UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

# Comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza mediante el doblado de papel

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en matemáticas y física**


**JULIO CÉSAR HERNÁNDEZ FONNEGRA**
**MELY TUBAL GARCÍA DURÁN**
**YURLEY DANYELA PÉREZ FLÓREZ**

**Asesora**

**ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**
**FACULTAD DE EDUCACIÓN**
**DEPARTAMENTO DE PEDAGOGÍA INFANTIL**
**LICENCIATURA DE PEDAGOGÍA INFANTIL**
**MEDELLÍN**
**2015**

# Tabla de contenido

# 1. Resumen

En principio se abordan algunos antecedentes de la enseñanza de la geometría, desde la semejanza, sobre el marco teórico de Pirie y Kieren, el doblado de papel entre otros. Dentro del paradigma cualitativo y el método del estudio de casos se analizan los procesos que realizan los estudiantes. Este presente trabajo investigativo se hace desde la línea del marco teórico de Pirie y Kieren en el ámbito del grado décimo, cuyo propósito es observar y facilitarle a los estudiantes procesos de comprensión en la geometría, especialmente sobre la congruencia como caso particular de la semejanza, tomando como medio didáctico el doblado de papel. Consta de cuatro actividades la primera es una actividad diagnostica sobre lo que comprenden los estudiantes acerca de la semejanza y la congruencia, la segunda es la construcción de un cubo con doblado de papel, la tercera y la cuarta son actividades que tienen que ver con la construcción de cubos, tratando siempre de mostrar un refinamiento del concepto de semejanza; después de la recolección de las entrevistas, las actividades etc, se hace un análisis a tres estudiantes Damián, Donatello y Dálmata, a quienes se les registra como fueron comprendiendo el concepto de semejanza y hasta qué punto lo hicieron. De esta manera se logra dar un gran aporte a la educación matemática primero un conjunto de actividades que apuntan a facilitar la comprensión del concepto de semejanza y la congruencia como caso particular de la semejanza bajo el modelo de Pirie y Kieren, y segundo una rica tabla de descriptores donde se visualiza el proceso de comprensión de los estudiantes.

PALABRAS CLAVES: Teoría de la evolución matemática, semejanza, congruencia, comprensión, doblado de papel, folding back.

# 2. Introducción

Este trabajo de investigación se pretende realizar en el ámbito del grado décimo, con el propósito de observar y facilitar procesos de comprensión en los estudiantes cuando se les proponen actividadesmediante el doblado de papel, específicamente en geometría. Por lo tanto, a través de las construcciones elaboradas se busca que los aprendices puedan, con la ayuda del maestro, comprender la congruencia como un caso particular de lasemejanza.

Nosotros, como maestros en formación, debemos establecer una relación didáctica entre el contenido geométricoque pretendemos enseñar, con aquello que los estudiantes son susceptibles de aprender significativamente en el transcurso de su proceso de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, se han encontrado algunas dificultades en dicho proceso; una de estasla menciona Chávez (2012), cuando afirma:

> La presentación de los temas de geometría se hace desde fundamentos teóricos difíciles de asimilar por parte de los estudiantes, sin antes generar un espacio de exploración de los conceptos y definiciones respectivas. La causa de esta situación en la enseñanza de la geometría parece mantener una estrecha relación con los inicios de la llamada matemática moderna de finales de 1960. (Chávez, 2012, p.3)

La relación que se puede establecer entre las dificultades en la enseñanza de la geometría y las matemáticas modernas, se explicaporque en esta época se dio inicio a una pérdida dela intuición espacial,es decir, el trabajo con imágenes, la orientación, la vista, el plano, el espacio, se empezó a demeritar, dando paso a una geometría formal, donde se privilegianlas demostraciones rigurosas con ejercicios de rutina. La situación anterior trajo como consecuencia,variadas dificultades en los estudiantes, debidoa la pérdida de la intuición espacial, que es la que brinda, precisamente, los elementos necesarios para introducirlosen un razonamiento formal, que les permita comprender y realizar demostraciones rigurosas en geometría.

Es importante considerar que los objetos de estudio geométricos abordados en estainvestigación, son propios del nivel de secundaria; además, se torna fundamental revisarcuáles son las dificultades más primariasque podrían presentarse en los estudiantesa la hora de comprender, en particular, los conceptos de semejanza y congruencia. Debido a que existen obstáculos de diferente índole, los cuales no permiten que los estudiantes logren un avance en su compresión, se proponeutilizar el doblado de papel como práctica tangible, para que ellos realicen una actividad desdelo concreto y lo puedan llevar a lo abstracto o mental.

Al respecto,Santa y Jaramillo (2010) afirman:

> El doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos.(p.3)

Por otro lado, en nuestra práctica como maestros en formación, nos hemos hecho varios interrogantes sobre los procesos educativos en geometría, como: ¿qué piensan los estudiantes del estudio de la geometría? ¿Qué estrategias  pueden implementarse para contribuir con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma? Por lo tanto, con estetrabajo de investigación se pretende estructurar una serie de actividades y sugerencias, a partir del doblado de papel, que podrían servir de apoyo al docente en el desarrollo de métodos de enseñanza que favorezcan su labor dentro del aula, específicamente conrespecto a los conceptos desemejanza y de congruencia, como caso particular de esta, de tal manera que se puedan abrir nuevos horizontes para propiciar procesos de comprensión de conceptos en esta área.

## 3. Justificación

La comprensión del concepto de semejanza y de congruencia como caso particular de esta, hace parte de un proceso que le permite al estudiante comprender otros conceptos de la geometría, como el teorema de Thales, razón de proporcionalidad, escala,entre otros, esto es, la apropiación de los conceptos objeto de estudio de la investigación, posibilita el entendimiento de aplicaciones (la creación de mapas, maquetas a escala, planos, fotocopias, Entre otras).Gualdrón (2011)expone, desde su experiencia como docente de matemáticas,sobre las serias dificultades que presentan los estudiantes con los temas que se relacionan directa o indirectamente con el concepto de semejanza; afirma que cualquier docente de educación media o primeros semestres de universidad, puede corroborar que el desconocimiento o la incomprensión de este concepto, puede dificultar el aprendizaje de otros conceptos matemáticos y procedimientos habituales como los que mencionamos anteriormente. En este sentido, Chávez (2012) afirma:

> Se requiere dotar de significado al concepto de semejanza de figuras planas ya que a partir de este se ha podido solucionar numerosos problemas, que desde la antigüedad ocuparon las mentes de grandes pensadores a través de la historia. Este concepto tiene aplicaciones que bien pueden ser entendidas por nuestros estudiantes, como son las construcciones de mapas, diseño de planos, maquetas a escala y la identificación de patrones geométricos en la naturaleza como la proporción y la espiral áurea. (p.20)

En nuestra experiencia como estudiantes en formación de la Licenciatura en Matemáticas y Física, hemos observado la dificultad que tienen los estudiantes de educación básica y media, con respecto a la comprensión del concepto de semejanza y la interpretación de la congruencia como un  caso particular de esta. Incluso, muchos de ellos, llegan con estos vacíos a los primeros semestres de la universidad, donde nuevamente deben enfrentar la geometría, desde situaciones más abstractas y complejas.

En esta línea, Chávez (2012) manifiesta que:

> Uno de los temas donde se ha creado más controversia y diferencia de opiniones es el de llevar o no, a los estudiantes a las demostraciones en geometría; y en caso de aceptarlas, en qué grado se debe empezar con dicha actividad. Así pues, el panorama de la enseñanza de la geometría no es nada fácil, y en algunos países, optaron por hacer caso omiso a estas dificultades sin intentar superarlas. Lo anterior generó, en muchos casos, la desaparición de muchos tópicos de vital importancia, como es el caso de la geometría tridimensional. (p.67)

A raíz de estos hechos, es importante intentar cambiar la concepción de la enseñanza en geometría.Desde este punto de vista, es posible usar el doblado de papel como un aporte en la didáctica de la geometría, dado que puede brindarnuevas alternativas que ayuden a la comprensión y apropiación de conceptos, en este caso de semejanza y congruencia, que para los estudiantes se tornan difíciles de comprender, tal comose mencionóanteriormente, debido principalmente a que suelen confundir congruencia,  semejanza y equivalencia.

El doblado de papel brinda una alternativa de comprensión más tangible,precisamente por las actividades que se pueden generar a través de este, donde el estudiante puede percibir,por medio de una hoja y sus dobleces, ciertas construcciones que brindan de apoyo a la comprensión del concepto de semejanza y abordarla congruencia como un caso particular de esta. Al trabajar con el doblado de papel, se obtiene un beneficio tanto para los estudiantes como para el docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues esun aporte didáctico a la geometría que facilita el quehacer del docente y la compresión del estudiante.

Al respecto, Monsalve y Jaramillo (2003) precisan:

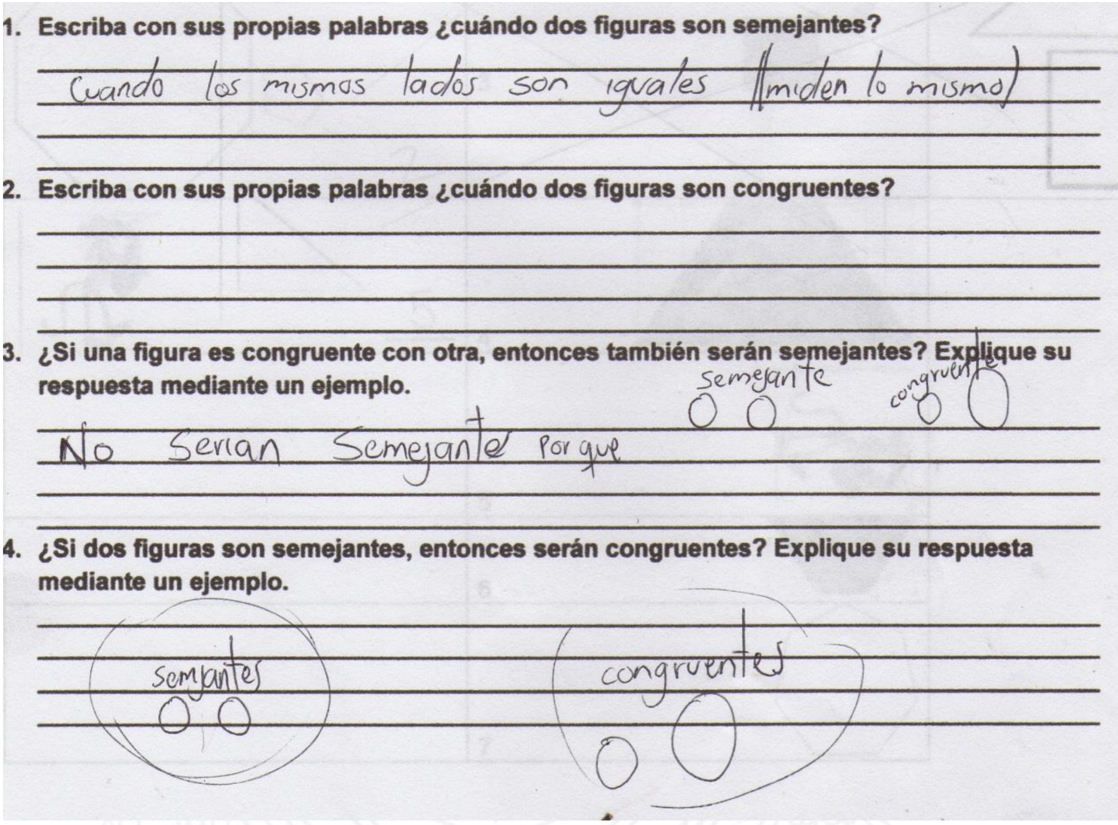
> Como actividad lúdica, [el doblado de papel] proporciona un potencial cognoscitivo que no se puede desperdiciar cuando se le considera un simple juego agradable para pasar el tiempo. Su utilidad didáctica radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica. En otras palabras, en el nivel primario se justifica programar toda una serie de actividades papirofléxicas por la diversidad implícita de conceptos matemáticos que ella brinda. (p. 3)

Aprovechar el doblado de papel como medio para la comprensión de la semejanza y la congruencia, podría permitir, además, larecuperación de la intuición espacial, en la que se buscatrabajar con figuras geométricas, imágenes, material concreto para simular el plano y el espacio, con el propósito de ayudar al estudiante a apropiarse de los conceptos geométricos. Es en esta perspectiva, donde toma relevancia el trabajo de investigación que se presenta, puesto que con este, se pretende responder de qué manera la geometría del doblado de papel puede permitir la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

# 4. Planteamiento del problema

Es común encontrar en los estudiantes interpretaciones erróneas con respecto al concepto de semejanza y, más aún, si se analiza que la congruencia es un caso particular de la semejanza; incluso, es habitual que confundan ambos conceptos, pensando que es lo mismo hablar de congruencia que de semejanza; de hecho, en muchos casos hasta confunden ambos términos con el concepto de equivalencia. Esto lo pudimos corroborar con una prueba diagnóstica realizada a los estudiantes del grado 10°. De acuerdo con los Estándares Curriculares Básicos de Competencias de Matemáticas, estos estudiantes ya debieron haber abordado, en años anteriores, los conceptos de semejanza y de congruencia.

De dicha prueba diagnóstica se infirió la incomprensión de los conceptos de semejanza y congruencia por parte de algunos estudiantes. En las imágenes 1 y 2, se puede apreciar que confunden la semejanza con la igualdad de figuras (igualdad de lados, tamaño, volumen, medida) y relacionan la congruencia con figuras parecidas, pero que tienen diferente medidas, ángulos, volumen y tamaño. Adicionalmente, se percibe que no se establece una relación entre ambos conceptos, pues se analizan de manera aislada.


1. Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son semejantes?

Cuando los mismos lados son iguales (miden lo mismo)

2. Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son congruentes?

3. ¿Si una figura es congruente con otra, entonces también serán semejantes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.

semejante

congruente

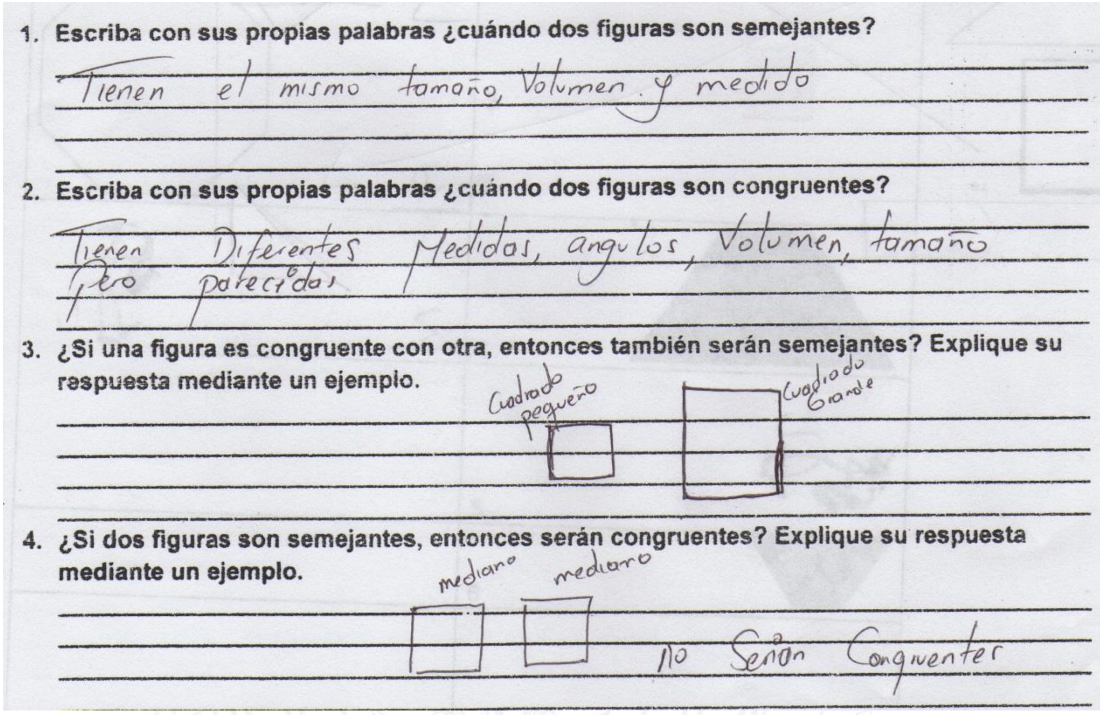
No serian Semejante porque

4. ¿Si dos figuras son semejantes, entonces serán congruentes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.

semejantes

congruentes

*Imagen* 1. Respuestas prueba diagnóstica estudiante 1


1. Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son semejantes?

Tienen el mismo tamaño, Volumen y medido

2. Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son congruentes?

Tienen Diferentes Medidas, angulos, Volumen, tamaño Pero parecidos

3. ¿Si una figura es congruente con otra, entonces también serán semejantes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.

Cuadrado pequeño

Cuadrado Grande

4. ¿Si dos figuras son semejantes, entonces serán congruentes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.

mediano

mediano

no Serán Congruenter

*Imagen 2.* Respuesta prueba diagnóstica estudiante 2

Percibir dicha problemática en los estudiantes, nos permite preguntarnos de qué forma se está enseñando la geometría en el salón de clase y, de qué manera,específicamente estos conceptos.Además, nos preguntamosqué opciones se podrían plantear para buscar una solución a dicho problema.

Al respecto, el MEN (2004), por ejemplo, plantea una alternativa para la enseñanza de la geometría, en la que motiva a los docentes a una constante capacitación y a la utilización de lasTIC, buscando que los estudiantes manipulen de forma directa y dinámica las figuras geométricas.  Esta experiencia les sirve a los estudiantes para desarrollar las habilidades mentales que les posibilitarán acceder posteriormente al estudio formal de la geometría.

Gualdrón (2011) sugiere una construcción del concepto de semejanza desde los niveles de Van Hiele, trabajando desde el pensamiento informal al más formal; para ello, diseña una secuencia de enseñanza que está orientada de acuerdo a los parámetros del mencionado modelo y en la que utiliza algunos elementos de visualización. Además, hace hincapié en el gran aporte que estos elementos brindan a los estudiantes para apropiarse del concepto y poder encontrar relaciones de semejanza con otros temas como homotecia, teorema de Thales y escala, y así crear habilidades de razonamiento.

Por su parte, Chávez (2012) hace una propuesta didáctica, con la intención de acercar al estudiante al concepto de semejanza de figuras planas, con el uso de herramientas de geometría dinámica, como el Cabri; en este trabajo, el autor pretendió relacionar los procesos de visualización con los procesos de justificación en geometría.

Sin embargo, estas alternativas no dan solución a la problemática que se plantea en este trabajo de investigación sobre la comprensión de la semejanza y la congruencia como un caso particular de esta, principalmente por los contextos en los que fueron desarrollados; en el contexto donde se realiza esta investigación, los estudiantes no tienen acceso, de manera fácil, al aula de sistemas, ya que grupos como la media técnica y el SENA hacen uso frecuente de estos espacios; además, no se cuenta con la capacitación de los docentes para el manejo y manipulación de software diseñados para la enseñanza de la geometría. De hecho, se torna difícil el trabajo con regla y compás, porque los estudiantes a menudo extravían estos elementos y argumentan no tener los recursos económicos para volverlos a adquirir. Por otra parte, la revisión de la literatura que se ha hecho hasta el momento, nos muestra que no hay investigaciones que aborden la congruencia como un caso particular de la semejanza, ni utiliza el doblado de papel como alternativa didáctica. Por lo tanto, esto nos llevóa plantearnos la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera la geometría del doblado de papel permite a los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, la comprensión del concepto de congruencia como un caso particular de la semejanza, en el contexto del Modelo de Pirie y Kieren?

# 5. Objetivos

## 5.1. General

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, nos planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar de qué manera la geometría del doblado del papel permite a los estudiantes del grado décimo, la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, en una institución del municipio de Medellín, en el contexto del Modelo de Pirie y Kieren.

### 5.2. Específicos

Para dar consecución al objetivo general, nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

- Describir cómo comprenden los estudiantes del grado décimo, el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, en el marco del Modelo de Pirie y Kieren.
- Diseñar y evaluar actividades con doblado de papel, que permitan la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

## 6. Antecedentes

### 6.1. Antecedentes desde la enseñanza de la geometría

Es un hecho que en la formación escolar, hoy día, se tienda a estandarizar los procesos de enseñanza y aprendizaje hacia la resolución de pruebas de Estado, como las del ICFES o pruebas externas como las Pisa; este hecho está convirtiendo paulatina y peligrosamente a la educación en una receta para desarrollar este tipo de pruebas. Al respecto, Jabonero (2014)afirma:

> PISA, con su contribución estratégica a la calidad y equidad de la educación, a la rendición de cuentas ante la ciudadanía y a la transparencia, permite a los responsables políticos saber cuáles son los conocimientos y habilidades de los alumnos de cada país, compararlos con los de otros países, establecer objetivos concretos y evaluables y aprender de las políticas y prácticas de éxito llevadas a cabo en otras naciones.(p.5)

De esta manera, con el hecho de mejorar la calidad en la educación basados en los resultados de pruebas externas y de estado, se percibe que se están desviando las implicaciones que debería tener la enseñanza en los alumnos, hacia las implicaciones que tienen las pruebas para las instituciones; lo anterior, repercute negativamente en el aprendizaje de los estudiantes, pues las matemáticas se convierten, finalmente, en una serie de estrategias para resolver preguntas y cuestionarios, y no para la resolución y proposición de problemas matemáticos de la vida real, donde deben comprenderse y usarse los conceptos matemáticos.

A raíz de estos hechos, es imperante intentar cambiar la concepción de la enseñanza matemática. En este sentido, varios trabajos de investigación como el de Chávez (2012),Escudero (2005) yGualdrón (2011),han tratado de incentivar a los docentes para que realicen un cambio en la forma de enseñar y percibir las matemáticas y, en particular, la geometría; sobre ello expresa el MEN (2003) que "las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” (p. 49).

Por otro lado, elMEN (2004) también precisa que “la diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles”. (p, 19).

Es importante la utilización de herramientas didácticas, tal como se mencionó anteriormente, ya que brindan diferentes alternativas para los docentes; en este trabajo de investigación utilizamos el doblado de papel, dado que se ha encontrado que ayuda a dinamizar los ambientes de enseñanza y aprendizaje, con la intención de mejorar la comprensión de los estudiantes de conceptos geométricos como lo son la semejanza y la congruencia como un caso particular de la misma.

## 6.2. Antecedentes desde el objeto de estudio

El presente trabajo de investigación, se centra en el concepto de congruencia como caso particular dela semejanza.En el rastreo literario que hasta el momento se ha hecho, no se encontró material que trabaje esta relación entre los conceptos de congruencia y semejanza, pero encontramos algunos materiales que serelacionan con alguno de los conceptos.

### 6.2.1. Semejanza.

Un trabajo de investigación de maestría donde se abordó exclusivamente el concepto de semejanza de figuras planas, y buscó una alternativa didáctica diferente a la educación tradicional, es el de Chávez (2012).En esta propuesta, que quiere enriquecer los espacios de reflexión y exploración para evitar las clases magistrales y exposiciones con ejercicios que expliquen los conceptos geométricos sin avances significativos para los estudiantes, se realizó un rastreo histórico del concepto yse estableció una dificultad desde la experiencia docente, con respectoal concepto de semejanza; dicha dificultad, según el autor, es causada principalmentepor la explicación magistral y la exposición repetida de ejercicios mediante ejemplos, donde se abandonó el uso de algunos materiales concretos como figuras de papel, pantógrafo y, en muchos casos,se obvió el uso de herramientas tan simples como la regla y el compás. Para el caso del estudio de Chávez (2012), no fue pertinente utilizar estos recursos sino quepropuso el uso de herramientas de geometría dinámica para la enseñanza, con el firme propósito de estar a la vanguardia con el uso de las TIC.Por último, este autor diseñó una propuesta didáctica mediante el uso del CabriGeometry II plus.

Este trabajo, a pesar de esbozar una propuesta dinámica a partir del uso del Cabri, no da respuesta a nuestra pregunta de investigación ya que los contextos son diferentes y en nuestro contexto no es posible trabajar en la sala de informática, pues los horarios se cruzan con los de otros grupos, que requieren el uso de estos espacios, tal como se mencionó en párrafos anteriores. Por otro lado, muchos docentes no se encuentran capacitados para el manejo  de algúnsoftware, por lo que se  hace difícil el trabajo con Cabri.

Siguiendo con el rastreo bibliográfico de autores que encontraron dificultades con los temas relacionados en nuestra investigación, tenemos el trabajo de maestría de Castro, Céspedes, Cifuentes y Romero(2009), estudio que abordó el concepto de semejanza; este plantea una problemática en la que la planeación de unidades de enseñanza basadas en organizaciones distintas de un mismo concepto, producen concepciones diferentes en los estudiantes.Esta problemática se fundamenta en tres aspectos:

– "Con frecuencia se trabajan los conceptos matemáticos de forma fragmentada y descontextualizada" (p. 13).

– "La poca relación que se establece entre los diferentes pensamientos matemáticos" (p. 13).

– "No se ofrecen suficientes formas de representación para lograr la comprensión de los conceptos matemáticos".(p. 13)

Por lo tanto, el estudio de Castro, Céspedes, Cifuentes y Romero (2009),implementó unas actividades con fractales como propuesta didáctica para la enseñanza de la semejanza, teniendo en cuenta que la comprensión de los conceptos está ligada al desarrollo del pensamiento operativo y figurativo de los estudiantes que permite la construcción y la comprensión de diferentes conocimientos y una participación más activa por parte de estos en la construcción del conocimiento; adicionalmente, le posibilita a los docentes una serie de herramientas pedagógicas que pueden utilizar para la construcción de conceptos matemáticos.

Como este es un trabajo que trata del estudio de las concepciones que tienen los estudiantes de grado octavo sobre la semejanza, no responde a nuestra pregunta de investigación ya que no relaciona la congruencia con la semejanza, que es nuestro propósito en este estudio, no utiliza como herramienta de construcción de conocimiento el doblado de papel y, además, los contextos socioculturales en los que se dan los procesos, son diferentes.

El trabajo doctoral de Gualdrón (2011)describe las dificultades que presentan los estudiantes de la educación media y primeros semestres de universidad, al resolver problemas que relacionan directa o indirectamente el concepto de semejanza;él presenta el desconocimiento o la incomprensión de dicho concepto, planteando que una de las causas de esta problemática es el modo como se enseña este concepto, de una forma limitada e intuitiva,en la cual los profesores no hacen a diario una selección ni uso de materiales curriculares apropiados, ni técnicas de enseñanza oportunas.

Plantea que la geometría es más que definiciones y, para ello, ofrece como alternativa una construcción del conocimiento a través de los niveles de Van Hiele, para lograr un avance del pensamiento informal al más formal; este autor reconoce la visualización como medio para la construcción y manipulación mental ya que permite a los estudiantes no solo aprender matemáticas sino también ver las aplicaciones que estas tienen en la vida cotidiana.

Este trabajo doctoral no resuelve nuestra pregunta de investigación debido a que los contextos son diferentes; por otro lado, solo se trabaja la semejanza y algunos temas relacionados a esta, pero en ninguno plantean la relación que hay entre la semejanza y la congruencia, y su propuesta está basada en los niveles de Van Hiele; en nuestro trabajo,pretendemos presentar como alternativa el doblado de papel como método didáctico para la comprensión de estos conceptos y la relación de la congruencia como un caso particular de la semejanza.

### 6.3. Antecedentes del marco teórico

Dado que nuestro trabajo de investigación se fundamenta en el marco teórico de Pirie y Kieren, es necesario tener en cuenta algunos trabajos de investigación que utilizaron este marco teórico para su desarrollo. En particular, tenemos el trabajo de doctorado de Londoño (2011) que tuvo como objeto de estudio la comprensión del teorema fundamental del cálculo. En esta perspectiva, Londoño (2011) afirma que la teoría de Pirie y Kieren:

> Ofrece múltiples ventajas en lo que respecta a: lasexperiencias de enseñanza y aprendizaje publicadas por los autores y otros investigadores, que dan cuenta de cómo evoluciona la comprensión de los estudiantes en conceptos como los de Fracciones, Función Cuadrática, Límites, Derivadas e Integrales; las características como El Folding Back, los límites de falta de necesidad y las complementariedades de la acción y la expresión, observadas por Pirie y Kieren en los análisis realizados en sus investigaciones y, finalmente, la estructura del modelo fractal propuesto, en el cual exhiben sus niveles de comprensión. (p. 1)

Siguiendo con el rastreo de trabajos de investigación, debemos hablar del trabajo de doctorado de Villa (2011), que tiene como objeto de estudio la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada, destacando la teoría de Pirie y Kieren para el desarrollo de su investigación. Al respecto, Villa (2011) afirma:

> Los resultados del estudio muestran que en el proceso de comprensión se presentan ciertas “imágenes arraigadas” las cuales se convierten en un factor desencadenador de folding back con lo cual se genera un aporte sobre la naturaleza de esta característica de la comprensión matemática descrita por la Teoría de Pirie y Kieren.(p.II)

Por otro lado, debemos mencionar también un texto que se torna importante para profundizar ennuestro marco teórico y es el artículo de Meel (2003).En el presente texto hacen referencia al modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la compresión matemática; además, se explica la definición de comprensión para este modelo, que más adelante en este trabajo será tratado con detenimiento.

En el capítulo 6 se tratará en detalle el marco teórico de Pirie y Kieren; por ende, en nuestros antecedentes no pretendemos definir ni profundizar, solo se hace referencia a los trabajos de investigación que han usado esta teoría para fundamentar sus estudios y esto nos permite, de alguna manera, justificar nuestra decisión teórica.

## 6.4. Antecedentes del doblado de papel

Como propuesta didáctica, en nuestra investigación tenemos el doblado de papel como medio para facilitar la comprensión. Hay diferentes  trabajos de investigación, libros y artículos como los de Santa (2011), Santa y Jaramillo (2010), Monsalve y Jaramillo (2003), Royo (2002), entre otros, que hablan y utilizan este como herramienta didáctica. Estos trabajos le dan una visión diferente al doblado de papel, pasando de lo lúdico, a una estructura teórica que tiene su propia axiomática.

Tenemos el trabajo de investigación de maestría de Santa (2011) en el que se realiza una entrevista de carácter socrático con actividades basadas en construcciones con doblado de papel. En uno de sus capítulos, se construyen las secciones cónicas mediante dicha estrategia, que les permite a los estudiantes la comprensión de estos conceptos como lugares geométricos.

Este trabajo de investigación, en particular, es importante para nuestro estudio, dado que se puede evidenciar cómo, desde el doblado de papel, se pueden hacer construcciones geométricas tan precisas que ayudan a la comprensión de conceptos geométricos; es decir, los estudiantes responden adecuadamente a las actividades generadas a partir de esta estrategia, al dar el paso de lo concreto a lo abstracto.

También debemos mencionar el artículo escrito por Monsalve y Jaramillo (2003), en el que se precisa que no solo el doblado de papel permite la comprensión de conceptos geométricos, sino que también se traslada al cálculo y a la matemática en general; se realizan actividades con doblado de papel y se trabajan conceptos como límite, convergencia de series y algunas nociones de geometría euclidiana. Estos trabajos muestran la importancia del doblado de papel como herramienta tangible para los estudiantes y para los docentes, que desde una perspectiva concreta quieran trabajar temas de la geometría y la matemática para favorecer la comprensión de los conceptos y teorías.

El trabajo desarrollado por Royo (2002) es importante para nuestra investigación, dado que menciona la importancia de la papiroflexia; expone su historia que inicia en Japón con AkiraYoshizawa que es a quien se le debe la simbología actual de las instrucciones del plegado de modelos; establece la relación de las matemáticas y la papiroflexia por medio de las cicatrices que se pueden observar al desdoblar un modelo y visualizar el cuadrado inicial, que si se analiza con detenimiento, cumple con algunas propiedades matemáticas y geométricas. Este autor también hace alusión a la papiroflexia modular, aspecto fundamental de nuestro estudio; en este sentido, menciona que esta técnica se basa en utilizar varias hojas de papel, con la intención de construir módulos y ensamblarlos de una determinada manera, para formar una figura geométrica; en particular, en nuestro trabajo de investigación, realizamos un cubo que se forma con seis módulos.

Por su parte, Santa y Jaramillo (2010) presentan una formalización del doblado del papel, al establecer algunos conceptos primitivos y unos axiomas para la geometría del doblado de papel. Así mismo, explican la importancia que estos axiomas tienen en algunas aplicaciones de la geometría, como en la construcción de las secciones cónicas. Por lo tanto, precisan que con el doblado de papel se pueden hacer construcciones tan precisas como las que se pueden realizar con regla y compás. Según Santa y Jaramillo (2010), los conceptos primitivos para el doblado de papel son:

> Dobles: de manera análoga a la recta, hecho en un pedazo de papel que aparece tanto al anverso como al reverso de este, se considerará como un concepto primitivo no definido, el cual está estrechamente relacionado con un segmento de línea recta, porque un pedazo de papel es limitado; pero se enfatizará que este doblez representa de manera abstracta una línea recta.

Punto: es un concepto no definido. Sin embargo, se establece una relación directa de manera natural con la intersección de dos dobleces o con las esquinas (ángulos) de la hoja de papel. Sin pérdida de generalidad, en algunos casos, los puntos se van a asumir de manera intuitiva como la marca más pequeña que se puede dibujar con un lápiz. Es decir, un punto puede ser dibujado o construido en la hoja de papel.

Hoja de papel: una cara de la hoja de papel se puede tomar como una porción del plano. Por lo tanto, tiene límites y es finito, pero puede ser una representación abstracta de un plano infinito. (pp. 341 - 342)

Establecidos los conceptos primitivos en este artículo, se plantea el sistema axiomático de Huzita-Hatori, que en conjunto presenta los seis axiomas expuestos por el ítalo- japonés HumiakiHuzita (1989, citado por Santa y Jaramillo, 2010) y el séptimo, expuesto por KoshiroHatori (2003, citado por Santa y Jaramillo, 2010). Santa y Jaramillo (2010) intentan mostrar que el sistema axiomático, antes mencionado, cumple tres condiciones: suficiencia, independencia y compatibilidad. De esta manera, se fundamenta el sistema axiomático del doblado de papel, de la siguiente forma:

Axioma 1: dados dos puntos P1 y P2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos.

Axioma 2: dados dos puntos P1 y P2, se puede hacer un doblez que lleva a P1 sobre P2.

Axioma 3: dadas dos líneas l1 y l2, se puede hacer un doblez que pone a l1 sobre l2.

> Axioma 4: dado un punto P1 y una línea l1, se puede hacer un doblez que pone a l1 sobre sí misma y pasa por P1.
>
> Axioma 5: dados dos puntos P1 y P2 y una línea l1, se puede hacer un doblez que pone a P1 sobre l1 y pasa por P2.
>
> Axioma 6: dados dos puntos P1 y P2 y dos líneas l1 y l2, se puede hacer un doblez que pone a P1 sobre l1 y a P2 sobre l2.
>
> Axioma 7: dados un punto P1 y dos líneas l1 y l2, se puede hacer un doblez perpendicular a l2 que ponga el punto P1 sobre la línea l1. (pp. 343 - 349)

Este trabajo es importante para nuestro estudio, porque muestra la formalización del doblado de papel, estableciendo conceptos primitivos y axiomas. En esta perspectiva, un simple doblez se relaciona, de manera abstracta, con una línea recta, y la hoja de papel, se convierte en una porción del plano, donde se pueden probar hechos geométricos. Por lo tanto, se infiere que se pasa de lo lúdico, es decir, de lo concreto, hacia la generación de teoría o la abstracción; esta situación puede ser aprovechada por los docentes para generar procesos de comprensión de conceptos geométricos y matemáticos.

# 7. Marco teórico

El modelo de Pirie y Kieren de la comprensión es un marco teórico que tiene orígenes constructivistas y que permite analizar cómo se ha venido desarrollado la comprensión de los conceptos en matemáticas. De este modo, Meel (2003) afirma que no todo acto de comprensión le corresponde la superación de un obstáculo epistemológico, es decir, el superar un obstáculo y llegar a la comprensión de un concepto son dos representaciones complementarias; pero el uso de un análisis epistemológico de cierto concepto, puede ayudar a la comprensión que un estudiante logre de este.

