SITUACIONES PROBLEMA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MAGNITUD ÁREA
PROYECTO DE PRÁCTICA PROFESIONAL

FABIO NELSON ZAPATA GRAJALES

NATALIA ANDREA CANO VELÁSQUEZ

DIANA CRISTINA MUÑOZ PEMBERTY

ELIANA CARMONA RODRÍGUEZ

SANDRA YANET CADAVID MUÑOZ

JESÚS MARÍA GUTIÉRREZ MESA
(MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA) Asesor

SEMINARIO INTEGRATIVO Y PRÁCTICA PROFESIONAL III

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
MEDELLÍN
2006

INDICE

PÁGINA

1. ANALISIS PRELIMINARES

En esta fase de la investigación, se desarrolla el análisis preliminar, el cual comprende los siguientes análisis:

"El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución. El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva." (ARTIGUE. 1995. Pág. 36.)

Los anteriores análisis se desarrollan a partir de la revisión y observación general del currículo donde se rastrean los aspectos más importantes que tienen que ver con las magnitudes y las áreas. Dentro del currículo se consideran tres fases: el currículo propuesto, el currículo desarrollado y el currículo logrado, y se describe específicamente a lo que cada uno hace alusión.

En primer lugar se pretende caracterizar el tipo de currículo que el ministerio de educación nacional propone para la educación básica en el área de matemáticas, específicamente en el pensamiento métrico; en segundo lugar se hace una revisión de textos escolares, una descripción de lo que los educadores llevan al aula de clase y de lo que los alumnos consignan en su cuaderno y por último se presenta un acercamiento a los resultados de las pruebas a las que se enfrentan los alumnos en el área de matemáticas. Desde las tres fases que conforman el currículo se pretende caracterizar el pensamiento métrico y sistemas de medida.

1.1 CURRÍCULO PROPUESTO

El currículo propuesto se entiende como aquel, que el Ministerio de Educación Nacional propone como directriz para que las instituciones educativas estructuren su Proyecto Institucional. Como elementos dentro del currículo para el área de matemáticas se encuentran los lineamientos curriculares y los estándares básicos de matemáticas. A partir de una observación de estos dos elementos es como se caracteriza el pensamiento métrico y sistemas de medidas con el fin de evidenciar lo que el Ministerio de Educación propone para el desarrollo de éste pensamiento.

1.1.1 Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Inicialmente se abordan los lineamientos curriculares de Matemáticas elaborados en el año de 1998, los cuales son "una propuesta para el mejoramiento de la calidad de la educación matemática". (MEN. 1998. Pág.13). En ellos se observa cómo esta estructurado el pensamiento métrico y sistemas de medida; desde tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y los contextos.

Desde la estructura que los lineamientos curriculares de Matemáticas proponen para el desarrollo de los procesos y conceptos del pensamiento métrico, se plantean los siguientes logros:

- La construcción de conceptos de cada magnitud.
- La compresión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de las unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición. (MEN. 1998. Pág. 63)

Los anteriores logros son una guía para acompañar a los estudiantes en el desarrollo de los conceptos que implican el pensamiento métrico y los sistemas de medida, los cuales son la medición, la magnitud, la unidad de medida, la cantidad, el patrón de medida, la estimación; magnitudes fundamentales: longitud, masa, tiempo y amplitud; magnitudes derivadas: volumen, área y peso, los cuales se tienen en cuenta para la enseñanza de la medida.

> *Según los lineamientos "en cuanto a la medida se refiere, los énfasis están en comprender los atributos medibles (longitud, área, capacidad, peso, etc.) y su carácter de invarianza, dar significado al patrón y a la unidad de medida, y a los procesos mismos de medición; desarrollar el sentido de la medida (que involucra la estimación) y las destrezas para medir, involucrar significativamente aspectos geométricos como la semejanza en mediciones indirectas y los aspectos aritméticos fundamentalmente en lo relacionado con la ampliación del concepto de número. Es decir, el énfasis está en desarrollos del pensamiento métrico*. (MEN. 1998. Pág. 33)

Como ya se dijo uno de los grandes aspectos dentro de la estructura del pensamiento métrico y sistemas de medida son los procesos de: Medir, la conservar, estimar magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto" (los cuales se relacionan con el concepto de medida y conteo), calcular, la asignación numérica, la selección de unidades de medida y razonamiento, entendido este último como "…la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión."(MEN. 1998. Pág. 77)

Un aspecto relevante en la iniciación del proceso de medir es la conservación "ya que la captación de aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio, es imprescindible en la consolidación de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc."(MEN. 1998. Pág. 64)

Para avanzar en los procesos de medición es necesario la estimación de magnitudes como un elemento esencial, definido según los lineamientos curriculares desde Bright (1976) como “el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él”. (MEN. 1998. Pág. 64,). Según los lineamientos para el proceso de medición de área se requiere un tipo de actividades que permitan que el alumno al estimar

> “*capte la naturaleza continua y aproximativa de la medida, debido a que en la escuela al trabajar el concepto de áreas de superficies siempre es usual cuadricular la representación de éstas en el plano, donde por ejemplo la unidad patrón es el cuadrado y el número de ellos es una medida del área de dicha superficie*”. (MEN 1998. Pág. 65)

Los lineamientos proponen que el alumno reconozca el rango de las magnitudes, el dominio del sistema métrico decimal, la selección de la unidad de medida apropiada, la precisión y la diferencia entre las unidades de medida convencional y no convencional.

Otro de los grandes aspectos dentro de la estructura del pensamiento métrico y sistemas de medida son los contextos. La interacción social y un trasfondo significativo son irremplazables para el alumno a la hora de la construcción de los procesos de medición. Según los lineamientos

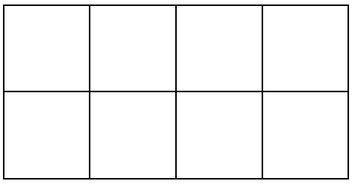
> “el trasfondo social, lingüístico y utilitario de los procesos de medición debe tenerse muy en cuenta, así como la importancia del proceso inicial de estimación ordinal, pre-numérica o cualitativa, que es crucial aun para seleccionar la unidad y el proceso de medición apropiados a la situación.” (MEN 1998. Pág. 68).

Los procesos y conceptos mencionados son los más relevantes en el proceso de medición de cualquier magnitud, es el maestro quien debe establecer una relación didáctica con ellos, permitiéndole una selección adecuada de materiales que le permita al alumno asimilar las características mas importantes que hacen referencia al pensamiento métrico y sistemas de medida, buscando que sea competente en las diferentes situaciones significativas que involucren la medida.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, los lineamientos proponen las siguientes actividades como guía para el desarrollo del razonamiento matemático en la escuela, teniendo en cuenta los conceptos, procesos y contextos que involucren el concepto de área. Se pretende mostrar un ejemplo de cómo se elabora una actividad que sirva para las posteriores construcciones de situaciones problema.

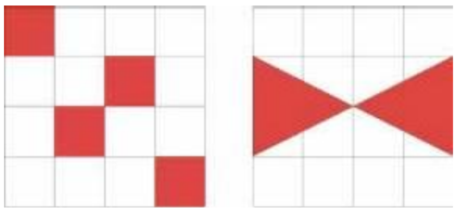
“Para los grados 1º, 2º, 3º:

Situación 1:



¿Cuántos cuadros hay?

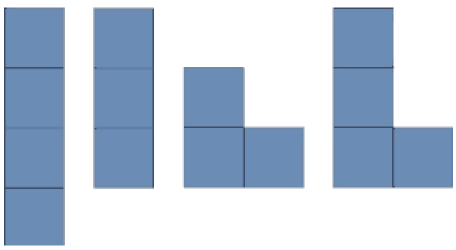
Se espera que los alumnos comiencen contando los cuadrados de lado uno, después los dos de lado dos, y así sucesivamente. Es posible que los alumnos dejen de contar algunos, pero al mostrarles, se da cuenta donde estuvieron las fallas”. (MEN 1998. Pág. 80)



Los dos cuadrados son iguales
¿Cuál área sombreada es menor?

Los alumnos cuentan los cuadrados en la figura de la izquierda y en la figura de la derecha van completando cuadrados. Algunos alumnos optan por calcar partes y trasladarlas para completar regiones que solamente contengan cuadrados. (MEN 1998. Pág. 80)

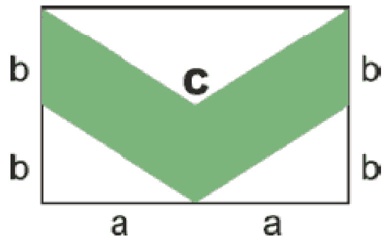
Para los grados 4º, 5º, 6º:
“Situación 3:



Formar con las cinco piezas un cuadrado de 4 x 4
Muestra diferentes posiciones.

En esta situación, el alumno puede razonar primero sobre las dimensiones del cuadrado buscado y luego, sobre la posición de las piezas. Es conveniente que los alumnos corten las piezas e incluso las pinten de colores, esto les permitirá manipularlas fácilmente y comparar las soluciones obtenidas. (MEN 1998, Pág. 82)

"Situación 4:



En el rectángulo C es el centro.
¿Cuál área es mayor, la sombreada o la blanca?

Generalmente estas situaciones dan lugar a que los alumnos practiquen y utilicen diferentes estrategias para la resolución de problemas de área:

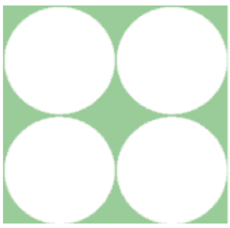
- Trazando los dos ejes de simetría se observa que el rectángulo queda dividido en cuatro rectángulos congruentes en los que la región sombreada es igual a la mitad de su área.

- Trazando por C un segmento paralelo al lado más largo del rectángulo se puede observar que los dos triángulos sombreados que están por encima del segmento trazado pueden llenar los dos triángulos blancos que se encuentran debajo de él.

- La región sombreada se puede dividir en dos paralelogramos de base b y altura a." (MEN 1998, Pág. 83)

Para los grados 7º, 8º, 9º.

"Situación 5:


(a)


(b)

¿Dónde se desperdicia más material, en (a) o en (b)?

Aparentemente parece que en (a), pero si observa bien, se da cuenta que los cuadrados son de igual área y que el radio del círculo grande es el doble que la de los círculos pequeños y entonces bastaría con calcular el área de las regiones blancas para decidir en cuál de las dos situaciones se desperdicia menos material. Entonces, el área blanca en (a) es $4(\pi r^2)$ y en (b) es, $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ es decir, las dos regiones blancas tienen igual área y por tanto, la cantidad de material desperdiciado en ambos casos es la misma." (MEN 1998, Pág. 85)

De esta primera parte se concluye que los lineamientos curriculares son una propuesta que determinan los parámetros para enfocar los procesos de enseñanza-aprendizaje del pensamiento métrico y los sistemas de medida, además son una orientación para que los maestros y las instituciones complementen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y lo incluyan como una guía para el desarrollo del currículo.

En síntesis, se ha caracterizado el pensamiento métrico y los sistemas de medida desde los conceptos, procesos y contextos que proponen los lineamientos.

1.1.2 Estándares Básicos de Matemáticas

Los estándares básicos de matemáticas son "criterios claros y públicos que permiten conocer cual es la enseñanza que deben recibir los estudiantes. Son el punto de referencia de lo que un estudiante puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel. (MEN 2002, Pág. 1). Los estándares están organizados en la parte horizontal por cinco tipos de pensamiento matemático: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos y en su parte vertical por los grados de la educación básica y media.

En la estructura de los Estándares Básicos de matemáticas, se hace énfasis además de su diseño en general, en el Pensamiento Métrico y sistemas de medida el cual según el Ministerio de Educación Nacional trata de la:

> "*Comprensión de las características mensurables de los objetos tangibles y de otros intangibles como el tiempo; de las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones y de los instrumentos utilizados para hacerlas. Es importante incluir en este punto el cálculo aproximado o estimación para casos en los que no se dispone de los instrumentos necesarios para hacer una medición exacta. Margen de error. Relación de la matemática con otras ciencias.* (MEN 2002, Pág. 5)

Teniendo en cuenta esta estructura que presenta el Ministerio de Educación se muestra una organización de los estándares básicos concernientes al pensamiento métrico y sistemas de medidas; en la primera parte se incluye los estándares que están asociados al **concepto** de magnitud, en la segunda parte se encuentran los estándares que están asociados al **concepto** de sistemas de medidas y en tercera parte están los estándares asociados a los **procesos** de calculo.

De acuerdo con lo anterior se presenta la siguiente **Tabla 1** donde se encuentran los estándares organizados horizontalmente en términos de conceptos y procesos y verticalmente en términos del nivel de jerarquización por grados de los menos complejos a los más complejos.

Tabla 1: Estándares básicos de matemática.

EJES TEMATICOS	PRIMERO A TERCERO	TERCERO A QUINTO	SEXTO A SEPTIMO	OCTAVO A NOVENO	DECIMO A UNDECIMO
CONCEPTO DE MAGNITUD	1 Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie capacidad, masa y tiempo)en diversas situaciones 2 Comparar y ordenar objetos	1 Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa-peso, tiempo, y amplitud angular) en diversas situaciones. 6 Reconocer el uso de magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.	3 Calcular áreas y volúmenes a través de composición de figuras de cuerpos.		

SISTEMAS DE MEDIDAS	3 Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo con el contexto. 4 Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición	2 Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.	1 Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. 8 Reconocer y usar la proporcionalidad para resolver problemas de medición (de alturas, cálculo del tamaño de grupos grandes…) 4 Identificar relaciones entre unidades y para medir diferentes magnitudes.	2 Selección y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. 3 Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.	1 Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. 2 Resolver y formular problemas que involucren mediciones derivadas para atributos tales como velocidad y densidad.

CALCULO	5 Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y de ciencias. 6 Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas	3 Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y en las ciencias. 4 Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes. 5 Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes. 6 Reconocer el significado y el sentido de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas 7 Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando es constante una de las dimensiones	2 Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas) 5. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación	1 Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.	3 Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Se ha visto como los estándares pueden ser organizados de acuerdo a conceptos y procesos mostrando cuales de ellos implican la magnitud, los sistemas de medida y el cálculo presentado una secuencia por grados que implique un nivel de complejidad cuando se pasa de un grado a otro, y como los estándares señalan los saberes fundamentales para el pensamiento métrico y sistemas de medida y lo que dentro de este pensamiento deben saber hacer.

Los lineamientos curriculares y estándares básicos de matemáticas están relacionados, puesto que los estándares le dan sentido y significado a los conceptos, procesos y contextos que proponen los lineamientos, así, tanto lineamientos como estándares presentan algunos indicadores de lo que los alumnos deben saber y en lo que deben ser competentes, de acuerdo a los contextos, conceptos y procesos que hacen parte del pensamiento métrico.

Luego de la lectura hecha a los lineamientos y estándares se observa la propuesta que el Ministerio de Educación Nacional hace al currículo en lo que se refiere a la enseñanza de qué y el cuándo, además de orientar la actividad matemática en el aula de clase; se ha mostrado una clasificación de los estándares curriculares de acuerdo a los conceptos y procesos, y en cuanto a los lineamientos se ha mostrado la estructura con la que éstos caracterizan el pensamiento métrico y los sistemas de medidas.

En síntesis, en esta primera parte se ha hecho una descripción del currículo propuesto a partir de lo que el Ministerio de Educación Nacional propone desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas, los cuales pretenden unificar conceptos, procesos y contextos fundamentales en torno a la enseñanza de las matemáticas, así es como se ha caracterizado el pensamiento métrico y sistemas de medidas, dejando claro cuales son los aspectos mas importantes que implica este pensamiento.

1.2 CURRÍCULO DESARROLLADO

El currículo desarrollado se entiende como la forma en que es llevado a cabo el currículo propuesto en la escuela. Para caracterizar este currículo en el área de matemáticas se realiza una revisión y descripción de algunos textos escolares de matemáticas, de las concepciones de los maestros y de las concepciones de los alumnos; haciendo énfasis en la manera como es trabajado el pensamiento métrico y sistemas de medida.

1.2.1 Descripción de textos escolares

En este apartado se hace una descripción de algunos textos escolares, donde se muestra como están estructurados cada uno de éstos, y además la manera de como se abordan el pensamiento métrico y sistemas de medida, especialmente en lo que se refiere a la magnitud área.

Los textos que se describen son los siguientes:

- **Texto 1**: RAMOS GUTIÉRREZ, Jesús María. Supermat Matemáticas, grado 6º. Editorial Voluntad. Santafé de Bogotá 2000.
- **Texto 2**: URIBE CALAD, Julio. Matemáticas experimental 6. Uros Editores. Medellín 2005
- **Texto 3**: PADILLA, Soraya. Matemáticas con énfasis en competencias 7°. Editorial horizontes. Santa fe Bogotá. 2001
- **Texto 4**: URIBE, Julio; BERRIO, José. Elementos de Matemáticas 8°. Editorial Bedout. Medellín 1990.

Descripción del texto 1

El texto Supermat Matemáticas, grado 6 inicia con una presentación de la unidad la cual consta de una breve historia relacionada con los conceptos a desarrollar; luego se muestra un esquema general sobre la unidad, de los conceptos y su relación y se especifican las competencias y los indicadores de logro. El desarrollo de la unidad inicia con una actividad de ambientación a los conceptos, luego de esto las definiciones de los conceptos a trabajar y por cada una de estas definiciones un ejemplo; al final de la unidad se presenta una serie de ejercicios y dentro de estos algunas situaciones donde se pueden desarrollar las competencias, la unidad concluye con la presentación de un proyecto que tiene que ver con investigación.

Contenido de las unidades

Unidad uno: Sistemas de numeración.
Unidad dos: números naturales.
Unidad tres: Teoría de los números.
Unidad cuatro: Fracciones.
Unidad cinco: Geometría métrica.
Unidad seis: Estadística.
Unidad siete: Lógica y conjuntos.

En lo que se refiere al pensamiento métrico el texto lo desarrolla dentro de lo que corresponde a la geometría métrica, aquí están unidos los pensamientos espacial y métrico, sin embargo se enfatiza más en el pensamiento espacial y sistemas geométricos. El tema de la medición es inicialmente abordado con la presentación de las diferentes unidades de medida de longitud: pie, pulgada y otras no convencionales como el palmo y el codo, luego muestra una tabla para la conversión de unidades.
Para el área de superficies se tiene en cuenta superficies no convencionales y se sugiere para su medida utilizar inicialmente unidades de medida que teselen completamente la superficie. Se define el metro cuadrado como un cuadrado de un 1m x 1m y algunas veces se utiliza también un triángulo como otra unidad de medida de superficies, se dan las formulas del área de las figuras y no se observa una construcción de estas.
En cuanto a los ejercicios propuestos solo se encuentra una situación referente al tema de las áreas y la superficie, en la cual se relacionan áreas y perímetros.

Descripción del texto 2

El texto matemáticas experimental grado sexto presenta inicialmente un esquema general del libro y pasa al desarrollo especifico de los temas de cada unidad. El libro contiene doce núcleos temáticos, los cuales se enuncian a continuación.

Contenido de las unidades

Núcleo 0: Números naturales y fraccionarios.
Núcleo uno: Conjuntos y geometría (1).
Núcleo dos: Los signos de agrupación y geometría (2).
Núcleo tres: Otros sistemas de numeración y geometría (3).
Núcleo cuatro: Formas proposicionales, ecuaciones en naturales y geometría (4).
Núcleo cinco: La potenciación en números naturales y sus operaciones inversas.
Núcleo seis: Solución de problemas y geometría (5).
Núcleo siete: Fracciones decimales, números decimales.
Núcleo ocho: Los números decimales y las unidades de medida.
Núcleo nueve: Razones, proporciones y proporcionalidad directa.
Núcleo diez: Sistemas de datos.
Núcleo once: Los números enteros suma y resta.

La unidad donde se desarrolla el pensamiento métrico inicia con un repaso y la profundización de las unidades de medida; inicialmente como unidades de longitud se presenta el metro, sus múltiplos y submúltiplos, como unidades de capacidad se presenta el litro, sus múltiplos y submúltiplos, como unidades de masa y peso se presenta el gramo, sus múltiplos y submúltiplos, como unidades de superficie se presenta el metro cuadrado, sus múltiplos y submúltiplos y como unidades de volumen el metro cúbico, sus múltiplos y submúltiplos. Después la presentación de cada una de las unidades de medida se introduce a la conversión de unidades y se plantea una serie de ejercicios para la solución de problemas.

El apartado correspondiente a la unidad de medida de superficies inicia con la definición del concepto de área y superficie, luego de esto se da una explicación sobre como medir superficies a partir de cuadriculas con las que se deben comparar superficies triangulares, rectangulares y sin forma definida; a continuación se presenta una escala de múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado seguida de ejemplos donde se aplican estas conversiones. Se encuentran ejemplos completos de situaciones donde se calcula el área de figuras irregulares.

El texto ofrece una tabla donde están consignadas las formulas para calcular el área de los polígonos más comunes y se sustenta con un ejemplo donde se aplican estas formulas y finalmente los ejercicios propuestos para los estudiantes.

Descripción del texto 3

El texto inicia con una apertura de la unidad donde se da una introducción a partir de una lectura corta que hace referencia a los aspectos relacionados con la historia de las matemáticas, esta sección resalta la importancia de los temas que se van a trabajar, mostrando la presencia de los procesos matemáticos en la vida cotidiana.

