Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC

América María Cardona Arias

Tesis de maestría presentada para optar al título de Magíster en Educación

Tutora

Zaida Margot Santa Ramírez, Doctor (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Maestría en Educación

Medellín, Antioquia, Colombia

2021

Cita	(Cardona Arias, 2021)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Cardona Arias, A. (2021). *Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Maestría en Educación, Cohorte V.

Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (Edumath).

Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes.

Decano/Director: Wilson Bolívar Buriticá.

Jefe departamento: Alejandro de Jesús Mesa Arango.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

Presente en mis recuerdos y en mi corazón, a ti papá.

Agradecimientos

Agradezco, en primer lugar, a la vida, por permitirme forjar tan valiosos aprendizajes y gratas experiencias.

A mis hijos que, con su tiempo, paciencia y sus sonrisas, me alentaron en cada paso, en todo momento.

A mi esposo Mauricio, por su acompañamiento e interés y por todo su amor.

A mi madre Luz María y a mi hermana Natalia, gracias por todos sus cuidados, compañía y comprensión.

Al grupo de investigación Educación Matemática e Historia, por su rigurosidad y exigencia.

Al profesor Carlos Mario Jaramillo, por apoyar mi interés de investigación, por su tiempo y orientaciones. Al profesor René Alejandro Londoño, por su importante colaboración y acompañamiento a lo largo de la investigación.

A mi asesora Zaida Santa, porque de su mano he recorrido el camino de formación profesional, por su rigurosidad, asertividad, detalladas correcciones y por escucharme siempre, gracias mi profe.

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo analizar la comprensión de un grupo de maestros en formación sobre el concepto de derivada desde su aspecto histórico, enfocado en conocimientos que emergieron de las dinámicas sociales de los contextos de Newton y de Leibniz, en los cuales se originó el cálculo y, en particular, el concepto de derivada. Este último se constituye en un concepto central para la comprensión del cálculo y de diferentes campos de las ciencias; por lo tanto, las dificultades en su aprendizaje y comprensión ponen en evidencia la necesidad de generar estrategias de enseñanza que aporten al conocimiento y despierten interés y motivación en los estudiantes, lo que puede alcanzarse con el abordaje histórico y contextualizado de las matemáticas.

Para esto, se desarrolló un estudio cualitativo con un diseño metodológico que propuso diversas tareas de formación diseñadas en torno al concepto de derivada, las cuales se convirtieron en una herramienta metodológica que podría contribuir a la comprensión del concepto, a partir del estudio de su naturaleza y construcción; además, se estructuró una rúbrica fundamentada en las dimensiones y niveles de comprensión referidos en el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión, que permitió la caracterización y el análisis de la comprensión alcanzada por los maestros en formación, del concepto en cuestión.

Palabras clave: comprensión, historia del cálculo, concepto de derivada, Newton, Leibniz, maestros en formación, Enseñanza para la Comprensión, tareas de formación.

Abstract

The present research aimed to analyze the understanding of a group of teachers in training on the concept of derivative from its historical aspect, focused on knowledge that emerged from the social dynamics of the contexts of Newton and Leibniz, in which the theory originated calculus and the concept of derivative. The latter constitutes a central concept for the understanding of calculus and different fields of science; Therefore, the difficulties in their learning and understanding highlight the need to generate teaching strategies that contribute to knowledge and awaken interest and motivation in students, which can be achieved with the historical and contextualized approach to mathematics.

For this, a qualitative study was developed with a methodological design that proposed various training tasks designed around the concept of derivative, which became a methodological tool that could contribute to the understanding of the concept, based on the study of its nature and construction; in addition, a rubric was structured based on the dimensions and levels of understanding referred to in the theoretical framework of Teaching for Understanding, which allowed the characterization and analysis of the understanding reached by the teachers in training, of the concept in question.

Keywords: understanding, history of calculus, concept of derivative, Newton, Leibniz, teachers-in-training, teaching for understanding, training tasks.

Introducción

La presente investigación se desarrolló con el propósito de aportar a la comprensión del concepto de derivada de los maestros en formación a partir del contexto histórico en el que emergió, con base en las situaciones sociales, científicas y personales que rodearon las construcciones de Newton y de Leibniz. Para esto, fue necesario realizar un análisis de los procesos de comprensión de los participantes durante todo el estudio, cuando se pusieron en escena una serie de tareas de formación diseñadas y evaluadas específicamente para apoyar el proceso de enseñanza para la comprensión del concepto de derivada. Por lo tanto, se construyó una rúbrica que posibilitó el estudio final de la comprensión de cada uno de los participantes, la cual, al igual que las tareas de formación llevadas a cabo en las diferentes fases de investigación, se estructuró a partir del marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión[1], considerando sus elementos, dimensiones y niveles.

El primer capítulo de este estudio aborda los aspectos que permitieron establecer y argumentar el problema de investigación; del mismo modo, se plantean la pregunta de investigación y los objetivos que guiaron la respuesta a la problemática presentada. También se exhibe una revisión de literatura, en la que se exponen los referentes conceptuales respecto a características que justifican la realización del estudio, como la formación de maestros de matemáticas, el desarrollo histórico del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz, la historia como estrategia metodológica para apoyar los procesos de enseñanza y comprensión del cálculo y la importancia de la comprensión en Educación Matemática.

El segundo capítulo retoma los aspectos más importantes del marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión, el cual fundamentó el trabajo de investigación, en particular, en lo que se refirió a la estructuración de las diferentes tareas de formación puestas en marcha en las fases de investigación; además, propició la construcción de una rúbrica que dirigió el proceso de análisis de comprensión de los participantes.

El tercer capítulo hace un desarrollo del enfoque metodológico que se enmarcó bajo el paradigma cualitativo, desarrollado a partir de un estudio de casos, como diseño de investigación,

[1] Para hacer referencia al marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión, se utilizarán, en párrafos posteriores, las siglas EpC.

el cual posibilitó el análisis de la comprensión. De igual forma, se hace una descripción del grupo de estudio, en este caso, de los maestros en formación participantes, mencionando sus características más relevantes; posteriormente, se enuncian los métodos de recolección de la información y se explica la manera en la que se realizó el análisis; estos aspectos se consolidaron de acuerdo con los planteamientos desarrollados en el marco de la EpC.

En el cuarto capítulo se presentan las tareas de formación desarrolladas en las fases de exploración, de investigación guiada y de proyecto final de síntesis; así mismo, se expone la rúbrica, diseñada y evaluada, la cual permitió realizar el análisis de la comprensión de los maestros en formación en torno al concepto de derivada a partir del contexto de Newton y de Leibniz; los descriptores de la rúbrica en cuestión se estructuraron bajo las dimensiones del marco de la EpC: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación; además, se consolidaron con respecto a los niveles de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría.

El quinto capítulo aborda el análisis del proceso de comprensión de tres de los participantes en cada una de las fases de investigación; para ello, se consideraron no solamente los aportes y las observaciones de la investigadora durante los encuentros sincrónicos, sino también los productos entregados por cada uno de ellos y las respuestas a las entrevistas semiestructuradas. El análisis general al integrar estos elementos propició el establecimiento del nivel o niveles de comprensión alcanzado por cada uno de los tres maestros en formación, a partir de los descriptores de comprensión referidos en la rúbrica para cada una de las dimensiones.

El sexto capítulo sintetiza las conclusiones, las cuales se abordaron a partir de la respuesta a la pregunta de investigación, la consecución de los objetivos, los aportes a la Educación Matemática y las posibles líneas de investigación que podría abrir el estudio. Así mismo, se expone una serie de recomendaciones que emergieron de la investigación, para el uso de las tareas de formación en el aula y de la rúbrica como método de análisis y valoración de la comprensión. Finalmente, el desarrollo del estudio pone en evidencia la contribución que tiene la historia para la enseñanza de las matemáticas, puesto que se constituye en una herramienta metodológica para el maestro, que le permite reflexionar y fortalecer su práctica, posibilitando la orientación de procesos de enseñanza que consideren el contexto histórico en la construcción y fundamentación de los conceptos, generando mayor comprensión en los estudiantes.

Problema de investigación

En este apartado se desarrollan algunos aspectos que hacen referencia a la contribución de la historia en la enseñanza del concepto de derivada y a la importancia de los procesos de formación de maestros en la comprensión de dicho concepto; además, se mencionan diferentes investigaciones con relación a la derivada desde diversas estrategias metodológicas; adicionalmente, se exponen algunos aportes obtenidos de un ejercicio inicial de indagación, el cual se desarrolló en la fase de exploración. Los argumentos aquí expuestos permitieron fundamentar el problema, pregunta y objetivo de investigación, aspectos que también se exponen en este capítulo; finalmente, se amplían algunos antecedentes teóricos, establecidos a partir del planteamiento del problema.

Planteamiento del problema

En general, el maestro, como sujeto presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, determina en gran medida la comprensión alcanzada por sus estudiantes; este hecho, fundamental en el proceso educativo, también permea la formación de maestros, en lo que concierne a las prácticas tempranas, las cuales deberían estar orientadas a incorporar y proporcionar estrategias, conocimientos y procesos diversos que puedan ser utilizados, a posteriori, por el futuro maestro en su práctica pedagógica, para fortalecer la formación de sus estudiantes.

Lombardi y Abrile (2015) argumentan que los estudios investigativos centran su atención en los procesos de formación en educación superior, como es el caso de los aspectos referidos al fortalecimiento de la práctica pedagógica, dado que se considera que la formación teórica y el desempeño en el aula no son elementos que pueden abordarse de forma aislada, sino de forma interdependiente; por lo tanto, una de las metas para el 2021 de los estados Iberoamericanos en educación, es mejorar la formación inicial de maestros, mediante la cooperación de personas expertas que pertenezcan a grupos de estudio de formación maestros, para movilizar ideas, realizar intercambios y encuentros que potencien los objetivos educativos de sus países.

Los maestros de matemáticas, mediante la consolidación de grupos de profesionales de la educación, han manifestado un amplio interés por investigar la naturaleza del conocimiento matemático, su proceso de construcción y las metodologías más propicias para su enseñanza y aprendizaje; esto se ha evidenciado en congresos y encuentros de matemática educativa, en los que han participado (Chaves y Salazar, 2003), con el objetivo de fortalecer dichos procesos y aportar con ello a la comprensión de los estudiantes; en este sentido, Kilpatrick et al. (1998) argumentan que, dentro de las disciplinas o campos de conocimiento, las matemáticas son consideradas de gran complejidad y con múltiples cuestionamientos, lo que las ha convertido en objeto de investigaciones en el campo de la enseñanza y de la educación.

En esta línea, Panasuk y Horton (2013) refieren que la Educación Matemática, en la actualidad, tiene como necesidad fundamental investigar en relación con ciertos aspectos que contribuyan con el mejoramiento del aprendizaje en los estudiantes, su rendimiento y la comprensión de cada concepto, resaltando su significado para el sujeto y la sociedad. Para lograrlo, se hace necesario entender las matemáticas como una creación humana, producto de las necesidades propias del contexto; sin embargo, esta ciencia, a menudo, es considerada como un conjunto de axiomas, teoremas y pruebas, desconociendo diferentes dinámicas socioculturales e históricas que ponen de manifiesto la dimensión humana y cultural de las matemáticas (Furinghetti, 2007; Liu y Niess, 2009; Tzanaski et al., 2002). En este sentido, Anacona (2003) afirma que, aunque cada vez es más clara la relación entre la historia de las matemáticas y la Educación Matemática, aún no se tiene un consenso sobre los aportes que se pueden generar de esta relación para la comprensión de las matemáticas. Así mismo, Mateus (2011) sostiene que la actividad matemática, como resultado de las prácticas de los individuos, está directamente asociada con el sistema cultural y, por lo tanto, las dinámicas presentes en el contexto y la cultura hacen parte de la formulación del conocimiento matemático.

En este sentido, para aportar a la formación sólida del conocimiento matemático, es necesario que los maestros comprendan la importancia y la utilidad de aspectos que van más allá de lo algorítmico; es así como Romero (2013) resalta los aportes de la historia, la filosofía y la sociología de las ciencias en la formación de maestros de matemáticas, tanto en el aspecto disciplinar como en las orientaciones sobre la enseñanza de estas. Más aún, Brush (1991) presenta la historia como un espacio importante para la enseñanza de las matemáticas, puesto que pone en evidencia la relación que existe entre hechos subjetivos con la construcción de los conceptos, lo que puede generar motivación e interés por el aprendizaje de las ciencias y, con ello, propiciar mayor participación del estudiante en su proceso. En este sentido, Anacona (2003) argumenta que los estudios que abarcan la historia en los procesos de enseñanza de las matemáticas pueden orientar sobre formas directas de mediación que contribuyan al aprendizaje de esta ciencia.

Del mismo modo, De Guzmán (2001) precisa que se debe estar al tanto de la realidad que ha dado lugar a conceptos matemáticos que se desean explorar, para lo cual es necesario conocer a fondo el contexto histórico que rodeó dicho concepto, entender cuáles fueron las razones y motivaciones que hicieron de este tema un aspecto central, conociendo no solamente su forma acabada, sino la evolución de las ideas que lo originaron, aplicaciones, consecuencias y teorías o conceptos derivados; en este mismo sentido, refiere que:

> A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática (…) La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico. (p. 14)

En este contexto, Area et al. (2014) argumentan que los maestros, formadores de maestros, deben encaminar su instrucción hacia enseñar a aprender historia, es decir, es indispensable que el formador cuente con los instrumentos didácticos necesarios para ese fin, para que luego sea capaz de enseñar a los maestros en formación. En este contexto, Tzanaski et al. (2002) presentan un estudio en el que concluyen la importancia de la incorporación de la historia en la enseñanza de las matemáticas porque permite el enriquecimiento y perfeccionamiento del aprendizaje de la ciencia y puede generar una predisposición afectiva hacia las matemáticas al considerarlas una actividad cultural y humana, en la diferenciación entre la naturaleza y la práctica matemática; así mismo, Liu (2003) precisa que la historia en la enseñanza de las matemáticas ayuda a desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes y se convierte en una guía metodológica para los maestros, en tanto que permite afianzar una actitud positiva hacia el aprendizaje de esta ciencia.

Por otro lado, el cálculo infinitesimal, como rama de las matemáticas, no es ajeno a estas reflexiones en torno a su proceso de enseñanza y aprendizaje; más aún si se tiene en cuenta que la enseñanza del cálculo es de vital importancia y es uno de los mayores desafíos de la Educación Matemática actual, ya que su aprendizaje se relaciona con numerosas dificultades de pensamiento de orden superior, como lo son la abstracción, el análisis y la demostración (Vrancken et al., 2006). Por lo tanto, al constituirse el cálculo infinitesimal como una herramienta fundamental en la Educación Matemática, el tratamiento histórico de este podría aportar al proceso de su enseñanza y, en consecuencia, de su aprendizaje, si se consideran las múltiples situaciones que subyacen a su origen. La enseñanza del cálculo resulta bastante problemática, en tanto que así se logren desarrollar en los estudiantes destrezas para solucionar problemas que impliquen el cálculo de derivadas o integrales, esto no significa que haya una comprensión real del concepto (Mateus, 2011).

Los conocimientos sobre el cálculo infinitesimal se originaron a partir de los pensamientos y desarrollos matemáticos de Newton y de Leibniz; sin embargo, más que atribuir a una o varias personas dicho nacimiento, es necesario considerar los intereses o los aspectos históricos propios del contexto que determinaron el surgimiento del cálculo (Moreno, 2014). En concordancia, Muñoz y Román (1999) argumentan que el tratamiento histórico en la enseñanza del cálculo infinitesimal podría aportar a su aprendizaje, en tanto este conocimiento matemático encierra múltiples situaciones propias de las construcciones logradas por Newton y por Leibniz. Aunque el cálculo infinitesimal fue el resultado de una gran variedad de ideas y construcciones de físicos y matemáticos respecto a conceptos como tangentes, extremos y áreas, fueron Newton y Leibniz quienes retomaron estos conocimientos para convertirlos en conceptos más generales, como es el caso de la derivada; fue precisamente este hecho decisivo el que les otorgó el título de creadores del cálculo (Ponce, 2015).

Por otra parte, la derivada se constituye en uno de los conceptos más importantes del cálculo infinitesimal, que debe ser estudiado y analizado en diversas carreras universitarias, especialmente en aquellas relacionadas con matemáticas, física, biología, ingeniería, medicina, electrónica, economía, contaduría, administración, entre otras. La relevancia de la derivada radica en que está presente en fenómenos relacionados con el movimiento, tasas de cambio, velocidades, optimización, pendientes de recta, crecimiento de poblaciones, propagación e incremento de enfermedades, variaciones en la corriente eléctrica, crecimiento monetario, de ingreso y de gastos, entre otros; dichos conocimientos pertenecen a los diferentes campos de las ciencias (Sahín et al., 2015). La importancia del concepto enmarca la necesidad de que en la Educación Matemática se brinde la posibilidad al estudiante de acercarse intuitivamente a este, hasta llegar al tratamiento riguroso y matemático; este acercamiento puede desarrollarse a partir del estudio de las dinámicas socioculturales propias del contexto histórico que posibilitaron el surgimiento de dicho concepto. En este sentido, Ramírez (2009) precisa:

> La historia y la epistemología de la función derivada como objeto del cálculo diferencial dan cuenta de la complejidad y de los vaivenes que en veinte siglos ha sufrido esta, hasta adquirir el estatus de función de derivada. El trabajo de cientos de humanos dedicados a su estudio, en distintas épocas y culturas, han hecho aportes que han permitido cambios y refinamientos de las ideas matemáticas de la función derivada para convertirla en un objeto (puro, aplicado y a enseñar), muy potente. (p. 157)

Sin embargo, las dinámicas socioculturales y el contexto histórico de la época son obviadas, en la mayoría de los casos, en los procesos de enseñanza de la derivada; la orientación de su enseñanza ha estado marcada por el análisis matemático o por la resolución de problemas, enfoques que priorizan la estructura del contenido algebraico, numérico, gráfico, infinitesimal, geométrico, variacional y computacional (Dolores, 1998), lo cual deja relegadas las implicaciones históricas propias del concepto. Lo anterior se evidencia en la revisión de literatura realizada por Sánchez et al. (2008) en donde pretendían investigar cómo el estudiante de secundaria o de primeros años de universidad llega a entender el concepto de derivada; en dicho análisis, los autores lograron identificar cierta dificultad exhibida por los estudiantes al momento de relacionar un proceso determinado con el concepto de derivada; en este caso, se resaltó la desconexión existente entre la representación del concepto en su forma gráfica con la numérica o analítica, lo cual se constituye en un obstáculo para su comprensión; finalmente, Sánchez et al. (2008) propusieron un mecanismo para aportar a la comprensión del concepto en los estudiantes mediante la conexión con otros conceptos como límites y funciones.

Similarmente, se han desarrollado investigaciones sobre la comprensión que los maestros tienen del concepto de derivada; en este sentido, Desfitri (2016) realizó un estudio con maestros de Indonesia para analizar la forma en que estos comprendían los conceptos de límite y de derivada; a partir de este se pudo establecer que ninguno de los maestros comprendía de manera sólida los conceptos; de hecho, vinculaban la derivada en forma monótona con la velocidad y la aceleración. Por su parte, Orhun (2013) y Domínguez et al. (2019) realizaron investigaciones para la enseñanza y la comprensión de la derivada, a través de la resolución de problemas y mediante la interpretación gráfica, respectivamente, ambos con el objetivo de generar acciones para reestructurar la enseñanza del concepto y, como consecuencia, mejorar su aprendizaje. Así mismo, Badillo (2003), en su tesis doctoral, desarrolló un estudio con maestros de matemática en Colombia que tuvo por objetivo identificar y describir la relación entre el conocimiento de la derivada como objeto matemático y el conocimiento didáctico en la secundaria, para entender la práctica profesional y, desde allí, incidir en la formación permanente del profesorado; en esta investigación se construyó un programa de formación basado en unidades didácticas; por otra parte, se sugirieron algunos aspectos relevantes para la formación inicial del profesorado y la formación continua en Colombia.

A partir de los estudios referidos con anterioridad, se pueden observar diversas investigaciones centradas en la comprensión del concepto de derivada desde diferentes metodologías o enfoques, pero que no consideran el aspecto histórico del concepto; esta situación pone en evidencia que las prácticas en el aula para la enseñanza y comprensión del concepto de derivada, relegan los procesos históricos de la ciencia, impidiendo con ello el abordaje de este campo que proporcionaría a los estudiantes un conocimiento significativo del cálculo, ya que, como lo argumenta Ponce (2015):

> Conocer la historia detrás del concepto de derivada ayuda a comprender dicho concepto. El desarrollo histórico de las matemáticas revela la creatividad de los matemáticos en su trabajo arduo y sinuoso, el cual no siempre tiene buenos resultados, pero esto ha permitido la construcción paulatina del conocimiento matemático hasta alcanzar su resplandor. (p. 30)

Por otro lado, con el objetivo de identificar qué comprenden ciertos estudiantes sobre el concepto de derivada desde un aspecto histórico, se realizó una entrevista a un maestro que dirigía un curso de cálculo integral en una licenciatura en matemáticas y física de una universidad pública de Colombia; en esta, se indagó sobre las concepciones que el maestro tenía en torno a la implementación del aspecto histórico para la formación inicial de maestros de matemáticas, la enseñanza del cálculo y, específicamente, de la derivada, destacando su importancia, enseñanza, experiencias y comprensión de los estudiantes.

En esta entrevista, el maestro hizo alusión a la poca importancia que se le ha dado al aspecto histórico de la derivada en el currículo actual, ya que se suele hacer énfasis en el componente operativo, mecánico o algorítmico; así mismo, el maestro indicó que el aspecto histórico debe ser abordado en cada uno de los cursos, no como una asignatura separada, sino como parte de un programa que se relacione con el cálculo, por lo menos en los conceptos más fundamentales, como es el de la derivada; sin embargo, el maestro acudió a su experiencia y a la de muchos de sus compañeros para explicar que esta falencia, posiblemente, se da por desconocimiento de ellos mismos.

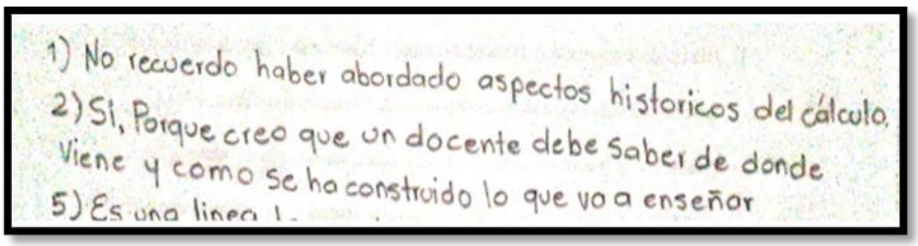
Particularmente, ante la pregunta ¿considera usted relevante la comprensión del concepto de derivada desde su aspecto histórico, de los maestros en formación inicial de matemáticas?, ¿por qué?, el maestro respondió:

> *Sí, fundamental, porque de alguna manera el concepto de derivada pues logra explicar algunos problemas que la historia en su momento no lograba explicar: el asunto de la recta tangente a una curva en un punto, el límite de las dos secantes, el asunto de la velocidad instantánea, ¿qué es la velocidad instantánea?, entonces, en ese sentido, digamos que el recorrido histórico de la derivada, digamos que permite, en un momento dado, darle la importancia que se merece al cálculo como tal para futuros licenciados en matemáticas y física y para futuros maestros en formación. Entonces, en ese sentido, una de las preocupaciones que tiene que ver con tu pregunta es, bueno ¿qué vamos a hacer cuando los cursos de cálculo desaparezcan? (...) entonces ya digamos que cada vez estos, los software, las calculadoras, hacen que los conceptos matemáticos casi que pasen a un segundo orden porque simplemente es la aplicación como tal, entonces para un ingeniero no va a ser tan importante el concepto de derivada, simplemente lo va a utilizar en otro aspecto, pero para los maestros en formación si va a ser muy importante porque desde el punto de vista didáctico nos tiene que, de alguna manera, nos tiene que ocupar el asunto de cómo comprenden los estudiantes el concepto de derivada para poderlo transmitir a los estudiantes, pero bueno, eso es un asunto que tendremos que afrontar en su momento y salirle al paso.* (Maestro entrevistado, 2020, fragmento de entrevista)

Del mismo modo, se aplicó un cuestionario (diagnóstico) a un grupo de estudiantes[2] de una licenciatura en matemáticas y física de la misma universidad del maestro entrevistado, que en el momento del estudio se encontraban cursando la asignatura de cálculo integral; las preguntas estaban referidas al aspecto histórico, numérico y gráfico de la derivada. En el análisis de las preguntas, se obtuvieron las siguientes respuestas con respecto a los ítems: abordaje del aspecto histórico matemático en diferentes cursos (Figura 1, primera respuesta), importancia de dicho abordaje para su proceso de formación (Figura 1, segunda respuesta), cálculo de algunas derivadas de funciones (Figura 2) y algunas relaciones entre gráficas de funciones (Figura 3).

Figura 1

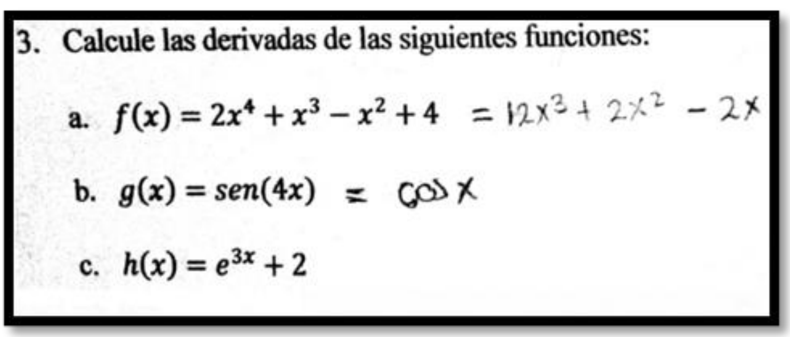
Respuesta de un estudiante a preguntas 1 y 2 de cuestionario diagnóstico



1) No recuerdo haber abordado aspectos historicos del cálculo.
2) Si, Porque creo que un docente debe saber de donde viene y como se ha construido lo que voa enseñar
5) Es una linea l...

Figura 2

Respuesta de un estudiante a la pregunta 3 de cuestionario diagnóstico



3. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4 \quad = 12x^3 + 2x^2 - 2x$

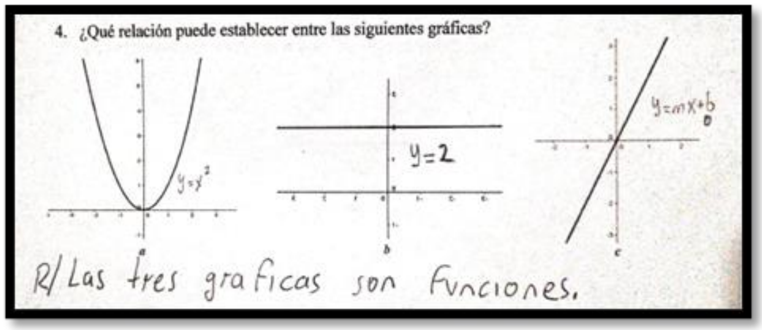
b. $g(x) = sen(4x) \quad = \cos x$

c. $h(x) = e^{3x} + 2$

[2] El grupo de estudiantes al que se le aplicó el cuestionario estaba compuesto por 11 personas; sin embargo, el día de la aplicación faltaron algunos de ellos debido a la anormalidad académica que se vivía en el momento a partir de la situación política, social y económica del país.

Figura 3

Respuesta de un estudiante a la pregunta 4 de cuestionario diagnóstico



Los anteriores registros permiten observar que los maestros en formación inicial, en la mayoría de los cursos, no abordan aspectos históricos de los objetos matemáticos (imagen 1); por lo tanto, no tienen conocimiento del proceso de construcción del concepto de derivada y, aún menos, de los matemáticos que hicieron parte de este; sin embargo, lo consideran importante para su formación tanto para la comprensión de los conceptos como herramienta metodológica (Figura 1).

Por otra parte, cuando se les pidió que definieran el concepto de derivada, lo asociaron con la recta tangente a una curva, con una razón de cambio o, simplemente, no respondieron; así mismo, cuando se les solicitó resolver unos ejercicios relacionados con este concepto, la mitad de ellos lo hicieron de manera errónea (Figura 2). Son evidentes las falencias que presentaron estos maestros en formación en la comprensión del concepto, en tanto no lograron relacionar el desarrollo numérico y el análisis gráfico que lo involucra; en este caso, se resalta que los estudiantes que respondieron el cuestionario ya habían pasado por un curso de cálculo diferencial y, aunque se les hizo referencia a la intencionalidad de las preguntas en torno a dicho concepto, esto no posibilitó que se realizara una reflexión sobre las gráficas de la Figura 3 que, si bien representaban funciones, estas también guardaban una estrecha relación y consecuencia con el concepto de derivada.

Los planteamientos hasta aquí expuestos permiten resaltar diferentes autores (Anacona, 2003; Area et al., 2014; Badillo, 2003; Brush, 1991; Chaves y Salazar, 2003; De Guzmán, 2001; Dolores, 1998; Gil, 1993; Furinghetti, 2007; Liu y Niess, 2009; Mateus, 2011; Moreno, 2014; Muñoz y Román, 1999; Panasuk y Horton, 2013; Ponce, 2015; Romero, 2013; Tzanaski et al., 2002; Ramírez, 2009) que precisan la importancia que la historia tiene en el aprendizaje de las ciencias, puesto que despierta interés y motivación en los estudiantes, contribuye a su comprensión, permite la integración con otras disciplinas, desarrolla un aprendizaje menos algorítmico y más funcional hacia un conocimiento más contextualizado de las matemáticas, en particular, del concepto de derivada, el cual es fundamental para el cálculo y para el aprendizaje y aplicación de otras disciplinas; además, las actividades de indagación (entrevista y cuestionario) y la revisión de algunos aspectos teóricos y metodológicos de ciertos estudios, permiten inferir que los maestros en formación tienen dificultades para comprender el concepto de derivada, no solo desde su aspecto histórico, sino numérico o gráfico. Por lo tanto, la presente investigación pretende responder a la siguiente pregunta:

¿Cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC?

Objetivos

Objetivo general

Para dar respuesta a la anterior pregunta de investigación, se plantea el siguiente objetivo general: analizar cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

Objetivos específicos

Para dar consecución al objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el contexto sociocultural de Newton y de Leibniz presente en el concepto de derivada.
- Evaluar tareas de formación en torno al concepto de derivada, diseñadas para los maestros en formación, a partir de las dinámicas socioculturales de Newton y de Leibniz, en el marco de la EpC.
- Describir la comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

Revisión de literatura

A continuación, se presentan algunos antecedentes del estudio, en el que se abordan aspectos relacionados con la formación de maestros de matemáticas, el contexto histórico del concepto de derivada y la relevancia de la historia para la formación de maestros de matemáticas y para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo; además, se señalan algunas generalidades de la comprensión en Educación Matemática, por estar el objeto de estudio centrado en la comprensión del concepto de derivada.

Formación de maestros de matemáticas

Los maestros, como actores presentes en el proceso educativo, facilitan la comunicación entre el estudiante y el conocimiento matemático; para lograr esta comunicación, surgen diferentes reflexiones como producto de la experiencia del maestro, relacionadas con la comprensión de su saber específico y de su práctica (Parra, 2014). Estas reflexiones, según Ponte (1999), se consolidan en un conjunto de creencias y concepciones sobre la estructura y la forma de enseñanza del conocimiento científico, lo cual determina su práctica pedagógica; por lo tanto, es importante que el maestro cuente con el saber necesario que le permita generar estrategias para contribuir al proceso de enseñanza de las matemáticas y favorecer la comprensión del estudiante. En este sentido, Shulman (2005) refiere que, además del conocimiento específico sobre una ciencia o asignatura, los maestros deben desarrollar conocimientos sobre cómo enseñar ese saber, para que el proceso de enseñanza se convierta en una acción reflexiva, que considere las necesidades de comprensión sobre un objeto de estudio y las particularidades del grupo al que va dirigido; siendo así, cada uno de estos aspectos hacen parte de la reflexión diaria del maestro, la cual debe estar presente en su proceso de formación y en su práctica.

Del mismo modo, Godino (2009) argumenta que los maestros deben tener la capacidad de diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados y entender los factores que condicionan los procesos de comprensión; este conocimiento se logra por medio de una buena formación inicial de maestros, que les permita desarrollar las habilidades necesarias para adaptar el contenido disciplinar a las necesidades de su práctica; en este contexto, Shulman (2005) precisa que, para llevar a cabo un proceso de enseñanza, es fundamental proporcionar a los futuros maestros conocimiento del contenido y habilidades didácticas, que propicie la transformación de la comprensión y el accionar de sus estudiantes; similarmente, Azcárate et al. (1998) argumentan que:

> Es evidente que una de las tareas más importantes que debe asumir la Educación Matemática es la formación de profesores de matemáticas. Para llevar a cabo esta tarea formativa se necesita una investigación que suministre estrategias de formación, y que permita contemplar las dimensiones y aspectos que la caracterizan. (p. 1)

La práctica profesional del maestro se fundamenta en las estrategias de aula y en el diálogo con sus estudiantes, con el propósito de facilitar la participación activa; de este modo, se hace necesario la planeación de estrategias que permitan una mediación en el aula, en las que se considere tanto el saber matemático como los aportes, necesidades o dudas de los estudiantes; se resalta que dicha planeación requiere de conocimientos didácticos que deben hacer parte del proceso de formación del maestro; sin embargo, estos conocimientos se constituyen en una de las mayores dificultades en la Educación Matemática; por lo tanto, una formación de calidad para los maestros tendrá que tener en cuenta las habilidades, fortalezas y objetivos de formación que involucra la práctica pedagógica (Ponte, 2017).

Con relación a lo anterior, se pone en evidencia la necesidad de reflexionar en torno a la labor pedagógica del maestro, a partir de la investigación, promoción y realización de prácticas que favorezcan la comprensión del conocimiento científico; en este sentido, Ponte et al. (2009) precisan que la formación de maestros debe propender por la transformación de las diferentes estrategias utilizadas para el aprendizaje de las matemáticas, tanto en maestros potenciales como en ejercicio, logrando así una respuesta a los desafíos que enfrenta la enseñanza de esta ciencia. Igualmente, Salazar (2005) argumenta que uno de los objetivos centrales en la formación de maestros debe ser la construcción e implementación de métodos de enseñanza basados en procesos de investigación, que integren las intenciones educativas, el contenido y el contexto, buscando contribuir en la forma en que el estudiante se relaciona con el conocimiento. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede establecer la relevancia de la formación de maestros, puesto que estos conocimientos llevados a su práctica son los que determinan y transforman los procesos de enseñanza de las matemáticas y la comprensión de los estudiantes.

Desarrollo histórico del cálculo infinitesimal y del concepto de derivada

Diferentes matemáticos a lo largo de la historia aportaron al desarrollo del cálculo; en particular, los griegos, en el siglo V AC, por medio de las cuatro paradojas de Zenón, consideraron cantidades infinitamente pequeñas, lo cual permitió aproximaciones al cálculo del área de una curva a partir de polígonos inscritos o circunscritos; posteriormente, Arquímedes utilizó este método con la suma de múltiples triángulos presentes bajo una curva, los cuales, a mayor cantidad, le permitían un cálculo más exacto del área de la misma (Bingham, 1973). Así mismo, González (2004) refiere que fue Cavalieri, en el siglo XVI, quien continuó con el desarrollo de ideas y conceptos fundamentales para el cálculo, tal fue el caso de la introducción que hizo de los infinitésimos, aunque se considerara en la época la imposibilidad de utilizar nociones científicas que no tuvieran una perfecta definición; sin embargo, Pascal apoyó la idea de Cavalieri y adoptó en sus desarrollos matemáticos el infinito como algo tan pequeño que carecía de manifestación física, además de ser indivisible. Precisamente, por medio del análisis de los aportes de Pascal, Leibniz introdujo los diferenciales en sus trabajos sobre el cálculo, a partir del estudio del triángulo característico que él representaba como un elemento conformado por las partes infinitamente pequeñas de la tangente y de las paralelas a la ordenada y a la abscisa de una curva. A partir de estos desarrollos, formuló la suma de diferencias y su proceso inverso, lo cual abría paso al concepto de derivada; este trabajo fue publicado inicialmente en un artículo contenido en las *"Actas Eruditorum"* en el año de 1684 y fue el primer escrito publicado donde se desarrollaron los aspectos que fundamentaron el cálculo (Duran, 2006).