De esta manera Sierpinska (1990, citada por Meel, 2003) expone que “superar los obstáculos epistemológicos y llegar a la comprensión son dos imágenes complementarias de una realidad desconocida sobre los cambios cualitativos importantes de los humanos” (p.228). Por lo tanto, Meel (2003)indica que tal desarrollo de la comprensión se asume en muy diversos casos, como la conciencia vigilante de los obstáculos de aprendizaje, que pueden presentar los estudiantes; es decir la comprensión errónea de un concepto, da cuenta de la presencia de un obstáculo epistemológico; de igual manera, el estudio epistemológico de un concepto, puede ayudar fuertemente a hallar la comprensión lograda de un concepto matemático en el sujeto.

## 7.1. Generalidades

Aunque en este trabajo el marco teórico de referencia es la teoría de Pirie y Kieren y su modelo de comprensión, haremos una descripción de aquellos marcos teóricos de la comprensión en Educación Matemática, que al respecto nos aporta Meel (2003) en su artículo, en el cual se hace una caracterización detallada de cómo ha ido evolucionando el concepto de comprensión y los modelos de comprensión en matemáticas, recientes para la época.

Si bien los investigadores en la comunidad matemática hacen una distinción entre la comprensión y el conocimiento, todavía no existe un acuerdo unilateral respecto al significado de comprensión (Meel, 2003). En esta perspectiva, Meel (2003) menciona que "en particular, se han propuesto conceptos constructivistas recientes de la comprensión, además del modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y de la teoría APOE de Dubinsky" (p. 227). Por lo tanto, nos remitimos a los siguientes cuatro marcos que son fundamentales, porque clarifican cómo se ha ido evolucionando en la construcción del concepto de comprensión.

En la búsqueda de una descripción significativa de la comprensión del conocimiento de más de medio siglo, en Meel (2003) se puede ver que en las tres últimas décadas antes de 1987 se han desarrollado nuevas e integradoras perspectivas de este concepto, alejadas de la manera en que Skemp (1976, citado por Meel, 2003) distinguía la comprensión del conocimiento; puesto que antes de este documento se identificaba el conocimiento con la comprensión. Además, Skemp (1976, citado por Meel, 2003) hace una distinción entre la comprensión instrumental y la comprensión relacional. Meel (2003) toma el trabajo de Schroeder (1987, citado por Meel, 2003) y documenta la evolución de esta, conforme a esta perspectivas de comprensión.

Respecto a esto, a continuación exponemos la línea del tiempo de la comprensión de acuerdo con Meel (2003), antes y después de 1978. Posteriormente, haremos una breve descripción de cuatro marcos teóricos relacionados con la comprensión en Educación Matemática: la comprensión desde el punto de vista de la superación de obstáculos cognitivos; la comprensión desde el punto de vista generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto; la comprensión durante la operación con representaciones múltiples y la comprensión desde el punto de vista de las construcciones de las concepciones operacionales y estructurales.

**Antes de 1978.**

Brownell y Sims (1945, citados por Meel, 2003) describen la comprensión como:

-Una actuación de manera inteligente.

-Que varía respecto al grado de exactitud pero también respecto a situaciones problemas.

- Que necesita tener verbalizaciones.

- Se encuentra influenciada por el maestro y los métodos que usa.

Luego, Polya (1962, citado por Meel, 2003) asume la comprensión como un elemento complementario a la resolución de problemas. De esta manera, identificó cuatro niveles de comprensión, los cuales son: Mecánica: que es solo un método memorizado aplicado de forma correcta; Inductiva: que va desde casos simples y se generaliza en casos complejos; Racional: la aceptación de la rigurosidad de la regla; Intuitiva: la convicción personal como una verdad indudable. Meel (2003) afirma que "dichos niveles califican la comprensión como un conocimiento asociado con reglas matemáticas" (p. 226).

Skemp (1976, citado por Meel, 2003) relacionó la comprensión instrumental con tener reglas sin una razón y, la comprensión relacional, con saber qué hacer y por qué se debe hacer; a su vez identificó la comprensión como un asunto distinto del conocimiento.Después, Lehman (1977, citado por Meel, 2003) realiza una asociación de la comprensión con tres tipos de conocimientos: Aplicaciones, significados, relaciones lógicas.

En esta misma línea de tiempo, se encuentra que Byers (1977, citado por Meel, 2003), afirma que "mediante la combinación de ideas de Brunner y Skemp, desarrolló una clasificación tetraédrica sobre la comprensión, con las siguientes categorías: instrumental, relacional, intuitiva y formal"(p. 226).

**Después de 1978.**

Más tarde, el mismo Skemp (1979, citado por Meel, 2003) incluye una tercera categoría llamada lógica y, finalmente, en 1982, incluye la cuarta categoría llamada simbólica, de este modo, se crearon cuatro categorías.Estas clasificaciones generaron una variedad de descripciones diversas sobre la comprensión como:

a) De procedimiento y de concepto.

b) Concreta y simbólica.

c) Intuitiva y formal.

**La comprensión desde el punto de vista de la superación de obstáculos cognitivos**

Aunque los obstáculos cognitivos fueron en primera medida definidos por Bachelard (1938, citado por Meel, 2003) “se clasificaron como obstáculos genéticos o psicológicos, obstáculos didácticos u obstáculos epistemológicos” (p. 227); así es como Meel (2003), a través de Cornut (1991, citado por Meel, 2003), menciona que los obstáculos cognitivos son fundamentales no solo para identificar las dificultades de los estudiantes, las cuales están relacionadas con el aprendizaje sino que también se usan para el diseño de nuevas estrategias de enseñanza. Es decir, se realizan ciertas acomodaciones o adaptaciones para la enseñanza.

Por otro lado, retoma a Sierpinska (1990, citada por Meel, 2003), quien afirma que: “comprensión es un acto, pero un acto relacionado con un proceso de interpretación, que es una dialéctica del desarrollo, entre más y más se elaboren suposiciones y se validen dichas suposiciones” (p.  227). Meel (2003) afirma que se puede decir que la comprensión tiene varias derivaciones dependiendo de los conflictos mentales que experimente el estudiante, los cuales ponen en tela de juicio sus conocimientos o convicciones. En este sentido, “la comprensión deriva su fundamento  en las ideologías, predisposiciones,  preconcepciones, conexiones y esquemas de pensamientos no percibidos del estudiante” (p. 227).

En este orden de ideas y en cierto momento, la comprensión puede servir como identificador de obstáculos en el estudiante, quien puede reconocer, detectar, evaluar y confrontar sus convicciones entre las propiedades, hechos y objetos en pro de la superación y la organización consistente de un concepto como tal; pero también sirve para detectar el refinamiento de los conceptos y su evolución con el fin de que se vaya acercando al concepto formal, avalado por la comunidad matemática.

**La comprensión desde el punto de vista generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto**

Los autores principales y pioneros de estas ideas, son Vinner y Tall (1981, citados por Meel, 2003), quienes mencionan que un estudiante va adquiriendo conceptos, en tanto construya imágenes de los mismos; esa evocación de imágenes permite que se construya un puente entre el concepto y lo que el estudiante percibe de este, pero no significa que siempre haya coherencia entre las partes, es decir, la imagen del concepto puede ser diferente de la definición formal del concepto.

Como lo afirma Meel (2003), en este caso, el término imagen del concepto incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos, ejemplificando la forma en que un estudiante comprende un concepto en particular; además, las imágenes del concepto no son necesariamente coherentes en todo momento. Desde este punto de vista, Villa (2011) establece que cuando la imagen del concepto que tiene el estudiante, tiene coherencia con la definición formal del concepto, es entonces, que se puede hablar de comprensión; Tall y Vinner (1981, citado por Meel, 2003) establecen que en esta simultaneidad y complementariedad surge la comprensión y ello presenta algún sentido real de conflicto o confusión; donde la confrontación de la imagen del concepto del estudiante y el concepto formal admitido es fundamental para determinar y evidenciar cuál puede ser la comprensión de un concepto en particular.

**La comprensión durante la operación con representaciones múltiples**

Meel (2003) retoma a Kaput (1987, citado por Meel, 2003) para mencionar que “la energía cognitiva existe en representaciones múltiples y vinculadas” (p. 230), proporcionando una redundancia y permitiendo al estudiante suprimir algunos aspectos de ideas complejas y enfatizar en otras. De hecho, estas mismas representaciones y sus vínculos posibilitan en los estudiantes la comprensión de ideas complejas de forma nueva y aplicarlas efectivamente (Kaput, 1989[a], citado por Meel, 2003).

Adicionalmente, Meel (2003) retoma el término representaciones de Kaput (1985,1987b, citado por Meel, 2003) como “un término trans-teórico que contiene definiciones: cognitiva y perspectiva, computarizada, explicativa, matemática y simbólica” (p. 229), que dentro de la matemática “coopera en la instalación de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad” (pp. 230-231)

En esta perspectiva, Villa (2011) afirma que “desde este punto de vista la comprensión está asociada con la construcción de significado, el cual a su vez, evoluciona en la construcción y la utilización de representaciones y simbolizaciones” (p. 41), logrando el desarrollo de la comprensión, que se alcanza desde las operaciones físicas observables a las operaciones mentales hipotéticas; desde estos parámetros se consigue una negociación entre lo observable y lo mental; haciendo el cambio de las operaciones físicas a las operaciones mentales (Meel, 2003).

**La comprensión desde el punto de vista de las construcciones de las concepciones operacionales y estructurales**

Se utiliza la afirmación de Sfard (1991, citado por Meel, 2003) donde define "los cimientos de las matemáticas como dos entidades: conceptos y concepciones" (p. 232). En este sentido, en Sfard (1991, citado por Meel, 2003) se establece que aquellos conceptos expresados por ideas oficiales y formales, definidos matemáticamente, son los aceptados por la comunidad matemática. Además, Meel (2003) menciona que las concepciones son aquellas que están representadas y vinculadas internamente en el estudiante y que, a su vez, estas son causadas por el concepto en sí; es decir es la manera como el estudiante entiende el concepto.

Sfard (1991, citado por Villa, 2011) señala que las concepciones operacionales pueden visualizarse y permitir una mirada dinámica y secuencial; son difíciles de describir pero se relacionan con procesos, algoritmos y acciones a nivel físico o mental, mientras que la concepción estructural es mucho más abstracta, integrada y detallada que la concepción operacional.

Desde este punto de vista, Sfard (1994, citado por Meel, 2003) menciona que así se lleva  la comprensión más allá de la capacidad de resolver problemas o probar teoremas, igualando "la comprensión con la construcción de vínculos entre los símbolos y la evolución de una concepción estructural" (p. 233);Meel (2003) precisa que esta dualidad de las dos concepciones no opera separadamente, por el contrario, son complementarias, en el sentido de que ambas son visiones del mismo concepto formalmente albergado por la matemática.

## 7.2. Concepto de comprensión de Pirie y Kieren

Pirie y Kieren (1990, citados por Meel, 2003) consideran, en su trabajo de evolución de la comprensión matemática, algunas respuestas sobre este concepto de comprensión, desde las ideas de Sierpinska (1990, citada por Meel, 2003). La teoría de la evolución de la comprensión de estos autores se desarrolla a partir de la definición constructivista de Von Glasersfeld (1987, citado por Meel, 2003) sobre la comprensión, quien la percibió como "un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona" (p. 235). Igualmente, abordamos el concepto de comprensión de la forma en que Pirie y Kieren (1989, citado por Meel, 2003) lo conciben:

> La comprensión se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (p.235)

## 7.3. Los niveles o estratos del modelo

Los elementos del modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática, se encuentran descritos por ocho niveles, que se muestran en la imagen3.

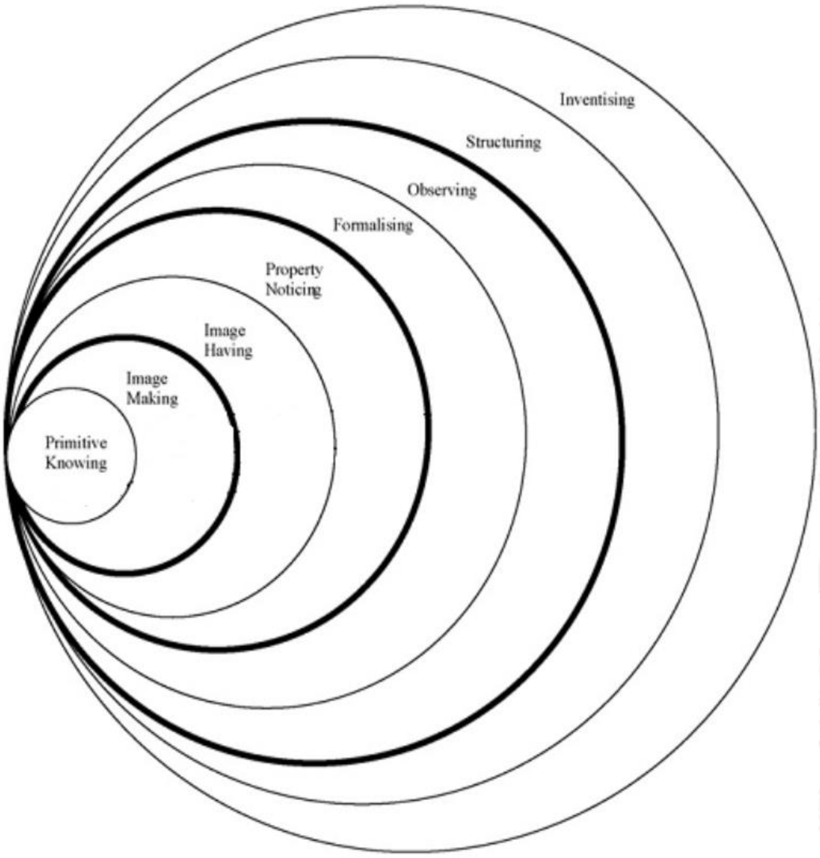



Imagen3 Diagrama que representa el modelo para la comprensión de Pirie y Kieren. (Villa, 2011, p. 44).

Retomando las ideas de Pirie y Kieren (2006, citados por Villa, 2011), con respecto al marco teórico, se puede utilizar para:

> Describir no solo estos niveles de comprensión, sino también para trazar las conexiones entre los conceptos y el crecimiento del entendimiento en el tiempo, así mismo, para enfatizar en que cada estrato de comprensión está contenido en los niveles sucesivos. (p.45)

De esta manera, Pirie y Kieren (2006, citados por Villa, 2011) afirman que este modelo no está pensado para usarse como herramienta para categorizar, ubicar en estratos o niveles, sino que su filosofía está pensada para ofrecer una alternativa de conceptualización y descripción de las complejidades inherentes a la comprensión matemática. De acuerdo con Pirie y Kieren (2006, citados por Villa, 2011), esta teoría para la evolución de la comprensión se convierte en una herramienta para visualizar los procesos de evolución de la comprensión matemática de individuos o colectivos.

Este modelo de la evolución de la comprensión matemática está clasificado en ocho estratos, que se describen a continuación.

**Nivel 1. Primitiveknowing (conocimiento primitivo).** Meel (2003) se refiere al punto inicial del conocimiento, un punto básico y no un bajo nivel específico de matemáticas. Es decir, “el contenido central es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje” (p. 236). En relación a dichos contenidos, estos se han analizado y reflexionado con distintos nombres, de acuerdo con los autores: Leinhardt (1988, citado por Meel, 2003) “conocimiento intuitivo” (p. 236); Brown, Collins y Duguid (1989, citado por Meel, 2003) “conocimiento situacional” (p. 236) y Saxe (1988, citado por Meel, 2003) “conocimiento previo o informal” (p. 236).

Meel (2003) precisa que este nivel es un cuestionamiento nuevo del sujeto. Kieren y Pirie (2006, citados por Villa, 2011), mencionan que “como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona; sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia de que se ponga a nuestra disposición a través de unas acciones físicas, verbales o escritas” (p. 45).

**Nivel 2. Imagemaking (creación de imagen).** De acuerdo con Meel (2003) en este segundo estrato:

> El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Estas imágenes pueden ser representaciones pictóricas, pero también se presentan como imágenes mentales como resultado de otras representaciones; las acciones que se realizan en este estrato involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. (p. 237)

Por lo tanto, “las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con que el estudiante realiza algo mental o físico, para obtener una idea sobre el concepto” (Meel, 2003, p. 237). El resultado de las actividades y las acciones realizadas en este nivel, implican el desarrollo de conexiones entre los referentes y los símbolos de un concepto en específico(Meel, 2003).

**Nivel 3. Imagehaving (comprensión de la imagen).** Pirie y Kieren (1992, citados por Meel, 2003) afirman que:

> Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares. (p. 237)

En la perspectiva de Pirie y Kieren (1992, citados por Meel, 2003), dichas imágenes mentales han sido analizadas y reflexionadas  con diferentes nombres, Davis y Vinner (1986, citado por Meel, 2003) como  "imagen de conceptos" (p. 237); Davis (1984, citado por Meel, 2003) como "marcos" y "representación de estructuras de conocimiento" (p. 237) y Driver y Easley (1978, citado por Meel, 2003) como "esquemas alternativos de los estudiantes" (p. 237). En la línea de Meel (2003), la libre imaginación de cierto concepto irrestricto en desarrollos físicos, desencadena una imagen notoria en afinidad a la evolución del conocimiento matemático en cuestión; ello hace que el estudiante pueda reconocer y utilizar estas imágenes para efectivamente reconocer las propiedades globales de los objetos e imágenes matemáticas que se estudien. En este estrato, el estudiante puede elaborar, sostener, además de entender imágenes particulares de la comprensión del concepto (Villa 2011).

**Nivel 4. Propertynoticing (observación de la propiedad).** De acuerdo conMeel(2003), un estudiante después de haber construido diversas imágenes de un concepto, puede estar en la capacidad de examinar dichas imágenes; en consecuencia, él puede establecer y determinar los atributos, conexiones, y distinciones relacionadas de dichas imágenes con una imagen en particular. Según Meel (2003) "la diferencia entre las acciones del estrato de observación de la propiedad y las del estrato de obtención de la imagen es la capacidad de observar las equivalencias y explicar las técnicas necesarias para desarrollarlas" (pp. 237-238).

**Nivel 5. Formalizing (formalización).** Según Meel (2003), en este estrato,

> El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes. El lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes una definición matemática adecuada. (p. 238)

En esta perspectiva, Meel (2003) afirma que en este nivel, el estudiante debe estar familiarizándose con el concepto formal y sus conceptos periféricos; estas imágenes mentales construidas a través de propiedades observadas, admiten el abandono de acciones mentales propias de la persona para darle paso a la adquisición de las definiciones matemáticas completas, pero focalizándose en el concepto en especial; la conectividad entre este y otros conceptos se mantiene mínima y local.

**Nivel 6. Observing (observación).** Meel (2003) menciona que en este estrato, el estudiante debe estar en capacidad de referenciarse bajo su pensamiento formal. Es decir, de acuerdo con Villa (2011),“posee la habilidad para considerar y consultar su propio razonamiento (aspecto metacognitivo) formal” (p. 47). Además, Meel (2003) afirma queel estudiante está en la capacidad de “observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales” (p. 238). De la misma manera, el estudiante debe tener la facultad de “producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado” (p.238).

**Nivel 7. Structuring (estructuración).**Tal como Meel (2003) precisa, si el estudiante es capaz de lograr una organización en las observaciones formales, la coherencia se determina cuando estas observaciones formales son verdaderas; luego, el estudiante toma conciencia de las interrelaciones, y explicita dichas observaciones a través de un sistema axiomático; en este estrato o nivel, el estudiante va de lo particular hacia una estructura general mayor. En esta misma perspectiva el estudiante, según Michener (1978, citado por Meel, 2003) relaciona esta idea formal, “a través de varios dominios y percibe la interconexión de diversas teorías” (p. 239);es decir, dicho estudiante en el nivel de estructuración, está capacitado para explicar y teorizar las organizaciones de las observaciones formales en términos de una estructura lógica, así como lo es un sistema axiomático (Meel, 2003).

**Nivel 8. Inventizing (invención):**Los planteamientos de Meel (2003) establecenque el uso de lainvención no es exclusivo solo en este estrato, ello también puede ocurrir en otros niveles, y se utiliza para señalar la capacidad del estudiante para desprenderse del conocimiento ya estructurado, de una comprensión total de un concepto, con el propósito de crear nuevas preguntas que pueden desencadenar y dar como resultado un concepto nuevo y diferente.

### 7.4. Características fundamentales del modelo

**Característica de la Fractalidad.**Esta es una de las características más importantes del modelo de comprensión de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003), donde los nivelas más externos cubren los internos, por ejemplo, se “podría observar a una persona durante el nivel de invención como si tuviera su comprensión previa total como una nueva acción primitiva" (p. 239).

Es decir, Pirie y Kieren (1990, citados por Meel, 2003), establecen que una nueva invención se presenta como un conocimiento primitivo, el cual trae el estudiante en su mente; o sea, que se observa el conocimiento primitivo como una composición de modelos completos análogos a la totalidad; ello advierte la importancia que tiene el centro interno del modelo, que es el conocimiento primitivo, en nuevas invenciones que envuelven los niveles anteriores de este modelo; logrando una comprensión no finita e inacabada de los conceptos estudiados. Así lo muestra la siguiente imagen 4.

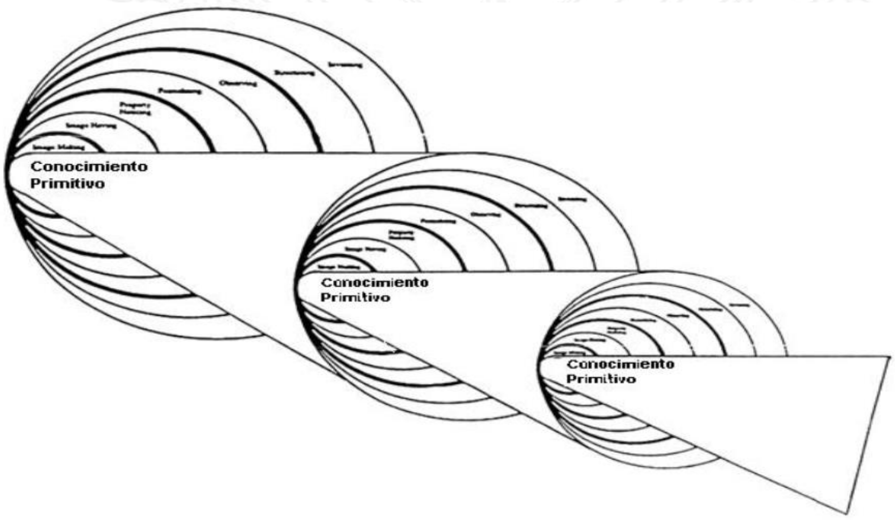



Imagen 4. Diagrama de las características fractales del modelos de Pirie y Kieren (Villa, 2011, p. 50).

**Característica de redoblado (Folding back).** De acuerdo con Pirie y Kieren (1991-1992, citado por Meel, 2003), es la característica más importante de este modelo de comprensión; su dinámica consiste en la posibilidad de redoblar o volver hacia atrás, para llegar a niveles más internos; en esta repetición o reexaminación, el estudiante extiende la comprensión actual y no adecuada que tiene acerca de un concepto, por lo cual, permite una mayor visión y avance respecto a su punto de partida, perfeccionando en cada folding back su comprensión. En palabras de Meel (2003), "la extensión se presenta doblando de nuevo hasta que repetidamente se construya y reorganice el conocimiento del estrato interno de la persona, y de esta manera se extienda más aún la comprensión del estrato interno" (p. 241).

**Los límites de falta de necesidad.** Esta característica del modelo de Pirie y Kieren (1992b, citado por Meel, 2003) se refiere a una comprensión más desarrollada y radica en "que no requiere necesariamente los elementos de los estratos más bajos" (p. 243).En la imagen3, se nota que, según Meel (2003), la primera frontera es la creación de imagen pero más allá de ella el estudiante no tiene la necesidad de una imagen o de un significado preciso para una actividad eminentemente matemática; esto no significa que aunque el estudiante no necesite de los niveles anteriores, él no pueda usarlos; de hecho, en la característica de redoblado, la persona nuevamente reorganiza y reconstruye la comprensión de niveles más interiores; es decir, que tiene un acceso si lo desea o de ser necesario frente a las anteriores comprensiones, con la finalidad de expandir su proceso de comprensión en los niveles más externos. Ocurren en esta característica, en la perspectiva de Pirie y Kieren (1994, citado por

Meel, 2003), otros límites de la falta de necesidad, los cuales se encuentran en la imagen5, entre la observación de la propiedad y la formalización, y entre la observación y la estructura.

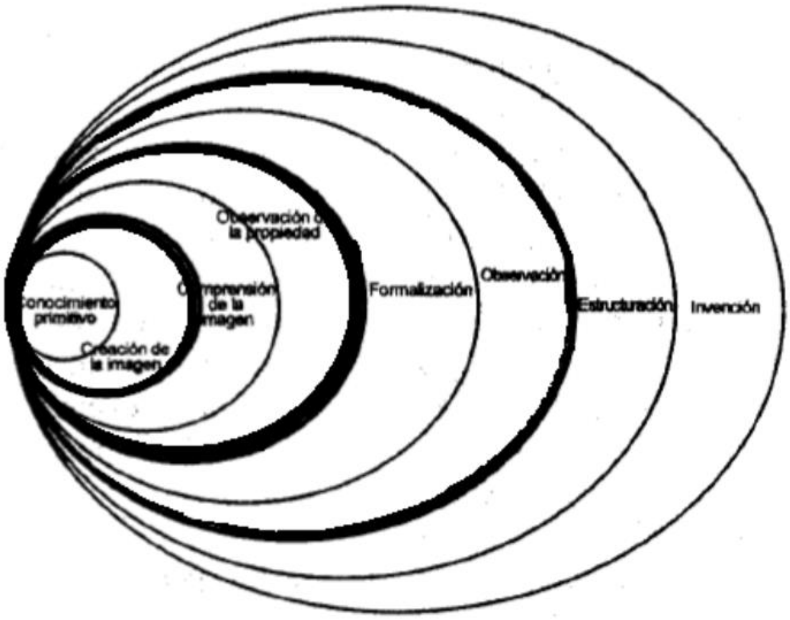



Imagen 5. Característica de los límites del modelo de Pirie y Kieren (Villa, 2011, p. 52).

**La complementariedad de la acción y la expresión, orientada a la forma.** Con respecto a esta característica del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, Meel (2003) precisa que, excepto en el nivel del conocimiento primitivo y, a su vez, en el nivel de invención, en cada uno de los demás niveles, está contenida una complementariedad tanto en forma como en proceso, de acuerdo con la imagen 6. De igual manera, Meel (2003) afirma que:

> Estas acciones orientadas a la forma se presentan como una demostración de un agente externo que intenta determinar el estrato de comprensión en el que un estudiante se encuentra operando. Por lo tanto la ausencia de la acción complementaria que se presenta en el estrato no demuestra que un estudiante esté trabajando en un estrato en particular. (p.241)

Por ejemplo, Pirie y Kieren (1991, citado por Meel, 2003) precisan que el nivel de creación de imagen, está conformado por dos elementos complementarios que son: realización de la imagen, donde la persona observa el trabajo previo como algo terminado sin regresar a este, y el análisis de la imagen, que es la oportunidad de revisar la imagen, para dar construcción al concepto, sin necesariamente seguir un derrotero o patrón.

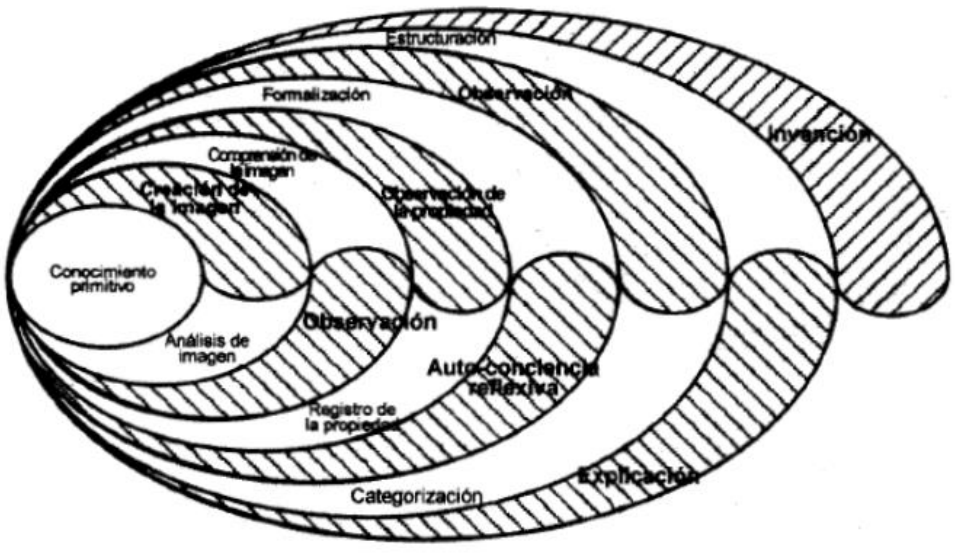



Imagen 6. Los elementos complementarios de nivel interno (Meel, 2003, p. 241).

Pirie y Kieren (1991, citado por Meel, 2003) retoman que la comprensión de una imagen, también tiene dos elementos complementarios que son: la primera es la visualización de una imagen, donde la persona reconoce un elemento diferente, pero no relacionado con su imagen mental de un concepto en específico, además posee la capacidad de explicar el porqué; y, la segunda, es la expresión de una imagen, donde la persona puede articular y razonar acerca de los elementos que difieren o se adecuan a cierta imagen. De acuerdo con Pirie y Kieren (1994, citado por Meel, 2003), el nivel de observación de la propiedad tiene como elementos complementarios: la predicción de la propiedad y el registro de la propiedad. Por lo tanto, Meel (2003) puntualiza que:

> El acto de la predicción de la propiedad relaciona la imagen con una propiedad observada por el estudiante, y el registro de la propiedad es un acto que incorpora dentro de la estructura cognitiva del estudiante la propiedad observada como algo que existe y parece funcionar. (p. 243)

En la línea de Pirie y Kieren (1994, citado por Meel, 2003), el nivel de la observación de la imagen y el de la observación de la propiedad, producen comprensiones temporales que pueden disminuir sino se regula con la expresión complementaria, y así puede obstaculizar el movimiento a otros niveles más elevados de este modelo de comprensión.

El estrato o nivel de la formalización de Pirie y Kieren (1994, citado por Meel, 2003), los dos elementos complementarios son: "la aplicación del método y la justificación del método" (p. 142); en tanto, la observación tiene dos elementos que se complementan que son: "la identificación de las características y la descripción de las características" (pp. 242-243).

Y, por último, el nivel de estructuración de Pirie y Kieren (1994, citado por Meel, 2003) posee dos elementos complementarios que son: “la conjetura de un teorema y la demostración de un teorema” (p. 243).

A continuación, se muestra, en la imagen 7, los anillos con complementos de acción y expresión, donde se puede visualizar mejor cada nivel y su respectiva complementariedad.

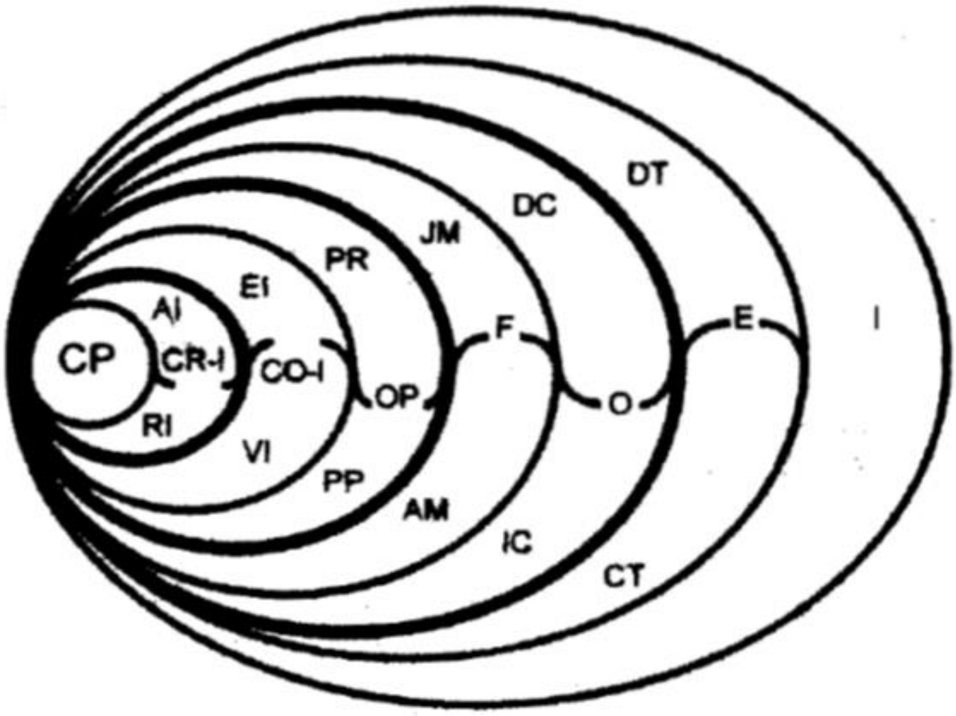



Imagen 7. Anillos con complementos de Acción y Expresión (Meel, 2003, p. 242).

Abreviaciones de los anillos con complementos de acción y expresión de Pirie y Kieren (Meel, 2003, p. 242)

| NIVEL Y ABREV. | ABREV. | NOMBRE | ABREV. | NOMBRE |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento primitivo **CP** | --- | --- | --- | --- |
| Creación de la imagen **CR-I** | AI | Análisis de la imagen | RI | Realización de la imagen |
| Comprensión de la imagen**CO-I** | EI | Expresión de la imagen | VI | Visualización de la imagen |
| Observación de la propiedad **OP** | RP | Registro de la propiedad | PP | Predicción de la propiedad |
| Formalización **F** | JM | Justificación del método | AM | Aplicación de método |
| Observación **O** | DC | Descripción de las características | IC | Identificación de las características |
| Estructuración **E** | DT | Demostración de un teorema | CT | Conjetura de un teorema |
| Invención **I** | --- | --- | --- | --- |

# 8. Metodología

## 8.1. Paradigma

El enfoque cualitativo es el que mejor se ajusta a la consecución del objetivo general y, claro está, a responder la pregunta de investigación; en este sentido, será la base para los métodos de recolección de información y sus respectivos análisis. Este paradigma se centra, según Álvarez- Gayou (2003), en que la observación, medición o apreciación se enfoquen en la realidad o contexto que se quiere conocer. Por este hecho, es importante no perder de vista que cada persona o estudiante tiene su propio contexto y realidad y, por ende, su subjetividad es construida de manera diferente, tanto en su forma de avanzar en sus procesos de comprensión o desarrollar algún aprendizaje. Por ello, es importante partir de pruebas diagnósticas y realizar actividades con doblado de papel, que permitan analizar la comprensión de los estudiantes acerca del concepto de semejanza y de congruencia como caso particular de esta.

Cada sujeto tiene un avance en la comprensión diferente de los demás y, en el presente trabajo, aprovechamos las ventajas que tiene el enfoque cualitativo de investigación. Una de ellas es que va desde los particular a lo general; de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010) "las investigaciones cualitativas se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general" (p. 9). En cuanto a esto, Londoño (2011) afirma que el enfoque cualitativo basa su importancia en la recolección de información no estandarizada y en el análisis de cada caso y cada dato investigado, así se llega entonces a una perspectiva compacta y general de lo investigado que podría posibilitar soluciones para la comprensión de un concepto en específico, dependiendo del contexto de los sujetos.

Por otro lado, Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman que el método cualitativo es flexible en cuanto permite regresar a etapas anteriores, lo cual puede ser notado en la elección de los participantes, dado que, por razones relativas al contexto, se debió realizar un cambio en las características de los estudiantes elegidos y, en general, del grupo que se quería investigar; por lo tanto, esto hizo que se generaran modificaciones y ajustes en el diseño de la investigación. Con el análisis de la información también puede suceder: pueden resultar modificaciones, como aquellas relacionadas con la evaluación de otro tipo de información o tener que aumentar o disminuir el número de participantes, para poder comprender sus realidades y poder extraer conclusiones generales.

