo cual hace que la Tarea esté orientada principalmente al desarrollo del Pensamiento Numérico.

El objeto institucional presente en ambas Tareas es el *patrón* que se identifica en una *secuencia*, los *patrones* son entendidos como unidades de repetición que se encuentran en sucesiones o *secuencias* (MEN, 2006). Además, los *patrones* de repetición inducen a la observación de *regularidades* y *secuencias* relacionadas con el proceso de la *generalización* (Bressan y Gallego, 2010).

Ahora bien, las *secuencias* que presentan las Tareas no indagan, ni conlleva al proceso de *generalización*, ya que se limitan a encontrar el *patrón* de formación (Tarea 1) y a continuar la *secuencia* por medio de sumas o multiplicaciones (Tarea 2).

Análisis N°9

En el texto de 5° grado de la editorial E1, la Tarea propone cuatro enunciados cada uno con cuatro opciones de respuesta, la indicación está orientada a elegir la opción correspondiente a cada uno. Se presentan dos ejemplos de cómo se expresa simbólicamente la relación “menor que” y “mayor que”.

4 Lee la información.
Para expresar algunos enunciados en forma de inecuaciones se utilizan letras.

Ejemplo 1

La expresión:
Colombia tiene más de 10 puentes festivos durante el año, se puede escribir así:

$$p > 10$$

Número de puentes festivos.

Ejemplo 2

La expresión:
Tatiana tiene menos de 8 años, se escribe así:

$$T < 8$$

Edad que tiene Tatiana.

Edad máxima.

■ Encierra la inecuación que corresponde a cada enunciado.

<div style="border: 1px solid green; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">La temperatura fue menor que 10 °C.</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $T < 10$ $T > 11$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $T > 10$ $T < 11$ </div>	<div style="border: 1px solid green; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Jaime tiene más de 12 años.</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $J > 12$ $J > 13$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $J < 12$ $J < 13$ </div>
<div style="border: 1px solid green; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Las galletas cuestan menos de \$1.000</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $g > 1.000$ $g < 9.000$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $g < 1.000$ $g > 9.000$ </div>	<div style="border: 1px solid green; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Este mes trabajo más de 30 días.</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $t > 30$ $t < 31$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: small;"> $t < 30$ $t > 31$ </div>

Figura 13. Tarea 4 - página 89 de la E1 5° grado.

El objeto institucional de la Tarea es la representación simbólica de las relaciones de orden “menor que” y “mayor que”, lo cual se interpreta como una inecuación, en la medida que utiliza variables.

Se puede inferir que el texto presenta la Tarea como propia del Pensamiento Variacional, por el uso de letras en sus enunciados. El hecho de usar letras para representar enunciados no da cuenta del desarrollo del Pensamiento Variacional. El uso de letras no es

evidencia de desarrollo del Razonamiento Algebraico, ni la falta de ellas indica incapacidad de razonar algebraicamente (Mason et al., 1985).

La Tarea no presenta preguntas orientadoras que indaguen por el *cambio* de las magnitudes propuestas, ni por el significado que tienen las inecuaciones.

Análisis N°10

En el texto del grado 5° de la editorial E1, la Tarea enuncia una situación donde se establece la razón entre el número de hombres y mujeres y se indaga por el número de hombres, dada la cantidad de mujeres.

1 Plantea una regla de tres para resolver cada problema.

- En una reunión hay 3 hombres por cada 4 mujeres. Si se conserva la misma razón, ¿cuántos hombres habría si hubiera 12 mujeres?

Cantidad de hombres	
Cantidad de mujeres	



Si hubiera 12 mujeres habría _____ hombres.

Figura 14. Tarea 1 - página 230 de la E1 5° grado.

El objeto matemático institucional en la Tarea es la proporcionalidad directa, se presenta una tabla para completar cuatro datos con la cantidad de hombres y mujeres de acuerdo a la información. La tabla limita la exploración de *regularidades* y la identificación de *patrones* de formación, lo cual está en contradicción con lo que se plantea los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) al proponer los procesos de representar y

relacionar *patrones* numéricos con tablas y reglas verbales, y predecir *patrones* de *variación* en una *secuencia* numérica, geométrica o gráfica.

En ese sentido, la Tarea no da cuenta de los procesos que favorecen el desarrollo del Pensamiento Variacional, dado que se limita a procesos aritméticos.

Análisis N°11

En el libro de texto de 5° grado de la editorial E1 y en el libro de texto de 4° de la editorial E4, se presentan dos Tareas que exploran *patrones* de formación.

En la Tarea de la editorial E1, se presenta una situación donde se relacionan la cantidad de canastas y la cantidad de botellas de gaseosas que contienen, el objetivo es completar una tabla con datos específicos; además ofrece un plano cartesiano para elaborar la gráfica de la situación.

- 1 Completa cada tabla. Luego, elabora las gráficas.

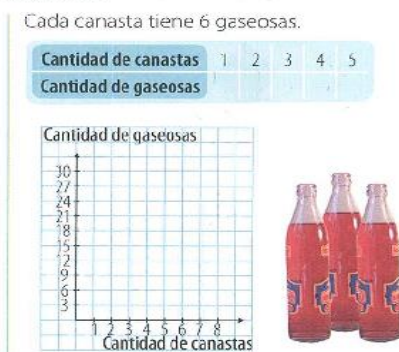


Figura 15. Tarea 1 - página 222 de la E1 5° grado.