Por otra parte, Bingham (1973) precisa que, aunque los precursores de Newton como Fermat, Wallis y Barrow abordaron temas relativos al cálculo diferencial, como los relacionados a las rectas tangentes, curvaturas, máximos y mínimos, entre otros, hacía falta determinar la relación existente entre la geometría analítica y la mecánica, lo cual fue logrado por el mismo Newton y expuesto en un folleto entregado a Barrow en 1665: "*The Analysi des aequationes numero terminorum infinitas*", donde desarrolló su método de fluxiones a partir de las cantidades que él mismo llamó fluentes. En este tratado, además de contener los algoritmos abordados en su método de fluxiones, Newton trabajó el cálculo de derivadas y de áreas (Durán, 2006). La importancia de estas construcciones radicó en que Newton, a partir del desarrollo de las series de potencias, pudo calcular la cuadratura de gran variedad de cantidades (Newton, 2003), lo cual se relaciona, actualmente, con encontrar el área bajo una curva, que es el proceso inverso al cálculo de derivadas.

En cuanto a Leibniz, en 1673 se centró en encontrar la tangente a una curva, situación que lo llevó a percatarse de que este era el proceso inverso para hallar áreas y volúmenes, logrando definir lo que hoy se conoce como integrales; no obstante, al involucrar el cociente de incrementos muy pequeños de las cantidades *x* e *y*, consiguió determinar la tasa de cambio de *y* como función de *x*; precisamente allí es donde construyó el concepto de derivada (Child, 2005). Por otra parte, Newton, en 1687, publicó en su "*Principia*" las leyes matemáticas del movimiento, originadas en el cálculo infinitesimal desarrollado por él desde 1665, y en el que abordó la derivada como la ecuación de una función *f(x)* si el área de su gráfica era de la forma *xm* (Newton, 2011); este planteamiento era similar al esbozado por Leibniz; la diferencia radicaba en asumir la fluxión como la cantidad que se acercaba a cero pero nunca llegaba, de donde, a su vez, se introdujo la idea de límite (Stewart, 2008). Durán (2012) refiere que, tanto Newton como Leibniz desarrollaron métodos algorítmicos generales para el cálculo, al abordar las fluxiones y fluentes en el caso de Newton o, análogamente, los diferenciales y sumas en los términos de Leibniz; ambos métodos permitieron resolver, de manera general, problemas referentes al cálculo de tangentes, máximos y mínimos, áreas, entre otros.

Aunque ambos matemáticos desarrollaron el cálculo infinitesimal, Muñoz (2013) menciona que los enfoques eran distintos; Newton abordó la derivada a partir de movimientos infinitamente pequeños, mientras que Leibniz la trabajó por medio de los diferenciales; Newton asumió las derivadas e integrales a partir del cambio relativo entre variables, Leibniz, por su parte, con la suma de términos para hallar áreas y volúmenes; Leibniz se enfocó en desarrollar una notación adecuada, reglas de cálculo y fórmulas de aplicación, mientras que Newton no le prestó demasiada atención a estos aspectos. Sin embargo, estas diferencias no fueron apreciadas con claridad, en su momento, lo que generó una disputa por la invención del cálculo infinitesimal, la cual estuvo sustentada por parte de Newton y sus seguidores a partir del intercambio de cartas entre los matemáticos en cuestión, por medio de Oldenburg; esto permitió que se afirmara que Leibniz extrajo, de dichas comunicaciones, las bases para sus desarrollos sobre el cálculo; por su parte, Leibniz argumentaba su originalidad por medio de las diferencias presentes en su método (Durán, 2006).

Esta polémica trajo consecuencias sociales, científicas y personales, como fue la acusación de plagio realizada a Leibniz; de hecho, el análisis de dicha situación se llevó a cabo en la Royal Society, organismo que priorizó a Newton sobre Leibniz; esto propició que los ingleses se apropiaran del método de Newton y se apartaran de los demás países europeos, generando atrasos en los desarrollos científicos de Inglaterra; por su parte, el trabajo de Leibniz fue aceptado en los demás países y seguido fielmente por muchos matemáticos, entre los cuales se destacaron los hermanos Bernoulli (Muñoz, 2013). Así mismo, Bingham (1973) y Stewart (2008) afirman que los británicos adaptaron, por orgullo nacionalista, la notación de Newton por unos 100 años, aproximadamente, para finalmente aceptar la desarrollada por Leibniz, como lo había hecho, desde un inicio, el resto de Europa, pues evidentemente era muy superior a la de Newton, la cual era tediosa y complicada de trabajar, sobre todo para el cálculo de derivadas de orden superior. La notación de Leibniz posibilitaba establecer, por sí misma, los procesos presentes y derivados del cálculo infinitesimal a partir del desarrollo de los diferenciales, además permitía visualizar que la diferenciación era el proceso inverso de la suma (Child, 2005); es así como la notación de Leibniz se constituyó en uno de los grandes logros de la humanidad, en lo que se refiere a los desarrollos sobre el cálculo infinitesimal.

Historia en los procesos de formación y aprendizaje del cálculo

La historia de las matemáticas se constituye en un recurso que, entre otros aspectos, permite la superación de obstáculos epistemológicos, promueve la reflexión del estudiante e integra las matemáticas con otras disciplinas; en este sentido, abarca un papel más significativo que el de recolección de anécdotas, datos antiguos y sucesos acumulados, lo que consolida a la historia como un campo amplio en la práctica educativa (Chaves y Salazar, 2003; Liu y Niess, 2009; Protti, 2003). La historia debe proporcionar una visión más amplia de la que se le dota en muchas ocasiones en un proceso de enseñanza de las matemáticas, en el que, estas últimas, se suelen presentar como herramientas o procedimientos que adquieren su valor y validez por medio de la realización de algoritmos correctos y la solución de ejercicios con respuestas exactas; estas estrategias dejan a un lado el conocimiento histórico, el cual puede exponer las contribuciones de las diferentes culturas referentes a sus diversas ramas, que van desde las geometrías euclidianas y no euclidianas hasta el cálculo mismo (Panasuk y Horton, 2013).

En este sentido, todo el interés para la construcción e implementación de estrategias didácticas que aporten a la comprensión de los conceptos presentes en el cálculo, precisan de una mayor comprensión sobre las matemáticas involucradas y, por lo tanto, requiere de una transformación de los procesos y metodologías presentes en la formación de maestros (Moreno, 2014). En el caso colombiano, a partir de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se abre el camino hacia la incorporación de la construcción de las ciencias en la enseñanza de las matemáticas, mediante el apropiamiento de la concepción sobre el saber disciplinar como el producto de una actividad de comunidades profesionales en las que están presentes prácticas y conceptos ligados a un contexto cultural e histórico, en proceso continuo de reconstrucción (MEN, 2006).

Con relación a lo anterior, los maestros, en general, deben recibir orientación sobre contenidos y ajustes metodológicos adecuados para la enseñanza de las matemáticas, puesto que este es un factor determinante del rendimiento educativo de los estudiantes, contribuye al desarrollo de sus habilidades y capacidades científicas, y permite resolver los problemas que surgen durante la producción del conocimiento de esta ciencia; lo anterior, precisa de un apropiado proceso de formación de maestros (Dejiz y Mihajlović, 2014; Pivatto, 2014; Tzanaski et al., 2002). Así mismo, los maestros en formación necesitan de un espacio que les permita reorientar las metodologías tradicionales de enseñanza; este contexto puede ser proporcionado por la historia de las ciencias, la cual favorece su conocimiento disciplinar y aporta el sustento necesario para la integración del discurso matemático y el didáctico en las prácticas educativas (Mora et al., 2016; Furinghetti, 2007).

Sin embargo, el desconocimiento de los maestros en formación de dicho aspecto es una de las razones por las que no se incluye en los planes de estudio de matemáticas; así mismo, esto lleva a los estudiantes a construir o seguir sus propios caminos en la apropiación de los conceptos, facilitando la formación de concepciones alternativas y prácticas equivocadas sobre el conocimiento matemático y sus procesos de enseñanza, lo que, a su vez, puede generar temor y desconfianza a la hora de abordar la historia (Furinghetti, 2007; Panasuk y Horton, 2013). Esta falta de confianza es un factor que debe ser analizado tanto en los programas escolares como en la preparación inicial de los maestros y en su práctica pedagógica, lo cual puede convertirse en una oportunidad para incluir en los procesos de enseñanza el conocimiento de la naturaleza de las matemáticas, su significado cultural y su influencia en el desarrollo tecnológico y científico de la sociedad, propendiendo por una mejor comprensión disciplinar de los estudiantes (Panasuk y Horton, 2013). Por lo tanto, es imperante la inclusión de cursos específicos de historia en los programas de estudio de las carreras relacionadas con la enseñanza de las matemáticas y, en particular, del cálculo, los cuales deben contemplar elementos teóricos de la historia; pero, además, deben brindar claridad frente a qué tipo de conocimiento puede hacer un uso real de la historia para su enseñanza (Chaves y Salazar, 2003; Panasuk y Horton, 2013; Jankvist et al., 2015).

Finalmente, Vasco (2002) menciona que la implementación de la historia como estrategia para la enseñanza de las matemáticas, relaciona las siguientes dimensiones: el tipo de saber que se va a enseñar, la formación de los maestros, el currículo que se esté desarrollando, las estrategias didácticas, el conocimiento previo del estudiante, las concepciones que se tengan sobre las matemáticas, la didáctica para la incorporación de la historia y los intereses tanto de los estudiantes como del contexto. En consecuencia, todos estos aspectos precisan del abordaje de investigaciones sobre la historia de las matemáticas y sobre la Educación Matemática misma; la naturaleza del conocimiento no debe asumirse como un valor agregado sino como una necesidad cultural, que permita recuperar la historia de las ciencias y que motive tanto a maestros como a estudiantes a comprender los procesos presentes en el origen y construcción de las matemáticas.

La comprensión en Educación Matemática

De acuerdo con Perkins (2002), "comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la 'capacidad de desempeño flexible' con énfasis en la flexibilidad" (p. 70). Esta definición de comprensión, desde el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), destaca la habilidad de implementar diferentes conocimientos científicos y experienciales para ser aplicados de la forma más oportuna en ciertos momentos de la vida. En este sentido, la comprensión se constituye en una relación estrecha entre el pensamiento y la práctica, y su eficacia dependerá de las decisiones que se tomen en un momento determinado (Acevedo, 2011).

Por su parte, los Van Hiele, a partir de la propuesta de su modelo teórico para la enseñanza de la geometría, explican el proceso que se debe seguir para alcanzar la comprensión geométrica, mediante la estratificación del razonamiento en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada nuevo aprendizaje (Vargas y Gamboa, 2013). Así mismo, Jaime (1993) precisa que el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele permite identificar diferentes formas de razonamiento y establece las pautas que los maestros deben llevar a cabo para contribuir al avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento.

De acuerdo con Meel (2003), la concepción de comprensión para Pirie y Kieren se asume desde un proceso dinámico, en crecimiento, pero no consecutivo o lineal, el cual puede ser reorganizado; así mismo, alude a la comprensión desde la teoría APOE, donde la abstracción reflexiva planteada por Piaget se convierte en la base de la comprensión, ya que es un proceso cognitivo del estudiante basado en la reconstrucción y organización de acciones físicas y mentales hacia un nivel superior del pensamiento.

Por otra parte, Bubner (1992) desarrolla diferentes percepciones acerca de la comprensión; para este autor, la comprensión se relaciona con la incorporación de contenidos nuevos a las diferentes competencias, postura que se encuentra en desacuerdo con la noción de comprensión desarrollada por Heiddegger, citado en Bubner (1992), quien asume la comprensión como una forma de comportarse en el mundo y no tiene que ver con la apropiación de nuevos contenidos; por su parte, Bubner (1992) también se refiere a la comprensión, a partir de Gadamer, como consecuencia de un diálogo en el que se encuentran diferentes posturas y se establecen acuerdos y limitaciones sobre un aspecto particular propio de un espacio temporal.

A partir de lo anterior, puede observarse que la comprensión es uno de los aspectos fundamentales del conocimiento humano, central en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los cuales buscan, a su vez, la comprensión de un campo o saber específico; precisamente allí radica el interés que la didáctica de las matemáticas tiene sobre la noción de comprensión (Rico, 2009). Este aspecto suele ser uno de los más abordados en la educación y en la investigación científica; incluso, el uso de dicha noción ha venido permeando también el campo de la Educación Matemática, en la que se han obtenido resultados y conclusiones importantes relacionados con el desarrollo de la comprensión de los estudiantes; no obstante, aún persisten dificultades vinculadas a la naturaleza interna de la comprensión, relacionadas con la falta de conexión entre el conocimiento matemático y la realidad, lo cual se constituye en un problema metodológico que parte de lo teórico para llegar a lo práctico (Gallardo y González, 2007). Comprender una disciplina o campo específico va más allá que aprender con comprensión su contenido básico, también debe incluirse la comprensión de su filosofía, metodología, alcances, limitaciones y desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina; sin embargo, la comprensión, entendida de esta manera, como un todo, no es muy común en las matemáticas, por lo que tratar de mejorarlo debe ser relevante para los estudiantes y maestros de matemáticas (Kilpatrick et al., 1998).

Marco teórico: Enseñanza para la Comprensión

A continuación, se abordan los principales aspectos del marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión, en el cual se fundamentó el presente estudio atendiendo a la pregunta de investigación y al objetivo planteado. Por esta razón, este capítulo expone las generalidades de la EpC, los elementos de comprensión, las dimensiones y los niveles. Así mismo, se justifica la pertinencia de esta estructura teórica en el estudio en cuestión.

Generalidades

Un equipo de maestros e investigadores de Harvard dirigidos por Howard Gardner, David Perkins y Vito Perrone, en 1988, se interesaron por el aprendizaje, la pedagogía, el desarrollo de los maestros y el mejoramiento general de asuntos escolares; a partir de estos precedentes, surgió el proyecto Cero, que permitió configurar el marco teórico de la EpC, el cual busca fortalecer y alcanzar la comprensión del conocimiento en los estudiantes (Stone, 1999).

En este sentido, Perkins (1999) precisa que comprender debe entenderse como la destreza para hacer algo o resolver un problema; así mismo, el autor aclara que la posibilidad de explicar, justificar, explorar, vincular y aplicar de manera diversa determinado conocimiento es lo que se debe entender por desempeñarse con flexibilidad. Por su parte, Blythe y Perkins (2002) se refieren a la comprensión como un proceso continuo, que debe considerar situaciones, tareas, aplicaciones, conexiones y acciones que se desarrollan a partir de los desempeños de comprensión, los cuales posibilitan que el estudiante vaya más allá de su conocimiento.

A su vez, Gardner y Boix (1999) definen la comprensión como "la capacidad de usar conocimientos, conceptos y habilidades en curso para iluminar nuevos problemas o temas no previstos" (p. 3). La comprensión desde Baquero y Ruiz (2005), puede entenderse como la capacidad de tener diferentes formas de representar el mundo a partir de la interpretación, aplicación o invención de los sistemas simbólicos que lo conforman. Finalmente, se puede establecer la comprensión como la utilización adecuada del conocimiento, en donde se evalúa el saber a partir de retroalimentaciones y se logra una articulación correcta entre los argumentos y la teoría (Escobedo et al., 2004).

Elementos de la comprensión

Stone (1999) considera necesario realizar procesos de reflexión con relación a la práctica educativa y a las metodologías curriculares, enfocados en responder a los cuestionamientos relacionados con: qué es necesario comprender, qué comprenderán los estudiantes y cómo favorecer y evaluar este proceso de comprensión; las anteriores preguntas permiten la estructuración de los elementos de la comprensión de la EpC, los cuales se describen a continuación.

El primer elemento lo constituyen los tópicos generativos, los cuales, a partir de lo planteado por Stone (1999a), se relacionan con aquello que es importante comprender, donde el maestro, como mediador, considera la necesidad del conocimiento disciplinar y el interés de los estudiantes, posibilitando que estos últimos trasciendan más allá de sus cuestionamientos iniciales y los vinculen a problemas fundamentales y amplios. De acuerdo con Pogré (2012), "para seleccionar los tópicos, utilizamos cuatro criterios: deben ser centrales para la disciplina; accesibles, en términos cognitivos, e interesantes para los estudiantes; importantes e interesantes para el maestro y ricos en conexiones con el contexto y los recursos disponibles" (p. 50). Así mismo, Escobedo et al. (2004) argumentan que los tópicos generativos deben propiciar pasión en el estudiante, lo que se logra a través de la conexión que se encuentre entre las ideas principales de la disciplina que se va a abordar con las realidades de su contexto.

Similarmente, se encuentran las metas de comprensión, que se consideran como el segundo elemento del marco; estas hacen referencia a lo que se espera que los estudiantes comprendan a partir del desarrollo de una unidad o curso de estudio (Gardner y Boix, 1999). Las metas de comprensión se constituyen en ese destino compuesto por "conceptos, procesos y habilidades que deseamos que comprendan los alumnos y que contribuyen a establecer un centro cuando determinamos hacia dónde habrá que encaminarse" (Blythe y Outerbridge, 2002, p. 66). Por su parte, Barrera (2014) argumenta que las metas de comprensión deben ser concretas, observables y medibles, y estar centradas en desarrollar los conocimientos y métodos de la disciplina, propósito que se comparte de manera explícita con el estudiante.

El tercer elemento son los desempeños de comprensión, los cuales configuran, expanden y construyen el conocimiento a partir de actividades basadas en los saberes previos de los estudiantes, para que este sea utilizado en nuevas formas y situaciones (Pogré, 2012). Del mismo modo, Stone (1999a) precisa que los desempeños se desarrollan de manera progresiva y estructurada, lo que permite dividirlos en tres categorías, a saber: se inicia con una etapa de exploración que permite, por medio de diferentes actividades, vincular los intereses de los estudiantes con un tópico generativo, para que, desde allí, se establezcan los saberes previos y se puedan estructurar los mecanismos a seguir para contribuir con los procesos de comprensión; posteriormente, se continúa con una fase de investigación guiada, en la cual el maestro, a través del desarrollo de una estrategia metodológica, acompaña a los estudiantes en la consecución de las metas de comprensión; para terminar, en la última fase se realiza un proyecto final de síntesis en el cual el estudiante tiene la oportunidad de dar a conocer lo comprendido mediante la utilización de diferentes métodos para la socialización de su conocimiento; estas fases buscan desarrollar y demostrar claramente la comprensión que los estudiantes han alcanzado con respecto a las metas de comprensión establecidas con anterioridad.

Además de lo anterior, los desempeños de comprensión se pueden evidenciar a partir de diferentes dinámicas, que van desde la exploración de sistemas de símbolos, la realización conceptual, el desciframiento o la codificación de conceptos, hasta el reconocimiento de las intencionalidades de enseñanza y las aplicaciones en el contexto (Baquero y Ruiz, 2005). A partir de lo referido por Escobedo et al. (2004), los desempeños de comprensión pueden desarrollarse con diferentes actividades que involucren al estudiante, de una manera activa, en procesos de pensar y de hacer, ya sea dentro o fuera del aula de clase. Estos desempeños se deben vincular con las metas para propiciar la comprensión a partir de la práctica, posibilitar diferentes estilos de aprendizaje y comunicación, promover una reflexión continua sobre el desarrollo de actividades y permitir la demostración de la comprensión alcanzada (Stone, 1999a).

Finalmente, el cuarto elemento es la evaluación diagnóstica continua; tal como lo plantea Blythe et al. (2002), no es un proceso de estimación, sino que contribuye al aprendizaje y permite comunicar a maestros y compañeros lo que el estudiante ha comprendido; además, brinda la oportunidad de realimentar y mejorar el proceso de comprensión. Inicialmente, el maestro realiza esta tarea de manera informal y, posteriormente, en la fase de investigación guiada, se consideran las apreciaciones de los estudiantes en torno a todo el proceso de comprensión, logrando así definir criterios claros y coherentes de evaluación (Stone, 1999a). Con relación a este cuarto elemento, Blyte et al. (2002) refieren que:

> Integrar el desempeño y la realimentación es justamente lo que necesitan los alumnos cuando trabajan en el desarrollo de la comprensión de un tópico o concepto específico. En el marco teórico de la enseñanza para la comprensión esto se denomina "evaluación diagnóstica continua" y no es sino el proceso de brindar respuestas claras a los demás desempeños de comprensión de los alumnos, de modo tal que les permita mejorar sus próximos desempeños. (p. 108)

En consonancia con lo anterior, Barrera (2014) define la evaluación continua como un conjunto de momentos en los que los estudiantes y maestros realizan realimentación de las situaciones propias del proceso de enseñanza y aprendizaje, con el objetivo de avanzar en la comprensión por medio de la puesta en marcha de estrategias o herramientas. La valoración de todo el proceso de comprensión debe ser continua, orientada hacia espacios de revisión constante, en los que el estudiante tenga la oportunidad de volver las veces que se consideren necesarias sobre la misma idea; de este modo, la evaluación diagnóstica continua, para el estudiante, representará un apoyo o estímulo y no un juicio que califica sus acciones y aportes (Escobedo et al., 2004).

Dimensiones para la comprensión

Boix y Gardner (1999) refieren que las dimensiones permiten describir las cualidades de la comprensión observables en los estudiantes; a su vez, mencionan que estas son específicas en las diferentes disciplinas y validadas en diversos saberes; estas dimensiones se dividen en cuatro, entre las cuales se encuentra la dimensión de contenido; los autores la definen como la que permite establecer el nivel de comprensión que el estudiante ha alcanzado, desde las perspectivas intuitivas y no escolarizadas, hasta procesos de comprensión flexibles, que le posibilitan utilizar conceptos coherentemente; en este sentido, Pogré (2012) afirma que "la dimensión del contenido contempla el conocimiento y el contenido del área disciplinar de enseñanza (…) Promovemos que los estudiantes transformen sus creencias intuitivas y que puedan construir redes conceptuales ricas y coherentes" (p. 53). Por su parte, Baquero y Ruiz (2005) argumentan que el maestro debe tener un conocimiento profundo para seleccionar, de manera adecuada, los contenidos, con el propósito de que pueda establecer su pertinencia psicológica y su importancia social, posibilitando la elección de contenidos interesantes y significativos para el estudiante.

Por otra parte, Escobedo et al. (2004) argumentan que la comprensión depende de las decisiones que se tomen frente a ciertas afirmaciones, las cuales deben basarse en argumentos razonados, justos y bellos. De esta manera, surge la dimensión de métodos, en la cual el conocimiento se asume como resultado de un cuidadoso proceso de investigación, realizado y debatido por comunidades de expertos, que el estudiante debe apropiar para que, a partir de este, logre debatir y validar, por medio de métodos confiables, lo que conoce o lo que se le menciona (Boix y Gardner, 1999).

La tercera dimensión es la de propósitos, la cual "evalúa la capacidad de los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar este conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo" (Leguizamón y Patorelli, 2011, p. 65). Adicionalmente, Pogré (2012) argumenta que, esta dimensión, se fundamenta en la convicción del conocimiento como herramienta para explicar, reinterpretar y operar en el mundo; dicho conocimiento se conecta e influye directamente con la vida del ser humano. En esta dimensión se resalta la posibilidad de evidenciar la intención del conocimiento en relación con las dinámicas del contexto (Escobedo et al., 2004); de este modo, tal como lo argumenta Cifuentes (2015), la comprensión debe tener el propósito de desarrollar conexiones reflexivas y personales del conocimiento del estudiante con su realidad.

Finalmente, la dimensión de formas de comunicación, a partir de lo expuesto por Boix y Gardner (1999), evalúa en los estudiantes la utilización de métodos y símbolos que les permitan dar a conocer o expresar sus conocimientos, para que estos sean comunicados al público, ya sea de forma visual, verbal, escrita o corporal. Por lo tanto, Cifuentes (2015) asume esta dimensión como la variedad de sistemas simbólicos que se pueden utilizar correctamente y con fluidez para dar a conocer lo comprendido, de manera pertinente, de acuerdo con las particularidades del contexto. La comunicación es fundamental para la comprensión, porque implica entender a quién nos dirigimos, para así utilizar la forma de comunicación más apropiada; por otro lado, involucra conocer, en lo personal, la forma de comunicación en la cual se tiene mayor habilidad (Escobedo et al., 2004).

Niveles de comprensión

Boix y Gardner (1999) plantean que la profundidad de la comprensión puede variar desde unos niveles más débiles a otros más avanzados; por lo tanto, se hace necesario diferenciarlos. Inicialmente, se encuentra el nivel de ingenuo, en el cual, de acuerdo con Pogré (2012), el estudiante no encuentra relación con el conocimiento y su realidad, no se indaga por sus bases, orígenes y la forma conveniente de comunicarlo. Por lo tanto, en este nivel, el estudiante fundamenta su conocimiento a partir de lo intuitivo, lo que se constituye en un saber que se adquiere directamente del mundo y que no se diferencia del abordado en la escuela; además, está totalmente desligado de un propósito y de un proceso de construcción (Boix y Gardner, 1999).

Posteriormente, está el nivel de novato o principiante, en el que los estudiantes se basan "en procedimientos ritualizados y mecanismos de prueba. La naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento son descriptos como procedimientos mecánicos. La validación de un trabajo depende más de la autoridad externa" (Leguizamón y Pastorelli, 2011). Así mismo, Pogré (2012) menciona que, en este nivel, se establecen conexiones simples y poco estructuradas entre conceptos o ideas disciplinarias.

Por otra parte, se halla el nivel de aprendiz, en el que, a partir de lo expuesto por Boix y Gardner (1999), el estudiante tiene un conocimiento disciplinar flexible, que percibe como una tarea compleja; con el apoyo del maestro, el estudiante puede relacionar, en ocasiones, este conocimiento con la vida cotidiana para establecer su pertinencia. Del mismo modo, Leguizamón y Pastorelli, (2011) refieren que, en este nivel, el proceso de comprensión se basa en conocimientos disciplinarios, en los que se tiene un manejo amplio de conceptos que puede llegar a utilizar el estudiante, con apoyo, en su cotidianidad.

Cuando el estudiante tenga la capacidad de moverse con flexibilidad entre dimensiones, vinculando criterios de construcción y validación del conocimiento con el objeto de estudio, usando este conocimiento para expresarlo de forma creativa y para reinterpretar y actuar en el mundo, el estudiante se encontrará en el nivel de maestría (Pogré, 2012). Al respecto, Boix y Gardner (1999) mencionan que, en este nivel, el estudiante concibe la construcción del conocimiento como una tarea compleja, realizada por comunidades de profesionales y validada a partir de métodos propios de la naturaleza del objeto. Además, en este nivel, el estudiante posee un desempeño de comprensión integrador, reflexivo, crítico y aplicable a su realidad (Leguizamón y Pastorelli, 2011).

Pertinencia del marco teórico de la EpC en la investigación

El marco teórico de la EpC, a partir de lo argumentado por Stone (1999), brinda una estructura que da orden al proceso de investigación educativa en el que la comprensión es el eje central que se alcanza por medio de las metas de comprensión, las cuales son evaluadas y refinadas durante el proceso de enseñanza; por lo tanto, el marco teórico se constituye en una herramienta de apoyo para los maestros, en términos de una reflexión en y sobre su práctica pedagógica, generando motivación para el tratamiento de ideas o conocimientos más profundos. En este sentido y, a partir de las generalidades de dicho marco teórico, además de considerar que el objetivo del presente estudio propende por analizar cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC, se establece la comprensión como núcleo central común tanto del marco teórico como del propósito de investigación.

Por lo tanto, si se espera analizar cómo un grupo de personas comprenden determinado objeto matemático, será necesario llevar a cabo un proceso continuo y delimitado por los presupuestos de la EpC, apoyado en la planificación y aplicación de actividades o tareas que propicien, en este caso particular, el alcance de la comprensión en la formación inicial de maestros, en torno al concepto de derivada desde su aspecto histórico. Así mismo, el marco de la EpC puede adaptarse a un contexto determinado y permite ajustarlo a los objetivos de investigación sin desconocer los propósitos del maestro formador; en este sentido, Ritchhart et al. (1999) precisan:

> La habilidad en el manejo de la EpC se basa en interpretar los elementos del marco teórico y adaptarlos para que respondan a las exigencias de un contexto concreto, mientras expresan los compromisos, las pasiones y la personalidad particulares del docente. De tal forma, los docentes incorporan sus propios intereses y prioridades en su práctica de la EpC, dándole a cada aula sus rasgos distintivos. (p. 171)

Así mismo, cada uno de los elementos, dimensiones y niveles de comprensión, se constituyen en una herramienta que permite reflexionar sobre las prácticas de enseñanza del concepto de derivada y la comprensión que los estudiantes están desarrollando del mismo; aunque el marco de la EpC no puede establecerse como una receta, sí permite instaurar pautas para generar tópicos, metas de comprensión y actividades curriculares y de evaluación, que posibiliten alcanzar la construcción de un conocimiento flexible, reflexivo y articulado a la realidad de los maestros en formación, respecto al objeto de estudio, lo que, a su vez, permitirá alcanzar el objetivo y dar respuesta a la pregunta de investigación.

Es así como este marco teórico de la EpC apoya cada una de las fases que comprende la presente investigación, además se consolida como una herramienta para dirigir el trabajo de la investigadora y para desarrollar estrategias metodológicas oportunas que aporten a la comprensión del concepto de derivada en los maestros en formación a partir de los contextos de Newton y de Leibniz. En concordancia con esto, Cifuentes (2015) precisa:

> La enseñanza para la comprensión (EpC) es una opción valiosa para transformar nuestras prácticas educativas, pues permite desarrollar comprensiones profundas, promueve el aprendizaje significativo y crea verdaderas culturas de pensamiento en el aula y fuera de ella. El trabajo con la EpC es dispendioso y exige gran dedicación y esfuerzo del docente, pero genera excelentes resultados en lo académico y en el desarrollo de habilidades sociales, en cuanto a que los estudiantes se ven comprometidos y motivados en sus propios procesos de aprendizaje al poder aplicar, retroalimentar y hacer circular lo que saben. (p. 80)

Marco metodológico

Este capítulo esboza las generalidades del marco metodológico. Para ello, y con el propósito de justificar metodológicamente el actual trabajo de investigación, se hace referencia a los siguientes aspectos: enfoque de investigación, diseño, participantes, métodos de recolección de información y proceso de análisis de esta.

Enfoque de investigación

La necesidad de estudiar fenómenos sociales y analizar el comportamiento de los individuos, además de la heterogeneidad del conocimiento científico, motivó la emergencia de la investigación cualitativa, en la cual el punto de partida del investigador es la comprensión de la realidad a partir de la observación, el descubrimiento, la explicación y la predicción de situaciones presentes en los hechos y en los sujetos que hacen parte de esa realidad; por lo tanto, el enfoque cualitativo, en el campo de la investigación científica, se puede considerar como un modelo revolucionario que permite abordar el conocimiento de una manera particular, sin buscar generalizaciones, en donde el entendimiento de una situación o un caso, tiene igual importancia que el análisis y comprensión de un problema representativo (Álvarez y Jurgenson, 2003).

Por otra parte, Hernández et al. (2010) sostienen que los estudios cualitativos son dinámicos, dado que permiten la construcción de hipótesis antes, durante y después del proceso investigativo; adicionalmente, mencionan que este tipo de enfoque pretende reconstruir toda la realidad en la que se encuentra un grupo de estudio sin manipularla o condicionarla. Del mismo modo, Galeano (2004) precisa que la investigación social cualitativa busca comprender la realidad a partir de las situaciones propias de los múltiples y heterogéneos actores sociales. En este sentido, la investigación cualitativa se convierte en un proceso interrogativo de comprensión que indaga por un problema social a partir del análisis de los discursos y acciones de los participantes (Creswell, 2013). Por otra parte, Vasilachis (2006) precisa que este tipo de investigación centra su atención en las formas en que se comprende, experimenta o produce el mundo y en cómo los participantes, en particular los de este estudio, lo sienten, significan, experimentan, conocen y lo relatan; así mismo, este enfoque investigativo busca poner en evidencia lo nuevo, entender el contexto de la teoría y generar nuevas perspectivas de lo que se conoce.

En cuanto al investigador, Valles (1999) precisa que la práctica, en el enfoque cualitativo, se origina en un contexto sociohistórico determinado, en el cual el investigador debe tomar decisiones, de manera explícita o implícita, determinadas por sus intereses y compromisos de investigación; en consecuencia, es necesario que el investigador tenga claridad sobre el tema de estudio, el enfoque y las perspectivas teóricas relacionadas con el problema a investigar; sin embargo, este no puede desconocer que el proceso investigativo debe asumirse como flexible y delimitado a partir de unas características iniciales, pero que se moldea y transforma a lo largo del tiempo y el contexto de estudio.

Con base en lo anterior, se puede establecer que el presente trabajo de investigación se enmarcó en un enfoque cualitativo, puesto que no se pretendió realizar medidas de un fenómeno u objeto de estudio, o generar teorías científicas; el propósito de este estudio era analizar la comprensión, como fenómeno social, de los maestros en formación en torno al concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC, teniendo en cuenta las dinámicas presentes en sus procesos de formación, buscando con ello aportar a la comprensión misma del objeto matemático.

Diseño de investigación

Para abordar la investigación, se implementó un estudio de casos, puesto que, como lo refiere Stake (1998), este tipo de estudios facilita el análisis y comprensión de la particularidad y complejidad de un caso con relación a sus acciones y contexto, considerándolo como un sistema integrado que incluye diversidad de características, las cuales brindan información necesaria para desarrollar el proceso de investigación. El estudio de casos permite profundizar determinado fenómeno en su contexto real, en casos únicos o múltiples, para, posteriormente, tomar registro de la investigación con la ayuda de diferentes herramientas o instrumentos de indagación (Yin, 1989); por lo tanto, como lo refieren Neiman y Quaranta (2006), el diseño de investigación basado en estudios de caso posibilita focalizar hechos y situaciones presentes en un contexto específico, que permitan realizar un análisis profundo para llegar a comprenderlos. En este sentido, el estudio de casos pudo facilitar un análisis de reflexiones, percepciones y acciones de cada uno de los maestros en formación, en relación con la comprensión del aspecto histórico del concepto de derivada, a partir de las dinámicas socioculturales propias del contexto de Newton y de Leibniz

A partir de lo planteado por Creswell (2013), el estudio de casos considera múltiples formas de recolección de información para describir, analizar y explicar a profundidad situaciones, en referencia a un mismo fenómeno u objeto de estudio, a partir de diferentes mecanismos como la observación, entrevistas y diarios. Por lo tanto, este diseño de investigación permitió evidenciar los procesos de comprensión de los maestros en formación, respecto al concepto de derivada en el contexto de Newton y Leibniz, bajo el marco de la EpC; es decir, cada una de las participaciones de los estudiantes, sus acciones y productos, fueron relevantes, puesto que se convirtieron en mecanismos de análisis y evaluación del proceso investigativo, tal como lo refieren Hernández et al. (2010) cuando afirman que el estudio de casos permite analizar profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema inicial.