El texto presenta los contenidos a partir de una variedad de ejemplos numerados consecutivamente en cada unidad. Para cada uno se encuentra una sección de ejercicios que le permiten aplicar los contenidos y ejemplos. En cada unidad se especifica las competencias a alcanzar: Interpretativa, argumentativa y propositiva, además de los logros que se esperan obtener.

Además de esto cada unidad cuenta con dos páginas en donde se encuentran ejercicios que están clasificados de acuerdo con la competencia que se busca desarrollar; como complemento a los ejercicios el libro contiene también una sección que presenta situaciones problemas variadas de estructura similar a las presentadas por el ICFES.

Finalmente contiene un glosario en el que aparecen los nuevos conceptos desarrollados en cada unidad.

Contenido de las Unidades

Capítulo 1. Números Enteros
Capítulo 2. Relaciones y Operaciones Binarias
Capítulo 3. Números Racionales
Capítulo 4. Longitud y Perímetro
Capítulo 5. Superficie y Área
Capítulo 6. Cuerpos Geométricos. Volumen
Capítulo 7. Proporcionalidad y Aplicaciones
Capítulo 8. Movimientos en el Plano.

En cuanto a los contenidos sobre el pensamiento métrico que incluye el texto se observa que el libro introduce el concepto de la magnitud área y de superficie a partir de su definición, luego a partir de un ejemplo se presenta la unidad de medida, introduciendo el metro cuadrado como unidad de medida, empleándola para cubrir superficies cuadradas y rectangulares; también propone la conversión de unidades a partir de múltiplos y submúltiplos como se muestra en la **Tabla 2**. A partir de está se pretende mostrar el tratamiento algorítmico que se le da al pensamiento métrico y sistemas de medida.

La **Tabla 2** muestra los principales múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado y sus equivalencias respecto a esta unidad básica.

Tabla 2: Múltiplos y Submúltiplos del Metro Cuadrado

	Nombre	Símbolo	Valor en metros^2
Múltiplos	Kilómetro cuadrado	Km^2	$1.000.000=10^6$
	Hectómetro cuadrado	Hm^2	$10.000=10^4$
	Decámetro cuadrado	dam^2	$100=10^2$
Unidad Básica	**Metro cuadrado**	$\mathbf{m^2}$	$\mathbf{1=10^0}$
Submúltiplo	Decímetro cuadrado	dm^2	$0.01=10^{-2}$
	Centímetro cuadrado	cm^2	$0.0001=10^{-4}$
	Milímetro cuadrado	mm^2	$0.000001=10^{-6}$

El texto continúa mostrando las formulas de las figuras planas (polígonos y círculos), construyéndolas de una forma algorítmica; y concluye la unidad con algunos problemas que involucran el calculo de áreas.

Descripción del texto 4

El texto Elementos de matemáticas del grado 8 presenta sus unidades a partir de una breve historia acerca del desarrollo de los conceptos matemáticos, luego, y antes del desarrollo de la unidad, aparecen los objetivos generales y específicos de la unidad. A continuación la sección se desarrolla partiendo de actividades concretas, revisión de los conceptos teóricos y además de un conjunto de ejercicios de aplicación. Por ultimo termina la unidad con una serie de ejercicios en orden creciente según su dificultad.
El texto contiene dos partes, de las cuales se mencionan sus contenidos por unidad:

Contenido de las Unidades
Parte I
Unidad 0: Evaluación de diagnostico y repaso
Unidad 1: Los números reales
Unidad 2: Radicales
Unidad 3: Expresiones algebraicas
Unidad 4: Productos notables
Unidad 5: Factorización
Unidad 6: División de polinomios
Unidad 7: Relaciones
Unidad 8: Funciones
Unidad 9: Funciones polinómicas

Unidad 10: La función lineal
Unidad 11: Fracciones algebraicas
Unidad 12: Ecuaciones lineales de los reales
Unidad 13: Combinatoria

Parte II
Unidad 1: Estructura lógica de la geometría
Unidad 2: Conceptos básicos de geometría
Unidad 3: Distancia, semirrectas y segmentos
Unidad 4: Ángulos
Unidad 5: Triángulos
Unidad 6: Rectas paralelas
Unidad 7: Triángulos congruentes
Unidad 8: Cuadriláteros
Unidad 9: Unidades de superficie y áreas.

En lo que se refiere a la medición, el texto dedica una unidad a este tópico, en la cual desarrolla el tema de áreas y superficies. Esta unidad inicia definiendo área y superficie, y luego propone actividades para medir diferentes formas de superficies: poligonales y curvas.
Luego, el texto continúa con actividades sobre la descomposición de figuras planas y a partir de rectángulos cuadriculados se pide dar la fracción que ocupa la superficie respecto al rectángulo cuadriculado.
Se prosigue con la definición de las unidades de área y sus equivalencias con el metro cuadrado. Todas las definiciones son similares a la siguiente: “el kilómetro cuadrado es la superficie de un cuadrado de un kilómetro de lado”.
En la **Figura 1** se muestra un ejemplo de la representación que se le da al metro cuadrado.

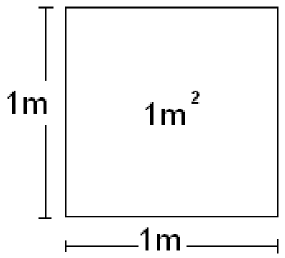


Figura 1

Luego continua con algunos ejercicios sobre la conversión de unidades, prosigue con unidades de área convencionales o no convencionales como la hectárea y la cuadra, y termina con algunos ejercicios.
Una de las secciones a las cuales el libro le dedica mayor atención es al área de algunas figuras geométricas, donde comienza por el área del cuadrado introduciendo su formula, luego sigue con el área del rectángulo, donde se identifica el largo y el ancho del rectángulo y se afirma que ésta es su área. Partiendo del área de éste se construye el área del paralelogramo, del triángulo y del trapecio, luego dan la formula de calcular el área de un polígono regular y termina la sección con el área del círculo, la circunferencia y el sector

circular y una serie de ejercicios donde se aplican todas las formulas de estas áreas.

Hasta aquí se ha realizado una descripción de algunos textos escolares del área de matemáticas donde se ha profundizado sobre el pensamiento métrico y sistemas de medidas en lo que se refiere al concepto de área y superficie, mostrando como el texto aborda dichos conceptos.

Se pudo notar como los textos en su mayoría le dan un enfoque geométrico y aritmético al pensamiento métrico basándose en la conversión de unidades y la aplicación de formulas.

Es así como ninguno de los textos hace referencia a la estimación de magnitudes, lo cual es importante para avanzar en el desarrollo de los procesos de medición del área y permitir la comprensión de los atributos y la noción del tamaño de las unidades; además "*Los procesos de estimación son muy frecuentes y útiles en las actividades que realizamos habitualmente, lo cual es un motivo para desarrollar esta destreza en la escuela*" (GODINO, 2002. Pág. 39).

Los textos no presentan situaciones que requieren del desarrollo de un tratamiento métrico adecuado, sino que se limitan a la sola asignación numérica dentro de la medida de las magnitudes abordadas. Dicho proceso no tiene mucho significado, por lo que es importante que los alumnos adquieran experiencias en todo lo que se refiere a la medición, siendo capaces de medir correctamente y encontrando significado y uso a lo que se les enseña.

1.2.2. Concepciones de los maestros

Otro de los componentes que se consideran para la descripción del currículo desarrollado, son las concepciones que tienen los maestros sobre los conceptos que intervienen en el pensamiento métrico y la forma como este pensamiento es enseñado en la escuela.
Para determinar algunas concepciones que poseen los maestros se hace una entrevista a cinco docentes que enseñan en la educación básica; a partir de cuatro interrogantes que hacen alusión a los conceptos y metodologías que emplea cada uno de estos maestros en la enseñanza del pensamiento métrico en lo que se refiere a la magnitud área. Los interrogantes hechos a los maestros fueron:

1. ¿Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la enseñanza de la magnitud área?

2. ¿Qué conceptos trabaja en torno a la magnitud área?

3. ¿En qué tipo de situaciones se basa para enseñar la magnitud área?

4. Para la enseñanza del pensamiento métrico ¿se basa en los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas?

A continuación se presentan las respuestas textuales que los educadores dieron a los interrogantes y luego se ofrecen algunas apreciaciones sobre las ideas que poseen los maestros y que son consideradas significativas para un análisis.

Respuestas de los docentes

- ***Pregunta 1*** ¿Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la enseñanza de la magnitud área?

Profesor 1 (9°, 10° y 11)
Para el área deben haberse trabajado conceptos de potencias de igual base y el manejo de parte algebraica.

Profesor 2 (6°, 7°, 8° y 9°)
Mire le presto éste libro que es del que saco los conceptos (Elementos de matemáticas séptimo y octavo).

Profesor 3 (5°)
No respondió a la pregunta

Profesor 4 (5°)
Antes del trabajo de las magnitudes ya he enseñado las potencias, y las proporciones, la gran mayoría de los contenidos del libro de matemáticas Supermat de 5°-

Profesor 5 (5°)
Pues los conceptos se trabajan directamente cuando se enseñan las magnitudes, lo único es lo que se ha enseñado anteriormente-

- ***Pregunta 2:*** ¿Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la enseñanza de la magnitud área?

Profesor 1
Área: - Se deben manejar como primera magnitud el concepto de longitud, enfocado en la horizontalidad y la verticalidad, así la unidad de longitud más utilizada sería el metro. Y desde ahí se define el metro cuadrado como una combinación de la superficie del largo y del ancho. En sí el metro cuadrado no existe. También se miden longitudes para luego multiplicarse desde un largo y un ancho.
El metro cuadrado significa metro por metro, y luego se dan valores de conversión, entonces si 1m = 100 cm, 100cm x 100cm = $10.000cm^2$ y así se representa $1m^2$
Para el área de la circunferencia trabajo alrededor del número pi (π). Y por último trabajo las figuras planas cuadrado, rectángulo y triángulo.

Profesor 2
Se ciñe a los elementos y conceptos trabajados por el texto (elementos de matemáticas 7º y 8º)

Profesor 3
Área: para el área se deben trabajar los conceptos del perímetro, longitud y en especial el de superficie, pues al medir el área lo que se hace es medir la superficie, el concepto de m^2 cómo patrón de medida, identificando cuál es el largo y el ancho, y la conversión de unidades. Y el m^2 como el cuadrado que mide un metro por cada lado.

Profesor 4
Área: conceptos como qué es el m^2 superficie, múltiplos y submúltiplos y conversión de unidades

Profesor 5
Área: perímetro, longitudes, superficies, m^2 figuras geométricas

- ***Pregunta 3*** ¿En qué tipo de situaciones se basa para enseñar la magnitud área?

Profesor 1
Para el área el manejo de la regla, midiendo bordes de los cuadernos, midiendo objetos en el salón.

Para el área de la circunferencia la trabajo con tapas, tiras de lana y regla, para trabajar el número pi (π) como la relación entre el diámetro y la longitud de la circunferencia
Los polígonos se recortan en triángulos y así se hallan sus áreas.

Profesor 2
El área y el volumen desde el libro: la medición se da a través de las fórmulas

Profesor 3
El área con figuras dibujadas en cuadrículas para que puedan contar los cuadros interiores, y luego con las medidas de los lados para que apliquen las fórmulas.

Profesores 4 y 5 Ambos profesores coincidieron en afirmar:
Área: con fórmulas, midiendo largos y anchos como los del salón de las puertas, de las ventanas.
Pregunta 4 Para la enseñanza del pensamiento métrico ¿se basa en los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas?

En general los cinco profesores dicen tener conocimiento de los estándares curriculares de matemáticas y los lineamientos, pero al momento del trabajo con las magnitudes no basan su enseñanza en éstos parámetros.

A partir de las respuestas dadas por los maestros, se presentan algunas apreciaciones acerca de cómo éstos conciben la magnitud área y su enseñanza; observando la importancia que los maestros dedican al pensamiento métrico.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS:

Para el desarrollo del análisis de las respuestas de los docentes, se tiene en cuenta las respuestas que dio el profesor 1, al ser este quien dio las respuestas mas concretas sobre el manejo de las áreas, los demás docentes dedican poco espacio a la enseñanza del pensamiento métrico, por lo tanto se refieren a que su enseñanza está basaba en los textos escolares.

Profesor 1:

El profesor al concebir el metro como una unidad de medida, esta mostrando una confusión entre el concepto de patrón de medida con el de unidad de medida. La manera como aborda la magnitud área se enfoca hacia la aritmetización de ésta, sin considerar una primera aproximación como: la construcción de la medida, además que el alumno aprenda a medir midiendo y no mediante el uso memorístico de las formulas. Llama la atención la manera cómo el docente tiene la idea de que el metro cuadrado (m^2) no existe.

Para la teselación de la superficie el docente solo utiliza el cuadrado como unidad de medida, omitiendo la utilización de otras unidades de medida para la teselación de áreas. En cuanto al trabajo del área de la circunferencia, el docente enfoca su enseñanza hacia el reconocimiento del número pi (π), sin tener en cuenta que existe una inconmensurabilidad entre la longitud de la circunferencia y su diámetro de la circunferencia, es decir, que no hay unidad de medida común entre estas longitudes. Por tanto pude ser pertinente mostrar la proporcionalidad entre el diámetro y la longitud de la circunferencia.
Se rescata el trabajo que el docente hace al construir el área del triángulo a partir del área del rectángulo.

En cuanto a la conversión de unidades, el docente presenta antes de la construcción de las áreas la conversión de unidades, sin considerar “un trabajo inicialmente estimativo y luego no convencional, medidas indirectas, para llegar a las medidas directas”. (GODINO 2002)

Según las descripciones anteriores, a diferencia del profesor 1, los demás docentes basan su enseñanza a partir de los textos escolares tales como:
URIBE, Julio; BERRIO, José. Elementos de matemáticas 8°. Editorial Bedout editores S.A. Medellín Colombia. 1991.
URIBE, Julio; BERRIO, José. Elementos de matemáticas 7°. Editorial Bedout editores S.A. Medellín Colombia. 1991.
RAMOS GUTIERREZ, Jesús María y Otros. Supermat Matemáticas grado 6º. Editorial VOLUNTAD. Santafé de Bogotá 2000.

En el análisis de los libros, se describe como los textos anteriormente referenciados no contienen una unidad específica al trabajo del pensamiento métrico, por lo que los maestros al basarse en estos no desarrollan más de los contenidos que los mismos textos proponen.

Luego de la revisión de las respuestas dadas por los maestros y las concepciones que a través de estas respuestas ellos han mostrado sobre el pensamiento métrico y en especial sobre el concepto de área, se puede concluir como la enseñanza del pensamiento métrico, ha sido reducida a lo presentado por los textos escolares.

Se nota un desconocimiento por parte de los docentes acerca de los conceptos fundamentales que se enseñan en torno al pensamiento métrico como son: el patrón, la unidad de medida, la estimación, el área de regiones curvas; además del poco uso de situaciones didácticas que puedan implicar la medición de áreas.

Para resumir se puede afirmar como los docentes se limitan a la enseñanza de las conversiones de unidades sin considerar que antes del calculo de formulas se debe realizar un trabajo estimativo que requiera de mediciones directas e indirectas donde el alumno se familiarice con el proceso de medición.

1.2.3 Concepciones de los alumnos.

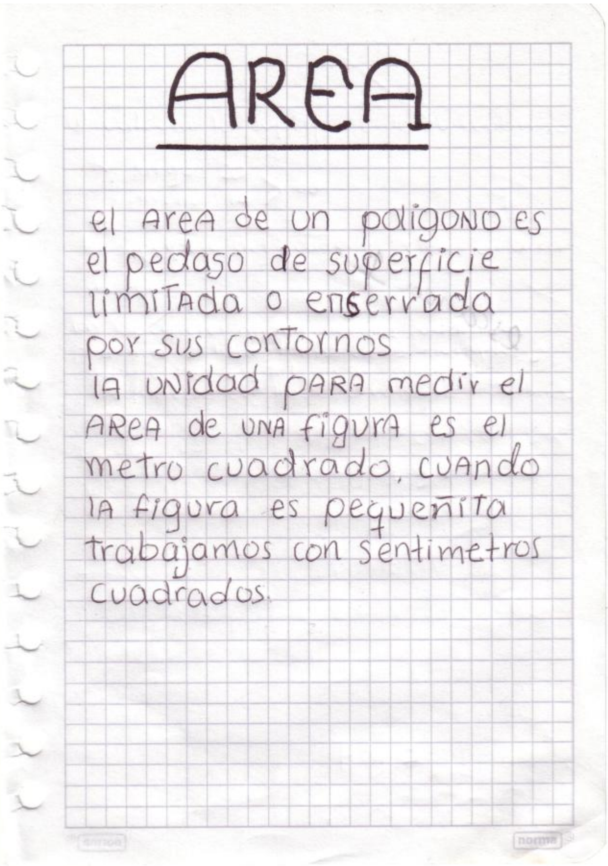
El último componente considerado para el análisis del currículo desarrollado, es el que se refiere a las concepciones que tienen los alumnos sobre la magnitud área y otros conceptos del pensamiento métrico y sistemas de medida. Con el fin de conocer estas concepciones se hace una revisión de los cuadernos escolares de algunos alumnos de los diferentes grados de la educación básica.
A partir de la observación de las notas de clase de los alumnos, se presenta una descripción de cómo ha sido trabajado el pensamiento métrico en la educación básica, luego de esto se hace un análisis sobre los aspectos que se refieren al concepto de área y que merecen ser resaltados como definiciones, situaciones o ejercicios que involucran el trabajo con las áreas.

Se aclara que no en todos los cuadernos de los grados que se analizaron se encuentran contenidos referentes al pensamiento métrico, en los grados séptimo y octavo no se observa ningún tema implícita o explícitamente que de cuenta de algún tipo de magnitud estudiada, estrategias de medición, uso y reconocimiento de unidades, patrones e instrumentos de medida.
Los contenidos desarrollan casi en su totalidad el pensamiento numérico, para el grado quinto, se observa que no se da un tratamiento métrico adecuado para la construcción de las formulas o conceptos métricos excluyendo el pensamiento métrico dentro de la enseñanza. Solo se evidencia dentro del pensamiento espacial, lo referente a líneas, segmentos y sus propiedades, y las características de algunos polígonos sin mencionar formulas o formas de calcular sus medidas, dejando de lado su relación con el pensamiento métrico.

Cuaderno 1

En el cuaderno del grado cuarto analizado, se nota un trabajo independiente por pensamientos y se evidencia como en el pensamiento geométrico se tratan las áreas y los perímetros de los polígonos indistintamente de los aspectos que se deben desarrollar con estos conceptos dentro del pensamiento métrico. El concepto de área se trabaja desde los polígonos regulares y partiendo de la siguiente definición: "*el área de un polígono es el pedazo de superficie limitada o encerrada por sus contornos. La unidad para medir el área de una figura es el metro cuadrado, cuando la figura es pequeñita trabajamos con centímetros cuadrados*" *el área del cuadrado se obtiene multiplicando la longitud de un lado por el otro*", después de esto se proponen ejercicios en los cuales el alumno debe encontrar el área de cuadrados y rectángulos que han sido dibujados con las medidas de sus lados predeterminadas.

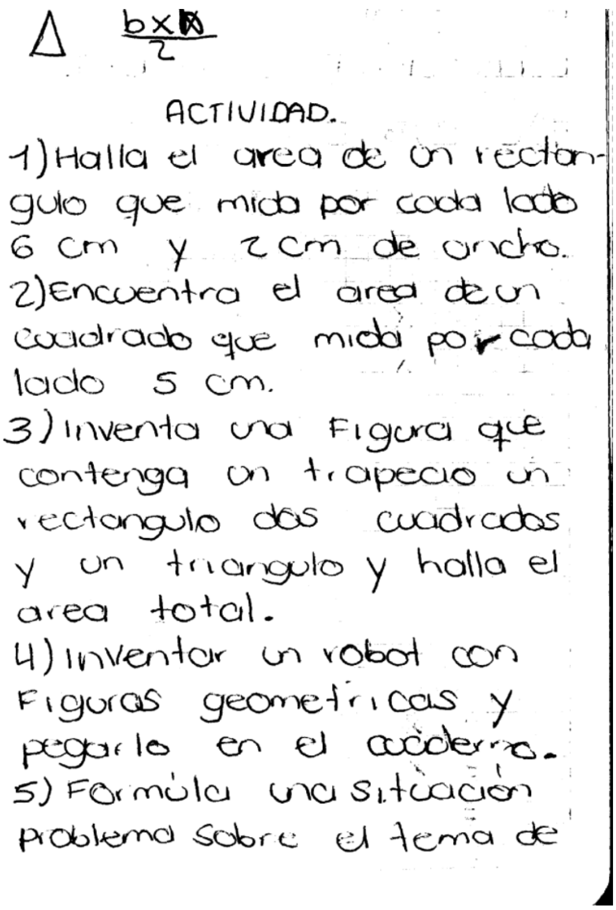
En las **Figuras 2 y 3** se muestra la definición antes mencionada y la serie de ejercicios que se proponen al alumno para desarrollar el concepto de área.



AREA

el Area de un poligono es
el pedaso de superficie
limitada o enserrada
por sus contornos
la unidad para medir el
Area de una figura es el
metro cuadrado, cuando
la figura es pequeñita
trabajamos con sentimetros
cuadrados.

Figura 2


Δ $\frac{b \times h}{2}$

ACTIVIDAD.

1) Halla el area de un rectangulo que mida por cada lado 6 cm y 2 cm de ancho.