La Tarea de la editorial E4, propone que una hora de internet cuesta mil quinientos pesos (\$1.500), presenta una tabla para completar el número de horas y el precio de las horas de internet, y plantea una pregunta donde se indaga por el precio de ocho horas de internet.



1. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que el valor de cada hora en un café Internet es \$1.500. Luego, responde.

Número de horas	1	2	3	4
Precio				

- ¿Cuál es el precio de 8 horas de Internet?

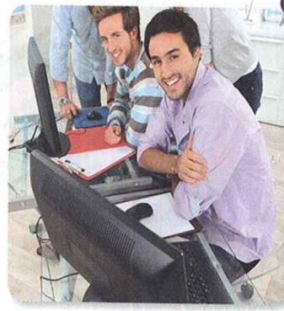


Figura 16. Tarea 1 - página 242 de la E4 4° grado.


Si bien en las Tareas se presentan situaciones diferentes, ambas manejan el objeto matemático *patrón* de formación, al mencionar que una canasta tiene seis gaseosas y que el valor de una hora en un café internet es mil quinientos pesos (\$1.500). Lo cual está en contraste con la idea de que los *patrones* existen y aparecen de manera natural en las matemáticas, pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados; los *patrones* existen en situaciones físicas, geométricas y numéricas (Godino y Font (2003).

Las Tareas corresponden principalmente al Pensamiento Numérico, porque se limitan a completar los datos de las tablas, a través de la realización del algoritmo de la multiplicación, a completar la gráfica y contestar la pregunta. Limita las posibilidades de razonar, encontrar *patrones* y *regularidades*, establecer relaciones de dependencia e identificar la *variación* en las tablas; además, no exploran los procesos de *generalización*, los cuales se logran a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas que permiten el tratamiento de situaciones de *variación* y dependencia en la resolución de problemas (MEN, 2006).

Análisis N°12

En el texto de 4° de la editorial E3 se ubica la Tarea que se registra en la figura 17, consiste en una *secuencia* gráfico-numérica (Mora, 2012) y se debe completar una tabla de acuerdo a los datos.

2. Observa la siguiente secuencia.




Posición 1 Posición 2 Posición 3

- Completa la siguiente tabla de acuerdo con las características de la secuencia.

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Número de triángulos							

- ¿Qué forma tienen las figuras de las posiciones pares? _____
- Dibuja la figura de la posición 7.



- ¿La figura que se presenta a continuación pertenece a la posición 8? Explica tu respuesta.




Figura 17. Tarea 2 - página 104 de la E3 4° grado.

Los objetos matemáticos presentes en la Tarea son los *patrones o regularidades* que intervienen en la construcción de una *secuencia* gráfico numérica; la cual, es una *secuencia* que se presenta en gráficas y a su vez, se puede representar por medio de números (Mora, 2012). Sin embargo, la interpretación de la Tarea puede alterarse de forma que se construya otra *secuencia* por falta de indicaciones en cuanto a los *patrones o regularidades*; es decir, aunque visualmente es posible identificar que en la *secuencia* los triángulos se adicionan en forma horizontal, la Tarea no ofrece certeza de ello, de forma que si el triángulo es adicionado en otra posición, no se cumpliría la relación entre las posiciones pares e impares de las figuras y la forma de la figura.

Como la pretensión de la Tarea es que el triángulo se adicione en forma horizontal, las preguntas indagan por la *regularidad* entre figuras geométricas que se da a partir de la 2^o posición, dado que se obtiene una *regularidad*: las figuras de las posiciones pares son paralelogramos y las figuras de las posiciones impares son trapecios.

La Tarea corresponde al Pensamiento Variacional puesto que la Tarea indaga por una *regularidad*; sin embargo, no ofrece posibilidades para razonar, justificar y encontrar las *regularidades*, no permite establecer relaciones de dependencia e identificar la *variación* en la *secuencia*. Además, no se explora la relación entre el número de triángulos de cada figura y el número de palillos que lo conforman; lo cual conlleva a un proceso de *generalización*.

En otro libro de texto del grado 4^o de la editorial E4 (figura 18), se presenta la solución de la misma Tarea de la figura 17, pero se indaga por la relación entre el número de triángulos y el número de palillos. La solución en el paso 1 se reduce a completar la tabla y en el paso 2 se enuncian los datos obtenidos en la misma; pero no se indaga por el proceso de *generalización*, ni la relación entre la posición de la figura y el número de palillos que la componen.

Secuencias con figuras geométricas

Una **secuencia con figuras geométricas** es un conjunto ordenado de figuras en el que se destaca un primer elemento y cada una de las figuras que siguen se construye según una determinada ley de formación.

Ejemplo

La siguiente secuencia está formada a partir de triángulos hechos con palillos. ¿Cuántos palillos se usan en las figuras 4 y 5 que continúan esta secuencia?



Paso 1

Se realiza una tabla relacionando la cantidad de triángulos de cada figura, con la cantidad de palillos.

Figura	1	2	3
Número de triángulos	1	2	3
Número de palillos	3	5	7

Paso 2

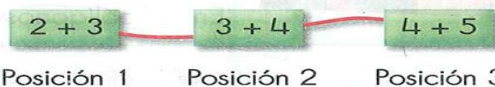
Se busca una relación entre los valores de la tabla. Al observar las figuras, se puede verificar que los triángulos aumentan de uno en uno y la cantidad de palillos que se utilizan, aumenta de dos en dos; por lo que, en la figura 4 debe haber 4 triángulos y se usan 9 palillos y en la figura 5 deben haber 5 triángulos formados con 11 palillos.