### 8.2. Método

En esta investigación se ha optado por usar el método de estudio de casos, como diseño particular de la investigación pues, según Yin (2009), es abordado cuando se responden preguntas relacionadas con el cómo o por qué en una investigación; pero también cuando se posee un control precario sobre los eventos y, sobre todo, cuando el foco de la problemática se encuentra en un fenómeno contemporáneo dentro de un contexto real como el que se encuentra en este trabajo.

Por otra parte, Londoño (2011) afirma que el estudio de caso es utilizado para el análisis de información, en diversas disciplinas científicas y, por ende, en el ámbito educativo; dado que este método sirve de lupa para observar y analizar aspectos de una investigación, que de otra manera no se llagaría a su identificación. Para nuestra investigación es fundamental, puesto que estamos en un contexto real, con sujetos o estudiantes diversos, los cuales tienen maneras diferentes para alcanzar la comprensión de uno u otro concepto.

De esta manera, Stake (1999) considera que los investigadores que utilizan el paradigma cualitativo “destacan la comprensión de las complejas relaciones entre todo lo que existe” (p. 42). De igual forma, de acuerdo con Stake (1999), la comprensión tiene un componente psicológico bien pronunciado, desde el punto de vista de la empatía, sentimientos, pulsiones y motivaciones. En este sentido, el método de estudio de casos, resulta ser una herramienta poderosa para visualizar los ritmos de comprensión de los sujetos en estudio.

Por su parte, Martínez (2006) afirma que el estudio de casos es una herramienta muy valiosa que ayuda al investigador a comprender conductas de las personas involucradas en la investigación; los datos se pueden obtener de diferentes fuentes tanto cualitativas como cuantitativas (entrevistas, registro de archivos, observaciones directas, observaciones de los participantes, encuestas, y objetos físicos); esta combinación de fuentes ayuda a describir, verificar o generar teoría que permita la explicación de nuevos fenómenos.

## 8.3. Participantes

Los participantes de este trabajo de investigación son estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, de carácter público, cuyo modelo pedagógico está basado en lo social (social activo). La mayoría de los estudiantes pertenecen a los estratos 1 y 2. En particular, el grupo del grado décimo tiene 40 estudiantes; si bien, las actividades se llevaron a cabo con todos los estudiantes, solo se analizará el proceso de comprensión de tres de ellos, ya que cada estudiante tiene su propio proceso de aprendizaje y su propia realidad. En este sentido, Hernández, Fernández y Baptista (2010) postulan que:

> La "realidad" se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades. De este modo convergen varias "realidades", por lo menos la de los participantes. Además son realidades que van modificándose conforme transcurre el estudio y son las fuentes de datos. (p. 9)

Por lo anterior, es complejo analizar el proceso de comprensión de cuarenta estudiantes; por lo tanto, se eligieron tres estudiantes que poseían las siguientes características:

- Facilidad en el doblado de papel

- Tengan conceptos previos de geometría como punto, segmento, figuras geométricas (triángulos, cuadrados, por ejemplo), figuras tridimensionales (cubos), entre otros.

- Que tengan facilidad para expresar sus ideas de forma escrita y oral, con el propósito de poder identificar los procesos de comprensión de los estudiantes.

Con estos estudiantes, se procederá a realizar un análisis de las maneras en que el doblado de papel permite la comprensión de la congruencia como caso particular de la semejanza, para intentar responder a nuestra pregunta de investigación.

## 8.4. Métodos de recolección de la información

Este trabajo de investigación utiliza como métodos de recolección de la información:

- La observación en contexto de los sujetos implicados en el proyecto. Stake (1999) menciona que los contextos se deben describir pues ayudan a encontrar semejanzas entre los casos; además, también ayudan al lector a involucrarse con el mismo, como si estuviera ahí presente. De la misma manera, Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman que la observación no solo se limita al sentido de la vista, sino que implica los demás sentidos, para poder hacer una observación del ambiente físico, del ambiente social y humano, de las actividades individuales y colectivas, de hechos relevantes, entre otros.

- La entrevista. Esta es una herramienta que ayuda a describir en profundidad los contextos y los procesos que cada estudiante vivió durante el proceso de las actividades Stake (1999) establece que la entrevista es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples, al considerar que cada entrevistado haya tenido una experiencia única y brinde respuestas que den cuenta de una descripción de un episodio. Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman que es un diálogo en el cual se intercambia información entre el entrevistado y el entrevistador que ayuda a la construcción conjunta de significados de un tema en específico.

- Revisión del material de los estudiantes. Las construcciones hechas mediante el doblado de papel y las respuestas de las actividades, se van a revisar para poder analizar los procesos de comprensión de los estudiantes del estudio de casos, en cuanto a los conceptos de semejanza y congruencia. Hernández, Fernández y Baptista (2010) explican que la recolección de información tiene una función fundamental y es dar un mayor entendimiento de las experiencias de los estudiantes.

## 8.5. Camino metodológico propuesto

A continuación, se hace una breve descripción de las actividades que se desarrollaron con los estudiantes del grado 10°, para dar consecución a los objetivos del estudio.

- Prueba diagnóstica que nos muestra las dificultades que tienen los estudiantes sobre la comprensión de la semejanza y la congruencia como caso particular de esta.

- La construcción de un cubo con doblado de papel, en la cual se realizan preguntas intencionadas a los estudiantes a medida que se desarrolla la actividad, con el fin de ir encontrando pistas acerca de lo que ellos comprenden del concepto de semejanza y de congruencia.

- La construcción de un cubo con doblado de papel, que a diferencia de la actividad anterior, en esta se pretende desarrollar un cubo más grande, con el propósito de que los estudiantes comparen la figura pequeña con la más grande.

- Actividad de modelación, donde se trabajará a la par con los dos cubos, con la intención de encontrar y comparar sus volúmenes; se realizarán, a su vez, preguntas intencionadas para que el estudiante pueda encontrar constantes de proporcionalidad y pueda reconocer cuándo dos figuras son congruentes o semejantes, y pueda, además, encontrar la relación entre semejanza y congruencia.

El esquema de actividades para la evolución de la comprensión del concepto de semejanza, a través del refinamiento continuo en las actividades propuestas, es el siguiente:

| **NIVEL 1: CONOCIMIENTO PRIMITIVO** | **NIVEL 2: CREACIÓN DE LA IMAGEN** | **NIVEL 3: COMPRENSIÓN DE LA IMAGEN** | **NIVEL 4: OBSERVACIÓN DE LA PROPIEDAD** |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Actividad I odiagnóstica: que pretende visualizar qué comprenden los estudiantes sobre el concepto de semejanza, y de congruencia, a través de ciertas preguntas que se encuentran en dicha actividad. | Actividad II: Se elabora la construcción de un cubo con doblado de papel, con una medida específica, realizado con seis módulos idénticos, los cuales se ensamblan y generan la figura. A medida que se desarrolla esta construcción se hacen unas preguntas intencionadas, que faciliten el proceso de comprensión. | Actividad III: Se realiza nuevamente la actividad II, sobre la construcción del cubo; pero esta vez se realiza con un módulo más grande. La intencionalidad de las preguntas, es que el estudiante explore en sus conocimientos primitivos y establezca distinciones que ayuden al proceso evolutivo de la comprensión del concepto como tal. | Actividad IV: Actividad de modelación, donde se trabajará a la par con los dos cubos, con la intención de encontrar y comparar sus volúmenes; se realizarán, a su vez, preguntas intencionadas para que el estudiante pueda encontrar constantes de proporcionalidad y pueda reconocer cuándo dos figuras son congruentes o semejantes, y pueda, además, encontrar la relación entre semejanza y congruencia. El estudiante podría reconocer y utilizar estas imágenes para |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | identificar propiedades globales de los objetos e imágenes matemáticas del concepto de semejanza y, en consecuencia, pueda entender imágenes particulares de la comprensión del concepto. Con esta actividad el estudiante puede establecer algunos atributos específicos del concepto que le podrían permitir llegar a la comprensión del concepto de semejanza, además, comprender que la congruencia es un caso especial de la semejanza. |

### 8.6. Actividades diseñadas

Las actividades diseñadas se presentan a continuación:

**PRÁCTICA PEDAGÓGICA I**

**ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA**

NOMBRE: ______________________________________________________

Estimado(a) estudiante: la presente actividad diagnóstica pretende recolectar información acerca de los conceptos geométricos de congruencia y semejanza; por lo cual, le solicitamos responder con seriedad y sinceridad, ya que sus aportes son de gran importancia para el trabajo de investigación que se está realizando en el área de geometría, en la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia.

A continuación se presentan varias preguntas, en algunas de ellas se solicita dar respuestas que estén relacionadas con surealidad; favor escribir con claridad opiniones y experiencias.

1. **¿Escriba con sus propias palabras cuándo dos figuras son semejantes?**

___________________________________________________________________________

___________________________________________________________

2. **¿Escriba con sus propias palabras cuándo dos figuras son congruentes?**

___________________________________________________________________________

__________________________________________________________

3. **¿Si una figura es congruente con otra, entonces también serán semejantes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**

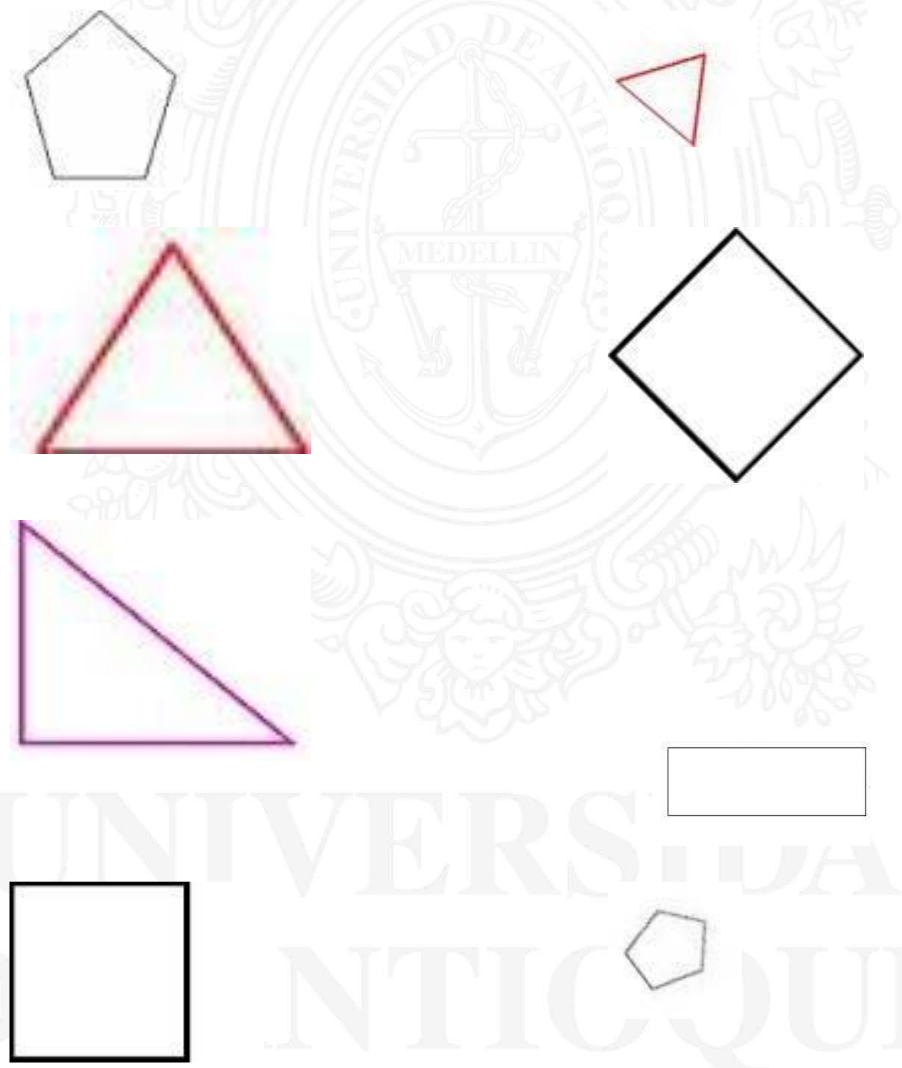
___________________________________________________________________________

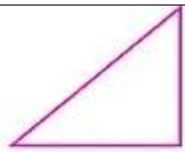
_________________________________________________________

4. **¿Si dos figuras son semejantes, entonces serán congruentes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**

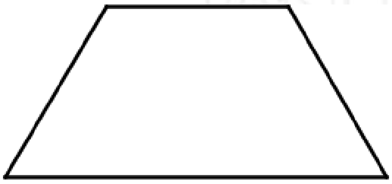
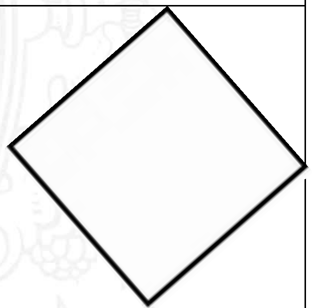
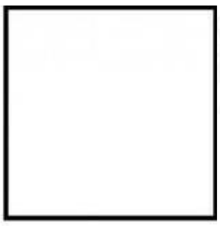
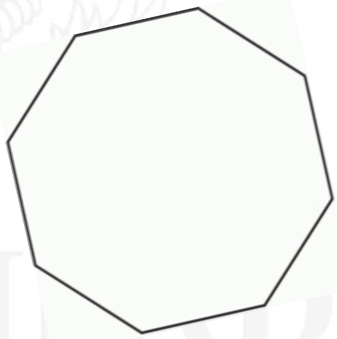
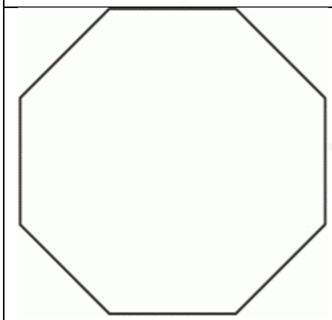
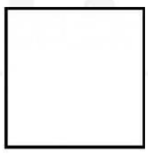
5. **Relacione mediante flechas, las figuras de la columna A con sus respectivas figuras semejantes de la columna B.**

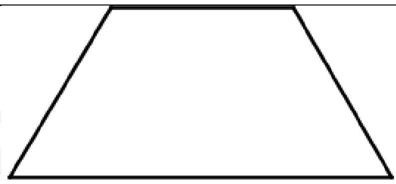
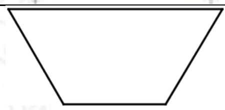
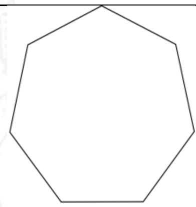
| COLUMNA A | COLUMNA B |
| --- | --- |



| | |
|---|---|
|  |  |

6. **Relacione mediante números, las figuras de la columna A con sus respectivas figuras congruentes de la columna B (pueden sobrar figuras en la columna B).**

| COLUMNA A | COLUMNA B |
|---|---|
|  _____ | 1  |
|  _____ | 2  |
|  _____ | 3  |

| | |
|---|---|
|  ____ | 4  |
| | 5  |
| | 6  |
| | 7  |

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES**

**PRÁCTICA PEDAGÓGICA II**

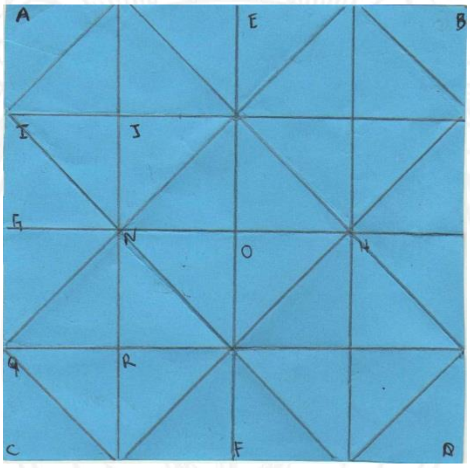
**ACTIVIDAD 1: CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO CON DOBLADO DE PAPE**

NOMBRE: ______________________________________________

A continuación, se realizará la construcción de una figura modular por medio del doblado de papel. Se formularán preguntas concernientes tanto al mosaico de pliegues que surge de la construcción del módulo, como del cubo mismo. Se sugiere que sean respondidas con la mayor claridad que sea posible.

Preguntas:

Sobre el módulo:




1. ¿Qué relación puede establecer entre las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC?

2. Corrobore, mediante el doblado de papel, si los lados y los ángulos de las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC son iguales. Explique el procedimiento realizado.

3. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABDC y el lado del cuadrado AEOG?

4. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABDC, equivale el cuadrado OHDF?

5. ¿Qué relación puede establecer entre las 16 figuras que se formaron en el mosaico de pliegues?

6. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABDC y el lado del cuadrado IJNG?

7. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABDC, equivale el cuadrado GNRQ?

Con la figura construida:

1. Explique si la figura que se construyó es un cubo.

______________________________________________________________________________

_____________________________________________________________________________

2. ¿Qué relación puede establecer entre las caras del cubo?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

3. Corrobore si los lados y los ángulos de las caras del cubo son iguales. Explique el procedimiento indicado.

______________________________________________________________________________

4. ¿Qué relación puede establecer entre los triángulos que se formaron en las caras del cubo?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

**PRÁCTICA PEDAGÓGICA II**

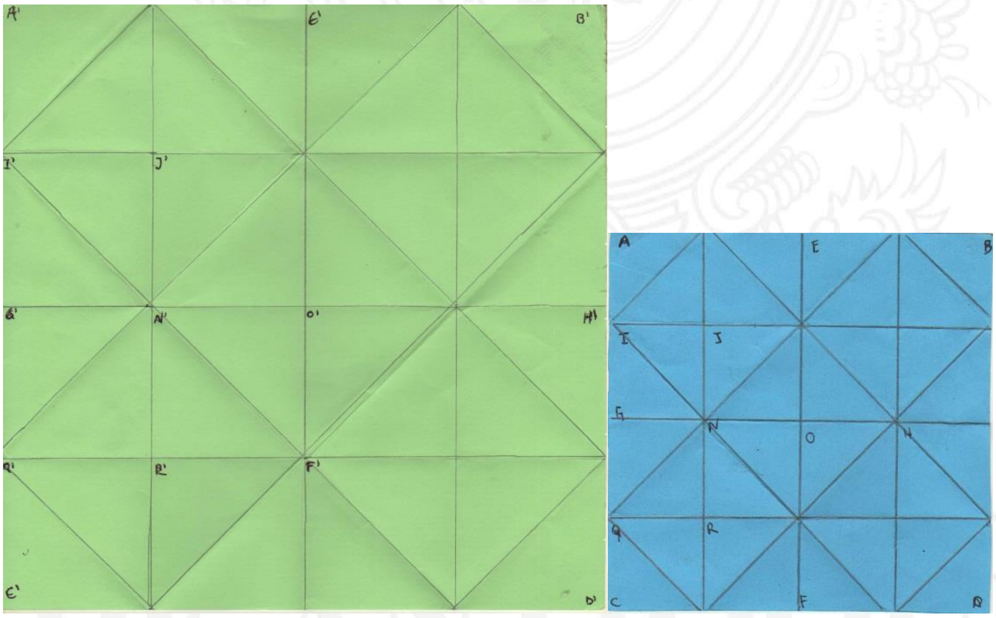
**ACTIVIDAD 2: CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO CON DOBLADO DE PAPEL**

NOMBRE: ______________________________________________

En esta actividad se realizará la misma figura modular de la actividad 1. Se formularán preguntas concernientes tanto al mosaico de pliegues que surge de la construcción del módulo, como del cubo mismo. Igualmente se preguntará por las relaciones que pueden existir entre el cubo menor y el cubo mayor. Este resultado nos dará pie para encontrar y visualizar relaciones que van en vía de la comprensión. Se sugiere que sean respondidas con la mayor claridad que sea posible.

Preguntas:

Sobre el módulo:



1. ¿Qué relación puede establecer entre las figuras A´E´O´G´, E´B´H´O´, O´H´D´F´ y G´O´F´C´?

2. ¿Qué relación puede establecer entre el cuadrado AEOG del módulo menor y el cuadrado A´E´O´G´ del módulo mayor?Establecer también la relación entre el cuadrado EBHO con E´B´H´O´; el cuadrado OHDF con O´H´D´F´ y el cuadrado GOFC con G´O´F´C´ del módulo menor y el módulo mayor, respectivamente

3. Corrobore, mediante el doblado de papel, si los lados y los ángulos de las figuras A´E´O´G´, E´B´H´O´, O´H´D´F´ y G´O´F´C´ son iguales. Explique el procedimiento realizado.

4. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABDC del módulo menor y el lado del cuadrado A´B´D´C´ del módulo mayor?Además,¿qué relación encuentra entre el lado del cuadrado AEOG del módulo menor y el lado del cuadrado A´E´O´G´ del módulo mayor?

5. ¿Qué porción del área total del cuadrado A´B´D´C´, equivale el cuadrado O´H´D´F´?A su vez, analice qué porción de área total corresponde el cuadrado ABDC del módulo menor con respecto al cuadrado A´B´D´C’ del módulo mayor?

6. ¿Qué relación puede establecer entre las 16 figuras que se formaron en el mosaico de pliegues del módulo menor con las 16 formadas en el módulo mayor?

7. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado A´B´D´C´ y el lado del cuadrado I´J´N´G´?Compárelos con el lado del cuadrado respectivo ABDC y el lado del cuadrado IJNG?

8. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABDC, equivale el cuadrado A´B´D´C´?

Con la figura construida:


1. Explique si la figura que se construyó es un cubo.

2. ¿Qué relación puede establecer entre las caras de ambos cubos?

3. Determine si los lados y los ángulos de las caras de uno de los cubos son iguales a los lados y los ángulos de las caras del otro. Explique el procedimiento empleado.

4. ¿Qué relación puede establecer entre los triángulos que se formaron en las caras de cada cubo?Compare ambos cubos

# FACULTAD DE EDUCACIÓN

## ACTIVIDAD IV: CONSTANTES DE PROPORCIONALIDAD Y VOLUMEN DE LOS CUBOS

NOMBRE: ______________________________________________

**Para tener en cuenta**: en la presente actividad hallaremos el volumen de las dos figuras construidas con doblado de papel, para encontrar constantes de proporcionalidad; esto nos ayudará a identificar cuándo dos figuras son congruentes o semejantes.

Tendremos presente las siguientes variables:

**L:** medida del lado de la hoja del módulo grande.

**l:** medida del lado del cubo grande.

En uno de los módulos, con la ayuda de un lápiz, marcamos uno de los bordes de alguna de las caras del cubo; posteriormente, desarmamos ese módulo y, al observarlo detenidamente, veremos el segmento subrayado, el cual nos servirá para encontrar el volumen del cubo;

notemos, en las cicatrices del módulo, que el lado del cubo es una diagonal de un cuadrado. Por medio del Teorema de Pitágoras, podemos hallar el valor de la diagonal.

¿Qué dice el teorema de Pitágoras?

Recuerde que el teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo con hipotenusa h y catetos $c_1$ y $c_2$, se cumple que: $h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2$

¿Qué clase de triángulo se forma con el lado del cubo l? ¿Por qué?

¿Puede usar el teorema de Pitágoras? ¿Cómo?

Si L es el lado de la hoja de papel, con la que se inició la construcción, ¿cuánto miden los catetos del triángulo rectángulo que tiene hipotenusa l?

Esboce el teorema de Pitágoras, considerando los catetos en términos de L:

Con respecto a lo anterior, realice las siguientes acciones:

1. Encontrar la medida del lado l, en términos de L (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

2. Hallar el volumen del cubo grande. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es V = $(l)^3$

Ahora, repetiremos el procedimiento anterior para encontrar el volumen del cubo pequeño. Para ello, tenga en cuenta los siguientes cambios:

**M:** medida del lado de la hoja del módulo pequeño.

**m:** medida del lado del cubo pequeño.

3. Encontrar la medida del lado m, en términos de M (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

4. Hallar el volumen del cubo pequeño. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es V' = $(m)^3$

De acuerdo con las construcciones de los cubos en doblado de papel, se puede determinar que $M = \frac{L}{2}$. ¿Por qué?

5. Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre el volumen V' en términos de L

6. Después de encontrar las medidas de los volúmenes del cubo grande y del cubo pequeño (V y V') en términos de L, analice la siguiente proporción:

$$\frac{V'}{V} = \frac{medida\ del\ volumen\ del\ cubo\ peque\tilde{n}o}{medida\ del\ volumen\ del\ cubo\ grande}$$

Note que algunos términos iguales se simplifican, arrojando como resultado una constante de proporcionalidad. ¿Qué significado matemático cree que tiene? ¿Cuántos cubos pequeños caben en el cubo grande?

7. Corroborar la respuesta con las construcciones realizadas con doblado de papel, es decir, en este caso introduzca el cubo pequeño dentro del cubo grande. ¿Qué puede concluir al respecto?

8. Si tuviéramos cuatro cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?

9. Si tuviéramos ocho cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?

10. Si unen cuatro caras de los cubos pequeños, formando un nuevo cuadrado, visto desde el plano, ¿qué relación tiene este con la cara del cubo grande? ¿Son semejantes? ¿Son congruentes? ¿Por qué?

11. ¿Qué relación puede establecer entre los lados del cubo grande y los lados del cubo pequeño? ¿Son figuras semejantes o son figuras congruentes? ¿Por qué?

12. ¿Si consideras el cubo grande y lo comparas con los 8 cubos pequeños distribuyéndolos de tal manera que se forme otro cubo similar al grande, ¿son las caras de ambos cubos congruentes? ¿Son semejantes? ¿Por qué?

13. Considera las respuestas de las tres preguntas anteriores, ¿podrías encontrar una relación entre la semejanza y la congruencia? ¿Cuál sería esa relación?

14. ¿Se podría decir que dos figuras que son semejantes, son congruentes?

15. ¿Se podría decir que dos figuras que son congruentes son semejantes? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

## 7.7. Tabla de descriptores

A continuación, presentamos una tabla de descriptores hipotéticos que pueden caracterizar la comprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia, como caso particular de la semejanza. Esta tabla surgió del análisis del Modelo de Pirie y Kieren y de las actividades desarrolladas en la investigación, que se mostraron en el apartado anterior. La comparación continua y constante de los descriptores con las actuaciones de los estudiantes durante el trabajo de campo, nos permiten analizar su proceso de comprensión y ubicarlos en alguno de los niveles del marco teórico. Es importante mencionar que en este trabajo de investigación, solo se propusieron actividades hasta el nivel 4 del modelo, pues se considera que no es posible alcanzar los demás, en un proceso de enseñanza y aprendizaje en secundaria.

| **NIVEL 1: CONOCIMIENTO PRIMITIVO** | **NIVEL 2: CREACIÓN DE LA IMAGEN** | **NIVEL 3: COMPRENSIÓN DE LA IMAGEN** | **NIVEL 4: OBSERVACIÓN DE LA PROPIEDAD** |
|---|---|---|---|
| 1.1 Reconoce cuándo dos figuras tienen la misma forma. | 2.1 Reconoce algunas nociones de geometría como: punto, segmento, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras, en construcciones con doblado de papel. | 3.1 Comprende el concepto de semejanza de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. | 4.1 Reconoce relaciones de proporcionalidad. |
| 1.2 Identifica las clasificaciones de los triángulos y de los cuadriláteros. | 2.2 Realiza algunas construcciones geométricas con doblado de papel. | 3.2 Comprende el concepto de congruencia de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. | 4.2 Establece relaciones matemáticas de proporcionalidad entre lados correspondientes de figuras semejantes |
| 1.3 Identifica los ángulos y los lados de una figura geométrica. | 2.3 Reconoce la definición de congruencia de figuras. | | 4.3 Concluye que la congruencia de figuras es un caso particular de la |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | semejanza de figuras. |
| 1.4 Percibe el concepto de semejanza. | 2.4 Reconoce la definición de semejanza de figuras. | | |
| 1.5 Percibe el concepto de congruencia. | 2.5 Realiza comparaciones entre dos figuras geométricas y sus partes, para establecer relaciones. | | |

# 9. Análisis de la información

## 9.1. Metodología del análisis de la información

El análisis de la información, al ser realizado con datos no centralizados, se convierte en un análisis no es estadístico; al respecto, Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman:

> La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades. Debido a ello, la preocupación directa del investigador se concentra en las vivencias de los participantes tal como fueron. (p. 9)

Para la recolección de la información,  se utilizaron técnicas como las que se mencionan a continuación:

1. Observaciones no estructuradas realizadas por los integrantes de la investigación durante la realización delas actividades, luego fueron transcritas y analizadas.

2. Revisión del material de los estudiantes, resultado de la realización de las actividades.

3. Transcripción de las entrevistas realizadas a los estudiantes escogidos.

Esto nos da a entender que cada estudiante vive su propio proceso de comprensión y vive su propia realidad; por ende las técnicas utilizadas en la investigación deben dar cuenta de cada proceso de los estudiantes que participan en la investigación, y su modo de comprender un concepto, en este caso la congruencia como un caso particular de la semejanza.

## 9.2. Secuencia de las actividades

La actividad diagnóstica 1, que fue aplicada al grupo del grado 10°  de una Institución Educativa situada en la ciudad de Medellín, se realizó con todos los estudiantes del mismo; el propósito era reconocer los conocimientos previos de los estudiantes (conocimientos primitivos), aspecto que nos ayudaría a fortalecer el planteamiento del problema del trabajo de investigación y, a su vez, identificar en qué nivel del modelo de Pirie y Kieren se encontraban los estudiantes. Se pudo inferir que la mayoría de estudiantes no pasaban del nivel 1 de conocimiento primitivo.

Actividad 2, construcción de un cubo por medio del doblado de papel. Esta actividad también se realizó con todo el grupo, con la intención de motivarlos con una clase diferente a una magistral. Los estudiantes, al ir respondiendo unas preguntas guiadas, se fueron apropiando de algunos conceptos geométricos. Este momento fue aprovechado por los investigadores, para observar los estudiantes que podrían hacer parte del estudio de casos de la investigación. Se pudo percibir que esta actividad dio un buen resultado, dado que se destacó el trabajo en grupo; algunos estudiantes mostraron ciertas destrezas con los dobleces, para crear los módulos; a su vez, ayudaban a los que eran menos hábiles. Entre todos los integrantes del grupo, se hacían puestas en común para responder las preguntas; esto permitió que la actividad fuera más interesante, pues los estudiantes lograban establecer relaciones geométricas para responder los interrogantes.

Actividad 3, de construcción de un cubo de diferente tamaño al anterior. Con esta actividad, se buscaba que los estudiantes pudieran comparar las dos figuras construidas y establecer relaciones entre los dos módulos con sus cicatrices. Estas construcciones se llevaron a cabo con todo el grupo, pero se observaron con más profundidad las actuaciones de aquellos que hacían parte del estudio de casos. Es importante rescatar el trabajo en grupo, pues se ha percibido que las interacciones entre los estudiantes permiten la comprensión de algunos conceptos geométricos, asociados con las construcciones. Se notó, además, más habilidad para los dobleces y más rapidez para el análisis de las preguntas.

Actividad 4 donde se obtiene la medida de los volúmenes del cubo grande y pequeño para realizar comparaciones y llegar a constantes de proporcionalidad, que ayudarán a comprender los conceptos de semejanza y de congruencia. Esta actividad solo se realizó con los tres estudiantes seleccionados para el estudio de casos. Se percibió que fue muy enriquecedora, dado que los estudiantes compartían sus respuestas, las argumentaban y lograron responder, de buena manera, a las tareas propuestas. Es claro que se notaron dificultades a la hora de realizar cálculos en términos de una variable, o de llegar a alguna formalización. Normalmente, a los estudiantes se les facilita más el trabajo con constantes o medidas fijas; trabajar con variables se les convirtió en un obstáculo, que dificultó el cálculode los volúmenes  de las figuras construidas,el cual era un paso fundamental para poder encontrar proporciones entre los volúmenes y llegar a la relación entre la semejanza y la congruencia, pero este aspecto no fue motivo de estudio en la investigación. Sin embargo, sí se considera fundamental analizarlo dentro de un proceso general de enseñanza y aprendizaje de geometría.

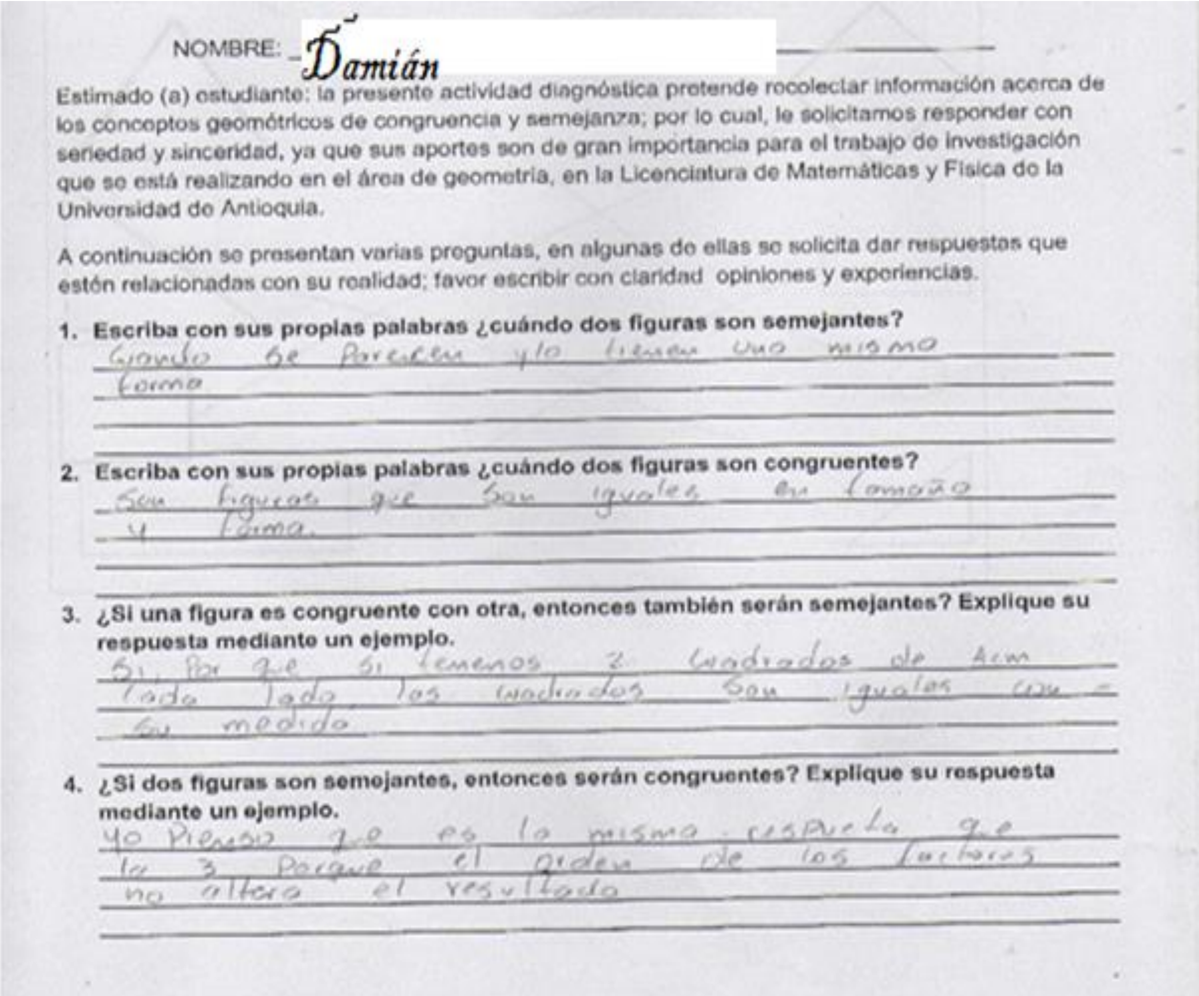
## 9.3. Análisis del proceso de los estudiantes

### 9.3.1. Proceso de Damián.

El estudiante, cuyo seudónimo es Damián, es atento y disciplinado; fue elegido para ser parte del estudio de casos; su disposición permitió que el desarrollo de las actividades fuera dinámico porque participó activamente de las discusiones, construyendo las figuras y formulando nuevos cuestionamientos. Es importante mencionar que este estudiante es repitente del grado décimo, por sus falencias en lengua castellana y en algunas materias de la media técnica, que fueron las que le ocasionaron la pérdida del año lectivo.