2) Encuentra el area de un cuadrado que mida por cada lado 5 cm.

3) Inventa una Figura que contenga un trapecio un rectangulo dos cuadrados y un triangulo y halla el area total.

4) Inventar un robot con Figuras geometricas y pegarlo en el cuaderno.

5) Formúla una situación problema sobre el tema de

Figura 3

Se observa también en el cuaderno que el concepto de perímetro no está relacionado con el área y se presenta la siguiente definición: "*perímetro de un polígono es igual a la longitud de la línea que forma sus lados*". Luego se proponen unos ejercicios donde el papel del alumno es sólo realizar sumas de las medidas de los lados de cada polígono, en ningún momento se le pide medir, puesto que las medidas de los lados están dadas.

Las medidas del círculo y la circunferencia se enseñan con la técnica de cortar y pegar: dividiendo la circunferencia en sectores circulares iguales y luego uniéndolos para formar una figura similar al paralelogramo (como se muestra en la **Figura 4**). Se define luego que el área del circulo se halla igual que la del paralelogramo (Base x Altura), sin embargo antes no se ha trabajado el área del paralelogramo. Por último se dan algunos problemas que implican el cálculo de áreas y perímetros de los círculos (**Figura 5**). Otro aspecto que se muestra es la longitud de la circunferencia y su relación con el diámetro, pero con medidas predeterminadas.

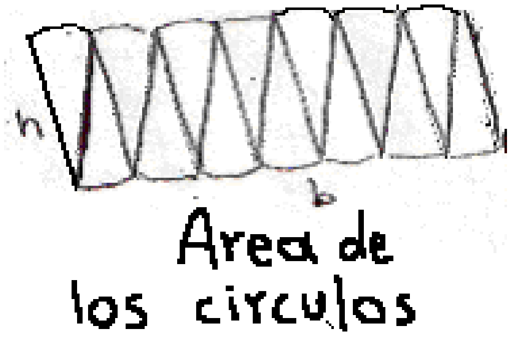


Figura 4

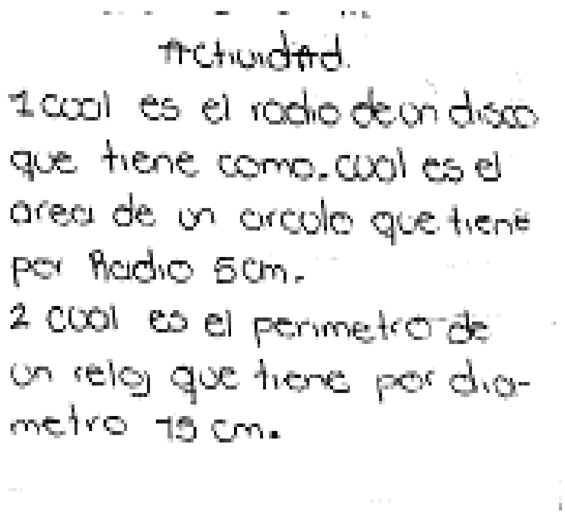

Actividad.
1 cual es el radio de un disco
que tiene como. cual es el
area de un circulo que tiene
por Radio 5cm.
2 cual es el perimetro de
un relog que tiene por dia-
metro 15 cm.

Figura 5

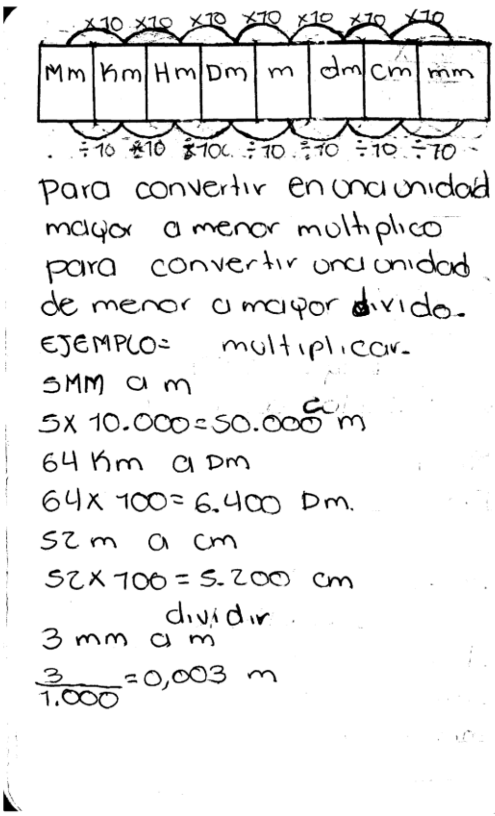
Un último componente evidenciado en este cuaderno (cuaderno 1) es la longitud de la circunferencia y su relación con el diámetro, pero con medidas predeterminadas.

Cuaderno 2

Este cuaderno también del grado cuarto, desarrolla el pensamiento métrico y sistemas de medida dentro del pensamiento espacial y sistemas geométricos. En lo que concierne a los conceptos desarrollados dentro del pensamiento métrico se enseñan los siguientes procesos: la medición de longitudes, la medición de áreas. Se presenta entonces una descripción de cada uno de estos procesos observados en este cuaderno:

Las medidas de longitud: son definidas como "*las que sirven para medir el largo y el ancho de las cosas, la unidad básica es el metro*". A partir de esta definición y de una escala de múltiplos y submúltiplos, se proponen ejercicios descontextualizados como la conversión de unidades.

Lo anteriormente mencionado se muestra en la figura 6 donde se observa la escala de múltiplos y submúltiplos del metro. En la figura 7 se encuentra el ejemplo de los ejercicios propuestos.

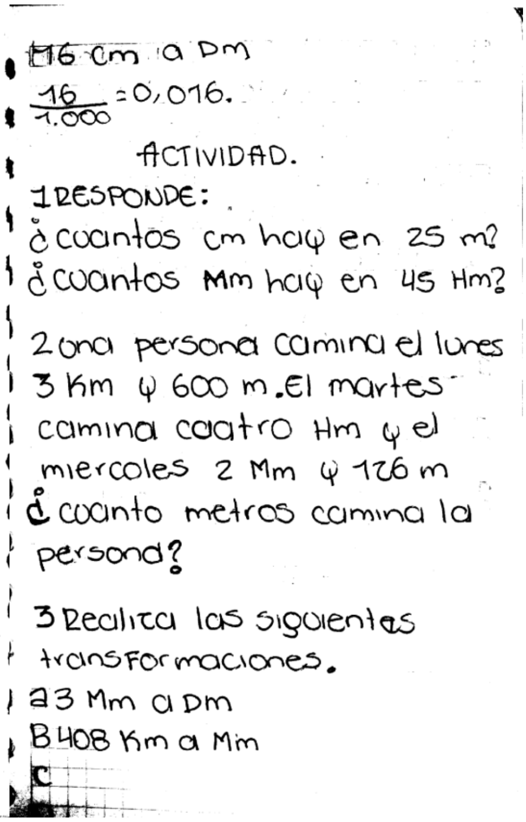


x10 x10 x10 x10 x10 x10 x10

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

Para convertir en una unidad mayor a menor multiplico
para convertir una unidad de menor a mayor divido.
EJEMPLO= multiplicar.
5MM a m
5X 10.000=50.000 m
64 Km a Dm
64X 100= 6.400 Dm.
52 m a cm
52X 100 = 5.200 cm
dividir
3 mm a m
$\frac{3}{1.000}$ = 0,003 m



16 cm a Dm
$\frac{16}{1.000}$ = 0,016.
ACTIVIDAD.
1 RESPONDE:
¿cuantos cm hay en 25 m?
¿cuantos Mm hay en 45 Hm?
2 una persona camina el lunes 3 Km y 600 m. El martes camina cuatro Hm y el miercoles 2 Mm y 126 m ¿cuanto metros camina la persona?
3 Realiza las siguientes transformaciones.
a 3 Mm a Dm
B 408 Km a Mm
C

figura 6

figura 7

Las medidas de área y de superficie, son desarrolladas desde la siguiente definición: "*La unidad principal de las medidas de superficie es el metro cuadrado. La superficie se refiere a la forma y extensión de las figuras*", el metro cuadrado es presentado aquí como un cuadrado de lado 1 m., de igual manera se presentan las "escalas" de múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado y se proponen ejercicios de conversión de unidades.

Las **Figuras 8 y 9** muestran la definición del metro cuadrado y la "escala" de unidades para la medición de áreas respectivamente.

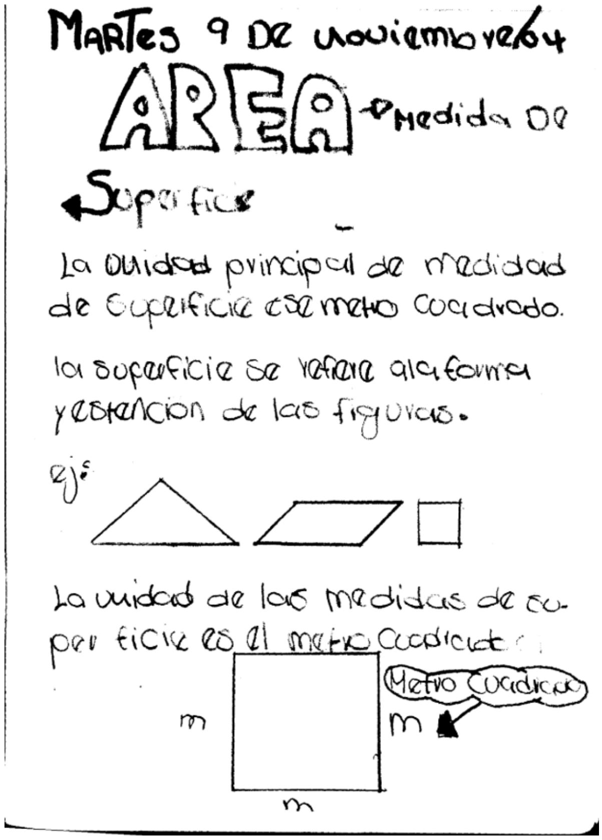


Figura 8

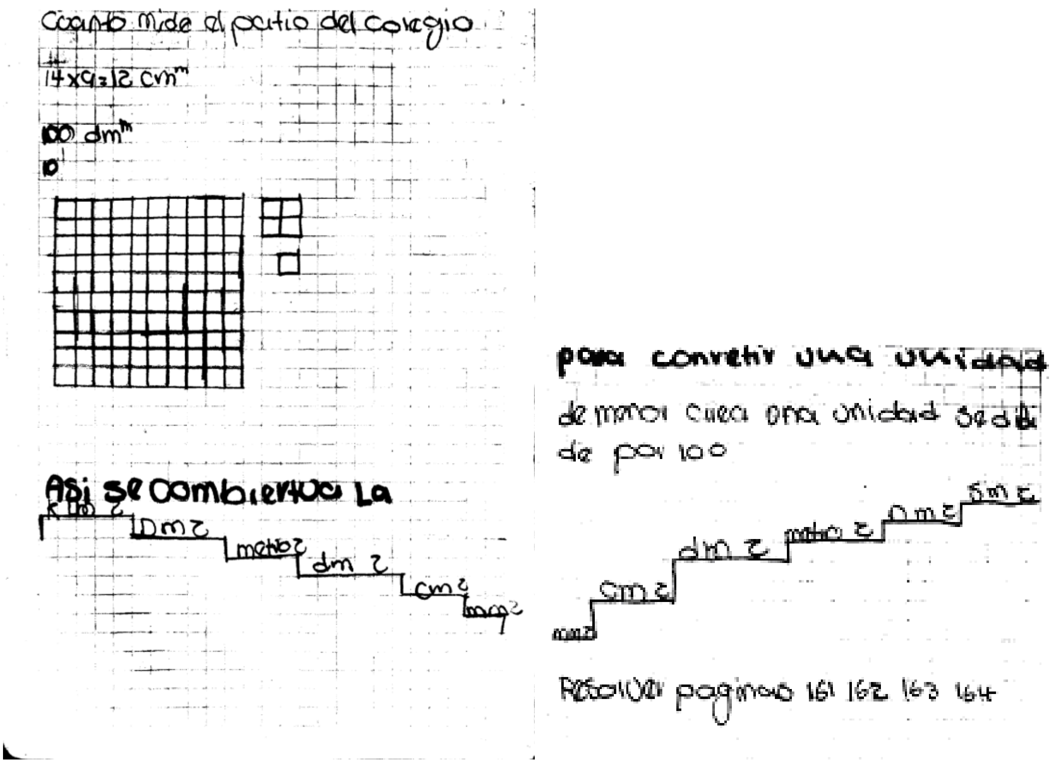


Figura 9

Cuaderno 3

En este cuaderno del grado sexto se observa que el proceso de medición de áreas se inicia con la definición de superficie y área de la siguiente manera:

"***Superficie**: es la parte del plano cuya extensión es limitada y se expresa en dos dimensiones: largo y ancho"*
*"**Área:** es la medida de una superficie*"

A partir de estas definiciones se hace énfasis únicamente en las áreas del triángulo y del rectángulo, no derivando una de la otra, sino presentando aisladamente sus formulas.

Las actividades generadas desde estas definiciones se refieren a la medición directa, pues se pide obtener el área de los cuadernos y de algunas figuras (triángulos y rectángulos), dando una unidad de medida, sin explicar que ésta es una unidad de medida.
En la enseñanza de las áreas se mencionan los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado sin hacer referencia a su equivalencia con el patrón de medida (m^2).

En la **Figura 10** se muestra la actividad a la que se ha hecho referencia sobre la medición directa.

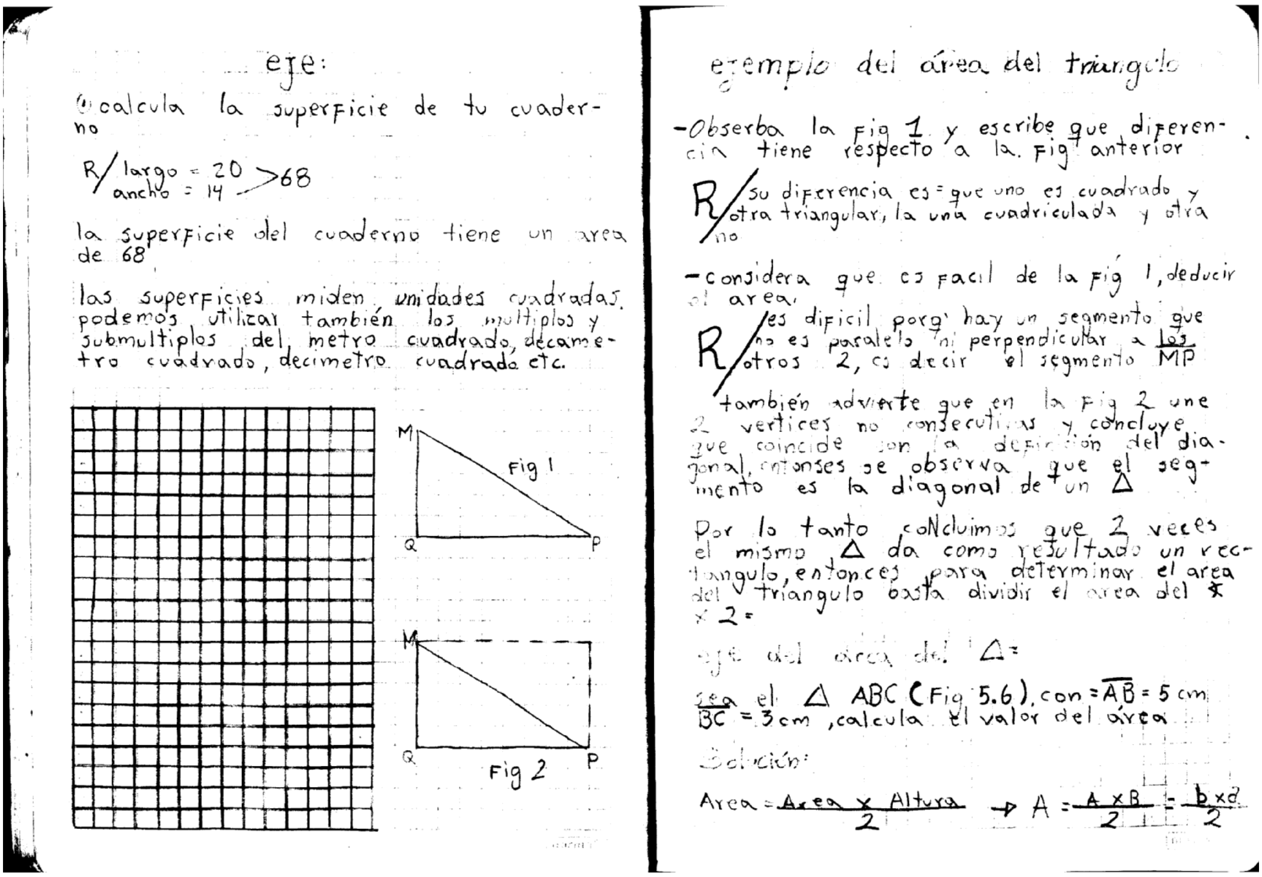


Figura 10

Cuaderno 4

En este cuaderno, también del grado sexto, puede verse un trabajo sólo de magnitudes geométricas, los conceptos de área y perímetro son abordados desde algunos polígonos, determinando de antemano las medidas de sus lados, el alumno entonces debe encargarse de hallar sus "medidas" reemplazando los valores en las formulas correspondientes.
En la **Figuras 11 y 12** se muestran las fórmulas para el cálculo de áreas de los polígonos y ejercicios para aplicar estas fórmulas.

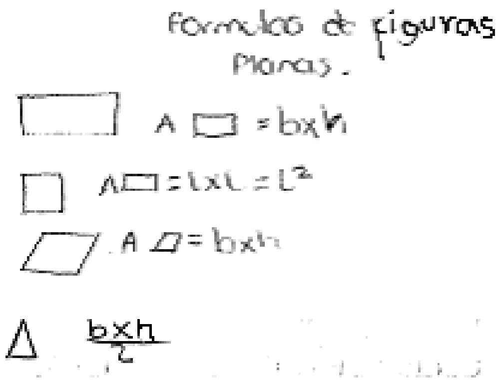


Figura 11

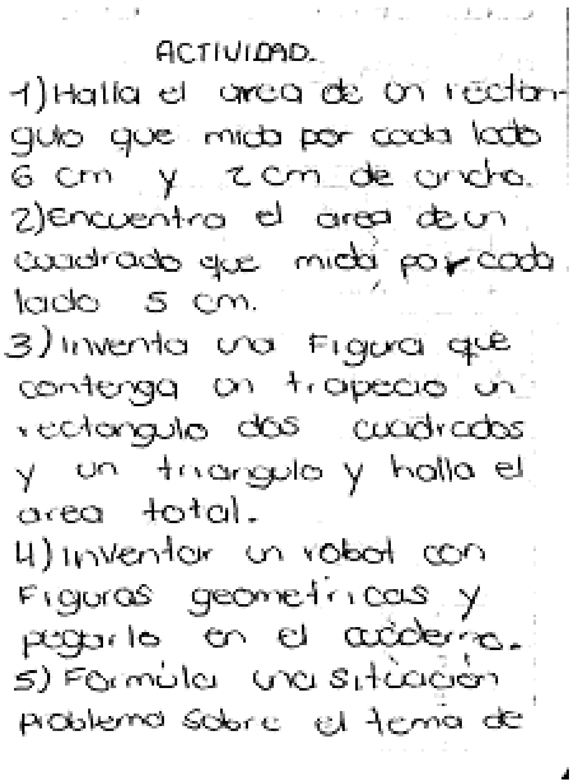

ACTIVIDAD.
1) Halla el area de un rectangulo que mida por cada lado 6 cm y 2 cm de ancho.
2) Encuentra el area de un cuadrado que mida por cada lado 5 cm.
3) inventa una Figura que contenga un trapecio un rectangulo dos cuadrados y un triangulo y halla el area total.
4) inventar un robot con Figuras geometricas y pegarlo en el cuaderno.
5) Formula una situación problema sobre el tema de

figura 12

Análisis de los cuadernos

Luego de la revisión de los cuadernos escolares se puede afirmar que en algunas definiciones sobre la magnitud área, hay confusión con los conceptos de unidad de medida y patrón de medida, además, el alumno puede pensar que el área es una parte de la superficie y que las superficies de menor tamaño solo se pueden medir con el centímetro cuadrado. Se nota como la única representación que se les muestra a los alumnos del metro cuadrado es un cuadrado cuyos lados miden 1 metro de longitud.

Frente a la conversión de unidades, durante el desarrollo de este análisis, se ha insistido en que no deben de ser la antesala para la medición de áreas, había antes que hacer un trabajo sobre el reconocimiento de cuántas veces caben diferentes unidades de medida en una superficie. Las fórmulas geométricas en los cuadernos no se les da un adecuado tratamiento como las estrategias para la medición directa y de estimación.

Algunos procesos como los algoritmos para calcular áreas, deben ser pensados desde el pensamiento métrico, sin embargo según lo observado en los cuadernos estos procesos de cálculo sólo se trabajan en el pensamiento geométrico.

Las actividades que presentan los cuadernos en su mayoría se refieren al manejo memorístico, aritmético y geométrico, sin tener en cuenta los procesos de medición de áreas, o hacer una relación entre los pensamientos numérico, espacial y métrico, por lo tanto no son complemento adecuado a los contenidos o definiciones dadas por no responder al trabajo propio de medición.