Figura 18. Tarea de la página 114 de la E4 4° grado.

Análisis N°13

En el texto de 4° de la editorial E3 se muestra la Tarea que se registra en la figura 19, la cual indaga por la *secuencia* de sumas y la identificación del *patrón* numérico.

2. Observa la siguiente secuencia:



- Escribe la suma que corresponde a la posición 5.
- ¿A qué posición corresponde la suma $8 + 9$?
- Describe el patrón numérico de esta secuencia.

Figura 19. Tarea 2 - página 107 de la E3 4° grado.

El objeto matemático institucional que se identifica en la Tarea es la *secuencia numérica*, busca explorar la información para una posición determinada de la *secuencia*.

Las *secuencias* son un conjunto de signos ordenados (Mora, 2012), los cuales en este caso

son los dos dígitos consecutivos en la operación suma, dando origen al *patrón* de formación. En la Tarea, el significado que se da a la *secuencia* coincide con Mora en tanto se presentan como conjunto de signos.

La Tarea corresponde al Pensamiento Variacional y se ubica en uno de los Estándares propuestos para este conjunto de grados: “predecir *patrones* de *variación* en una *secuencia* numérica”, pero limita la exploración en posiciones específicas de la *secuencia*, la Tarea es superficial y poco explora el proceso de *generalización*, indaga por posiciones particulares y no por la *regularidad* en la *secuencia*. El proceso de *generalización* es importante para el desarrollo del Pensamiento Variacional porque la actividad matemática debe estar orientada a procesos cada vez más formales como la *generalización* y a la abstracción a través del uso del lenguaje, la argumentación y la comunicación (Kaput, 1999).

Capítulo 5

Adecuación de Tareas

Este capítulo presenta la adecuación de 6 de las Tareas analizadas en el capítulo anterior. Según la Real Academia Española, (2016), adecuar significa adaptar algo a las necesidades o condiciones de una persona o de una cosa; en esta investigación, se adaptaron las Tareas analizadas de acuerdo con los siguientes criterios:

- El cumplimiento de los Estándares Básicos de Matemáticas para grado 4° y 5° primaria; en cuanto a la interpretación de *variaciones* representadas en gráficos, predicción de *patrones* de *variación* en *secuencias*, representación de *patrones* numéricos con tablas, explicación de relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo, y la construcción de igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones (MEN, 2006).
- El uso de diferentes representaciones, la inducción al proceso de *generalización* y formalización de *patrones* y *regularidades* en cualquier ámbito de las matemáticas (Numérico, Espacial, Aleatorio, Métrico, Variacional) o de otras ciencias (Godino y Font, 2003).
- La posibilidad de transversalización del Pensamiento Variacional con los demás Pensamientos matemáticos.
- La exploración de diferentes tipos de secuencias: figurativas o icónicas, gráfico-numéricas, numéricas, por recurrencia, tabulares (Mora, 2012).

Adecuación N°1

Corresponde a la Tarea del Análisis N°1, figura N°2. La adecuación se hace a través de un enunciado y una gráfica, se plantean preguntas que orientan la reflexión y una tabla con el número de huevos que consumen tres personas en un tiempo determinado.

En la figura 20 se muestra el número de personas y la cantidad de huevos que éstas consumen al año. Además, se sabe que una gallina pone trescientos huevos al año.

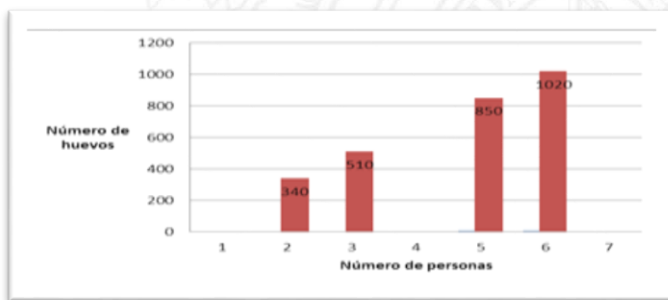


Figura 20. Adecuación de la Tarea 1 - página 81 de la E1 4° grado.

De acuerdo con el enunciado y a la información de la gráfica, responda las siguientes preguntas:

- Complete el gráfico con los datos que hacen falta.
- Si en un corral hay 12 gallinas, ¿a cuántas personas alcanzan a alimentar con la cantidad de huevos que ponen?
- Si se tienen 2040 huevos, ¿a cuántas personas se pueden alimentar al año con esa cantidad de huevos?, ¿cuántas gallinas como mínimo se requieren para obtener esa cantidad de huevos?
- ¿Cómo encontrarías la cantidad de huevos que consumen al año, un grupo de 30 personas?
- Si una familia está conformada por 7 personas ¿cuántas gallinas se necesitan para alimentar a la familia?
- En la tabla se registra el número de huevos que consumen anualmente tres



personas, completa la tabla con los datos que faltan.

Tabla 3. Tabla propuesta en Adecuación N°1.