Dado que se pretendía realizar un análisis de la comprensión del concepto de derivada en un grupo de maestros en formación de matemáticas, el estudio de casos que se implementó fue múltiple, debido a que se hizo necesario analizar los casos por separado de acuerdo con las dimensiones y niveles de comprensión referidos en la EpC, a la luz de una rúbrica diseñada a partir de descriptores y categorías de comprensión preestablecidas y refinadas durante el desarrollo del estudio, para, finalmente, hacer un análisis global de la pregunta que dirigió la investigación. De acuerdo con lo anterior, es importante mencionar, tal como lo plantea Yin (2003), que el estudio de casos múltiple busca, a partir de la comparación de respuestas o aportes a las mismas preguntas o situaciones, establecer conclusiones importantes sobre un objeto de investigación, tratando de encontrar los puntos donde convergen las diferentes manifestaciones o resultados, lo que dota de validez a la investigación; por lo tanto, el estudio de casos múltiple suele considerarse más convincente, puesto que cada caso particular o unidad de análisis tiene un propósito para el desarrollo y el alcance de la investigación, para lo cual se realiza una elección reflexiva y cuidadosa y, por esta razón, este tipo de estudio no debe considerarse simplemente como la suma de casos únicos.

Finalmente, este diseño de investigación se constituyó en una herramienta pertinente para apoyar el proceso investigativo; en particular, pudo contribuir a la solución de la problemática específica, por medio de la respuesta a la pregunta que orientó el estudio y la consecución de los objetivos de investigación.

Participantes

A partir de lo mencionado por Quiroz et al. (2002), es relevante establecer con claridad el grupo de participantes con los que se desarrolla una investigación, puesto que:

> Es importante tener un conocimiento de las características de los sujetos con quienes se va a interactuar, en relación con la edad, el género, el nivel socioeducativo, los intereses, procurando de esta manera, preparar sesiones que tengan como punto de partida las necesidades y experiencias específicas de los participantes. (p. 55)

En este sentido y, atendiendo al objetivo de investigación, los participantes que hicieron parte de la implementación de diversas tareas de formación[3], propias del presente estudio, eran estudiantes de una licenciatura en matemáticas y física de una universidad pública colombiana; a su vez, considerando la particularidad del estudio, estos estaban matriculados en un curso de cálculo integral, puesto que, a partir del plan de estudio del programa de licenciatura, era relevante establecer unos temas y conceptos que debían abordarse previamente (concepto de derivada), para poder realizar un adecuado desarrollo del curso; por lo tanto, en este momento del programa, se esperaría que los estudiantes tuviesen cierta madurez teórica, al estar familiarizados con el concepto en cuestión; aunque, a partir de la actividad diagnóstica inicial, se pudo determinar que los maestros en formación presentaron problemas de comprensión de este concepto particular, a pesar de que ya habían pasado por un curso de cálculo diferencial.

Posteriormente, dentro de este grupo, se seleccionaron los cinco maestros en formación que habían exhibido mayores dificultades en la comprensión del concepto de derivada, de acuerdo con los resultados de una actividad diagnóstica previa (cuestionario). Del mismo modo, este análisis inicial posibilitó generar una serie de tareas de formación que podían contribuir con la comprensión del concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz.

El grupo de los cinco maestros en formación estuvo conformado por tres mujeres y dos hombres, entre los 20 y 27 años, todos ellos se encontraban entre el sexto y octavo semestre de

[3] Las tareas de formación son problemas o actividades que se le plantean al maestro en formación, las cuales tienen como objetivo contribuir a su conocimiento para desarrollar un proceso de enseñanza de las matemáticas (Ponte et al., 2009).

una licenciatura en matemáticas de una universidad pública de Colombia. En su proceso de formación, habían tenido la oportunidad de abordar el curso de cálculo diferencial, en el que tuvieron un acercamiento al concepto de derivada, atendiendo el plan de estudios vigente para dicho programa. Por otro lado, se aclara que los participantes manifestaron, considerando diferentes aspectos éticos y de privacidad, que querían ser identificados en el estudio con los siguientes seudónimos: Ángela, participante de 23 años, que cursaba sexto semestre; Kelly, maestra en formación de 20 años de edad y situada en el sexto semestre; Mateo, maestro en formación de matemáticas con 22 años, que cursaba séptimo semestre; Karen, participante de 24 años de edad, que adelantaba su octavo semestre, y Jhordan, con 21 años, que estaba en su séptimo semestre, al momento de la realización del estudio.

Finalmente, la participación de los maestros en formación en el presente estudio se realizó de manera voluntaria; además, se garantizó, en todo momento, la reserva de su identidad si era requerido por los mismos; igualmente, se les informó, de manera oportuna, acerca de los logros y dificultades que se generaron como consecuencia de la realización de la investigación; del mismo modo, se verificó que los participantes contaran con los medios tecnológicos necesarios para el desarrollo de las diferentes tareas de formación construidas en el marco del estudio.

Métodos de recolección de información

La investigación cualitativa es un enfoque riguroso y confiable, en el que el investigador debe tener un amplio conocimiento de los procedimientos o técnicas pertinentes para el desarrollo de su estudio (Vasilachis, 2006); en esta línea y, atendiendo al problema de investigación con relación al enfoque y al diseño, se utilizaron tres instrumentos, de los cuales se pudo obtener la información necesaria para dar cumplimiento al objetivo y responder la pregunta de investigación; la interpretación de dicha información pudo permitir refinar y reconfigurar tareas de formación, que aportaran a la comprensión de los maestros en formación del concepto de derivada a partir de los contextos de Newton y de Leibniz y enmarcada en la EpC. En un estudio de casos cualitativo, de acuerdo con Martínez (2006), el investigador tiene la posibilidad de implementar diferentes instrumentos y fuentes de información que estén relacionados con el objeto de investigación, como entrevistas, encuestas, bitácoras, revisión de documentos, observaciones, entre otros.

Para esta investigación, la observación fue uno de estos instrumentos. De manera general, este método de recolección posibilita al investigador una mejor comprensión del caso; adicionalmente, permite realizar una descripción de los acontecimientos para, posteriormente, analizarlos y conocer directamente el contexto donde se presenta el objeto de estudio (Stake, 1998; Bonilla y Rodríguez, 2015). Para el caso particular del presente estudio, se observó la realización de las diferentes tareas desarrolladas por los maestros en formación que hicieron parte del trabajo de campo.

La entrevista fue otro de los instrumentos utilizados; a partir de lo mencionado por Hernández et al. (2010), a través de esta se logran construir y comunicar significados referentes a un tema determinado, dado que se convierte en un proceso flexible y amigable, además de ser determinante para el análisis e interpretación del fenómeno de estudio. En el desarrollo de esta investigación, se realizaron dos entrevistas semiestructuradas, una al inicio para establecer la comprensión que los maestros en formación tenían sobre el concepto de derivada y otra al finalizar el trabajo de campo y la realización de las tareas de formación, con el objetivo de corroborar el proceso de comprensión alcanzado por los participantes.

Finalmente, se consideró el material, producto de las actividades de comprensión realizadas por los maestros en formación, debido a que era una fuente muy valiosa dentro de esta investigación cualitativa; de manera general, este tipo de material permite conocer al investigador situaciones que se viven en un contexto determinado para, posteriormente, ser analizadas a la luz del problema de investigación y del marco teórico (Hernández et al. 2010).

A partir de lo planteado por Vasilachis (2006), el trabajo de campo que se consolide en un estudio debe hacerse de manera responsable, registrando cada particularidad y aporte de los participantes, puesto que esto permitirá respaldar las interpretaciones que se realicen y las conclusiones. Así mismo, este autor argumenta que:

> La investigación cualitativa requiere de quien la realiza una profunda sensibilidad social para evitar toda acción, todo gesto que atente contra la identidad de los participantes pero, además, exige estricta formación en esta metodología, rigor, sistematicidad, entrenamiento, creatividad y, especialmente, flexibilidad para, entre otros: a) volver una y otra vez al campo para afinar, ajustar la pregunta de investigación; b) reconsiderar el diseño; c) recolectar nuevos datos; d) implementar nuevas estrategias de recolección y análisis; y e) revisar y, si fuera necesario, modificar las interpretaciones. (p. 37)

Ruta metodológica y análisis de la información

A pesar de que no existe un camino establecido para realizar un análisis, Martínez (2006) menciona ciertos aspectos fundamentales que se deben considerar para lograrlo, dentro de los cuales se encuentran los siguientes: inicialmente, se debe tener en cuenta el análisis del sitio; esto consiste en llevar un registro detallado de cada una de las interacciones, aportes, observaciones y actividades que se den a lugar durante el trabajo de campo, con el objetivo de realizar una transcripción posterior confiable; así mismo, se encuentra el foco de análisis, en el que el investigador se centra en los datos que se relacionan con su objeto de estudio para constatarlo con la literatura existente; posteriormente, se realiza un análisis profundo de la información a la luz del marco teórico y de los referentes conceptuales que apoyan la investigación, propendiendo por encontrar la solución al problema de investigación; dichos resultados deben compartirse con los participantes con el fin de que las interpretaciones elaboradas sean acordes a lo que ellos quisieron expresar o elaborar; finalmente, se realiza la etapa de divulgación por medio de la elaboración de un informe o tesis de investigación.

Con base en lo anterior, la presente investigación abordó diferentes instrumentos y estrategias que comprendían inicialmente dos actividades diagnósticas (entrevista a maestro y cuestionario a maestros en formación), las cuales posibilitaron fundamentar el planteamiento del problema de investigación; posteriormente, en el trabajo de campo se desarrollaron diferentes tareas de formación que se constituyen, a partir de lo referido por Ponte et al. (2009), en actividades o problemas planteados a los estudiantes para contribuir a su comprensión y fomentar el aprendizaje de las matemáticas; por lo tanto, se convierten en un instrumento y en una responsabilidad importante para la enseñanza de esta ciencia, en la que el maestro asume un papel central, tanto en la construcción de estas tareas de formación, como en su desarrollo por parte de los estudiantes.

En este estudio, las tareas de formación fueron construidas a partir de la implementación de tecnologías digitales; al respecto, Borba et al. (2014) precisan que pueden ser utilizadas en el campo de la Educación Matemática como una posibilidad que permita superar las dificultades que se presentan en la práctica educativa; así mismo, refiere que estas herramientas, en muchos de los casos, están constituidas por expresiones artísticas; la relación entre estas herramientas y el arte se conoce con el término de *performance* en matemáticas digitales, el cual se consolida como un enfoque pedagógico y didáctico que se puede desarrollar en los procesos de enseñanza y comprensión de las matemáticas a partir de videos, uso de internet y programas matemáticos como GeoGebra.

Las tareas de formación de la presente investigación se estructuraron a partir de algunas de estas expresiones del *performance* en matemáticas digitales, como en el caso de los videos sobre historia de la derivada y las entrevistas a Newton y a Leibniz; además, se diseñó una historieta en la que se abordaron los aspectos matemáticos y geométricos del concepto de derivada desarrollados por Newton y por Leibniz; para esto, se utilizó una herramienta web llamada PIXTON, que permitió la construcción de los personajes y la adición de los diálogos; así mismo, una tarea de formación se basó en la utilización del programa GeoGebra, la cual tuvo como objetivo reproducir los planteamientos geométricos trabajados en las construcciones acerca del concepto de derivada por ambos matemáticos. Nótese que a partir de la exploración del programa Geogebra, en términos generales, se pueden abordar conceptos y procedimientos trabajados en los diferentes niveles educativos y que hacen parte de la geometría, el álgebra, la estadística, el cálculo, entre otros; dentro de este conocimiento matemático se encuentra el concepto de derivada, el cual se ha venido trabajando mediante la utilización de este programa, a través de la exploración de objetos matemáticos como la recta secante, la tangente o la parábola (Borba, et al., 2014).

Para finalizar el proceso de investigación con los participantes, se implementó una entrevista final que indagó sobre los procesos de comprensión alcanzados a partir de las diferentes actividades planteadas. Tanto el material obtenido de las tareas desarrolladas por los maestros en formación, como las entrevistas realizadas a los mismos y las observaciones que la investigadora llevó a cabo durante todo el proceso de recolección de información, fueron transcritos, revisados y analizados, con el objetivo de identificar los aportes y aspectos que pudieron posibilitar dar respuesta a la pregunta y contribuyeron al alcance del objetivo de investigación. Para llevar a cabo el análisis de la investigación, se consideró la información que emergió de la aplicación de los instrumentos referidos anteriormente; además, con la ayuda de herramientas digitales para la organización y clasificación de los datos, se realizó una triangulación de la información, constituida por el análisis de las diferentes actividades realizadas por los maestros en formación, a la luz del marco teórico de la EpC y considerando las observaciones y percepciones de la investigadora.

Finalmente, a partir de lo referido por Mendizábal (2006), la validez de la investigación se sustenta en la constatación de los datos con la realidad, para lo que el investigador debe guardar cierta independencia y así no entren en el análisis posibles sesgos o prejuicios. En el caso particular de este estudio, la credibilidad se sustentó en la información recolectada durante el proceso investigativo, como resultado de las dinámicas, aportes y productos de los encuentros sincrónicos, las socializaciones y el desarrollo de las tareas de formación por parte de los maestros en formación; dichos aportes y materiales se analizaron a la luz del marco teórico; sin embargo, este proceso no desconoció la relevancia de la observación de la investigadora, como un medio para definir cuestionamientos y establecer características importantes dentro de las situaciones que se presentaron en el proceso de investigación.

Tareas de formación y rúbrica para la evaluación de la comprensión

En el siguiente capítulo se presentan las diferentes tareas de formación realizadas y aplicadas durante el proceso de investigación; del mismo modo, se exponen las rúbricas de evaluación por niveles, las cuales posibilitaron hacer el análisis y valoración de la comprensión en cada uno de los cinco maestros en formación, permitiendo ubicarlos en diferentes niveles de comprensión de acuerdo con los desempeños referidos en la EpC.

Tareas de formación: comprensión del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz

Las diferentes actividades que se llevaron a cabo en el trabajo de campo se desarrollaron con cinco maestros en formación pertenecientes a una licenciatura en matemáticas de una universidad pública colombiana. Se construyeron y validaron diferentes tareas de formación, bajo el marco de la EpC, considerando un tópico generativo, hilo conductor, metas y desempeños de comprensión; estos últimos se abordaron durante las fases referidas en el marco teórico: fase de exploración, fase de investigación guiada y fase de proyecto final de síntesis.

- Tópico generativo: ¿de qué manera las construcciones de Newton y de Leibniz permiten que los maestros en formación comprendan el concepto de derivada?
- Hilo conductor: comprensión del concepto de derivada de maestros en formación a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.
- Metas de comprensión: con las tareas de formación diseñadas, se espera que los maestros en formación: comprendan el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz; identifiquen las diferencias de los desarrollos de Newton y de Leibniz en torno al concepto de derivada, y establezcan las consecuencias sociales, científicas y personales presentes en la construcción y fundamentación del concepto de derivada.

Tareas de formación desarrolladas en las diferentes fases

En cada una de las fases de la EpC se desarrollaron diferentes tareas de formación, de manera virtual, a partir de una plataforma que nos permitía la realización de encuentros sincrónicos. Para llevar a cabo todo el trabajo de campo, se realizaron, en total, ocho encuentros grupales y un encuentro individual con cada uno de los participantes. En la Tabla 1 se resumen las diferentes tareas diseñadas y evaluadas durante el proceso.

Tabla 1

Tareas de formación desarrolladas en cada una de las fases de investigación

Fase	Tarea de formación
Exploración	➢ Cuestionario de indagación a maestros en formación.
Investigación guiada	➢ Video historia de la derivada. ➢ Video entrevista a Newton y preguntas para su análisis. ➢ Video entrevista a Leibniz y preguntas para su análisis. ➢ Presentación de historieta. ➢ Realización conjunta de paralelo entre las construcciones de Newton y de Leibniz. ➢ Actividad con GeoGebra.
Proyecto final de síntesis	➢ Presentación de propuesta para la enseñanza del concepto de derivada por parte de los maestros en formación. ➢ Entrevista final a los maestros en formación.

Tareas de formación en la fase de exploración. Esta fase de exploración, tal como lo refiere Stone (1999), tuvo como propósito vincular al maestro en formación con el tópico generativo, sus conocimientos o experiencias previas y sus intereses; así mismo, se establecieron los conocimientos previos del estudiante con relación al concepto de derivada y a su contexto histórico para, desde allí, determinar qué hace falta comprender o qué desean abordar. En esta fase se llevó a cabo un cuestionario de indagación, el cual se muestra a continuación.

Cuestionario de indagación a maestros en formación. Se inició el trabajo de campo con un cuestionario a los maestros en formación del curso de cálculo integral, pertenecientes a una licenciatura en matemáticas de una universidad pública de Colombia. El objetivo era indagar sobre la comprensión que tenían acerca del concepto de derivada desde lo numérico, lo geométrico y desde su parte histórica; particularmente, se trató de indagar por las apreciaciones que tenían los maestros en formación con respecto a la importancia o necesidad de abordar el aspecto histórico en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo y, en especial, en la enseñanza del concepto de derivada. En la Figura 4 se observa este cuestionario.

Figura 4

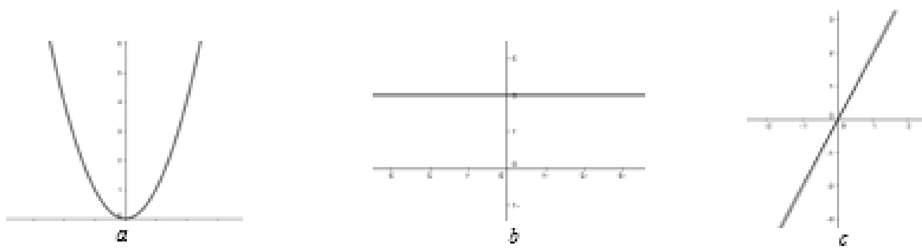
Cuestionario inicial de indagación

Cuestionario

Apreciado maestro en formación:

En el siguiente cuestionario se le presentan unas preguntas para que las responda con la mayor sinceridad a partir de los conocimientos que tenga sobre la historia del cálculo y, en particular, de la derivada. Si no responde alguna de las preguntas, por favor mencione la razón.

1. ¿Ha tenido la oportunidad de abordar el aspecto histórico en alguno de los cursos vistos hasta ahora en su proceso de formación como licenciado en matemáticas? Mencione los cursos o conocimientos más relevantes.
2. ¿Considera importante para su formación docente abordar el aspecto histórico en el proceso de enseñanza del cálculo?, ¿por qué?
3. Calcule las derivadas de las siguientes funciones
   a. $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$
   b. $f(x) = sen(4x)$
4. ¿Qué relación puede establecer entre las siguientes gráficas?



5. Defina el concepto de derivada
6. Durante el curso en el que se inició el proceso de enseñanza de la derivada, ¿el docente hizo referencia al aspecto histórico relacionado con el concepto? Mencione los aportes que recuerde.
7. ¿Conoce algunos de los pensadores que contribuyeron en la construcción y formulación del concepto de derivada? Mencione los aportes que recuerde.
8. Escriba sus ideas acerca de la comprensión que tiene del concepto de derivada desde el aspecto histórico.

Tareas de formación en la fase de investigación guiada. A partir del desarrollo de las diferentes tareas de formación en esta fase de investigación guiada, se buscó que los participantes lograran habilidades y conocimientos que les permitieran alcanzar las metas de comprensión referidas previamente (Stone, 1999). En general, las tareas de formación pretendían desarrollar y alcanzar progresivamente los diferentes desempeños, necesarios para la comprensión del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz. A continuación, se presentan las tareas diseñadas y evaluadas durante esta fase.

Video historia de la derivada. Para iniciar la fase de investigación guiada, se construyó un video que abordaba los aspectos más importantes de la historia de la derivada, como fueron sus orígenes y su fundamentación matemática y geométrica; así mismo, se hizo alusión a la polémica que generó sus inicios y a las consecuencias sociales de la misma. El video se basó principalmente en el texto de *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años* (Stewart, 2008), aunque también se consideraron otros referentes teóricos.

La visualización del video se realizó por medio de un encuentro sincrónico con los maestros en formación y la investigadora; además, estuvo orientado por unas preguntas previas, las cuales pretendían indagar sobre los conocimientos previos de los maestros en formación en torno al concepto de derivada, su aplicación en situaciones cotidianas, origen y construcción, la naturaleza geométrica y algebraica del concepto y su importancia para las matemáticas. Así mismo, se realizaron preguntas posteriores a la visualización; con base en ellas, se indagó nuevamente por el concepto de derivada, su relación con el cálculo infinitesimal, algunos aspectos referidos al origen del cálculo infinitesimal y a la polémica por la atribución de su invención, el proceso de construcción del cálculo infinitesimal y del concepto de derivada elaborado por Newton y por Leibniz, diferencias entre estas construcciones, aplicabilidad del concepto de derivada en diferentes fenómenos de la naturaleza, y las consecuencias sociales y científicas de los desarrollos en el cálculo infinitesimal de Newton y de Leibniz. En la figura 5 se puede observar una imagen que da inicio al video, el cual puede ser visualizado en este enlace: https://www.youtube.com/watch?v=u5lSu4GnBdo

Figura 5

Video historia de la derivada

Video entrevista a Newton. Después de visualizar el video de introducción a la parte histórica del concepto de derivada, se construyó un nuevo video que profundizara en la dimensión personal, formación y construcciones científicas realizadas por Newton con respecto al concepto de derivada; las ideas fueron tomadas, en su mayoría, del texto *Isaac Newton y Gottfried Leibniz. La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal* (Durant, 2006). Este video abordó, mediante una entrevista ficticia a Newton, las diferentes particularidades que hicieron parte de su vida, como también los estudios realizados por él, los cuales posibilitaron la fundamentación del concepto de derivada. En la figura 6 se puede observar una imagen particular del video, el cual se puede visualizar en el siguiente enlace:
https://www.youtube.com/watch?v=VVJTM0ttF4M

Figura 6

Video entrevista a Newton

Esta entrevista se visualizó en un encuentro sincrónico con los maestros en formación; para su análisis, se plantearon las siguientes preguntas que se formularon antes, durante y después de la presentación:

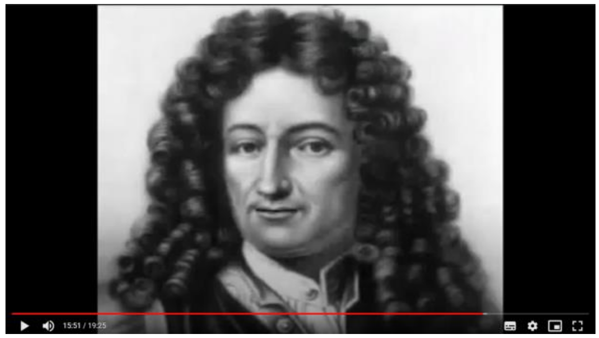
- ¿Cómo describiría el contexto social y familiar de Newton?
- ¿Cree usted que ese contexto social y familiar incidió en la formación científica de Newton? Explique su respuesta.
- ¿Qué significan para Newton las matemáticas?
- ¿Cuáles son los cimientos que fundamentaron las construcciones matemáticas de Newton?

- ¿Cuáles considera usted que eran las razones por las que Newton no compartía abiertamente sus investigaciones científicas?
- ¿Qué implicaciones considera que tuvo la comunicación por correspondencia entre Collins, Barrow y Newton en el desarrollo y autoría del cálculo infinitesimal?
- ¿Qué significado tienen para Newton los infinitesimales?
- ¿Cómo explicaría usted las construcciones de Newton en torno al concepto de derivada?
- ¿De qué manera considera usted que los cargos y reconocimientos científicos de Newton influyeron en los desarrollos matemáticos de otros científicos, como en el caso particular de Leibniz?
- ¿Cree usted que los cargos y reconocimientos científicos de Newton, así como las relaciones con personas reconocidas, influyeron en la decisión de la Royal Society sobre la autoría del cálculo infinitesimal? ¿Por qué?
- ¿Considera usted que los argumentos brindados por Newton son suficientes para garantizar su autoría en la construcción del cálculo infinitesimal? ¿Por qué?
- ¿Qué consecuencias considera usted trajo el proceso de construcción y fundamentación del cálculo infinitesimal?

Video entrevista a Leibniz. Similar al video sobre Newton, se construyó un video con una entrevista fingida a Leibniz, basado en el texto Isaac Newton y Gottfried Leibniz. La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal (Durant, 2006). El propósito del video era profundizar la dimensión personal, formación y construcciones científicas realizadas por Leibniz alrededor del concepto de derivada, enfatizando en las situaciones y particularidades que rodearon la fundamentación construida por este autor sobre dicho concepto. En la figura 7 se puede observar una imagen particular del video, el cual puede visualizarse en este enlace: https://youtu.be/ns0WHFj9pmA

Figura 7

Video entrevista a Leibniz



De igual manera, se visualizó con los maestros en formación a partir de un encuentro sincrónico, teniendo en cuenta las siguientes preguntas que orientaron la entrevista y se plantearon antes, durante y después de la misma:

- ¿Cómo describiría el contexto social y familiar de Leibniz?
- ¿Cree usted que ese contexto social y familiar incidió en la formación científica de Leibniz? Explique su respuesta.
- Describa el proceso de formación matemática de Leibniz.
- ¿Qué aspectos impidieron a Leibniz un mayor desarrollo científico?
- ¿Cómo aplicaría usted el principio de continuidad de Leibniz al concepto de derivada?
- ¿Qué implicaciones considera que tuvo la comunicación por correspondencia entre Oldenburg, Collins y Leibniz en el desarrollo y autoría del cálculo infinitesimal?
- ¿Cuál considera usted es el mayor aporte de Leibniz en la construcción del cálculo infinitesimal?
- ¿Qué significado tienen para Leibniz los infinitesimales?
- ¿Cómo explicaría usted las construcciones de Leibniz en torno al concepto de derivada?
- ¿Considera usted que los argumentos brindados por Leibniz son suficientes para garantizar su autoría en la construcción del cálculo infinitesimal? ¿Por qué?

Presentación de historieta. Otra de las tareas realizadas en la fase de investigación guiada, consistió en la lectura y análisis de una historieta, que se construyó considerando aspectos históricos abordados previamente sobre el concepto de derivada; la intencionalidad fundamental de la actividad fue recrear, de manera esquemática y lúdica, las construcciones matemáticas realizadas por Newton y por Leibniz del concepto de derivada. La lectura y análisis se realizó de manera sincrónica entre investigadora y participantes; para facilitar este análisis, se requirió de la elaboración o impresión previa de las gráficas diseñadas por Newton y por Leibniz, desde las cuales realizaron y fundamentaron el concepto de derivada, asociado a la representación numérica; además, en sintonía con las actividades anteriores, se realizaron preguntas que orientaron el análisis y reflexión de lo abordado en la historieta. En las Figuras 8 a 16 se puede observar la historieta completa.

Figura 8

Historieta parte uno

Figura 9

Historieta parte dos

Figura 10

Historieta parte tres

Figura 11

Historieta parte cuatro

Figura 12

Historieta parte cinco

Figura 13

Historieta parte seis

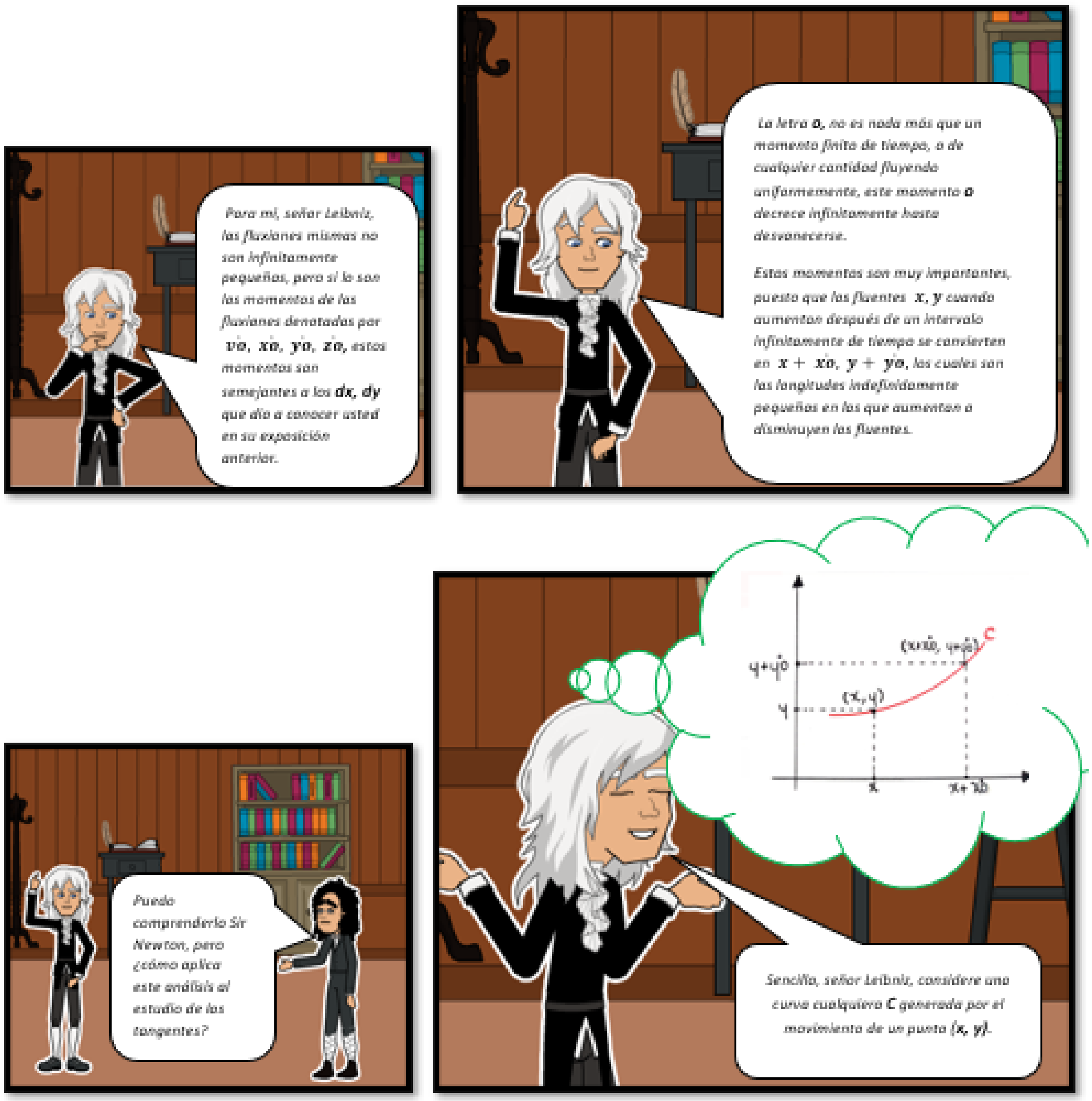


Figura 14

Historieta parte siete

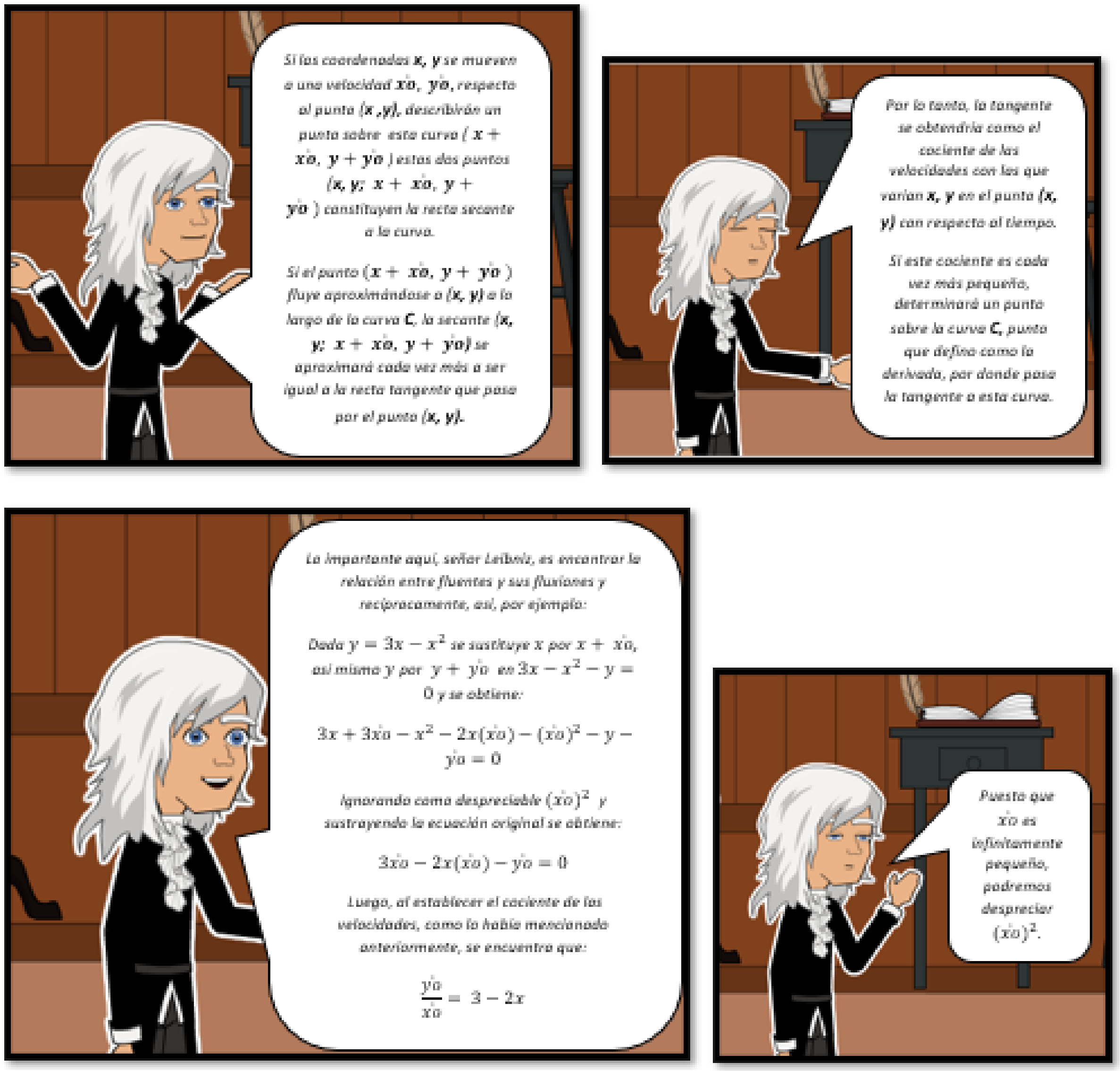


Figura 15

Historieta parte ocho

Figura 16

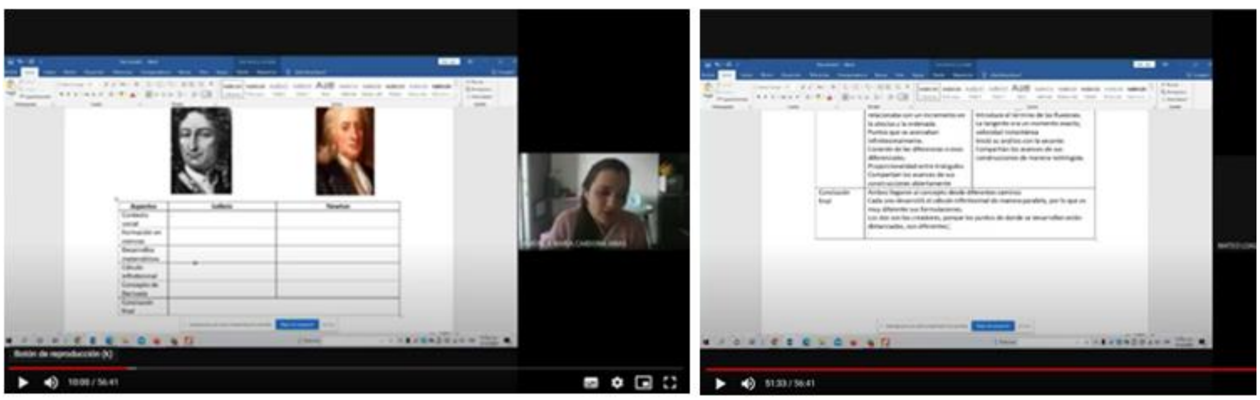
Historieta parte nueve

Construcción conjunta de paralelo entre Newton y Leibniz. Ya realizada una introducción al contexto histórico del concepto de derivada y, teniendo en cuenta las situaciones que rodearon su construcción a partir de Newton y a partir de Leibniz, esta tarea de formación tuvo como objetivo construir un paralelo en el que, además de establecer los diferentes aportes por parte de estos dos científicos, se resaltaron las diferencias y similitudes en sus aportes.