Para realizar un análisis de cómo Damián comprende el concepto de semejanza, y la congruencia como caso particular de la misma, a continuación se hará explícito su proceso en el desarrollo de cada una de las actividades:

Actividad I. Las respuestas del estudiante Damián en la prueba diagnóstica, cuyo propósito era reconocer el estrato del conocimiento primitivo, se presentan en las imágenes 8a,8b y 8c.En dicha actividad, Damián contestó cuatro preguntas y dos ejercicios de comparación, los cuales nos permiten dilucidar en qué estrato de comprensión se encuentra y cómo comprende el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, considerando los conocimientos previos que tiene sobre los conceptos de polígonos, semejanza y congruencia.



NOMBRE: Damián

Estimado (a) estudiante: la presente actividad diagnóstica pretende recolectar información acerca de los conceptos geométricos de congruencia y semejanza; por lo cual, le solicitamos responder con seriedad y sinceridad, ya que sus aportes son de gran importancia para el trabajo de investigación que se está realizando en el área de geometría, en la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia.

A continuación se presentan varias preguntas, en algunas de ellas se solicita dar respuestas que estén relacionadas con su realidad; favor escribir con claridad opiniones y experiencias.

1. **Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son semejantes?**
Cuando se Parecen y lo tienen una misma forma

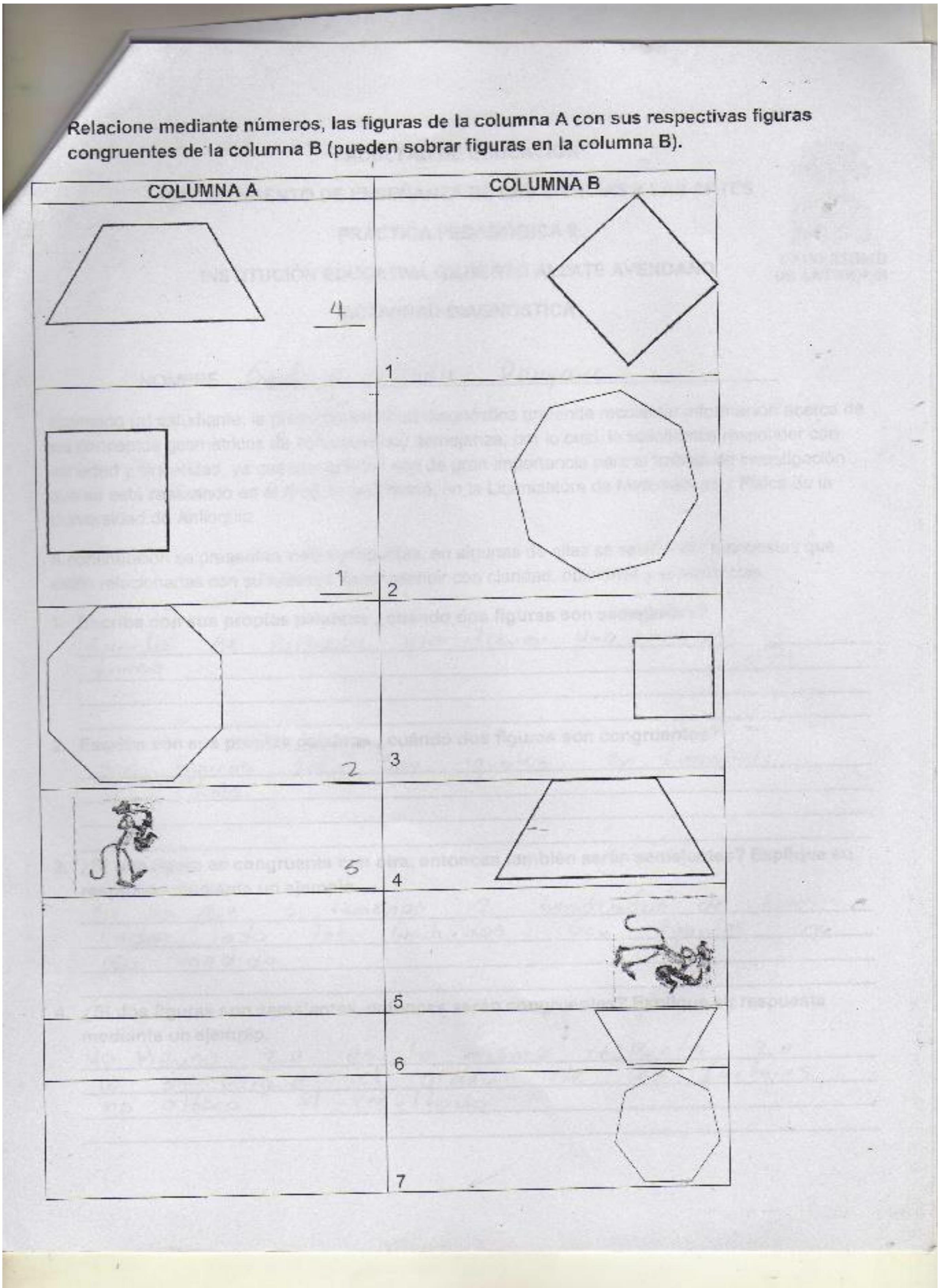
2. **Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son congruentes?**
Son figuras que son iguales en tamaño y forma.

3. **¿Si una figura es congruente con otra, entonces también serán semejantes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**
Si, Por que si tenemos 2 cuadrados de 4cm cada lado los cuadrados son iguales con su medida

4. **¿Si dos figuras son semejantes, entonces serán congruentes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**
yo Pienso que es la misma respueta que la 3 Porque el orden de los factores no altera el resultado

*Imagen 8a*.Respuestas escritas por Damián en la Actividad Diagnóstica.

Tal como se percibe en la imagen 8a, en las tres primeras preguntas, se nota que el estudiante reconoce las nociones de semejanza o de congruencia, pues manifiesta que la semejanza se relaciona con figuras parecidas que tienen la misma forma y, la congruencia, la asocia con figuras de igual tamaño y forma; sin embargo, en la pregunta cuatro, parece manifestar que la congruencia implica semejanza y viceversa. Es decir, cree que son conceptos iguales. Esto nos permite inferir que no comprende los conceptos objeto de estudio, ni distingue que la congruencia es un caso particular de la semejanza; de acuerdo con sus respuestas, parece recurrir a unos conocimientos previos que tiene y que consideramos errados, los cuales deberían estar claros, por ser conceptos trabajados en años anteriores. Por lo tanto, no ha alcanzado la comprensión de los conceptos ni las relaciones que se dan entre ambos.



Relacione mediante números, las figuras de la columna A con sus respectivas figuras congruentes de la columna B (pueden sobrar figuras en la columna B).

| COLUMNA A | COLUMNA B |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 5 | 4 |
| | 5 |
| | 6 |
| | 7 |

*Imagen 8b*.Respuestas escritas por Damián en la Actividad Diagnóstica.

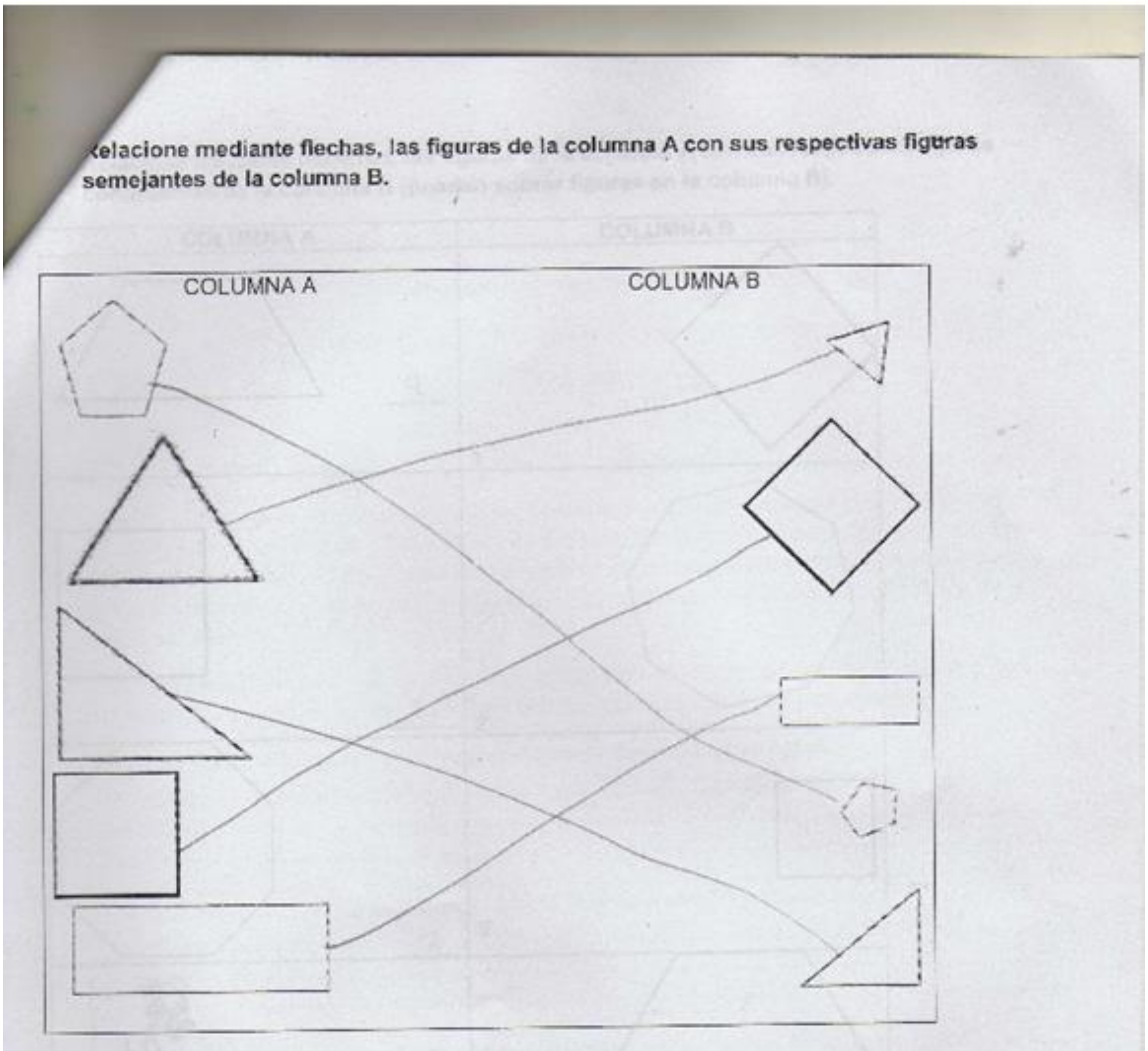



*Imagen 8c*. Respuestas escritas por Damián en la Actividad Diagnóstica.

De acuerdo con las respuestas de Damián a las comparaciones que se presentaron en las imágenes 8b y 8c, percibimos que identificó que dos objetos son congruentes, pero también reconoció el concepto de semejanza parcialmente; además, reconoció figuras planas identificando sus características como: lados, ángulos, entre otros. Al mismo tiempo, se observa que acertó en ambas comparaciones.

Análisis de los descriptores del nivel 1, para el conocimiento primitivo.

La actividad  I o actividad diagnóstica se asocia con los descriptores del segundo nivel: conocimiento primitivo. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

1.1. Reconoce  cuándo dos figuras tienen la misma forma. Mediante las actividades y el rastreo que se hizo de Damián, podemos establecer que reconoce la igualdad de la forma entre figuras. Por ejemplo, se pudo constatar en la actividad diagnóstica, en las imágenes 6b y 6c, que puede relacionar objetos que tienen la misma forma, pues realizó de manera correcta la asociación y comparación entre figuras geométricas, tanto congruentes como semejantes.

1.2. Identifica las clasificaciones de los triángulos y de los cuadriláteros. De acuerdo con las respuestas de la actividad diagnóstica, se puede inferir que identifica algunas figuras geométricas, como cuadriláteros y triángulos, pero no es posible afirmar que reconoce las clasificaciones de los mismos. Es probable que en actividades posteriores, se pueda establecer el cumplimiento del descriptor.

1.3. Identifica los ángulos y los lados de una figura geométrica. El desenvolvimiento del estudiante en esta actividad, al relacionar de manera correcta formas independientes de la posición, nos lleva a inferir que identifica los conceptos de ángulos y de lados, en las figuras geométricas.

1.4. Percibe el concepto de semejanza. De las respuestas de la actividad I, las cuales pueden ser observadas en la imagen  6a, se nota que el estudiante lo escribe, entonces podemos inferir que Damián percibe cuando dos figuras son semejantes y lo hace de una manera explícita mediante la forma de comparación de las figuras en las imágenes 8b, 8c.

1.5. Percibe el concepto de congruencia. De las respuestas de la actividad I, como se observa en la imagen 8a, se nota que el estudiante lo redacta, de manera tal que podemos inferir que Damián percibe cuando dos figuras son congruentes y lo hace de una manera explícita mediante la forma de comparación de las figuras en las imágenes 8b y8c.

De acuerdo con las actuaciones del estudiante en los dos últimos descriptores, el 1.4 y el 1.5 podemos encontrar que percibe e identifica cuándo dos figuras son semejantes o cuándo son congruentes; pero debido a que en la pregunta cuatro de la imagen 6a su respuesta no es satisfactoria, entonces Damián no ha logrado percibir la relación que hay entre congruencia y semejanza; por lo tanto podemos decir que no comprende que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Teniendo en cuenta el análisis anterior y, considerando los ejercicios de la actividad I o diagnóstica, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel 1: conocimiento primitivo de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores de los demás niveles y, así mismo, establecer si ha comprendido que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Actividad II.Se realizó la construcción de un cubo en origamimodular (de seis módulos) por medio del doblado de papel (ver imagen 9b). También se formularon preguntas intencionadas tanto al mosaico de pliegues (imagen 9a), que surge de la construcción del módulo, como al cubo mismo.

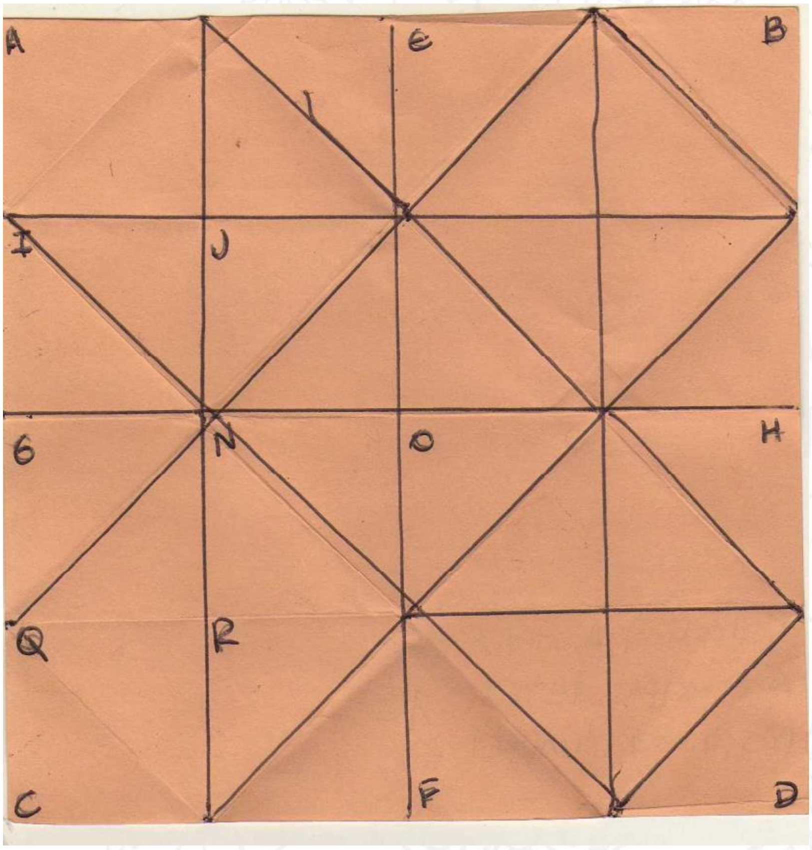



*Imagen 9a. Módulo realizado por el estudiante Damián.*

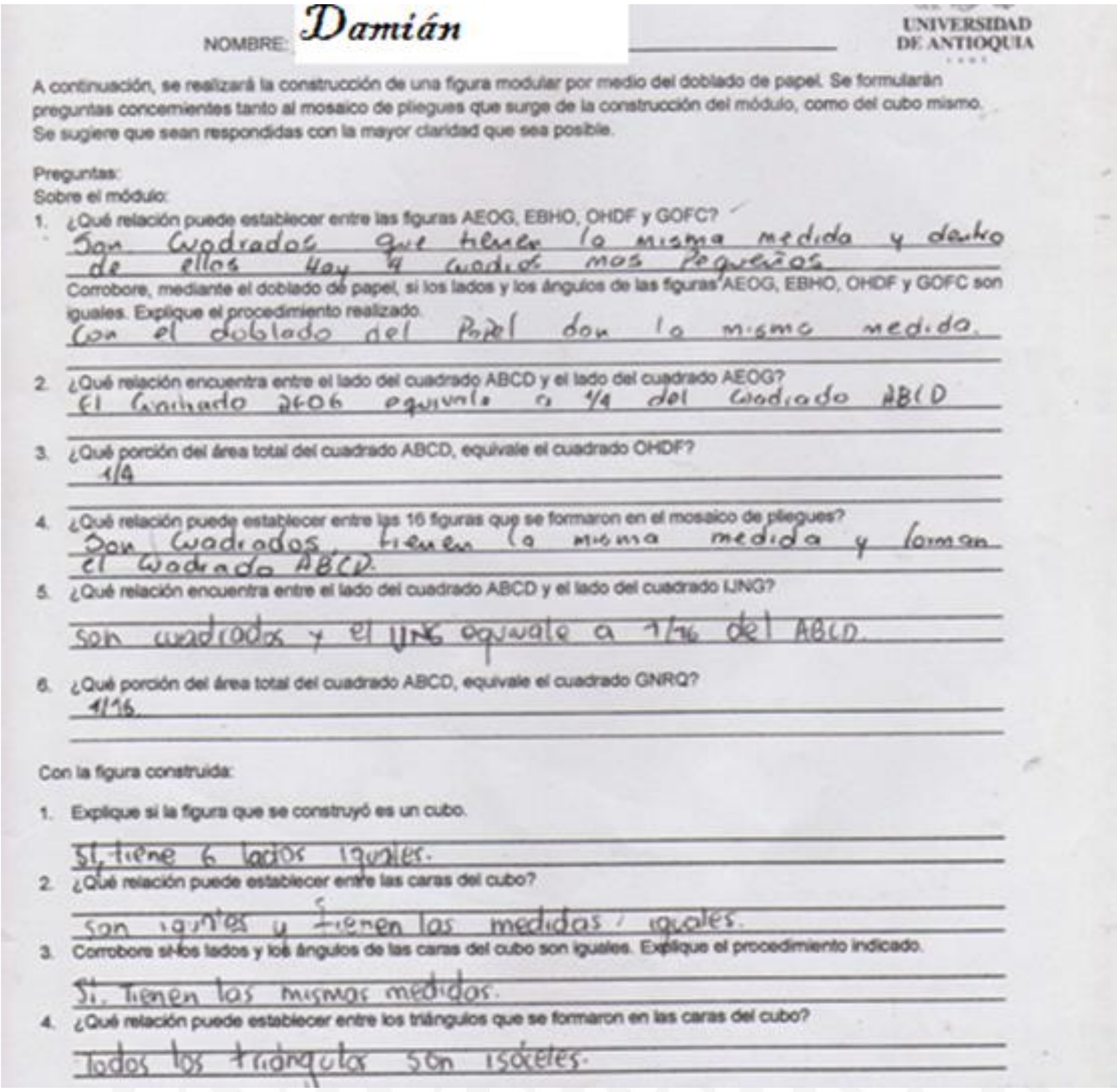
*Imagen 9b. Cubo realizado por el estudiante Damián.*

Este estudiante, como tiene habilidades de motricidad fina, realiza correctamente los pasos que el orientador va indicando con el doblado de papel. Cada uno de los seis módulos, son hechos de igual manera; por último, se arma el cubo con los módulos. Logrando un cubo tridimensional y tangible.

De acuerdo con la actividad realizada, Damián encontró figuras semejantes a partir de los pliegues que quedaron después de la construcción del módulo y en la visualización de las caras del cubo, reconociendo el concepto de semejanza y de congruencia por separado. Como por ejemplo, en observaciones y diálogos casuales sostenidos con él, nos dijo que fácilmente se notan dieciséis cuadrados iguales o congruentes, o también en cada cuadrado encontró dos triángulos isósceles, que a su vez son rectángulos y congruentes, como se percibe en la imagen 9a. De igual manera, lo ratificó al volver a armar la figura de la imagen 9b mostrando notoriamente sus actitudes frente al doblado de papel. Algunos conceptos geométricos los pudo enunciar fácilmente: “el punto es en donde dos pliegues se cruzan, una recta es el pliegue…”. Esto indica que algunas nociones de geometrías las comprende.

Así mismo, señala algunas figuras geométricas que se forman tanto en el cubo armado como en los pliegues que quedan al desdoblar uno de los módulos; además de percibir el concepto semejanza y de congruencia, identifica  tangible y visualmente dichas figuras, reconociendo de alguna manera el concepto de semejanza y congruencia por separado; Damián muestra en los módulos cuándo dos figuras son semejantes y cuándo dos figuras son congruentes.

En la  imagen 9c, se registraron algunas preguntas escritas a las que Damián respondió mientras trabajó armando el cubo y, al mismo tiempo, se le observaba de manera continua; estas  preguntas permitieron caracterizar sus conocimientos geométricos.



NOMBRE: Damián

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

A continuación, se realizará la construcción de una figura modular por medio del doblado de papel. Se formularán preguntas concernientes tanto al mosaico de pliegues que surge de la construcción del módulo, como del cubo mismo. Se sugiere que sean respondidas con la mayor claridad que sea posible.

Preguntas:
Sobre el módulo:

1. ¿Qué relación puede establecer entre las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC?
Son cuadrados que tienen la misma medida y dentro de ellos hay 4 cuadros mas pequeños

Corrobore, mediante el doblado de papel, si los lados y los ángulos de las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC son iguales. Explique el procedimiento realizado.
Con el doblado del papel dan la misma medida.

2. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABCD y el lado del cuadrado AEOG?
El cuadrado AEOG equivale a 1/4 del cuadrado ABCD

3. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABCD, equivale el cuadrado OHDF?
1/4

4. ¿Qué relación puede establecer entre las 16 figuras que se formaron en el mosaico de pliegues?
Son cuadrados, tienen la misma medida y forman el cuadrado ABCD.

5. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABCD y el lado del cuadrado IJNG?
son cuadrados y el IJNG equivale a 1/16 del ABCD.

6. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABCD, equivale el cuadrado GNRQ?
1/16

Con la figura construida:

1. Explique si la figura que se construyó es un cubo.
Si tiene 6 lados iguales.

2. ¿Qué relación puede establecer entre las caras del cubo?
son iguales y tienen las medidas iguales.

3. Corrobore si los lados y los ángulos de las caras del cubo son iguales. Explique el procedimiento indicado.
Si. Tienen las mismas medidas.

4. ¿Qué relación puede establecer entre los triángulos que se formaron en las caras del cubo?
Todos los triangulos son isoceles.

*Imagen 9c*: Respuestas de Damián a las preguntas intencionadas.

El trabajo que registra  Damián en esta actividad, muestra que tiene un conocimiento primitivo adecuado; de acuerdo con la pregunta 1, en la figura 9c, Damián encontró relaciones entre los cuadrados, y además sabe corroborar con el doblado de papel que tienen la misma medida. De acuerdo con las preguntas 2 y 3 de la figura 9c, el estudiante encontró una relación de proporción entre los dos cuadrados tanto en los lados como en el área, al responder que el lado pequeño expuesto, es un cuarto del lado del cuadrado más grande; así mismo, en las preguntas 4, 5 y 6 de la figura 9c, determinó la proporción de área de los dieciséis cuadrados pequeños en comparación con el cuadrado del módulo total 1:16. Con respecto a las cuatro preguntas relacionadas con el cubo construido (figura 9c) se notó su versatilidad en la construcción con doblado de papel del cubo, declarando en cada respuesta, un conocimiento adecuado.

Análisis de los descriptores del nivel 2, para la creación de la imagen.

La actividad II se asocia con los descriptores del segundo nivel: Creación de la imagen. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

2.1 Reconoce algunas nociones de geometría como: punto, segmento, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras, en construcciones con doblado de papel. De acuerdo con la construcción del cubo y, a partir de las ejemplificaciones realizando los dobleces, reconocemos que las nociones de punto, segmento, rectas paralelas, entre otras, las recrea por medio del doblado de papel, tal y como se muestra en las imágenes 9a y 9b.

2.2 Realiza algunas construcciones geométricas con doblado de papel. El estudiante mostró, durante esta actividad, que tenía habilidades para las construcciones con doblado de papel, tal y como se muestra en la imagen 9a, la cual representa un solo módulo de los seis necesarios para construir el cubo pequeño que se muestra en la imagen 9b.

2.3 Reconoce la definición de congruencia de figuras. De acuerdo con las preguntas intencionadas que se le hicieron y, considerando la observación del proceso hecha por los investigadores, se percibe que Damián muestra algunas figuras congruentes, esto se hizo a partir del cubo mostrado en la imagen 9b.

2.4 Reconoce la definición de semejanza de figuras. De acuerdo con las preguntas intencionadas que se le hicieron, se pudo determinar que Damián muestra algunas figuras que son semejantes, a partir del cubo que se muestra en la imagen 9b.

2.5 Realiza comparaciones entre dos figuras geométricas y sus partes, para establecer relaciones. A partir de las respuestas del estudiante en la imagen 9c, podemos observar que cumple con este descriptor, dado que puede encontrar las características de figuras como cuadrados y triángulos; además compara formas y tamaños, para establecer relaciones de semejanza y/o congruencia.

Análisis de la característica FOLDING BACK. Cuando Damián hace los módulos para la construcción del cubo y luego desarma uno de ellos, repite en su propia interlocución "estos triángulos son semejantes, estos son iguales". En este orden de ideas, Damián transita constantemente por un FOLDING BACK respecto al tipo de triángulos o cuadriláteros, refinando cada vez más esos modelos de conceptos en geometría; además, arma el cubo nuevamente, después construye un séptimo módulo y, de igual manera, compara los triángulos que se observan en el mosaico de pliegues de dicho módulo con los triángulos del cubo armado; revisando en cada momento si son figuras congruentes o semejantes.

De acuerdo con el análisis anterior, aunque sus respuestas son cortas pero acertadas y, considerando los ejercicios de la actividad II, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel II: creación de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003).

Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores de los demás niveles y, así mismo, establecer cómo ha comprendido que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Actividad III.En esta etapa se hace la misma actividad II; pero ahora se realiza la construcción del módulo del cubo con una hoja de papel más grande. Se percibió que este estudiante, en particular, tuvo un avance en su comprensión; por lo tanto, decidimos hacerle algunas preguntas verbales, en virtud de que parecía haber llegado a que la congruencia es un caso particular de la semejanza. De igual manera, fuimos comparando algunas respuestas orales con las respuestas que escribió en las preguntas de la imagen 9c de la actividad II; estas preguntas intencionadas tenían el propósito de que el estudiante explorara nuevamente en sus conocimientos primitivos y de creación de la imagen, para establecer distinciones que ayuden al proceso evolutivo de la comprensión de los conceptos como tal.

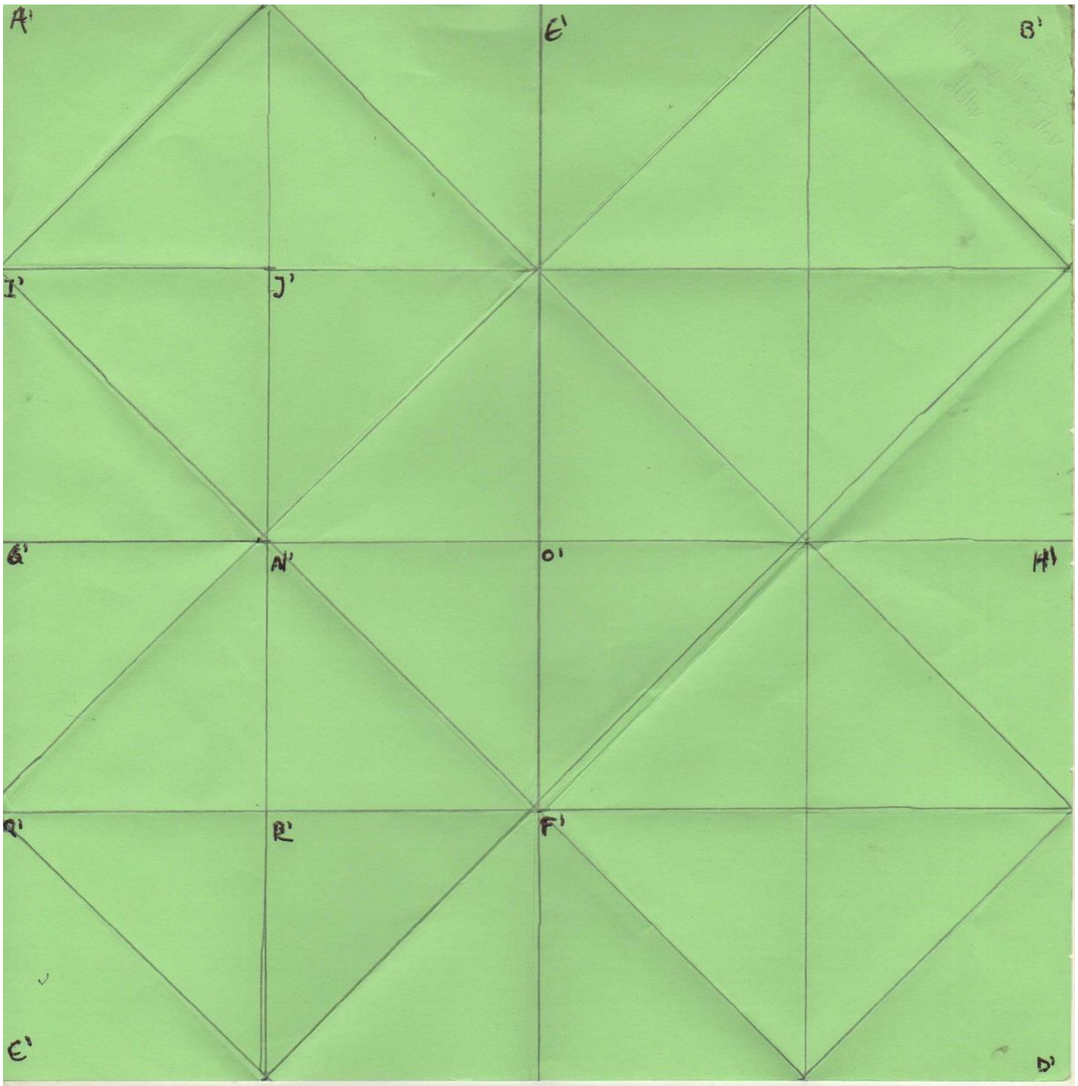



*Imagen 10a.*Módulo hecho por Damián para construir el cubo grande.

*Imagen 10b.*Construcción del cubo grande por parte de Damián.

Los seis módulos grandes son construidos por el estudiante de una manera fácil y relativamente rápida. El estudiante se le convoca a reflexionar y a contestar mentalmente cada una de las preguntas mostradas en la imagen 9d. Damián dice en voz baja, "pues es exactamente lo mismo". Luego, para constatar si realmente comprende el concepto de congruencia, se le pregunta, al desdoblar dos de los módulos grandes después de haber armado el cubo, lo siguiente:

*Profesor: ¿puedes notar en algunas cómo son las figuras geométricas que dejan las trazas de dos de los módulos?*

*Damián: "hombre profe, algunas son semejantes con los del módulo pequeño".*

*Profesor: ahora escoge un módulo desdoblado del cubo pequeño y compáralo.*

*Damián: "son iguales en forma… ah y tienen las mismas trazas de doblado; pero uno es más pequeño que el otro".*

*Profesor: ¿conoces la palabra semejanza?*

*Damián: "si, es cuando algo se asemeja a otra cosa… como por decir los mellizos se asemejan. También en los módulos anteriores se tiene semejanza. Es más el grande y el pequeño son semejantes, pues son cuadrados".*

*Profesor: ¿conoces la palabra congruente?*

*Damián: "Uff profe… Ah, ya, es cuando son igualitos; así por ejemplo como en los seis módulos del cubo grande o también en los seis módulos pequeños".*

*Profesor: ¿entonces qué se puede decir de dos módulos del cubo pequeño?*

*Damián: "son iguales también".*

*Profesor: ¿entonces cómo son?*

*Damián: "ah, congruentes. Pero profe en cada módulo se ven triángulos, cuadrados y segmentos congruentes, mejor dicho salen varias cosas como por ejemplo: rectas paralelas o rectas perpendiculares, triángulos isósceles, triángulos rectángulos".*

*Profesor: ¿qué relación encuentras entre la congruencia y la semejanza?*

*Damián: "No sé, pero en la semejanza las figuras tienen la misma forma, y la congruencia es cuando las figuras tienen las mismas medida y forma".*

*Profesor: ¿entonces qué es la congruencia respecto a la semejanza?*

*Damián: "No profe no le veo, es que son diferentes la semejanza y la congruencia".*

En este caso, Damián realiza correctamente con doblado de papel las figuras orientadas por el profesor como se muestra en la imagen 10a; pero también utiliza esta estrategia en la construcción del cubo mostrado en la figura 10b. En esta misma línea, se percibió, además, la manera como fue relacionando sus conceptos al compararlos con las preguntas de la imagen 9d, pero finalmente no alcanza la comprensión de la congruencia como caso particular de la semejanza; es decir, Damián no encuentra la conexión.

Análisis de los descriptores del nivel 3, para la comprensión de la imagen.

La actividad III se asocia con los descriptores del tercer nivel: comprensión de la imagen. A continuación, se caracterizará la información recolectada sobre el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

3.1 Comprende el concepto de semejanza de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. En esta ocasión, mediante los pliegues que quedan después de desdoblar uno de los módulos, pudimos percibir, en sus comparaciones, que comprende el concepto de semejanza al señalar que el módulo pequeño y el módulo grande son semejantes; de igual manera, expone que los dobleces y las figuras geométricas correspondientes de cada módulo también son semejantes.

3.2 Comprende el concepto de congruencia de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. Al respecto, se visualizó en toda la actividad que comprende por medio del doblado de papel qué es la congruencia y la señala en la comparación entre los módulos del mismo cubo;  así mismo, lo enuncia en las preguntas intencionadas que se le hicieron.

Damián también transita por un FOLDING BACK al hacer uso de otros conceptos básicos de la geometría; además, revisa esos conceptos por medio de la actividad III en comparación con la actividad II. Este estudiante reconoce la semejanza y la congruencia; igualmente lo percibe por medio de las construcciones hechas con doblado de papel. El origami se podría presentar como un medio para que Damián pueda alcanzar la comprensión de la congruencia como un caso particular de la semejanza.

De acuerdo con el análisis de toda la actividad III, se infiere que respondió de manera acertada las preguntas, entonces podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel III: de comprensión de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Faltó que encontrara la relación que hay entre la congruencia y la semejanza, pero esto lo puede alcanzar en el nivel IV. Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores del último nivel considerado en esta investigación y así mismo establecer cómo ha comprendido el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

Actividad IV. En esta actividad se retoman las construcciones de los cubos pequeño y grande, tal como se hicieron en las actividades II y III, respectivamente. El propósito era que el estudiante planteara reflexiones e hiciera un análisis sobre el concepto de semejanza y de congruencia como caso particular de esta. Se presentan, además, una serie de preguntas que se realizan de forma escrita. Se espera que Damián pueda reconocer y utilizar imágenes para identificar propiedades más globales de los objetos, en particular, imágenes matemáticas del concepto de semejanza. Las construcciones de los cubos, tanto de los pequeños como del grande, se realizaron en grupos de estudiantes, asesorados por los investigadores, de tal forma que la actividad fuera más dinámica y en colectivo; intencionalmente se logró que los tres estudiantes del estudio de casos trabajaran de manera conjunta.

Las actividades de construcción con doblado de papel de los diferentes cubos se muestran en la imagen 11a.

*Imagen 11a.*Construcción de los diferentes cubos.