N° de huevos		170		510	
Tiempo	2° mes		5° mes	1 año	2 años

Inicialmente, en la adecuación de la Tarea se proponen varias preguntas que permiten el reconocimiento y descripción de *patrones y regularidades*, la identificación de la *variación* entre el número de huevos que consumen cierta cantidad de personas. Además, la tabla explora las conversiones entre la magnitud tiempo, relacionándola con el número de huevos que consumen tres personas, relacionando la Tarea con el Pensamiento Métrico.

De esta manera, las preguntas planteadas en la adecuación de la Tarea permiten que la solución contemple aspectos propios del Pensamiento Variacional, tales como la *variación*, relación entre magnitudes, *patrones y regularidades*.

En este sentido, la adecuación se propone de acuerdo a los Estándares “Describo e interpreto *variaciones* representadas en gráficos” y “Represento y relaciono *patrones* numéricos con tablas y reglas verbales”.

Adecuación N°2

Corresponde a la Tarea del Análisis N°2, figura N°3. En la gráfica se modifican los valores del N° de habitantes y los años reportados, de forma que se toman intervalos iguales con la misma cantidad de personas; se presenta una Tarea idealizada dado que se supone un crecimiento constante de la población cada año. Además, con las preguntas propuestas se busca indagar sobre el objeto matemático *variación* representado en la gráfica y las relaciones de dependencia entre la cantidad de habitantes y los años transcurridos.

La gráfica muestra la población aproximada de la ciudad de Bogotá durante los años comprendidos entre 1938 y 2008.

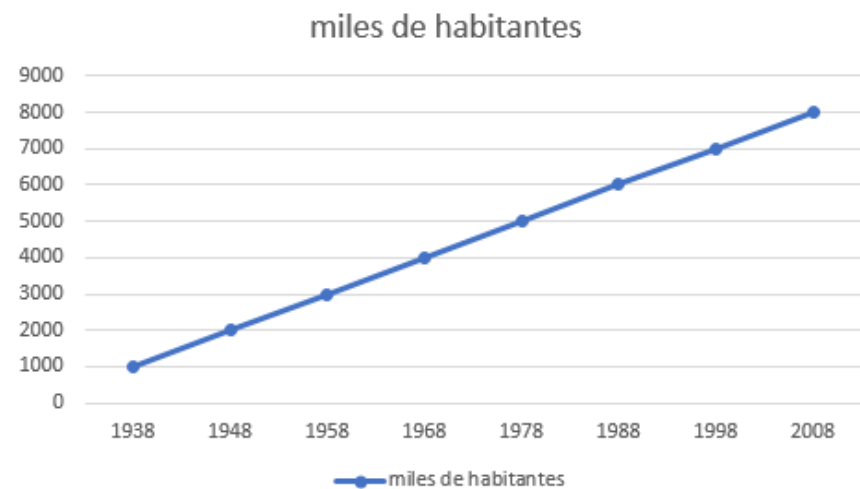


Figura 21. Adecuación de la Tarea 3 - página 81 de la E1 4º grado.

De acuerdo con la información de la gráfica, responde:

- Si en el año 1938 hubo 1000 habitantes en Bogotá ¿Cuántos habitantes había en el año 1928? Explica tu respuesta.
- ¿En qué año podría haber 12.000 habitantes en la ciudad de Bogotá? ¿qué proceso matemático utilizas para encontrar este dato?
- Desde el año 1998 ¿Cuántos años más deben transcurrir para que la población aumente 5000 personas?
- ¿Cuántos habitantes tendrá Bogotá para el año 2058, si el crecimiento de la población sigue la misma tendencia de la gráfica?
- ¿En qué año se habrá triplicado el número de habitantes con respecto al año 1948?
- ¿Qué estrategias utilizarías para determinar la cantidad de habitantes en Bogotá en un año determinado? Explica tu respuesta.

La adecuación se propone de acuerdo a los Estándares “Describo e interpreto *variaciones* representadas en gráficos” y “Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta *regularidad* en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales”. Además, el modelo matemático utilizado da cuenta de la *variación* entre las magnitudes N° de habitantes y tiempo en años, como una función lineal, donde se encuentra la constante de proporcionalidad directa, como una invariante.

Adecuación N°3

Corresponde a la Tarea del Análisis N°3, figura N°4. La adecuación presenta varias ecuaciones con la intención de que se identifiquen las relaciones entre los distintos datos de la ecuación y algunas preguntas que indaguen, tanto por los valores que puede tomar una variable, como por los procedimientos utilizados en la solución de las mismas.

Para cada igualdad responda: ¿Qué valor puede tomar cada una de las incógnitas para que se cumpla la relación de equivalencia? Explica qué procedimientos utilizaste para encontrar el valor de las incógnitas.

a. $2m = 7 + 5m$

b. $2B = \frac{40}{2}$

c. $\frac{18}{x} = 15 - 9$

d. $21 = 7C$

e. $5 + z = \frac{21}{3}$

La Tarea se apoya en el Estándar “Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos”.

En la adecuación de la Tarea se proponen cinco ecuaciones, utilizando las cuatro operaciones básicas: la suma, la resta, la multiplicación y la división, además, no sólo

consiste en obtener el valor numérico de las variables, sino que además se pretende que se analice e interprete los procedimientos utilizados, las relaciones, propiedades y definiciones que intervienen en la *solución de ecuaciones*.