Por medio de un encuentro sincrónico, de manera conjunta entre los maestros en formación y la investigadora, se abordaron aspectos importantes tanto personales como científicos de Newton y de Leibniz, como lo fue el contexto social de cada uno de ellos, su formación en ciencias, los desarrollos matemáticos, los aportes al cálculo infinitesimal y las particularidades en la construcción del concepto de derivada. En la Figura 17 se puede observar la construcción del paralelo en cuestión.

Figura 17

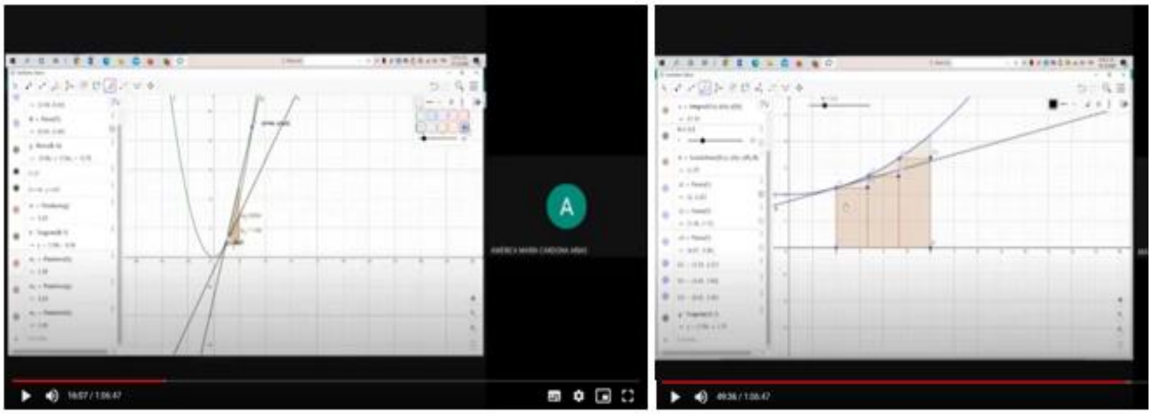
Construcción del paralelo



Actividad con GeoGebra. Para complementar el análisis matemático y geométrico del concepto actual de derivada logrado a partir de la historieta, considerando las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz, se realizó un encuentro sincrónico en el que, de manera conjunta y a partir del programa GeoGebra, se buscó replicar las construcciones geométricas de Newton y de Leibniz, con el objetivo de analizar, desde lo geométrico, los conceptos y propiedades numéricas presentes en la fundamentación del concepto. De igual manera que en las tareas de formación previas, se propició la participación de los maestros en formación, por lo que la actividad estuvo orientada por preguntas que dirigían la realización y análisis de dichas construcciones. En la Figura 18 se pueden observar las construcciones elaboradas en GeoGebra.

Figura 18

Actividad con GeoGebra



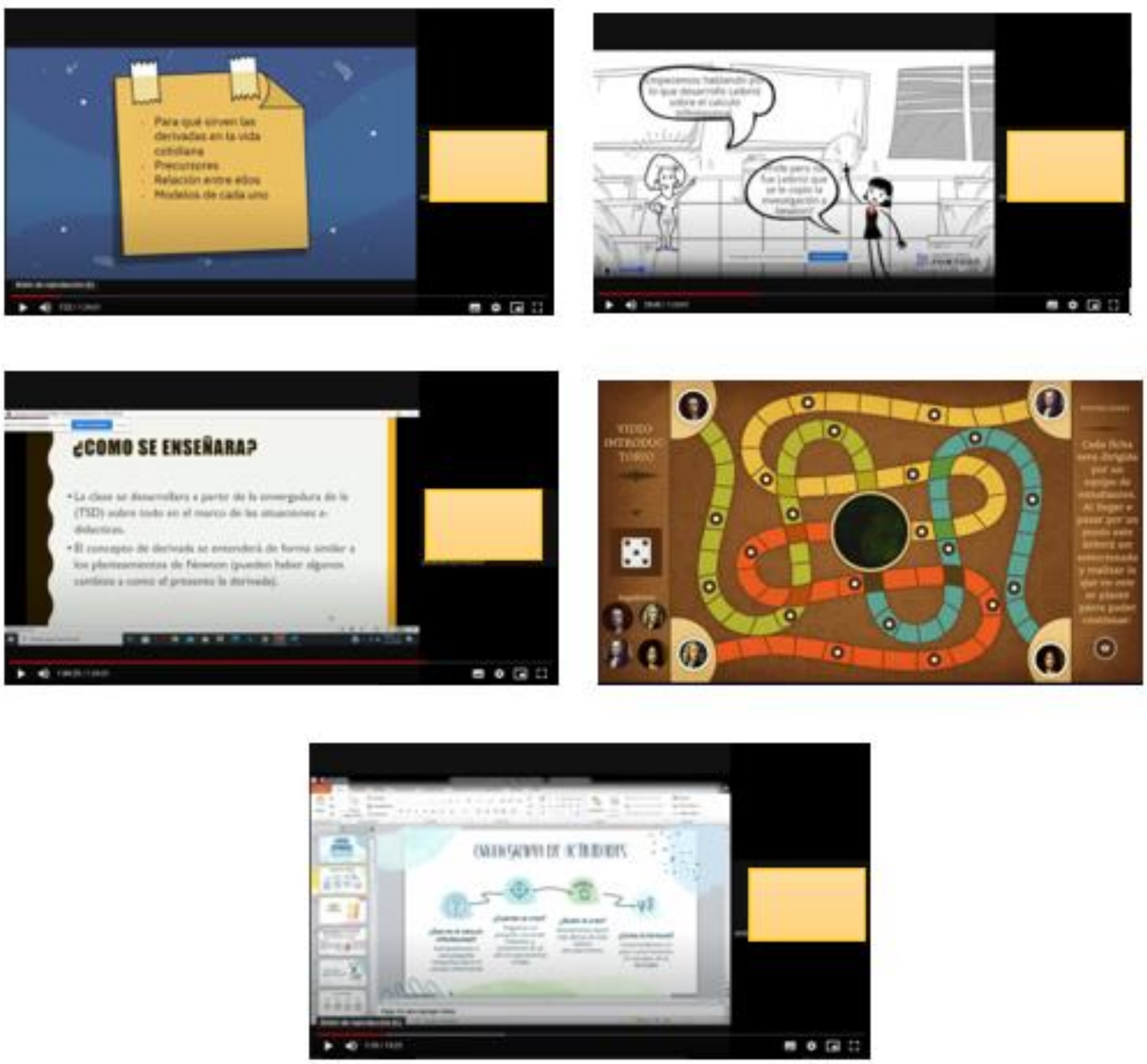
Tareas de formación del proyecto final de síntesis. De acuerdo con lo referido por Stone (1999), las tareas de formación, en la fase de proyecto final de síntesis, tuvieron como objetivo indagar por la comprensión lograda por los participantes respecto a las metas de comprensión establecidas previamente. Por lo tanto, las tareas de formación propuestas tuvieron la intención de establecer claramente la comprensión alcanzada por los maestros en formación, en cuanto al concepto de derivada y a su contexto histórico.

Presentación de propuesta para la enseñanza del concepto de derivada. Después de la realización de las diferentes tareas de formación en la fase de investigación guiada, esta tarea tuvo como propósito la presentación, por parte de cada uno de los participantes, de una propuesta, en la cual se propició el diseño de una estrategia para la enseñanza del concepto de derivada, pero teniendo como aspecto central su contexto histórico. La intención de esta actividad era que los maestros en formación pudieran hacer uso de los conocimientos y comprensión lograda durante la realización de las tareas de formación, para construir su propia propuesta para la enseñanza del concepto de derivada.

Las propuestas fueron presentadas en diferentes formatos y con diversas estrategias, todas enfocadas a la enseñanza del concepto de derivada desde su aspecto histórico y considerando las construcciones de Newton y de Leibniz; dichas propuestas estuvieron dirigidas a estudiantes de último grado de secundaria o primeros semestres universitarios, en programas donde se aborda este concepto. Para la socialización de las propuestas, se realizó un encuentro sincrónico en el que todos los maestros en formación tuvieron la oportunidad de intercambiar ideas, realizar aportes o preguntas a los demás compañeros. En la Figura 19 se pueden observar algunas propuestas de los proyectos finales de síntesis de los participantes.

Figura 19

Propuestas de Proyecto final de síntesis



Entrevista final a los maestros en formación. Para finalizar las tareas de formación y, con el objetivo de indagar sobre la comprensión por parte de los maestros en formación del concepto de derivada, las construcciones que posibilitaron su fundamentación y las situaciones presentes en su contexto histórico, así como su percepción de la implementación de la historia para la enseñanza de la derivada, se construyó una entrevista final. Esta se realizó de manera individual con cada uno de los participantes, de forma sincrónica con la investigadora, lo que facilitó la profundización en las preguntas y en las respuestas aportadas por cada uno de ellos. En la Figura 20 se pueden observar las preguntas de la entrevista final.

Figura 20

Entrevista final de Indagación

Entrevista final

Apreciado maestro en formación.

Inicialmente, quiero extender mi agradecimiento por su participación en el desarrollo del estudio titulado: ***Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC***; sus aportes e intervenciones posibilitaron la realización del trabajo de campo y la justificación de la propuesta de investigación.

Por otra parte, en la siguiente entrevista se le realizarán unas preguntas para que las responda con base en los conocimientos abordados en torno a la historia del cálculo y, en particular, de la derivada, tanto en los diferentes encuentros sincrónicos, en el desarrollo de las tareas de formación y en el proyecto final de síntesis realizado por usted.

1. Explique con sus propias palabras la fundamentación geométrica y numérica que hizo Newton sobre el concepto de derivada.
2. Explique con sus propias palabras la fundamentación geométrica y numérica que hizo Leibniz sobre el concepto de derivada.
3. Para usted, ¿cuáles son las diferencias relevantes en las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz en torno al concepto de derivada?
4. A partir de las diferentes tareas de formación desarrolladas en el trabajo de campo del estudio, defina el concepto de derivada.
5. Personalmente, ¿a quién le atribuiría usted la invención del cálculo infinitesimal? Explique su respuesta.
6. ¿Cuáles fueron las implicaciones sociohistóricas que rodearon la fundamentación del concepto de derivada?
7. ¿Considera importante el abordaje de la parte histórica del concepto de derivada para su enseñanza y su comprensión? ¿Por qué?
8. En su ejercicio de maestro, ¿abordaría usted la parte histórica del concepto de derivada para su enseñanza? ¿Por qué?
9. ¿Cuáles fueron los aspectos más relevantes que tuvo en cuenta en su proyecto final de síntesis? ¿Por qué?
10. ¿Considera usted relevante para su formación docente el desarrollo de las tareas de formación planteadas en el marco del estudio? Explique su respuesta.

Rúbricas de descriptores de las dimensiones de comprensión, de acuerdo con las categorías de análisis y los niveles de comprensión

A continuación, se presentan las rúbricas diseñadas a partir de las tareas de formación desarrolladas, en las cuales se relacionan categorías para las diferentes dimensiones de comprensión retomadas del marco de la EpC; estas categorías contemplan unos desempeños por niveles de comprensión, que se plantearon y se fueron refinando mediante el análisis de las diferentes tareas y la participación de los maestros en formación en el desarrollo de las mismas. Con base en las diferentes tablas de desempeños, se relacionaron tanto las dimensiones como los niveles para hacer una descripción del avance en la comprensión alcanzado por cada uno de los cinco participantes, a la luz del objeto de estudio. En las Tablas 2, 3, 4 y 5, se presentan las rúbricas de las dimensiones de contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, respectivamente.

Tabla 2

Descriptores para los niveles de comprensión: dimensión de contenido

Categoría / Nivel	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Newton	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Leibniz	Concepto de derivada actual
Ingenuo	Se le dificulta identificar relaciones entre la recta tangente y el concepto de derivada a partir de los desarrollos de Newton. No relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton.	Se le dificulta identificar relaciones entre la recta tangente y el concepto de derivada a partir de los desarrollos de Leibniz. No relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz.	Se le dificulta definir el concepto de derivada. No reconoce el contexto histórico del concepto de derivada.
Novato	Identifica algunas relaciones entre la recta tangente y el concepto de derivada a partir de los desarrollos de Newton. Relaciona parcialmente la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton. Repite diferentes fundamentos sobre el concepto de derivada	Identifica algunas relaciones entre la recta tangente y el concepto de derivada a partir de los desarrollos de Leibniz. Relaciona parcialmente la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz. Repite diferentes fundamentos sobre el concepto de derivada	Define memorísticamente el concepto de derivada o lo hace de manera errada. Entiende la derivada como la pendiente de la recta tangente a una gráfica en un punto determinado, pero no considera el contexto histórico del concepto.

	planteados por Newton y abordados en los encuentros sincrónicos.	planteados por Leibniz y abordados en los encuentros sincrónicos.	
Aprendiz	Relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton.	Relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz.	Define el concepto de derivada. Reconoce el concepto de derivada desde su aspecto histórico.
Maestría	Aplica el concepto de derivada mediante la fundamentación geométrica y numérica desarrollada por Newton en construcciones con GeoGebra. Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones realizadas por Newton.	Aplica el concepto de derivada mediante la fundamentación geométrica y numérica desarrollada por Leibniz en construcciones con GeoGebra. Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones realizadas por Leibniz.	Argumenta relaciones y diferencias entre las construcciones del concepto de derivada abordadas por Newton y por Leibniz.

Tabla 3

Descriptores para los niveles de comprensión: dimensión de métodos

Categoría / Nivel	Diferenciación geométrica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Diferenciación numérica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Implicaciones históricas del concepto de derivada
Ingenuo	Se le dificulta establecer diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Se le dificulta establecer diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Se le dificulta establecer las consecuencias sociales, científicas y personales que rodearon la construcción del concepto de derivada.
Novato	Repite algunas diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Repite algunas diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Establece algunas consecuencias sociales, científicas y personales que rodearon la construcción del concepto de derivada.
Aprendiz	Establece diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Establece diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Establece las consecuencias sociales, científicas y personales presentes en la construcción del concepto de derivada.
Maestría	Valida y explica las diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Valida y explica las diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	A través de las relaciones y consecuencias históricas establecidas sobre el concepto de derivada, explica su fundamentación actual.

Tabla 4

Descriptores para los niveles de comprensión: dimensión de propósitos

Categoría / Nivel	Relación: derivada y contexto histórico
Ingenuo	Se le dificulta establecer relaciones entre el contexto histórico y el proceso de construcción y fundamentación del concepto de derivada. Se le dificulta reconocer la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.
Novato	Establece algunas relaciones o lo hace de manera errónea, entre el contexto histórico y la construcción y fundamentación del concepto de derivada. Reconoce eventualmente la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.
Aprendiz	Establece relaciones entre el contexto histórico y la construcción y fundamentación del concepto de derivada. Reconoce la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.
Maestría	Utiliza el aspecto histórico del concepto de derivada para explicar su construcción y fundamentación actual.

Tabla 5

Descriptores para los niveles de comprensión: dimensión de formas de comunicación

Categoría / Nivel	Uso adecuado de definiciones y lenguaje matemático	Discurso coherente
Ingenuo	Se le dificulta explicar el concepto de derivada con el uso de lenguaje matemático. No relaciona el concepto de derivada con otros conceptos matemáticos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz.	Se le dificulta definir el concepto de derivada. Se le dificulta exponer el concepto de derivada desde las construcciones de Newton y de Leibniz.
Novato	Explica de manera confusa el concepto de derivada con el uso de lenguaje matemático. Relaciona parcialmente el concepto de derivada con otros conceptos matemáticos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz.	Define parcialmente el concepto de derivada. Expone el concepto de derivada desde las construcciones de Newton y de Leibniz, pero lo hace de manera confusa.

Aprendiz	Explica el concepto de derivada con el uso de lenguaje matemático. Relaciona el concepto de derivada con otros conceptos matemáticos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz.	Define el concepto de derivada. Expone el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.
Maestría	Utiliza de manera creativa los conceptos geométricos y numéricos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz para explicar el concepto de derivada.	Explica con diferentes ejemplos el concepto de derivada. Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.

Análisis del proceso de comprensión de los participantes

Posterior a la puesta en marcha de las diferentes tareas de formación comprendidas en las fases de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis, se hizo una descripción de las características observadas en cada uno de los participantes con respecto a su proceso de comprensión durante el trabajo de campo. Se retomaron, para cada uno de los participantes, los aspectos más importantes que, como investigadora, consideré necesarios para realizar un análisis de su comprensión en cada una de las fases desarrolladas. En este proceso se identificaron tres formas de comprensión generales: el nivel de novato alcanzado por Karen, el nivel de aprendiz por Mateo y el nivel de maestría alcanzado por Jhordan; los demás participantes se ubicaron en estos niveles; por esta razón, solamente se abordará el análisis del proceso de comprensión de los tres participantes que las representaron, análisis que se realizó a la luz de los descriptores de comprensión para cada uno de los desempeños referidos en el marco teórico de la EpC, los cuales se establecieron previamente, pero se fueron refinando en el transcurso del trabajo de campo.

Análisis del proceso de comprensión de Karen

Karen es una joven de 24 años, estudiante del octavo semestre de una licenciatura en matemáticas de cierta universidad pública de Colombia. Al inicio de las tareas de formación, la participante se mostró tímida y poco participativa; sin embargo, a medida que transcurrían los encuentros sincrónicos, sus aportes fueron aumentando y, a partir de los mismos, se pudo realizar el análisis correspondiente de su proceso de comprensión con respecto al concepto de derivada con base en las construcciones de Newton y de Leibniz.

Fase de exploración

En esta fase se aplicó un cuestionario de indagación en el que los maestros en formación, de manera sincrónica con la investigadora, resolvieron unas preguntas relacionadas con la parte geométrica, numérica e histórica del concepto de derivada. En este cuestionario se pudo establecer que la participante, aunque elaboró correctamente los procedimientos en los cálculos de algunas derivadas, no encontró ninguna relación entre las gráficas que se asociaban directamente con la representación geométrica de la derivada de una función. Por otra parte, se observó una definición memorística del concepto, en el que precisó *"la pendiente a la recta tangente a la gráfica de la función en un punto"* (Karen, cuestionario de indagación, 2020), a partir de lo abordado en cursos de cálculo anteriores, sin mostrar una comprensión real; esto se puede observar en la Figura 21:

Figura 21

Fragmento del cuestionario de indagación Karen

5. Defina el concepto de derivada
Pendiente a la recta tangente a la gráfica de la función en un punto

Con relación al contexto histórico, Karen manifestó no haber tenido dicha formación en este aspecto; esto se pudo notar en la respuesta a la pregunta por el tratamiento histórico de la derivada en el curso correspondiente en el que se abordó el concepto en mención, a lo cual la participante respondió: *"No, el docente no nos dio ninguna referencia histórica"* (Karen, cuestionario de indagación, 2020). La ausencia del conocimiento histórico de la derivada se hizo más notoria cuando no dio respuesta a las preguntas sobre los pensadores que contribuyeron a la construcción del concepto, en particular, Newton y Leibniz.

Considerando las respuestas dadas por Karen en el cuestionario de indagación durante la fase de exploración y, teniendo en cuenta los descriptores de comprensión en cada una de las dimensiones, se dedujo que, en lo referido a la dimensión de contenido, la participante no logró relacionar la recta tangente con las construcciones de Newton y de Leibniz, por lo que desconoció su contexto histórico y, por lo tanto, se le dificultó establecer las consecuencias de dicho desarrollo, lo cual hacía parte de la dimensión de métodos; como consecuencia, no identificó las conexiones existentes entre el contexto del concepto y su proceso de construcción, aspecto que hacía parte de los descriptores de comprensión de la dimensión de propósitos. Para la dimensión de formas de comunicación, se observó una vinculación de conceptos geométricos en la definición que Karen dio de la derivada, sin embargo, esto no lo relacionó con los desarrollos de Newton y de Leibniz.

Se pudo apreciar que Karen, en esta primera fase, no poseía ciertos conocimientos disciplinarios, no hizo una reflexión ni tuvo conciencia de estos y asumió como verdaderos los conceptos y saberes que se le compartieron; los anteriores desempeños de comprensión se vinculan con el nivel de ingenuo (Boix y Gardner, 1999); por lo que, en la fase de exploración, la estudiante se ubicó en dicho nivel.

Fase de investigación guiada

La fase de investigación guiada se desarrolló a partir de diferentes tareas de formación abordadas en los seis encuentros sincrónicos con los participantes; de esta manera, se logró generar un proceso de comprensión en torno al concepto de derivada, desde las construcciones de Newton y de Leibniz, el cual se pudo evidenciar a partir de los productos aportados por los participantes (Stone, 1999).

Posterior a la visualización del video sobre la historia de la derivada con los maestros en formación, Karen definió la derivada como: "*hallar las rectas tangentes a una curva"* (Karen, transcripción observación, 2020); aunque vinculó la recta tangente en su definición, aún no se apreció una enunciación clara del concepto, al igual que no se evidenció ningún desarrollo con base en Newton o en Leibniz. Cuando se abordó el video de la entrevista a Newton, Karen explicó las construcciones de Newton del concepto de derivada como: "*la tangente a la curva se obtiene como el cociente de las velocidades con que varían las coordenadas (x, y), este razonamiento no permitió superar la presencia del infinitamente pequeño en el cálculo, puesto que parecían cuando se definían esas velocidades, ya que son instantáneas con que varían x y y*" (Karen, transcripción observación, 2020); en este aporte de la participante, se pudo observar que se fundamentó en un diálogo textual del video, por lo que se infirió que lo que compartió sobre los desarrollos de Newton, lo hizo de manera memorística. Similarmente ocurrió cuando se le preguntó por el significado de los infinitesimales y su aplicación en la construcción del concepto de derivada, tras analizar las construcciones de Leibniz a partir de la historieta; en este caso, ella respondió, de manera mecánica: *"cantidades infinitamente pequeñas… El triángulo* $T_3\ {}_3C\ {}_3B$ *es proporcional al* ${}_3C$, ${}_4C$ *y* ${}_3D$ *(*Karen, transcripción observación, 2020).

En la construcción grupal del paralelo, la participante repitió algunos aportes que se habían tratado en encuentros anteriores, en lo que concierne a las diferencias existentes en los desarrollos numéricos y geométricos construidos por Newton y por Leibniz en torno al concepto de derivada, lo cual fue notorio en la siguiente respuesta: *"Leibniz utilizaba las proporciones y*

Newton lo abordó desde el movimiento, las velocidades o pequeños momentos en los que fluye la fluente" (Karen, transcripción observación, 2020). Por otra parte, en el análisis de la historieta, la participante manifestó: "*yo me pongo a pensar si la matemática de Leibniz fue la que ayudó a avanzar porque gracias a Newton se detuvo un poquito lo que fue la matemática, a pesar que fue complicada la de Leibniz fue la que ayudó"* (Karen, transcripción observación, 2020); en este aporte se pudo notar que, aunque Karen reconoció que existieron algunas relaciones y consecuencias históricas en la construcción del concepto de derivada, lo hizo de manera confusa, puesto que no hubo claridad frente a qué aspectos de las matemáticas se retrasaron o avanzaron, al abordar las construcciones de Leibniz o de Newton.

Para esta fase de investigación guiada, se observaron en Karen diferentes dificultades al momento de abordar el concepto de derivada, o con el uso de diferentes conceptos matemáticos o en los mismos desarrollos de Newton y de Leibniz; por ejemplo, en sus aportes en el encuentro sincrónico donde se visualizó el video de la historia de la derivada, cuando se le preguntó por el comportamiento de los diferenciales para determinar la derivada desde las construcciones de Leibniz, la participante respondió: "*creo, profe, que ellos hablaban ahí que cuando el límite tendía a cero, como que el puntico se iba acercando y se iba haciendo cada vez más pequeño teniendo una aproximación más exacta, como lo más aproximablemente posible, por decirlo de alguna manera. Como para corregir ese margen de error, ahí hablaban de un margen de error"* (Karen, transcripción observación, 2020); nótese que la maestra en formación vinculó términos y conceptos no trabajados en los desarrollos de Newton o de Leibniz, como es el caso de los límites o del margen de error, lo que hizo que su respuesta fuera confusa; más aún cuando se refirió a un punto, en particular, que se iba acercando y haciendo más pequeño, lo cual se constituyó en un error conceptual. Además, en el análisis de la historieta, Karen se refirió al concepto de derivada a partir de Leibniz, como: "*es aquella división entre dy y dx como tal, entre esos pequeños pedazos"* (Karen, transcripción observación, 2020); en este caso, se observó que relacionó, en algunos aspectos, los conceptos construidos por Leibniz con respecto al concepto de derivada, pero no se refirió a la relación de proporcionalidad que existía entre los diferenciales a los que ella llamó "*pequeños pedazos*", ni tampoco estableció una conexión directa entre los planteamientos geométricos de Leibniz, su formalización o tratamiento algebraico.

Considerando los descriptores establecidos en las cuatro dimensiones para analizar la comprensión del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz, se pudo establecer que, para la dimensión de contenido, la participante se ubicó en el nivel de ingenuo porque, aunque logró determinar en las construcciones geométricas de Leibniz algunas relaciones entre la recta tangente y la formulación numérica y geométrica del concepto de derivada, así sea de forma memorística, esto no lo logró con las construcciones o desarrollos de Newton; similarmente, pese a que vinculó la recta tangente en la definición que aportó del concepto de derivada, fue confusa en sus planteamientos y no hizo alusión al contexto histórico del mismo.

Teniendo en cuenta lo mencionado por Boix y Gardner (1999) en lo referido al nivel de novato, “estos desempeños empiezan destacando algunos conceptos o ideas disciplinarios y estableciendo simples conexiones entre ellas, a menudo ensayadas” (p. 240); por lo tanto, se pudo afirmar que Karen, para la dimensión de métodos, se ubicó en un nivel de novato, puesto que mencionó algunas diferencias entre los planteamientos numéricos y geométricos de la derivada, a partir de Newton y de Leibniz; además, estableció algunas implicaciones sociales y científicas de su formulación. Respecto a la dimensión de propósitos, la participante presentó notables falencias a la hora de relacionar y establecer la relevancia del contexto histórico y el concepto de derivada; por consiguiente, para esta dimensión, la maestra en formación se ubicó en el nivel de ingenuo. Finalmente, para la dimensión de formas de comunicación, la participante, a partir del desarrollo de las tareas de formación, alcanzó el nivel de novato; esto debido a que la definición que dio sobre el concepto de derivada, considerando el lenguaje matemático en los desarrollos de Newton y de Leibniz, estuvo incompleta o fue confusa.

Proyecto final de síntesis

El proyecto final de síntesis se compuso de dos momentos; el primero se trató de una exposición, por parte de los participantes, de una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz; el segundo, fue una entrevista final que se realizó, de manera individual, a cada uno de los maestros en formación que hicieron parte del proceso.

En el caso particular de Karen, la participante propuso un juego virtual, apoyada en una plataforma particular, en el que cuatro equipos de estudiantes lanzaban un dado para avanzar por las casillas de un tablero, en las cuales había una serie de lecturas, videos o preguntas sobre la enseñanza del concepto de derivada mediante un contexto histórico. La participante manifestó que, con este juego, ella buscaba aportar una estrategia didáctica y lúdica para introducir la historia en la enseñanza del concepto de derivada, por lo que el juego contó con diferentes videos que, de manera divertida, abordaban la historia en la construcción del concepto; además, también se anexaron los videos e historieta abordada en las tareas de formación de esta investigación.

En la socialización del proyecto final de síntesis, Karen se remitió más a la explicación del juego, que a los conceptos objeto de estudio; es decir, no mencionó alguna definición del concepto de derivada o no abordó algún desarrollo geométrico o numérico de Newton o de Leibniz. En la Figura 22 se puede visualizar un fragmento del juego presentado por Karen en su proyecto final.

Figura 22

Fragmento de Proyecto final de síntesis de Karen

Sin embargo, en medio de la presentación del juego, Karen precisó: *"ya después es que comienza lo de las fórmulas y todo este aspecto, pero pienso que lo que son las historias lo deben ver de diferentes formas y no simplemente como una lectura y que les llame la atención"* (Karen, transcripción proyecto final de síntesis, 2020). Con base en este comentario, se pudo observar que la participante concibió la historia como una serie de narraciones sobre un suceso determinado, pero no mencionó la importancia que dichos eventos tuvieron sobre la construcción del conocimiento, en particular, en lo referido al concepto de derivada.

En la entrevista final, cuando se hizo referencia a la fundamentación de Newton frente al concepto de derivada, ella argumentó: "*Newton utilizó más que todo la derivada en el tiempo* *exacto, y él utilizó más que todo lo que es la naturaleza y la vida cotidiana... Newton hacía todas sus demostraciones desde la cotidianidad, desde la naturaleza, entonces podemos asociar la demostración de derivada, la podemos asociar con el movimiento, cómo cambia un cuerpo respecto a otro, también cuando él habla lo podemos asociar con el significado de aceleración, él en su demostración habló de fluxión o de fluentes que son las cantidades que fluyen"* (Karen, fragmento entrevista final, 2020). En esta definición, aunque repitió algunos conceptos formulados por Newton, como son las fluentes, las fluxiones y la asociación de estos conceptos geométricos con el movimiento, no se precisó con claridad una relación entre la construcción numérica y la construcción geométrica desarrollada por Newton.

Por otra parte, cuando se le indagó por la fundamentación del concepto de derivada desarrollado por Leibniz, Karen estableció algunas relaciones entre conceptos como la derivada y formulaciones geométricas y numéricas, tal como se muestra en la siguiente respuesta: *"Leibniz mostraba en la gráfica una curva y una recta tangente y debajo de dicha curva él dibujaba como unos rectángulos, entonces el espacio que quedaba entre el rectángulo y la curva daban más o menos la impresión de como un triangulito, eso él lo entrelazó con lo que fueron razones y con lo que fueron proporciones y esto lo hizo muy pequeño, de modo que esos dos puntos se fueran acercando tanto hasta que llegara a ser casi el mismo, nunca va a ser el mismo, siempre va a ser una diferencia, o sea ahí fue donde él implementó los infinitesimales, entonces nunca va a dejar de ser dos secantes, pero se da la impresión que se puede convertir en una tangente"* (Karen, fragmento entrevista final, 2020). En su respuesta, aunque hizo un acercamiento a la construcción realizada por Leibniz y estableció parcialmente la relación existente de esta representación geométrica con las proporciones, la maestra en formación concibió, de manera equivocada, el comportamiento de los puntos de cortes de las ordenadas con la curva, ya que los asoció con el movimiento, sin mencionar la correspondencia existente entre estas distancias con los diferenciales.

Adicionalmente, Karen realizó una definición memorística o parcial del concepto de derivada cuando se le preguntó puntualmente por este aspecto, pero no hizo referencia al contexto histórico del concepto, ni vinculó las construcciones de Newton o de Leibniz. En este caso, afirmó: *"pues a nosotros lo que siempre nos enseñan en el colegio y también en la universidad, que la derivada es la recta tangente de una curva en un punto dado, cierto, ya con lo que hicimos, yo ya puedo explicar el concepto de derivada por un método geométrico, que es coger* *la gráfica con una secante aproximar uno de los puntos, hasta el otro punto y allí, en el punto que sean casi iguales, puedo decir que es una tangente"* (Karen, fragmento entrevista final, 2020).

En el desarrollo de la entrevista, se le indagó a la participante por las diferencias que podía establecer entre las construcciones de Newton y de Leibniz, además de las consecuencias sociales de las mismas, a lo cual Karen precisó: *"Leibniz implementó el concepto de lo que fueron los infinitesimales, cierto, utilizó, por ejemplo, lo que fueron las razones, las proporciones, cosa que no hizo Newton, Newton se fue más al concepto de fluxión y de fluentes, por ese medio cada uno llegó al concepto de derivada. Newton trabajaba más desde la cotidianidad y Leibniz se centró más que todo en el método geométrico... Los ingleses, ellos seguían más que todo al cálculo de Newton, entonces esto llevó a que ellos estuvieran atrasados en varios de sus avances matemáticos. Por parte de Leibniz, pues Leibniz tuvo varias implicaciones sociales, ya que en su tiempo él fue tildado de falsificarle, de copiarle la demostración a Newton"* (Karen, fragmento entrevista final, 2020); en este aporte se pudo apreciar que, aunque la maestra en formación mencionó algunas diferencias, no hizo una comparación o paralelo entre las construcciones de los dos matemáticos, ni explicó la forma en que cada uno de ellos abordó estos conceptos; además, le faltó hacer referencia a las causas que llevaron a estas consecuencias como, por ejemplo, la notación empleada por Newton en el caso de los ingleses o los motivos de las acusaciones de plagio.

En cuanto a la importancia del aspecto histórico para la enseñanza de la derivada, Karen refirió que: *"con el aspecto histórico podemos comprender el concepto en su totalidad, pues muchas veces uno en el colegio, en la universidad, se memoriza los procedimientos o se memoriza las definiciones de los conceptos sin llegar a entender, pues en realidad qué es lo que son o para qué sirven"* (Karen, fragmento entrevista final, 2020); esta relación puso en evidencia que la participante reconoció la necesidad de la enseñanza del aspecto histórico de la derivada, pero no especificó claramente las relaciones existentes entre este contexto y la fundamentación del concepto mismo.

Con la socialización del proyecto final de síntesis y las respuestas a las preguntas aportadas por la participante en la entrevista final, se pudo concluir que Karen definió memorísticamente o relacionó, en ciertas ocasiones, el concepto de derivada con las construcciones de Newton y de Leibniz, por medio de la utilización de conceptos como la recta tangente y la recta secante; por lo que, para la dimensión de contenido, Karen se ubicó en el nivel de novato. De igual forma, para la dimensión de métodos, alcanzó el nivel de novato, puesto que pudo repetir algunas diferencias y establecer algunas consecuencias presentes en las construcciones del concepto de derivada.

Con respecto a la dimensión de propósitos, la participante identificó la relevancia del contexto en la construcción del concepto, relacionando parcialmente las causas que posibilitaron su fundamentación con el producto final, por lo que, para esta dimensión, se ubicó en el nivel de novato. Aunque Karen intentó definir el concepto de derivada haciendo uso del lenguaje matemático y de las construcciones de Newton y de Leibniz, fue confuso lo que planteó desde lo numérico y lo geométrico, por lo que su comprensión correspondió al nivel de novato para la dimensión de formas de comunicación. Finalmente, en el desarrollo de las actividades correspondientes al proyecto final de síntesis, la participante realizó conexiones débiles o repetidas de aspectos abordados en las tareas de formación, por lo que, pese a que trató de desarrollar algunas definiciones, no las vinculó con aspectos más generales que le permitieran ejemplificarlas o explicarlas, lo cual corresponde al nivel de novato (Boix y Gardner, 1999).