Se realiza la actividad y luego se procede a desdoblar algún módulo del cubo grande y algunos de los pequeños, para resolver las preguntas de la actividad IV, cuyas respuestas se pueden observar en las imágenes 11d, 11e y 11f. Los estudiantes pudieron construir y desarmar los diferentes cubos, según lo que se pedía, pero cada uno contestó las preguntas de manera independiente;  de acuerdo con esto  procedieron a responder las preguntas; en algún momento ellos necesitaron aclaraciones sobre las preguntas y pertinentemente lo hicimos.

**Para tener en cuenta**: en la presente actividad hallaremos el volumen de las dos figuras construidas con doblado de papel, para encontrar constantes de proporcionalidad; esto nos ayudará a identificar cuándo dos figuras son congruentes o semejantes.

Tendremos presente las siguientes variables:

**L**: medida del lado de la hoja del módulo grande.

**l**: medida del lado del cubo grande.

En uno de los módulos, con la ayuda de un lápiz, marcamos uno de los bordes de alguna de las caras del cubo; posteriormente, desarmamos ese módulo y, al observarlo detenidamente, veremos el segmento subrayado, el cual nos servirá para encontrar el volumen del cubo; notemos, en las cicatrices del módulo, que el lado del cubo es una diagonal de un cuadrado. Por medio del Teorema de Pitágoras, podemos hallar el valor de la diagonal.

¿Qué dice el teorema de Pitágoras? El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de cada lado al cuadrado.

Recuerde que el teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo con hipotenusa h y catetos $c_1$ y $c_2$, se cumple que: $h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2$

¿Qué clase de triángulo se forma con el lado del cubo l? ¿Por qué? triangulo recto Por que el lado del cubo quedo dividido en 2

¿Puede usar el teorema de Pitágoras? ¿Cómo? Si, utilizando medidas y multiplicando al cuadrado y sacando raiz para el resultado

Si L es el lado de la hoja de papel, con la que se inició la construcción, ¿cuánto miden los catetos del triángulo rectángulo que tiene hipotenusa l? Si L es de medida 4, entonces l es igual a 1/4

Esboce el teorema de Pitágoras, considerando los catetos en términos de L: $h^2 = L^2 + L^2$

Con respecto a lo anterior, realice las siguientes acciones:

1. Encontrar la medida del lado l, en términos de L (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

$$h^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = h^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = h^2 = \frac{16+16}{16} = h^2 = \frac{32}{16}$$

2. Hallar el volumen del cubo grande. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es $V = (l)^3$

$$V = (1)^3 = 1$$

*Imagen 11d*. Respuestas de Damián en la actividad IV.

En esta parte de la actividad, después de haber construido seis cubos pequeños y un cubo grande y al analizar los módulos desdoblados, podemos observar en la imagen 11d que Damián utiliza el teorema de Pitágoras y muestra conocimientos geométricos generales fundamentales para seguir con el proceso, aunque con algunos errores argumentativos y procedimentales. Por ejemplo, el estudiante afirmó que el triángulo formado es recto, pero la razón que utiliza para ello no la escribe correctamente y, sin embargo, comenta "*es* *rectángulo y tiene dos lados iguales*"; de igual manera, al realizar la acción uno recurre a la medida y determina que el largo de los lados del triángulo "*es un cuarto del grande"*, pero cuando hace la operación fraccionaria, se equivoca en el resultado de "$h^2$", aunque debió escribir la relación en términos de "l", al mismo tiempo comenta "*pero eso no da*". Al realizar la acción dos, toma a "l" como una medida, y comenta que da uno a la tres. Damián en este instante no logra comprender lo que visualiza e interpreta del ejercicio. A pesar de ello, en este caso afirma verbalmente con seguridad "*profes es que el lado de la hoja del módulo del cubo pequeño es la mitad del lado de la hoja módulodel cubo grande*". Se puede inferir que Damián quedó con dudas frente a su procedimiento. En lo que sigue de la actividad, tomó decisiones importantes que notan el convencimiento intuitivo del estudiante frente a los conceptos objeto de estudio y permiten que el proceso continúe.

ra, repetiremos el procedimiento anterior para encontrar el volumen del cubo pequeño. Para ello, tenga en cuenta los guientes cambios:

**M:** medida del lado de la hoja del módulo pequeño.

**m:** medida del lado del cubo pequeño.

3. Encontrar la medida del lado m, en términos de M (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

Que la medida del lado mayor es el doble que la medida de lado menor.

4. Hallar el volumen del cubo peque uerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es $V' = (m)^3$

$$V = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

De acuerdo con las construcciones de los cubos en doblado de papel, se puede determinar que $M = \frac{L}{2}$.

5. Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre el volumen V' en términos de L

$$\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{L^3}{8}$$

6. Después de encontrar las medidas de los volúmenes del cubo grande y del cubo pequeño (V y V') en términos de L, analice la siguiente proporción:

$$\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{64} \qquad \frac{V'}{V} = \frac{\textit{medida del volumen del cubo pequeño}}{\textit{medida del volumen del cubo grande}}$$

Note que algunos términos iguales se simplifican, arrojando como resultado una constante de proporcionalidad. ¿Qué significado matemático cree que tiene? ¿Cuántos cubos pequeños caben en el cubo grande?

En el cubo grande caben 8 cubos pequeños

7. Corroborar la respuesta con las construcciones realizadas con doblado de papel, es decir, en este caso introduzca el cubo pequeño dentro del cubo grande. ¿Qué puede concluir al respecto?

Hay diferentes medidas entre los dos cubos

8. Si tuviéramos cuatro cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?

$\frac{4}{8} = 0.5$ 4 cubos pequeños cubren la mitad del grande

9. Si tuviéramos ocho cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?

$\frac{8}{8} = 1$ 8 cubos pequeños cubre la totalidad del grande.

10. Si unen cuatro caras de los cubos pequeños, formando un nuevo cuadrado, visto desde el plano, ¿qué relación tiene este con la cara del cubo grande? ¿Son semejantes? ¿Son congruentes? ¿Por qué?

Son congruentes porque al unir los 4 pequeños equivalen a la misma medida una cara grande

11. ¿Qué relación puede establecer entre los lados del cubo grande y los lados del cubo pequeño? ¿Son figuras semejantes o son figuras congruentes? ¿Por qué?

Son semejantes porque tienen la misma figura, pero la medida es diferente

*Imagen 11e*.Respuestas de Damián en la actividad IV.

En la imagen 11e se perciben las decisiones que tomó Damián, de forma tal que cambia la manera de realizar la actividad; así  mismo, se percibe que la parte procedimental no se realiza como en la imagen 11d y toma los resultados que él percibe visualmente por medio del trabajo realizado con la papiroflexia. La ventaja de tomar el doblado de papel como medio para realizar la actividad, es que permite que los estudiantes con dificultades en matemáticas, puedan resolver problemas con otros métodos no formales y comprender conceptos que no fueron alcanzados con otros modelos formales, quizás  enseñados de forma tradicional.

Después de todo, se percibe que utiliza sus resultados y los expone claramente de manera verbal, debido a que tuvo en cuenta las expresiones matemáticas de comparación, medida, volúmenes y proporciones. Igualmente, la forma explicativa que dio la plasmó en el papel como se observa en la imagen 9d, razón por la cual llega a unos resultados aclaratorios tangibles, en las respuestas de las acciones tres, cuatro, cinco, y seis de esta misma imagen. Si consideramos de manera global las acciones siete, ocho, nueve, diez  y once, reconocemos una versatilidad en el manejo de los conceptos y en las comparaciones de los diferentes cubos y los diferentes módulos, encontrando relaciones importantes para que planteara la comprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia; por ende, coadyuvando en la comprensión de la congruencia como caso particular de la semejanza, que fue lo que nos convocó para la realización de este proyecto.

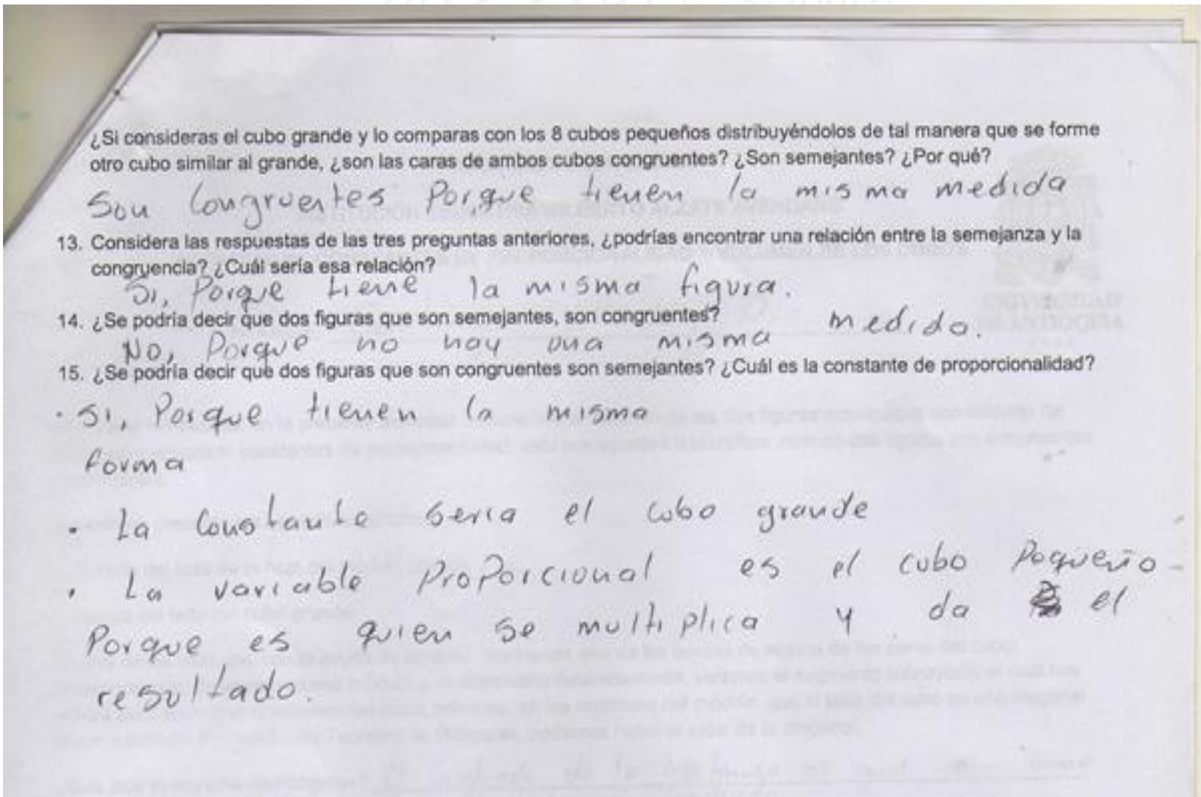



*Imagen 11f.*Respuestas de Damián en la actividad IV.

Hasta el momento Damián, en su proceso, pareció estar alcanzando la comprensión total del concepto de semejanza y la forma particular en que se presenta, bajo el término de congruencia, pero en la acción quince no llega a describir las relaciones de proporcionalidad que hay entre dos objetos congruentes, que a su vez son semejantes, cuya constante de proporcionalidad al comparar las medidas de los lados correspondientes es uno.

En el contexto en el que se realizó este proyecto, nos dimos cuenta de la necesidad de utilizar una entrevista semiestructurada, ya que debíamos caracterizar si algún estudiante, después de realizar la actividad IV, había logrado la comprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia, como caso particular del primero. A continuación, se presentan algunos apartados de la entrevista transcrita.

Apartes de la entrevista semiestructurada. Este instrumento de recolección de información nos sirvió para constatar si en el transcurso de los días, después de desarrolladas todas las actividades, el estudiante analizó y reflexionó el concepto de semejanza y, en especial, el caso particular de congruencia, de manera que se pueda establecer si hubo un proceso de refinamiento recursivo, tal como lo planteanPirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003).

*Profesor: ¿Cómo reconoces que dos figuras son semejantes?*

*Damián: "Cuando tiene la misma forma, es decir tienen los mismo ángulos en este caso de la actividad que hicimos los ángulos son rectos de cada cara de un cubo grande y otro pequeño".*

*Profesor: ¿Cómo reconoces que dos figuras son congruentes?*

*Damián: "Cuando además de tener la misma forma, o sea los mismos ángulos, también sus lados son iguales, pues el lado enfrente del ángulo; por ejemplo dos cubos de los pequeños".*

*Profesor: ¿Cuántas veces cabe el cubo pequeño en el cubo grande?*

*Damián: "caben ocho cubitos".*

*Profesor: ¿Cuál es la proporción o relación de un cubo pequeño respecto al grande?*

*Damián: "Es un octavo del grande"*

*Profesor: Ahora, ¿cuál es la proporción de uno pequeño respecto a otro pequeño?*

*Damián: ¿Ahora si la vi… es uno?*

*Profesor: ¿Dos figuras son semejantes, entonces se puede decir que son congruentes?*

*Damián: "no, porque su relación es diferente de uno… en cambio cuando son congruentes la división… ah relación de las áreas es uno, eso es que la congruencia está incluida en la semejanza"*

*Profesor: ¿Cómo entiendes que la congruencia es un caso particular de la semejanza?*

*Damián: "Bueno, primeramente la proporción es uno, y si eso es así, de una son semejantes, o sea toda cosa congruente con otra también es semejante; entonces la congruencia es un caso especial de la semejanza, o sea si tienen los lados iguales y los ángulos iguales, pues uno a uno"*

Análisis de los descriptores del nivel 4, para la observación de la propiedad.

La actividad IV y la entrevista semiestructurada se asocian con los descriptores del cuarto nivel: observación de la propiedad. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante Damián, de acuerdo con dichos descriptores.

4.1 Reconoce relaciones de proporcionalidad. Podemos observar mediante las imágenes 11e y 11f y en la transcripción de la última entrevista, que Damián reconoce lo dicho por este descriptor; de hecho, estas relaciones de proporcionalidad son necesarias para indicar si las figuras son semejantes o si particularmente son congruentes.

4.2 Establece relaciones matemáticas de proporcionalidad entre lados correspondientes de figuras semejantes. A través de las actividades desarrolladas con este estudiante y, en especial con esta cuarta actividad, hemos percibido que Damián, aunque no hace un proceso formal escrito, en el doblado de papel encontró una forma rápida para hallar áreas y volúmenes de dos figuras semejantes y, por ende, pudo establecer la proporcionalidad de lados correspondientes de figuras semejantes. En la manipulación visual y tangible que hizo Damián en las figuras construidas, hemos percibido que las operaciones las hacen mentalmente y, además, las plasma en las hojas de respuestas, como por ejemplo en las figuras 11e y 11f registra los resultados correctamente.

4.3 Concluye que la congruencia de figuras es un caso particular de la semejanza de figuras. En la entrevista semiestructurada que se le hizo a Damián, pudimos percibir que comprende las relaciones de proporcionalidad que se presentan entre los lados correspondientes dedos figuras congruentes, además expresa que es uno y concluye que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Análisis de la característica FOLDINGBACK. Durante toda la actividad IV, hemos percibido que Damián transita por esta característica de FOLDINGBACK cuando, por ejemplo, en las primeras dos acciones, mostradas en la imagen 11d,se observan obstáculos para resolver los procedimientos solicitados; pero al proseguir con las acciones mostradas en la imagen 11e, notamos un acercamiento más forma la los conceptos de manera mental, pero que, de igual manera, son registrados certeramente en la hoja de respuestas. La forma en que Damián resolvió las acciones, se debe a la construcción y análisis de las figuras que se hicieron con el doblado de papel, dado que él pudo observar las propiedades globales y particulares de los diferentes módulos debido a la visualización de su construcción con origami, el cual es el medio que se utilizó para caracterizar cómo comprende el estudiante la congruencia como caso particular de la semejanza.

En esta perspectiva, pudimos advertir que a Damián le tocó volver a revisar los conceptos de semejanza y de congruencia, para resolver las acciones mostradas en la imagen 11f. De igual manera, en la entrevista semiestructurada, retoma los conceptos de semejanza y de congruencia, refinándolos cada vez más y llegando a comprender que la congruencia es un caso particular de la semejanza, tal y como lo enuncia cuando se le pregunta ¿*cómo entiendes que la congruencia es un caso particular de la semejanza*? "*Bueno, primeramente la proporción es uno, y si eso es así, de una son semejanza, o sea toda cosa congruente con otra también es semejante; entonces la congruencia es un caso especial de la semejanza, o sea si tienen los lados iguales y los ángulos iguales, pues uno a uno*"

De acuerdo con el análisis de toda la actividad IV y de la entrevista semiestructurada, ambos asociados con los descriptores del nivel cuatro, donde Damián responde de manera pertinente a la mayoría de las acciones de esta actividad y, considerando los desempeños de las anteriores actividades, podemos concluir que este estudiante quedó ubicado en el nivel IV: de observación de la propiedad de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). De esta manera, se registra que Damián comprende la congruencia como caso particular de la semejanza, en las actividades realizadas, cuyo medio fue el doblado de papel.

### 9.3.2. Proceso de Dálmata.

El estudiante, cuyo seudónimo es Dálmata, es atento y reflexivo; fue elegido para ser parte de este estudio de casos,por su destreza con el doblado de papel, dado queél busca una perfección en los dobleces y en la construcción de la figura como tal, para poder identificar las propiedades que se generan y dar respuesta a las preguntas de las diferentes actividades; a pesar de que es un estudiante callado, que casi no participa verbalmente en las discusiones, hace un análisis y da respuestas concretas en las diferentes actividades, dando indicios de su comprensión y capacidad de interpretación.

Para realizar un análisis de cómo Dálmata comprende el concepto de semejanza, y la congruencia como caso particular de la misma, a continuación se hará explícito su proceso en el desarrollo de cada una de las actividades:

Actividad I. Las respuestas del estudiante Dálmata  en la prueba diagnóstica, cuyo propósito era reconocer el estrato del conocimiento primitivo, se presentan en las imágenes 12a,12b y 12c.En dicha actividad, Dálmata contestó cuatro preguntas y dos ejercicios de comparación, los cuales nos permiten dilucidar en qué estrato de comprensión se encuentra y cómo comprende el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, considerando los conocimientos previos que tiene sobre los conceptos de polígonos, semejanza y congruencia.

Estimado (a) estudiante: la presente actividad diagnóstica pretende recolectar información acerca de los conceptos geométricos de congruencia y semejanza; por lo cual, le solicitamos responder con seriedad y sinceridad, ya que sus aportes son de gran importancia para el trabajo de investigación que se está realizando en el área de geometría, en la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia.

A continuación se presentan varias preguntas, en algunas de ellas se solicita dar respuestas que estén relacionadas con su realidad; favor escribir con claridad opiniones y experiencias.

1. **Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son semejantes?**

   cuando dos figuras son iguales

2. **Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son congruentes?**

   cuando dos figuras no tienen su mismo tamaño

3. **¿Si una figura es congruente con otra, entonces también serán semejantes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**

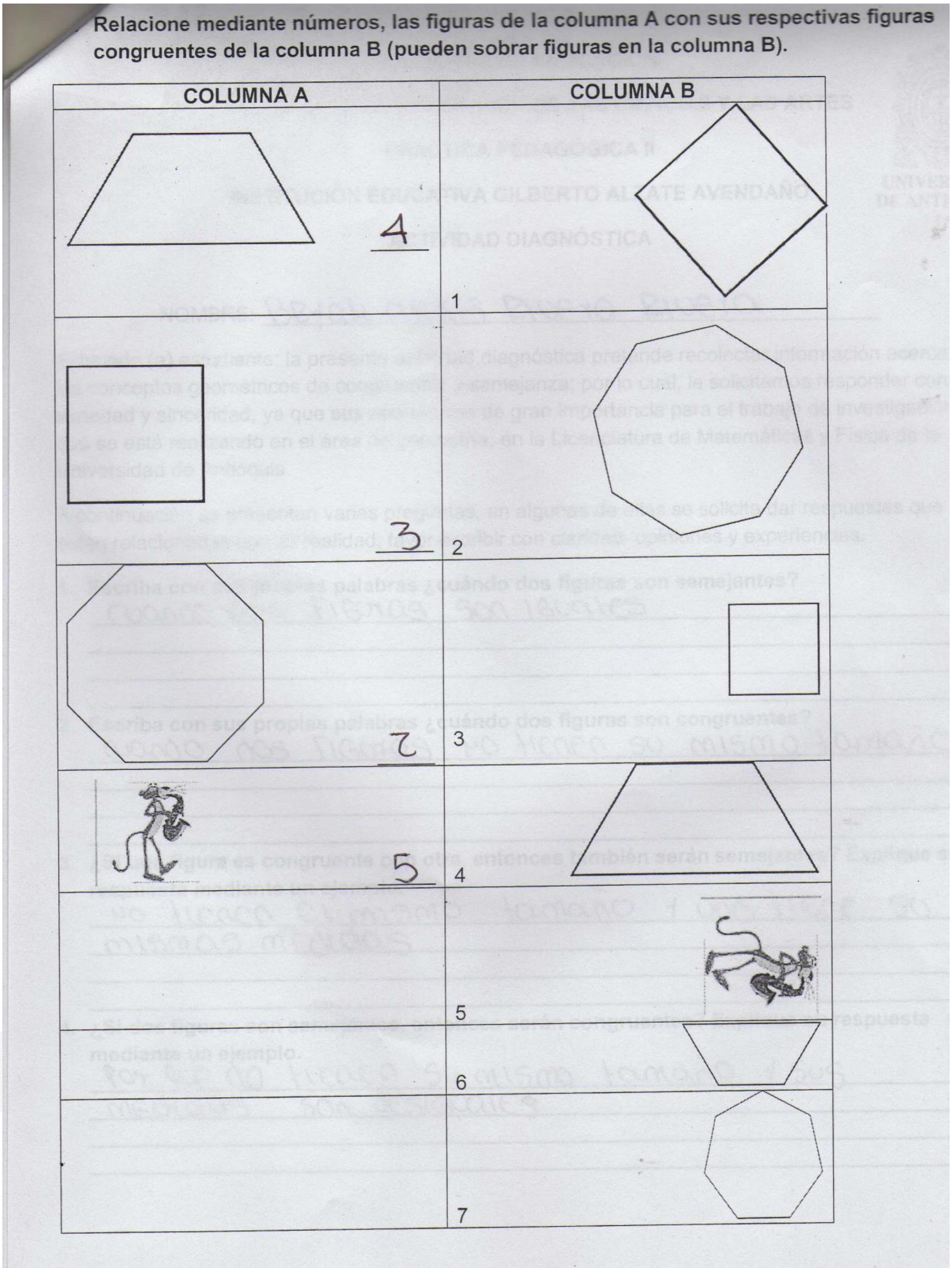
   no tienen el mismo tamaño y uno tiene su mismas medidas

4. **¿Si dos figuras son semejantes, entonces serán congruentes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**

   por que no tienen su mismo tamaño y sus medidos son desiguales

*Imagen 12a.* Respuestas escritas por Dálmata en la Actividad Diagnóstica.

Tal como se percibe en la imagen 12a, en las cuatro preguntas, se nota que el estudiante no reconoce las nociones de semejanza o de congruencia, pues manifiesta que la semejanza se relaciona con figuras iguales desconociendo que figuras de la misma forma con tamaño diferente también son semejantes, a pesar que la respuesta dada en la pregunta uno no es falsa, con las demás respuestas queda evidenciado que no tiene la noción de semejanza, ya que la congruencia, la asocia con figuras de diferente tamaño, respuesta que es errónea; en la preguntas tres y cuatro, no manifiesta la relación que existe entre la congruencia y la semejanza. Es decir, cree que no existe relación. Esto nos permite inferir que no comprende los conceptos objeto de estudio, ni distingue que la congruencia es un caso particular de la semejanza; de acuerdo con sus respuestas, parece recurrir a unos conocimientos previos que tiene y que consideramos errados, los cuales deberían estar claros, por ser conceptos trabajados en años anteriores. Por lo tanto, no ha alcanzado la comprensión de los conceptos ni las relaciones que se dan entre ambos.



Relacione mediante números, las figuras de la columna A con sus respectivas figuras congruentes de la columna B (pueden sobrar figuras en la columna B).

| COLUMNA A | COLUMNA B |
| --- | --- |
| 4 | 1 |
| 3 | 2 |
| 7 | 3 |
| 5 | 4 |
| | 5 |
| | 6 |
| | 7 |

*Imagen 12b.* Respuestas escritas por Dálmata en la Actividad Diagnóstica.

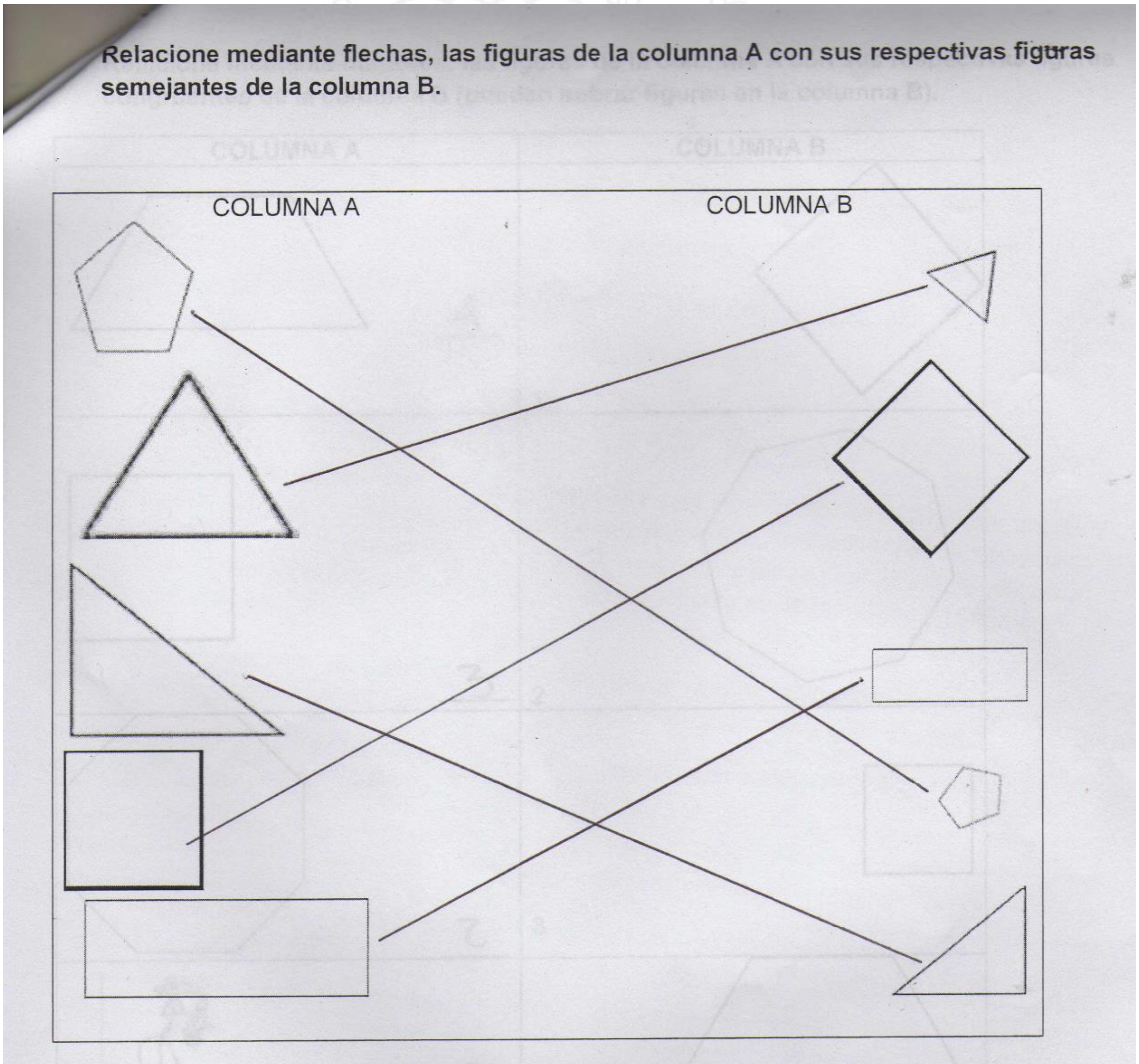



*Imagen 12c.* Respuestas escritas por Dálmata en la Actividad Diagnóstica.

De acuerdo con las respuestas de Dálmata a las comparaciones que se presentaron en las imágenes 12b y 12c, percibimos que identificó que dos objetos son congruentes, pero también reconoció el concepto de semejanza parcialmente;por lo tanto, se nota que las respuestas se contradicen con las de la imagen 12a, debido a que en la parte escrita manifiesta no tener claro los conceptos,pero reconoció figuras planas identificando sus características como: lados, ángulos, entre otros. Al mismo tiempo, se observa que acertó en ambas comparaciones.

Análisis de los descriptores del nivel 1, para el conocimiento primitivo.

La actividad I o actividad diagnóstica se asocia con los descriptores del primer nivel: conocimiento primitivo. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

1.1. Reconoce cuándo dos figuras tienen la misma forma. Mediante las actividades y el rastreo que se hizo de Dálmata, podemos establecer que reconoce la igualdad de la forma entre figuras. Por ejemplo, se pudo constatar en la actividad diagnóstica, en las imágenes 12b y 12c, que puede relacionar objetos que tienen la misma forma, pues realizó de manera correcta la asociación y comparación entre figuras geométricas, tanto congruentes como semejantes.

1.2. Identifica las clasificaciones de los triángulos y de los cuadriláteros. De acuerdo con las respuestas de la actividad diagnóstica, se puede inferir que identifica algunas figuras geométricas, como cuadriláteros y triángulos, pero no es posible afirmar que reconoce las clasificaciones de los mismos. Es probable que en actividades posteriores, se pueda establecer el cumplimiento del descriptor.

1.3. Identifica los ángulos y los lados de una figura geométrica. El desenvolvimiento del estudiante en esta actividad, al relacionar de manera correcta formas independientes de la posición, nos lleva a inferir que identifica los conceptos de ángulos y de lados, en las figuras geométricas.

1.4. Percibe el concepto de semejanza. De las respuestas de la actividad I, las cuales pueden ser observadas en la imagen 12a, se nota que el estudiante escribe que la semejanza se asocia con la igualdad de las figuras, lo cual no es cierto en todos los casos, solo cuando las figuras son congruentes; entonces podemos inferir que Dálmata no percibe cuándo dos figuras son semejantes, pero silo hace de una manera explícita mediante la forma de comparación de las figuras en las imágenes 12b y 12c.

1.5. Percibe el concepto de congruencia. De las respuestas de la actividad I, como se observa en la imagen 12a, se nota que el estudiante no logra redactar una definición correcta del concepto, de manera tal que podemos inferir que Dálmata no percibe cuándo dos figuras son congruentes, pero si lo hace de una manera explícita mediante la forma de comparación de las figuras en las imágenes 12b, 12c.

De acuerdo con las actuaciones del estudiante en los dos últimos descriptores, el 1.4 y el 1.5, podemos encontrar que no percibe ni tampoco identifica cuándo dos figuras son semejantes o cuándo son congruentes; en la preguntas tres y cuatro de la imagen 12a sus respuestas no son satisfactorias, entonces Dálmatatampoco ha logrado percibir la relación que hay entre congruencia y semejanza; por lo tanto, podemos decir que no comprende que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Teniendo en cuenta el análisis anterior y, considerando los ejercicios de la actividad I o diagnóstica, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel 1: conocimiento primitivo de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores de los demás niveles y, así mismo, establecer si ha comprendido que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Actividad II. Se realizó la construcción de un cubo en origami modular (de seis módulos) por medio del doblado de papel (ver imagen 13b). También se formularon preguntas intencionadas tanto al mosaico de pliegues (imagen 13a), que surge de la construcción del módulo, como al cubo mismo.

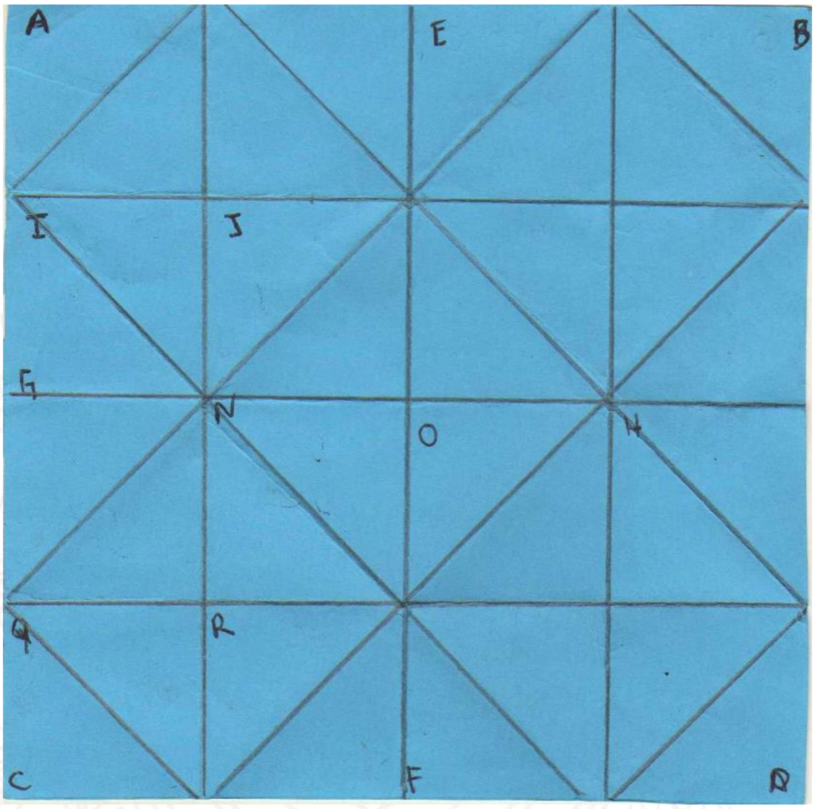



*Imagen 13a.* Módulo realizado por el estudiante Dálmata.

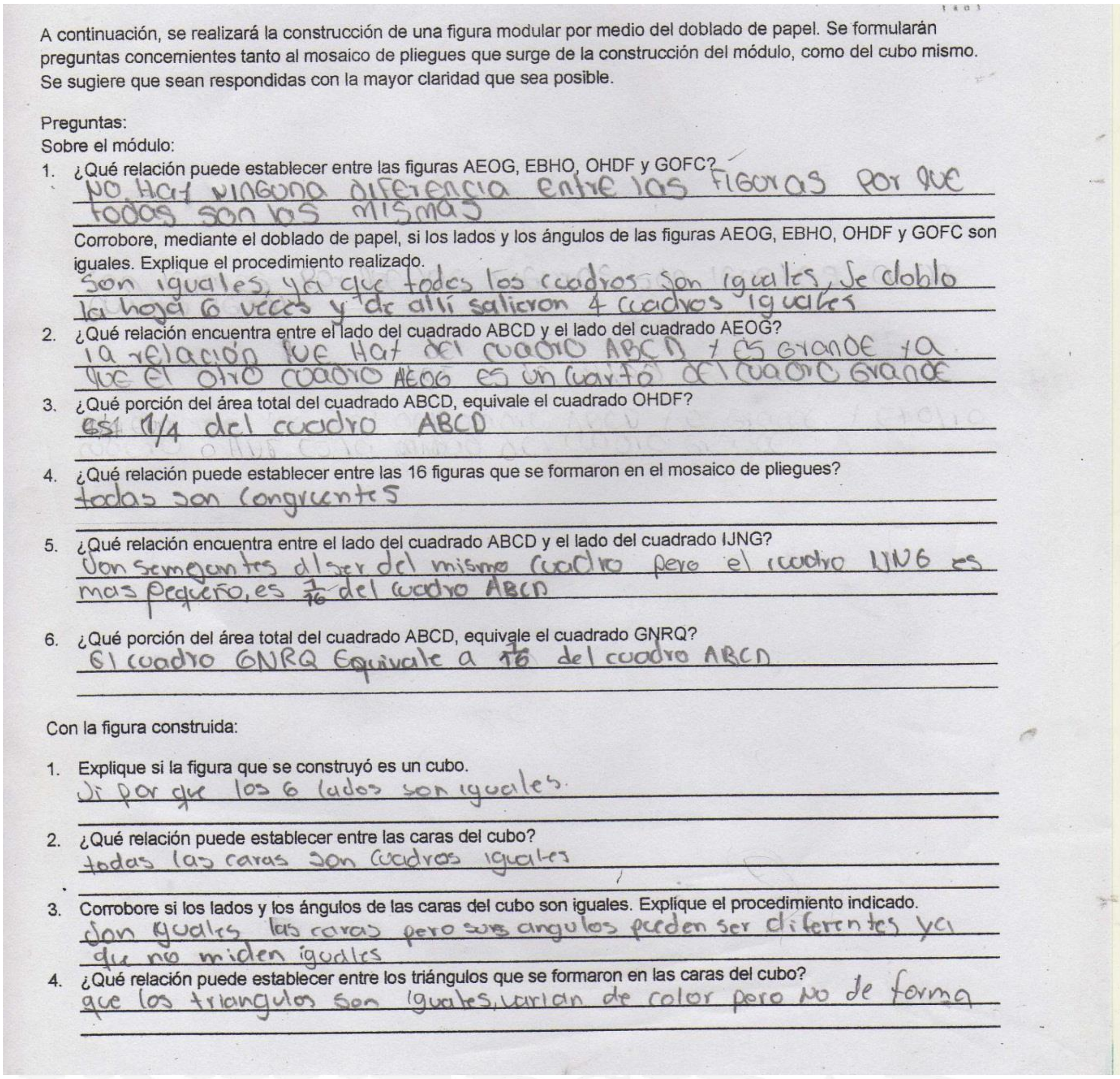
*Imagen 13b.* Cubo realizado por el estudiante Dálmata.