De igual modo, en las *ecuaciones* se utilizan diferentes letras para representar las incógnitas como las cantidades desconocidas, puesto que el uso de símbolos permite desarrollar el proceso de la *generalización* y la construcción de *ecuaciones* (Godino et al., 2014); tanto la *generalización* como el uso de incógnitas y *ecuaciones* son un rasgo característico del Razonamiento Algebraico.

Además, las incógnitas de las *ecuaciones* se presentan en diferentes posiciones, esto es, tanto al lado izquierdo como al lado derecho de la igualdad (=) para que no haya una estandarización en cuanto a la posición de la incógnita en una *ecuación*; en las ecuaciones propuestas el símbolo igual (=) adquiere el significado de equivalencia y no de un resultado.

Se presentan las *ecuaciones* sin las opciones de respuesta, con el objetivo de que se razone, se indague y se utilicen las propiedades en una relación de equivalencia.

Adecuación N°4

Corresponde a la Tarea del Análisis N°4, Figura N°5. La adecuación de la Tarea presenta una situación acompañada de una imagen, una tabla y unas preguntas que orientan la resolución de la misma. Se modifica el valor de la altura máxima de la pelota en el primer rebote (1,98 m por 128 cm) con la intención de facilitar el proceso de identificación de *regularidades*.

La Tarea indaga por el *patrón* de formación en la *secuencia* “el doble de la altura anterior”, lo cual posibilita la capacidad de deducir que la altura inicial se obtiene al multiplicar por dos la altura del rebote inicial y así explorar el proceso de reversibilidad.

Una pelota es lanzada desde una determinada altura, la tabla 4 ilustra el número del rebote y la altura obtenida por la pelota.



Figura 22. Adecuación de la Tarea 6c página 161 de la E4 5° grado.

Completa la tabla con los datos que faltan, considerando que los rebotes de la pelota conservan la *regularidad* que se observa en los datos de la tabla y responde las siguientes preguntas:

Tabla 4. Tabla propuesta en Adecuación N°4.

N° de Rebote	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Altura obtenida	128 cm		32 cm	16 cm		

- ¿Qué *cambio* hubo en la altura alcanzada por la pelota entre el 3° y 4° rebote? ¿Qué procedimiento matemático harías para encontrar la altura de la pelota en el siguiente rebote?
- ¿Qué altura alcanza la pelota en el sexto rebote? ¿Cómo hiciste para encontrarla? ¿Cuántos rebotes debe dar la pelota para que empiece a deslizarse por

el suelo, considerando que la pelota se desliza cuando tiene una altura menor de 1 cm?

- c. ¿Cómo puedes conocer la altura obtenida por la pelota, conociendo el número de rebotes? Explica tu respuesta.
- d. ¿Cómo va cambiando la altura de la pelota a medida que aumentan los rebotes?
- e. ¿Cuál es la altura inicial desde donde se lanzó la pelota?

La adecuación tiene en cuenta que el Pensamiento Variacional se desarrolla a partir del estudio de *regularidades*, comprendidas como unidades de repetición, las cuales tienen lugar en la identificación y el reconocimiento de *patrones* que se repiten de una manera periódica en sucesiones o *secuencias* que presentan objetos, eventos, acontecimientos o formas (MEN, 2006). El Pensamiento Algebraico tiene que ver con el estudio de la *generalización* de *patrones* en diferentes contenidos de las matemáticas y se desarrolla a partir de *secuencias*, *patrones*, representaciones, gráficos, símbolos, entre otros (Mora, 2012).

Adecuación N°5

Corresponde a la Tarea del Análisis N°5, figura N°19. La adecuación presenta una *secuencia* gráfico-numérica (Mora, 2012), unas preguntas orientadoras para explorar la *secuencia* y una tabla que amplía la interpretación de la Tarea.

Observe la *secuencia*:



Figura 23. Adecuación de la Tarea 1 - página 61 de la E3 5º grado.

De acuerdo con la *secuencia* geométrica, completa las posiciones que faltan y responde las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuántos triángulos tiene la posición 2?
- b. ¿Cuántos triángulos tendría la posición 7, posición 10, posición 13?
- d. Si una de las posiciones tiene 21 triángulos ¿Cuál posición sería?
- e. ¿Cómo podríamos encontrar la cantidad de triángulos en cualquier posición?
- f. ¿Es posible determinar cualquier posición conociendo la cantidad de triángulos? Explique.
- g. ¿Qué relación existe entre la posición y el número de triángulos?
- g. Si los lados de cada triángulo se forman con palillos. Completa la siguiente tabla.

Tabla 5. Tabla propuesta en Adecuación N°5.

	Número de triángulos	Número de palillos
Posición 1		
Posición 2		
Posición 3	3	
Posición 4		12
Posición 5		
Posición 6		18
Posición 7		
Posición 8		

- h. ¿Qué relación hay entre el N° de triángulos y la cantidad de palillos?
- i. En alguna posición, ¿habrá una figura con 25 palillos SI ____ NO ____? Justifique

La intención de la Tarea es que, a partir de la *secuencia* y las preguntas orientadoras y la tabla, se completen las posiciones faltantes y se logre predecir *patrones de variación* en una *secuencia* gráfica o pictórica (MEN, 2006).

La *secuencia* propone ocho posiciones de las cuales se dan las tres, cuatro y seis; pero la *secuencia* es infinita, dado que a través de las preguntas y de la tabla se explora el comportamiento de la *secuencia* en posiciones posteriores. Es importante indagar sobre la estrategia utilizada para construir las figuras a partir de la posición N° 7, allí existen múltiples posibilidades y alternativas de solución, donde lo fundamental es la argumentación y la justificación que se dé del proceso de construcción de la *secuencia*.