Caracterización final de la comprensión de Karen

Con apoyo de la rúbrica, en la que se especifican los descriptores de comprensión del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz, para cada uno de los niveles en las diferentes dimensiones, se realizó el análisis del proceso de comprensión de Karen, resaltando los desempeños alcanzados por la participante en cada una de estas dimensiones. En la dimensión de contenido, en particular, la participante inició en un nivel de ingenuo puesto que, aunque definió la derivada a partir del uso del concepto de recta tangente, este proceso lo hizo de manera memorística, sin aludir a las construcciones de Newton y de Leibniz y sin referirse al contexto histórico en el que se originó el concepto.

A medida que se desarrollaron las tareas de formación en la fase de investigación guiada, Karen comenzó a alcanzar ciertos descriptores propios del nivel de novato para esta dimensión; considerando los aportes de Leibniz, la participante definió parcialmente la derivada desde sus construcciones, relacionando, en ocasiones, los desarrollos numéricos y geométricos postulados por el matemático; sin embargo, al inicio de esta fase, no fue tan evidente con respecto a los aportes de Newton. En el proyecto final de síntesis y, principalmente en la entrevista final, en sus aportes y respuestas, Karen logró cierta comprensión del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton, en una forma más perceptible, aunque aún le faltó alcanzar una relación más estructurada de las construcciones geométricas y las fundamentaciones numéricas; del mismo modo, en sus definiciones no asoció el contexto histórico del concepto.

Teniendo en cuenta lo referido por Boix y Gardner (1999), los estudiantes, en este nivel de novato, comprenden los métodos que son necesarios para construir el conocimiento, pero los procedimientos que utilizan son mecánicos, lo que propicia que no haya una relación entre este conocimiento y los mecanismos utilizados para llegar a este; precisamente, Karen, para la dimensión de contenido, repitió los elementos de la derivada planteados por Newton y por Leibniz, sin hacer un análisis de las construcciones geométricas y formulaciones numéricas necesarias para la fundamentación del concepto. Lo mencionado hasta el momento, con respecto al análisis del proceso de comprensión de Karen, se retoma en los descriptores de desempeño referidos en la Tabla 6 de descriptores para la dimensión de contenido. Se aclara que la estudiante no alcanzó descriptores de los niveles de aprendiz o de maestría.

Tabla 6

Descriptores alcanzados por Karen en la dimensión de contenido

Categoría / Nivel	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Newton	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Leibniz	Concepto de derivada actual
Novato	<u>Identifica algunas relaciones entre la recta tangente y el concepto de derivada a partir de los desarrollos de Newton.</u> <u>Relaciona parcialmente la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton.</u> <u>Repite diferentes fundamentos sobre el concepto de derivada planteados por Newton y abordados en los encuentros sincrónicos.</u>	<u>Identifica algunas relaciones entre la recta tangente y el concepto de derivada a partir de los desarrollos de Leibniz.</u> <u>Relaciona parcialmente la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz.</u> <u>Repite diferentes fundamentos sobre el concepto de derivada planteados por Leibniz y abordados en los encuentros sincrónicos.</u>	<u>Define memorísticamente el concepto de derivada o lo hace de manera errada.</u> <u>Entiende la derivada como la pendiente de la recta tangente a una gráfica en un punto determinado, pero no considera el contexto histórico del concepto.</u>

Para la dimensión de métodos, en la fase de exploración, la participante no mostró capacidad para establecer las consecuencias sociales, personales y científicas que rodearon el proceso de construcción del concepto de derivada; además, presentó dificultades al momento de diferenciar las construcciones desarrollas por Newton y por Leibniz. En la fase de investigación guiada, Karen comenzó a generar ciertas conexiones entre algunas consecuencias de las construcciones y entre las diferencias existentes en las mismas, en torno a su aspecto geométrico y numérico, en mayor medida en lo que respecta a Leibniz, lo cual se complementa para Newton en el proyecto final de síntesis.

Por lo tanto, después del desarrollo de las tareas de formación, cuyo propósito era contribuir a la comprensión del concepto de derivada haciendo hincapié en las construcciones de Newton y de Leibniz, se pudo concluir que Karen alcanzó los descriptores comprendidos en la dimensión de métodos en el nivel de novato, puesto que los conocimientos o conceptos abordados los aceptó como verdaderos, por estar validados por expertos, por lo que las afirmaciones no fueron discutidas ni se hicieron reflexiones o se establecieron relaciones entre las mismas (Boix y Gardner, 1999); se resalta que la maestra en formación no logró desempeños de los niveles de aprendiz o maestría. Estas características de comprensión, en la dimensión de métodos, para el caso de Karen, se encuentran resumidas en la Tabla 7:

Tabla 7

Descriptores alcanzados por Karen en la dimensión de métodos

Categoría / Nivel	Diferenciación geométrica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Diferenciación numérica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Implicaciones históricas del concepto de derivada
Novato	Repite algunas diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Repite algunas diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Establece algunas consecuencias sociales, científicas y personales que rodearon la construcción del concepto de derivada.

A partir del desarrollo de las actividades en la fase de exploración, se pudo establecer que, para la dimensión de propósitos, la participante se ubicó, inicialmente, en el nivel de ingenuo, ya que, a partir de lo planteado por Boix y Gardner (1999), la maestra en formación no identificó la importancia del conocimiento abordado ni desarrolló una postura crítica frente al mismo; por esta razón, la participante exhibió problemas a la hora de relacionar el contexto histórico con la construcción del concepto de derivada lo que, a su vez, no le permitió reconocer la relevancia de dicho contexto.

Sin embargo, en la fase de investigación guiada y en el proyecto final de síntesis, Karen inició un reconocimiento de estas relaciones entre la fundamentación del concepto de derivada y su contexto histórico, lo que la llevó a establecer, parcialmente, la importancia de la historia para la construcción del concepto; lo anterior permitió establecer que la participante alcanzó los descriptores de comprensión referidos en el nivel de novato, tal como se muestra en la Tabla 8 para la dimensión de propósitos. Se aclara que Karen no logró descriptores de los niveles de aprendiz y de maestría.

Tabla 8

Descriptores alcanzados por Karen en la dimensión de propósitos

Categoría / Nivel	Relación: derivada y contexto histórico
Novato	Establece algunas relaciones o lo hace de manera errónea, entre el contexto histórico y la construcción y fundamentación del concepto de derivada. Reconoce eventualmente la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.

Inicialmente, Karen presentó dificultades para explicar el concepto de derivada a partir de la utilización de diferentes conceptos matemáticos o basándose en las construcciones de Newton y de Leibniz, por lo que, para la fase de exploración, Karen se ubicó en el nivel de ingenuo en la dimensión de formas de comunicación; no obstante, mediante las tareas de formación en la fase de investigación guiada, la participante comenzó a apoyarse en las construcciones de Newton y de Leibniz para complementar o contribuir a la formulación de su definición del concepto de derivada, aunque, en muchos casos, lo hizo de manera confusa, por lo que, para esta dimensión de formas de comunicación, en esta fase de investigación guiada, avanzó y alcanzó los desempeños referidos en el nivel de novato; esto se ratificó en la socialización del proyecto final de síntesis y en las respuestas aportadas en la entrevista final.

Las dificultades o fallas en la comunicación del concepto de derivada que presentó la participante en la dimensión de formas de comunicación, a partir de la utilización de conceptos matemáticos propios de las construcciones de Newton y de Leibniz, se dio principalmente por el uso inadecuado de términos y por explicaciones confusas e incompletas de dichas definiciones (Boix y Gardner, 1999); estos aspectos se retomaron en la Tabla 9 de descriptores para dicha dimensión, donde se resaltaron los desempeños alcanzados por Karen a partir del análisis de su proceso de comprensión. Se resalta que la participante no logró descriptores de los niveles de aprendiz y de maestría.

Tabla 9

Descriptores alcanzados por Karen en la dimensión de formas de comunicación

Categoría / Nivel	Uso adecuado de definiciones y lenguaje matemático	Discurso coherente
Novato	Explica de manera confusa el concepto de derivada con el uso de lenguaje matemático. Relaciona parcialmente el concepto de derivada con otros conceptos matemáticos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz.	Define parcialmente el concepto de derivada. Expone el concepto de derivada desde las construcciones de Newton y de Leibniz, pero lo hace de manera confusa.

Análisis del proceso de comprensión de Mateo

Mateo es un maestro en formación de una licenciatura en matemáticas de cierta universidad pública de Colombia; tiene 22 años y se encuentra en el séptimo semestre de su carrera. Durante la realización de los diferentes encuentros sincrónicos, se mostró muy activo y participativo, poniendo en evidencia su responsabilidad y compromiso para la realización de las diferentes tareas de formación. Del mismo modo, el participante se destacó por mostrar interés y curiosidad, ahondando en el conocimiento, lo cual se pudo evidenciar a partir de las preguntas que realizaba constantemente.

Fase de exploración

En la fase de exploración se realizó un encuentro sincrónico con todos los participantes y se aplicó un cuestionario de indagación, en el cual se preguntó por el concepto de derivada desde su definición, interpretación geométrica y formulación numérica; así mismo, se evaluó el aspecto histórico y la percepción de los participantes respecto al mismo.

La definición que el estudiante elaboró del concepto de derivada se asoció más con la pendiente de una recta que pasa por un punto de una curva determinada, sin hacer referencia a su interpretación geométrica. En este sentido, cuando se le preguntó por la relación existente entre tres gráficas particulares (primitiva y sus derivadas), Mateo respondió "*la relación es que todas son gráficas de funciones*" (Mateo, cuestionario de indagación, 2020); en esta respuesta se pudo evidenciar que no logró establecer relación entre las gráficas y el concepto de derivada, a pesar de haber cursado una asignatura relacionada con cálculo diferencial.

Cuando se les solicitó a los participantes calcular la derivada de diferentes funciones, Mateo realizó dicha actividad de manera adecuada; esto permitió inferir que el estudiante poseía habilidades para la elaboración de procedimientos.

Por otra parte, con respecto al concepto de derivada desde su aspecto histórico, Mateo escribió: "*sé que Newton fue uno de los pioneros en el cálculo además de Leibniz. Newton para su teoría de gravitación universal supongo que desarrollo parte del cálculo, del segundo autor lo he escuchado en clase por sus aportes, pero no los recuerdo muy bien"* (Mateo, cuestionario de indagación, 2020). A partir de lo anterior, se pudo determinar que, aunque demostró un breve reconocimiento de los precursores en el desarrollo del cálculo infinitesimal y del concepto mismo de derivada, desconoció el contexto histórico de la fundamentación de dicho concepto.

En el cuestionario se hizo referencia a la definición del concepto de derivada; al respecto, Mateo respondió como se muestra en la Figura 23:

Figura 23

Fragmento del cuestionario realizado por de Mateo

Defina el concepto de derivada

R/= La derivada puede ser entendida como una pendiente

En su respuesta, se observó que Mateo asoció la derivada con la pendiente, pero no fue claro a la hora de realizar esta relación, puesto que no hizo referencia a la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto de una curva que representa una función determinada, por lo que se pudo inferir que esta definición la hizo de manera memorística, sin hacer una reflexión frente a lo que respondió. Es evidente que, según lo referido por Perkins (1999), existe un problema de comprensión ya que no es suficiente que los estudiantes sepan algo, sino que es necesario que reflexionen sobre lo que saben.

Con respecto a la importancia de abordar la historia del cálculo en su proceso de enseñanza, Mateo respondió: *"conocer acerca de la historia de temas en específico hará que, al momento de enseñarlos, se pueda hacer una mejor transposición didáctica"* (Mateo, cuestionario de indagación, 2020). Con esta respuesta, el participante destacó la importancia de la historia para la enseñanza del cálculo, pero enfocándola en su futura práctica como maestro.

La fase de exploración me permitió, a la luz de los descriptores de comprensión de cada una de las dimensiones, establecer que Mateo, en la dimensión de contenido, presentó dificultades a la hora de definir el concepto de derivada y de reconocer su contexto histórico; del mismo modo, en la dimensión de métodos, el participante no estableció diferencias entre las construcciones de Newton y de Leibniz, ni en su aspecto geométrico ni mucho menos en el numérico; además, no reconoció implicaciones ni consecuencias a partir de los desarrollos históricos sobre la derivada.

En cuanto a la dimensión de propósitos, al estudiante se le dificultó establecer relaciones existentes entre el contexto histórico y el proceso de construcción y fundamentación de la derivada; de igual manera, presentó problemas en la definición de dicho concepto y, aunque vinculó algunos conceptos matemáticos, lo hizo de manera errada o confusa.

Fase de investigación guiada

En los seis encuentros sincrónicos que se desarrollaron en esta fase, Mateo tuvo una participación, en la que se pudo observar cómo fueron transformándose algunas habilidades básicas que le permitieron alcanzar mayores niveles de comprensión en torno al concepto de derivada.

En el video de historia de la derivada, el estudiante puso en evidencia las dificultades que tenía para definir el concepto de derivada, puesto que cuando se le preguntó ¿qué es para usted el concepto de derivada?, el estudiante respondió: *"una función, un límite, es como variable, cuando algo incrementa, pero también tiende al cero"* (Mateo, transcripción observación, 2020). En esta respuesta se pudo observar que, aunque el estudiante mencionó aspectos presentes en la definición del concepto, lo hizo de manera confusa.

Similarmente, para los videos de las entrevistas con Leibniz y con Newton, se abordaron algunas preguntas en las que se destacaron diversas respuestas del participante. Particularmente, cuando se le preguntó por el significado de los infinitesimales tanto para Newton como para Leibniz en la construcción del concepto de derivada, el estudiante no dio una respuesta de lo desarrollado por Newton, pero sobre Leibniz afirmó que: *"la derivada no es otra cosa que la variación de una función en función de una variable cuando la variable es muy pequeña, lo que se conoce como infinitésimo"* (Mateo, transcripción de observación, 2020). En esta respuesta se pudo apreciar que, pese a que ya se observó una relación entre lo abordado por Leibniz alrededor de los infinitesimales y el concepto de derivada, aún se presentó ambigüedad en lo que planteó, lo que generó una definición errada del concepto de derivada.

Por otra parte, cuando se le indagó por las construcciones de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada, siguió manifestando dificultades; en este caso, Mateo consideró que Newton basó sus construcciones en otros autores, pero no hizo alusión a sus aportes; en cuanto a Leibniz, el participante precisó que: *"Leibniz consideró a la derivada como una razón de diferencias infinitesimales, que la llamó cociente diferencial"* (Mateo, transcripción de observación, 2020); de lo anterior, se pudo evidenciar que, aunque su respuesta se asoció correctamente a lo desarrollado por Leibniz, lo hizo de manera memorística a partir de lo abordado en los encuentros.

En la tarea de formación donde se abordó la historieta, el participante mencionó aspectos relevantes de las construcciones que desarrolló Newton respecto al concepto de derivada; cuando se le indagó por las fluentes y fluxiones, Mateo refirió que: *"las fluentes, fluxiones y momentos de fluxiones que para él las fluxiones no son infinitamente pequeñas... Se me viene a la mente el trayecto de un carro, la fluente el momento en que nosotros tenemos como un rango, o el espacio donde tenemos rango que tenemos nosotros para determinar la fluxión"* (Mateo, transcripción observación, 2020); en este aporte, se observó que el estudiante intentó explicar un ejemplo para dar a entender lo que deseaba expresar frente a las fluentes; sin embargo, aunque Mateo asoció la fluente o cantidad que fluye con el movimiento de un carro, esta relación la estableció de manera errada con el espacio que recorría un cuerpo y no con el objeto mismo.

Para la construcción de Leibniz, los análisis y aportes de Mateo estuvieron más estructurados y se relacionaron directamente con los desarrollos realizados sobre la derivada; esto se reflejó cuando Mateo se refirió a dicha construcción de una manera puntual, para después asociar la parte geométrica con los planteamientos numéricos, tal como se observó en el siguiente aporte: *"la relación o mejor la proporción entre esos segmentos de esos triangulitos me da como resultado la derivada en el punto 1C y 2C que van a estar tan cerca que será como uno solo"* (Mateo, transcripción de observación, 2020).

Cuando se le solicitó resaltar o establecer diferencias entre las construcciones de Newton y de Leibniz sobre el concepto de derivada, Mateo estableció diferencias geométricas, numéricas y sociales, lo cual se evidenció en la construcción del paralelo que se elaboró de manera conjunta con todos los maestros en formación; en esta tarea, el participante dijo que Newton, para desarrollar el cálculo infinitesimal, se basó en fluentes y fluxiones; además, relacionó la tangente con los momentos que mencionaba Newton en sus desarrollos y con la velocidad en ese momento o fluxiones para, finalmente, concluir que: *"cada uno desarrolló el cálculo infinitesimal de manera paralela, en la misma época, puede que haya habido plagio o no, pero la forma en que ambos llegaron a las conclusiones y se adentraron al cálculo infinitesimal es distinta. Por lo que es muy diferente sus formulaciones"* (Mateo, fragmento de paralelo, 2020).

Así mismo, para las consecuencias que tuvo el desarrollo del cálculo infinitesimal, a partir de Newton y de Leibniz, Mateo hizo referencia a aspectos sociales y científicos, los cuales se pudieron observar en los comentarios realizados en la construcción del paralelo, como los siguientes: *"los intereses nacionales retrasaron de alguna forma los avances en la ciencia y que se debería ser más objetivo en este aspecto, pues es un aporte para toda la humanidad… Como las matemáticas es una, es una ciencia, entonces esa polarización pudo generar un retraso científico, intento de escoger una postura y no ser imparciales, ese intento de escoger un lado, no ser imparciales y no nacionalismo"* (Mateo, fragmento de paralelo, 2020).

En la visualización de las entrevistas y el análisis de la historieta, Mateo trató de establecer relaciones entre el contexto histórico y los desarrollos del concepto de derivada; lo anterior, le permitió reflexionar y cuestionarse frente a la polémica existente en la época sobre la construcción del cálculo infinitesimal.

Posteriormente, el participante, al abordar la definición del concepto de derivada y al analizar las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz en torno a dicho concepto, vinculó diferentes conceptos matemáticos; inicialmente, de manera confusa o errónea, como, por ejemplo, cuando trató de explicar la construcción geométrica de Leibniz: *"si se hacen pequeños los dy y los dx, los puntos sobre las curvas se van acercando, se acercan todos los puntos… Ese movimiento, pero en un momento exacto, por eso no es que sea pequeño, sino que es ahí en ese momento"* (Mateo, transcripción observación, 2020); en este aporte se pudo observar que Mateo asoció el análisis desarrollado por Leibniz a partir de los diferenciales dy y dx, con el movimiento de dos puntos sobre una curva, lo cual fue propuesto realmente por Newton. Sin embargo, se observó que sus contribuciones se fueron refinando a lo largo de los encuentros, hasta que, finalmente, pudo establecer asociaciones con conceptos geométricos y matemáticos de manera más estructurada, como se hizo evidente en una de las explicaciones que dio Mateo sobre las construcciones de Newton, cuando refería que: *"a pesar de que usted acerque siempre los puntos y los acerque, la recta se va a aproximar a una tangente, pero siempre será una secante, entonces por eso ese espacio entre ambos puntos siempre será infinito"* (Mateo, transcripción observación, 2020).

Durante la realización de las tareas de formación en esta fase de investigación guiada, se pudo evidenciar un avance en los diferentes desempeños de comprensión que Mateo manifestaba, con respecto al concepto de derivada desde su aspecto histórico, lo cual se logró a partir del compromiso del estudiante en el abordaje de las diferentes tareas de formación y del direccionamiento que le dio la investigadora. A partir del desarrollo de la fase de investigación guiada, de acuerdo con Stone (1999), los estudiantes se pueden comprometer con formas más complejas de investigación y, a través del acompañamiento de los maestros, se podría lograr una integración de conocimientos, de tal manera que se contribuya a su comprensión.

En el caso particular de Mateo, al inicio, el participante mostró dificultades para definir el concepto de derivada o lo hacía de manera errada o confusa, al igual que los desarrollos matemáticos y geométricos realizados por Newton y por Leibniz; no obstante, con el transcurrir de las tareas, se empezaron a percibir ciertos avances en sus aportes, aun siendo muy notorio el factor memorístico en lo que manifestaba. En las tareas que se llevaron a cabo al final de esta fase, como la historieta y la construcción del paralelo, Mateo comenzó a asociar diferentes conceptos geométricos y matemáticos en la definición de la derivada y en la explicación de las construcciones, lo que, a su vez, le permitió hacer un análisis más profundo de las mismas y de las relaciones o diferencias que existían entre ambas; incluso, esto le posibilitó establecer consecuencias sociales o políticas vinculadas con el contexto en el que se desarrollaron dichas construcciones.

Considerando los descriptores para cada uno de las dimensiones de comprensión, se pudo determinar que, para la dimensión de contenido, el estudiante logró identificar algunas relaciones entre conceptos geométricos como, por ejemplo, la recta tangente al concepto de derivada, asociándolos, a su vez, a las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz; sin embargo, se hizo evidente que Mateo logró desarrollar mayor comprensión de las relaciones numéricas y geométricas trabajadas en la construcción de Leibniz con respecto a la derivada. En cuanto a la dimensión de métodos, el participante logró establecer diferencias entre ambos desarrollos realizados por Newton y por Leibniz, tanto desde el aspecto numérico como el geométrico, lo que le permitió analizar las consecuencias sociales, científicas y matemáticas presentes en esas construcciones.

Para las categorías referidas en la dimensión de propósitos, al inicio, Mateo reconoció algunos aspectos históricos relevantes en la fundamentación del concepto de derivada; posteriormente, a partir del desarrollo de las tareas de formación, consiguió establecer relaciones con la construcción del concepto, su fundamentación y el contexto histórico. Teniendo en cuenta los desempeños en la dimensión de formas de comunicación para esta fase, la tarea de la historieta y la actividad realizada con GeoGebra posibilitaron un avance notorio tanto en la definición del concepto de derivada como en su explicación y vinculación con otros conceptos matemáticos, a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.

Proyecto final de síntesis

Para esta fase final se desarrollaron dos encuentros, en los que se realizaron la socialización de las propuestas de proyecto final de síntesis por parte de cada uno de los participantes, y una entrevista individual final. El objetivo de esta fase era que el estudiante pudiera desarrollar, de manera independiente, una propuesta que sintetizara las comprensiones alcanzadas a lo largo del desarrollo de las fases de investigación (Stone, 1999).

Mateo, en su proyecto final de síntesis, propuso una estrategia de enseñanza del concepto de derivada en la que la metodología radicaba en fingir una clase donde los demás participantes eran los estudiantes. El propósito de este proyecto era enseñar, por medio de una clase, la importancia de la historia del concepto de derivada, para lo cual quiso poner en evidencia la relevancia y aplicación del concepto en la vida cotidiana, hacer un breve recorrido de los precursores del concepto para, posteriormente, establecer relaciones y diferencias entre ellos, apoyadas en la visualización y explicación de sus construcciones; todo esto, con el objetivo de introducir el aspecto histórico antes que el mismo desarrollo matemático.

En su proyecto, Mateo inició mencionando que la derivada "*es cómo cambia una cantidad con respecto a otra, por ejemplo, en la primera imagen podemos calcular la velocidad con la que vamos resbalándonos en un momento exacto, lo mismo sucede en la segunda o con el carro, ¿cómo cambia una variable con respecto a otra? Casi siempre, y esto es enfocado a la construcción de Newton que lo vamos a ver más adelante, es con relación al tiempo*" (Mateo, transcripción proyecto final de síntesis, 2020). En la anterior definición se pudo observar que Mateo retomó el desarrollo de Newton, debido a que relacionó directamente el movimiento de un cuerpo, como lo mostró en las imágenes de la Figura 24, con el desplazamiento de dos puntos o fluentes sobre una curva; adicionalmente, el participante no hizo alguna alusión a lo planteado por Leibniz sobre la derivada en este aporte; incluso, la relación que estableció entre el concepto de derivada y los cambios que sufría una cantidad determinada con respecto a otra, no fue clara, puesto que dicho aspecto también pudo asociarse a la definición de función.

Figura 24

Proyecto final de síntesis de Mateo

Del mismo modo, abordó el concepto a partir de lo trabajado por Newton en lo que concierne a su desarrollo geométrico; esto se evidenció cuando afirmó que "*estos puntos se acercan, tendiendo esa distancia a ser cero, aunque Newton nunca dijo que eran cero, a las cantidades que fluyen él las llamó fluente, por ejemplo, esta curva se da por movimientos de fluentes y estas aumentan siempre indefinidamente y a la velocidad con la que cada fluente aumenta lo llamó fluxión… Ese momento infinitamente pequeño es la que me determina la tangente a esta curva y si la ven aquí, sería la recta tangente* (muestra un punto de la gráfica moviéndose) *y así es como Newton expresó la derivada, lo que conocemos como la regla de la potencia para derivar"* (Mateo, transcripción proyecto final de síntesis, 2020).

En los fragmentos anteriores se pudo evidenciar cómo el participante abordó, de manera resumida, el concepto de derivada y lo explicó en su presentación, relacionando diferentes conceptos matemáticos y aportando una definición del concepto de derivada. Se pudo inferir que, aunque hubo claridad al momento de explicar los conceptos de fluentes y fluxiones abordadas por Newton, los cuales presentó de manera correcta con la ayuda de la gráfica, Mateo mostró la expresión matemática relacionada con el concepto de derivada sin hacer una explicación a partir del análisis geométrico.

Similarmente, Mateo explicó los desarrollos de Leibniz del concepto de derivada de la siguiente forma: "*para Leibniz, los infinitesimales son mayores que cero, pero son menores que cualquier número real positivo, o sea esto es demasiado pequeño, uno no es capaz de imaginárselo ni siquiera, solo sabes que es muy pequeño y por eso es que ahora vamos a ver estos dos puntos, la recta secante que pasa por ahí, porque pasa tangente por un punto, pero si uno mira bien parece que también pasa tangente por otro… A estos diferenciales dx los llamó abscisas y a estos dy ordenadas, como les estaba diciendo ahorita, supongamos que acá tenemos tres rectángulos dentro de esta curva, supongamos que queremos hacer más pequeño esta distancia, como esta parte y esta* (muestra los segmentos en la gráfica), *pero todas, porque están relacionadas, por eso él usa la proporción"* (Mateo, transcripción proyecto final de síntesis, 2020). Aunque el participante asoció correctamente los infinitesimales y los diferenciales con su explicación geométrica, no se observó claridad cuando mencionó las proporciones existentes entre los triángulos que se formaban en la representación geométrica de Leibniz, de donde precisamente se llegaba a la formulación algebraica del concepto de derivada.

Fue importante destacar el reconocimiento que hizo Mateo, en la entrevista final, del contexto histórico del concepto de derivada; con base en los estudios y desarrollos matemáticos de Newton y de Leibniz, asoció la construcción de la derivada para, finalmente, aportar desde su comprensión una definición del concepto, tal como se observó en las respuestas a las preguntas relacionadas con la fundamentación geométrica y numérica de dicho concepto: "*Newton utiliza el movimiento, o también para la definición palabras como la fluxión o fluentes, por eso la definición de derivada para Newton es como el momento exacto en el que pasa algo… Sobre la parte geométrica, en la construcción de GeoGebra, ahí vimos que Newton habla de fluentes que son cantidades que fluyen, entonces en esas fluentes hay una velocidad asociada que es la fluxión, entonces en ese momento exacto que se representa en la construcción geométrica se puede establecer la derivada… Leibniz empieza a desarrollar la idea desde un pensamiento que para mucha gente es difícil de hacer que es imaginar el número más pequeño después del cero y él, desde ahí, lo percibió así, comenzó a desarrollar el concepto de derivada, entonces muestra ya cómo la derivada es, según como él la hizo geométricamente, tenemos los dos puntos sobre la curva y por allí pasa la recta secante, entonces si debajo de esa curva donde se asocian los rectángulos y estos se hacen cada vez más pequeños*" (Mateo, fragmento entrevista final, 2020). Lo referido anteriormente, le dio la posibilidad a Mateo de expresar con claridad las relaciones que se establecen en la definición del concepto de derivada desde lo abordado por Newton y por Leibniz.

Del mismo modo, el abordaje de las diferentes construcciones y el origen de estos desarrollos posibilitaron que el participante estableciera consecuencias en su construcción, lo cual fue retomado en el proyecto final de síntesis, cuando trató de hacer diferenciaciones explícitas en los dos desarrollos, tal como se mencionó en el siguiente fragmento: *¿Por qué surge esta controversia de quién fue? Pues lo sacaron casi al mismo tiempo, pero Newton dijo que Leibniz le copió porque ellos se mandaban cartas para estar informados en los avances del otro con respecto a las matemáticas y aunque no había nada específico, todo muy general, Newton dijo que Leibniz se apoyó en su trabajo para desarrollar su cálculo, por tanto, el desarrollo del cálculo era de él"* (Mateo, transcripción proyecto final de síntesis, 2020).

Así mismo, en la entrevista final, se le preguntó por las diferencias y las consecuencias que se tuvieron en las construcciones de Newton y de Leibniz; en este caso, el estudiante mencionó que: "*otra diferencia es la simbología, lo cual afectó bastante en el desarrollo* *posterior a ellos del cálculo, esa diferencia… Además, en Inglaterra por usar la notación de Newton, por desconocer los aportes de otros contextos, por nacionalismo, siguieron con otra simbología, por su orgullo, por desconocer a Leibniz como el inventor. Esas diferencias y aunque es una sola ciencia donde todos deben aportar para avanzar, en ese momento la sociedad científica se partió en dos por las notaciones, trayendo atrasos o avances en los diferentes contextos"* (Mateo, fragmento entrevista final, 2020).

A partir de lo anterior, se pudieron evidenciar las relaciones que Mateo realizó con respecto a las construcciones geométricas y numéricas desarrolladas por Newton y por Leibniz; además, se resaltó la reflexión y análisis que hizo respecto a las consecuencias históricas que tuvieron tales planteamientos, presentes en la construcción del concepto de derivada, destacando la importancia de los mismos y las implicaciones actuales en la enseñanza y tratamiento del concepto de derivada. Esta importancia la presentó de manera más clara cuando respondió a la pregunta por cómo abordaría el proceso de enseñanza de la derivada, retomando ambas construcciones: "*yo creo que acá, más que mostrar o aprendan de donde salió, es que lo importante es que ellos comprendan qué está pasando, así no sean capaz de hacerlo, que ellos comprendan qué fue lo que pasó, y qué es lo que vamos a hallar de ahora en adelante y entonces después de eso si vamos a comenzar a derivar, entonces ellos van a relacionar la gráfica con la derivada"* (Mateo, transcripción proyecto final de síntesis, 2020).

En la entrevista final, Mateo, haciendo uso del lenguaje matemático, además de explicar el concepto de derivada, lo vinculó con otros conceptos matemáticos, permitiéndose hacer deducciones frente a las construcciones realizadas por Leibniz y por Newton. En su proyecto final de síntesis, el estudiante abordó la construcción de Newton de la derivada y afirmó: "*para Newton, todos los problemas asociados con curvas se pueden resumir solo en dos y entre ellos está encontrar la velocidad del movimiento en cualquier momento o tiempo determinado dada una longitud* (la muestra en la gráfica, junto con la recta secante y la gráfica de la función)" (Mateo, transcripción proyecto final de síntesis, 2020). En este fragmento, el participante generalizó los aportes de Newton, no solo en el cálculo o con respecto al concepto de derivada, sino como consecuencia directa del análisis y estudio del movimiento de los cuerpos.

En cuanto a Leibniz, en la explicación que presentó el participante de la construcción, particularmente desde la fundamentación geométrica y numérica del concepto a partir de este autor, Mateo refirió que: "*según él, las hizo geométricamente, tenemos dos puntos sobre la curva* *y allí pasa la recta secante, entonces si debajo de esa curva donde se asocian los rectángulos y esto se hace cada vez más pequeño, considerar las proporciones entre esos rectángulos, al hacerlos más pequeños e introducir más, y así se van a ir acercando esos dos puntos y finalmente se va a tomar la derivada, según Leibniz, es cuando ya se acercaron lo suficiente a un punto, que se puede decir que esa distancia es tan pequeña… pero ese número, esa construcción geométrica de Leibniz porque es el número más pequeño después del cero, imaginarse ese número es difícil, es como cuando se habla del infinito, incluso imaginarse un millón de cosas es difícil…"* (Mateo, fragmento entrevista final, 2020); particularmente, Mateo destacó la relación entre el análisis proporcional de Leibniz de la derivada a partir de los rectángulos, con la proporción y representación existente entre una cantidad casi nula y una cantidad infinita.

Considerando los diferentes aportes de Mateo, tanto en la socialización de su proyecto final de síntesis como en las respuestas y diálogos llevados a cabo en la entrevista final con la investigadora, se pudo afirmar que, para la dimensión de contenido, se evidenció que el participante relacionó, de manera clara, la construcción geométrica y numérica de Newton en torno al concepto de derivada y lo explicó rotundamente; en lo concerniente a Leibniz, aunque logró relacionar las construcciones geométricas del concepto de derivada con las numéricas, la explicación aún era confusa, puesto que no logró pasar de la proporcionalidad geométrica establecida en la construcción, a la representación algorítmica del concepto de derivada. No obstante, Mateo argumentó ampliamente las relaciones y las diferencias existentes en ambas construcciones.

Con respecto a la dimensión de métodos y de propósitos, el participante logró establecer diferencias y similitudes entre ambos desarrollos y construcciones sobre la derivada, permitiendo asociar el contexto histórico con la fundamentación del concepto, resaltando su importancia y develando las implicaciones de esa historia en su fundamentación actual. En relación con los descriptores referidos en la dimensión de formas de comunicación, para esta fase de proyecto final de síntesis, se pudo afirmar que Mateo recurrió al uso de diferentes conceptos matemáticos para explicar el concepto de derivada; se concluyó que esta explicación la realizó de manera clara, teniendo como base las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz.

Caracterización final de la comprensión de Mateo

A continuación, se presentan en la rúbrica los desempeños de comprensión alcanzados por Mateo; estos desempeños están resaltados en negrita y subrayados en las tablas respectivas. Para la dimensión de contenido, se consideraron los diferentes niveles de comprensión y las categorías para dicha dimensión, que corresponden al desarrollo del concepto de derivada a partir de Newton y a partir de Leibniz, y la formulación actual del concepto.

En la dimensión de contenido, Mateo inició en la fase de exploración razonando en los niveles de ingenuo y de novato, puesto que no logró identificar las relaciones existentes entre la recta tangente y el concepto de derivada, tanto en la construcción de Leibniz como en la de Newton; por lo tanto, no vinculó el concepto con su contexto histórico y, aunque trató de definir el concepto de derivada, lo hizo de manera errada.

Para la fase de investigación guiada, Mateo logró alcanzar algunos descriptores que correspondían a los niveles de novato y de aprendiz; en cuanto al desarrollo del concepto de derivada por parte de Newton, el participante identificó algunas relaciones entre la construcción geométrica y los fundamentos numéricos del concepto; con respecto a Leibniz, logró relacionar la construcción geométrica con su formulación numérica; además, pese a que trató de definir el concepto de derivada, lo hizo de manera errada sin considerar su aspecto histórico.

En el desarrollo del proyecto final de síntesis y a través de la entrevista final, se pudo establecer que Mateo explicó el concepto de derivada, teniendo en cuenta las construcciones de Newton, aunque en el caso de Leibniz presentó aún dificultades para realizar dicha explicación; no obstante, el participante argumentó ampliamente las relaciones y las diferencias existentes entre las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz del concepto de derivada.

A partir de lo anterior, se pudo evidenciar que Mateo, al finalizar el trabajo de campo, logró alcanzar el nivel de aprendiz en relación al desarrollo del concepto de derivada a partir de Newton y respecto a la fundamentación actual del concepto; en este caso, tal como lo argumentan Boix y Gardner (1999), el participante usó el conocimiento para reinterpretar lo que hacía parte de su contexto; de igual forma, asumió una postura crítica frente a la construcción del conocimiento, pero, al momento de explicar este conocimiento, con la ayuda de GeoGebra, encontró muchas dificultades y lo hizo de manera confusa o errada.