El área de la circunferencia a pesar de que en uno de los cuadernos se maneja desde una técnica de cortar y pegar, se observa que hace falta dedicar previamente un espacio a la construcción métrica del área del paralelogramo, se podría inferir que para los alumnos no sería tan claro el sentido de esta construcción.

Como síntesis de este análisis, vale la pena mencionar que la enseñanza del área implica que el alumno maneje el concepto de área y de unidad de medida a través de:

> "…Las primeras actividades de medición, desarrollando la idea de que el área es una medida de recubrimiento. No se recomienda introducir el uso de fórmulas en esta primera etapa, simplemente interesa que los niños recubran las formas y cuenten la cantidad de unidades usadas" (GODINO 2002 Pág.71)

Hasta aquí se ha realizado la descripción de cinco cuadernos que pertenecen a alumnos de los grados cuarto, quinto y sexto, donde se ha observado el tratamiento que se le da a la medición de áreas y sobre ello se ha hecho un análisis teniendo en cuenta observaciones importantes para la enseñanza del pensamiento métrico; es así como se pudo notar que en la mayoría de los cuadernos el espacio dedicado al pensamiento métrico estaba dentro del pensamiento geométrico, aunque sin hacer la relación de ambos pensamientos y sin mostrar los procesos, contextos y conceptos que intervienen en estos dos pensamientos.

En general en este estudio sobre las concepciones de los alumnos, se evidencia que el problema de la medida de las magnitudes es poco desarrollado en la escuela, además, los pocos ejes conceptuales vistos no muestran un tratamiento métrico sino geométrico y numérico por lo que para los alumnos sería difícil asimilar completamente las relaciones métricas.

Finalmente puede afirmarse, que las nociones del alumno acerca de las magnitudes derivadas (volumen y área) y los procedimientos para medir son escasas o en la mayoría de los casos su construcción no es pertinente, pues hace falta que sepan: qué se puede medir, cómo se mide, con qué se mide, qué es medir; los estudiantes no usan los instrumentos de medida, no se nota que se les enseñé a utilizar unidades de medida; las magnitudes se le hacen todavía más abstractas de lo que son, todo porque la medición se ha reducido al cálculo; a los estudiantes no se les permite estimar, aproximar, ni comparar; las conversiones de unidades son todas procedimientos mecánicos de multiplicar y dividir, sin lugar a que ellos descubran en estas conversiones el sentido de los sistemas de unidades, como conclusión el alumno no aprende a medir lo que necesita medir.

El currículo desarrollado, ha sido abordado hasta aquí desde tres componentes: análisis de textos escolares los cuales se describieron mediante la observación de su estructura y el enfoque que se le daba al pensamiento métrico, las concepciones de los maestros que se analizaron desde la entrevista a cinco docentes y concepciones de los alumnos donde se revisaron algunos cuadernos escolares.

De todo lo anterior se nota como los textos escolares no le dedican un espacio importante al pensamiento métrico donde se puedan desarrollar los conceptos y procesos que implican este pensamiento como lo es la medición, las magnitudes, la unidad de medida, el patrón de medida, además de la estimación, conservación y selección de unidades. Los docentes al basarse en algunos de estos textos tienden a enseñar de la misma manera que se presentan allí los contenidos, donde la enseñanza del pensamiento métrico se presenta solo desde la geometría y la aritmética .

Del mismo modo se ha visto como en los cuadernos escolares el espacio que se dedica es también poco, además sus contenidos coinciden en el trabajo de los conceptos y procesos de medición desde el cálculo y la asignación numérica, donde el estudiante repite formulas dadas previamente.

1.3 CURRÍCULO LOGRADO

El currículo logrado muestra los alcances conceptuales y procedimentales que tienen los alumnos, este currículo puede evidenciarse a partir de la revisión de los resultados de las pruebas nacionales que se aplican a los estudiantes.

Con el fin de identificar lo que los alumnos han logrado en torno al desarrollo del pensamiento métrico, se hace una observación y un análisis a las pruebas TIMSS, ICFES y SABER, de las cuales se han seleccionado algunas preguntas significativas que hacen referencia al concepto de área, aspecto del pensamiento métrico en el cual está basada esta investigación.

1.3.1 Pruebas TIMSS

"El Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS, es el proyecto de investigación y evaluación curricular en la enseñanza de la matemática y las ciencias naturales, a nivel de educación básica en el mundo" (MEN 1997. Pág. 1).

> "*El TIMSS representa una serie de estudios en educación matemáticas y ciencias, orientados por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA). Con sede en Holanda, es el estudio del análisis y evaluación curricular de mayor escala que se halla emprendido con la participación de más de cuarenta países, mirando el desempeño de los alumnos e investigando los factores asociados del colegio el profesor y la administración escolar*". (MEN 1997 Pág. ix).

Las pruebas TIMSS en lo que concierne al área de matemáticas, evalúa fracciones y sentido numérico, geométrico, álgebra, representación de datos, análisis y probabilidad y medición.

Para efectos del análisis del currículo desarrollado se hace énfasis en lo que el TIMSS evalúa sobre medición, para ello se seleccionan, una serie de situaciones que permiten inferir por medio de un análisis de los resultados obtenidos los problemas más frecuentes que presentan los alumnos en este pensamiento. Además se incluyen las tablas que muestran el rendimiento a nivel general que obtuvieron los estudiantes en la prueba del pensamiento métrico en Colombia y el análisis de estos resultados.

Las pruebas TIMSS en lo que se refiere a la temática de la medición evalúa los siguientes ejes temáticos:

Medida (18 preguntas, 12 % de la prueba)
Concepto de medida
Interpretación de escalas de medida

Unidades de longitud, área, volumen, masa, tiempo
Estimación y errores de medida, precisión
Problemas de medida.

A continuación se presentan algunas situaciones tomadas de las pruebas TIMMS realizadas en el año 1997, se han seleccionado dos situaciones de las cuales se presentan sus resultados y el respectivo análisis que el Ministerio de Educación Nacional hace sobre los errores y las falencias que en esta prueba los estudiantes tuvieron.

En la **Figura 13** se muestra una situación en donde se presentan dos rectángulos uno dentro del otro y el más pequeño tiene sus lados paralelos con los lados del más grande; se dan las dimensiones de ambos rectángulos. En la situación 1 se relaciona el concepto de área y su descomposición.

Situación 1

Cuál es el área entre los dos rectángulos:

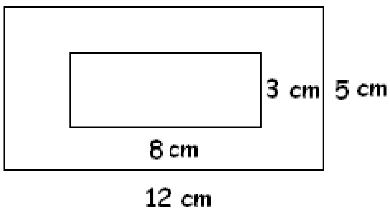


Figura 13

a) 20 cm^2
b) 36 cm^2
c) 28 cm^2
d) 84 cm^2

Análisis de la situación 1

> ... "El bajo porcentaje de estudiantes colombianos que contestaron correctamente este punto (9.4 % para 7° y 9.3 % para 8°). La mejor estrategia en este caso es calcular el área haciendo la diferencia entre las áreas de los dos rectángulos, pero en cualquier caso, además de las formulas para calcular el área de un rectángulo, lo que esta en juego es el principio que el área de una región se puede calcular como la suma de áreas de regiones en las cuales se puede descomponer. Esta es la estrategia con la cual no parece estar familiarizados los estudiantes colombianos. Hubo un mayor porcentaje de estudiantes que seleccionaron un distractor incorrecto. Este distractor presenta como solución un número de centímetros

cuadrados que se obtienen de sumar el largo y ancho del primer rectángulo con el largo y ancho del segundo rectángulo, lo que parece indicar que se confunden, de alguna manera, los conceptos de perímetro y área y por eso el cálculo se trata de obtener como suma de lados”. (MEN 1997. Pág. 126 -127).

En la **Figura 14** se muestra un rectángulo dividido en cinco partes iguales. A partir la situación 2 se involucran conceptos de cálculos de área y perímetro de un rectángulo.

Situación 2

La figura consta de cinco cuadrados de igual talla. El área total de la figura es de 405 cm^2.

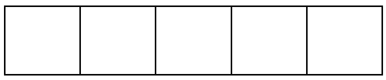


Figura 14

a. Encuentre el área de un cuadrado:

Respuesta: ______________Centímetros cuadrados.

Tabla 3: Resultados obtenidos en la pregunta a

% Respuestas	P1	% Nº
Colombia 7º	14.4	56.3
Colombia 8º	24.5	56.3
Internacional 7º	52.6	18.7
Internacional 8º	60.3	16.7

Tabla 3

b. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado:

Respuesta: ______________Centímetros.

Tabla 4: Resultados obtenidos en la pregunta b

% Respuestas	P1	% Nº
Colombia 7º	3.3	61.6
Colombia 8º	8.8	64.6
Internacional 7º	18.7	30.3
Internacional 8º	29.0	28.1

Tabla 4

c. Encuentre el perímetro total de la figura en centímetro

Respuesta: _____________Centímetros.

Tabla 5: Resultados obtenidos en la pregunta c

% Respuestas	P1	% Nº
Colombia 7º	-	63.3
Colombia 8º	7.8	67.8
Internacional 7º	17.4	30.3
Internacional 8º	23.5	28.1

Tabla 5

Análisis de la situación 2.

"Esta pregunta tiene que ver con el calculo de áreas, longitud de lados de cuadrados y perímetros de rectángulos, permitiendo caracterizar un ultimo aspecto de lo que "no saben" los estudiantes en esta área temática.
En la pregunta a) el estudiante debe identificar que el área del rectángulo se puede calcular mediante la suma de los cuadrados en que se descompone la figura y que todos estos cuadrados tienen la misma área, proyectando este hecho en un razonamiento que podría tener o no un registro escrito que le permite concluir que el área de un cuadrado es la quinta parte del área del rectángulo.

En la pregunta b) su solución supone que el estudiante conozca la relación que se da a través de la formula del área, entre la longitud del lado y el área del cuadrado y que le permite concluir que la longitud del lado de un cuadrado de 81 cm^2 es 9 cm.

En la pregunta c) se requiere poner en juego el concepto de perímetro de un rectángulo y en el caso concreto de este problema, ver que su perímetro se puede calcular como la adición de las longitudes de 12 lados de los cuadrados en los que se descompone el rectángulo, esto es 12x9 cm.

Los bajos niveles de respuestas correctas obtenidas por los estudiantes colombianos en estas preguntas y el análisis del tipo de conocimientos que demanda su solución, sugiere con mucha fuerza, que:

La mayoría de los estudiantes colombianos no están familiarizados con la estrategia básica de descomposición de figuras en figuras más simples, para facilitar el cálculo de volúmenes, áreas o perímetros. Hay, además, indicios de que los estudiantes colombianos presentan confusiones entre los conceptos de área y perímetro así como entre rectángulo y cuadrado y que puede haber dificultades con las fórmulas para calcular áreas de figuras como triángulos y rectángulos (perímetros, áreas o volúmenes y uso de conocimientos)". (MEN 1997. Pág. 124-125).

Hasta aquí se han presentado los análisis que el Ministerio de Educación Nacional hace sobre dos situaciones particulares que involucran algunos conceptos del pensamiento métrico como es el área de superficies. A continuación se muestran las **Tablas 6 y 7** que hacen referencia a los resultados obtenidos en las pruebas TIMSS en Colombia sobre el pensamiento métrico.

Resultados generales de las pruebas TIMSS en Colombia.

"La **Tabla 6** presenta los temas evaluados en cada área temática y la forma como se distribuyen las preguntas del área en dichos temas, en número y porcentaje. Incluye también, el porcentaje que representa el número de preguntas en cada tema con relación al número de preguntas en el examen global" (MEN. Análisis y resultados de las pruebas TIMSS en Colombia. Pág. 117)

Tabla 6 Distribución de las preguntas según temas

Código	Tema	Numero de preguntas	Porcentaje en el área	Porcentaje en el examen
1.2	MEDICIÓN	21	100.0%	13.4%
1.2.1	Unidades	9	42.9%	5.7%
1.2.2	Perímetro, área y volumen	8	38.1%	5.1%
1.2.3	Estimación y error	4	19.3%	2.5%

Tabla 6

La tabla 2 y figura 15 muestran el rendimiento promedio por temas evaluados, tales como medición, unidades, perímetro, área y volumen, estimación y error a nivel nacional e internacional por grados (séptimo y octavo).

Tabla 7 Rendimiento promedio por temas evaluados

Código	Tema	Nacional		Internacional	
		séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	Global	26.8	30.3	49.8	55.6
1.2	MEDICIÓN	23.4	26.7	47.1	52.5
1.2.1	Unidades	36.1	39.3	58.1	62.6
1.2.2	Perímetro, área y volumen	7.3	11.2	30.9	38.1
1.2.3	Estimación y error	26.9	29.3	54.7	58.5

Tabla 7

Figura 15 Rendimiento promedio por temas evaluados

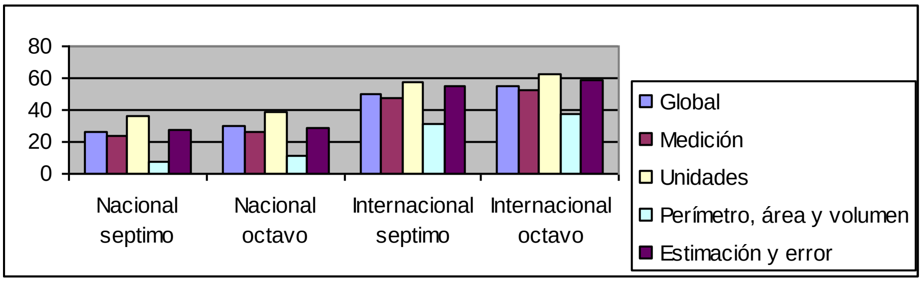


Figura 15

La **Tabla 8** y la **Figura 16** muestran el rendimiento promedio por tipo de desempeños evaluados por temas a nivel nacional e internacional que obtuvieron los alumnos en los grados séptimo y octavo.

Tabla 8 Rendimiento promedio por tipo de desempeños evaluados

Código	Tema	Nacional		Internacional	
		séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	Global	26,8	30,3	49,8	55,6
1.2	MEDICIÓN	23,4	26,7	47,1	52,5
2.1	Uso de conocimientos	42,1	44,2	64,5	67,5
2.2	Uso de procedimientos de rutina	25,5	28,4	51,0	55,5
2.3	Solución de problemas	12,8	17,8	37,0	44,0
2.5	Comunicación	4,5	5,6	25,1	32,4

Tabla 8

Figura 16 Rendimiento promedio por tipo de desempeños evaluados

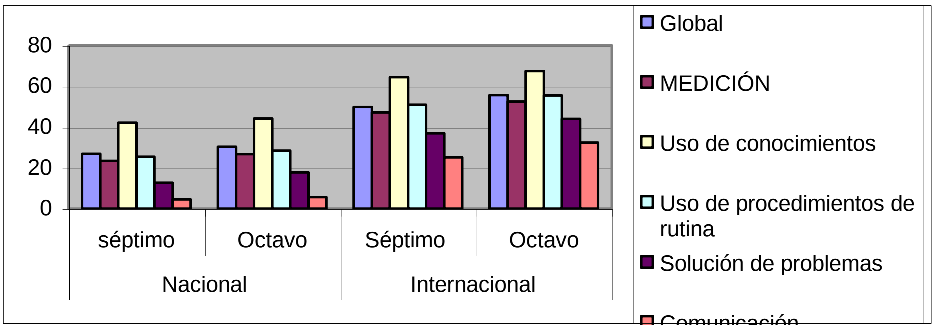


Figura 16

Análisis de los resultados presentados en las tablas 6, 7 y 8 y los diagramas de barras asociados (figuras 15 y 16).

> "Con base en la información que aparece en los diagramas de barras (figuras 15 y 16) y en las tablas 6, 7 y 8, se puede verificar que el rendimiento promedio de los estudiantes colombianos de 7° y 8° en el área temática de medición es:
>
> - *Relativamente bueno* en *Unidades* desde la perspectiva de los temas, en uso de conocimientos y desde la perspectiva de tipos de conocimiento.
> - *Particularmente crítico* en *Perímetro, área y volumen* desde la perspectiva de los temas y, desde la perspectiva de los tipos de desempeño en solución de problemas.
> - Existe un desfase entre el rendimiento promedio de los estudiantes colombianos y los estudiantes internacionales en el examen global, haciéndose particularmente agudo en el tema, perímetro, área y volumen." (MEN 1997. Pág. 119, 122).

Se ha visto como los resultados de las pruebas TIMSS revelan la poca familiaridad y el desconocimiento que los estudiantes colombianos poseen a nivel general del pensamiento métrico, particularmente en lo que se refiere al concepto de área y lo relacionado a él: la descomposición de figuras planas, la confusión del área y el perímetro, el cálculo de áreas y regiones de áreas.

Las tablas y gráficos son incluidos para sintetizar los resultados generales de la prueba en Colombia y observar allí las tendencias erróneas que presentan los estudiantes frente al pensamiento métrico y la resolución de problemas.

En resumen las pruebas TIMSS dieron una caracterización sobre qué saben los estudiantes a nivel global sobre el pensamiento métrico, mostrando la descompensación del rendimiento que existe entre los conceptos de perímetro, área y volumen de los estudiantes colombianos, frente a los estudiantes de los demás países.

1.3.2 Pruebas ICFES

Las pruebas ICFES, son la evaluación que cumple con una serie de condiciones que pueden determinar la calidad de la educación desde los puntos de vista académico y técnico, cuyo propósito se enfoca a servir como criterio para el ingreso a la educación superior, informar a los estudiantes acerca de sus competencias en cada una de las áreas evaluadas y apoyar los procesos de autoevaluación y mejoramiento de las instituciones escolares (MEN 2004).

Por la importancia que las pruebas ICFES tienen a nivel nacional, y para efectos de esta investigación, se dará a conocer una de las situaciones que se incluyen en estas pruebas con relación al pensamiento métrico, observando en ella los procesos y conceptos que están relacionados al concepto de área.

Debido a que las pruebas ICFES evalúan por tópicos, no se tienen los resultados específicos de cada pregunta, por lo tanto se incluyen las tablas que muestran los resultados a nivel general por niveles de competencia y por niveles de profundización en el tópico de matemáticas, a estos resultados se les hace un comentario.
Como este análisis está enfocado en el pensamiento métrico se considera importante mencionar los conceptos y procesos concernientes a la medición que las pruebas ICFES evalúan, los cuales son:

> “Medida, métrica, espacio y todas las relaciones que entre éstos se puedan generar a partir de las experiencias con cantidades y formas geométricas y las diferentes aplicaciones que de la métrica se hagan, también las formas y sus movimientos y las condiciones invariantes”. (Pruebas ICFES 2004)

Para ejemplificar lo que las pruebas ICFES evalúan respecto a la medida de áreas, se presenta una **Situación** que involucra el recubrimiento de áreas a partir de unidades no convencionales.

Situación

Entre la variedad de baldosas ofrecidas en un almacén de referencia *triado* y *cuadu* se encuentran las descritas a continuación:

Figura 17: Baldosas de referencia

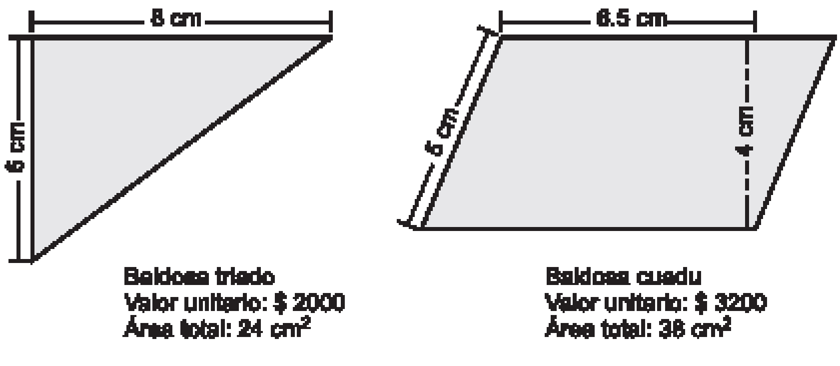


Figura 17

Preguntas:

1. Al almacén ha llegado un cliente que requiere comprar baldosas para recubrir un área rectangular con medidas de 8m x 6m. El vendedor sabe que la baldosa que más le conviene es la baldosa de referencia *triado*, la razón que él debe darle al cliente para convencerlo de esto es que:

A. Empleando la baldosa de referencia *triado* se recubriría el área con una cantidad exacta de baldosas, sin tener que cortar ninguna, mientras que con la baldosa de referencia *cuadu* tendría que cortar baldosas y sobraría material.

B. Empleando la baldosa de referencia *triado* se recubriría el área descrita con 200 baldosas, mientras que se requiere de 127 baldosas de referencia *cuadu* para el mismo fin, lo cual sería mas costoso.

C. Comprar la baldosa de referencia *triado*, para recubrir el área descrita, seria $100 000 más económico que comprar la baldosa de referencia *cuadu*.

D. Comprar la baldosa de referencia *triado*, para recubrir el área descrita, sería $ 422.400 mas económico que comprar la baldosa de referencia *cuadu*.