En la adecuación, se indaga por las figuras ubicadas tanto a la derecha como a la izquierda, para garantizar el proceso de reversibilidad. Además, no se ofrecen opciones de respuesta para elegir las figuras en determinada posición, en lugar de ello, se proponen preguntas que orientan el proceso de identificación del *patrón* de formación de la *secuencia* para completar las figuras que faltan e indagar por la *variación* en el número de triángulos y el número de palillos que los conforman.

Adecuación N°6

Corresponde a la Tarea del Análisis N°6, figura 14. La adecuación de la Tarea ofrece una *secuencia* de arreglos de cuadrados azules y cuadrados blancos, se presentan las posiciones dos y tres; se plantean preguntas y una tabla para orientar la interpretación de la *secuencia* e identificar el *patrón* de formación e inducir al proceso de *generalización*.

Observe la siguiente *secuencia*:

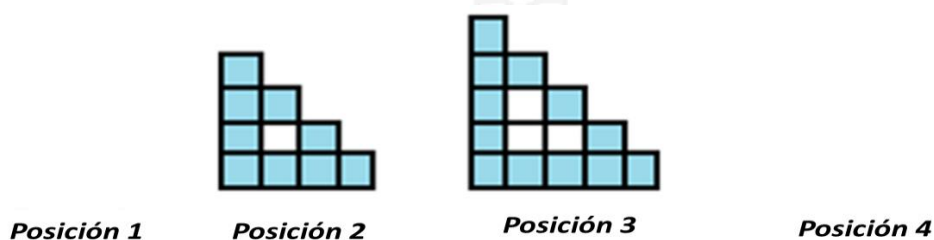


Figura 24. Adecuación de la Tarea 3 - página 115 de la E4 4° grado.

De acuerdo a las figuras:

- Dibuje las figuras en las posiciones 1 y 4.
- Determine la cantidad de cuadrados azules y blancos que hay en las figuras 1 y 4. ¿Cómo encuentre el número de cuadrados azules y blancos de cada figura?
- ¿Existe alguna relación entre la posición de la figura y la cantidad de cuadrados azules? Explique su respuesta.
- ¿Existe alguna relación entre la posición de la figura y la cantidad de cuadrados blancos? Explique su respuesta.
- Si en la figura de la posición 6 hay 15 cuadrados blancos ¿Cuántos cuadrados azules habrá?
- ¿Cuántos cuadrados blancos y azules hay en la posición 11?
- ¿Cómo determinar la cantidad de cuadrados azules y blancos en cualquier posición?
- Complete la siguiente tabla:

Tabla 6. Tabla propuesta en Adecuación N°6.

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6	...	Fig. 20
# Cuadrados azules			12					
# Cuadrados blancos		1		6				
Total de cuadrados		10	15					

- i. En la figura de la posición 2, el número de cuadrados se puede expresar como $1+2+3=6$ cuadrados, ¿cómo se puede expresar el número de cuadrados de la posición 1, de la posición 3, de la posición 5, y de posiciones posteriores?
- j. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura de la posición 6? ¿Cómo encontró la cantidad de cuadrados?
- k. ¿Qué estrategia se puede utilizar para expresar el número de cuadrados conociendo la posición de la figura? Justifique su respuesta.

La Tarea permite predecir los *patrones* en los cuadrados blancos, azules y en el total de los mismos; lo cual está en correspondencia con el MEN (2006) en tanto induce los procesos de *generalización* de las *secuencias* y permite “Predecir *patrones* de *variación* en una *secuencia* numérica, geométrica o gráfica”.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones y las recomendaciones que surgen de la investigación, en la cual se desarrolló el estudio de los objetos matemáticos del Pensamiento Variacional presentes en libros de texto de los grados 4° y 5° de primaria; las conclusiones y recomendaciones responden a los objetivos propuestos para la misma.

El desarrollo del Pensamiento Variacional al igual que los demás Pensamientos depende de la implantación de estrategias en que se presenta una Tarea determinada, en la medida que favorezcan la construcción de conocimiento matemático.

La mayoría de los libros de texto estudiados en la investigación presentan en la sección de Pensamiento Variacional Tareas que no dan cuenta del desarrollo del mismo, limitan algunos aspectos de este Pensamiento y la relación con el Razonamiento Algebraico; además se alejan de las pretensiones de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) para los grados 4° y 5°.

En las Tareas propuestas en los libros de texto no se aprovecha la posibilidad que tiene el Pensamiento Variacional de vincular y fortalecer el desarrollo de los demás Pensamientos Matemáticos; se limitan en su generalidad a un desarrollo aritmético. Los libros como material curricular, de uso en la enseñanza, poco promueven el razonamiento y la exploración de los objetos matemáticos propios del Razonamiento Algebraico-Pensamiento Variacional.

Las Tareas que presentan objetos matemáticos propios del Pensamiento Variacional no permiten explorarlos a partir del reconocimiento, la percepción, la identificación y la

caracterización de la *variación* y el *cambio* en diferentes contextos; ni tampoco desde la modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos.