Para la categoría que se relacionó con el desarrollo de Leibniz del concepto de derivada, alcanzó un nivel de aprendiz, porque, aunque estableció vínculos geométricos y numéricos en sus desarrollos, aún presentó dificultades a la hora de explicar el concepto; es decir, teniendo en cuenta lo mencionado por Boix y Gardner (1999), Mateo fue secuencial a la hora de presentar el conocimiento con base en lo abordado por Leibniz, pero lo hizo más a modo expositivo que explicativo.

Para sintetizar lo dicho anteriormente, respecto al análisis de la comprensión alcanzada por Mateo, se presenta la Tabla 10, donde se resaltan los descriptores alcanzados por el participante en cada uno de los niveles y para cada una de las categorías referidas en la dimensión de contenido. Se concluye que Mateo se ubicó en el nivel de aprendiz en esta dimensión y que no logró descriptores del nivel de maestría.

Tabla 10

Descriptores alcanzados por Mateo en la dimensión de contenido

Categoría / Nivel	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Newton	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Leibniz	Concepto de derivada actual
Aprendiz	<u>Relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton</u>.	<u>Relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz</u>.	<u>Define el concepto de derivada.</u> <u>Reconoce el concepto de derivada desde su aspecto histórico</u>.

En la dimensión de métodos, Mateo se ubicó en el nivel de novato en la fase de exploración, puesto que, a partir de lo referido en los descriptores para este nivel, no estableció diferencias entre los desarrollos numéricos y geométricos abordados en las construcciones sobre el concepto de derivada de Newton y de Leibniz; de igual manera, se le dificultó el establecimiento de diferentes consecuencias sociales, científicas y personales que emergieron de dichas construcciones.

Tanto en la fase de investigación guiada como en la fase de proyecto final de síntesis, Mateo, en la dimensión de métodos, se ubicó en el nivel de aprendiz, ya que, aunque al inicio estableció diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz, esto lo hizo de manera memorística; sin embargo, a partir del avance en las diferentes tareas de formación, logró realizar y establecer con claridad dichas diferenciaciones a partir de sus construcciones geométricas y sus desarrollos numéricos.

Por lo tanto, en la dimensión de métodos, Mateo alcanzó los descriptores del nivel de aprendiz, puesto que centró su conocimiento en métodos y procedimientos (Boix y Gardner, 1999). Precisamente, pese a que Mateo no solo estableció diferencias de lo geométrico y numérico en las construcciones sobre la derivada realizadas por Newton y por Leibniz, sino que también logró determinar consecuencias sociales, científicas y políticas, que surgieron de este proceso de construcción, el participante no utilizó estos aprendizajes para validar y explicar dichas diferencias; adicionalmente, no logró hacer una vinculación de este proceso para realizar una explicación clara sobre su fundamentación actual. Lo mencionado anteriormente se presenta en la Tabla 11 de descriptores para la dimensión de métodos, en la que se observa que el participante no logró ningún descriptor del nivel de maestría.

Tabla 11

Descriptores alcanzados por Mateo en la dimensión de métodos

Categoría / Nivel	Diferenciación geométrica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Diferenciación numérica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Implicaciones históricas del concepto de derivada
Aprendiz	Establece diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Establece diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Establece las consecuencias sociales, científicas y personales presentes en la construcción del concepto de derivada.

Para la dimensión de propósitos, Mateo reconoció, en la fase de exploración, algunos datos históricos sobre los matemáticos que participaron en la construcción del concepto de derivada, como Newton y Leibniz, pero no relacionó ese contexto histórico con el origen de la derivada. Por otra parte, el estudiante sí hizo un reconocimiento de la relevancia del aspecto histórico del concepto de derivada, aunque inicialmente lo vinculó como una necesidad, puesto que permitía desarrollar un adecuado proceso de enseñanza de este.

En la fase siguiente, de investigación guiada, con el desarrollo de las tareas de formación, especialmente en lo abordado a partir de la historieta, Mateo logró asociar el concepto de derivada con su contexto histórico desde aspectos sociales, políticos y personales de Newton y de

Leibniz, lo que permitió ubicarlo en el nivel de aprendiz para el primer descriptor. En el reconocimiento que hizo respecto a la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada, aún presentó algunas dificultades, puesto que se mostró confuso a la hora de precisar cómo estaban presentes estos desarrollos de la derivada en su presentación actual; por lo que, para el segundo descriptor, se ubicó en el nivel de novato.

En la fase de proyecto final de síntesis, por medio de las preguntas que se realizaron en la entrevista final, Mateo logró interpretaciones frente a cómo se evidenciaron diferentes aspectos históricos en la concepción actual del concepto de derivada; lo anterior, le propició un reconocimiento de la necesidad e importancia de abordar el aspecto histórico para la enseñanza y comprensión del concepto de derivada.

La entrevista y las preguntas que surgieron de esta, permitieron que el participante identificara las cuestiones esenciales que motivaron la construcción del conocimiento para que, desde allí, se estableciera la importancia de llevar este saber a la escuela (Boix y Gardner, 1999); en consecuencia, de acuerdo con los descriptores alcanzados en esta dimensión, el estudiante se ubicó en el nivel de aprendiz. Con la finalidad de sintetizar el análisis anterior, se presenta la Tabla 12 de descriptores para la dimensión de propósitos, en la que se resaltan los alcanzados durante el trabajo de campo por el participante Mateo.

Tabla 12

Descriptores alcanzados por Mateo en la dimensión de propósitos

Categoría / Nivel	Relación: Derivada y Contexto histórico
Aprendiz	<u>Establece relaciones entre el contexto histórico y la construcción y fundamentación del concepto de derivada.</u> <u>Reconoce la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.</u>

En lo referido a la dimensión de formas de comunicación, Mateo presentó dificultades para explicar el concepto de derivada con la utilización de objetos matemáticos, a partir de los aspectos geométricos o numéricos abordados por Newton y por Leibniz, en la actividad del cuestionario de indagación; por esta razón, en la fase de exploración, el participante manifestó características propias del nivel de ingenuo.

En las diferentes tareas de formación realizadas durante la fase de investigación guiada, Mateo utilizó parcialmente algunos conceptos matemáticos para dar una definición del concepto de derivada, ya sea retomando las construcciones de Newton o de Leibniz, o a partir de sus propias fundamentaciones que surgieron de sus conocimientos previos. Particularmente, en la actividad de GeoGebra, Mateo logró dar una definición del concepto de deriva a partir del uso de diferentes conceptos y objetos matemáticos, pero aún no se percibía claridad en lo que exponía cuando se abordaron en el software dichas construcciones; por lo tanto, para esta fase de investigación guiada, Mateo se ubicó entre los niveles de novato y de aprendiz.

Cuando se realizaron las actividades del proyecto final de síntesis, se observó que Mateo desarrolló la capacidad de explicar el concepto de derivada a partir del uso del lenguaje matemático retomado de su conocimiento y de lo abordado por Newton y por Leibniz; por consiguiente, teniendo en cuenta lo argumentado por Boix y Gardner (1999), el participante logró utilizar su conocimiento para explicar e interpretar diferentes situaciones, como fueron, en este caso en particular, los desarrollos numéricos y geométricos alrededor del concepto de derivada. En este sentido, Mateo logró alcanzar, al finalizar las diferentes tareas de formación en las tres fases comprendidas en la EpC, los desempeños de comprensión contemplados en el nivel de aprendiz. Este análisis se explicita en la Tabla 13 de descriptores para la dimensión de formas de comunicación, en la que se observa que el participante no logró ningún descriptor del nivel de maestría.

Tabla 13

Descriptores alcanzados por Mateo en la dimensión de formas de comunicación

Categoría / Nivel	Uso adecuado de definiciones y lenguaje matemático	Discurso coherente
Aprendiz	Explica el concepto de derivada con el uso de lenguaje matemático. Relaciona el concepto de derivada con otros conceptos matemáticos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz.	Define el concepto de derivada. Expone el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.

Análisis del proceso de comprensión de Jhordan

Jhordan es un estudiante de 21 años que actualmente se encuentra cursando su séptimo semestre de un programa de licenciatura en matemáticas. El participante se caracteriza por ser una persona tímida a la hora de dar aportes o hacer preguntas; sin embargo, sus intervenciones, durante la investigación, fueron muy acertadas; del mismo modo, siempre trató de ir más allá de lo que se abordaba, demostrando interés por comprender y participar del estudio; esto también se pudo notar en su regularidad de participación en los encuentros sincrónicos.

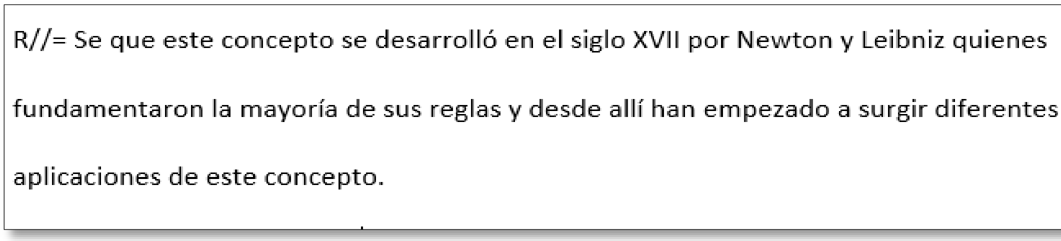
Fase de exploración

Durante el encuentro sincrónico que se desarrolló en la fase de exploración, se resolvió, por parte de los maestros en formación, un cuestionario de indagación que constaba de diez preguntas relacionadas con la definición, formulación geométrica, numérica y contexto histórico del concepto de derivada. Cuando se le preguntó específicamente por la definición de derivada, Jhordan respondió: *"hablando geométricamente se puede expresar como la pendiente de la recta tangente a la curva, ya a modo más general se puede expresar como la razón de cambio respecto a algo*" (Jhordan, cuestionario de indagación, 2020); de este fragmento se pudo inferir que definió parcialmente el concepto de derivada; no obstante, en esta definición no manifestó alguna relación con las construcciones de Newton y de Leibniz, ni tampoco hizo alusión a las diferencias existentes en las dos fundamentaciones del concepto, ni mencionó el contexto histórico del mismo; por lo tanto, se puso en evidencia que, para esta fase, Jhordan concibió el conocimiento como un constructo no problemático, disponible para ser captado (Boix y Gardner, 1999).

Cuando se le indagó sobre las gráficas de las funciones en una de las preguntas del cuestionario inicial, en las cuales las mismas se asociaban directamente con la representación geométrica de la derivada, el participante no realizó un análisis de este aspecto y vinculó las gráficas con otros conceptos matemáticos como, por ejemplo, la continuidad. Posteriormente, cuando se le preguntó por el conocimiento que tenía sobre la derivada desde su aspecto histórico, el maestro en formación manifestó un conocimiento sobre los matemáticos que participaron en su construcción, pero sin establecer alguna relación con el contexto histórico, tal como se evidenció en la Figura 25:

Figura 25

Fragmento cuestionario de indagación, Jhordan



R//= Se que este concepto se desarrolló en el siglo XVII por Newton y Leibniz quienes fundamentaron la mayoría de sus reglas y desde allí han empezado a surgir diferentes aplicaciones de este concepto.

Para esta fase de exploración, se pudo observar que Jhordan, de acuerdo con los descriptores de comprensión de la dimensión de contenido, no logró vincular conceptos, como la recta tangente, a las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz en torno al concepto de derivada, lo que impidió que reconociera su contexto histórico; de igual forma, se observó que no realizó un análisis de las consecuencias sociales, científicas y personales que trajo este desarrollo matemático, lo cual se especificó como un descriptor de comprensión del concepto de derivada en la dimensión de métodos.

Del mismo modo, la falta de vinculación del contexto con el proceso de construcción del concepto de derivada, imposibilitó que generara una relación entre estos aspectos y, por lo tanto, se presentaron dificultades a la hora de definirlo por medio de términos matemáticos desarrollados por Newton y por Leibniz; estos desempeños también se especificaron, respectivamente, como descriptores necesarios para alcanzar la comprensión de las dimensiones de propósitos y de formas de comunicación, correspondientemente.

Fase de investigación guiada

Las diferentes tareas de formación que se retomaron en esta fase, como el video de la historia de la derivada, los videos de la entrevista a Newton y de la entrevista a Leibniz, al igual que el análisis de la historieta, la construcción del paralelo y la actividad con GeoGebra, se trabajaron en seis encuentros sincrónicos; en estos, Jhordan tuvo una buena participación, lo que permitió contar con diferentes aportes, que se retomaron en el proceso de análisis de comprensión del participante.

En el desarrollo de las preguntas planteadas para el análisis del video de la historia de la derivada, Jhordan, en una de sus respuestas, dejó ver la relación que estableció entre el contexto histórico del concepto y el proceso de fundamentación del mismo, ya que vinculó los desarrollos con los estudios sobre las tangentes a curvas y analizó cómo esto propició el origen del concepto de derivada: "*yo tengo entendido que el problema respecto al cálculo infinitesimal se había dado tres o cuatro siglos antes de Cristo, uno de los que me acuerdo era el problema a la tangente a una curva, entonces como en ese tiempo no había métodos para resolver, por así decirlo, esas cantidades tan pequeñas, estos autores que estamos mencionando, Newton y Leibniz, fueron los que siguieron desarrollando en la construcción de la derivada"* (Jhordan, transcripción de observación, 2020).

Posterior a la visualización del video en que se realizaba una entrevista ficticia a Newton, se le pidió al estudiante que explicara, con sus propias palabras, las construcciones de Newton con respecto al concepto de derivada, a lo que el participante respondió en la Figura 26:

Figura 26

Respuesta video historia de la derivada, Jhordan

> Trata de evitar las cantidades infinitesimales se adentra en el término de fluxiones que es la velocidad con la que una variable fluye con respecto al tiempo, de esta manera interpreta las curvas generadas por el movimiento de un punto y a calcular la tangente a la curva por medio de la descomposición de sus componentes con respecto a los ejes coordenados. Así se obtiene que la tangente es el cociente de las velocidades con que varían las coordenadas x, y del punto (x,y).

En esta respuesta se pudo notar que el participante realizó, de manera correcta, una relación de la construcción geométrica y numérica efectuada por Newton con respecto al concepto de derivada. De igual manera, en la construcción realizada en GeoGebra, Jhordan corroboró el anterior aporte cuando se refirió a la construcción de Newton como sigue: "*si a esos puntos xo les está diciendo que son como un momento, no sé si decirlo así, infinitamente pequeño de tiempo en la cual hay una velocidad instantánea, entonces al nombrarlos, al tener x, y al tener esa notación de xo, yo haría relación a un punto un poquito más allá, pero al demasiadamente pequeño… Newton hacía esa construcción a partir del movimiento… La derivada que es la recta que graficaste me da la proporción, o ese cambio que hay en el eje x y el eje y con respecto a un punto que se mueve*" (Jhordan, transcripción de observación, 2020).

Así mismo, en lo referido a Leibniz, cuando se trabajó la lectura y el análisis de la historieta, Jhordan hizo varias contribuciones, las cuales pusieron en evidencia la correspondencia geométrica y numérica de los desarrollos de este matemático. Específicamente, cuando se le preguntó por los infinitesimales, la pendiente en la construcción de Leibniz y la definición de la derivada a partir de dicho desarrollo, el maestro en formación estableció la correspondencia que había entre los diferenciales y la derivada, asumiendo, de dicha proporción, la consecución de un número que representaba la derivada, lo cual expuso de la siguiente manera: *"la proporción entre esas cantidades dy y dx me da como resultado un número que es precisamente la derivada… Esta diferencia entre la distancia entre los puntos sobre la curva o sobre la gráfica, me definen la pendiente… La relación entre una derivada y una pendiente de una gráfica en la construcción de Leibniz se puede ver fácil para la gráfica de una constante donde la pendiente es cero y la derivada también"* (Jhordan, transcripción de observación, 2020).

Del mismo modo, fue importante destacar la claridad que exhibió Jhordan en lo que concierne a la relación existente entre el concepto de derivada y la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto de una curva, pese a que no explicitó en dicho enunciado la claridad de su comprensión, lo puso en evidencia mediante la ejemplificación de la pendiente de una función constante. Similarmente, en la construcción del paralelo conjunto, el participante abordó el concepto de derivada desde Leibniz, así: *"para hallar la derivada con esas diferencias o diferenciales era lo mismo que las proporciones… Profe, lo que Leibniz hacía era en su construcción del concepto de derivada, él lo que construye, lo que hace es primero los triangulitos para demostrar su proporcionalidad o lo que hace son los rectángulos, porque yo lo que veo es que él define los puntos y forma el triángulo, pero al formar el triángulo ahí quedan esos rectángulos evidenciados… Allí encuentra la proporcionalidad, desde un punto fijo que tenía y ya otro, que se determinaba por un incremento tanto en la abscisa lo que daba otro incremento en la ordenada o, al revés, y desde ahí concluía que ese incremento en la recta que pasaba entre esos, entre ellos dos, era la recta tangente, la pendiente"* (Jhordan, transcripción de observación, 2020).

Considerando los aportes de Jhordan mencionados anteriormente sobre las construcciones del concepto de derivada realizadas por Newton y por Leibniz, se pudo afirmar que el participante reconoció las diferencias existentes entre los constructos de los dos matemáticos, tanto de la representación geométrica como de la formulación numérica; este aspecto se reafirmó en mayor medida en la construcción del paralelo grupal y en la actividad con GeoGebra, cuando Jhordan describió, de manera correcta, que: "*los pequeños momentos para Newton eran los* *pequeños incrementos para Leibniz, los momentos de Newton en que fluye la fluente, esa distancia Leibniz la denota como los diferenciales dy, dx… Algo muy importante que es como lo que Leibniz llama como los diferenciales, que son unos puntos como tal cerca a otros, ya Newton los denota como unos momentos como tal que se aproximan, se mueven*" (Jhordan, transcripción de observación, 2020).

Por otra parte, en cuanto a la identificación de las consecuencias que trajo la construcción del concepto de derivada, en esta fase de investigación guiada, cuando se plantearon las preguntas sobre el video de la entrevista a Leibniz acerca de la polémica de la invención del cálculo, el participante precisó que: "*creo que en esta correspondencia unido también Newton, el cual era cercano a Collins, dio pie a la confusión entre quién fue el verdadero creador del cálculo infinitesimal, además de atrasar, en algunos lugares, por culpa de esta confusión, el desarrollo del cálculo infinitesimal"* (Jhordan, transcripción de observación, 2020); en esta respuesta se lograron identificar algunas consecuencias, esbozadas por Jhordan, de las construcciones realizadas alrededor del cálculo infinitesimal, particularmente en lo que correspondía al concepto de derivada.

A partir de los aportes de Jhordan mencionados hasta este momento, se pudo notar un uso adecuado de términos matemáticos para definir el concepto de derivada, lo cual abordó a partir de los desarrollos de Newton y de Leibniz; por esta razón, con base en lo argumentado por Boix y Gradner (1999), se pudo corroborar el nivel de comprensión de maestría alcanzado por el participante:

> Con apoyo, los desempeños en este nivel iluminan la relación entre conocimiento disciplinario y vida cotidiana, examinando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento. Los desempeños en este nivel demuestran una expresión y comunicación de conocimiento flexible y adecuada. (p. 240)

Las tareas de formación desarrolladas en esta fase, a la luz de los descriptores de la dimensión de contenido, dejaron ver en el participante claridad y coherencia en sus planteamientos en torno al concepto de derivada, respecto a su representación geométrica y a su fundamentación numérica, lo que posibilitó una definición del concepto desde los desarrollos de Newton y de Leibniz, haciendo explícitas las diferencias en los mismos; sin embargo, las consecuencias que emergieron de dicho constructo no las utilizó para explicar la formulación actual del concepto. Finalmente, para esta fase, se pudo percibir facilidad en el estudiante en cuanto a la utilización de conceptos matemáticos para abordar el concepto de derivada, complementando sus afirmaciones con ejemplificaciones y argumentos que permitieron apoyar su explicación de las construcciones de Newton y de Leibniz.

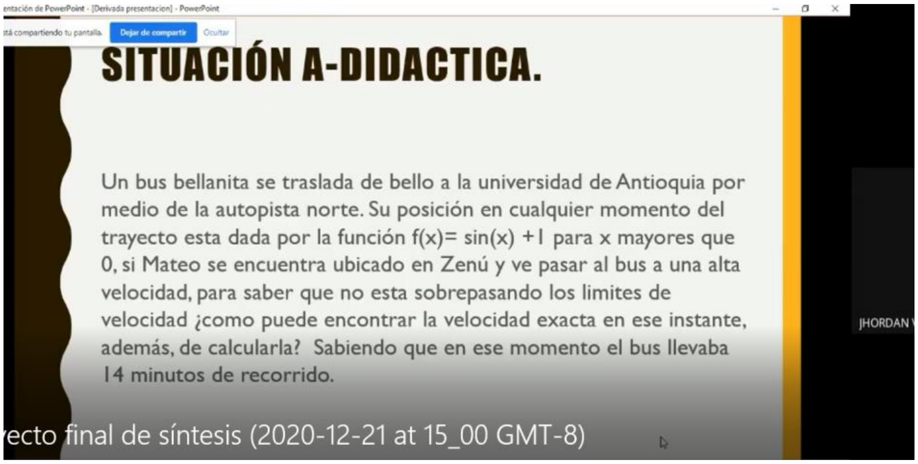
Proyecto final de síntesis

Con el objetivo de que los participantes dieran a conocer la comprensión alcanzada del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz, se realizaron dos encuentros sincrónicos; el primero consistió en la socialización del proyecto final de síntesis por parte de cada participante, el cual propendió por generar una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, en la que se retomaran cada uno de los aspectos históricos que rodearon el concepto, puesto que, como lo afirma Stone (1999), los proyectos finales de síntesis tienen la intencionalidad de demostrar la comprensión alcanzada por los participantes, además de constituirse en una oportunidad para que se realice un trabajo independiente que sintetice sus comprensiones. El segundo encuentro se centró en la realización de una entrevista final individual mediante la cual, por medio de la formulación de unas preguntas, los participantes pudieron compartir lo comprendido a partir del desarrollo del estudio en las diferentes fases.

El participante, en cuestión, desarrolló una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, con base en los planteamientos de Newton y apoyándose en la teoría de situaciones a-didácticas como estrategia metodológica, para lo cual construyó una situación problema enfocada en las particularidades de su contexto y aplicando el concepto de derivada. En la Figura 27 se puede observar un fragmento del proyecto final de Jhordan.

Figura 7

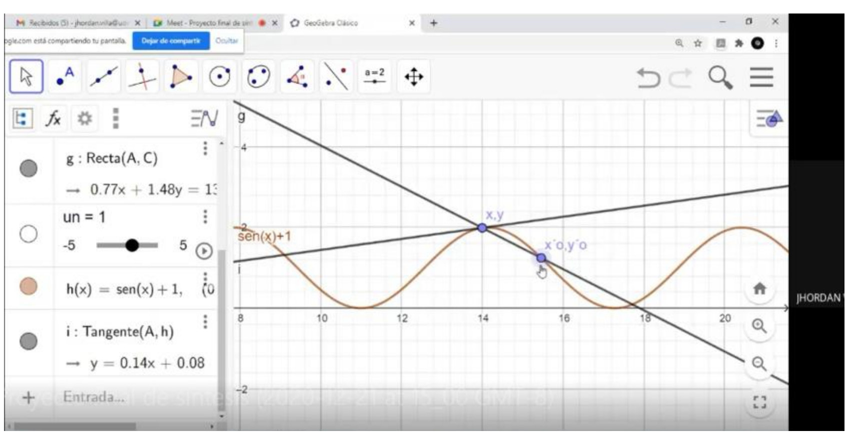
Proyecto final de síntesis, Jhordan



Lo que Jhordan buscaba con esta situación a-didáctica, en su propia, voz era: "*de una vez no entrar a un espacio de clase, sino a partir de una situación de la vida cotidiana, dar paso a lo que se llama como situaciones didácticas, que esa ya son cosas como normales de clase de explicación*" (Jhordan, transcripción proyecto final de síntesis, 2020). Del mismo modo, su explicación se basó en los desarrollos de Newton, para lo cual abordó conceptos como fluentes y fluxiones para relacionarlos con la situación particular construida por el estudiante; además, se apoyó en el software GeoGebra para brindar una explicación gráfica. En la Figura 28 se puede observar la construcción realizada por Jhordan en su proyecto final de síntesis.

Figura 28

Fragmento del proyecto final de síntesis de Jhordan



El participante realizó la explicación de la situación a partir del programa, de la siguiente forma: *"bueno, entonces aquí lo que hice fue graficar el recorrido del bus según la función que me están diciendo de la posición que tiene el bus durante el recorrido y tengo los intervalos de donde empieza, pues desde cero, entonces, por así decirlo Newton nos lo plantea así: como hay un minuto exacto que nos están preguntando por la velocidad de ese bus, a ese punto lo llamamos (x, y); que ya lo habíamos dicho es una fluente o cantidades que fluyen; aparte de esto tenemos otro punto, por el cual vamos a trazar una recta que ya habríamos de conocer, que es una recta secante que pasa por esos dos puntos, entonces Newton lo que nos dice es si este otro punto hacia ese punto inicial (x, y) a medida que él se va acercando y están infinitamente cerca, por así decirlo, la recta secante se va a terminar por convertir en la recta tangente a ese primer punto, que es el punto x=14 y, esa pendiente de esa recta tangente es precisamente la derivada; entonces, él plantea la fórmula de la derivada a partir de la fórmula de la pendiente, que son esos cambios que hay en y a razón de esos cambios que se presentan en x y ya, yo después diría que después ya de haber hecho ese recorrido de la enseñanza de la derivada como la plantea Newton, ya creo que no quedaría más que presentar sus usos, que quedaría más en línea con la teoría en relación con la que estoy haciendo la presentación"* (Jhordan, transcripción proyecto final de síntesis, 2020); a pesar de que se pudo constatar una correcta explicación por parte del participante mediante un ejemplo, en el que se vinculó el concepto de derivada desde lo geométrico con el software GeoGebra y desde lo numérico con las relaciones matemáticas que se presentaron en su exposición, no se hizo evidente el desarrollo del aspecto histórico en su propuesta.

En la entrevista final, Jhordan complementó todos los aportes realizados, hasta el momento, en sus intervenciones; particularmente, en lo referido a la fundamentación geométrica a partir de Newton y de Leibniz, Jhordan respondió, respectivamente: *"dada una gráfica, que representará, por así decirlo, el movimiento de un objeto y dos puntos sobre ella, Newton introducía el concepto de fluxión, para representar el que un punto de ellos fluyera hacia el otro, de modo que hay un momento, en el cual ese punto que fluyó hacia el otro está tan infinitamente cerca al otro que la recta secante que pasa por esos dos puntos es precisamente la recta tangente… Ya Leibniz, iba un poquito más apartado de Newton, hizo un desarrollo del concepto de derivada que va más hacia lo matemático, por así decirlo, pues él sí afirmaba desde una gráfica que dada sobre ella dos puntos, que los cambios que hay dentro de un punto y otro, es* *decir las abscisas y las ordenadas, eran tan infinitamente pequeñas, esas distancias, por así decirlo, que precisamente, esa recta secante que pasaba por esos dos puntos se convertía en la recta tangente, por esa distancia de esas rectas ser tan infinitamente pequeñas, que es así que él desarrolla su concepto de derivada desde allí, incluyendo así los infinitesimales, que son esas distancias pequeñas"* (Jhordan, fragmento entrevista final, 2020). En estas respuestas, se pudo determinar que el participante aplicó y utilizó las construcciones de Newton y de Leibniz para explicar el concepto de derivada desde las diferentes particularidades abordadas por cada uno de los matemáticos, demostrando creatividad y claridad en sus representaciones y ejemplos.

Del mismo modo, complementó lo aportado anteriormente en la fase de investigación guiada, en cuanto a las diferencias entre las dos construcciones, por medio de las respuestas a dos de las preguntas contenidas en la entrevista final: *"Newton se movía más por el campo de la física, que fue donde se destacó y ya Leibniz sí tenía un procedimiento más matemático desde la geometría analítica, por así decirlo; además, Newton utilizaba las fluxiones de que un punto fluía hacia otro, mientras que ya Leibniz veía esos diferenciales, entonces me parece que esas formas de pensar hacen que su concepto de derivada no sea el mismo. Además, otra diferencia importante es la notación que utilizaba cada uno… Yo creo que la que sería más notoria es el hecho de que Inglaterra no quisieron adoptar la notación de Leibniz, puesto que Newton era proveniente de allá y además caían en discusiones por lo que se pretendía o se decía que Leibniz había tomado los trabajos de Newton y los había copiado, entonces eso implicó que no utilizara la notación que proponía Leibniz, por lo tal había algunos atrasos que llevaba la notación, por así decirlo, dificultosa que tomaba Newton desde la física"* (Jhordan, fragmento entrevista final, 2020).

A partir de los aportes proporcionados por Jhordan durante el proyecto final de síntesis, se pudo evidenciar que el participante explicó y definió apropiadamente el concepto de derivada, considerando las construcciones de Newton y de Leibniz, especificando las diferencias y las consecuencias propias de las mismas, lo cual fue necesario para la comprensión del concepto desde su contexto histórico, a partir de los descriptores concernientes a las dimensiones de contenido y de métodos. Esta apropiación conceptual le permitió a Jhordan establecer asociaciones y destacar la importancia de la historia del concepto en su proceso de fundamentación, lo cual expuso claramente, llevándolo a alcanzar unos descriptores particulares de comprensión de acuerdo con las dimensiones de propósitos y de formas de comunicación.

Caracterización final de la comprensión de Jhordan

Para cada una de las dimensiones de comprensión, se estableció una tabla de descriptores construida a la luz de los desempeños de comprensión referidos en el marco de la EpC; estos desempeños alcanzados por cada uno de los participantes, a partir del desarrollo de las diferentes tareas de formación, se resaltaron en negrita y subrayado, lo que posibilitó determinar el nivel de comprensión alcanzado por cada uno de ellos.

Para el participante Jhordan, en relación con la dimensión de contenido, se pudo establecer que, inicialmente, en la fase de exploración, aunque el estudiante aportó una definición del concepto de derivada, no la vinculó con su contexto histórico y tampoco con las construcciones de Newton y de Leibniz. A medida que se avanzaba en las tareas de formación en la fase de investigación guiada, Jhordan logró explicar y aplicar el concepto de derivada desde los desarrollos geométricos y numéricos de Newton y de Leibniz, dejando ver las diferencias en ambas construcciones. Esto, fue mucho más explícito en el proyecto final de síntesis, particularmente en las respuestas que dio a las preguntas de la entrevista final. Teniendo en cuenta los desempeños alcanzados por el maestro en formación, se pudo decir que, a partir de lo planteado por Boix y Gardner (1999), Jhordan demostró fluidez en su comprensión del concepto de derivada a partir de su contexto histórico, lo cual le permitió realizar ejemplificaciones claras, asociaciones e interpretaciones coherentes; en consecuencia, para la dimensión de contenido, el participante alcanzó los desempeños referidos en el nivel de comprensión de maestría, tal como se muestra en la Tabla 14:

Tabla 14

Descriptores alcanzados por Jhordan en la dimensión de contenido

Categoría / Nivel	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Newton	Desarrollo del concepto de derivada a partir de Leibniz	Concepto de derivada actual
Maestría	<u>Aplica el concepto de derivada mediante la fundamentación geométrica y numérica desarrollada por</u>	<u>Aplica el concepto de derivada mediante la fundamentación geométrica y numérica desarrollada por</u>	<u>Argumenta relaciones y diferencias entre las construcciones del concepto de derivada</u>

	Newton en construcciones con GeoGebra. Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones realizadas por Newton.	Leibniz en construcciones con GeoGebra. Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones realizadas por Leibniz.	abordadas por Newton y por Leibniz.

En la dimensión de métodos, Jhordan inició con dificultades notorias en el establecimiento de diferencias numéricas y geométricas, como en la determinación de consecuencias sociales, científicas y personales, propias de las construcciones de Newton y de Leibniz, alrededor del concepto de derivada. Sin embargo, en la fase de investigación guiada, el desarrollo de las tareas le posibilitó validar y explicar las construcciones relativas al concepto de derivada de ambos matemáticos, aunque solo logró vincular dichas explicaciones, de una manera clara, en el proyecto final que propuso para la enseñanza del concepto de derivada.

Lo anterior le permitió a Jhordan alcanzar el nivel de maestría en la dimensión de métodos, puesto que las reflexiones y argumentos que compartió en los encuentros sincrónicos se basaron en el análisis de diferentes métodos utilizados para llegar al mismo concepto, reconociendo sus particularidades, lo cual lo llevó a establecer la naturaleza del objeto de estudio, sus usos o consecuencias (Boix y Gardner, 1999). Este análisis se retoma en los descriptores de desempeños contenidos en la Tabla 15 para la dimensión de métodos:

Tabla 15

Descriptores alcanzados por Jhordan en la dimensión de métodos

Categoría / Nivel	Diferenciación geométrica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Diferenciación numérica del concepto de derivada desarrollado por Newton y por Leibniz	Implicaciones históricas del concepto de derivada
Maestría	Valida y explica las diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	Valida y explica las diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.	A través de las relaciones y consecuencias históricas establecidas sobre el concepto de derivada, explica su fundamentación actual.

Con el abordaje de la actividad de exploración, se pudo establecer que Jhordan, en la dimensión de propósitos, se le dificultó asociar el contexto histórico al proceso de construcción del concepto de derivada, lo cual no le permitió establecer la relevancia de este, alcanzando, para esta fase, los descriptores correspondientes al nivel de ingenuo. No obstante, a partir del acompañamiento y socialización de las tareas de formación y las actividades del proyecto final de síntesis, Jhordan analizó las consecuencias prácticas, lógicas y sociales del objeto de conocimiento, estableciendo cómo esto afectó la visión o concepción del mundo actual, lo cual se relacionó con los descriptores del nivel de aprendiz para esta dimensión (Boix y Gardner, 1999).

Por lo tanto, el participante logró establecer las relaciones propias del contexto histórico y la construcción y fundamentación de la derivada, destacando su importancia; sin embargo, no se fundamentó ni utilizó dichas relaciones para explicar la construcción y constitución actual, lo que lo sitúa en el nivel de aprendiz. Este análisis de comprensión de Jhordan, en la dimensión de propósitos, se presenta en la Tabla 16:

Tabla 16

Descriptores alcanzados por Jhordan en la dimensión de propósitos

Categoría / Nivel	Relación: derivada y contexto histórico
Aprendiz	Establece relaciones entre el contexto histórico y la construcción y fundamentación del concepto de derivada. Reconoce la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.

Respecto a la dimensión de formas de comunicación, en la fase de exploración, el estudiante respondió a los desempeños de comprensión referidos en el nivel de ingenuo, puesto que la definición que dio sobre la derivada no la asoció a conceptos propios de las construcciones realizadas por Newton y por Leibniz. En la fase de investigación guiada, Jhordan se apoyó en las tareas de formación desarrolladas y en los diferentes aportes compartidos en los encuentros sincrónicos, para establecer una definición del concepto de derivada basada en el uso de diferentes conceptos matemáticos retomados de las construcciones de Newton y de Leibniz.

A partir del proyecto final de síntesis y de la entrevista final, logró explicar, mediante ejemplos y de una manera creativa, el concepto de derivada, vinculando los desarrollos geométricos y numéricos de ambos matemáticos; lo anterior, puso en evidencia que el participante, para la dimensión de formas de comunicación, demostró un dominio flexible de lo que sabía, por lo que utilizó diferentes estrategias para darlo a conocer, como metáforas, ejemplificaciones o analogías, en las cuales usó factores contextuales para apoyar la comunicación en su explicación (Boix y Gardner, 1999), lo cual es propio de los desempeños de comprensión que se presentan en la Tabla 17 de descriptores, en el nivel de maestría.