Este estudiante, como tiene habilidades de motricidad fina, realiza correctamente los pasos que el orientador va indicando con el doblado de papel. Cada uno de los seis módulos, son hechos de igual manera; por último, se arma el cubo con los módulos. Logrando un cubo tridimensional y tangible.

De acuerdo con la actividad realizada, Dálmata encontró figuras semejantes a partir de los pliegues que quedaron después de la construcción del módulo y en la visualización de las caras del cubo, reconociendo el concepto de semejanza y de congruencia por separado. Como por ejemplo, en observaciones y diálogos casuales sostenidos con él, nos dijo que fácilmente se notan dieciséis cuadrados iguales o congruentes, o también en cada cuadrado encontró dos triángulos isósceles, que a su vez son rectángulos y congruentes, como se percibe en la imagen 13a. De igual manera, lo ratificó al volver a armar la figura de la imagen 13b mostrando notoriamente sus actitudes frente al doblado de papel. Algunos conceptos geométricos los pudo enunciar fácilmente: “un punto es en donde dos dobleces se cruzan…”. Esto indica que algunas nociones de geometría las comprende.

Así mismo, señala algunas figuras geométricas que se forman tanto en el cubo armado como en los pliegues que quedan al desdoblar uno de los módulos; además de percibir el concepto semejanza y de congruencia, identifica tangible y visualmente dichas figuras, reconociendo de alguna manera el concepto de semejanza y congruencia por separado; Dálmata muestra en los módulos cuándo dos figuras son semejantes y cuándo dos figuras son congruentes.

En la imagen 13c, se registraron algunas preguntas escritas a las que Dálmata respondió mientras trabajó armando el cubo y, al mismo tiempo, se le observaba de manera continua; estas preguntas permitieron caracterizar sus conocimientos geométricos.


A continuación, se realizará la construcción de una figura modular por medio del doblado de papel. Se formularán preguntas concernientes tanto al mosaico de pliegues que surge de la construcción del módulo, como del cubo mismo. Se sugiere que sean respondidas con la mayor claridad que sea posible.

Preguntas:
Sobre el módulo:
1. ¿Qué relación puede establecer entre las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC?
no Hay ninguna diferencia entre las figuras por que todas son las mismas
Corrobore, mediante el doblado de papel, si los lados y los ángulos de las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC son iguales. Explique el procedimiento realizado.
Son iguales, ya que todos los cuadros son iguales, se doblo la hoja 6 veces y de allí salieron 4 cuadros iguales
2. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABCD y el lado del cuadrado AEOG?
la relación que Hay del cuadro ABCD y es grande ya que el otro cuadro AEOG es un cuarto del cuadro grande
3. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABCD, equivale el cuadrado OHDF?
es 1/4 del cuadro ABCD
4. ¿Qué relación puede establecer entre las 16 figuras que se formaron en el mosaico de pliegues?
todas son congruentes
5. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABCD y el lado del cuadrado IJNG?
Son semejantes al ser del mismo cuadro pero el cuadro IJNG es mas pequeño, es 1/16 del cuadro ABCD
6. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABCD, equivale el cuadrado GNRQ?
El cuadro GNRQ Equivale a 1/16 del cuadro ABCD

Con la figura construida:
1. Explique si la figura que se construyó es un cubo.
Si por que los 6 lados son iguales.
2. ¿Qué relación puede establecer entre las caras del cubo?
todas las caras son cuadros iguales
3. Corrobore si los lados y los ángulos de las caras del cubo son iguales. Explique el procedimiento indicado.
son iguales las caras pero sus angulos pueden ser diferentes ya que no miden iguales
4. ¿Qué relación puede establecer entre los triángulos que se formaron en las caras del cubo?
que los triangulos son iguales, varian de color pero no de forma

Imagen 13c: Respuestas de Dálmata a las preguntas intencionadas.

El trabajo que registra Dálmata en esta actividad, muestra que tiene un conocimiento primitivo adecuado; de acuerdo con la pregunta 1, en la figura 13c, Dálmata encontró una relación de igualdad entre los cuadrados y, además, sabe corroborar con el doblado de papel que tienen la misma medida. De acuerdo con las preguntas 2 y 3 de la figura 13c, el estudiante encontró una relación de proporción entre los dos cuadrados tanto en los lados como en el área, al responder que el lado pequeño expuesto, es un cuarto del lado del cuadrado más grande; así mismo, en las preguntas 4, 5 y 6 de la figura 13c, determinó la proporción de área de los dieciséis cuadrados pequeños en comparación con el cuadrado del módulo total 1:16. Con respecto a las cuatro preguntas relacionadas con el cubo construido (figura 11c) se notó su versatilidad en la construcción con doblado de papel del cubo, declarando en cada respuesta, un conocimiento adecuado.

Análisis de los descriptores del nivel 2, para la creación de la imagen.

La actividad II se asocia con los descriptores del segundo nivel: Creación de la imagen. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

2.1 Reconoce algunas nociones de geometría como: punto, segmento, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras, en construcciones con doblado de papel. De acuerdo con la construcción del cubo y, a partir de las ejemplificaciones realizando los dobleces, reconocemos que las nociones de punto, segmento, rectas paralelas, entre otras, las recrea por medio del doblado de papel, tal y como se muestra en las imágenes 13a y 13b.

2.2 Realiza algunas construcciones geométricas con doblado de papel. El estudiante mostró, durante esta actividad, que tenía habilidades para las construcciones con doblado de papel, tal y como se muestra en la imagen 13a, la cual representa un solo módulo de los seis necesarios para construir el cubo pequeño que se muestra en la imagen 11b.

2.3 Reconoce la definición de congruencia de figuras. De acuerdo con las preguntas intencionadas que se le hicieron y, considerando la observación del proceso hecha por los investigadores, se percibe que Dálmata muestra algunas figuras congruentes, esto se hizo a partir del cubo mostrado en la imagen 11b.

2.4 Reconoce la definición de semejanza de figuras. De acuerdo con las preguntas intencionadas que se le hicieron, se pudo determinar que Dálmata muestra algunas figuras que son semejantes, a partir del cubo que se muestra en la imagen 13b.

2.5 Realiza comparaciones entre dos figuras geométricas y sus partes, para establecer relaciones. A partir de las respuestas del estudiante en la imagen 13c, podemos observar que cumple con este descriptor, dado que puede encontrar las características de figuras como cuadrados y triángulos; además compara formas y tamaños, para establecer relaciones de semejanza y/o congruencia.

Análisis de la característica de FOLDING BACK. Cuando Dálmata hace los módulos para la construcción del cubo y luego desarma uno de ellos, repite en su propia interlocución "estos triángulos son semejantes, estos son similares"; estas respuestas se pueden corroborar en la figura 11c, donde él identifica figuras congruentes y semejantes. En este orden de ideas, Dálmata transita constantemente por un FOLDING BACK respecto al tipo de triángulos o cuadriláteros, refinando cada vez más esos modelos de conceptos en geometría; además, arma el cubo nuevamente, después construye un séptimo módulo y, de igual manera, compara los triángulos que se observan en el mosaico de pliegues de dicho módulo con los triángulos del cubo armado; revisando en cada momento si son figuras congruentes o semejantes.

De acuerdo con el análisis anterior, aunque sus respuestas son cortas pero acertadas y, considerando los ejercicios de la actividad II, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel II: creación de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores de los demás niveles y, así mismo, establecer cómo ha comprendido que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Actividad III. En esta etapa se hace la misma actividad II; pero ahora se realiza la construcción del módulo del cubo con una hoja de papel más grande. Se percibió que este estudiante, en particular, tuvo un avance en su comprensión; por lo tanto, decidimos hacerle algunas preguntas verbales, en virtud de que parecía haber llegado a que la congruencia es un caso particular de la semejanza. De igual manera, fuimos comparando algunas respuestas orales con las respuestas que escribióen las preguntas de la imagen 13c de la actividad II; estas preguntas intencionadas tenían el propósito de que el estudiante explorara nuevamente en sus conocimientos primitivos y de creación de la imagen, para establecer distinciones que ayuden al proceso evolutivo de la comprensión de los conceptos como tal.

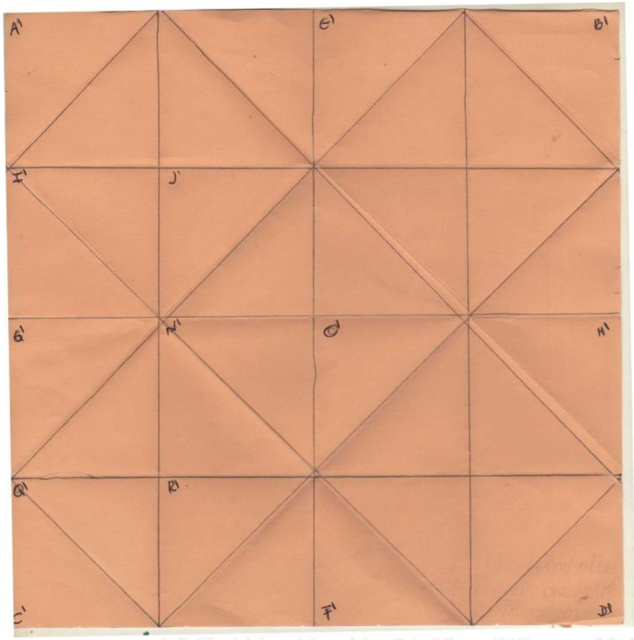
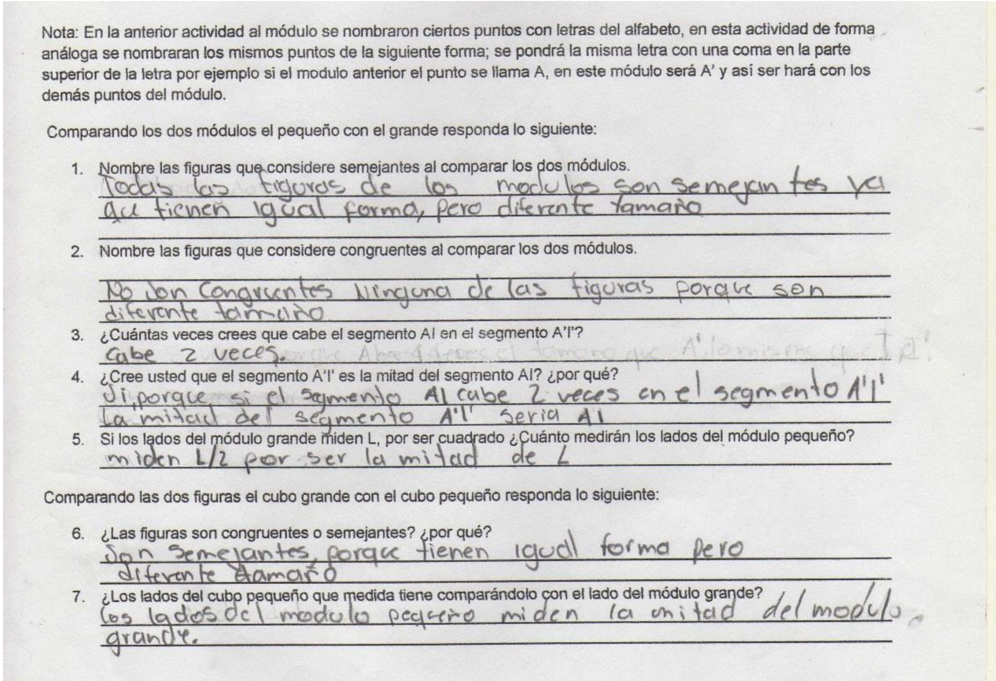



*Imagen 14a.*Módulo hecho por Dálmata para construir el cubo grande.

*Imagen 14b.*Construcción del cubo grande por parte de Dálmata.



Nota: En la anterior actividad al módulo se nombraron ciertos puntos con letras del alfabeto, en esta actividad de forma análoga se nombraran los mismos puntos de la siguiente forma; se pondrá la misma letra con una coma en la parte superior de la letra por ejemplo si el modulo anterior el punto se llama A, en este módulo será A' y así ser hará con los demás puntos del módulo.

Comparando los dos módulos el pequeño con el grande responda lo siguiente:

1. Nombre las figuras que considere semejantes al comparar los dos módulos.
   Todas las figuras de los modulos son semejantes ya que tienen igual forma, pero diferente tamaño
2. Nombre las figuras que considere congruentes al comparar los dos módulos.
   No son congruentes ninguna de las figuras porque son diferente tamaño
3. ¿Cuántas veces crees que cabe el segmento AI en el segmento A'I'?
   cabe 2 veces.
4. ¿Cree usted que el segmento A'I' es la mitad del segmento AI? ¿por qué?
   Si, porque si el segmento AI cabe 2 veces en el segmento A'I' la mitad del segmento A'I' seria AI
5. Si los lados del módulo grande miden L, por ser cuadrado ¿Cuánto medirán los lados del módulo pequeño?
   miden L/2 por ser la mitad de L

Comparando las dos figuras el cubo grande con el cubo pequeño responda lo siguiente:

6. ¿Las figuras son congruentes o semejantes? ¿por qué?
   Son semejantes, porque tienen igual forma pero diferente tamaño
7. ¿Los lados del cubo pequeño que medida tiene comparándolo con el lado del módulo grande?
   Los lados del modulo pequeño miden la mitad del modulo grande.

*Imagen 14c.* Respuestas de la actividad III realizadas por Dálmata.

Los seis módulos grandes son construidos por el estudiante de una manera fácil y relativamente rápida. El estudiante se le convoca a reflexionar y a contestar mentalmente cada una de las preguntas mostradas en la imagen 14c. Dálmata dice en voz baja, “pues parecen como iguales… son iguales”. Luego, para constatar si realmente comprende el concepto de congruencia, se le pregunta, al desdoblar dos de los módulos grandes después de haber armado el cubo, lo siguiente:

*Profesor: ¿puedes notar en algunas cómo son las figuras geométricas que dejan las trazas de dos de los módulos?*

*Dálmata: “profesor, todasson semejantes si comparamos los dos módulos profe”.*

*Profesor: ahora escoge un módulo desdoblado del cubo pequeño y compáralo.*

*Dálmata: "son de igual forma profesor… ah y tienen las mismas trazas de doblado; pero el tamaño es diferente al otro".*

*Profesor: ¿conoces la palabra semejanza?*

*Dálmata: "pues sí, son figuras que se parecen en su forma pero no tiene como la misma medida profe".*

*Profesor: ¿conoces la palabra congruente?*

*Dálmata: "profesor… pues acordándome de las actividades que hemos hecho son las figuras que son iguales en todo".*

*Profesor: ¿entonces qué se puede decir de dos módulos del cubo pequeño?*

*Dálmata: "son los mismos".*

*Profesor: ¿entonces cómo son?*

*Dálmata: "hum, congruentes. Porque las figuras que uno pilla en ellas son iguales todas".*

*Profesor: ¿qué relación encuentras entre la congruencia y la semejanza?*

*Damián: "huy profe,ahí sí no sé qué decir en una las figuras son iguales en otras son diferentes".*

*Profesor: ¿entonces qué es la congruencia respecto a la semejanza?*

*Damián: "a lo bien profe, no sé qué decir que son iguales en la otra son diferentes".*

En este caso, Damián realiza correctamente con doblado de papel las figuras orientadas por el profesor como se muestra en la imagen 14a; pero también utiliza esta estrategia en la construcción del cubo mostrado en la figura 14b. En esta misma línea, se percibió, además, la manera como fue relacionando sus conceptos al compararlos con las preguntas de la imagen 14c, pero finalmente no alcanza la comprensión de la congruencia como caso particular de la semejanza; es decir, Dálmata no encuentra la conexión.

Análisis de los descriptores del nivel 3, para la comprensión de la imagen.

La actividad III se asocia con los descriptores del tercer nivel: comprensión de la imagen. A continuación, se caracterizará la información recolectada sobre el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

3.1 Comprende el concepto de semejanza de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. En esta ocasión, mediante los pliegues que quedan después de desdoblar uno de los módulos, pudimos percibir, en sus comparaciones, que comprende parcialmente el concepto de semejanza al señalar que el módulo pequeño y el módulo grande son semejantes; de igual manera, expone que los dobleces y las figuras geométricas correspondientes de cada módulo también son semejantes.

3.2 Comprende el concepto de congruencia de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. Al respecto, se visualizó en toda la actividad que comprende parcialmente, por medio del doblado de papel, qué es la congruencia y la señala en la comparación entre los módulos del mismo cubo;  así mismo, lo enuncia en las preguntas intencionadas que se le hicieron.

Dálmata también transita por un FOLDING BACK al hacer uso de otros conceptos básicos de la geometría; además, revisa esos conceptos por medio de la actividad III en comparación con la actividad II. Este estudiante reconoce la semejanza y la congruencia como conceptos separados; igualmente lo percibe por medio de las construcciones hechas con doblado de papel. El origami se podría presentar como un medio para que Dálmata pueda alcanzar la comprensión de la congruencia como un caso particular de la semejanza.

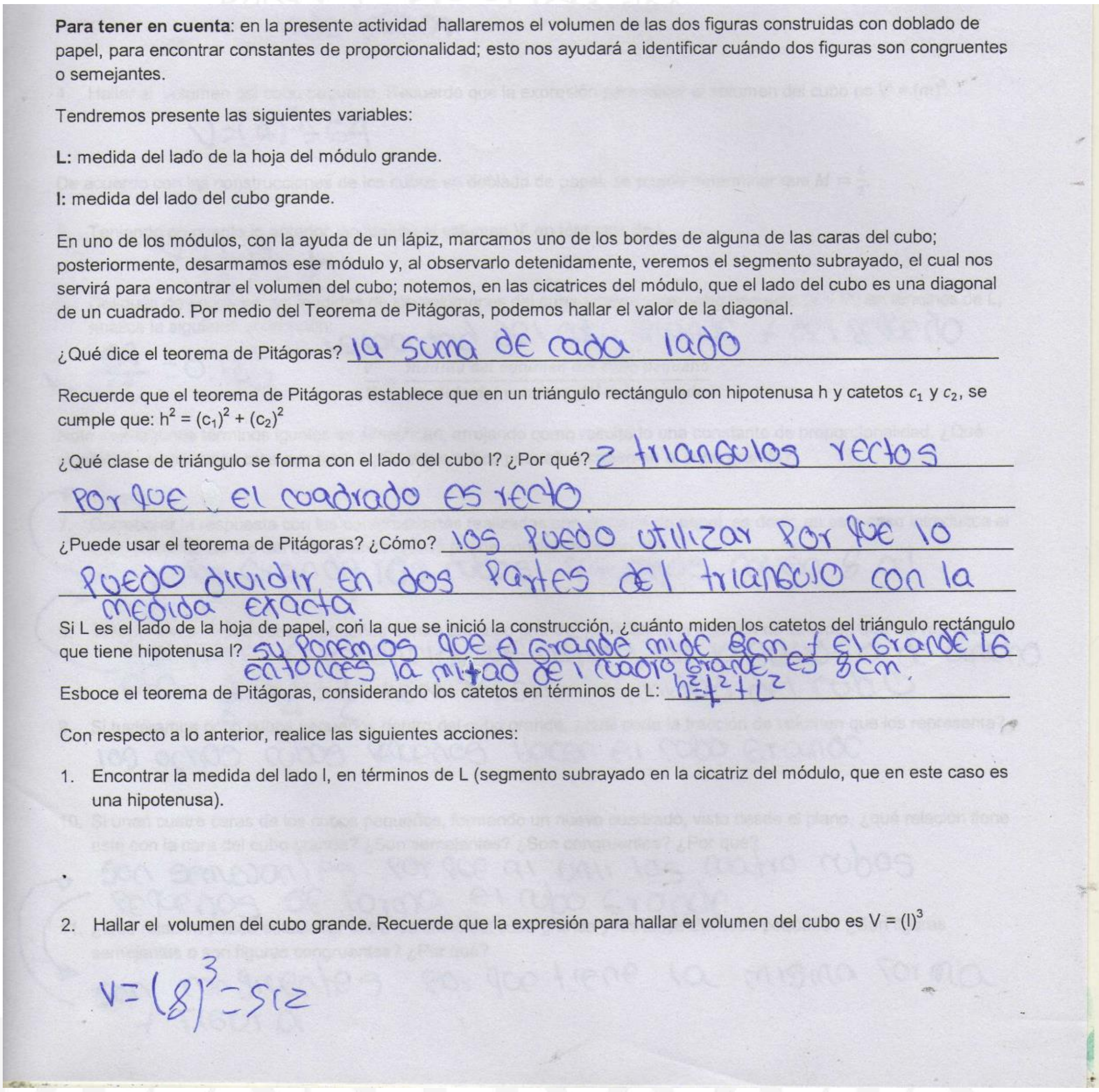
De acuerdo con el análisis de toda la actividad III, se infiere que respondió de manera acertada a las preguntas, a pesar de que no pudo percibir algunas relaciones en el diálogo presentado anteriormente, por lo tanto, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel III: de comprensión de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Faltó que encontrara la relación que hay entre la congruencia y la semejanza, pero esto lo puede alcanzar en el nivel IV. Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores del último nivel considerado en esta investigación y así mismo establecer cómo  ha comprendido el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

Actividad  IV. En esta actividad se retoman las construcciones de los cubos pequeño y grande, tal como se hicieron en las actividades II y III, respectivamente. El  propósito era que el estudiante planteara  reflexiones e hiciera un análisis sobre el concepto de semejanza y de congruencia como caso particular de esta. Se presentan, además, una serie de preguntas que se realizan de forma escrita. Se espera que Dálmata pueda reconocer y utilizar imágenes para identificar propiedades más globales de los objetos, en particular, imágenes matemáticas del concepto de semejanza. Las construcciones de los cubos, tanto de los pequeños como del grande, se realizaron en grupos de estudiantes, asesorados por los investigadores, de tal forma que la actividad fuera más dinámica y en colectivo; intencionalmente se logró que los tres estudiantes del estudio de casos trabajaran de manera conjunta.

Las actividades de construcción con doblado de papel de los diferentes cubos se muestran en la imagen 15a.

*Imagen 15a.* Construcción de los diferentes cubos.

Se realiza la actividad y luego se procede a desdoblar algún módulo del cubo grande y algunos de los pequeños, para resolver las preguntas de la actividad IV, cuyas respuestas se pueden observar en las imágenes 15b, 15c y 15d. Los estudiantes pudieron construir y desarmar los diferentes cubos, según lo que se pedía, pero cada uno contestó las preguntas de manera independiente; de acuerdo con esto procedieron a responder las preguntas; en algún momento ellos necesitaron aclaraciones sobre las preguntas y pertinentemente lo hicimos.



**Para tener en cuenta**: en la presente actividad hallaremos el volumen de las dos figuras construidas con doblado de papel, para encontrar constantes de proporcionalidad; esto nos ayudará a identificar cuándo dos figuras son congruentes o semejantes.

Tendremos presente las siguientes variables:

**L:** medida del lado de la hoja del módulo grande.

**l:** medida del lado del cubo grande.

En uno de los módulos, con la ayuda de un lápiz, marcamos uno de los bordes de alguna de las caras del cubo; posteriormente, desarmamos ese módulo y, al observarlo detenidamente, veremos el segmento subrayado, el cual nos servirá para encontrar el volumen del cubo; notemos, en las cicatrices del módulo, que el lado del cubo es una diagonal de un cuadrado. Por medio del Teorema de Pitágoras, podemos hallar el valor de la diagonal.

¿Qué dice el teorema de Pitágoras? la suma de cada lado

Recuerde que el teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo con hipotenusa h y catetos $c_1$ y $c_2$, se cumple que: $h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2$

¿Qué clase de triángulo se forma con el lado del cubo l? ¿Por qué? 2 triangulos rectos por que el cuadrado es recto.

¿Puede usar el teorema de Pitágoras? ¿Cómo? los puedo utilizar por que lo puedo dividir en dos partes del triangulo con la medida exacta

Si L es el lado de la hoja de papel, con la que se inició la construcción, ¿cuánto miden los catetos del triángulo rectángulo que tiene hipotenusa l? suponemos que el grande mide 8cm el grande 16 entonces la mitad del cuadro grande es 8cm.

Esboce el teorema de Pitágoras, considerando los catetos en términos de L: $h^2 = L^2 + L^2$

Con respecto a lo anterior, realice las siguientes acciones:

1. Encontrar la medida del lado l, en términos de L (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

2. Hallar el volumen del cubo grande. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es $V = (l)^3$

$V = (8)^3 = 512$

*Imagen 15b.* Respuestas de Dálmata en la actividad IV.

En esta parte de la actividad, después de haber construido seis cubos pequeños y un cubo grande y al analizar los módulos desdoblados, podemos observar en la imagen 13b que Dálmata utiliza el teorema de Pitágoras y muestra conocimientos geométricos generales fundamentales para seguir con el proceso, aunque con algunos errores argumentativos y procedimentales. Por ejemplo, el estudiante narra de una manera dudosa que el triángulo formado es recto, pero no claramente explicita la razón que utiliza para ello, además no la escribe correctamente y, sin embargo, comenta " *tiene dos lados iguales,pero también es un rectángulo* "; de igual manera, al realizar la acción uno recurre a la medida y determina que el largo de los lados del triángulo "*uno compara y cabe cuatro veces en el grande"*, pero cuando hace la operación fraccionaria, se equivoca en el resultado de "$h^2$", aunque debió escribir la relación en términos de "l", al mismo tiempo comenta "*yo no tengo ni idea de cómo sé hallar el valor*". Al realizar la acción dos, toma a "l" como una medida, y comenta que da uno y lo multiplica tres veces y le da uno al cubo. Dálmata en este instante no logra comprender lo que visualiza e interpreta del ejercicio. A pesar de ello, se puede inferir que Dálmata quedó con dudas frente a su procedimiento, pues se puede observar que en una de las preguntas, donde se debe hallar un lado en términos de otro, queda en blanco y no encuentra el procedimiento para calcularlo. En lo que sigue de la actividad, tomó decisiones importantes que notan el convencimiento intuitivo del estudiante frente a los conceptos objeto de estudio y permiten que el proceso continúe.

...hora, repetiremos el procedimiento anterior para encontrar el volumen del cubo pequeño. Para ello, tenga en cuenta los siguientes cambios:

**M:** medida del lado de la hoja del módulo pequeño. V=(4)^3=64

**m:** medida del lado del cubo pequeño.

3. Encontrar la medida del lado m, en términos de M (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).
=que el lado mayor o ai la mitad de lado menor

4. Hallar el volumen del cubo pequeño. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es $V' = (m)^3$
V=(4)^3=64

De acuerdo con las construcciones de los cubos en doblado de papel, se puede determinar que $M = \frac{L}{2}$.

5. Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre el volumen V' en términos de L
$V = (\frac{L}{2})^3 = \frac{L}{8}$

6. Después de encontrar las medidas de los volúmenes del cubo grande y del cubo pequeño (V y V') en términos de L, analice la siguiente proporción:
la velocidad del cubo Grande y del pequeño

$V = \frac{64}{512} = 0.125$

$$\frac{V'}{V} = \frac{medida\ del\ volumen\ del\ cubo\ pequeño}{medida\ del\ volumen\ del\ cubo\ grande}$$

Note que algunos términos iguales se simplifican, arrojando como resultado una constante de proporcionalidad. ¿Qué significado matemático cree que tiene? ¿Cuántos cubos pequeños caben en el cubo grande?

7. Corroborar la respuesta con las construcciones realizadas con doblado de papel, es decir, en este caso introduzca el cubo pequeño dentro del cubo grande. ¿Qué puede concluir al respecto?
El cubo Grande, los cubos pequeños caben 8 al grande

8. Si tuviéramos cuatro cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?
que tiene diferencia de altura, de longitud o de ancho etc. $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ llena la mitad del cubo

9. Si tuviéramos ocho cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?
los ochos cubos pequeños Hacen el cubo Grande

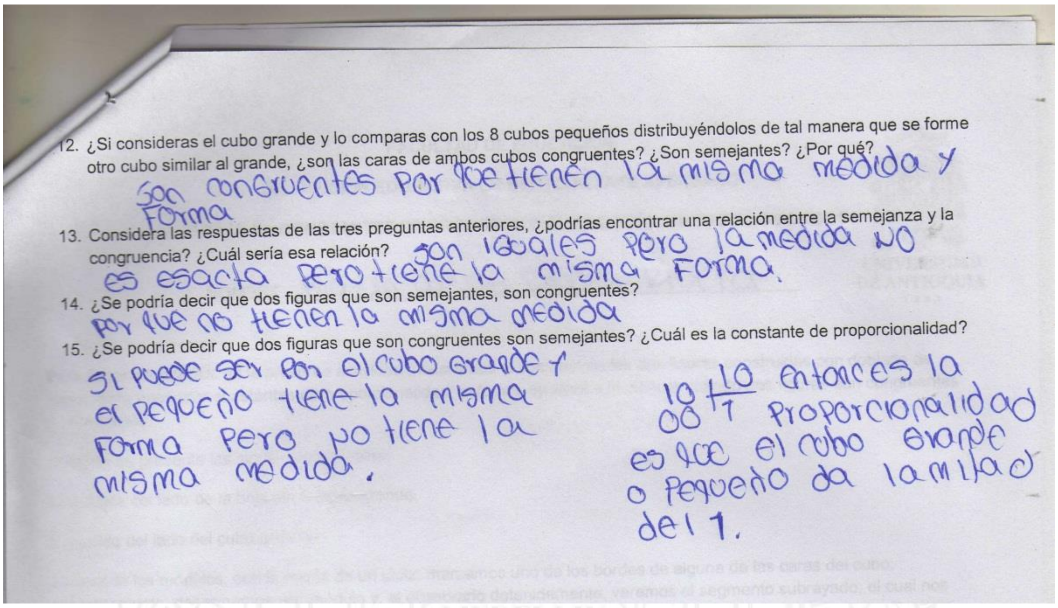
10. Si unen cuatro caras de los cubos pequeños, formando un nuevo cuadrado, visto desde el plano, ¿qué relación tiene este con la cara del cubo grande? ¿Son semejantes? ¿Son congruentes? ¿Por qué?
son semejantes porque al unir los cuatro cubos pequeños se forma el cubo Grande

11. ¿Qué relación puede establecer entre los lados del cubo grande y los lados del cubo pequeño? ¿Son figuras semejantes o son figuras congruentes? ¿Por qué?
son congruentes porque tiene la misma forma y figura

*Imagen 15c.*Respuestas de Dálmata en la actividad IV.

En la imagen 15c se perciben las decisiones que tomó Dálmata, de forma tal que cambia la manera de realizar la actividad; así  mismo, se percibe que la parte procedimental no se realiza como en la imagen 15b y toma los resultados que él percibe visualmente por medio del trabajo realizado con la papiroflexia. La ventaja de tomar el doblado de papel como medio para realizar la actividad, es que permite que los estudiantes con dificultades en matemáticas, puedan resolver problemas con otros métodos no formales y comprender conceptos que no fueron alcanzados con otros modelos formales, quizás  enseñados de forma tradicional.

Después de todo, se percibe que utiliza sus resultados y los expone claramente de manera verbal en este momento, debido a que tuvo en cuenta las expresiones matemáticas de comparación, medida, volúmenes y proporciones. Igualmente, la forma explicativa que dio la plasmó en el papel como se observa en la imagen 15c, razón por la cual llega a unos resultados aclaratorios tangibles, en las respuestas de las acciones tres, cuatro, cinco, y seis de esta misma imagen. Si consideramos de manera global las acciones siete, ocho, nueve, diez  y once, reconocemos una versatilidad en el manejo de los conceptos y en las comparaciones de los diferentes cubos y los diferentes módulos, encontrando relaciones importantes para que planteara la comprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia; por ende, ayudando en la comprensión de la congruencia como caso particular de la semejanza, que fue lo que nos convocó para la realización de este proyecto.



12. ¿Si consideras el cubo grande y lo comparas con los 8 cubos pequeños distribuyéndolos de tal manera que se forme otro cubo similar al grande, ¿son las caras de ambos cubos congruentes? ¿Son semejantes? ¿Por qué?
son congruentes por que tienen la misma medida y forma
13. Considera las respuestas de las tres preguntas anteriores, ¿podrías encontrar una relación entre la semejanza y la congruencia? ¿Cuál sería esa relación? son iguales pero la medida no es esacta pero tiene la misma forma.
14. ¿Se podría decir que dos figuras que son semejantes, son congruentes?
por que no tienen la misma medida
15. ¿Se podría decir que dos figuras que son congruentes son semejantes? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
si puede ser por el cubo grande y el pequeño tiene la misma forma pero no tiene la misma medida.
10/00 $\frac{10}{1}$ entonces la proporcionalidad es que el cubo grande o pequeño da la mitad del 1.

*Imagen 15d.* Respuestas de Damián en la actividad IV.

Hasta el momento Dálmata, en su proceso, pareció estar alcanzando la comprensión total del concepto de semejanza y no la forma particular en que se presenta, bajo el término de congruencia, pero en la acción quince no llega a describir las relaciones de proporcionalidad que hay entre dos objetos congruentes, que a su vez son semejantes, cuya constante de proporcionalidad al comparar las medidas de los lados correspondientes es uno.

En el contexto en el que se realizó este proyecto, nos dimos cuenta de la necesidad de utilizar una entrevista semiestructurada, ya que debíamos caracterizar si algún estudiante, después de realizar la actividad IV, había logrado la comprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia, como caso particular del primero. A continuación, se presentan algunos apartados de la entrevista transcrita.

Apartes de  la entrevista semiestructurada. Este instrumento de recolección de información nos sirvió para constatar si en el transcurso de los días, después de desarrolladas todas las actividades, el estudiante analizó y reflexionó el concepto de semejanza y, en especial, el caso particular de congruencia, de manera que se pueda establecer si hubo un proceso de refinamiento recursivo, tal como lo planteanPirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003).

*Profesor: ¿Cómo reconoces que dos figuras son semejantes?*

*Dálmata: "por la misma forma y tamaño diferente".*

*Profesor: ¿Cómo reconoces que dos figuras son congruentes?*

*Dálmata: "cuando son del mismo tamaño y además tienen el mismo tamaño".*

*Profesor: ¿Cuántas veces cabe el cubo pequeño en el cubo grande?*

*Dálmata: "ocho veces cabe".*

*Profesor: ¿Cuál es la proporción o relación de un cubo pequeño respecto al grande?*

*Dálmata: "Es un octavo del grande"*

*Profesor: Ahora, ¿cuál es la proporción de uno pequeño respecto a otro pequeño?*

*Dálmata: ¿Si trato de meter uno en otro cabria una vez, ah uno?*

*Profesor: ¿Dos figuras son semejante, entonces se puede decir que son congruentes?*

*Dálmata: "no, no sabría cómo explicarlo pero pienso que no por qué ser semejante no es ser congruente"*

*Profesor: ¿Cómo entiendes que la congruencia es un caso particular de la semejanza?*

*Dálmata: "pensando en todas las actividades que realicé no veo la particularidad, pienso que cada uno tiene propiedades diferentes"*

Análisis de los descriptores del nivel 4, para la observación de la propiedad.