2. El vendedor del almacén afirma que en el día se recibió la misma cantidad de dinero por la venta de baldosas de referencia *triado* que por la venta de baldosas de referencia *cuadu*. Basándose en la afirmación del vendedor usted puede deducir que:

A. La cantidad de baldosas de referencia *cuadu* vendidas fue el 1.6% de la cantidad de baldosas de referencia *triado*.

B. Por cada 8 baldosas de referencia *triado* vendidas, se vendieron 5 baldosas de referencia *cuadu*.

C. La cantidad de baldosas de referencia *triado* vendida fue 1.6 veces la cantidad de baldosas de referencia *cuadu*.

D. El 50% del total de baldosas vendidas fue la de referencia *triado* ya que se recibió la misma cantidad de dinero por su venta que por la venta de las baldosas de referencia *cuadu*.

3. Un cliente se ha dirigido a la sección de quejas y reclamos del almacén asegurando que, de los 24 m^2 que compro en baldosa de referencia *cuadu*, el 25% salió defectuosa y por tanto exige al almacén la devolución de $110 000 correspondientes al precio de las baldosas defectuosas. Usted no esta de acuerdo con el cliente, pues:

A. No es posible que haya comprado 24 m^2 en este tipo de baldosa porque ello implicaría que le vendieron partes de baldosas.

B. La cantidad de dinero que exige como devolución sobrepasa el valor correspondiente al 25% de las baldosas compradas.

C. La cantidad de dinero exigido como devolución es inferior al costo de 6m^2 de baldosa de referencia *cuadu*.

D. El precio de 6 baldosas de referencia *cuadu* no corresponde al exigido en devolución.

4. Para incentivar la compra de baldosas de referencia *cuadu*, el dueño del almacén decide unificar el valor por centímetro cuadrado de baldosa de referencia *triado* y *cuadu*. El procedimiento que usted le sugeriría al dueño para encontrar valores adecuados a sus propósitos es:

A. Sumar y luego dividir entre 2 los cocientes resultantes de la división entre el precio de cada baldosa y el área que cubre.

B. Sumar y luego dividir entre 31 los precios de una baldosa de referencia triado y una de referencia *cuadu*.

C. Sumar y luego dividir entre 2 los precios de una baldosa de referencia *triado* y una de referencia *cuadu*.

D. Sumar los cocientes resultantes de la división entre el precio de cada baldosa y el doble del área cubierta por ella las baldosas de referencia *cuadu* al exigido en devolución.

Análisis de la situación.

En este análisis se dará a conocer los conceptos y procesos involucrados en el pensamiento métrico de acuerdo a la situación de las pruebas ICFES que acaba de presentarse y que se refiere a la medición de áreas.

En general la situación hace referencia al recubrimiento de áreas con dos unidades no convencionales y la comparación entre ellas, donde el estudiante tiene que estimar y/o calcular la distribución apropiada y el número de baldosas necesarias para recubrir el plano, además de escoger cual es la más conveniente y porque y los procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos a seguir.

Resultados de las pruebas ICFES.

En vista de que no se encontraron los resultados específicos de las preguntas que se refieren al concepto de área, se ve la necesidad de incluir los resultados generales de matemáticas que obtuvieron los alumnos a nivel institucional, en este caso de la Institución Educativa Guadalupe.

A continuación se muestran las **Tablas 9 y 10** que hacen alusión al rendimiento que tuvieron los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe en las pruebas ICFES del año 2004.

La **Tabla 9** muestra el porcentaje de estudiantes por nivel de competencia en tres categorías: Interpretación de situaciones, establecimiento de condiciones y planteamiento y contrastación de hipótesis.

TABLA 9: Resultados por Nivel de competencia

LICEO GUADALUPE - TARDE
MEDELLIN - ANTIOQUIA

Nivel	Matemáticas		
	C1 Interpretar Situaciones	C2 Establecer Condiciones	C3 Planteamiento y Contrastación de Hipótesis
I (Bajo)	21.82	31.82	25.45
II (Medio)	77.27	63.64	74.55
III (Alto)	0.91	4.55	0.00

Tabla 9

La **Tabla 10** presenta el porcentaje de estudiantes por el grado de profundización.

TABLA 10: Resultados por nivel de Profundización
LICEO GUADALUPE - TARDE
MEDELLIN – ANTIOQUIA

Rango	Matemáticas
GRADO BASICO	13.16
I	55.26
II	28.95
III	0.00

Tabla 5

Análisis de los resultados:

La **Tabla 9** denota que la mayoría de los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe se encuentra en un nivel medio frente a la solución de situaciones que impliquen niveles de competencia interpretativo (77.27%), establecimiento

de condiciones (63.64%) y planteamiento y contrastación de hipótesis (74.75%).
En cuanto al nivel alto los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe presenta unos porcentajes bajos frente a situaciones que implique ser interpretadas (0.91%), el establecimiento de condiciones (4.55%) y planteamiento y contrastación de hipótesis (0.00%).
De lo anterior se podría pensar que los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe también podrían tener inconvenientes en situaciones que tengan un nivel alto de competencias frente a las situaciones que involucren el cálculo, la estimación de áreas y procesos de descomposición y recomposición de áreas.

La **Tabla10** muestra que un 13.16% de los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe están en el grado básico de profundización; la mayoría de los estudiantes (55,26%), se encuentran en un nivel bajo en la solución de problemas con mayor nivel de complejidad en el área de matemáticas. El 28.95% de los estudiantes se encuentra en un nivel medio y no hay estudiantes que tengan un nivel alto en esta prueba. Por lo que se puede inferir que en el pensamiento métrico se pueden estar presentando estos mismos resultados en cuanto a que la mayoría de estos están en un nivel bajo sobre situaciones que tienen que ver con la medición.

En esta parte se ha presentado una situación que ejemplifica como el ICFES evalúa dentro del tópico de matemáticas el concepto de medición de áreas, mostrando los conceptos y procesos que allí se llevan a cabo, como son la comparación de unidades, el recubrimiento de superficies, el cálculo y/o estimación de áreas; además se ha puesto en consideración los resultados generales en el área de matemáticas a los cuales se les ha hecho un análisis que muestra un índice bajo en esta área.

Se puede afirmar que los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe presentan un rendimiento bajo en el área de matemáticas lo que lleva a pensar que esto también repercute en el pensamiento métrico y por lo tanto en los conceptos de medición y área.

A su vez se puede inferir que frente a las situaciones que impliquen un análisis de la medición de áreas los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe pueden tener dificultades conceptuales y/o procedimentales.

1.3.3 Pruebas SABER

"Las pruebas SABER son un programa de evaluación de las competencias en lenguaje y matemáticas de los estudiantes que están en el nivel de educación básica, su propósito es aportar información para el reconocimiento de fortalezas y debilidades académicas, y, por ende, facilitar el diseño y ajuste de las políticas y de planes para cualificar el servicio educativo que se brinda en cada plantel y en cada región del país" (MEN, 2004).

En cuanto a la medición las pruebas SABER se concentran en plantear situaciones que involucran conceptos y procesos tales como:

GEOMETRIA Y MEDICION

Grado tercero.

- Reconocimiento de figuras geométricas.
- Nociones de perímetro y área en figuras planas.
- Seguimiento de patrones.
- Mediciones con unidad patrón.

Grado quinto.

- Noción de perímetro y de área por recubrimiento.
- Reconocimiento de figuras geométricas.
- Rectas, posiciones relativas: perpendicularidad, paralelismo.
- Propiedades de las figuras.
- Transformaciones: rotaciones y traslaciones.

Grado séptimo

- Conceptualización de perímetro y área.
- Ubicación espacial de figuras planas.
- Relaciones y propiedades geométricas.
- Propiedades y clasificación de figuras planas.
- Movimientos en el plano: simetrías, rotaciones, traslaciones.
- Uso de diferentes unidades de medida.

Grado noveno.

- Conceptualización de perímetro y/o área.
- Manejo espacial, volumen.
- Caracterización de figuras planas.
- Relaciones y propiedades
- de objetos geométricos.
- Conceptualización de la longitud de la circunferencia y área del círculo.

- Movimientos en el plano (traslaciones).
- Utilización de patrones de medida no convencionales.

En este apartado se incluyen algunos resultados específicos de las pruebas SABER en situaciones que involucran la medición de áreas y los resultados a nivel general que obtuvieron los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe, además de unos análisis sobre estos resultados haciendo una descripción sobre las dificultades o fortalezas que presentaron los alumnos al realizar las pruebas en los conceptos referentes al área y su medición.

A continuación se presentan dos situaciones que ejemplifican el tipo de problemas que las pruebas SABER proponen para evaluar la medición de áreas.

La primera situación que se presenta hace referencia al recubrimiento de superficies y cálculo de áreas, mostrando cuatro diferentes figuras con sus dimensiones (**Figura 18**) que deben ser relacionadas con un área dada

Situación 1

Para embaldosar una sala se necesitan 46 m^2 de baldosa. Se solicita el pedido al depósito de donde envían inicialmente 15 cajas que contienen 11/2 m^2 de baldosa cada una.

¿Cuáles de las siguientes figuras tiene un área equivalente al área de la superficie de la sala que se desea embaldosar?

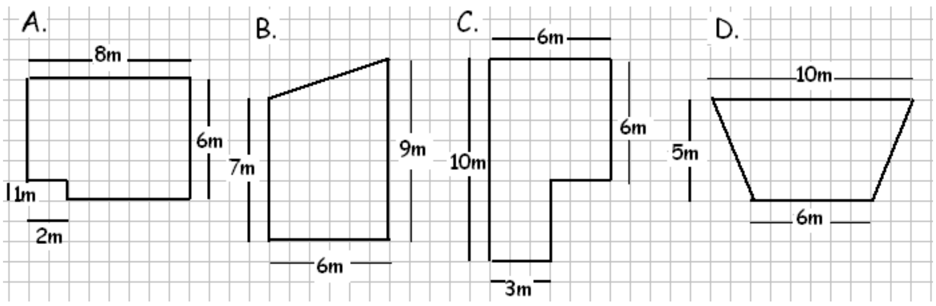


Figura 18

Los resultados obtenidos de esta pregunta por plantel, por municipios y departamentos fueron los siguientes:

Tabla 11: Resultados Situación 1

Plantel		%Mpio	%Dpto	Plantel		%Mpio	%Dpto
Nº	%			Nº	%		
41	41.40			10	12.05		
Opción A				Opción B			

Plantel		%Mpio	%Dpto	Plantel		%Mpio	%Dpto
Nº	%			Nº	%		
21	25.30			10	12.05		
Opción C				Opción D			

Plantel		%Mpio	%Dpto
Nº	%		
1	1.20	1.81	1.70
Multimarca			

Tabla 11

Análisis de los resultados:

En la opción A) los alumnos reconocen que para hallar el área de una figura irregular se puede descomponer en subregiones y luego sumar el área de cada una de estas o hallar el área total y de esta restar el área de la esquina faltante. En las opciones B) y D) los alumnos no reconocen el área del triángulo como parte de la figura, aproximando la cantidad de cuadros incompletos. En la opción C) posiblemente los estudiantes no reconocen que el área de una figura es la suma de las subregiones.

La segunda situación hace alusión al calculo de áreas, además de la comparación entre ellas, mostrando cuatro rectángulos donde la medida de su área se da en forma decimal y cuya unidad es el cm^2. (figura 18)

Situación 2

A continuación en la **Figura 19** se muestran 4 rectángulos con las medidas de sus lados en centímetros (cm) y su respectiva área en centímetros cuadrados (cm^2).

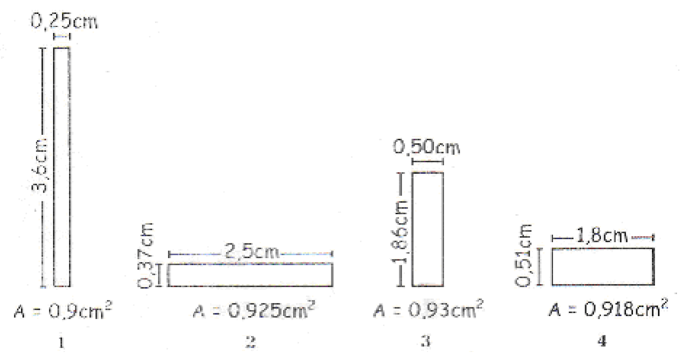


Figura 19

12. ¿Cuál de los rectángulos tiene mayor área?

A. rectángulo 1

B. rectángulo 2

C. rectángulo 3

D. rectángulo 4

Los resultados obtenidos de esta pregunta por plantel, por municipios y departamentos fueron los siguientes:

TABLA 12: RESULTADOS A NIVEL DEPARTAMENTAL, MUNICIPAL E INSTITUCIONAL

Plantel		%Mpio	%Dpto	Plantel		%Mpio	%Dpto
Nº	%			Nº	%		
9	10.84			52	62.65		
Opción A				Opción B			

Plantel		%Mpio	%Dpto	Plantel		%Mpio	%Dpto
Nº	%			Nº	%		
16	19.28			6	7.23		
Opción C				Opción D			

Tabla 12

Análisis de los resultados:

Los alumnos que contestaron a la primera opción dan la impresión que se dejaron llevar por el largo del rectángulo. En la segunda opción siendo esta el mayor porcentaje de alumnos, pareciera que los estudiantes se confundieron en el largo del rectángulo, además de la frecuente dificultad en el reconocimiento de las cifras decimales, pues piensan que a mayor cantidad de cifras decimales será mayor el numero. En la opción C) los alumnos reconocen el área de la figura estando inmerso el reconocimiento de cifras decimales. En la opción D) aunque fue el menor porcentaje de elección posiblemente los estudiantes se dejaron llevar por el ancho del rectángulo.

Resultados generales de las pruebas SABER

Ahora se presentan los resultados generales de la prueba, obtenidos por los alumnos de la Institución Educativa Guadalupe por nivel de logro de competencia y desempeño relativo por grupos de preguntas o tópicos.

La **Figura 20** muestra el grado de dominio que los estudiantes han demostrado tener al abordar las distintas situaciones exigidas por las pruebas, presentados por niveles de logro en el área de Matemáticas del Liceo Guadalupe, Medellín, Antioquia y Nacional.

LIC GUADALUPE - JORNADA MAÑANA - PÚBLICO - URBANA

Resultados por niveles de logro de competencias

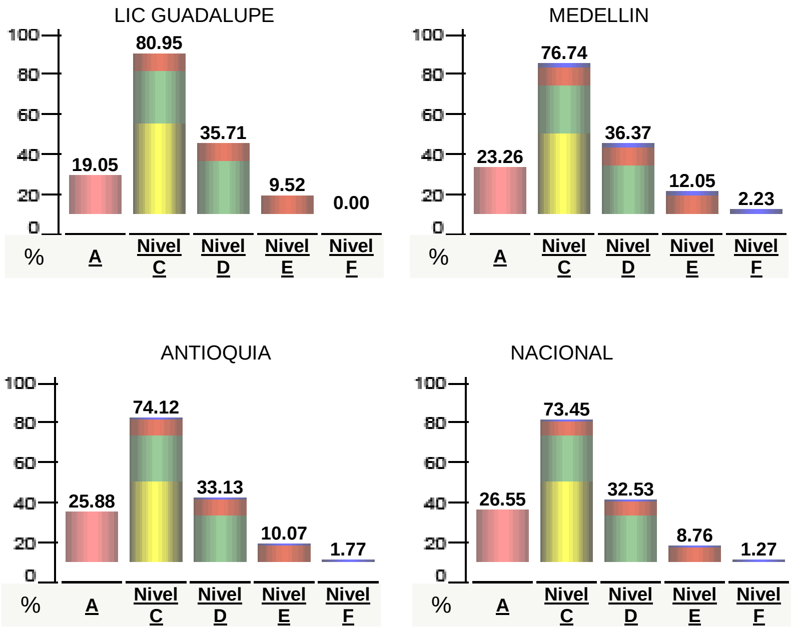


Figura 20

La **Tabla 13** muestra los resultados obtenidos por los alumnos del grado noveno de la jornada de la mañana de la Institución Educativa Guadalupe, en cuanto a los tópicos matemáticos como: aritmética, álgebra, geometría y medición, estadística y probabilidad.

Tabla 13: Desempeño relativo por grupos de preguntas o tópicos

GRADO 9 °

Aritmética	Algebra	Geometría y medición	Estadística y probabilidad
SA: Significativamente alto	**B:** Bajo	**B:** Bajo	**B:** Bajo

Tabla 13

Análisis de resultados a nivel general

Análisis de los resultados por niveles de competencias (Figura 20)

En la **Figura 20** se muestran cinco niveles para el grado noveno (A, C, D, E y F) que corresponden a niveles de complejidad. "Los distintos niveles se caracterizan y se diferencian entre sí, a partir de la complejidad de las acciones que realizan los estudiantes cuando responden las preguntas que conforman cada nivel. Dichos niveles son *jerárquicos*, es decir, van creciendo en su grado de complejidad; así, el nivel A es de menor complejidad que los niveles C, D, E y F. Además, son *inclusivos*, es decir, si un estudiante alcanza un nivel particular es porque ha superado los niveles anteriores y por que por lo menos el 60% de las respuestas son correctas. Las preguntas de cada nivel de logro miden con alto grado de eficiencia ese nivel de logro particular; la complejidad de los niveles de un grado a otro es diferente, desde aspectos disciplinares propios de cada grado (sintaxis, semántica, conceptos, hechos...), y las relaciones que se involucran en cada problema". (MEN, 2005).

En la Institución Educativa Guadalupe el porcentaje de alumnos que ni siquiera se encuentran en el nivel de logro mínimo en el área de matemáticas corresponde al 19.05%, en Medellín corresponde al 23.26%, en Antioquia al 25.88% y a nivel Nacional al 26.55%

El porcentaje de alumnos de la Institución Educativa Guadalupe que alcanzan el nivel C corresponde al 80.95%, en Medellín al 76.74%, en Antioquia al 74.12% y a nivel Nacional al 73.45%; lo que significa que la Institución Educativa Guadalupe tiene un alto porcentaje en este nivel, es decir, la mayoría de sus estudiantes alcanzan a resolver situaciones hipotéticas, caracterizadas en su lenguaje por la forma "si sucede x, pasaría que...", para solucionarlos solo se requiere una estrategia de alguno de estos dominios: aritmética, geometría o estadística.

El promedio del nivel de logro D alcanzado por los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe corresponde al 35.71%, en Medellín al 36.37%, en Antioquia al 33.13% y a nivel Nacional el 32.53%; teniendo en cuenta los porcentajes a nivel Nacional y de la institución, se puede observar que los estudiantes de la Institución logran reconocer y abstraer aspectos importantes en la resolución de problemas no rutinarios complejos cuya solución implica combinar estrategias de diferentes dominios de la matemática como: aritmética, geometría, y estadística.

Por último en la tabla se muestra como la Institución Educativa Guadalupe presenta porcentajes muy bajos en los niveles E (9.52%) y F (0.00%) donde los niveles de complejidad son altos, lo que implica que estos estudiantes no alcanzan el nivel de generalización requerido en las pruebas. Comparando los resultados que obtuvo la Institución con respecto a Medellín E (12.05%) y F (2.23%), Antioquia E (10.07%) y F (1.77%) y a nivel Nacional E (8.76%) y F (1.27%) no se nota grandes diferencias de porcentajes, lo que lleva a afirmar que a nivel general los estudiantes colombianos presentan dificultades en los niveles de formalización.

Interpretación de la tabla 13

La **Tabla 13** muestra como los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe, presentan un nivel bajo en el tópico de geometría y medición, álgebra, estadística y probabilidad, lo que puede llevar a pensar que los estudiantes de esta Institución presentan dificultades al enfrentar situaciones que tengan relación con estos tópicos.

Se ha visto hasta ahora dos situaciones de las pruebas SABER, que evalúan los conceptos asociados al área y superficie de figuras planas y sobre estas se ha hecho un análisis de los resultados que obtuvieron los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe al enfrentarse a estas dos situaciones. Además se han incluido los resultados generales que obtuvo la institución y se ha comparado con los resultados municipales, departamentales y nacionales, haciendo un análisis sobre los niveles de logro alcanzados por los alumnos y el desempeño relativo por tópicos.

Como conclusión se puede inferir que los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe presentan dificultades en la solución de situaciones de las pruebas SABER que involucran la medición de áreas, además de no estar familiarizados con el cálculo de estas, la teselación y/o recubrimiento de superficies. Presentando además niveles bajos en lo que se refiere al tópico de geometría y medición, por lo que se puede inferir que no se le ha dado un tratamiento adecuado a la enseñanza de los procesos de medición.

Es así como el currículo logrado se ha desarrollado desde tres pruebas que el Ministerio de Educación Nacional propone para evaluar los niveles de competencia que poseen los estudiantes Colombianos frente al área de matemáticas, y este análisis ha profundizado sobre las dificultades que presentan los alumnos frente al pensamiento métrico específicamente frente al concepto de área. Las pruebas que se incluyeron son: Las pruebas TIMSS, donde se incluyen unos resultados específicos y generales de esta prueba, las pruebas ICFES, de las cuales se analizan sus resultados generales y las pruebas SABER donde se analizan los resultados específicos y generales de esta prueba.

Durante el recorrido por la descripción de este currículo logrado se puede afirmar que los estudiantes colombianos presentan dificultades para calcular el área de regiones, además de presentar confusión entre el perímetro y el área, poca familiaridad frente a la descomposición de figuras, el reconocimiento de componentes de las figuras, la conservación de áreas y estimación de estas, y el manejo de técnicas de cálculo inapropiadas.

En conclusión el trabajo de la medida de área en la escuela debe ser repensado, puesto que los índices sobre la solución de problemas que impliquen el manejo de áreas, son muy bajos, además se nota en los resultados que no existe un adecuado manejo entre los conceptos que deben intervenir en el trabajo con las áreas por parte de los alumnos.