Tabla 17

Descriptores alcanzados por Jhordan en la dimensión de formas de comunicación

Categoría / **Nivel**	**Uso adecuado de definiciones y lenguaje matemático**	**Discurso coherente**
Maestría	Utiliza de manera creativa los conceptos geométricos y numéricos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz para explicar el concepto de derivada.	Explica con diferentes ejemplos el concepto de derivada. Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se hace referencia a las conclusiones que sintetizan los aspectos más relevantes que emergieron del proceso de investigación, las cuales se establecen a partir de la respuesta a la pregunta de investigación y la consecución del objetivo general y los objetivos específicos; así mismo, se mencionan algunos aportes a la Educación Matemática y se precisan ciertas líneas de investigación que abre el presente estudio; finalmente, se sugieren algunas recomendaciones para los maestros que deseen aplicar las diferentes tareas de formación o utilizar la rúbrica de desempeños de comprensión.

Conclusiones con respecto a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que se planteó para el desarrollo del estudio fue la siguiente: *¿cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC*? Para abordar este interrogante, en primer lugar, se diseñaron y evaluaron diferentes tareas de formación, las cuales contaron con diversos formatos relacionados con el *performance* para la Educación Matemática, como la construcción de videos e historietas a partir de herramientas web, o el uso del programa GeoGebra en el que se reprodujeron las representaciones geométricas desarrolladas por Newton y por Leibniz sobre el concepto de derivada. Esta estrategia, llevada a cabo a partir de tecnologías digitales, permitió que el estudio pudiera realizarse de manera virtual y sincrónica con los participantes, además posibilitó su participación durante todo el proceso de formación.

En segundo lugar, se diseñó y evaluó una rúbrica, la cual propició el análisis y valoración de la comprensión alcanzada por los maestros en formación con respecto al concepto de derivada; esta rúbrica se construyó con base en las dimensiones de comprensión (contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación) referidas en el marco teórico de la EpC y consideró las características necesarias para comprender el concepto de derivada a partir de los contextos de Newton y de Leibniz; esto último se hizo explícito en los descriptores, diferenciados según los niveles de comprensión del marco (ingenuo, novato, aprendiz y maestría); del mismo modo, estos descriptores se fueron refinando y ajustando a medida que se desarrollaba el estudio.

Las diferentes tareas de formación que se desarrollaron en el trabajo de campo con los maestros en formación permitieron analizar su comprensión a la luz de los descriptores de cada una de las dimensiones de comprensión, lo que, a su vez, posibilitó establecer el nivel o niveles alcanzados por los participantes en las tres fases referidas en el marco de la EpC. A partir de las observaciones realizadas mediante los encuentros sincrónicos y el estudio de los diferentes aportes de los maestros en formación en la realización de las tareas, se identificaron en tres de los participantes el progreso en tres niveles de comprensión diferentes (novato, aprendiz y maestría), los cuales se retomaron para la realización del análisis.

En la fase de exploración, los participantes Karen, Mateo y Jhordan, a partir de la solución del cuestionario de indagación, exhibieron dificultades a la hora de definir el concepto de derivada, puesto que lo presentaron de forma memorística sin establecer relaciones con las construcciones elaboradas por Newton o por Leibniz relacionadas con el concepto; además, no se observó una vinculación del concepto con su contexto histórico, por lo que, para esta primera fase de exploración, los participantes respondieron a los descriptores de comprensión de las dimensiones de contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, referidos, en su mayoría, en el nivel de ingenuo.

En la fase de investigación guiada, se pudo notar un avance en los niveles de comprensión de los participantes, puesto que en cada uno de los casos se lograron descriptores de comprensión referidos a los niveles de novato o aprendiz y, para uno de los participantes, los establecidos en el nivel de maestría para las dimensiones de contenido y métodos, particularmente. Por medio de la realización de las tareas de formación, se abarcaron los aspectos más significativos del concepto de derivada con respecto a su origen, construcción, representación geométrica y fundamentación numérica; además, se abordaron las consecuencias sociales, personales y científicas, que permitieron reconocer la importancia del contexto histórico del concepto.

Los participantes lograron, total o parcialmente, identificar y relacionar las construcciones geométricas y numéricas trabajadas por Newton y por Leibniz, estableciendo sus diferencias y planteando una definición del concepto de derivada, al vincular conceptos como la pendiente o los abordados en ambas construcciones y al destacar, en esta definición, la relación de la derivada con su contexto histórico y todas las consecuencias que trajo consigo. Lo anterior fue posible gracias a la visualización de los tres videos con el análisis de los cuestionamientos respectivos, la reflexión que se realizó en torno a la historieta, la construcción del paralelo conjunto y la actividad práctica con GeoGebra.

La fase de proyecto final de síntesis permitió dar a conocer las comprensiones alcanzadas por los participantes en lo que se refería al concepto de derivada en el marco del contexto de Newton y de Leibniz; mediante la socialización de sus propuestas de enseñanza, lograron poner en evidencia la consecución de desempeños superiores a los que tenían al inicio del trabajo de campo, consiguiendo alcanzar niveles de comprensión que van desde novato hasta maestría. Es importante destacar que la entrevista final contribuyó, de manera relevante, en la conclusión del proceso de análisis de dichas comprensiones, puesto que las preguntas de indagación que dirigieron estos encuentros recogieron las categorías de comprensión referidas en cada una de las dimensiones, reflejando, a través de las respuestas, el nivel o niveles de comprensión obtenidos por cada uno de los participantes.

Particularmente, los descriptores alcanzados por Karen, por medio del desarrollo de las diferentes tareas de formación en cada una de las dimensiones de comprensión, se vincularon al nivel de novato; se aclara que esta estudiante no tuvo un avance significativo en la comprensión, pues pasó del nivel de ingenuo al nivel de novato; algunos de los desempeños alcanzados se mencionan a continuación:

- Relaciona parcialmente la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton.
- Relaciona parcialmente la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz.
- Repite diferentes fundamentos sobre el concepto de derivada planteados por Newton y abordados en los encuentros sincrónicos.
- Repite diferentes fundamentos sobre el concepto de derivada planteados por Leibniz y abordados en los encuentros sincrónicos.
- Define memorísticamente el concepto de derivada o lo hace de manera errada.
- Establece algunas consecuencias sociales, científicas y personales que rodearon la construcción del concepto de derivada.
- Reconoce eventualmente la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.

- Relaciona parcialmente el concepto de derivada con otros conceptos matemáticos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz.
- Expone el concepto de derivada desde las construcciones de Newton y de Leibniz, pero lo hace de manera confusa.

Del mismo modo, Mateo, en las dimensiones de contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, referidas en el marco de la EpC, logró desarrollar desempeños que correspondían al nivel de aprendiz, gracias a su participación en el trabajo de campo; dentro de estos desempeños, se destacaron los siguientes:

- Relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Newton.
- Relaciona la construcción geométrica de la derivada con la formulación numérica realizada por Leibniz.
- Establece diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.
- Establece diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.
- Establece las consecuencias sociales, científicas y personales presentes en la construcción del concepto de derivada
- Reconoce la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada
- Explica el concepto de derivada con el uso de lenguaje matemático.
- Expone el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.

Finalmente, como producto del desarrollo de las tareas de formación, Jhordan logró alcanzar los descriptores de comprensión para las dimensiones de contenido, métodos y formas de comunicación referidos en el nivel de maestría; por otra parte, para la dimensión de propósitos, el participante se ubicó en el nivel de aprendiz, esto con base en las características que se describen en los desempeños de comprensión para este nivel; por lo tanto, se puede afirmar que Jhordan:

- Aplica el concepto de derivada mediante la fundamentación geométrica y numérica desarrollada por Newton en construcciones con GeoGebra
- Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones realizadas por Newton.
- Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones realizadas por Leibniz.
- Argumenta relaciones y diferencias entre las construcciones del concepto de derivada abordadas por Newton y por Leibniz.
- Valida y explica las diferencias entre los desarrollos geométricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.
- Valida y explica las diferencias entre los desarrollos numéricos de Newton y de Leibniz con respecto al concepto de derivada.
- Establece relaciones entre el contexto histórico y la construcción y fundamentación del concepto de derivada
- Reconoce la importancia del aspecto histórico en la fundamentación actual del concepto de derivada.
- Utiliza de manera creativa los conceptos geométricos y numéricos presentes en las construcciones de Newton y de Leibniz para explicar el concepto de derivada.
- Explica con diferentes ejemplos el concepto de derivada.
- Explica el concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz.

A partir del análisis de la comprensión de los estudiantes, se logró realizar una caracterización de dicho proceso, que permitió establecer los desempeños alcanzados en las diferentes fases por cada uno de los maestros en formación, con relación al concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz bajo el marco de la EpC. En este proceso investigativo se identificaron diversas características en los aportes y en los productos de los participantes, lo que brindó la información necesaria para establecer su comprensión final, tal como se expuso anteriormente en los descriptores logrados por cada uno de ellos, permitiendo así dar respuesta a la pregunta de investigación y resolver el problema planteado al inicio del estudio.

Conclusiones con respecto a los objetivos

Para verificar el alcance del estudio de maestría, se retomarán el objetivo general y los específicos para establecer en qué medida se dio cumplimiento a cada uno de ellos.

Respecto al objetivo general

Se propuso en el estudio el siguiente objetivo general: *analizar cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC*. Para dar consecución a este, fue necesario abordar con profundidad el marco teórico de la Enseñanza para lo Comprensión, estableciendo los aspectos más importantes que allí se consideran y, dentro de los cuales, se encuentran las fases de comprensión que permitieron estructurar la propuesta de investigación. Teniendo en cuenta las fases de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis, se estructuraron unas actividades a la luz de los desempeños de comprensión referidos en la EpC; en cuanto a la fase de exploración, se buscó indagar por los conocimientos previos de los maestros en formación en torno al concepto de derivada a partir de su contexto histórico, por lo que se diseñó un cuestionario inicial de indagación, en el que se preguntó sobre algunos aspectos como definición del concepto, interpretación geométrica, ejercicios numéricos, proceso de construcción y fundamentación, e importancia del mismo.

La fase de investigación guiada contó con la ejecución de diferentes actividades que tuvieron como propósito considerar los conocimientos previos de los maestros para contribuir a la comprensión del concepto de derivada desde el contexto de Newton y de Leibniz. El desarrollo de las diferentes tareas de formación hizo énfasis en la importancia de la historia de la derivada para su comprensión; estas tareas estuvieron conformadas por un video sobre la historia de la derivada, dos videos de entrevistas a Newton y a Leibniz, el análisis de las construcciones geométricas y numéricas de ambos matemáticos a partir de una historieta, la construcción de un paralelo conjunto en el que se analizaron aspectos significativos del concepto de derivada y su contexto histórico y, finalmente, una actividad con el software GeoGebra, en la que se abordaron las construcciones geométricas del concepto, a partir de las miradas de ambos matemáticos; cada una de las actividades en esta fase, se desarrolló de manera sincrónica con los maestros en formación, orientadas por diferentes preguntas y aportes. En la fase de proyecto final de síntesis, los participantes pudieron dar a conocer lo comprendido con respecto al concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz, por medio de la construcción de una propuesta de enseñanza que fue socializada a los demás maestros en formación; además, la entrevista final individual permitió exhibir la comprensión que cada uno de los participantes alcanzó del concepto en mención.

Con el propósito de realizar el proceso de análisis del material de los participantes, observaciones y aportes que surgieron en la ejecución de las diferentes tareas de formación, se construyó una rúbrica de descriptores de desempeño, en la que se retomaron cada una de las dimensiones[4] de comprensión referidas en la EpC, con la finalidad de apoyar el análisis de la comprensión alcanzada por los maestros en formación, en cuanto al concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz. Para realizar este proceso de análisis, fue necesario transcribir cada uno de los aportes de los participantes, los cuales emergieron del desarrollo de las tareas de formación; también se retomó el material realizado por cada uno de ellos, como los cuestionarios de indagación y los instrumentos diseñados para el proyecto final de síntesis, lo anterior, sumado al registro de las observaciones que realicé como investigadora durante el estudio; toda la información recolectada fue contrastada a la luz de los desempeños de comprensión construidos con base a las dimensiones y que estaban contenidos en la rúbrica. Todo lo anterior, posibilitó la realización de una evaluación continua del proceso de comprensión de los participantes durante el abordaje de las diferentes tareas de formación diseñadas y evaluadas dentro del estudio en cuestión.

Finalmente, considerando el desarrollo de las tareas de formación por parte de los participantes respecto al concepto de derivada a partir de su contexto histórico, se pudo realizar un análisis detallado de sus aportes y elaboraciones, en el marco de los descriptores de desempeño referidos en la rúbrica para cada una de las dimensiones de comprensión; por lo tanto, se pudo establecer el nivel de comprensión general de novato, aprendiz y maestría alcanzado por los participantes Karen, Mateo y Jhordan, respectivamente, al finalizar el trabajo de investigación; así mismo, se constató un progreso en los procesos de comprensión, puesto que todos los maestros en formación avanzaron, mínimamente, al nivel siguiente; en consecuencia, se puede concluir que se dio consecución al objetivo general planteado inicialmente en el estudio.

[4] Contenido, Métodos, Propósitos y Formas de comunicación.

Respecto a los objetivos específicos.

Para dar consecución al objetivo general, se consideró necesario el desarrollo de los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el contexto sociocultural de Newton y de Leibniz presente en el concepto de derivada.
- Evaluar tareas de formación en torno al concepto de derivada, diseñadas para los maestros en formación a partir de las dinámicas socioculturales de Newton y de Leibniz, en el marco de la EpC.
- Describir la comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC

Las diferentes tareas de formación trabajadas en las tres fases planteadas en la EpC, se diseñaron con base en el contexto histórico y en las construcciones geométricas y numéricas que rodearon el concepto de derivada a partir de lo desarrollado por Newton y por Leibniz, convirtiéndose en el medio que posibilitó la comprensión del concepto a los maestros en formación; por lo tanto, fue necesario analizar dicho contexto sociocultural para poder así construir y evaluar las diferentes tareas, las cuales, a su vez, posibilitaron describir el proceso de comprensión de los maestros en formación teniendo en cuenta los desempeños comprendidos en el marco teórico de la EpC; precisamente, en el capítulo 5, se puede visualizar el análisis y descripción del proceso de comprensión de los tres maestros en formación representantes de los niveles novato, aprendiz y maestría.

Los participantes, a partir del abordaje de las actividades en las diferentes fases, lograron, total o parcialmente, explicar y definir el concepto de derivada a partir de las construcciones geométricas y numéricas de Newton y de Leibniz, estableciendo las diferencias entre ambos constructos y destacando la relación e importancia del contexto histórico para dicha fundamentación; así mismo, se resaltaron las consecuencias sociales, científicas y personales que se generaron de dicho proceso; por consiguiente, se logró dar respuesta a la pregunta de investigación y dar consecución al objetivo general y, como resultado, esto permitió cumplir los objetivos específicos referidos en el estudio.

Conclusiones con relación a los aportes a la Educación Matemática

El presente trabajo de investigación buscó contribuir a la enseñanza del concepto de derivada a partir del contexto de Newton y de Leibniz; por lo tanto, la implementación de la historia para la comprensión del concepto se constituye en un referente metodológico no solamente para la enseñanza de las matemáticas sino también en lo referido al concepto de derivada. Particularmente, los maestros en formación, a través de la puesta en marcha del presente estudio, lograron superar concepciones equivocadas que tenían del saber matemático; de hecho, pasaron de ciertas ideas ligadas con la parte algorítmica de los conceptos a una visión más amplia de este conocimiento matemático, en el que se consideran las dinámicas sociales como aspectos que influyen y determinan la estructuración de las ciencias. De esta manera, con el desarrollo de las tareas de formación se buscó consolidar un conocimiento más integral del concepto de derivada en los maestros en formación, que les permitiera reflexionar sobre su práctica de aula y les facilitara la incorporación de estrategias de enseñanza vinculadas a la historia, para que, con esto, pudieran apoyar procesos de aprendizaje y brindar mayor significado al conocimiento llevado a sus estudiantes.

El marco teórico de la EpC iluminó la construcción de las tareas de formación, puesto que se estructuraron a partir de unas metas de comprensión formuladas con base al objeto de estudio y que dirigieron el trabajo con los maestros en formación durante las fases de investigación; así mismo, las dimensiones de comprensión permitieron lograr una delimitación de categorías necesarias para la comprensión del concepto de derivada desde su contexto histórico; además, las características generales que describen los niveles de comprensión, se convirtieron en una guía y aliciente que motivó a los participantes hacia el logro de niveles de comprensión superiores, por medio de un trabajo activo durante la realización de las tareas de formación. El marco teórico de la EpC es un referente que permite abordar y desarrollar diferentes estrategias didácticas y diversos objetos de estudio; incluso, posibilita vincular otras herramientas o medios metodológicos para contribuir a la comprensión de los estudiantes.

Las herramientas audiovisuales usadas en el estudio propiciaron una dinamización del trabajo de campo con los participantes y se consolidaron en un medio que contribuyó a la comprensión del concepto de derivada. Del mismo modo, proporcionó una interacción continua entre los participantes y la investigadora, que permitió el desarrollo de diferentes procesos de formación y el establecimiento de características necesarias para realizar el análisis de comprensión de los participantes por medio de la observación, discusión y el diálogo continuo, facilitado por dichas herramientas. En este sentido, el empleo de tecnologías digitales se convirtió en un puente entre el objeto de estudio y la comprensión de los maestros en formación que participaron de las diferentes fases de investigación, ya que los vinculó directamente con el desarrollo de su comprensión, mediante herramientas propias del *performance* en Educación Matemática.

Por otra parte, la rúbrica construida a partir de las dimensiones de comprensión referidas en el marco teórico de la EpC, puede ser un mecanismo de apoyo para los maestros en la elaboración de procesos de evaluación de los niveles de comprensión alcanzados por los participantes, no solamente para la enseñanza del concepto de derivada, sino que, a partir de las adecuaciones necesarias, puede ser un referente para la construcción de otras rúbricas que se deseen implementar en el análisis de procesos de comprensión de otros conceptos matemáticos que sean abordados a partir de su contexto histórico. De igual manera, tanto las tareas de formación como la rúbrica de comprensión, ambas diseñadas, refinadas y evaluadas durante la investigación, se convierten en herramientas fundamentales para apoyar los procesos de enseñanza para la comprensión en el aula, para ser implementadas de manera presencial o virtual, de acuerdo con las particularidades del contexto.

Por lo tanto, el estudio diseñó e implementó dos herramientas metodológicas centrales, las tareas de formación y la rúbrica de evaluación de la comprensión; ambas buscaron fortalecer el proceso de comprensión del concepto de derivada y contribuir a la consolidación de conocimiento matemático flexible en los estudiantes, que les posibilitara actuar en su contexto de manera acertada; además, otra de las intenciones de la investigación, fue generar mecanismos que permitieran la puesta en marcha de procesos de evaluación continua de los estudiantes, los cuales se podrían constituir en medios para propiciar y apoyar su comprensión.

Conclusiones con relación a las posibles líneas de investigación

El desarrollo de la presente investigación permite reconocer diferentes líneas que podrían ser consideradas y profundizadas en futuros estudios, como las siguientes:

- Construcción de propuestas que vinculen la historia como un medio para la enseñanza de las matemáticas, permitiendo así poner en evidencia el carácter sociohistórico de las ciencias.
- Uso de herramientas de *performance* para la enseñanza de las matemáticas, que permitan la vinculación de elementos artísticos, como la construcción audiovisual o la creación de caricaturas, con el proceso de enseñanza de las matemáticas, propendiendo por generar dinamismo del proceso de aprendizaje de los estudiantes y, de esta manera, contribuir a su comprensión.
- Elaboración de estrategias de enseñanza en las que las herramientas audiovisuales se conviertan en el eje fundamental para solventar diferentes problemáticas de presencialidad en los procesos de enseñanza, como los que se viven en la actualidad a causa del COVID-19, permitiendo así que no haya un desmejoramiento o retraso en la enseñanza y comprensión de las matemáticas, por situaciones sociales, económicas o de salubridad.

Recomendaciones

Considerando las diferentes dinámicas y observaciones que emergieron en la puesta en marcha del estudio en cuestión, se establecen diferentes aspectos que pueden ser tenidos en cuenta para mejorar la implementación de las tareas de formación y para el uso de la rúbrica como herramienta para evaluar la comprensión del concepto de derivada a partir del contexto de Newton y de Leibniz, bajo el marco de la EpC; por lo tanto, se recomienda:

- Aunque las tareas de formación estuvieron orientadas por preguntas problematizadoras durante su desarrollo, sería importante llevar un registro por medio de un instrumento como una bitácora o diario de campo, en el que los estudiantes puedan mencionar los aportes, conocimientos, preguntas y dificultades que hayan presentado durante la implementación de las diferentes tareas de formación, para que, desde allí, y junto a la interacción que se tenga en los encuentros presenciales o virtuales, se pueda realizar un análisis sobre las actividades realizadas y sobre su proceso de comprensión.

- Se hace necesario que se propicien continuamente espacios de diálogo y socialización que permitan aportar al proceso formativo de los participantes y que, al mismo tiempo, contribuyan en la realización del análisis de la información obtenida durante el trabajo de campo.
- Las tareas de formación se diseñaron específicamente para los maestros en formación; sin embargo, la mayoría de ellas se pueden implementar, con ciertos cambios, en el último grado de secundaria, puesto que el objeto de estudio hace parte de los conocimientos considerados en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas del MEN (2006); adicionalmente, en este nivel de escolaridad, los estudiantes suelen contar con procesos de razonamiento y análisis desarrollados, con los cuales se pueden abordar las diferentes actividades diseñadas para las tres fases de investigación referidas en el marco de la EpC.
- El abordaje de la historieta, en particular, precisa de unos conocimientos previos que se relacionan directamente con el cálculo diferencial; por lo tanto, esta tarea de formación podría ajustarse para ser abordada por los estudiantes de últimos grados de secundaria, pero enfocada en la polémica por la invención del cálculo que se generó entre Newton y Leibniz, puesto que las construcciones geométricas y numéricas sobre el concepto de derivada requieren de conocimientos más avanzados.
- Las tareas de formación se construyeron, inicialmente, para trabajar en la virtualidad mediante encuentros sincrónicos, debido a una situación de cuidado frente al contagio del COVID-19; sin embargo, estas pueden trabajarse de manera presencial sin ningún inconveniente, contando con los equipos audiovisuales y de cómputo necesarios para proyectar imágenes, videos y donde sea posible utilizar el software GeoGebra.
- La rúbrica diseñada con diferentes descriptores que corresponden a las dimensiones referidas en la EpC para realizar el análisis de la comprensión del concepto de derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz, fue generada con base al contexto y a los participantes que hicieron parte del estudio; por lo tanto, no debe concebirse como un instrumento rígido; por el contrario, puede ser una guía flexible que considere las categorías que se deseen analizar y tenga en cuenta el contexto, los estudiantes e, incluso, el objeto de estudio.

- Este trabajo de investigación consideró diferentes tareas de formación en las que se esperaba el progreso de los estudiantes en los niveles de comprensión, con base en los descriptores de la rúbrica de dimensiones por niveles; por lo tanto, si se desea realizar un adecuado proceso de enseñanza y aprendizaje, es necesario que se propicien suficientes sesiones para su desarrollo, lo que implica contar con varios espacios para garantizar la ejecución de las tareas, en su totalidad.

Referencias

Álvarez, J., y Jurgenson, G. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* Paidós.

Acevedo, D. (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado.* (Tesis maestría no publicada). Universidad de Antioquia.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Area, M., Borras, J., y Sannicolás, B. (2014). La formación del maestro 2.0: El aprendizaje por tareas en entornos learning. *Revista interuniversitaria de formación de profesorado, 78*(21), 51-66.

Azcárate, P., Flores, P., Cardeñoso, J. (1998). La Formación de Profesores de Matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. https://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/Azca_Flore_Carde%F1oso.pdf

Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas en Colombia*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Barrera, M. (2014). ¿De qué manera se diferencia el marco de la Enseñanza para la Comprensión de un enfoque tradicional? *Ruta maestra, 9,* 26-32.

Baquero, P., y Ruiz, H. (2005). La enseñanza para la comprensión: una visión integradora de los fundamentos y estrategias de la enseñanza. *Revista Actualidades Pedagógicas, 46*, 75-83.

Bingham, T. (1973). Newton y el desarrollo del cálculo. *Boletín de matemáticas,7*(2), 113-130.

Blythe, T., Bondy, E., y Kendall, B. (2002). Evaluación Diagnóstica Continua. En T. Brytthe (Ed.), *Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente* (pp. 107-128). Paidós.

Blythe, T., y Outerbridge, D. (2002). Metas de Comprensión. En T. Brytthe (Ed.), *Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente* (pp. 65-86). Paidós.

Blythe, T., y Perkins, D. (2002). Comprender la Comprensión. En T. Brytthe (Ed.), *Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente* (pp. 35-42). Paidós.

Boix, V., y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (1st ed., pp. 205-256). Paidós.

Bonilla, E., y Rodríguez, P. (2015). *Más allá de los dilemas de los métodos. La investigación en ciencias sociales*. Norma.

Borba, M., Da Silva, R., y Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologías digitáis en Educação Matemática* [Etapas de las tecnologías digitales en la Educación Matemática]. Autêntica.

Brush, S. (1991). Historia de la ciencia y la enseñanza de las ciencias. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 12*(11), 169-180.

Bubner, R. (1992). Acerca del fundamento de comprender. *ISEGORÍA, 5,* 5-16.

Chaves, E., y Salazar, E. (2003). La historia de la matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza aprendizaje: Una experiencia en secundaria. *Uniciencia, 20*, 259-266.

Child, J. (2005). *The early mathematical manuscripts of Leibniz* [Los primeros manuscritos matemáticos de Leibniz]. Dover Publications, Inc.

Cifuentes, J.E. (2015). Enseñanza para la Comprensión: opción para mejorar la educación. *Revista Educación y Desarrollo Social, 9*(1), 70-81.

Creswell, J. (2013). Investigación Cualitativa y Diseño Investigativo: *Selección entre cinco Tradiciones*, 9, 1-253. http://academia.utp.edu.co/seminario-investigacion-II/files/2017/08/INVESTIGACION-CUALITATIVACreswell.pdf

De Guzmán. (2001). Tendencias actuales en educación Matemática. *SIGMA*, 19, 5-25.

Dejiz, M., y Mihajlović, A. (2014). History of Mathematics and Teaching Mathematics [Historia de las matemáticas y enseñanza de las metemáticas]. *Teaching Innovations, 27*, 15–30.

Desfitri, R. (2016). In-Service Teachers' Understanding on the Concept of Limits and Derivatives and the Way They Deliver the Concepts to Their High School Students. [Comprensión de los maestros en servicio de los conceptos de límite y derivada y la forma en que enseñan estos conceptos a los estudiantes de secundaria]. *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 693, No. 1, p. 012016). IOP Publishing. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/693/1/012016/pdf

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes de bachillerato en su curso de cálculo diferencial. *Investigaciones en matemáticas educativas II*, 257-272.

Domínguez, A., Barniol, P., y Zavala, G. (2019). Evaluación del Entendimiento Gráfico de Derivada e Integral Definida mediante un Examen en Castellano de opción Múltiple. *Formación Universitaria, 12*(6), 41-56.

Durán, A. (2006). *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos.* Crítica.

Durán, A. (2012). *La ley de la gravedad. NEWTON la fuerza más atractiva del universe.* National Geographic.

Escobedo, H., Jaramillo, R., y Bermúdez, A. (2004). Enseñanza para la comprensión. *Educere, 8*(27), 529-534.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics [Formación de maestros a través de la história de las matemáticas]. *Educ Stud Matemáticas, 66*, 131 - 143. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9070-0

Galeano, M. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa.* Universidad de EAFIT.

Gallardo, J., y González, J. (2007). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Revista Didáctica de las Matemáticas, 66,* 23-30.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación matemática, 20*, 13-31.

González, O. (2004). Cálculo infinitesimal leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro. *Signos filosóficos, 6*(11), 97-120.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia.

Jankvist, U., Mosvold, R., Fauskanger, J., y Jakobsen, A. (2015). Analysing the use of history of mathematics through MKT [Analizando el uso de la historia de las matemáticas mediante MKT]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(4), 495–507. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.990528

Kilpatrick, J., Gómez, P., y Rico, L. (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia*. Universidad de los Andes.

Leguizamón, M., y Patorelli, S. (2011). La enseñanza para la comprensión en el nivel inicial: una experiencia que deviene y llega a la web. *Revista de Educación Matemática, 28*(2), 59-70.

Liu, P. (2003). ¿Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? [¿Los profesores necesitan la incorporación de la historia de las matemáticas en su enseñanza?]. *Mathematics Teacher, 96*(6), 416-421. https://www.researchgate.net/publication/281223989_Do_teachers_need_to_incorporate_the_history_of_mathematics_in_their_teaching

Liu, P., y Niess, M. (2009). An Exploratory Study of College Students' Views of Mathematical Thinking in a Historical Approach Calculus Course [Un estudio exploratorio de las opiniones de los estudiantes universitarios sobre el enfoque histórico en un curso de cálculo]. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 373-406. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_2

Lombardi, G., y Abrile, M. (2015). La formación docente como sistema: de la formación inicial al desarrollo profesional. En C. Veláz y D. Villant (Eds.), *Aprendizaje y Desarrollo profesional docente* (1st ed., pp. 59-66). Fundación Santillana.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión, 20*, 165-193.

Mateus, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y silencios: revista Latinoamericana de Educación, 2,*3-21.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión Matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Relime, 6*(3), 221-271.

Mendizábal, N. (2006). Los componentes del diseño flexible en la investigación cualitativa. En I. Vasilachis (Ed). *Estrategias de investigación cualitativa*, (pp. 23-64). Gedisa Editorial.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Delfín Ltda.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!,* EDUTEKA.

Mora, L., Guacaneme, E., y Jiménez, W. (2016). Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 47, 192-206.

Moreno, L. (2014). An essential tension in mathematics education [una tensión imprescindible en la educación matemática]. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 621-633.

Muñoz, M., y Román, N. (1999). *Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal.* Ediciones UPC.

Muñoz, j. (2013). *El cálculoinfinitesimal. LEIBNIZ la física aprende un nuevo idioma.* National Geographic.

Neiman, G. y Quaranta, G. Los estudios de caso en la investigación sociológica. En I. Vasilachis (Ed). *Estrategias de investigación cualitativa*, (pp. 23-64). Gedisa Editorial.

Newton, I. (2003): *Analysi per quantituatum series, fluxiones, ac differentias* [Análisis cuantitativo de serie, fluxiones y diferencias]. Crítica.

Newton, I. (2011). *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Alianza editorial.

Orhun, N. (2013). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Using Derivate Function to solve Connected Problems [Evaluación de la comprensión conceptual en matemáticas: uso de funciones derivadas para resolver problemas conectados]. *Turkins Online Journal of Distance Education-TOJDE, 14*(3), 138-151.

Panasuk, R., y Horton, L. (2013). Integrating History of Mathematics into the Classroom: ¿Was Aristotle Wrong? [Integración de la historia de las matemáticas en el aula de clase ¿Aristóteles estaba equivocado?]. *Journal of Curriculum and Teaching, 2*(2), 37-46.

Parra, K. (2014). El docente y el uso de la mediación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Revista de investigación, (83)*38, 155-180.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-94). Paidós.

Perkins, D. (2002). El contenido: hacia una pedagogía de la comprensión. *Barcelona: Gedisa.* https://blogfcbc.files.wordpress.com/2012/03/11-perkins-elcontenido.pdf

Pivatto, W. (2014). A História da matemática e os conhecimentos prévios dos professores como subsídios para o planejamento de um curso sobre geometria esférica e hiperbólica Amazônia [La historia de las matemáticas y los conocimientos previos de los profesores como ayuda para la planificación de un curso sobre geometría esférica e hiperbólica]. *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 10* (20), 51-65.

Pogré, P. (2012). *Enseñanza para la comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.

Ponce, J. (2015). Breve historia del concepto de derivada. https://www.researchgate.net/publication/270684035_Breve_historia_del_concepto_de_derivada

Ponte, P. (1999). Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education*, 43-50.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, m., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., Florentini, D., Miskulin, R., Passos, C., La Rocque, P., Huan, R., y Chapman, O. (2009). Tools and Settings Mathematics Teachers´ Learning in and from Practice [Herrmientas y entornos que el professor de matemáticas aprende en y desde la práctica]. R. Even y D. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teacher of Mathematics* (11th ed., pp. 185-209). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_20

Ponte, J., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., y Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática [Formación de profesores de primer año en articulación con el contexto de práctica en la enseñanza de las matemáticas]. *Revista Latinoamericana de Investigación en educación Matemática*, *20*(1), 71-94.

Protti, O. (2003). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. *Uniciencia,* 20, 251-257.

Quiroz, A., Velásquez, A., García, B., y González, S. (2002). *Técnicas interactivas para la investigación social cualitativa*. Fundación Universitaria Luis Amigó.

Ramírez, E. (2009). Historia y epistemología de la función derivada. *Relaciones, Historia y Epistemología*, 157-162.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Ritchhart, R., Stone, M., Buchovecky E., y Hetland, L. (1999). ¿Cómo se ve en la práctica la Enseñanza para la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 169-212). Paidós.

Romero, A. (2013). Reflexiones acerca de la naturaleza de las ciencias como fundamentos de propuestas de enseñanza: El caso de la experimentación en clase de ciencias. En A. Romero, B. Henao y J. Barros (Eds.), *La Argumentación en la clase de ciencias. Aportes para una educación en ciencias en y para la civilidad* fundamentada *en reflexiones acerca de la naturaleza de las ciencias* (pp. 71-98). Universidad de Antioquia.

Sahín, Z., Erbas, A., y Yenmez, A. (2015). La comprensión racional del concepto de derivada a través de Modelización Matemática: Un estudio de caso. *Eurasia Journal of Mathematics, Sciece and Technology Education, 11*(1), 177-188.

Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Actualidades investigativas en educación, 2*(5), 1-18.

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Shulman, L. (2015). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación de profesorado, 9*(2), 1-30.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. Crítica.

Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp.21-31). Paidós.

Stone, M. (1999a). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 95-126). Paidós.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C., Isoda, M., Lit, C., Niss, M., Pitombeira, J., Rodríguez, M., y Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey [Integración de la historia de las matemáticas en el aula de clase: una encuenta anlítica]. En J. Fauvel y J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). Springer, Dordrecht.

Valles, M. (1999). *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional.* SINTESIS, S.A.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. *UNICIENCIA, 27*(1), 74-94.

Vasco, C. (2002, noviembre). *Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas* [conferencia]. Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Vasilachis, I. (2006). La investigación cualitativa. En I. Vasilachis (Ed). *Estrategias de investigación cualitativa*, (pp. 23-64). Gedisa Editorial.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, *8(29), 9*-19.

Yin, R. (1989). Investigación Sobre Estudio de Caso. Diseños y métodos. *Applied Social Research Methods Series, 5*(2), 1-35. https://panel.inkuba.com/sites/2/archivos/YIN%20ROBERT%20.pdf

Yin, R. (2003). *Case study reseach. Desing and Methods* [diseño y métodos de investigación de estudio de casos]. SAGE publications.

Anexos

Guion video: entrevista a Newton

Investigadora

Buenas tardes. Estamos aquí con el señor Isaac Newton, el cual ha investigado y abordado diferentes campos del conocimiento, como la filosofía natural, las matemáticas, la teología, entre otros. Pero dejemos que sea él quien nos relate los apartados más importantes de su vida y obra.

Newton

No acostumbro a hablar mucho sobre mi vida y mis investigaciones, pero haré una excepción con usted.