La actividad IV y la entrevista semiestructurada se asocian con los descriptores del cuarto nivel: observación de la propiedad. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante Dálmata, de acuerdo con dichos descriptores.

4.1 Reconoce relaciones de proporcionalidad. Podemos observar mediante las imágenes 13c y 13d y en la transcripción de la última entrevista, que Dálmata reconoce lo dicho por este descriptor; de hecho, estas relaciones de proporcionalidad son necesarias para indicar si las figuras son semejantes o si particularmente son congruentes.

4.2 Establece relaciones matemáticas de proporcionalidad entre lados correspondientes de figuras semejantes. A través de las actividades desarrolladas con este estudiante y, en especial con esta cuarta actividad, hemos percibido que Dálmata, aunque no hace un proceso formal escrito, en el doblado de papel encontró una forma rápida para hallar áreas y volúmenes de dos figuras semejantes y, por ende, pudo establecer la proporcionalidad de lados correspondientes de figuras semejantes. En la manipulación visual y tangible que hizo Dálmata en las figuras construidas, hemos percibido que las operaciones las hace mentalmente y, además, las plasma en las hojas de respuestas, como por ejemplo en las figuras 13c y 13d registra los resultados correctamente.

4.3 Concluye que la congruencia de figuras es un caso particular de la semejanza de figuras. En la entrevista semiestructurada que se le hizo a Dálmata, pudimos percibir que comprende las relaciones de proporcionalidad que se presentan entre los lados correspondientes dedos figuras congruentes, además expresa que es uno,pero concluye que la congruencia y la semejanza son dos conceptos diferentes ya que tienen propiedades distintas, no visualiza cómo una puede ser un caso particular de la otra, en este caso la congruencia caso particular de la semejanza. Por lo tanto, no logra cumplir este descriptor.

Análisis de la característica de FOLDINGBACK. Durante toda la actividad IV, hemos percibido que Dálmata transita por esta característica de FOLDINGBACK cuando, por ejemplo, en las primeras dos acciones, mostradas en la imagen 13c,se observan obstáculos para resolver los procedimientos solicitados; pero al proseguir con las acciones mostradas en la imagen 15d, notamos un acercamiento más formala los conceptos de manera mental, pero que, de igual manera, son registrados certeramente en la hoja de respuestas. La forma en que Dálmata resolvió las acciones, se debe a la construcción y análisis de las figuras que se hicieron con el doblado de papel, dado que él pudo observar las propiedades globales y particulares de los diferentes módulos, debido a la visualización de su construcción con origami, el cual es el medio que se utilizó para caracterizar cómo comprende el estudiante la congruencia como caso particular de la semejanza.

En esta perspectiva, pudimos advertir que a Dálmata le tocó volver a revisar los conceptos de semejanza y de congruencia, para resolver las acciones mostradas en la imagen 15d. De igual manera, en la entrevista semiestructurada, retoma los conceptos de semejanza y de congruencia, refinándolos cada vez más,pero no llega a comprender que la congruencia es un caso particular de la semejanza, tal y como lo enuncia cuando se le pregunta ¿c*ómo entiendes que la congruencia es un caso particular de la semejanza*? "*pensando en todas las actividades que realicé no veo la particularidad, pienso que cada uno tiene propiedades diferentes*"

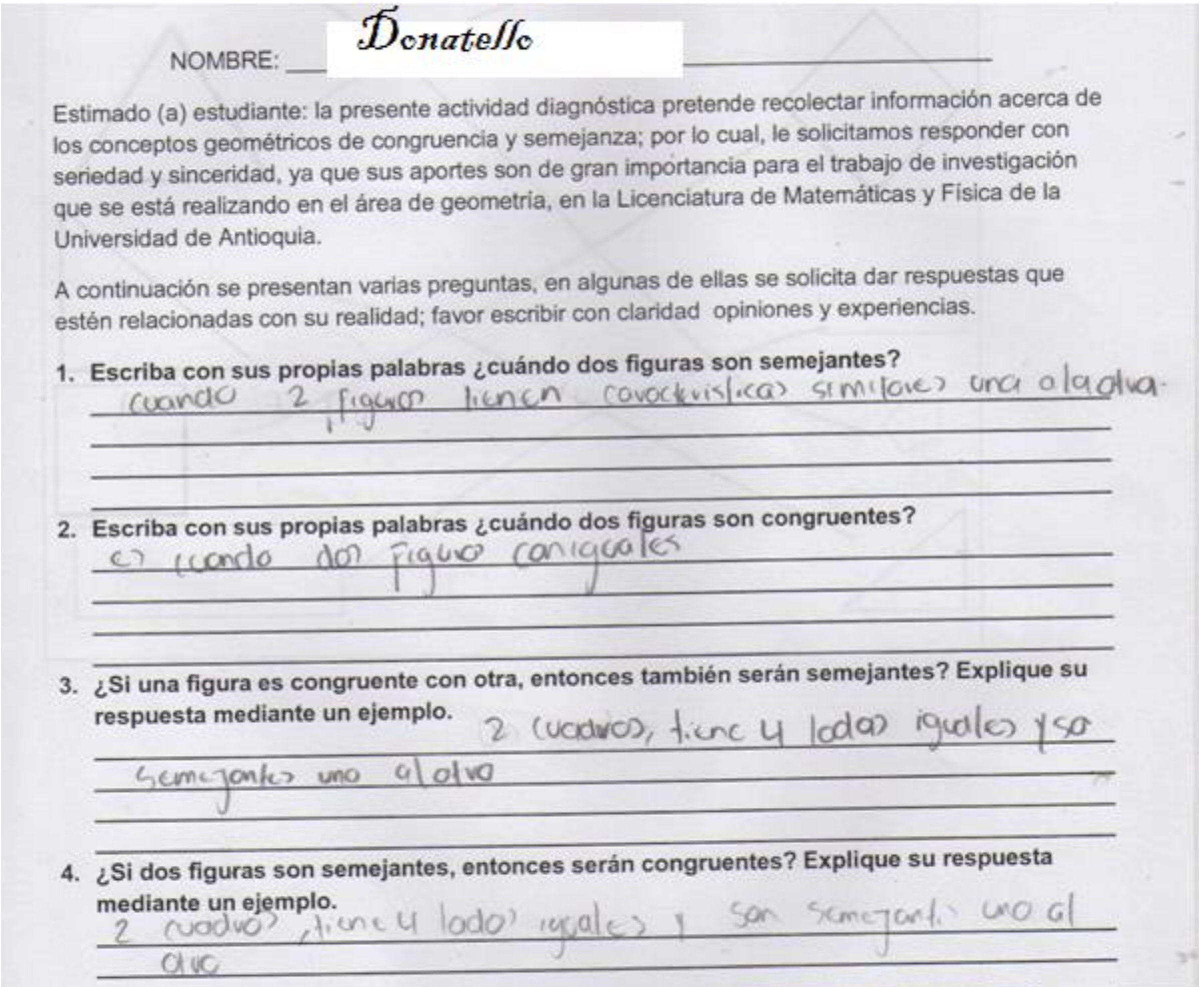
De acuerdo con el análisis de toda la actividad IV y de la entrevista semiestructurada, ambos asociados con los descriptores del nivel cuatro, donde Dálmata responde de manera pertinente a la mayoría de las acciones de esta actividad, pero no cumple con el objetivo de llegar a que la congruencia es un caso particular de la semejanza y, considerando los desempeños de las anteriores actividades, podemos concluir que este estudiante quedó ubicado en el nivel III: de observación de la propiedad de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). De esta manera, se registra que Dálmata no comprende la congruencia como caso particular de la semejanza, en las actividades realizadas, cuyo medio fue el doblado de papel.

### 9.3.3. Proceso de Donatello

El estudiante, cuyo seudónimo es Donatello, fue elegido para ser parte del estudio de casos; su disposición permitió que el desarrollo de las actividades fuera dinámico porque participó activamente de las discusiones, construyendo las figuras y formulando nuevos cuestionamientos.

En consecuencia, para realizar un análisis de cómo Donatello comprende el concepto de semejanza, y la congruencia como caso particular de la misma, a continuación se hará explícito su proceso vivido, en el desarrollo de cada una de las actividades:

Actividad I. Las respuestas del estudiante Donatello en la prueba diagnóstica, cuyo propósito era reconocer el estrato del conocimiento primitivo, se presentan en las imágenes 16a, 16b y 16c. En esta actividad, Donatello contestó cuatro preguntas y dos ejercicios de comparación, los cuales nos permiten dilucidar en qué estrato de comprensión se encuentra y cómo comprende el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, considerando los conocimientos previos que tiene sobre los conceptos de polígonos, semejanza y congruencia.


NOMBRE: Donatello

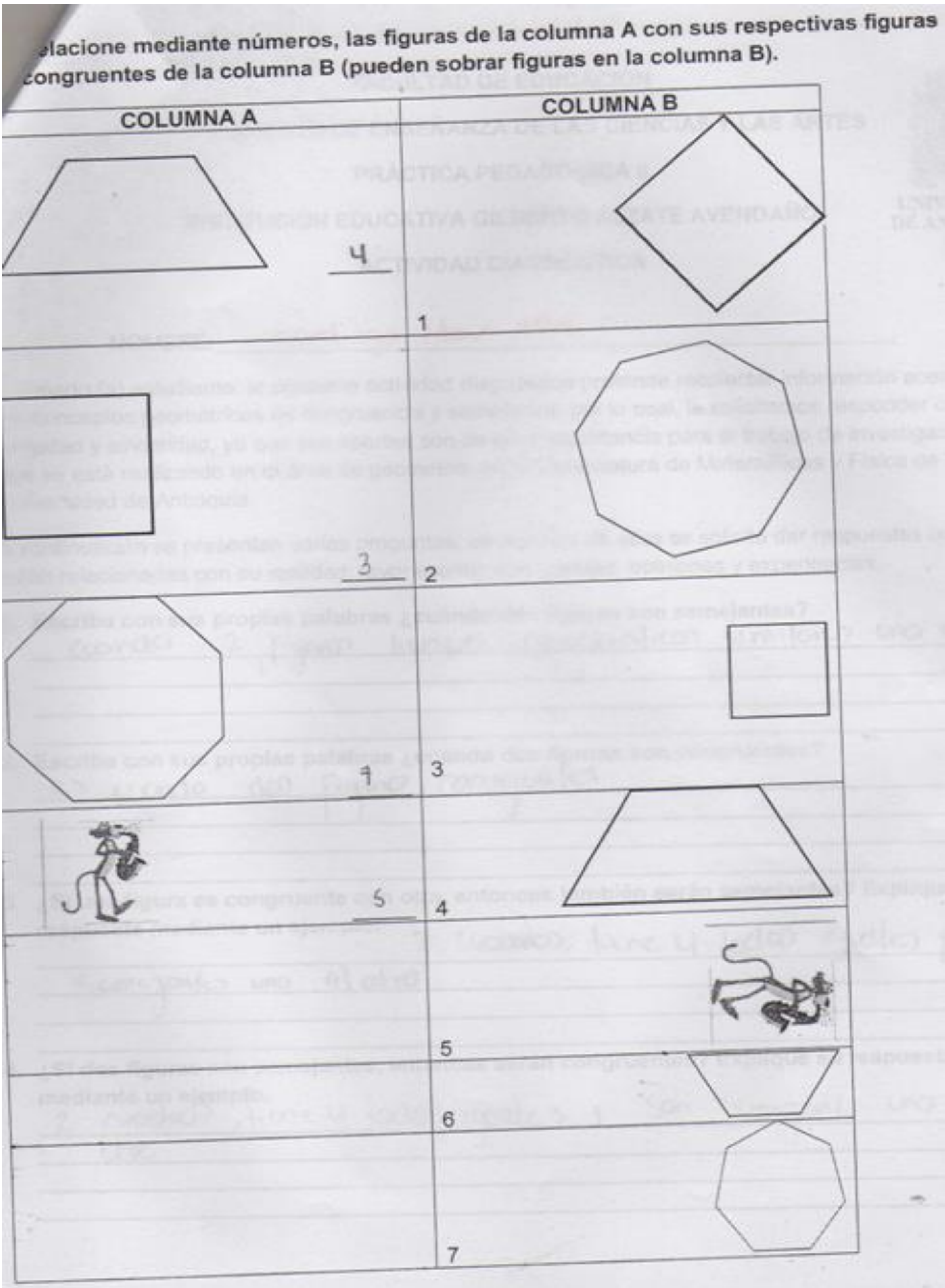
Estimado (a) estudiante: la presente actividad diagnóstica pretende recolectar información acerca de los conceptos geométricos de congruencia y semejanza; por lo cual, le solicitamos responder con seriedad y sinceridad, ya que sus aportes son de gran importancia para el trabajo de investigación que se está realizando en el área de geometría, en la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia.

A continuación se presentan varias preguntas, en algunas de ellas se solicita dar respuestas que estén relacionadas con su realidad; favor escribir con claridad opiniones y experiencias.

1. **Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son semejantes?**
cuando 2 figuras tienen caracteristicas similares una a la otra.
2. **Escriba con sus propias palabras ¿cuándo dos figuras son congruentes?**
es cuando dos figuras con iguales
3. **¿Si una figura es congruente con otra, entonces también serán semejantes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**
2 cuadros, tiene 4 lados iguales y son semejantes uno a lotra
4. **¿Si dos figuras son semejantes, entonces serán congruentes? Explique su respuesta mediante un ejemplo.**
2 cuadros, tiene 4 lados iguales y son semejantes uno al otro

*Imagen 16a*.Respuestas escritas por Donatello en la Actividad Diagnóstica.

Tal como se percibe en la imagen 16a, en las cuatro preguntas, se nota que el estudiante reconoce las nociones de congruencia pero no reconoce la semejanza, pues manifiesta que la semejanza se relaciona con figuras que tienen características similares, pero no reconoce que tienen la misma forma y, la congruencia, la asocia con figuras de igual tamaño. En esta ocasión percibimos que el estudiante tiene ideas sobre lo que es congruencia, pero se nota muy perdido acerca del concepto de semejanza. Esto nos permite inferir que no comprende los conceptos objeto de estudio, nimucho menos distingue que la congruencia es un caso particular de la semejanza; de acuerdo con sus respuestas, parece recurrir a unos conocimientos previos que tiene y que consideramos errados, los cuales deberían estar claros, por ser conceptos trabajados en años anteriores. Por lo tanto, no ha alcanzado la comprensión de los conceptos ni las relaciones que se dan entre ambos.



elacione mediante números, las figuras de la columna A con sus respectivas figuras congruentes de la columna B (pueden sobrar figuras en la columna B).

| COLUMNA A | COLUMNA B |
| --- | --- |
| 4 | 1 |
| 3 | 2 |
| 1 | 3 |
| 5 | 4 |
| | 5 |
| | 6 |
| | 7 |

*Imagen 16b*.Respuestas escritas por Donatello en la Actividad Diagnóstica.

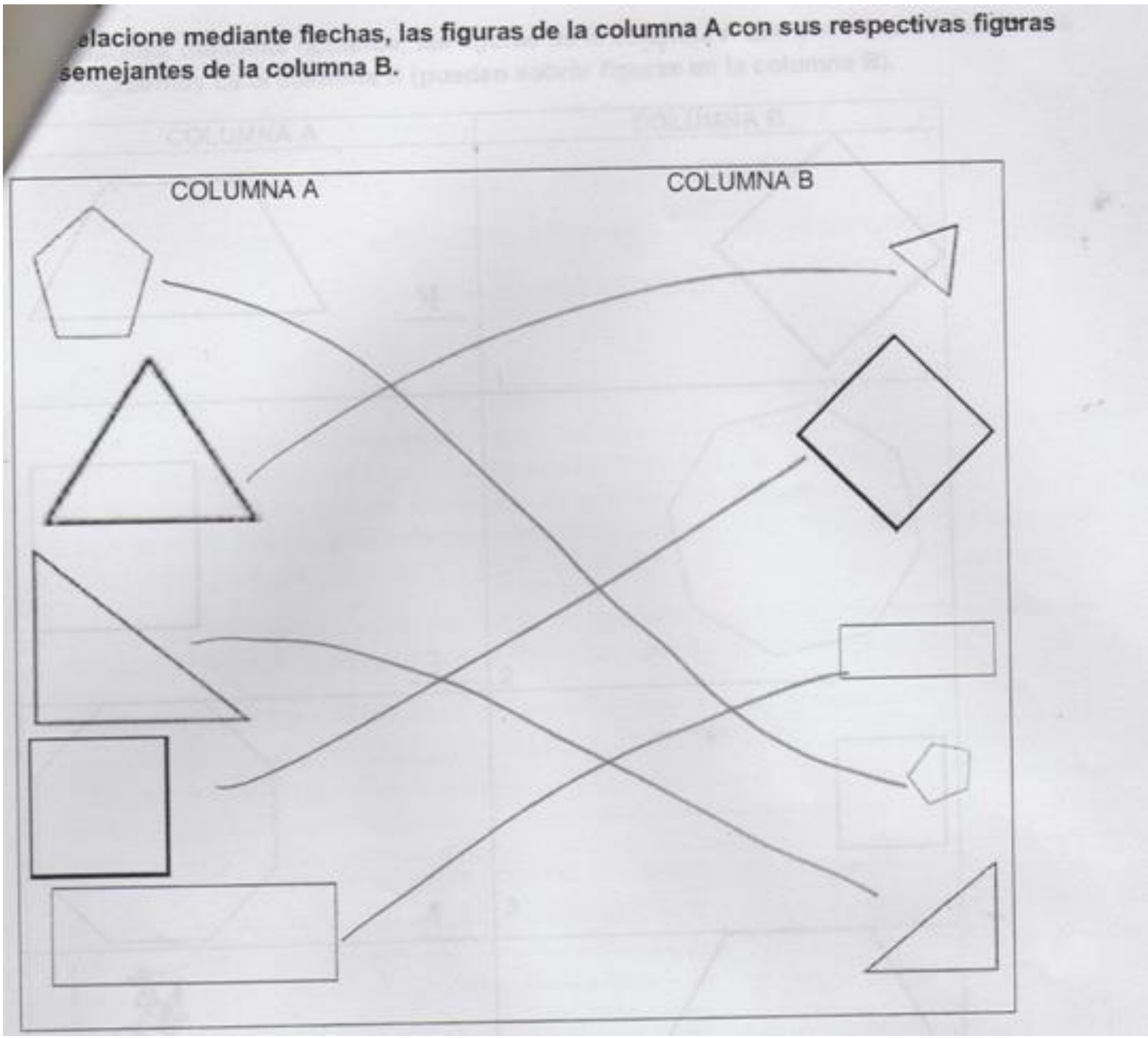



*Imagen 16c*. Respuestas escritas por Donatello en la Actividad Diagnóstica.

De acuerdo con las respuestas de Donatello a las comparaciones que se presentaron en la imagen 16b, percibimos que identificóvisualmente que dos objetos son congruentes parcialmente, pues tiene un error en la imagen de la figura cuadrada de la columna A, cuya respuesta escribe que es la 3 de la columna B  (y realmente es la 1 de la columna B); de la misma manera, también comete un error al relacionar que un octágono es congruente con uno de menor medida; por otra parte, en la imagen 16c también reconoció el concepto de semejanza parcialmente, identificando visualmente y escribiendo correctamente las respuestas en la comparación; además, reconoció figuras planas identificando sus características como: lados, ángulos, entre otros. Al mismo tiempo, se observa que acertó totalmente en las comparaciones de la imagen 16c, pero tuvo dos errores en las comparaciones de la imagen 16b.

Análisis de los descriptores del nivel 1, para el conocimiento primitivo.

La actividad I o actividad diagnóstica se asocia con los descriptores del primer nivel: conocimiento primitivo. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

1.1. Reconoce cuándo dos figuras tienen la misma forma. Mediante las actividades y el rastreo que se hizo de Donatello, podemos establecer que reconoce la igualdad de la forma entre figuras. Por ejemplo, se pudo constatar en la actividad diagnóstica, en las imágenes 16b y 16c, que puede relacionar objetos que tienen la misma forma, pues realizó de manera correcta la asociación y comparación entre figuras geométricas, tanto congruentes, excepto por un error, como semejantes, las cuales relacionó con claridad.

1.2. Identifica las clasificaciones de los triángulos y de los cuadriláteros. De acuerdo con las respuestas de la actividad diagnóstica, se puede inferir que identifica algunas figuras geométricas, como cuadriláteros y triángulos, pero no es posible afirmar que reconoce las clasificaciones de los mismos. Es probable que en actividades posteriores, se pueda establecer el cumplimiento del descriptor.

1.3. Identifica los ángulos y los lados de una figura geométrica. El desenvolvimiento del estudiante en esta actividad, al relacionar de manera correcta formas independientes de la posición, nos lleva a inferir que identifica los conceptos de ángulos y de lados, en las figuras geométricas.

1.4. Percibe el concepto de semejanza. De las respuestas de la actividad I en la imagen 16a, se observa que el estudiante no escribe correctamente las definiciones de los conceptos, por tanto tiende a confundir la semejanza y la congruencia; sin embargo, se puede inferir que Donatello tiene ciertas ideas sobre la semejanza, las cuales hacen notar de una manera explícita, mediante la forma de comparación de las figuras en la imagen16c.

1.5. Percibe el concepto de congruencia. De las respuestas de la actividad I en la imagen 16a, se observa que no logra redactar una definición formal, acerca de lo que se le preguntó; pero en el caso tal de las comparaciones en las imágenes, podemos inferir que Donatello tiene dificultades con la comprensión del concepto de congruencia, pues lo confunde con la semejanza. Esto se puede percibir en las comparaciones hechas, en la imagen 16b.

Considerando los dos últimos descriptores, el cuatro (1.4) y el cinco (1.5), podemos encontrar que percibe e identifica, parcialmente, de forma visual cuándo dos figuras son semejantes o cuándo son congruentes; pero debido a que en las preguntas del uno al cuatro de la imagen 16a, sus respuestas no fueron claras y no tan satisfactorias y, considerando sus errores en la segunda actividad (imagen 16b) entonces Donatello no conoce bien qué es la semejanza y la congruencia y mucho menos ha establecido la relación que puede establecerse entre ambos conceptos; por lo tanto podemos decir que no comprende que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

De acuerdo con el análisis anterior y, considerando los ejercicios de la actividad I o diagnóstica, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel 1: conocimiento primitivo de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores de los demás niveles y así mismo dimensionar si ha comprendido que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Actividad II.Se realizó la construcción de un cubo en origamimodular(de seis módulos) por medio del doblado de papel (ver imagen 17b). También se formularon preguntas intencionadas tanto al mosaico de pliegues (imagen 17a), que surge de la construcción del módulo, como al cubo mismo.

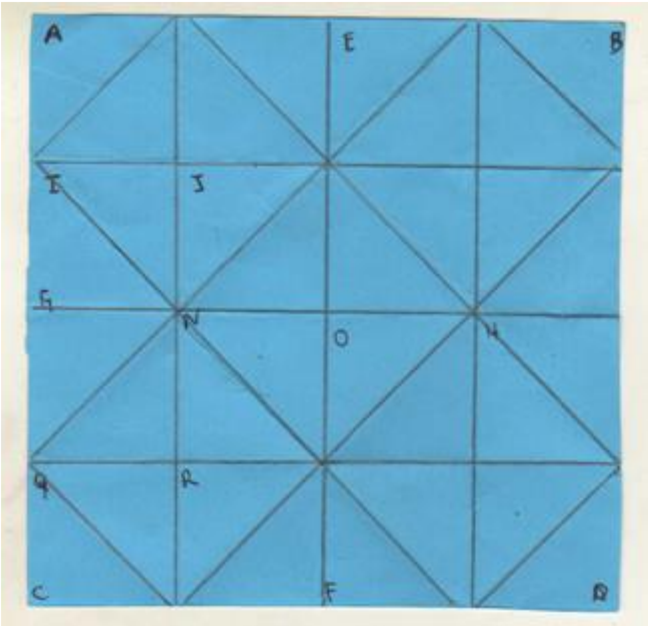



*Imagen17a. Módulo realizado por el estudiante Donatello.*

*Imagen 17b. Cubo realizado por el estudiante Donatello.*

El estudiante Donatello tiene habilidades de motricidad fina ylogra realizar correctamente los pasos que el orientador va indicando con el doblado de papel. Cada uno de los seis módulos, son hechos de igual manera; por último, se arma el cubo con los módulos, logrando un cubo tridimensional y tangible.

De acuerdo con la actividad realizada, Donatello encontró figuras semejantes a partir de los pliegues que quedaron después de la construcción del módulo y en la visualización de las caras del cubo, reconociendo el concepto de semejanza y de congruencia por separado. En observaciones y diálogos casuales sostenidos con él, nos dijo que fácilmente se notan dieciséis cuadrados iguales o congruentes, o también en cada cuadrado encontró dos triángulos rectángulos, que a su vez son isósceles e idénticos, como se percibe en la imagen 17a. De igual manera, lo volvió a decir cuándo armó por segunda vez la figura de la imagen 17b, mostrando notoriamente sus actitudes frente al doblado de papel. Algunos conceptos geométricos los pudo dilucidar fácilmente, dado que mostró que un doblez es una recta en la hoja que se trabaja; también cuando expresa “*el cruce de dos dobleces forman un ángulo*”. Esto nos muestra que algunas nociones de geometría las comprende.

Así mismo, señala algunas figuras geométricas que se forman tanto en el cubo armado como en los pliegues que quedan al desdoblar uno de los módulos; además de percibir el concepto semejanza y de congruencia, identifica tangible y visualmente dichas figuras, reconociendo de alguna manera el concepto de semejanza y de congruencia por separado.

En la imagen 17c, se registraron algunas preguntas escritas a las que Donatello respondió mientras trabajó armando el cubo y, al mismo tiempo, se le observaba de manera continua; estas preguntas permitieron caracterizar sus conocimientos geométricos.

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA GILBERTO ALZATE AVENDAÑO**

**ACTIVIDAD 1: CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO CON DOBLADO DE PAPEL**

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

NOMBRE: Donatello

A continuación, se realizará la construcción de una figura modular por medio del doblado de papel. Se formularán preguntas concernientes tanto al mosaico de pliegues que surge de la construcción del módulo, como del cubo mismo. Se sugiere que sean respondidas con la mayor claridad que sea posible.

Preguntas:

Sobre el módulo:

1. ¿Qué relación puede establecer entre las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC?
   Que son iguales tienen la misma medida.

   Corrobore, mediante el doblado de papel, si los lados y los ángulos de las figuras AEOG, EBHO, OHDF y GOFC son iguales. Explique el procedimiento realizado. Se doblo y quedan la mismo cuatro cuadros los mismas medidas realizadas

2. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABCD y el lado del cuadrado AEOG?
   que los dos son cuadrados tienen su angulo igual y sus lados

3. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABCD, equivale el cuadrado OHDF?
   ocupa 4 cuadros de la mismo dibuja en el cuadro mayor.

4. ¿Qué relación puede establecer entre las 16 figuras que se formaron en el mosaico de pliegues?
   que todas sus lados son iguales, son congruentes

5. ¿Qué relación encuentra entre el lado del cuadrado ABCD y el lado del cuadrado IJNG?
   Que son cuadrados que tienen un angulo igual.

6. ¿Qué porción del área total del cuadrado ABCD, equivale el cuadrado GNRQ?
   Equivale a 1/16

Con la figura construida:

1. Explique si la figura que se construyó es un cubo.
   Es un cubo

2. ¿Qué relación puede establecer entre las caras del cubo?
   Que todas sus caras son iguales y sus lados son iguales

3. Corrobore si los lados y los ángulos de las caras del cubo son iguales. Explique el procedimiento indicado.
   Si son iguales

4. ¿Qué relación puede establecer entre los triángulos que se formaron en las caras del cubo?
   Que todos los triangulos son isosles

*Imagen 17c*: Respuestas de Donatello a las preguntas intencionadas.

El trabajo que registra Donatello en esta actividad, muestra que tiene un conocimiento primitivo adecuado; de acuerdo con la pregunta 1, en la imagen 17c, Donatello encontró relaciones entre los cuadrados y, además, sabe corroborar con el doblado de papel que tienen la misma medida. De acuerdo con las preguntas 2 y 3 de la figura 17c, el estudiante encontró una relación de proporción entre los dos cuadrados tanto en los lados como en el área, al responder que el cuadrado está compuesto por cuatro cuadrados OHDF; así mismo, en las preguntas 4, 5 y 6 de la figura 17c, determinó la proporción de área de los dieciséis cuadrados pequeños en comparación con el cuadrado del módulo total 1:16. Con respecto a las cuatro preguntas relacionadas con el cubo construido (figura 15c) se notó su versatilidad en la construcción con doblado de papel, declarando en cada respuesta, un conocimiento adecuado.

Análisis de los descriptores del nivel 2, para la creación de la imagen.

La actividad II se asocia con los descriptores del segundo nivel: Creación de la imagen. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

2.1 Reconoce algunas nociones de geometría como: punto, segmento, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras, en construcciones con doblado de papel. De acuerdo con la construcción del cubo y, a partir de las ejemplificaciones realizando los dobleces, reconocemos que las nociones de punto, segmento, rectas paralelas, entre otras, las recrea por medio del doblado de papel, tal y como se muestra en las imágenes 17a y 17b.

2.2 Realiza algunas construcciones geométricas con doblado de papel. El estudiante mostró, durante esta actividad, que tenía habilidades para las construcciones con doblado de papel, tal y como se muestra en la imagen 15a, la cual representa un solo módulo de los seis necesarios para construir el cubo pequeño que se muestra en la imagen 15b.

2.3 Reconoce la definición de congruencia de figuras. De acuerdo con las preguntas intencionadas que se le hicieron y, considerando la observación del proceso hecha por los investigadores, se percibe que Donatello muestra algunas figuras congruentes, esto se hizo a partir del cubo mostrado en la imagen 17b y en las respuestas dadas en la imagen 17c.

2.4 Reconoce la definición de semejanza de figuras. De acuerdo con las preguntas intencionadas que se le hicieron, se pudo determinar que Donatello muestra algunas figuras que son semejantes, a partir del cubo que se muestra en la imagen 17b y en las respuestas dadas, las cuales se muestran en la imagen 17c.

2.5 Realiza comparaciones entre dos figuras geométricas y sus partes, para establecer relaciones. A partir de las respuestas del estudiante en la imagen 17c, podemos observar que cumple con este descriptor, dado que puede encontrar las características de figuras como cuadrados y triángulos; además compara formas y tamaños, para establecer relaciones de semejanza y/o congruencia.

Análisis de la característica FOLDING BACK. Cuando Donatello hace los módulos para la construcción del cubo y luego desarma uno de ellos, repite en su propia interlocución "estos cuadrados son semejantes, estos son iguales". En este orden de ideas, Donatello transita constantemente por un FOLDING BACK respecto al tipo de cuadriláteros, refinando cada vez más esos modelos de conceptos en geometría; además, arma el cubo nuevamente, después construye un séptimo módulo y, de igual manera, compara los triángulos que se observan en el mosaico de pliegues de dicho módulo con los cuadrados del cubo armado; revisando en cada momento si son figuras congruentes o semejantes; percibimos que Donatello tuvo una asimilación del concepto de congruencia y semejanza de una manera parcial, porque en su interlocución todavía los confunde, pero al señalar cada uno de los módulos muestra que las visualiza de una manera clara.

De acuerdo con el análisis anterior, aunque sus respuestas son cortas y algunas de las cualesacertadas y, considerando los ejercicios de la actividad II, podemos concluir que el estudiante quedó ubicado en el nivel II: creación de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores de los demás niveles y, así mismo, establecer cómo ha comprendido que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Actividad III.En esta etapa se hace la misma actividad II; pero ahora se realiza la construcción del módulo del cubo con una hoja de papel más grande. Se percibió que este estudiante, en particular, tuvo un avance en su comprensión; por lo tanto, decidimos hacerle algunas preguntas verbales, en virtud de que parecía haber llegado a que la congruencia es un caso particular de la semejanza. De igual manera, fuimos comparando algunas respuestas orales con las respuestas que escribió en las preguntas de la imagen 17c de la actividad

II;estas preguntas intencionadas tenían el propósito de que el estudiante explorara nuevamente en sus  conocimientos primitivos y de creación de la imagen, para establecer distinciones que ayuden al proceso evolutivo de la comprensión de los conceptos como tal.

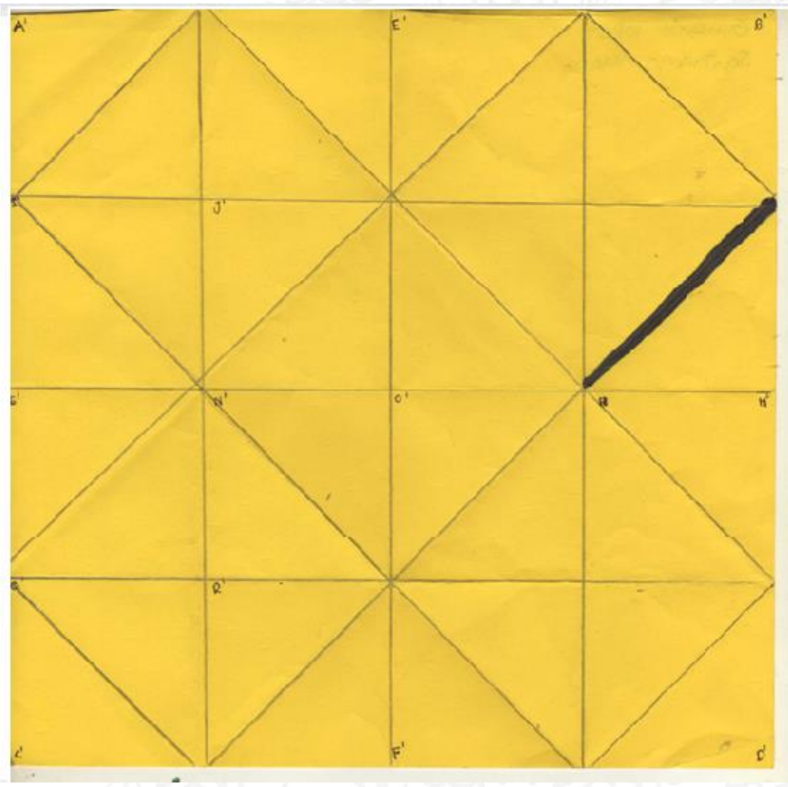


*Imagen 18a.*Módulo hecho por Donatello para construir el cubo grande.

*Imagen 18b.*Construcción del cubo grande por parte de Donatello.

.

Nota: En la anterior actividad al módulo se nombraron ciertos puntos con letras del alfabeto, en esta actividad de forma análoga se nombraran los mismos puntos de la siguiente forma; se pondrá la misma letra con una coma en la parte superior de la letra por ejemplo si el modulo anterior el punto se llama A, en este módulo será A' y así ser hará con los demás puntos del módulo.

Comparando los dos módulos el pequeño con el grande responda lo siguiente:

1. Nombre las figuras que considere semejantes al comparar los dos módulos.
   Todas son semejantes paque tienen la misma figura pero no el mismo tamaño
2. Nombre las figuras que considere congruentes al comparar los dos módulos.
   Ninguna son congruentes paque no tienen el mismo tamaño, pero tienen la misma figura, los mismos triangulos.
3. ¿Cuántas veces crees que cabe el segmento AI en el segmento A'I'?
   cabe cuatro veces
4. ¿Cree usted que el segmento A'I' es la mitad del segmento AI? ¿por qué?
   yo creo que no porque A'I' es 4 veces mas grande que AI
5. Si los lados del módulo grande miden L, por ser cuadrado ¿Cuánto medirán los lados del módulo pequeño?
   1/2

Comparando las dos figuras el cubo grande con el cubo pequeño responda lo siguiente:

6. ¿Las figuras son congruentes o semejantes? ¿por qué?
   Semejantes paque tienen la misma figura y no el tamaño.
7. ¿Los lados del cubo pequeño que medida tiene comparándolo con el lado del módulo grande?
   1/4

*Imagen 18c.*Respuestas de  Donatello a la actividad III

Los seis módulos grandes son construidos por el estudiante Donatello  de una manera fácil y relativamente rápida. El estudiante se le convoca a reflexionar y a contestar mentalmente cada una de las preguntas mostradas en la imagen 18c. Luego, para constatar si realmente comprende el concepto de congruencia, se le pregunta, al desdoblar dos de los módulos grandes después de haber armado el cubo, lo siguiente:

*Profesor: ¿puedes notarcómo son las figuras geométricas que dejan  las trazas de dos de los módulos?*

*Donatello: "hay unas queson semejantes".*

*Profesor: ahora escoge un módulo desdoblado del cubo pequeño y compáralo.*

*Donatello: "tienen igual forma".*

*Profesor: ¿conoces la palabra semejanza?*

*Donatello: "si, porque son figuras iguales, entonces se dice que son semejantes".*

*Profesor: ¿conoces la palabra congruente?*

*Donatello: "también son semejantes e iguales".*

*Profesor: ¿entonces qué se puede decir de dos módulos del cubo pequeño?*

*Donatello: "que son iguales".*

*Profesor: ¿entonces cómo son?*

*Donatello: "iguales".*

*Profesor: ¿qué relación encuentras entre la congruencia y la semejanza?*

*Donatello: "No sé".*

*Profesor: ¿entonces qué es la congruencia respecto a la semejanza?*

*Donatello: "No profe, no sé".*

En este caso, Donatellorealiza correctamente con doblado de papel las figuras orientadas por el profesor como se muestra en la imagen 18a; pero también utiliza esta estrategia en la construcción del cubo mostrado en la figura 18b. En esta misma línea, se percibió, además, la manera como fue relacionando sus conceptos al compararlos con las preguntas de la imagen 17d, pero finalmente, Donatello confunde semejanza con congruencia y, además, no alcanza la comprensión de la congruencia como caso particular de la semejanza pues se le dificulta verbalizar la relación entre los conceptos,es decir, Donatello no encuentra la conexión.