CONCLUSIÓN DEL ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA TRADICIONAL Y SUS EFECTOS

Hasta ahora se ha realizado la primera parte de la investigación que se enfoca en la ingeniería didáctica, la cual corresponde al análisis preliminar; el cual se abordo desde tres currículos: el currículo propuesto que corresponde a los Lineamientos y Estándares Curriculares de matemáticas, el currículo desarrollado donde se incluye el análisis de textos, las concepciones de maestros y alumnos y el currículo logrado el cual muestra el análisis de los resultados de las pruebas TIMSS, ICFES y SABER, todo ello enfocado hacia la observación de la enseñanza y aprendizaje del Pensamiento Métrico y Sistemas de Medida, específicamente a lo que corresponde a la medida de áreas y superficies.

En este recorrido se pudo notar que la enseñanza y aprendizaje del Pensamiento Métrico y Sistemas de Medida esta relacionado con el Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos; por esto se puede indicar que hace falta complementar este trabajo aritmético incluyendo la medición para no solo reducirlo al calculo de formulas y considerar procesos importantes tales como: la construcción de magnitudes, el desarrollo de procesos de conservación, la estimación de magnitudes, la apreciación del rango de las magnitudes, la selección de unidades y el trasfondo social de la medición que son importantes para el desarrollo de este pensamiento.

Se ha observado como los Lineamientos y Estándares de matemáticas son una propuesta para la enseñanza del Pensamiento Métrico, pero los actores que intervienen en la enseñanza de este pensamiento no las tienen en cuenta. Por lo que su enseñanza se basa más en los textos escolares que se enfocan en las conversiones de unidades y el cálculo de medidas.

De todo lo anterior se puede afirmar que al Pensamiento Métrico no se le ha dado el espacio de conceptualización que requiere, se ha dejado de lado los procesos y conceptos que hacen parte de éste, y que son fundamentales para la aplicación en situaciones de la vida cotidiana donde la medición cobra importancia.

Uno de los conceptos a los cuales es necesario prestar mayor atención es al concepto de la magnitud área donde los estudiantes colombianos presentan dificultades significativas en las pruebas que se realizan en el país. Es por eso que este análisis cobra sentido en cuanto a la observación de falencias que lleven a investigar sobre la realización de situaciones problema que impliquen procesos de estimación y de medición, sobre las características y fundamentos más importantes que se derivan del concepto de área.

También es claro que los docentes le dan un enfoque inadecuado a la enseñanza de la magnitud área omitiendo así la medición de superficies, la estimación de estas, la descomposición y recomposición de figuras planas, sin plantear situaciones de medida en las cuales los alumnos tengan que hallar por si mismos medidas directas de superficies.

En general el análisis realizado anteriormente, permite concluir que la formación matemática de los estudiantes desde el Pensamiento Métrico debe ser motivo de estudio, la medición de áreas plantea un caso particularmente crítico que amerita una mayor atención por parte de los maestros y entes educativos.

1.4 ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA MEDICIÓN

Es importante observar desde la historia de las matemáticas, las concepciones que el hombre ha desarrollado sobre el origen y evolución de los conceptos relacionados con las magnitudes y su medición; haciendo énfasis en aspectos históricos relacionados con la medición de áreas, para analizar que dificultades y obstáculos epistemológicos se tuvieron en la construcción de las magnitudes y cómo influyeron en la elaboración y desarrollo de otros conceptos matemáticos. Se entiende por obstáculos epistemológicos

> "*aquellos a los cuales no se puede, ni se debe escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos" (*Brousseau, Guy. 2005)

En este análisis sobre los obstáculos epistemológicos se hará un recorrido a través de varios periodos que marcan la historia. En primer lugar se hace una breve descripción sobre el comunismo primitivo mostrando las nociones sobre la medición que tenían estas sociedades, luego se abordarán sociedades más complejas como las civilizaciones antiguas: Babilonios, Griegos, Egipcios, Chinos e Hindúes, haciendo énfasis en los griegos, y por último se observará el trasfondo social de la medición en la época del capitalismo.

Históricamente la medición ha estado en todos los aspectos sociales de la vida del hombre desde los orígenes de las civilizaciones hasta las sociedades actuales; como afirma María Ángeles del Olmo (1993):

"La medición debe ser tan antigua como la industria y el qué hacer humano. No se puede ajustar la cuerda de un arco, ni el hacha a su mango, sin medir. En la antigüedad los objetos a ajustar se comparaban directamente entre sí" (Pág. 151), sin que hubiera la existencia de un patrón o unidad de medida.

Es así como desde la antigüedad el proceso de medición ha cruzado por varias etapas de construcción, donde la selección de unidades, ha jugado un papel determinante en la construcción de la magnitud, de esta manera

> "*Puede decirse que el primer periodo evolutivo de las nociones metrológicas del hombre asociado a la selección de las unidades es el antropométrico, en el cual el hombre mide el mundo consigo mismo éste es un sistema antiquísimo y universal, y las medidas de él emanadas llevan la denominación de medidas antropométricas (cuya etimología, naturalmente, no proviene de metro sino de metrum). El siguiente periodo (ergométrico) busca sus unidades de medición en las condiciones, objetos y resultados de la labor humana. Finalmente surge un periodo convencional en el que*

las unidades son fijadas por convenios entre hombres y naciones" (KULA 1980,).

El proceso de medición de áreas no es ajeno a los comienzos de la civilización, desde el neolítico ya existen evidencias, según María Ángeles del Olmo (1993), de excavados forrados con paja o con esteras y la elaboración de cerámicas con decorados, hace pensar en que estos pueblos tenían nociones de tamaños, formas y texturas.

Ya en sociedades más complejas como en los Egipcios el proceso de medición de áreas surge

"con la necesidad de nuestros antepasados por delimitar sus tierras después de las frecuentes inundaciones del río Nilo en el antiguo Egipto, se formaron personas expertas en los cálculos de agrimensura del mismo modo surgió la necesidad de comparar las áreas y volúmenes de figuras simples, la construcción de canales y edificios, las figuras decorativas, los movimientos de los astros que contribuyeron también al nacimiento de las reglas geométricas y propiedades métricas" (PARADA 1999. Pág. 46).

Para los babilonios, no era desconocido el manejo con las áreas, como afirma Maria del Olmo (1993) "para la solución de problemas de ingeniería debían conocer el manejo de áreas de triángulos, trapecios, el área del círculo, el valor de los diámetros del círculo, entre otros. Es así como los babilonios desarrollaron, procedimientos para encontrar las áreas de figuras planas y resolvieron algebraicamente muchos problemas".

En las matemáticas de los babilonios, los números irracionales no eran motivo de dificultad como sí ocurriría con los griegos 2000 años más tarde con la discusión sobre el infinito actual frente al infinito potencial y la problemática entre lo continuo y lo discreto, según MANKIEWICZ, Richard (2000).

"*Los números irracionales, que dieron paso a una expansión decimal infinita, los babilonios lo resolvieron numéricamente truncando la expansión fraccionaria sexagesimal. No hay evidencia de deliberaciones sobre la posible naturaleza infinita de tales expansiones, pero una de las tablillas muestra una aproximación a la raíz de dos que detalla hasta cinco lugares decimales. Aunque no hay otras conclusiones de estas evidencias históricas, se sabe que el método a posteriori se llamaría de Heron (matemático griego del siglo I d.C), casi dos mil años más tarde, llegaría al mismo resultado. Los Babilonios usaron el teorema de Pitágoras mil años antes de su nacimiento. Las matemáticas de la antigua Babilonia eran sofisticadas y apropiadas para los usos prácticos de la contabilidad, las finanzas, los pesos y las medidas (pág. 11, 12)*".

Similar a los babilonios los egipcios en su famoso papiro de Rhind expone 87 problemas y sus soluciones donde se destacan conocimientos para “calcular la superficie de una figura rectangular. Las soluciones se aclaran con ejemplos prácticos; aunque en ningún momento se citan formulas generales” (MANKIEWICZ 2000. Pág. 13).
Los egipcios tenían preferencia por las fracciones unitarias, los cuales utilizaban como unidades de medida fundamentales, como lo explica MANKIEWICZ, Richard (2000) “Dos son las características destacables del uso de los números por los egipcios. La primera consiste en que todos los cálculos están basados sólo en sumas, la segunda es el predominio de las unidades fraccionarias unitarias (1/2, 1/3…). En cuanto a la división se tenía la posibilidad de una solución fraccionaria. La manera egipcia de indicar una unidad fraccionaria era poniendo una barra sobre el número, por ejemplo 1/5 se escribía $\bar{5}$”.

De este modo para los egipcios y los babilonios la existencia de los números racionales no era motivo de “discordias”. Con respecto al uso de áreas significaba que existía un manejo práctico de estás, sin la necesidad de reducirlas a formulas simplemente.

Al igual que los egipcios, los chinos dominaban varios aspectos del calculo de áreas de figuras tales como “área del rectángulo, triángulos, trapecios, círculos, segmentos circulares y sectores circulares, las fórmulas para rectángulos, triángulos y trapecios son todas correctas”.(OLMO y otros 1993. Pág. 156)

Particularmente los Chinos tuvieron dificultades frente a la medición de la circunferencia al no ver la inconmensurabilidad entre sus componentes, como lo muestra Maria del Olmo (1993)

> “*Para ellos el sector circular, la regla dice: multiplicar el diámetro por el arco y dividir por cuatro. Esta regla es correcta, pero indica que el autor del problema ignoraba las relaciones, entre el arco, el radio, y el área del círculo o del sector circular. Para el área del segmento circular proporciona una formula inexacta.”* (Pág. 156)

Por otra parte los Hindúes contrario a los griegos y similar a los babilonios, manejaban los números racionales e irracionales en un contexto numérico, además había cierto enfoque en la magnitud área, así por ejemplo, utilizaban el teorema de Pitágoras para explicar que

> “*siempre es posible construir un cuadrado cuya área sea el doble de la de cualquier cuadrado. Pero si empezamos con los dos cuadrados reales (Hechos de tela), ¿cuál es el mejor modo de cortarlos y recombinar las piezas para formar un cuadrado mayor? Aunque este tipo de construcción no se explica en los Sulbasutras, muestra un modo concreto de pensar. Una pista es la aproximación utilizada para* $\sqrt{2}$*, que tiene cinco decimales: (“incrementa la medida al cubo, y el cubo a la cuarta*

menos la trigésima cuarta parte de dicha cuarta"). (MANKIEWICZ 2000. Pág. 40).

Como afirma María del Olmo (1993),

> "*El Sulbasutra proporciona reglas para la construcción de cuadrados y rectángulos, y relaciones entre la diagonal y el lado de un cuadrado y equivalencias entre el rectángulo, el cuadrado y el círculo. Es por esto que los hindúes trabajan con la aproximación de $\sqrt{2}$ exacta hasta la quinta décima. Este mismo valor es el que utilizan para resolver, aproximadamente el problema inverso de la cuadratura del círculo*. " (Pág. 157).

Es de este modo que para los Hindúes el concepto de área es el que lleva al origen de la geometría y la medición como lo afirma MANKIEWICZ, Richard (2000), "la geometría surgió de la necesidad de adaptar el tamaño, la forma y la orientación de los altares y a las escrituras véditas". (Pág. 40).

Hasta ahora se han resaltado aspectos históricos sobre la magnitud en los inicios de la civilización y en sociedades como Los Babilonios, Los Egipcios, Hindúes, y Chinos, mostrando el papel que jugo la magnitud área dentro de los conceptos matemáticos. Además se han discutido ciertos problemas que estas civilizaciones han tenido en la construcción de las magnitudes, pero este análisis epistemológico, quedaría incompleto sin el aporte que los griegos hacen a las magnitudes.

Los griegos son uno de los mayores teóricos de las matemáticas de sus tiempos, proporcionando fuentes valiosas de su pensamiento matemático. Es precisamente Euclides quien reúne todo el trabajo intelectual de los matemáticos de la época presentándolo en su texto los elementos. Uno de esos aportes fue la construcción teórica de los números y las magnitudes, que "les permitió profundizar en muchos otros términos de las matemáticas y de las ciencias, a la vez que superar ciertos problemas originados quizá por el descubrimiento de los inconmensurables de un lado, además de la imposibilidad para aceptar el infinito actual". (GUTIERREZ y VANEGAS 2004).

Justamente para los griegos, el infinito actual era un término no aceptado en las matemáticas como lo afirma el profesor Andrés de La Torre (2003) en su texto Modelización del tiempo y del espacio

> "*Los Griegos se negaron persistentemente a aceptar el infinito actual, la palabra misma infinito (apeiron) tenía entre ellos un sentido peyorativo. Lo usaban, por ejemplo para referirse al caos o a una línea quebrada, en el sentido de un defecto, una privación o una carencia de limites y no el de una perfección. Los argumentos de Zenón tuvieron como resultado que los matemáticos Griegos hicieran a un lado el infinito"*

Tal vez por ello, los griegos no adecuan aritméticamente la inconmensurabilidad geométrica, (que comenzó a resolverse con el aporte árabe y tuvo solución con los aportes de Simón Steven en el siglo XVI). Esta afirmación se confirma en lo pensado por los Pitagóricos, para ellos el número natural constituyó el principio fundamental del universo hasta el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, trayendo consigo una crisis conceptual, como lo afirman Jesús Gutiérrez y Dennis Vanegas (2004) "La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos griegos a pensar un continuo físico, sugerido por las magnitudes geométricas."

Frente a la cuestión del infinito continuo en los griegos, el profesor Gilberto Obando (2002) en su texto *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica, explica que:*

> *"la posibilidad de acercar estas diferencias epistemológicas está dada por la comprensión de la unidad aritmética, no como distinta a las unidades geométricas, tal como lo muestra la historia esto no sólo tardó un gran periodo de tiempo, sino que un mediador importante en esta comprensión fueron las practicas socialmente extendida de la medición, más aún, el problema se torna más profundo cuando esta dicotomía, de orden epistemológico, se le une otra de orden psicológico: las unidades simples y las unidades compuestas, una tarea que implique la conformación de unidades simples es de menor complejidad psicológica que cuando esa implica la conformación de unidades compuestas, este reconocimiento del tipo de unidad como la magnitud hace indispensable la referencia a la matemática de las cantidades por lo tanto a considerar en el establecimiento parte-todo la unidad (la unidad geométrica en la cual se miden las cantidades involucradas)"* (Pág. 19).

Al respecto Luis Ricalde y Maribel Anacona (1999), en su libro *matemáticas y realidad*, afirman que esta separación entre lo aritmético y geométrico

> "*se debe fundamentalmente a la naturaleza de los conceptos de número y magnitud. La magnitud es infinitamente divisible, el número es finamente divisible, el número es discreto, la magnitud es continua. Sin embargo, lo importante es que en el fondo Euclides comprende que la teoría de proporciones es la salida conceptual a la cuestión de establecer relaciones cuantitativas*" (Pág. 82 y 83)

Es de esta manera como los griegos logran superar la no aceptación de los racionales e irracionales como números a través de las proporciones; es así como Euclides elabora en el capitulo V de los elementos, un tratado no solo de geometría sino de magnitudes y sus relaciones. La otra teoría expuesta en el libro VII, el primero de los libros aritméticos de Euclides, tiene un carácter restringido a los números y constituye el cimiento de una teoría de la divisibilidad, expuesta con el rigor característico de Euclides.
Lo destacable en esto es que Euclides desarrolló dos tareas independientes de proporciones, una para números y otra para magnitudes, "en el único caso en que establece una relación entre las dos, es cuando en la quinta proposición del libro X, demuestra que las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón de un número a otro" (ANACONA y RECALDE 1999, Pág. 82).

Ahora se da una mirada a lo expresado por Euclides en los libros V y VII, para dar luego algunas interpretaciones sobre el papel que jugaron las magnitudes en las matemáticas griegas y luego se verá como a través de un método para calcular áreas y volúmenes los griegos logran resolver los problemas sobre el infinito, este método es conocido como el método de exhaución.

Según Luis Recalde y Maribel Anacona (1999),

> *"la idea central del capitulo V se enmarca en la comparación entre magnitudes. Aquí se debe avanzar con mucho cuidado, las operaciones no son inmediatas. Con la suma de magnitudes no hay problemas, pues se trata sencillamente de suma de segmentos. El problema es con la multiplicación y división. Los conceptos básicos empleados por Euclides para comparar las magnitudes son proporción y razón".* (Pág. 86)

Se analizaran algunos resultados del capítulo V

"***Definición 1***: *se dice que una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.*

Definición 2: *Se dice que una magnitud es múltiplo de otra menor cuando es medida por ella.*

Definición 3: *Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad.*

Definición 4: *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere la otra.*

Definición 5: *Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con un a cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.*

Definición 6: *Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales."* (RICALDE y ANACONA 1999. Pág. 86, 88*).*

Frente al concepto de magnitud (concepto que aparece en las seis definiciones anteriores), se debe tomar posición, pues es sobre éste concepto que descansan todos los fundamentos euclidianos, frente a este tema Luis Recalde y Maribel Anacona (1999), aclaran que "Euclides no definió lo que él entiende por magnitud, sin embargo se asume (y así se percibe en los elementos) que Euclides conserva la concepción Aristotélica de magnitud, como un pedazo de recta "macizo", representante ideal de lo continuo". (Pág. 86).

Del mismo modo MANKIEWICZ, Richard (2000) explica que el concepto de magnitud en Euclides

> *"se uso para determinar cualquier objeto geométrico, el segmento de una línea o bien una figura, y los teoremas tratan las construcciones y las relaciones entre dichas magnitudes. No hay ninguna referencia a conceptos numéricos como el de*

> *longitud, así, por ejemplo, un cuadrado es tratado como una construcción geométrica originada a partir del segmento de una línea. Euclides no dice que el área del cuadrado sea el producto de sus lados, esta aseveración llegara mas tarde. Las magnitudes son, pues, el concepto mas elemental de los elementos, la base del resto de la obra Euclidiana"* (Pág. 25,26).

Por otra parte el verbo medir mencionado por Euclides en las definiciones 1 y 2, significa que la magnitud más grande es múltiplo entero de la más pequeña. En términos modernos, la *definición 1* establece que A es una parte de B, si existe un número natural *n* tal que B = n . A; en este caso, la *definición 2* establece que B es múltiplo de A. (RECALDE y ANACONA, 1999. Pág. 86).

Con respecto a la definición 3 es necesario indagar sobre el término razón el cual es utilizado como enlace para resolver el problema de los racionales en los Griegos, sobre esta cuestión Luis Recalde y Maribel Anacona (1999) aclaran que:

> *"La palabra razón va más allá de lo cuantitativo y abarca los aspectos esenciales de la racionalidad griega. Mas concretamente la razón es un proceso de comparación entre magnitudes (segmentos, por ejemplo); pero no se constituye en si misma como algo acabado. En contraste con esto, a pesar que consideramos la división como un proceso, sabemos que el cociente a/b es a su vez un numero*
>
> *En la definición 3, Euclides la toma como extensión del sentido típico de sus antecesores, o sea aquello expresable y representable numéricamente por comparación de la magnitud tomada como unidad". (*Pág. 87*).*

Continuando con este análisis la cuarta definición se refiere a la propiedad arquimediana, la cual en términos de Godino (2002), corresponde a que: "*dados a y b, con a distinta de la cantidad nula, existe un número n $\in$ N, tal que, n.a > b"* (Pág. 22)

Esta propiedad es de vital importancia, debido a que proporciona una de las bases para construir el concepto de magnitud (longitud); en otros términos esta propiedad dice, "*que todos los segmentos son de un orden de magnitud comparable; o sea, que no existe ninguna magnitud infinitamente pequeña, ni infinitamente grande*" (RECALDE y ANACONA 1999. Pág. 88)

Con respecto, a la definición 5, según lo expresado por RECALDE, Luis, y ANACONA, Maribel (1999)

> *"es esta la definición mas esencial del capitulo V. Mirada desde hoy podemos decir que en ella se encuentra un esbozo de caracterización de los números positivos.*
>
> *En términos modernos dice lo siguiente:*

Sean cuatro magnitudes A, B, C y D , se dice que A y B están en la misma razón que C y D cuando para todo entero n y m, se tienen las implicaciones siguientes, según los tres únicos casos posibles :

1. *Si $nA > mB$ entonces, $nC > mD$.*
2. *Si $nA = mB$ entonces, $nC = nD$*
3. *Si $nA < mB$ entonces, $nC < mD$". (*Pág. 88*).*

Para terminar el análisis sobre el capítulo V es importante mencionar que la *definición 6* es una de las bases sobre las cuales Euclides y en general las matemáticas griegas, permiten entender el racional como una proporción de magnitudes y superar al menos para las matemáticas de su tiempo el problema frente a estos números.

Ahora se le dará una mirada al capitulo VII observando allí el concepto de unidad y su relación con el número, observando de cierta manera como para Euclides el concepto de número se construye vía las magnitudes.

Según Luis Recalde y Maribel Anacona (1999) "El capitulo VII, tiene un carácter restringido a los números y constituye el cimiento de una teoría de la divisibilidad, expuesta con el rigor característico de Euclides".

En el libro VII se encuentran las siguientes definiciones:

1. *"Unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno.*
2. *Número es una colección de unidades.*
3. *Un número es una parte del otro cuando el mayor divide al menor.*
4. *Un número es fracción de otro cuando no lo mide." (*RECALDE y ANACONA 1999. Pág. 84).