Los objetos matemáticos con significado institucional en los libros de texto no corresponden con la teoría propuesta en el EOS. “Los objetos matemáticos emergen de sistemas de prácticas matemáticas, entendiéndose por práctica toda expresión (verbal, gráfica, simbólica, etc.) realizada por una o varias personas para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, generalizarse a otros contextos” (Godino y Batanero, 1994, p. 334); lo cual no se evidencia en las Tareas presentadas en los libros de texto.

En contraste con lo que se plantea desde la teoría, las Tareas articuladas en la sección del Pensamiento Variacional en los libros de texto, limitan la identificación de *patrones* y *regularidades*, *secuencias*, y el estudio de situaciones de *cambio* y *variación* que conlleven a la *generalización*.

Se evidencia que las Tareas presentadas en los libros de texto son repetitivas y mecánicas, y en general indagan por lo mismo, privilegian objetos matemáticos y procesos principalmente del Pensamiento Numérico.

Aunque los libros de texto presentan Tareas que posibilitan el estudio del *cambio* y la *variación*, poco inducen a la *generalización* dado que hacen una exploración insuficiente de los procesos del Pensamiento Variacional.

Si bien los libros presentan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), al indagar en las Tareas no se encuentra correspondencia entre la intencionalidad del Estándar referenciado y la de las Tareas; especialmente en los procesos de describir e interpretar *variaciones*, predicción de *patrones* de *variación* y, representar y

relacionar *patrones* numéricos con tablas y reglas verbales que caracterizan al Pensamiento Variacional.

En las adecuaciones se trató de profundizar en algunas de las Tareas analizadas para que de esta forma se reflejaran los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y el Razonamiento Algebraico, teniendo en cuenta la transversalización con otros Pensamientos; el desarrollo del Razonamiento Algebraico implica las diferentes formas de Pensamiento y el uso de símbolos en actividades matemáticas, particularmente las relaciones entre cantidades, el estudio del *cambio*, la *generalización* y la modelación (Kieran, 2004).

En la tabla 7 se muestran algunos indicadores que surgen del proceso de investigación, los cuales posibilitan la adecuación de Tareas referidas al Pensamiento Variacional.

Tabla 7. Indicadores para adecuar las Tareas del P.V.

**Indicadores para adecuar las Tareas asociadas al pensamiento Variacional-
Razonamiento Algebraico. La Tarea:**

- Permite la interpretación e identificación de situaciones de cambio y variación representadas en gráficos.
 - Posibilita la predicción de patrones de variación en diferentes secuencias.
 - Presenta tablas para identificar patrones numéricos e indaga por ellos.
 - Expone diferentes situaciones matemáticas donde se establecen relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo.
 - Posibilitan la construcción de igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones.
 - Utiliza diferentes representaciones, induce al proceso de *generalización* y formalización de *patrones* y *regularidades* en cualquier ámbito de las matemáticas (Numérico, Espacial, Aleatorio, Métrico, Variacional) o de otras ciencias (Godino y Font, 2003).
 - Permite la transversalización del Pensamiento Variacional con los demás Pensamientos.
 - Presenta diferentes tipos de secuencias: figurativas o icónicas, gráfico-numéricas, numéricas, por recurrencia, tabulares (Mora, 2012).
 - Hace alusión y referencia objetos intensivos.
-

Se proponen recomendaciones para las empresas editoriales de textos, para la Universidad de Antioquia en el plan de formación de futuros maestros de matemáticas y para los maestros en general.

Las editoriales deben verificar que haya correspondencia y coherencia entre la intencionalidad de un Estándar y las Tareas propuestas para el desarrollo del mismo. Las actividades y situaciones que presentan los libros de texto se podrían explorar más ampliamente e integrarlas con los diferentes Pensamientos matemáticos.

En el plan de formación de la Licenciatura de Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia se hace necesario incluir en los seminarios, alguno que brinde elementos teórico-prácticos a los maestros en formación, para adquirir criterios que les permita elegir libros de texto como material de apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para los maestros en general, se les invita a reflexionar y analizar el tipo de Tareas presentes en los libros de texto la práctica matemática no debería limitarse a reproducir o transcribir las Tareas que presentan los libros de texto en los que se apoyan para el trabajo en el aula de clase; por el contrario que las exploren de acuerdo a los objetivos propuestos en el currículo nacional y en el institucional (PEI). Además, se les invita a la reflexión permanente sobre sus prácticas y por ende sobre el uso de libros en las mismas.

Al culminar el proceso de investigación, surgen interrogantes como: en el mercado hay múltiples libros de texto ¿Habría alguna entidad que los avale o apruebe?, ¿Cuál es el papel del MEN frente a la proliferación de los libros de texto?, ¿Hay algún control de calidad de los libros por parte de las secretarías de educación y el MEN?, ¿Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que da el MEN se reconocen en los libros de texto?