Análisis de los descriptores del nivel 3, para la comprensión de la imagen.

La actividad III se asocia con los descriptores del tercer nivel: comprensión de la imagen. A continuación, se caracterizará la información recolectada sobre el proceso vivido por el estudiante, de acuerdo con dichos descriptores.

3.1 Comprende el concepto de semejanza de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. En esta ocasión, mediante los pliegues que quedan después de desdoblar uno de los módulos, pudimos percibir, en sus comparaciones a la hora de la visualización, que comprende el concepto de semejanza al señalar que el módulo pequeño y el módulo grande son semejantes; pero a la hora de expresar conceptualmente la diferencia o qué es en sí el concepto formal, no lo logra hacer de una forma correcta.

3.2 Comprende el concepto de congruencia de figuras, mediante construcciones con doblado de papel. Al respecto, se visualizó en toda la actividad que comprende por medio del doblado de papel qué es la congruencia y la señala en la comparación entre los módulos del mismo cubo; pero no logra enunciar formalmente en las preguntas intencionadas lo que es. En este caso, no comprende el concepto de congruencia y, en ocasiones, lo confunde con la semejanza.

Donatello también transita por un FOLDING BACK al hacer uso de otros conceptos básicos de la geometría; además, revisa esos conceptos por medio de la actividad III en comparación con la actividad II. Este estudiante parece reconocer la semejanza y la congruencia visualmente pero no logra diferenciar un concepto del otro, a la hora de dar una definición formal; así es como lo percibe por medio de las construcciones hechas con doblado de papel. El origami se podría presentar como un medio para que Donatello pueda alcanzar la comprensión de la congruencia como un caso particular de la semejanza pero, hasta el momento, no logra conectar lo visual con la conceptualización formal.

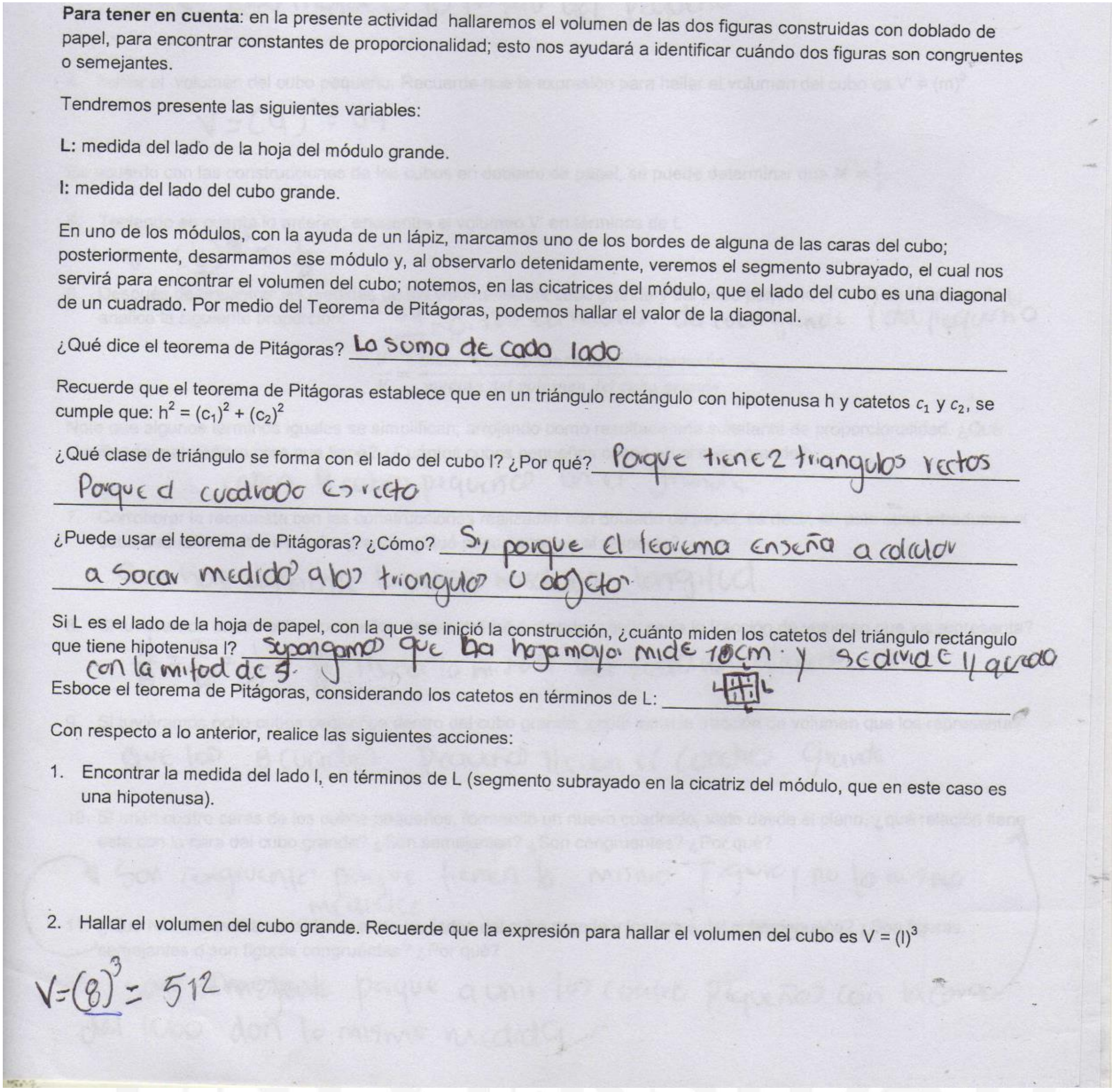
De acuerdo con el análisis de toda la actividad III, se infiere que respondió de manera no muy acertada las preguntas, entonces podemos concluir que el estudiante no alcanza a ubicarse como tal en el nivel III: de comprensión de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). Ya que le faltóla comprensión formal de concepto y, además, que encontrara la relación existente entre la congruencia y la semejanza, pero esto lo podría alcanzar en las actividadesdel nivel IV. Sus actuaciones posteriores, en las actividades siguientes, nos posibilitarán analizar los descriptores del último nivel considerado en esta investigación y así mismo establecer si se ha comprendido el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

Actividad IV. En esta actividad se retoman las construcciones de los cubos pequeño y grande, tal como se hicieron en las actividades II y III, respectivamente. El propósito era que el estudiante planteara reflexiones e hiciera un análisis sobre el concepto de semejanza y de congruencia como caso particular de esta. Se presentan, además, una serie de preguntas que se realizan de forma escrita. Se espera que Donatello pueda reconocer y utilizar imágenes para identificar propiedades más globales de los objetos, en particular, imágenes matemáticas del concepto de semejanza. Las construcciones de los cubos, tanto de los pequeños como del grande, se realizaron en grupos de estudiantes, asesorados por los investigadores, de tal forma que la actividad fuera más dinámica y en colectivo; intencionalmente se logró que los tres estudiantes del estudio de casos trabajaran de manera conjunta.

Las actividades de construcción con doblado de papel de los diferentes cubos se muestran en las imágenes 19a.

*Imagen 19a.*Construcción de los cubos hechos por Donatello

Se realiza la actividad y luego se procede a desdoblar algún módulo del cubo grande y algunos de los pequeños, para resolver las preguntas de la actividad IV, cuyas respuestas se pueden observar en las imágenes 19b, 19c y 19d. Los estudiantes pudieron construir y desarmar los diferentes cubos, según lo que se pedía, pero cada uno contestó las preguntas de manera independiente; de acuerdo con esto, procedieron a responder las preguntas; en algún momento ellos necesitaron aclaraciones sobre las preguntas y pertinentemente lo hicimos.



**Para tener en cuenta**: en la presente actividad hallaremos el volumen de las dos figuras construidas con doblado de papel, para encontrar constantes de proporcionalidad; esto nos ayudará a identificar cuándo dos figuras son congruentes o semejantes.

Tendremos presente las siguientes variables:

**L:** medida del lado de la hoja del módulo grande.

**l:** medida del lado del cubo grande.

En uno de los módulos, con la ayuda de un lápiz, marcamos uno de los bordes de alguna de las caras del cubo; posteriormente, desarmamos ese módulo y, al observarlo detenidamente, veremos el segmento subrayado, el cual nos servirá para encontrar el volumen del cubo; notemos, en las cicatrices del módulo, que el lado del cubo es una diagonal de un cuadrado. Por medio del Teorema de Pitágoras, podemos hallar el valor de la diagonal.

¿Qué dice el teorema de Pitágoras? La soma de cada lado

Recuerde que el teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo con hipotenusa h y catetos $c_1$ y $c_2$, se cumple que: $h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2$

¿Qué clase de triángulo se forma con el lado del cubo l? ¿Por qué? Porque tiene 2 triangulos rectos Porque el cuadrado es recto

¿Puede usar el teorema de Pitágoras? ¿Cómo? Si, porque el teorema enseña a calcular a sacar medidas a los triangulos u objetos

Si L es el lado de la hoja de papel, con la que se inició la construcción, ¿cuánto miden los catetos del triángulo rectángulo que tiene hipotenusa l? Supongamos que la hoja mayor mide 10cm y se divide 4 cuadros con la mitad de 5.

Esboce el teorema de Pitágoras, considerando los catetos en términos de L: L

Con respecto a lo anterior, realice las siguientes acciones:

1. Encontrar la medida del lado l, en términos de L (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

2. Hallar el volumen del cubo grande. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es $V = (l)^3$

$V = (8)^3 = 512$

*Imagen 19b*.Respuestas de Donatello en la actividad IV.

En esta parte de la actividad, después de haber construido seis cubos pequeños y un cubo grande y al analizar los módulos desdoblados, podemos observar en la imagen 19b que Donatello no responde la pregunta 1 en la que debería tener un conocimiento geométrico más formal, en relación con el Teorema de Pitágoras y, además,observamos que tiene algunas debilidades a la hora de responder. Por ejemplo, el estudiante afirmó que el triángulo formado es recto, lo que puede ser verdad si estamos hablando del triángulo rectángulo, o una dificultad de confusión entre los términos ángulo y triángulo; de igual manera, al realizar la acción uno recurre a una medida específica y determina que la medida del catetodel triángulo "*es un cuarto del grande*", pero él no lo logra determinar. A pesar de ello, en este caso afirma verbalmente con seguridad "*que el lado de la hoja del módulo del cubo pequeño es la mitad del lado de la hoja módulodel cubo grande*". Se puede inferir que Donatello quedó con dudas y además no logra hacer un procedimiento. En lo que sigue de la actividad, trata de seguir respondiendo aunque aún tenga dudas que notan cierta inestabilidad del estudiante, en cuanto a su comprensión, ya que da respuestas cortas y poco concretas, además,suele darlascon inseguridad.

Ahora, repetiremos el procedimiento anterior para encontrar el volumen del cubo pequeño. Para ello, tenga en cuenta los siguientes cambios:

**M:** medida del lado de la hoja del módulo pequeño.

**m:** medida del lado del cubo pequeño.

$V=(4)^3=64$

3. Encontrar la medida del lado m, en términos de M (segmento subrayado en la cicatriz del módulo, que en este caso es una hipotenusa).

Que el lado mayor o la mitad del pequeño

4. Hallar el volumen del cubo pequeño. Recuerde que la expresión para hallar el volumen del cubo es V' = (m)$^3$

$V=(4)^3=64$

De acuerdo con las construcciones de los cubos en doblado de papel, se puede determinar que $M=\frac{L}{2}$.

5. Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre el volumen V' en términos de L

$V=\left(\frac{L}{2}\right)^3=\frac{L}{8}$

6. Después de encontrar las medidas de los volúmenes del cubo grande y del cubo pequeño (V y V') en términos de L, analice la siguiente proporción:

$\frac{64}{512}=0.125$ La relacion del cubo grande y del pequeño

$$\frac{V'}{V}=\frac{medida\ del\ volumen\ del\ cubo\ pequeño}{medida\ del\ volumen\ del\ cubo\ grande}$$

Note que algunos términos iguales se simplifican, arrojando como resultado una constante de proporcionalidad. ¿Qué significado matemático cree que tiene? ¿Cuántos cubos pequeños caben en el cubo grande?

caben 8 cubos pequeños en el grande.

7. Corroborar la respuesta con las construcciones realizadas con doblado de papel, es decir, en este caso introduzca el cubo pequeño dentro del cubo grande. ¿Qué puede concluir al respecto?

Que hay diferente tamaño medidas longitud.

8. Si tuviéramos cuatro cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?

$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ llena la mitad del cuadro grande

9. Si tuviéramos ocho cubos pequeños dentro del cubo grande, ¿cuál sería la fracción de volumen que los representa?

Que los 8 cuadros pequeños llenan el cuadro grande

10. Si unen cuatro caras de los cubos pequeños, formando un nuevo cuadrado, visto desde el plano, ¿qué relación tiene este con la cara del cubo grande? ¿Son semejantes? ¿Son congruentes? ¿Por qué?

Son congruentes porque tienen la misma figura y no la misma medida

11. ¿Qué relación puede establecer entre los lados del cubo grande y los lados del cubo pequeño? ¿Son figuras semejantes o son figuras congruentes? ¿Por qué?

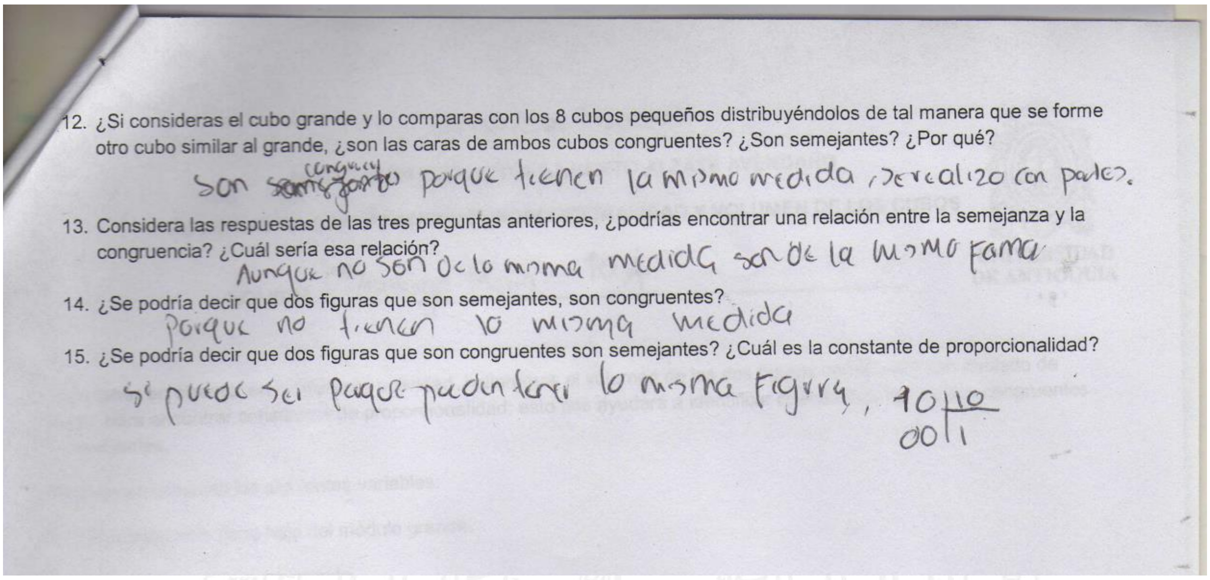
son ~~semejante~~ porque a unir los cuatro pequeños con la cara del cubo dan la misma medida

*Imagen 19c*.Respuestas de Damián en la actividad IV.

En la imagen 19c se percibe cómo abordó Donatello la actividad, de forma tal que sin importar sus dificultades de comprensión, sigue respondiendo normalmente laspreguntas y sigue tomando los resultados que él percibe visualmente por medio del trabajo realizado con la papiroflexia. La ventaja de tomar el doblado de papel como medio para realizar la actividad, es que permite que los estudiantes con dificultades en matemáticas, puedan resolver problemas con otros métodos no formales y comprender conceptos que no fueron alcanzados con otros modelos formales, quizás  enseñados de forma tradicional.

Después de todo, se percibe que utiliza sus resultados y los expresa también de forma verbal, debido a que tuvo en cuenta las expresiones matemáticas de comparación de las medidas de volúmenes y proporciones. Igualmente, la forma explicativa que dio la plasmó en el papel como se observa en la imagen 19b, razón por la cual llega a unos resultados correctos, en las respuestas de las acciones tres, cuatro, cinco y seis de esta misma imagen. Si consideramos de manera global las acciones siete, ocho, nueve, diez y once,  observamosque es concreto y no es tan conceptual a la hora de hablar de los conceptos y en las comparaciones de los diferentes cubos y los diferentes módulos, encontrando relaciones que plasman suincomprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia.

.


12. ¿Si consideras el cubo grande y lo comparas con los 8 cubos pequeños distribuyéndolos de tal manera que se forme otro cubo similar al grande, ¿son las caras de ambos cubos congruentes? ¿Son semejantes? ¿Por qué?

son ~~semejantes~~ congruentes porque tienen la misma medida, se realizo con palos.

13. Considera las respuestas de las tres preguntas anteriores, ¿podrías encontrar una relación entre la semejanza y la congruencia? ¿Cuál sería esa relación?

Aunque no son de la misma medida son de la misma forma

14. ¿Se podría decir que dos figuras que son semejantes, son congruentes?

Porque no tienen la misma medida

15. ¿Se podría decir que dos figuras que son congruentes son semejantes? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

si puede ser porque pueden tener la misma figura, 10/10 00/1

*Imagen 19d*.Respuestas de Donatello en la actividad IV.

Hasta el momento Donatello, en su proceso, pareció no estar alcanzando la comprensión total del concepto formal de semejanza y la forma particular en que se presenta, bajo el término de congruencia, y como lo vemos en la acción quince no llega a describir las relaciones de proporcionalidad que hay entre dos objetos congruentes, que a su vez son semejantes, cuya constante de proporcionalidad al comparar las medidas de los lados correspondientes es uno y, aunque lo hace en una operación, no logra plasmar explicativamente porqué lo es.

En el contexto en el que se realizó este proyecto, nos dimos cuenta de la necesidad de utilizar una entrevista semiestructurada, ya que debíamos caracterizar si algún estudiante, después de realizar la actividad IV, había logrado la comprensión de los conceptos de semejanza y de congruencia, como caso particular del primero. A continuación, se presentan algunos apartados de la entrevista transcrita.

Apartes de la entrevista semiestructurada. Este instrumento de recolección de información nos sirvió para constatar si en el transcurso de los días, después de desarrolladas todas las actividades, el estudiante analizó y reflexionó el concepto de semejanza y, en especial, el caso particular de congruencia, de manera que se pueda establecer si hubo un proceso de refinamiento recursivo, tal como lo plantean Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003).

*Profesor: ¿Cómo reconoces que dos figuras son semejantes?*

*Donatello: "porque tienen la misma forma".*

*Profesor: ¿Cómo reconoces que dos figuras son congruentes?*

*Donatello: "porque son iguales en todo".*

*Profesor: ¿Cuántas veces cabe el cubo pequeño en el cubo grande?*

*Donatello: "ocho cubitos caben".*

*Profesor: ¿Cuál es la proporción o relación de un cubo pequeño respecto al grande?*

*Donatello: "es ocho veces"*

*Profesor: Ahora, ¿cuál es la proporción de uno pequeño respecto a otro pequeño?*

*Donatello: "me acuerdo que en la pregunta la operación medio uno"*

*Profesor: ¿Dos figuras son semejante, entonces se puede decir que son congruentes?*

*Donatello: "no, porque varia el tamaño"*

*Profesor: ¿Cómo entiendes que la congruencia es un caso particular de la semejanza?*

*Donatello: "creo que como en la congruencia todo tiene que ser igual entonces por esto la congruencia es la que es un caso particular de la semejanza"*

Análisis de los descriptores del nivel 4, para la observación de la propiedad.

La actividad IV y la entrevista semiestructurada se asocian con los descriptores del cuarto nivel: observación de la propiedad. A continuación, se caracterizará el proceso vivido por el estudiante Donatello, de acuerdo con dichos descriptores.

4.1 Reconoce relaciones de proporcionalidad. El estudiante hace uso de estas relaciones pero muy visualmente, situación quepodemos observar mediante las imágenes 19c y 19d y en la transcripción de la última entrevista; es importante teneren cuenta que estas relaciones de proporcionalidad son necesarias para indicar si las figuras son semejantes o si particularmente son congruentes y por esto es que al estudiante se le dificulta mucho responder acertada y globalmente las preguntas.

4.2 Establece relaciones matemáticas de proporcionalidad entre lados correspondientes de figuras semejantes. A través de las actividades desarrolladas con este estudiante y, en especial con esta cuarta actividad, en la manipulación visual y tangible que hizo Donatello en las figuras construidas, hemos percibido que las operaciones las hace mentalmente y, además, las plasma en las hojas de respuestas, como por ejemplo, en las figuras 19c y 19d registra los resultados a llevar a cabo. Por lo tanto, establece parcialmente algunas relaciones matemáticas de proporcionalidad entre los lados correspondientes de las figuras que considera semejantes.

4.3 Concluye que la congruencia de figuras es un caso particular de la semejanza de figuras. En la entrevista semiestructurada que se le hizo a Donatello, pudimos percibir que no comprende las relaciones de proporcionalidad que se presentan entre los lados correspondientes dedos figuras congruentes, a pesar deexpresar que es uno,no profundiza en su respuesta y, debido a esto, logra concluir que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

Análisis de la característica FOLDINGBACK. Durante toda la actividad IV, hemos percibido que Donatello transita por esta característica de FOLDINGBACK cuando, por ejemplo, en las primeras dos acciones, mostradas en la imagen 19c,se observan obstáculos para resolver los procedimientos solicitados; pero al proseguir con las acciones mostradas en la imagen 19d, notamos un acercamiento más formal a los conceptos de manera mental y además verbal, pero que, de igual manera, son registrados en la hoja de respuestas. La forma en que Donatello resolvió las acciones, se debe a la construcción y análisis de las figuras que se hicieron con el doblado de papel, dado que él pudo observar las propiedades globales y particulares de los diferentes módulos debido a la visualización de su construcción con origami, el cual es el medio que se utilizó para caracterizar cómo comprende el estudiante la congruencia como caso particular de la semejanza.

En esta perspectiva, pudimos advertir que a Donatello le tocó volver a revisar los conceptos de semejanza y de congruencia, para resolver las acciones mostradas en la imagen

19c. De igual manera, en la entrevista semiestructurada, retoma los conceptos de semejanza y de congruencia, pero con algunas confusiones para llegar a comprender que la congruencia es un caso particular de la semejanza, tal y como lo enuncia cuando se le pregunta:*Profesor: ¿Cómo entiendes que la congruencia es un caso particular de la semejanza? Donatello: "creo que como en la congruencia todo tiene que ser igual entonces por esto la congruencia es la que es un caso particular de la semejanza".*

De acuerdo con el análisis de toda la actividad IV y de la entrevista semiestructurada, ambos asociados con los descriptores del nivel cuatro, donde Donatello responde de manera confusa algunas de las acciones de esta actividad y, considerando los desempeños de las anteriores actividades, podemos concluir que este estudiante quedó en el nivel III: de comprensión de la imagen de Pirie y Kieren (1990, citado por Meel, 2003). De esta manera, se registra que Donatello no comprende la congruencia como caso particular de la semejanza, en las actividades que se hicieron, cuyo medio fue el doblado de papel u origami.

# 10.Conclusiones

Con este trabajo de investigación, se evidenciaron algunasfalencias que presentanel sistema educativo y, en particular, la Educación Matemática, por diferentes aspectos que en los primeros capítulos quedan evidenciados.En este sentido, es importante hacer mención que los estudiantes no están logrando el nivel óptimo para poder avanzar en la comprensión de los conceptos tanto matemáticos como geométricos;desafortunadamente, los fines educativos no están cumpliendo con lo que se espera de la enseñanza en nuestro país; aunque esto es motivo de discusión, en este trabajo solo se mencionaron algunos aspectos relacionados con tal situación.

Por eso, la preocupación de la comunidad matemática propende por superar las adversidades en la Educación Matemática, con diferentes trabajos de investigación que aporten estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje, es decir,que brinden herramientas a los docentes para que puedan orientar un buen proceso de enseñanza y a los estudiantes para que logren mejores niveles de comprensión; queda en manos de los docentes la utilización de dichas herramientas, con el propósito de ir mejorando en el aula de clase la educación de los estudiantes; en este sentido, las conclusiones de este trabajo de investigación surgen a partir de: dar respuesta a la pregunta de investigación, consecución de los objetivos, aportes a la Educación Matemática e importancia del doblado de papel como herramienta didáctica.

## 10.1. Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que nos planteamos en este trabajo de investigación fue la siguiente: ¿De qué manera la geometría del doblado de papel permite a los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, la comprensión del concepto de congruencia como un caso particular de la semejanza, en el contexto del Modelo de Pirie y Kieren?

Durante todo el trabajo de investigación se fue dando respuesta a la pregunta de investigación, teniendo en cuenta las directricesdel modelo de PirieyKieren y sus niveles, las cuales nos ayudaron a plantear unos descriptores acordes a dichos niveles, que se fueron refinando durante la investigación, y tabla de actividades por nivel, que brindó información valiosa para el análisis de cómo los estudiantes comprendían el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, con el uso del doblado de papel como medio didáctico, el cual facilitó el razonamiento de los estudiantes a medida que iban avanzando en los niveles del modelo de Pirie y Kieren. Es fundamental mencionarque los estudiantes hicieron uso de la característica del FOLDINGBACK, la cual esmuy importante para modelo, pues ayuda a afianzar y a reforzar la apropiación del concepto. Por ende, la utilización del doblado de papel para la comprensión de los conceptos objetos de estudio, bajo los parámetros del modelo de Pirie y Kieren, nos permitieron la creación de unos descriptores, iluminados por unas actividades, que nos posibilitaron dar respuesta a la pregunta de investigación.

## 10.2. Consecución de los objetivos

En este trabajo de investigación nos planteamos los siguientes objetivos

### 10.2.1. Objetivo general.

Analizar de qué manera la geometría del doblado del papel permite a los estudiantes del grado décimo, la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, en una institución del municipio de Medellín, en el contexto del Modelo de Pirie y Kieren.

Para lograr este objetivo nos basamos en los niveles del modelo de Pirie y Kieren y su característica de FOLDINGBACK, para el planteamiento de unos descriptores hipotéticos por cada nivel del modelo, que se fueron refinando en el transcurso de la investigación; adicionalmente,se construyeron unas actividades con doblado de papel, para la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

Se diseñó una entrevista semiestructurada, como método de recolección de información,para analizar la experiencia vivida por parte de los estudiantes que participaron en el estudio de casos de esta investigación; esta entrevista se hizo de forma individual ya que cada estudiante vivió un proceso diferente para lograr la compresión del concepto de congruencia como un caso particular de la semejanza. Las actividades, descriptores y entrevista,  nos permitieron ubicar a los participantes en uno de los niveles del modelo según los descriptores propuestos.

Por lo tanto, el objetivo se pudo cumplir totalmente, pues se hizo un análisis individual profundode todas las situaciones vividas por los tres estudiantes,en el proceso de esta investigación, el cual se encuentra en el capítulo ocho. Finalmente, se puede establecer que los tres estudiantes tuvieron ciertos avances en la comprensión de los conceptos; sin embargo solo uno llegó al nivel IV y dos al nivel III.

### 10.2.2. Objetivos específicos.

Los objetivos específicos planteados en esta investigación fueron los siguientes:

Describir cómo comprenden los estudiantes del grado décimo, el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, en el marco del Modelo de Pirie y Kieren.

Diseñar y evaluar actividades con doblado de papel, que permitan la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

En consecuencia, para cumplir estos objetivos, se realizó el estudio de casos con tres estudiantes del grado décimo; en el capítulo 8.3 se encuentra la descripción profunda de cada uno de los estudiantes, en la cual se caracterizacómo comprendían el concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, teniendo en cuenta los descriptores que se fueron refinando y que ayudaron a ubicar a los participantes en alguno de los cuatro primeros niveles del modelo de Pirie y Kieren.

Se planteó un esquema de actividades, paracada uno de loscuatro niveles trabajados en esta investigación del modelo de Pirie y Kieren; las características principales de cada nivel nos orientaron paragenerar actividades con doblado de papel, las cualesse encuentran descritas en el capítulo 7.6. Pudimos concluir que estas actividadesayudaron a la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.De esta manera,se dio consecución a los objetivos específicos planteados en la investigación.

## 10.3. Aportes a la Educación Matemática

La comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, es uno de nuestros aportes, debido a que en nuestro rastreo bibliográfico, no se encontró, hasta el momento,algún trabajo de investigación queaborde esta relación entre la congruencia y la semejanza;percibimos que si trabajamos esta relación puede haber una mejor comprensión de ambos conceptos, dado que hay una articulación importante entre estos, que muchos estudiantes o profesores no consideran.

Las guías de actividades, junto con el esquema de actividades, es otro de nuestros aportes, ya que fueron creadas con el objetivo de que los estudiantes fueran avanzando en la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza. Así mismo, la tabla de descriptores es otro de nuestros aportes a la Educación Matemática, debido a su gran importancia, ya que ayuda a ubicar el estudiante en qué nivel del modelo de Pirie y Kieren se encuentra; nos permitió generar las actividades adecuadas para cada nivel, que posibilitaranla comprensión de los conceptos y, de esta manera, intentar lograr que los estudiantes avancen en los niveles y se apropien de los conceptos; en el capítulo 7.7 se encuentra la tabla de descriptores detallada, junto con el esquema de actividades.

En consecuencia, con la realización de este trabajo de investigación se hicieron aportes importantes a laEducación Matemática, que pueden ayudar a mejorar el proceso educativo ylograr avances significativos en la comprensión de los estudiantes para que puedan obtener un aprendizaje significativo.

## 10.4. Importancia del doblado de papel como herramienta didáctica

El doblado de papel tiene ventajas en la enseñanza de la geometría, pues permite que los estudiantes trabajen visual y tangiblemente para una mejor comprensión de los concepto; en este estudio, en particular, el estudiante logra acercarse de una manera pertinente al concepto de congruencia como caso particular de la semejanza, tal como se percibe en el caso de Damián, que logra llegar al cuarto nivel evolutivo (observación de la propiedad) del marco teórico del Modelo de Pirie y Kieren. Esto ratifica que el diseño y evaluación de las actividades con doblado de papel, son acciones propicias para elanálisisde cómo evoluciona el estudiante en la comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza.

Las actividades con doblado de papel dinamizan una clase de geometría, razón por la cual consideramos este medio como un método didáctico para facilitar la comprensiónde conceptos matemáticos en personas con dificultades a la hora de entenderalgún concepto.

Finalmente, cabe aclarar que el proceso de descripción de las actividades, con respectoa la información recolectada de los estudiantes, se registra de una manera clara, pues las evidencias se encuentran de modo tangible, tanto las que construyeron con doblado de papel, como las preguntas que contestaron los estudiantes, de manera escrita y de manera verbal, en las entrevistas semiestructurada.

# 11.Sugerencias y recomendaciones

Sugerimos que los docentes utilicen el doblado de papel u origami como medio para trabajar actividades en geometría frente a un concepto, ya que lo consideramos un buen apoyo didáctico para la evolución y comprensión del estudiante frente a los obstáculos que se presentan a la hora de entender y desarrollar un concepto. En el caso especial de la semejanza los docentes pueden realizar actividades para observar como comprenden los estudiantes la congruencia como caso particular de la semejanza y así hacer un trabajo de realimentación donde el Folding Back de manera que el refinamiento de los conceptos geométricos se cualifiquen. De igual manera desde lo tangible y lo visual el estudiante logra acercarse de una manera pertinente al concepto de congruencia como caso particular de la semejanza; tal como se percibe en el caso de Damián que logra llegar al cuarto nivel evolutivo (observación de la propiedad) marco teórico del modelo de Pirie y Kieren . Esto ratifica que el diseño y evaluación de las actividades con doblado de papel son propicias para la observación de cómo evoluciona el estudiante en la comprensión del concepto congruencia como caso particular de la semejanza.

# 12.Agradecimientos

Este trabajo investigativo más que un alcance personal, significa un alcance profesional para nuestro grupo. Agradecemos a todas las personas que hicieron parte para el logro de esta.

En especial agradecemos a nuestra asesora Zaida Margot Santa Ramírez, quien nos apoyo y fue nuestra fortaleza en el transcurso de todo el proceso investigativo. A nuestros compañeros de curso que fueron también un fundamento clave a la hora de hacer reflexiones y críticas constructivas, que nos permitieron ir corrigiendo y elaborando cada día este escrito.

Extendemos nuestros sinceros agradecimientos al grupo de investigación Educación Matemática e Historia EDUMAT, de la Universidad De Antioquia. Igualmente al colegio, al maestro cooperador y a los estudiantes, por su disponibilidad al momento del desarrollo de todas las actividades para así poder llevar a cabo nuestro proceso de investigación.

Por último, agradecemos a los lectores por sus sugerencias y tiempo dedicado para revisar nuestro trabajo.

A nuestras familias, muchas gracias por acompañarnos en todo este proceso formativo y de superación tanto personal como profesional.

# 13.Referencias bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Como hacer investigación cualitativa fundamentos y metodología*. México D.F.: Paidós Mexicana S.A.

Castro, C., Céspedes, N., Cifuentes, A. y Romero, L. (2009). Concepciones de los estudiantes del grado octavo sobre el concepto de semejanza. *Cuadernos de la Maestría en Docencia e Investigación Universitaria*, 3, pp. 11- 50.

Chávez, C. (2012). *Algunos ambientes con CabriGeometry II plus, para la enseñanza de la semejanza de figuras planas*. (Tesis de Algunos ambientes con CabriGeometry II plus, para la enseñanza de la semejanza de figuras planas)Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanzaen los documentos oficiales y textos escolaresde matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Revista enseñanza de las ciencias.* 23(3), 379-391.

Gualdrón, E. (2011)  *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. (Tesis doctoral).Universitat de València, Valencia, España.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010).  *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Jabonero, M. (2014). *El valor de PISA: Mitos y realidades*.Recuperado de http://www.santillana.com.co/rutamaestra/revistas_pdf/ruta_maestra_v_007.pdf

Londoño, R. (2011). *Relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el contexto de la teoría de Pirie y Kieren*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría Apoe. *Revista latinoamericana*, 6(003), pp. 221-278.

Ministerio de Educación Nacional MEN (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Enlace editores Ltda.

Monsalve, O., y Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, XV(35), pp. 11 – 25.

Rendón, R. y Londoño, R. (2013). La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. *Uni-pluri/universidad*, 13(3), pp. 1 – 10.

Santa, Z (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van hiele.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Santa, Z. y Jaramillo C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31), pp. 338 - 362. Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. (Tesis doctoral no publicada).Universidad de Antioquia,Medellin, Colombia.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods*. California: SagePublications, Inc.