Se ofrecen ahora algunas interpretaciones sobre lo expuesto en estas cuatro definiciones:
La definición 1 sugiere que la unidad para los Griegos no podía ser dividida, de allí el problema con las fracciones unitarias, lo importante en esta definición es que Euclides define el número a través de una unidad preestablecida, insinuando la idea de que es vía las magnitudes como el concepto de número cobra sentido, (ya en el capítulo X, vuelve explicita esta relación).

La definición 2 crea confusión, en el sentido de que la unidad no puede verse como número, en las palabras de Luis Recalde y Maribel Anacona (1999):

> *"Es importante anotar que la unidad no se puede considerar como un número bajo la definición dos. La no aceptación de la unidad como número, se debe a que el número surge del proceso de adicionar paulatinamente unidades, y la unidad como tal, se escapa a este proceso"* (Pág. 85).

Continuando con este análisis, la *definición 4* no puede entenderse como una fracción, debido a que Euclides, no tenía una definición para la división de magnitudes, como explica Luis Recalde y Maribel Anacona (1999), la *definición 4* debe entenderse como la "*división*" inexacta, es decir, "cuando un número no divide a otro".

Frente a la *definición 3* solo resta por decir que esta es la "definición típica de divisibilidad" (RECALDE y ANACONA 1999).
Para concluir con este análisis sobre el papel de las magnitudes en los griegos, es necesario resaltar que los griegos construyeron (como se ha mencionado) el concepto de número vía las magnitudes, desarrollando a su vez, a través de estas, una construcción teórica sobre las proporciones y razones.

Se continúa ahora con el papel de la magnitud área en los griegos, para ello se explorará el método de exhaución, el cual es uno de los aspectos que lleva a los griegos a superar el problema del infinito.

Para Andrés de la Torre (2003):

> *"Los argumentos de Zenón tuvieron como resultado que los matemáticos Griegos hicieran a un lado el infinito y crearan el método de exhaución para probar que dos magnitudes son iguales (método que emplearon en sus cálculos de áreas y volúmenes). El método de exhaución es la manera griega de evitar el paso al limite*." (Pág. 44).

Esta definición se refuerza con lo expresado por Mankiewise (2000), para este autor

> *"en los griegos la crisis de los inconmensurables, se pudo salvar gracias a la habilidad para manipular sus productos y magnitudes mediante dos métodos: las proporciones y el método de exhaución eudoxianas. De hecho, Euclides, cita reglas para las proporciones, así como sus condiciones de uso. La preferencia de números sobre fracciones, tuvo algunas ventajas pues permitía establecer una regla como: el espacio de las superficies de los círculos es proporcional a su diámetro; y emplearla en diversos teoremas sin recurrir al uso de π, que es irracional". (*Pág. 29*)*

Es así como el método de exhaución, proporciona el sistema con el cual los griegos "calculan áreas mediante reiteradas aproximaciones" (MANKIEWISE, Richard, 2000). Que lleva a los griegos a resolver múltiples problemas superando la barrera de los inconmensurables que aparecen en problemas de calculo de áreas.

Se ha visto como el método de exhaución, fue uno de los aspectos utilizados por los griegos para superar el problema del infinito actual, se expondrá ahora explícitamente el método de exhaución y qué otras aplicaciones tuvo en las matemáticas griegas

A Eudoxio de Cnido (345-408 a C) es quien se le debe la creación del método de exhaución, según María del Olmo (1993) en los elementos se aplica el método de exhaución en cuatro casos:

- *"Proporcionalidad entre los círculos y los cuadrados construidos sobre los diámetros respectivos.*
- *Proporcionalidad entre esferas y cubos construidos sobre esos diámetros.*
- *Equivalencia entre la pirámide y la tercera parte del prisma de igual base.*
- *La misma equivalencia entre cilindro y cono". (*Pág. 160*).*

Este método a su vez se utilizo para abordar "el problema de calcular el área de figuras planas no poligonales" (OLMO, María Del, 1993).

Arquímedes es quien estructura el método de exhaución, como afirma María del Olmo (1993).

> "Según Arquímedes fue Eudoxio quien enuncio el conocido hoy como axioma de Arquímedes, que sirve de base para el método de exhaución… A partir de este axioma se puede demostrar, por reducción al absurdo, la siguiente proposición que fundamenta el método de exhaución:
>
> *"**Si de cualquier cantidad de magnitud, sustraemos una parte no menor de su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una parte no menor de su mitad, y si continuamos repitiendo este procedimiento de sustracción, terminamos por obtener como resto una cantidad de magnitud menor que cualquier cantidad de magnitud del mismo tipo de la de antemano**.*
> *Esta proposición es equivalente a la propiedad que afirma que si m es una cantidad de magnitud dada, E es otra cantidad de magnitud arbitraria, dada también, y r es un número tal que 1/2 es menor que r y r es menor que 1, entonces podemos encontrar un número natural N tal que:*
> *$m(1-r)^n < E$: $n>N$, es decir,* $\lim_{n\to\infty} m(1-r)^n = 0$ *."*(Pág. 159).

Es así como Arquímedes adopto el método de exhaución logrando resolver múltiples problemas de áreas, se destaca dentro de sus aportes más importantes una aproximación al número Pi (π), el área de la esfera, el área de la circunferencia.

Para terminar con el aporte que hacen los griegos frente a la magnitud área, es necesario mencionar que Herón en su texto *"Métrica"* continuando con los trabajos de Arquímedes da un enfoque práctico al cálculo de áreas. En palabras de María del Olmo (1993):

> *"Herón trabaja con sus valores numéricos de áreas y volúmenes. Aproxima las raíces irracionales mediante un número racional y utiliza los resultados de geómetras griegos,*

> *entre ellos los de Arquímedes. Se puede decir que su propósito es, siempre, calcular algo (continuando con la tradición de babilonia y Egipto)".* (Pág. 160).

En resumen las matemáticas griegas proporcionan una de las fuentes teóricas más importantes que se conocen frente a las magnitudes, donde éstas juegan un papel fundamental en la construcción de conceptos tales como: Número, razón, proporción. Permitiendo de cierto modo a través de estas magnitudes superar el problema de los racionales y los irracionales; a su vez la discusión entre lo continuo - discreto.
Por otra parte el método de exhaución (método para calcular áreas y volúmenes) permitió solucionar problemas de inconmensurabilidad influyendo en la superación de la anterior crisis (continuo – discreto).

Aun así los griegos dejaron algunos vacíos conceptuales frente a los números racionales e irracionales al no considerarlos como números, es por esta razón que se hace necesario para completar este análisis epistemológico sobre las magnitudes y las áreas mencionar los aportes de los árabes, los aportes conceptuales expuestos por Simón Steven (Siglo XVI) y terminando, con el papel social de la medición (siglo XVII y XIX).

En el medioevo la idea que se tenía sobre la relación magnitud y número era similar a la concebida por los griegos, aunque había cierto manejo de fracciones y raíces. Por esta razón no se ve la necesidad de profundizar sobre esta época.

Por otra parte los árabes conocían ya las matemáticas de sus antecesores griegos, babilonios, egipcios, hindúes y chinos, aportando a los sistemas numéricos que estas civilizaciones manejaban. Uno de los mayores aportes de los árabes fue la inclusión del cero como número lo que les permitió avanzar en el manejo de las fracciones decimales, en los sistemas posiciónales, en los inconmensurables, en el calculo de raíces. Además los árabes "tuvieron un tratamiento hacia los problemas algebraicos más concretamente en la búsqueda de raíces polinómicas (RECALDE y ANACONA. 1999).

De esta forma los árabes por medio de estrategias algebraicas, la inclusión del cero, la aceptación de los números racionales e irracionales logran aportar notablemente al acercamiento entre el número y la magnitud. En palabras de Luis Recalde y Maribel Anacona 1999:

> *"históricamente se da así, con los árabes, un paso adelante en el acercamiento del número a la magnitud. Las raíces inexactas no provienen de la geometría de lo inconmensurable sino que surgen de la dinámica propia de la resolución de ecuaciones… La concepción de número como pluralidad de unidades, empezaba a ser insuficiente pues dejaba afuera algunas relaciones importantes. En este sentido, el matemático árabe Nasireddin (siglo XIII) en su tratado del cuadrilátero completo, llamaba la atención al respecto y no encontraba objeción en*

> *denominar números a las razones entre magnitudes continuas”.* (pág. 98)

Con el paso del tiempo los aportes de Bombelli (Siglo XVI) sobre los algoritmos para resolver ecuaciones cúbicas y el acercamiento al cálculo con los números imaginarios. Surge la necesidad en la historia de las matemáticas de “crear una simbología general de representación a las fracciones decimales que aparecen ya sea en los radicales o en las divisiones inexactas. Este es uno de los aspectos por los cuales cobra mucho sentido la obra del matemático Simón Steven. (RICALDE y ANACONA 1999, Pág. 101)

Es Steven quien preocupado por las proporciones Eudoxianas logra establecer como número los racionales. Como afirma Luis Recalde y Maribel Anacona (1999):

> *“su contribución ha sido enorme al desarrollo del número y va mucho mas allá de la simple introducción en las matemáticas europeas del aparato de las fracciones decimales, como aparece descuidadamente en algunos textos de historia de las matemáticas”* (Pág. 102)

Por consiguiente, para Steven el concepto de número era de vital importancia pues a través de ello logra darle un nuevo enfoque a la teoría de la proporciones propuesta por los griegos y darle un status matemático a los números racionales. La mayor contribución de Steven acerca de las magnitudes esta expuesta en el libro *L’Arithmetique*, “texto escrito en francés y publicado en 1585 donde se incluye entre otros un tratado de magnitudes inconmensurables con la explicación de libro X de Euclides”. (MEAVILLA. 2005)

Además en este libro Steven (1585) expresa su preocupación por el número y la unidad,

> *“Precisamente una de las características de la unidad, la de ser indivisible perturbaba enormemente a Steven, interesado en la naturaleza de las fracciones. Steven sabia que cargar al uno de ontología numérica, le abría la posibilidad de divisibilidad, y le daba vía libre a la incorporación de las fracciones como estatus de números”.* (RECALDE y ANACONA 1999. Pág. 102)

Es de esta manera como a través de la división de la unidad Steven logra establecer las fracciones unitarias como número y por otra parte la aceptación sobre el infinito continuo. En términos de Luis Recalde y Maribel Anacona (1999): “Para Steven la unidad puede dividirse una vez, se puede seguir dividiendo indefinidamente, de la misma manera que las magnitudes continuas. De esta forma al cambiar el estatus ontológico del uno, automáticamente rompe algunas limitaciones de su antigua condición”.

Para terminar con el aporte que Steven ofrece a las magnitudes es importante mencionar los tres tipos de números que el proponía en su libro *L'Arithmetique*

*1) "**Los aritméticos**, que eran los números abstractos.*

*2) **Los geométricos**, asociados a segmentos rectilíneos, cuadrados, cubos y bloques rectangulares, etc.*

*3) **Los algebraicos**, combinaciones lineales de números geométricos".* (MEAVILLA. 2005)

Con base en esto Steven logra acercar la geometría, la aritmética y el álgebra, dando un enfoque sistémico a las matemáticas de su época."

En síntesis los aportes que hace Simón Steven a las magnitudes fue que este pudo transformar la teoría de las proporciones eudoxianas al establecimiento de números racionales mostrando con ello la existencia de las magnitudes continuas, además cómo a través de las magnitudes se deben entender los números. Logrando así históricamente empezar a "superar la barrera que separa los números de las magnitudes" (RECALDE y ANACONA. 1999.)

Por último se considera que papel ha jugado las magnitudes y las áreas ya no en un ámbito matemático sino en un ámbito social. Para ello se tendrá en cuenta el papel que jugo la medición desde la época feudal (siglo XVIII) hasta el siglo XIX.

Según Kula (1980) desde la época de Carlos Magno hasta el siglo XVIII en Francia la unificación de una medida común para todos los ciudadanos, estuvo plagada por diversos procesos. El primero era de poder, donde tanto reyes como señores feudales tenían un patrón establecido que utilizaban bajo su conveniencia; otro factor era el de las injusticias que se presentaban bajo la diversidad de distintos patrones. Según este mismo autor el papel social de la medición en el siglo XVII constituía parte integral del sistema económico y social, por ejemplo las transacciones de compra y venta, la recolección de granos, la lucha por una unificación de una medida común para todos los sectores sociales, la delimitación de los terrenos…Precisamente frente a la delimitación de los terrenos la magnitud área jugaba un papel importante en palabras de Wiltold Kula (1980):

> *"La interminable complicación de las medidas francesas sobrepasa cualquier imaginación. Se diferencian no solo de provincia en provincia y casi de ciudad en ciudad. Estas diferencias, que llevan a la desaparición, se manifiestan tanto en la nomenclatura como en los tamaños, tanto en la superficie como el volumen. A ello se le añade la general ignorancia de los campesinos…Los conocimientos del campesino francés se limitan exclusivamente a las cuestiones de su granja y de su mercado"* (Pág. 309)

Luego de darse tantos abusos en el comercio por causa de la medición no unificada; en Francia (1789) surge la preocupación por unificar las pesas y las medidas, básicamente según Kula de tres sectores: Antiseñoriales, comerciales y nacionales.

De esta manera en cada uno de estos sectores se comienzan a establecer patrones que estabilicen los problemas. Al no haber una unidad común entre todas las mediciones. Aun así en algunos sectores todavía se presentaban abusos al no haber una exigencia por parte de los reyes franceses.
La petición por una única medida y pesa solo pudo resolverse en (1812) cuando se impone en Paris el establecimiento del sistema métrico decimal, produciendo en el pueblo grandes preocupaciones, ya que para ellos eran demasiado complejas de entender "a pesar de la tabla de conversiones colocada de tienda en tienda". Wiltold Kula (1980).

Con relación a esto Kula (1980) dice:

> *"se trato de ilustrar a los ciudadanos pobres por todos los medios posibles. En los lugares más populosos de Paris el metro estaba expuesto públicamente a fin de solucionar las discrepancias. Las escuelas debían enseñar el sistema métrico. Se fomentaba la redacción de manuales sobre el tema que eran luego revisados. En Paris y otras ciudades se organizaban cursos públicos de enseñanza del sistema métrico"* (Pág. 409)

A pesar de esto no hubo grandes avances, pues el sistema decimal y la nomenclatura era una de las grandes preocupaciones y dificultades, sobre todo para el pueblo, quienes se les dificultaban "aprender las fracciones decimales y el manejo de la coma". El pueblo pedía que no se suprimiera la nomenclatura tradicional, pues la nueva nomenclatura era demasiado compleja y las diferencias fonéticas eran evidentes, además de que "los sistemas tradicionales de medición solían ser funcionales.
Al respecto Kula (1980) agrega:

> *"Pasar de un sistema a otro de categorías absolutamente inmutables, en el que deben relacionarse todas las diferencias de lo medido significa una revolución mental. El concepto de medida, la manera de comprenderla y hasta su magnitud concreta son categorías fundamentales del pensamiento*".

La iniciativa de Francia (1799) por adoptar el sistema métrico decimal, se comenzó a esparcir por todo el continente europeo llegando a España en 1849.

Es importante aclarar que durante los siglos XVII al XIX, en un contexto matemático la evolución del concepto de área llegó a tener aportaciones importantes en el cálculo integral.

Con los aportes de Cavalieri (1635) sobre el principio del área hasta la inclusión de la integral de Riemann, el concepto de área ha estado presente en todos los aspectos que componen la estructura matemática.

En síntesis se ha visto como el proceso de medición y medición de áreas ha estado presente en los orígenes de la civilización, donde desde el neolítico, ya se tenían indicios sobre el manejo de superficies, además en sociedades más complejas la lucha por delimitar sus tierras y construir sus edificaciones estuvo plagada por mediciones de áreas y manejo de unidades de medida.
Los griegos dieron el aporte más significativo a las magnitudes, pues a éstos se les debe la construcción teórica de la magnitud por medio de su teoría de proporciones y el método de exhaución. Es precisamente sobre estos dos últimos aspectos como los griegos logran superar el problema de la continuidad y a su vez evitar el infinito.
Sobre la discusión de un infinito continuo, los árabes dan aportes significativos frente a esta cuestión, haciendo más fuerte la relación entre el número y la magnitud (relación que empezó a verse desde los griegos).
La discusión de un infinito continuo se resuelve con los aportes del matemático Simón Steven quien introduce a las matemáticas el racional como número, haciendo más intima la relación del número con las magnitudes.
Ya entre los siglos XVIII y XIX, se han retomado aspectos sociales de la medición viendo que sin éstas las relaciones sociales y comerciales no hubieran tenido éxito, además se ha visto como ha sido traumático el establecimiento de una única unidad para realizar mediciones en Francia, país en el que existían diferentes unidades para medir áreas y otras magnitudes.

En conclusión es de vital importancia conocer los obstáculos epistemológicos que se han tenido en los orígenes de las magnitudes y las áreas, pues es desde allí como se pueden abordar aspectos de la enseñanza sobre estos conceptos y hacer mejores aportes didácticos hacia el mejoramiento de estrategias que nos lleven a acercarnos al concepto de área.

1.5 MARCO TEORICO

Frente a la magnitud área se abordan los conceptos y relaciones más importantes relativos a esta magnitud. Para tal fin se definen matemática y cognitivamente tales conceptos; más que una lista de definiciones es una posición teórica que guía el trabajo de investigación. Los conceptos que se definen son: Magnitud, Cantidad de magnitud, Unidad de medida, Unidades convencionales y no convencionales, Medida, Magnitud Área, Magnitud Continua, Magnitud Discreta, Medida de Área, Estimación, Rango, Orden, Equivalencia, Superficie, Área, Perímetro.

A continuación se da la descripción de los conceptos ya mencionados inicialmente desde una perspectiva matemática y seguido de esto desde el punto de vista cognitivo:

Se puede afirmar que algebraicamente la **Magnitud** se define como un

> *"conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y su medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales (...) En consecuencia, la definición más general posible (cuantitativa y extensiva) es la siguiente: La magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado formado por clases de equivalencia que son sus cantidades:*
> *Dado un conjunto E, no vacío, se constituye en una magnitud, si en él puede definirse una relación de equivalencia (=) y una operación interna suma $+$; con las condiciones, es reflexiva, simétrica y transitiva para la relación de equivalencia, y asociativa, conmutativa y modulativa para la operación interna $+$ ".* (GODINO. 2002 Pág. 9, 23),

En otras palabras Se debe empezar por definir un conjunto E E que cumple las condiciones:

1. Entre ellos se puede definir una relación de igualdad (=).
2. La relación anterior constituye una relación de equivalencia porque:
   a. Es reflexiva $\forall e \in E \to e = e$
   b. Es simétrica $\forall e_1, e_2 \in E \to e_1 = e_2 \Rightarrow e_2 = e_1$
   c. Es transitiva $\forall e_1, e_2, e_3 \in E \to e_1 = e_2$ y $e_2 = e_3 \Rightarrow e_1 = e_3 \forall e_1, e_2, e_3$

3. En el conjunto E definimos una operación interna llamada SUMA de elementos:

$$\forall e_1, e_2 \in E \Rightarrow \exists e_1 + e_2 \Rightarrow e_3 \in E$$

4. La operación interna SUMA $+$ en E tiene las propiedades:
   a. Uniforme: $\forall e_1, e_2 \in E$

$$\forall d_1, d_2 \in E \to e_1 = e_2$$

$$d_1 = d_2 \Rightarrow e_1 + d_1 = e_2 + d_2$$

b. Conmutativa: $\forall e_1, e_2 \in E \rightarrow e_1 + e_2 = e_2 + e_1$

c. Asociativa: $\forall e_1, e_2, e_3 \in E \rightarrow \ e_1 + e_2 \ + e_3 = e_1 + \ e_2 + e_3$

d. Modular: $\exists 0 \in E / \forall e \in E \rightarrow 0 + e = e + 0 = e$.

Para definir la cantidad y la unidad "Se fija, en primer lugar una cantidad u, que se llame unidad, y posteriormente, a cada cantidad de magnitud se le asigna un número por comparación con la unidad u, es decir, se establece una aplicación, que se notará $med_u E$, del conjunto que define la magnitud E en el semianillo de medición $S \ E$

$$med_u : E \rightarrow S(E)$$
$$e \rightarrow med_u(e)$$

El valor $med_u(e) = r \ \ sii \ e = ru$

(r es el número de veces que hay que "iterar" u para obtener e)

Esta aplicación es un isomorfismo de semigrupos, es decir, es una aplicación biyectiva compatible con las operaciones definidas en E y $S(E)$ respectivamente y, por tanto verifica que:

$$med_u \ \ e + d \ \ = med_u \ \ e \ \ + med_u$$
$$med_u \ \ re \ \ = r med_u \ \ e$$

También conserva el orden de E, si u es positiva, si $e \leq d$, entonces $med_u \ \ e \ \ \leq med_u \ \ d$, y lo invierte si u es negativa, $e \leq d$, entonces $med_u \ \ e \ \ \geq med_u \ \ d$".