Investigadora

Se lo agradezco, iniciemos con su niñez, ¿podría contarnos un poco sobre su infancia?

Newton

Claro, mi infancia fue algo triste, nací en Grantham, Inglaterra, el 4 de enero de 1643; mi padre, del cual llevo el mismo nombre, murió tres meses antes. Mi madre, Hannah Ayscough, volvió a casarse tres años después con el clérigo Barnabás Smith.

Investigadora

Señor Newton, ¿qué recuerdos tiene de su padrastro?

Newton

La verdad muy pocos, puesto que después de casarse con mi madre, se fueron a vivir lejos y me dejaron al cuidado de mis abuelos. Como puede ver, la niñez fue una época difícil para mí, pues nací sin padre y tres años después fui abandonado por mi madre y su nuevo esposo.

Recuerdo que mi madre regresó a casa de los abuelos, viuda de nuevo, en 1653. Traía consigo los tres vástagos, hijos del reverendo Smith durante sus siete años de unión, más unos pocos cientos de libros que gustosamente heredé de mi padrastro; en su mayoría eran de teología, los cuales alimentaron mi afición por este campo, durante toda mi vida.

Investigadora

¿Cuándo inició su formación en ciencias?

Newton

Inicié en la escuela de Grantham a los 12 años, a unos kilómetros de mi casa, y vivía en la casa del farmaceuta. Unos años después, comencé mis estudios e investigaciones en Cambridge a principios del verano de 1661 y, a pesar del desacuerdo de mi madre, allí pasé treinta y cinco años de mi vida.

En ese tiempo desarrollé toda mi ciencia, aunque confieso que la mayor parte de los días los dediqué a otros estudios y menesteres como la teología, historia bíblica y, sobre todo, a la alquimia. En muchas ocasiones mi pasión por el estudio y trabajo sobre el conocimiento del mundo, me hacían olvidar de comer o dormir, pasaba siempre encerrado, solitario en mi cuarto.

Investigadora

Sir Newton, me gustaría que me contara cómo inició su afinidad y su amor por las matemáticas.

Newton

Esa es una larga historia, podría decir que inició con la lectura de los Elementos de Euclides, que confieso me parecieron triviales en un comienzo, pero después de una mirada más minuciosa y de abordar el teorema de Pitágoras, percibí su importancia. También realicé estudios sobre la geometría de Descartes; lo hice en tantas ocasiones hasta que logré dominarlas completamente, igualmente que las matemáticas producidas hasta el siglo XVII, heredadas del mundo griego a partir de las construcciones de Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo, Pappus y Diofanto.

En este periodo fue donde empecé a producir mis propios resultados originales; en un principio tan solo iba un paso más allá de lo que aprendía en los libros, aclaraba las dudas con nuevos ejemplos o resolvía los problemas alternativos que se me iban planteando. En este momento comencé las investigaciones sobre cálculo de tangentes y cuadraturas, que dieron lugar al cálculo infinitesimal, a partir de mi propio método para el cálculo de tangentes basado en los infinitesimales.

Posteriormente, en mayo de 1665, encontré un algoritmo para derivar funciones algebraicas que, esencialmente, correspondía con el ya descubierto por Fermat; poco después ya tenía los algoritmos para las derivadas y las investigaciones que me llevaron a deducir que el cálculo de tangentes y el de cuadraturas eran procesos inversos…

Investigadora

Un momento señor Newton, me gustaría que fuera un poco más específico al relatar el proceso de construcción y fundamentación del cálculo infinitesimal y de la derivada.

Newton

Con gusto. ***.*** *A principios del verano de 1665, me vi en la obligación de regresar a mi casa de Woolsthorpe, debido a la epidemia de peste que afectaba a buena parte de Inglaterra, Cambridge incluido. Allí, alejado de los libros de estudio, reestructuré las bases del cálculo y, tratando de evitar las cantidades infinitesimales, lo encaucé hacia el concepto fundamental de fluxión, que no es más que la velocidad con que una variable fluye con el tiempo.*

Esto me llevó a interpretar las curvas generadas por el movimiento de un punto y a calcular la tangente a la curva por medio de la descomposición de sus componentes con respecto a los ejes coordenados, esto es, la tangente se obtiene como el cociente de las velocidades con que varían las coordenadas ***y*** *y* ***x*** *del punto* ***(x, y),*** *para lo cual es necesario aclarar que el* **punto *(x(t), y(t))*** *describe la curva conforme transcurre la variable* ***t*** *del tiempo.*

Sin embargo, este razonamiento no me permitió superar la presencia de lo infinitamente pequeño en mi cálculo, puesto que necesariamente aparecían cuando se definían esas velocidades, que son velocidades instantáneas, con que varían ***x*** *y* ***y****.*

En octubre de 1666, compuse un tratado más completo, pero inacabado, sobre mi método de fluxiones, el cual nunca fue publicado, aunque sí circularon unas pocas copias entre una parte de los matemáticos ingleses.

En este tratado hay algoritmos necesarios para el cálculo de derivadas, además se identifica claramente que el proceso inverso de derivación corresponde con el cálculo de áreas, lo que es, ni más ni menos, el teorema fundamental del cálculo. Todo esto, señorita, es prueba fehaciente de que soy el único y definitivo descubridor del cálculo infinitesimal.

Investigadora

¿Qué sucedió después de este descubrimiento, señor Newton?

Newton

*Después de esta gran construcción matemática, pasé muchos años tratando de ampliar lo ya descubierto y de revisar y redactar mis tratados para ser entregados a la imprenta. Recuerdo que desde el tratado de octubre de 1666 sobre las fluxiones, escribí "**De Analysi per aequatlones numero terminorum infinitas**", lo que en español se entiende como: **análisis de ecuaciones con un número infinito de términos**; sin embargo, esta obra la mantuve en secreto, solo para mis investigaciones. El primer trabajo que di a conocer a importantes personajes fue el "**Account**", ya que era un escrito de gran importancia personal.*

Investigadora

¿Por qué es tan especial ese escrito señor Newton?

Newton

*Esta obra es la prueba fehaciente de mi legítima autoría en la invención del cálculo infinitesimal, aunque la redacté en pocos días, basada en el tratado de fluxiones y en las investigaciones contenidas en **De Analysi**; esta obra me permitió divulgar restringidamente todos mis adelantos matemáticos; a saber, el problema abstracto de calcular una función conocida su derivada, establecer el carácter inverso del proceso con el del cálculo de la variación de la función y, finalmente, mostrar un procedimiento algorítmico para el cálculo de esa variación o para ser más claro para el cálculo de derivadas.*

Todas estas construcciones matemáticas constituyen el fundamento del cálculo infinitesimal.

Investigadora

Señor Newton, por favor, podría explicarme detalladamente ¿por qué está convencido que sus investigaciones y construcciones sobre el cálculo infinitesimal fueron copiadas? ¿Cómo pudo suceder algo así?

Newton

*Una vez que escuche mis argumentos, no le parecerá tan descabelladas mis afirmaciones. Cuando redacté **De Analysi**, lo compartí con Barrow, quien me propuso enviarlo de inmediato a Collins, quien, además de ser mi amigo, se dedicaba a la difusión científica. Aunque no estaba muy convencido de compartir mis investigaciones, pues sentía cierto pánico a publicar mi trabajo.*

Investigadora

¿Por qué sentía ese temor? ¿Acaso no era muy gratificante ser reconocido por su genialidad?

Newton

Señorita, exponer mis obras también significaba que fueran sometidas a reclamaciones sobre la paternidad de las mismas y, no solamente eso, sino que recibieran muchas críticas, tal como sucedió con el problema del movimiento planetario, donde descubrí que las fuerzas centrífugas generadas por los planetas variaban inversamente al cuadrado de sus distancias al Sol y que la aceleración producida por la fuerza centrífuga que hace mover a la Luna es similar a la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

En fin, alguien más había considerado planteamientos similares a los míos en torno al movimiento de los cuerpos celestes, este fue Robert Hooke, los cuales expuso en 1670 en una conferencia pronunciada en la Royal Society; sus ideas se pueden resumir así: todos los cuerpos celestes tienen una atracción o gravitación hacia su centro y atraen a todos los demás cuerpos celestes que estén bajo su radio de acción; los cuerpos se mueven en línea recta salvo que se vean afectados por una fuerza que les obligue a describir otras trayectorias curvas, tales como círculos, elipses o cualquier otra curva más complicada; y la atracción de las fuerzas atractivas disminuye a medida que la distancia aumenta, la cual es proporcional al cuadrado de la distancia.

Sin embargo, a todos estos descubrimientos de Hooke les hacía falta algo, y fue allí cuando Edmund Halley, en 1684, me buscó para que le diera una respuesta a la pregunta que surgió, naturalmente, del planteamiento de fuerzas centrales de Hooke: ¿qué tipo de órbita seguirá un planeta sobre el que actúe una fuerza atractiva central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia? A lo que respondí inmediatamente que, en efecto, era una elipse.

Desafortunadamente, en ese momento en el que estaba con Halley no encontré mis apuntes donde llegué años atrás a esa conclusión; no obstante, posteriormente los hallé y, después de revisarlos y analizarlos, le envié una copia de nueve páginas a Halley, donde se esbozaba una demostración de que la trayectoria que genera una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es una cónica que, ante velocidades por debajo de cierto límite, es, en efecto, una elipse.

*Esta consulta de Halley sobre la forma de las órbitas de los planetas generó un colosal enfrentamiento con Hooke, pues tuvo el descaro de acusarme de plagio. Aunque también permitió, con el apoyo moral y económico del señor Halley, redactar y publicar los "**Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**", trabajo que recogía todas mis investigaciones sobre las tres leyes de la física y donde se deducen los movimientos de los cuerpos celestes; así mismo, hago explícita la universalidad de la fuerza de gravedad. Fue la Royal Society quien decidió, con la ayuda de Halley, que **Los principia**, como se conoce la obra, fuese publicada sin tardanza en edición en cuarto de caracteres legibles.*

Con el señor Hooke tuve diferentes enfrentamientos por la atribución de diferentes construcciones, por lo que esta es la razón de preferir guardar las investigaciones para mi propio estudio y análisis, y no buscar que sean publicadas.

Investigadora

Señor Newton, comprendo su angustia, pero no nos desviemos de lo que veníamos hablando, me estaba contando por qué está convencido del plagio de sus construcciones matemáticas sobre el cálculo infinitesimal.

Newton

Si, retomemos y disculpe que me haya extendido en este tema, pero comprenderá que es algo complicado para mí.

Investigadora: *Claro que lo comprendo.*

Newton

*Bueno, como venía diciendo, le compartí mi manuscrito **De Analysi** a Collins, el cual se me fue devuelto a través de Barrow, no sin antes hacer una copia de su propia mano, la cual fue encontrada junto con cartas de Barrow en un paquete de documentos de Collins, en 1708. Esta copia se convirtió en una de las pruebas independientes que venían a demostrar mi prioridad en el descubrimiento del cálculo infinitesimal, presentada ante el comité propuesto por la Royal Society para dictaminar sobre la polémica con Leibniz.*

*Recuerdo que, en 1672, Collins, después de conocer el **De Analysi**, escribió a un buen número de matemáticos sobre mis descubrimientos, por esta razón en mi obra el **Account**, censuro la ligereza con la que Collins difundió con copias mis resultados, pues dicha información fue recibida sin duda, entre* *diferentes personajes, por Gottfried Wilhelm Leibniz, quien se valió de las mismas para construir sus desarrollos matemáticos, basados en mis investigaciones previas.*

Esta es la razón por la que no tengo ninguna duda de que el descubrimiento del cálculo se debe única y exclusivamente a mis investigaciones y trabajos matemáticos.

Investigadora

Para finalizar señor Newton, ¿cómo describiría su trabajo en el campo de las matemáticas y, por lo tanto, en el cálculo infinitesimal?

Newton

Déjeme decirle, señorita, que no es un trabajo fácil ni simplista, es un proceso arduo, esforzado y prolongado en el tiempo que supone concebir un germen de idea, depurarla, delimitar lo esencial de ella, de lo que es ganancia o, incluso, error, encajarla con otras ideas, hasta llegar a parir, trabajosamente, no sin dolor y a menudo ayudado por lo que otros han descubierto o investigado antes, lo que propiamente es ya un descubrimiento. Las matemáticas, para mí, fueron la primera gran pasión intelectual, de donde aprendí criterios de rigor; tienen un significado especial, la caja de herramientas de la verdad, con una belleza interior y un vigor independiente de todas las motivaciones externas y aplicaciones.

Todo este trabajo me hizo merecedor a la cátedra Lucasiana en Cambridge, además de reconocimientos científicos y sociales; fui nombrado en 1703 presidente de la Royal Society y, en 1705, en el Trinity College de Cambridge, la reina Ana me nombró Sir.

Investigadora

Lo felicito sinceramente, señor Newton, y quisiera agradecerle por la oportunidad de conocer, de sus propias palabras, su vida y trabajo matemático, particularmente las construcciones en torno al cálculo diferencial y a la derivada.

Newton

Fue un placer, espero que haya sido de gran utilidad para usted este espacio, como lo fueron mis descubrimientos para la humanidad.

Referencias

Durán, A. J. (Ed). (2006). *Isaac Newton y Gottfried Leibniz. La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal*. Crítica.

Guion video: entrevista a Leibniz

Investigadora

Buenas tardes. Estamos aquí con el señor Gottfried Wilhelm Leibniz, quien se ha destacado en numerosos campos del conocimiento, como la filosofía, las matemáticas, la lógica, la teología, entre otros. Pero dejemos que sea él quien nos relate los apartados más importantes de su vida y obra.

Leibniz

Claro que sí.

Investigadora

Comencemos por la época de su infancia, ¿qué tal si nos cuenta sobre su lugar de origen y su familia?

Leibniz

Por supuesto, nací el 1 de julio de 1646 en Leipzig, Alemania; mi padre era profesor de moral y jurista de la universidad de esta misma ciudad, tristemente murió cuando yo solo tenía seis años; disfruté mucho de la gran colección de libros que dejó tras su fallecimiento.

Investigadora

Señor Leibniz, ¿cómo fue su formación en ciencias?

Leibniz

En realidad, mi campo de conocimiento fue amplio, tuve la oportunidad de desempeñarme en diferentes ciencias, saberes y técnicas. En 1661, ingresé en la Universidad de Leipzig como estudiante de leyes, luego, en 1666, traté de doctorarme, pero no fui aceptado, puesto que aún era demasiado joven.

No desistí, y realicé mi doctorado en derecho en la Universidad de Altdorf en Nuremberg; ¡hasta me ofrecieron un puesto para trabajar como catedrático!, pero, la verdad, quería innovar en otra clase de universidades, por lo que participé en la creación de sociedades o academias científicas, como la de Berlín y la de San Petersburgo.

Después de viajar a Nuremberg, en 1667, fui a París con fines políticos, ya que era comisionado frente a la corte francesa de Luis XIV; sin embargo, mi estadía en Francia la aproveché para afianzar mis conocimientos científicos, en particular los matemáticos, lo que dio como resultado el descubrimiento del cálculo infinitesimal, sí, lo recuerdo, fue en los últimos meses que estuve en París.

Cuando regresé, lo hice como bibliotecario al servicio del elector de Hannover, el cual me exigía residir en la capital de la Baja Sajonia, muy lejos de París, lejos del centro cultural, científico y filosófico de Europa. Años después, pasé a ser más que bibliotecario en la casa de Hannover, me nombraron consejero privado y, en 1685, historiador de la familia.

Aunque, debo decir, las actividades que realizaba fueron mucho más amplias, ya que asesoraba en cuestiones educativas, ejercí de ingeniero, productor de lino y geólogo en las minas del Harz; allí diseñé molinos de viento para drenar las minas, no obstante, nunca llegaron a funcionar bien, por lo que me tocó pagar parte de la inversión que se había hecho en ellos; este dinero lo pretendía invertir en la creación de una academia. Pero, mi labor principal para los Hannover era la creación de su árbol genealógico, obra que se convertiría en mi aliada y en mi mayor tormento.

Investigadora

¿A qué se refiere con su mayor aliada y tormento señor Leibniz? ¿Podría ser un poco más preciso, por favor?

Leibniz

Me refiero a esta obra del árbol genealógico como mi aliada, porque gracias a su construcción, encontraba un sinnúmero de motivos para recorrer el mundo y aprovecharlo en mi formación: que si a Berlín para atender los asuntos de la Academia de Ciencias, que si a Viena para atender al emperador, que si a ver al zar Pedro el Grande de Rusia aprovechando que pasaba por allí; además, también lo aproveché para ocupar uno que otro cargo importante, en mis largas estadías.

Por otro lado, fue mi tormento porque me obligó a abandonar mis estudios en Francia y a volver a Londres a continuar la construcción genealógica de los Hannover, aunque, debo confesar, que se tornó más difícil de lo que imaginé y, por lo tanto, nunca pude culminarlo.

*Me encantaría contarle que, como producto de una de mis producciones filosóficas, se concluyó el principio de continuidad; para ser más claro, quiero compartirle mi reflexión: "**una sustancia simple que forma parte de los compuestos; simple, es decir, sin partes**". De esta idea, se puede deducir que una recta está compuesta por partes irreducibles de longitud infinitesimal; precisamente este principio fue muy fructífero, pues me permitió pasar de las sucesiones de números a las sucesiones de infinitésimos que conforman un continuo o, para decirlo de otra forma, esto es pasar de las diferencias al cálculo diferencial.*

Investigadora

¿Cómo fue todo el proceso de su invención del cálculo infinitesimal?

Leibniz

Realmente, mi inicio en las matemáticas fue tardío; empezó cuando llegué a París a los veintiséis años, apenas conocía, y mal, el primer libro de los Elementos de Euclides y sabía poco más que la aritmética aprendida en la escuela y lo poco que aprendí en la universidad del libro de la **Géométrie** *de Descartes. Le confieso que este último me pareció demasiado complicado.*

Bueno, este era mi deplorable conocimiento matemático cuando llegué a París en marzo de 1672; durante el primer año largo de mi estancia, fui bastante ignorante en lo que a las matemáticas respecta, esto lo preciso en mi obra **La Historia et origo**. *En ese tiempo, también tuve la fortuna de visitar Londres por primera vez, e inicié mis contactos con los matemáticos ingleses a través de Oldenburg y Collins.*

Recuerdo que, en el otoño de 1672, me contacté con Christian Huygens, quien era ni nada más ni nada menos que el científico y matemático más reconocido en Europa, perteneciente a la Académie Royale des Sciences de París. Para ese entonces, ya había hecho mi primer descubrimiento matemático: cómo usar las diferencias para sumar números, lo que me permitió establecer la relación inversa entre la diferenciación y la integración, la cual perfeccioné con la solicitud de Huygens, para, posteriormente, publicar mi primer tratado, lo cual era una prueba muy importante de mi avance en el campo de las matemáticas.

En enero de 1673, visité por primera vez Londres, allí, por medio del Henry Oldenburg, el secretario de la Royal Society, presenté mi máquina, en madera, que podía calcular, sumaba, restaba, multiplicaba y dividía; este invento me permitió el ingreso a la Royal Society.

Quisiera que supiera que Oldenburg fue muy importante para las construcciones científicas pues, gracias a él, se mantuvo un completo sistema de archivos con corresponsales científicos dentro y fuera de Inglaterra, entre tantas, se destacan mis comunicaciones con Newton.

Investigadora

¿Qué cartas intercambió con Newton y por qué?

Leibniz

Las cartas que compartíamos hacían referencia a los avances que cada uno había desarrollado en torno al cálculo diferencial. Aunque reconozco que el señor Newton era muy misterioso, solo hacía pequeñas alusiones a sus investigaciones, yo, por el contrario, lo hacía de manera abierta y precisa.

Investigadora

Señor Leibniz, retomemos lo que me estaba relatando sobre el proceso de invención del cálculo infinitesimal.

Leibniz

Claro, aunque antes permítame contarle unos eventos que considero importantes de mencionar, ¿está de acuerdo?

Investigadora

Por supuesto, encantada de escucharlo.

Leibniz

Infinitas gracias, bueno, como le iba contando, mi ingreso en la Royal Society también me produjo un incidente con John Pell, al cual conocí durante una visita a Robert Boyle. Allí le comenté a Pell que había descubierto un método general para representar e interpolar series usando diferencias; la verdad, se mostró sorprendido, pero no por mi descubrimiento, sino porque dichos resultados ya habían sido publicados en Francia e Inglaterra, descubiertos por Regnaud; sin embargo, no le creí, entonces *acudí de inmediato a la biblioteca de la Royal Society, para comprobar la veracidad de lo que Pell me había dicho, que por cierto resultó afirmativa.*

Fue terrible para mí este incidente, incluso, lo utilizaron en mi contra en la polémica de la invención del cálculo infinitesimal con Newton, al igual que las cartas que me enviaba Oldenburg, que contenían los resultados más representativos de los matemáticos británicos. Es importante aclarar que estas colecciones de resultados, al ser transcritos, contenían muchos errores matemáticos, lo que los hacía prácticamente incomprensibles; esta es la razón por la que no puede constituirse como una prueba del plagio que fui culpado.

En fin, esta correspondencia me motivó a dedicarle más tiempo y esfuerzo a las matemáticas, en particular, a completar mi formación. Años después, en una carta a Jacobo Bernoulli, le expresé que, gracias al triángulo de Pascal, pude ver con claridad que los problemas de tangentes y cuadraturas eran inversos; así mismo, me permitió hacer algunos descubrimientos importantes, como el método de transmutación, el desarrollo en series para el arco tangente a partir del cual obtuve mi célebre serie para el número π y, por supuesto, la cuadratura aritmética del círculo, que me llevó finalmente al estudió de tangentes.

Investigadora

¿Es en este momento donde se origina su invención del cálculo infinitesimal y en particular de la derivada?

Leibniz

Aún falta un poco para llegar allí. Como le venía ilustrando, nuevamente en 1674 me contacté con Oldenburg por medio de varias cartas, donde le informaba sobre mis progresos en matemáticas, aunque cuidándome de no darle ningún detalle ni fórmula. Oldenburg reinició la correspondencia, en la que me compartía los resultados matemáticos desarrollados hasta el momento por Newton y Gregory, los cuales le había proporcionado Collins.

Sinceramente, yo solo quería comprender aquellas construcciones matemáticas y compararlas con las mías para, finalmente, poder dar una opinión más formada.

Para responder a su pregunta, podría decir que el nacimiento del cálculo infinitesimal ocurrió en 1675, puesto que fue en este periodo donde introduje mi notación y el proceso algorítmico que marcaría las *diferencias con lo construido por otros matemáticos. Indagué sobre las reglas que lo rigen e identifiqué los procesos de integración y diferenciación como inversos; además, gracias a mis investigaciones sobre los inversos a las tangentes, tuve una idea clara de lo mucho que le faltaba a mi cálculo, pero sabía que sus defectos podían ser remediados y que el camino a un nuevo mundo había sido abierto.*

Investigadora

Podría, por favor, ser más específico, señor Leibniz.

Leibniz

*Faltaba un lenguaje formal, que diera cuenta de aquellas construcciones de una manera integral y no dispersa, como se había manejado hasta el momento. Por ello, me di a la tarea de edificar este lenguaje e introduje diferentes símbolos, como el caso de ∫ para denotar la suma de los infinitésimos, lo cual permitía determinar el área bajo una superficie dada, al igual que la letra **d** para denotar las diferencias, concluyendo finalmente que eran operaciones inversas y mientras que ∫ aumenta, **d** disminuye. Este lenguaje lo compartí con Newton y fue de gran utilidad para muchos matemáticos.*

Para esta construcción, consideré las curvas como poligonales de lados rectos de longitud infinitesimal, cuya prolongación generaba la tangente en cada punto a la curva, y de cuya geometría, descrita a través de las relaciones algebraicas explícitas en la fórmula que define la curva, se obtiene la correspondiente relación entre los diferenciales.

Pero todo este proceso fue opacado, cuando en 1676, por motivos económicos y de trabajo, me vi en la obligación de estar al servicio del duque Johann Friedrich; oferta que me obligaba a retornar a Hannover, aislado de los principales centros científicos, aunque me valí de toda clase de pretextos para no regresar directamente a Hannover, puesto que me quedé un tiempo en Londres y otro en Amsterdam.

*En Londres visité a Collins, donde me leyó el **De Analysi**, de Newton, entre otros tratados. ¿Quién iba a imaginarse que, veinticinco años después, cuando empezara la polémica por la prioridad en el descubrimiento del cálculo, lo que vi en esta visita a Collins, junto con las cartas mencionadas anteriormente que recibía de Oldenburg, sería utilizado en mi contra?*

Investigadora

¿Cuáles fueron los argumentos para su defensa, con los que se verifica su autoría del cálculo infinitesimal?

Leibniz

La prueba más importante para la historia de las ciencias, en general, y de las matemáticas, en particular, fue que en 1684 hice la primera publicación de un trabajo sobre cálculo infinitesimal, al igual que el primer artículo referido al cálculo diferencial, seguido por uno publicado con relación al cálculo integral. Me gustaría remitirme a nombrar mi obra con los setenta artículos publicados por mí, en las **Acta Eruditorum** *sobre el cálculo o usando el cálculo, donde no se incluyen los manuscritos no publicados.*

También describí el funcionamiento de los conceptos de diferencial e integral; el diferencial de una función lo tomé como una cantidad infinitesimal, mostrando el desarrollo correspondiente para el cálculo de diferenciales, reglas de derivación y los diferenciales de las funciones elementales; esto último de manera mucho más simbólica que Newton, lo que mostraba, de paso, mi inmenso esfuerzo intelectual involucrado en la creación del cálculo.

Investigadora

¿Podría, por favor, explicarme las diferencias que hay en sus construcciones con las hechas por el señor Newton?

Leibniz

La gran diferencia radica en que, para mí, los desarrollos de las series de potencias son diferentes a las del cálculo; mientras que Newton los considera como un todo.

Pero esta diferencia no fue apreciada por la Royal Society, a quien solicité justicia por la polémica de la invención del cálculo infinitesimal; aunque, vale la pena precisar, que la comisión que definiría esta disertación estaba conformada por seis miembros, amigos todos de Newton, entre los que se encontraban Halley y Jones; el primero era editor de la primera edición de **Los Principia**, *el segundo era editor del* **De Analysi**; *a dicha comisión se unieron, con posterioridad, cinco más, cuatro de ellos eran otros tantos partisanos sin escrúpulos y, para dar alguna apariencia de imparcialidad, el quinto miembro era el representante en Londres del reino de Prusia -Frederick Bonet-, que se unió a la comisión una semana antes de que esta dictaminara y, por tanto, no participó en la redacción del dictamen.*

Investigadora

¿Podría compartirme la decisión que se tomó?

Leibniz

Para mi pesar, y muy injustamente, la comisión concluyó que el método diferencial es uno y el mismo que el método de fluxiones, exceptuando el nombre y la forma de las notaciones, reconociendo al señor Newton como el primer inventor. Esta decisión fue publicada en 1713 por la Royal Society, con una distribución intencionada, pues solo obtuve los resultados meses después, aunque instituciones apropiadas de Alemania, Francia e Italia ya la conocían ampliamente.

Pero en pelea larga hay revancha; mis sucesores, los Bemoulli y después Euler, hicieron que mi cálculo diferencial triunfara conforme pasaba el siglo XVIII, de manera que a principios del XIX, incluso los ingleses tuvieron que aceptar el mayor desarrollo y potencia alcanzada en el continente…

…Precisamente en 1803 Robert Woodhouse promovió el uso de mi notación y no la de Newton, lo cual fue aceptado posteriormente por la Asociación Analítica de la Universidad de Cambridge, la razón es que mi lenguaje matemático para el cálculo, facilita el trabajo con las Derivadas parciales y operadores; además, permite identificar en la función cual es la variable independiente y cuál es la constante, lo cual no es muy complicado de establecer y trabajar con la notación de Newton.

Investigadora

Señor Leibniz, quedo muy agradecida, su narración fue muy precisa y amena; conocer de su propia voz las diferentes construcciones y obras científicas, en particular las matemáticas, fue todo un privilegio.

Leibniz

El placer es mío y espero poder escribirle en alguna ocasión, para seguir ampliando esta conversación en torno a mis invenciones matemáticas.

Referencias

Durán, A. J. (Ed). (2006). *Isaac Newton y Gottfried Leibniz. La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal*. Crítica.

Carta de aceptación CILAT 2021

CILAT 2021

CONGRESO LATINOAMERICANO DE CIENCIAS

Junio 23 al 25
Modalidad Virtual

Medellín, Colombia mayo 15 de 2021

Estimadas autoras
América María Cardona Arias
Zaida Margot Santa Ramírez

Cordial saludo

Nos complace informarles que su propuesta: *Comprensión del concepto de la derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión EpC: Un estudio de caso de profesores en formación*, fue aprobada en el Congreso CILAT 2021.

Para presentar su ponencia y que el trabajo sea publicado como capítulo en libro resultado de investigación, por lo menos uno de los autores se debe registrar y pagar la inscripción como *ponente*, de acuerdo con los valores en la página del Congreso.

Reiteramos el agradecimiento por confiar en nuestro evento para presentar su trabajo y esperamos contar con nuevos aportes en el futuro. Igualmente, les recordamos la responsabilidad que ustedes asumen luego de la publicación, en el sentido ético, de divulgación y de derechos de autor.

Cordial saludo,

Prof. Edgar Serna M.
Director CILAT

Certificado de participación CILAT 2021

CILAT 2021

CONGRESO LATINOAMERICANO DE CIENCIAS

Junio 23 - 25

Medellín – Antioquia

Medellín, junio 25 de 2021

A quien corresponda.

El Instituto Antioqueño de Investigación certifica que el investigador América María Cardona Arias, vinculado al Tecnológico de Antioquia – Colombia, participó en el Congreso Latinoamericano de Ciencias CILAT 2021, donde presentó la ponencia: *Comprensión del concepto de la derivada a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión EpC: Un estudio de caso de profesores en formación*.

Además, que su participación fue activa durante el Congreso y asistió a las conferencias y sesiones de ponencias programadas en la agenda con una duración de 24 horas.

Cordial saludo,

Prof. Edgar Serna M.
Director CILAT

Certificado de participación al 7° seminario de enseñanza y aprendizaje del cálculo

SEA

PROGRAMA DE ATENCIÓN, SEGUIMIENTO Y ACOMPAÑAMIENTO
A LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS

ASAE

Bucaramanga, 8 de octubre de 2021

Estimadas:
América María Cardona Arias, Zaida Margot Santa Ramírez

Tecnológico de Antioquia, Universidad de Antioquia

Asunto: Participación como ponente al 7° Seminario de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo

Cordial saludo, el grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT- UIS), se complace en informarle que la ponencia, "**La derivada y su comprensión a partir de las construcciones de Newton y de Leibniz en maestros en formación**" ha sido aceptada para ser presentada en la séptima versión del Seminario de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo, que se realizará mediante presencialidad remota (a través de la plataforma zoom), el 3, 4 y 5 de noviembre.

Dada que la modalidad del evento es presencialidad remota y que se requiere una excelente conectividad, la coordinación del evento ha decidido solicitar que todas las ponencias sean presentadas mediante un video, con el fin de poder controlar los tiempos y la calidad de la presentación. Por ello, solicitamos que envié un video de 15 minutos en formato mp4, en una plataforma que permita visualizar la presentación y a su vez ver la imagen del ponente a más tardar el 22 de octubre de 2021. Le reitero que es necesario que no le falte, pues se pretende prevenir cualquier eventualidad.

Agradecemos su participación en el 7° Seminario de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo, el cual enriquecerá los objetivos propuestos en el mismo, además que contribuirá al fortalecimiento de esta línea de investigación y en general de la educación matemática.

Próximamente le haremos llegar la agenda definitiva del evento, en el cual se determina las fechas, horarios y tiempos asignados a cada ponente, y el enlace para establecer la conexión al evento.

Agradecemos su participación y quedamos atentos a cualquier inquietud

Atentamente,

Sandra Evely Parada Rico

SANDRA EVELY PARADA RICO
Profesora Escuela de Matemáticas UIS
Coordinadora Seminario de Enseñanza y aprendizaje del Cálculo (Edumat-UIS)
Coordinadora SEA-ASAE UIS

Consentimiento informado de Karen

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación

Proyecto de Investigación: Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

INVESTIGADORA: América María Cardona Arias

OBJETIVO GENERAL: analizar cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

Apreciado(a) maestro(a) en formación:

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con el proyecto ***Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC*** de la Universidad de Antioquia; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado proyecto.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al proyecto.
- Garantizar que solo los investigadores tendrán acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este proyecto.

Nombre del o la participante: K[redacted]z

Cédula: 1.[redacted]6

Fecha: 9 de noviembre del 2020

Firma: K[redacted]z

Consentimiento informado de Mateo

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación

Proyecto de Investigación: Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

INVESTIGADORA: América María Cardona Arias

OBJETIVO GENERAL: analizar cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

Apreciado(a) maestro(a) en formación:

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con el proyecto ***Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC*** de la Universidad de Antioquia; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado proyecto.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

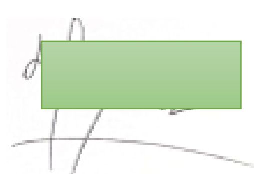
- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al proyecto.
- Garantizar que solo los investigadores tendrán acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este proyecto.

Nombre del o la participante: Mat[redacted]da

Cédula: 1.[redacted]

Fecha: 9 de noviembre del 2020

Firma: 

Consentimiento informado de Jhordan

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación

Proyecto de Investigación: Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

INVESTIGADORA: América María Cardona Arias

OBJETIVO GENERAL: analizar cómo comprenden los maestros en formación el concepto de derivada en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC.

Apreciado(a) maestro(a) en formación:

Le solicitamos el favor de firmar el siguiente consentimiento informado, en el que acepta, de manera voluntaria, ser observado(a), filmado(a), grabado(a) o fotografiado(a), cuando se realicen actividades relacionadas con el proyecto ***Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC*** de la Universidad de Antioquia; además, permita la revisión de todas sus producciones orales y escritas, con el fin de dar consecución al objetivo general del mencionado proyecto.

Es importante aclarar que, en todo momento del estudio, la investigadora se compromete a:

- Guardar y proteger la privacidad de los y las participantes.
- Proteger tanto la identidad de los y las participantes, como sus contribuciones al proyecto.
- Garantizar que solo los investigadores tendrán acceso a la información brindada por los y las participantes.

Su firma abajo indica que usted decidió participar en este proyecto.

Nombre del o la participante: Jh[redacted]io

Cédula: 1[redacted]

Fecha: 9 de noviembre del 2020

Firma: [redacted]

Distinción trabajo de grado

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

2020002-0541-2021

Medellín, 15 de octubre de 2021

Estudiante
AMÉRICA MARÍA CARDONA ARIAS
Maestría en Educación Metodología Virtual
Línea Educación Matemática

Asunto: Otorgamiento de distinción a trabajo de investigación

Atento saludo.

Me permito informar que, el Consejo de Facultad en su sesión del 15 de octubre de 2021 (Acta n° 2454) avaló el otorgamiento de distinción Magna Cum Laude a su trabajo de investigación: "*Comprensión del concepto de derivada de maestros en formación en el contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC*", recomendada por los jurados Rubén Darío Henao Ciro y Elgar Guadrón Pinto.

Esta distinción se debe a la nota definitiva obtenida (4,8) y a su participación en calidad de ponente en CILAT 2021: CONGRESO LATINOAMERICANO DE CIENCIAS, por lo cual, cumple con los requisitos estipulados en el Reglamento Específico para los programas de posgrados de la Facultad de Educación (Acuerdo de Consejo de Facultad 385 de 2017).

Cordialmente,

RUTH ELENA QUIROZ POSADA
Jefa
Departamento de Educación Avanzada
Facultad de Educación