Referencias bibliográficas

- Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199–219.
- Argibay, M., Celorio, J. J. y Urkola, M. V. (1991). La cara oculta de los textos escolares. *Investigación curricular en Ciencias Sociales*. Bilbao: Servicio editorial de la universidad del país Vasco.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Relime*, Número Especial, 267-299
- Bolea, P., Bosch., M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bressan, A. y Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del maestro*, (168), 5-21
- Burkhardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? En: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Ed.), *The future of the teaching and learning of algebra* (p. 140-146). Melbourne, Australia: ZDM 2000/4
- Callejo, M. (2015). El proceso de generalización: Generalización y pensamiento algebraico. *Uno Revista de Didáctica de la Matemáticas*. (68), 5-8.
- Cantoral, R., Molina, J. G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama., M. Sánchez. y J. G. Molina (Ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 463-468. México: Clame.
- Carpenter, T. P. y Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *National center for improving student learning and achievement in mathematics and science (NCISLA)*, 1-20.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, 37(1), 53-59.
- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Castro, J. (1998). Las cívicas y los textos de educación para la democracia: dos modalidades de formación del ciudadano en Colombia durante el siglo XX. En G. Ossenbach. y J. M. Somoza (Ed). *Los Manuales escolares como fuente para la historia de la educación en américa latina*, 143-153. Madrid: UNED.
- Castro, J. (2000). Las cívicas y los textos de educación para la democracia: dos modalidades de formación del ciudadano en Colombia durante el siglo XX. En G. Ossenbach. y J. M. Somoza (Ed). *Los Manuales escolares como fuente para la historia de la educación en américa latina. Un análisis comparativo*, 143-153. Madrid: UNED.
- Castro, W.F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. *Investigación en Educación Matemática XIV*, 259-270.
- Castro, W.F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*, 3, 73-88.
- Choppin, A. (1980). La historia de los manuales escolares. Una aproximación global. *Revista Historia de la Educación*, (9), 1-25

- Cockcroft, W.H. (1985). Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Cohen, L., Manion, L, y Morrison, K. (2007). Research methods in education (6ª Ed.), Case studies (p. 253-263). London y New York: Routledge
- Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.
- Danisova, E. (2006). Política para la publicación de libros de texto en la república de Eslovaquia. En el ministerio de educación de chile (Ed.), Primer seminario internacional de textos escolares (p. 64-69). Santiago de Chile: SITE
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41. Netherlands: Kluwer.
- Esquinas, A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. Recuperado de <http://eprints.ucm.es/8283/1/T30670.pdf>
- Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. Departament de Didáctica de les CCEE i de la matemática de la UB, *Biaix* 19, 33-36.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2-14.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2-3), 237-284
- Godino, J. D. (2003). Razonamiento Algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada. Manual para el estudiante. 766-826.
- Godino, J. D. y Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 1-10.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2010). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de didáctica de las matemáticas, 1-24.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational studies in mathematics*, 77(2), 1-22.
- Godino, J., Castro, W., Ake, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42), 483-511.

- Gómez, E. (2008). La construcción de la noción de variable (tesis doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.
Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/Gomez_2008.pdf
- Herbert, K. y Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 123-128
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias (5ta Ed.), *Metodología de la investigación* (1-656). México: McGraw-Hill/interamericana editores, s.a. de c.v.
- Hitchcock, G. y Hughes, D. (1995). *Research and the Teacher: A qualitative introduction to school-based research* (2da Ed.). London: Routledge.
- Johnsen B. E. (1.996). Libros de texto en el caleidoscopio. Estudio crítico de la literatura y la investigación sobre los textos escolares. Barcelona: Pomares Corredor
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. En E. Fennema. T. Romberg (Ed.), *Mathematics classrooms the promote understanding*, 133 -155. Mahwah, N. J: Erlbaum associates, publishers.
- Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. En National of teachers of mathematics and mathematical sciences education board (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum*, 1-186. Washington: ERIC institute of education sciences
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner. y C. Kieran (Ed.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 35-56. Reston: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, Michigan: Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En B. Hodgson., C. Alsina., J. Alvarez., C. Laborde. y A. Pérez (Ed.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (p. 271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. España: Ediciones Morata.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz., C. Kieran. L. Lee (Ed.), *Approach to algebra: Perspectives for Research and Teaching*, 65-86. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gower, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra*. Open University. Centre for Mathematics Education. Gran Bretaña: Illustrated, reprint.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Mora, L. (2012). *Álgebra en primaria. Los Manuales escolares como fuente para la Historia de la Educación en América Latina. Un análisis comparativo*. Madrid: UNED, 1-24.
- Ossenbach, G. y Somoza, M. (2000). *Los manuales escolares como fuente para la historia de la educación en américa latina*. Madrid: UNED.

- Patton, M. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2da Ed.), Integrating theory and practice, 1-381. London: Sage.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 103-129.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Real Academia Española (2016). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 09 de abril de 2016 de, <http://dle.rae.es/?ide=oi8JUOQ>
- Robson, C. (2002). *Real World Research* (2da Ed.). Oxford: Blackwell.
- Rodríguez, R. J. (2006). A elaboración e a adaptación dos materiais curriculares. *Estratexias para atende la diversidade*. Santiago de Compostela: Concello de Santiago/Nova Escola Galega.
- Rotger, B. (1982). El material didáctico. En C. arribas, *El Ciclo Medio en la Educación Básica*, 288-308. Madrid: Santillana.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Selander, S. (1.990). Análisis de textos pedagógicos. *Hacia un nuevo enfoque de la investigación educativa*. *Revista de Educación*, (293), 345-354.
- Smith, J. A. y Todd, P. (2005). Does matching overcome LaLonde's critique of nonexperimental estimators?, *Journal of Econometrics*, 125, 305-353.
- Stake, R. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Ed.), *Handbook of Qualitative Research*, 236-247. California: Sage.
- Steen, L. A. (1988) "The science of patterns," *Science*, 240, 611-616.
- Vasco, C. (2002). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1-14.
- Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*, 134-148. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Villa, J (2010). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*. 31, 9-25.