(OLMO y otros 1997. Pág. 142)

Se concluye entonces que si en el conjunto E se ha definido la relación de equivalencia $= \ \ 1,2$ y la operación SUMA $+ \ \ 3$ con las propiedades (4), los elementos del conjunto definen una **MAGNITUD**, entendiendo por tal la cualidad común que hace que los elementos de E sean igualables y sumables. (LUENGO 1990. Pág. 48)

Queda definida entonces la magnitud desde el punto de vista algebraico como un "semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado" (SEGOVIA y otros. 2000. Pág. 121)

Por otra parte las magnitudes pueden ser matemáticamente **Magnitudes discretas y continuas** pueden definirse como la magnitud E que se dice es "discreta" si existe un intervalo abierto (r, t) = { q є Q / r < q < t } ⊂ Q disjunto con el semianillo de medición S (E). En este caso, cualquier cantidad se puede expresar como múltiplo de una determinada que se llama unidad de medida. Las magnitudes que no son discretas se llaman continuas. (GODINO, Pág. 24)

Ahora se definirán también matemáticamente los conceptos de unidad de medida y la cantidad de magnitud o medida a partir de la definición anterior de magnitud y teniendo en cuenta las mismas condiciones algebraicas que componen la magnitud, partiendo del conjunto E de la relación de igual, operación interna y propiedades. (Pág.48 y 49)

Generalmente en la actividad de medir, un número va seguido de la unidad en la que se ha expresado la medida. La **Unidad de Medida** es pues la expresión antecedida por ese número.

$$1 \quad \exists u \in E / \forall a \in E \Rightarrow \exists r \in R^{+} / a = r * u$$

La unidad será ahora u, es decir ese elemento de E que multiplicado por el adecuado número real nos puede dar cualquier cantidad. Desde este punto de vista y afirmando la expresión inicial a cualquier cantidad fija se le llama **Unidad.**

Con respecto al concepto de **Cantidad de Magnitud** o **MEDIDA**, se definirá como:

Dadas las cantidades *c* (cantidad cualquiera) y u (unidad) se verifica la expresión 1

A r se le llama medida de c respecto de la unidad u. La notación mas habitual es: $m_u(c) = r$" (FIOL y otro Pág. 52. 1990)

Específicamente la magnitud área también cumple con las propiedades algebraicas definidas anteriormente. Así queda definida ésta magnitud desde el punto de vista algebraico como "un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado" (SEGOVIA y otros 2000, Pág. 121), además esta magnitud cumple con algunas propiedades específicas que a continuación se definen como las propiedades de descomposición de un polígono, congruencia, y equivalencia. Según Maria de los Ángeles de Olmo y otros (1997) en su texto superficie y volumen, afirma que:

> *"en la formalización del concepto de **ÁREA** se parte de la equivalencia de polígonos. Para ello se trabajan varias definiciones.*
>
> ***Descomposición de un polígono P** en polígonos P_1, P_2,…,P_n y escribiremos $P = P_1 \oplus ... \oplus P_n$ si se verifica que $P = P_1 \cup ... \cup P_n$ y cada $P_1 ..., P_n$ son no solapados con los restantes (no existe ningún triangulo contenido en la intersección)".* (Pág 142)

Se concluye entonces que

“si una región R se descompone en varias subregiones disjuntas, A, B,… F, entonces el área de R es la suma de las áreas de las subregiones: Área (R) = área (A) + área (B) + área (F)”. (GODINO 2002. Pág. 55)

***“Congruencia**: Dos polígonos P y P’ se dicen congruentes o iguales si pueden establecerse ordenaciones de los vértices de sus respectivas poligonales borde* $A_1, A_2..., A_n$ *y* $A'_1, A'_2..., A'_n$ *que verifiquen las siguientes condiciones:*

$i) m = n$

$ii) \overline{A'_i A'_{i+1}} = \overline{A'_i A'_{i+1}}$, *para* $i = 1, 2..., n-1$

$iii) A_i = A'_i$, *para* $i = 1, 2..., n$

Es decir, P y P’ son congruentes si tienen sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes o iguales.
También se puede definir que dos polígonos son congruentes o iguales, si existe un movimiento del plano que transforma uno en otro. Esta definición es equivalente a la anterior.
Se dice que la descomposición del polígono P,

$$P = P'_1 \oplus ... \oplus P'_n$$

Es posterior a la descomposición del mismo polígono

$$P = P_1 \oplus ... \oplus P_n$$

Si cada $P'_j (j = 1, ..., m)$ *esta contenido en algún* $P_i (i = 1, ..., n)$.
Dadas dos descomposiciones de un polígono P en polígonos convexos, siempre existe otra descomposición de un polígono P en polígonos convexos. Posterior a ambas, la formada por la “intersección” de ellas”. (OLMO y otros 1997. Pág. 143)

Se concluye que, “si una región R es congruente con una región S, entonces ambas regiones tienen la misma área:
Área (R) = área (S)”. (GODINO 2002. Pág. 55)

***“Equivalencia:** El polígono P es equivalente al Q (P $\equiv$ Q) se admiten descomposiciones de polígonos convexos*
$P = P_1 \oplus ... \oplus P_n$: $Q = Q_1 \oplus ... \oplus Q_n$
Que verifiquen que m = n y que $P_i = Q_i$, $i = 1, 2 ... n$.
La idea de esta definición es que si cortamos de cierto modo la figura P en un número finito de partes, con ellas podemos componer la figura Q. Esta condición es equivalente a que dos polígonos son equivalentes si adjuntándoles a algo un mismo polígono, no solapado con ellos, obtenemos figuras congruentes. (Esta propiedad se conoce como equiadición.

La equivalencia de polígonos es una relación de equivalencia, a cada clase de equivalencia se le llama polígono general. Se denotan por p, q, ...
Dados dos polígonos generales, p y q, existen polígonos consecutivos, P y Q, tales que $[P] = p$ *y* $[Q] = q$*, lo cual permite definir la suma de dos polígonos generales:*
$p + q = [P] + [Q] = [P \cup Q]$ “. (OLMO y otros 1997. Pág. 143-144)

Por ultimo se definirán los conceptos matemáticos de superficie y perímetro desde lo expresado por Juan Godino (2002).

Desde el punto de vista de las matemáticas, Juan Godino (2002), dice que es posible dar una definición de **Perímetro** como: “la longitud de una curva cerrada plana o polígono se dice que es el perímetro de dicha curva o polígono”

A su vez este mismo autor dice que “**Superficie** se designa a la forma de un cuerpo o figura (superficie plana, albeada, triangular)” (Godino 2002)

Hasta ahora se han definido los conceptos asociados al concepto de magnitud área desde un punto de vista matemático, se definirán ahora algunos de los anteriores conceptos desde el punto de vista cognitivo y otros no incluidos aún, ya que por su condición no pueden ser definidos matemáticamente.

Desde el punto de vista cognitivo se habla de **Magnitud**, para referirse a los “atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, área, peso, densidad, etc.) o también de manera discreta (el número de personas); las cantidades son los valores de dichas variables.

En la vida cotidiana y las ciencias experimentales, se habla de **Magnitud**, para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomas diferentes valores numéricos” (GODINO 2002. Pág. 9- 10)

Desde el punto de vista de Beltrán Yolanda y Díaz Luz (2003), una **Magnitud** “es un atributo o propiedad de colecciones de objetos percibida sin tener en cuenta otras propiedades que puedan presentar dichos objetos. Es importante destacar algunos aspectos a tener en cuenta para conocer y manejar una magnitud a saber: percepción de una magnitud, conservación de una magnitud, capacidad de medir, ordenación respecto a una magnitud” (Pág. 2).

En cuanto a los conceptos de **Cantidad de la Magnitud y Unidad de Medida**, Isidoro Segovia y otros (2000) afirman que el primero

“se refiere a la característica o cualidad de un objeto que se puede valorar numéricamente, siempre en relación a una unidad. Por redundancia, también los números son cantidades, el segundo se refiere a la cantidad de referencia que se toma para hacer la valoración del resto de las cantidades de su

> *especie. La unidad es siempre un convenio, que puede llegar a tener fuerza legal" (Pág. 120)*

Según los lineamientos curriculares (1998), los conceptos de **Rango** y **Orden de las unidades,** están ligados a la selección de unidades. De este modo, el **Orden de la unidad** se define desde aquí como:
"*una estimación perceptual (…) ligada al significado y a la familiaridad que tienen las personas con las unidades de medida y con cierta información (…) de procesos y objetos conocidos en los cuales el aspecto seleccionado por la magnitud, tenga un valor fácil de recordar"* (MEN, 1998 Pág. 66)

Del mismo modo, el **Rango de la unidad** puede ser entendido como "*un franja más amplia que el orden de magnitud*" (MEN, 1998 Pág. 66), ligado al significado que tiene una persona de elegir el tamaño de la unidad apropiada para estimar una magnitud.

Por otro lado, **las Unidades Estándar**, son aquellas que Juan Godino (2002) llama legales

> "*pues su uso ha sido regulado mediante leyes. Unidades entre las cuales se encuentran las establecidas por el sistema métrico decimal, que naturalmente es un sistema regular en el que los cambios se realizan de diez en diez (decimal) en las magnitudes decimales, y según potencias de diez en las otras magnitudes*" (Pág. 14)

Contrario a las unidades estándar, las **Unidades no Estándar** son aquellas con las que se puede medir bajo un sistema regular de unidades, pero no permiten comunicar los resultados de las medidas en cualquier lugar. Como ejemplo de estas unidades "se pueden citar piezas pequeñas de papel o madera (cada una debe pertenecer a un conjunto de piezas congruentes) en varias formas (triángulos, rectángulos, cuadrados, hexágonos…) pequeños baldosines de cerámica o madera, carpetas cuadradas…" (OLMO y otros 1993 Pág. 66)

Aunque los cuadrados son las unidades más cómodas para medir las áreas

> *"cualquier tesela, o baldosa que rellene convenientemente la región del plano que se desea medir se puede usar. Algunas **Unidades no Estándar** que se pueden reunir fácilmente en cantidad suficiente para las actividades de medición de área son:*
> *Recortes en papel o en cartulina, de cuadrados, triángulos, rectángulos. Las hojas de periódico son excelentes unidades para áreas grandes."* (GODINO 2002. Pág. 79)

Desde otro punto de vista la medida se puede definir desde los procesos de clasificación y seriación en este sentido:

> "***Medida** en una magnitud es un acto que los niños/as no pueden realizar de una forma fácil y espontánea. Esta dificultad*

se debe a que la realización del acto de medir requiere una gran experiencia en la práctica de estimaciones, clasificaciones y seriaciones, una vez establecido el atributo o la magnitud con respecto a la cual se va a medir. Por todo esto, parece necesario que los niños tomen contacto desde edades tempranas con situaciones que les lleven al descubrimiento de las magnitudes físicas, consideradas y percibidas como atributos o propiedades de colecciones de objetos que han sido comparados directamente a través de los sentidos o indirectamente con la ayuda de medios auxiliares o aparatos adecuados". (DE LA RIVA, 2005).

Específicamente para la medición de áreas Godino (2002) afirma que la medición de áreas consiste en "seleccionar una unidad apropiada de medida" o también como "fijar un procedimiento para cubrir o llenar la cantidad que se desea medir mediante una colección de unidades y expresar la medida mediante el número de unidades usadas" (Pág. 54)

Por su parte el concepto de magnitud **ÁREA**, este mismo autor lo aborda con una concepción cognitiva, interpretándola como "el número de unidades requeridas para cubrir una región plana. Usualmente se eligen cuadrados como unidad de área, pero cualquier forma que recubra la figura sin solapamientos ni agujeros puede utilizarse como unidad de medida, además la magnitud área también puede ser entendida como una medida de recubrimiento". (GODINO 2002. Pág. 55-71).

Uno de los conceptos fundamentales para la medición de área es el que se refiere a la estimación, frente a este concepto Isidoro Segovia y otros (2000), afirman que la **Estimación** se refiere *"al juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite"* (Pág. 18)

Según este mismo autor existen dos tipos de estimación

> *"**Estimación en cálculo:** calculo estimativo; en este caso, nos referimos únicamente a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados. "**Estimación en medida**"; en este caso, se refiere a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que merece el resultado de una medida"* (Pág. 18)

En resumen se han definido desde un punto de vista matemático (*magnitud, cantidad de magnitud o medida, unidad de medida, magnitud área, unidades convencionales y no convencionales, magnitud continua, magnitud discreta, perímetro y superficie*) y cognitivo (*Magnitud, cantidad de medida, unidad de medida, rango, orden, unidades estándar, unidades no estándar, magnitud área y estimación*) los conceptos más importantes que están relacionados con la magnitud área. Cada concepto se ha jerarquizado y así se encuentran definidos anteriormente desde los más generales hasta los más específicos.

Luego del análisis del sistema educativo, se encontró que la enseñanza del concepto de la magnitud área se le da un tratamiento aritmético y geométrico, también se evidencia que los estudiantes no saben resolver problemas que impliquen procesos de cálculo, estimación, descomposición de áreas, entre otros, se identifica además cómo la magnitud área históricamente ha tenido un papel importante en las civilizaciones antiguas, pues esta permitió resolver problemas cotidianos que se les presentaban y superar algunos obstáculos epistemológicos.

Del mismo modo se han identificado todos los conceptos relacionados con la magnitud área desde un punto de vista matemático y cognitivo, por tanto se puede proponer una investigación planteando el siguiente problema:

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Formulación del Problema:

Luego de hacer una revisión de los componentes educativos que intervienen dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje del pensamiento métrico y los sistemas de medidas, tales como: El currículo propuesto, el currículo desarrollado y el currículo alcanzado, el enfoque histórico y el marco teórico. En estos currículos se encontró un tratamiento inadecuado de la enseñanza de la magnitud área, además de las concepciones erróneas que manejan los maestros y alumnos sobre las magnitudes. Por esta razón se hace necesario la elaboración de un trabajo investigativo para a partir de éste, crear propuestas metodológicas que satisfagan las necesidades originadas por las frecuentes dificultades que se presentan al abordar el concepto de área.
Así, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿**Que estrategias pertinentes se pueden usar para enseñar el concepto de área**?, la cual será desarrollada a lo largo de este trabajo.

2.2 Objetivo General:

- Diseñar situaciones problema para la enseñanza del concepto de área, de modo que los estudiantes puedan acceder de manera significativa y práctica a este concepto.

2.2.1 Objetivos Específicos:

- Dar un enfoque metodológico y didáctico al trabajo de la magnitud área, a través de lo propuesto por los lineamientos curriculares.
- Elaborar estrategias metodológicas a partir de situaciones problema que permita a los alumnos distinguir la unidad, el patrón y el instrumento de medida cuando se realizan mediciones de área.
- Proporcionar herramientas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la magnitud área.

2.3 Preguntas de Investigación:

- ¿Qué papel cumple la composición y descomposición de figuras en la enseñanza del concepto de área?.

- ¿Es posible que la escasa utilización de instrumentos de medida, sean causas que originen las dificultades cognitivas en el aprendizaje de la medida del área?.
- ¿Cuáles son y por qué causa se originan dificultades cognitivas al establecer relaciones, comparaciones y equivalencias al enfrentarse a situaciones que impliquen el concepto de área?.
- ¿Por que resulta difícil para los alumnos que el área se conserve cuando las diversas partes de una figura plana se recomponen para formar otra figura diferente?
- ¿Qué estrategias se pueden emplear para garantizar un aprendizaje significativo en los alumnos sobre el concepto de área?.
- ¿Qué incidencia tiene el uso de técnicas de recubrimiento al concepto de área?

2.4 Justificación:

En el análisis que se ha realizado al currículo de matemáticas sobre la enseñanza y aprendizaje de la magnitud área se ha evidenciado las dificultades que los alumnos y los maestros han tenido con todo lo referente al concepto de magnitud área, dentro de lo cual se encuentra la confusión entre conceptos y la inadecuada enseñanza de dicha magnitud, además se ha visto históricamente cómo la magnitud y la magnitud área han sido fruto de un largo proceso de construcción. Por este motivo esta investigación cobra importancia, puesto que ha sido diseñada para servir como apoyo en la superación de dificultades de enseñanza aprendizaje frente a la medición y la estimación de la magnitud área además de ser una herramienta de intervención que los maestros pueden utilizar para aliviar las necesidades conceptuales tanto de ellos mismos como de sus alumnos.

De esta manera, esta investigación permite construir situaciones problema que contengan actividades de medición y estimación de áreas donde la idea es que el alumno podrá construir el concepto y aplicación de lo que implica recubrir una superficie con unidades estándar y no estándar, además el uso de la estimación permite que el estudiante maneje de una forma más adecuada las unidades de medida de la magnitud área y reconozca el tamaño de la unidad adecuada para medir una superficie. Por otra parte la estimación permite que el estudiante se aproxime a la medida del área sin la necesidad de que inicialmente lo haga con fórmulas.

3. ENFOQUE METODOLOGICO

La presente investigación tiene como metodología de trabajo la Ingeniería Didáctica, la cual se basa en “la realización didáctica”, entendida como un trabajo donde el investigador tenga en cuenta una concepción, una realización, una observación y un análisis de secuencias de enseñanzas hechas a partir de una experimentación en clase. Las investigaciones de este tipo se hacen dentro y fuera de la clase, dentro de esta se realiza desde la perspectiva interna con observaciones y análisis, y desde la externa a la clase a partir de Test, cuestionarios o entrevistas. En todo este trabajo, el investigador debe tener en cuenta tanto los conocimientos didácticos preestablecidos en el estudiante, como una fenomenotecnia (práctica investigativa en clase) y poner en práctica todas las construcciones teóricas.

Toda investigación de este tipo se estructura a partir de los siguientes niveles:

- Análisis preliminar.
- La concepción y el análisis a priori.
- Experimentación, análisis a posteriori y validación” (ARTIGUE.)

A continuación se definirán estos componentes:

1. Análisis preliminar.

Comprende los siguientes análisis:

- “Análisis epistemológico de la enseñanza.
- La enseñanza tradicional y sus efectos.
- Las dificultades y obstáculos.
- Objetivos de la investigación” (ARTIGUE)

.

Los anteriores análisis que conforman los preliminares ya se han desarrollado a partir de una revisión y observación general del currículo, rastreando los aspectos más importantes que tienen que ver con las magnitudes y las áreas, teniendo en cuenta tres componentes del currículo: el currículo propuesto, el currículo desarrollado y el currículo alcanzado.

En el primero se tuvo en cuenta la revisión y análisis de los Lineamientos y Estándares curriculares, en el segundo se hizo un análisis de textos escolares y las concepciones de maestros y alumnos, en el tercero se analizaron resultados específicos y generales de las pruebas TIMSS, ICFES y SABER.

Los obstáculos epistemológicos se han identificado a partir de una descripción histórica sobre las magnitudes y las áreas, observando allí los obstáculos que se han tenido a lo largo de la historia en la construcción de la magnitud. Además se ha incluido el trasfondo social de la medida, mostrando las dificultades que se tuvieron en la construcción del sistema métrico decimal en Francia, no solo por la dificultad del uso de las nuevas unidades que resultaron incomprensibles en términos matemáticos, sino también porque no implicó un desarraigo cultural.

En este nivel también se incluirá el marco teórico que comprende todos los conceptos que están asociados a la magnitud área, las definiciones que se incluyen están enfocadas desde dos aspectos, el aspecto matemático y el aspecto cognitivo.

2. La concepción y el análisis a priori.

"Este segundo nivel consiste en emplear estrategias de enseñanza cualitativa como por ejemplo: las herramientas informáticas, metodologías constructivitas, entre otras.
Aquí se identifican las variables de comando que son: las macrodidácticas y las microdidácticas, a las cuales ya se hizo referencia.
El análisis a priori por su parte, está ligado a una concepción local (clase), este análisis consiste en realizar un control entre el significado y las situaciones, basado en un conjunto de hipótesis que tenga el investigador, (si la situación dio resultado, si cognitivamente fue pertinente, si las hipótesis sirven).

El proceso investigativo a priori comprende:

- Una parte descriptiva: en la que interviene el profesor.
- Una parte predictiva: en la que el profesor no interviene sino que espera resultados del estudiante.
- Con estos dos aspectos se analiza la situación puesta en común para el estudiante, esta puesta en común debe ser constructivista y luego llegar a una institucionalización que apunta más al análisis a posteriori". (ARTIGUE 1995).

En este nivel de la investigación se elaboran tres situaciones problema que dan cuenta de las variables medición y estimación y las hipótesis de trabajo:

- La utilización de unidades no estándar en procesos de medición, permite una mayor comprensión de las unidades estándar y su sistema.
- El uso de la estimación es una forma de acercarse a la comprensión de las magnitudes y la medición, además permite conocer el estado del alumno frente al manejo y la medición de áreas.

3. Experimentación, análisis a posteriori y validación

"En este nivel se exponen ya los resultados que ha producido la investigación, se basa en el análisis de los datos obtenidos de los estudiantes y de las situaciones, y se profundizan o complementan ya con las entrevistas, cuestionarios, etc. En conclusión se validan las hipótesis formuladas en las investigación" (ARTIGUE 1995).

Para la experimentación en esta investigación se ha escogido como población objetivo los estudiantes de la Institución Educativa Guadalupe y como muestra experimental los estudiantes del grado noveno de esta misma institución, aplicando las situaciones problema diseñadas y analizando los resultados que se obtuvieron bajo la experimentación con las situaciones problema.

En definitiva en esta investigación se ha tomado como enfoque metodológico los aportes que hace la Ingeniería Didáctica desde sus tres componentes:

- Análisis preliminar.
- Concepción y análisis a priori.
- Experimentación, análisis a posteriori y validación.

En la **Figura 21** se muestra una síntesis conceptual sobre como esta estructurado el enfoque metodológico.

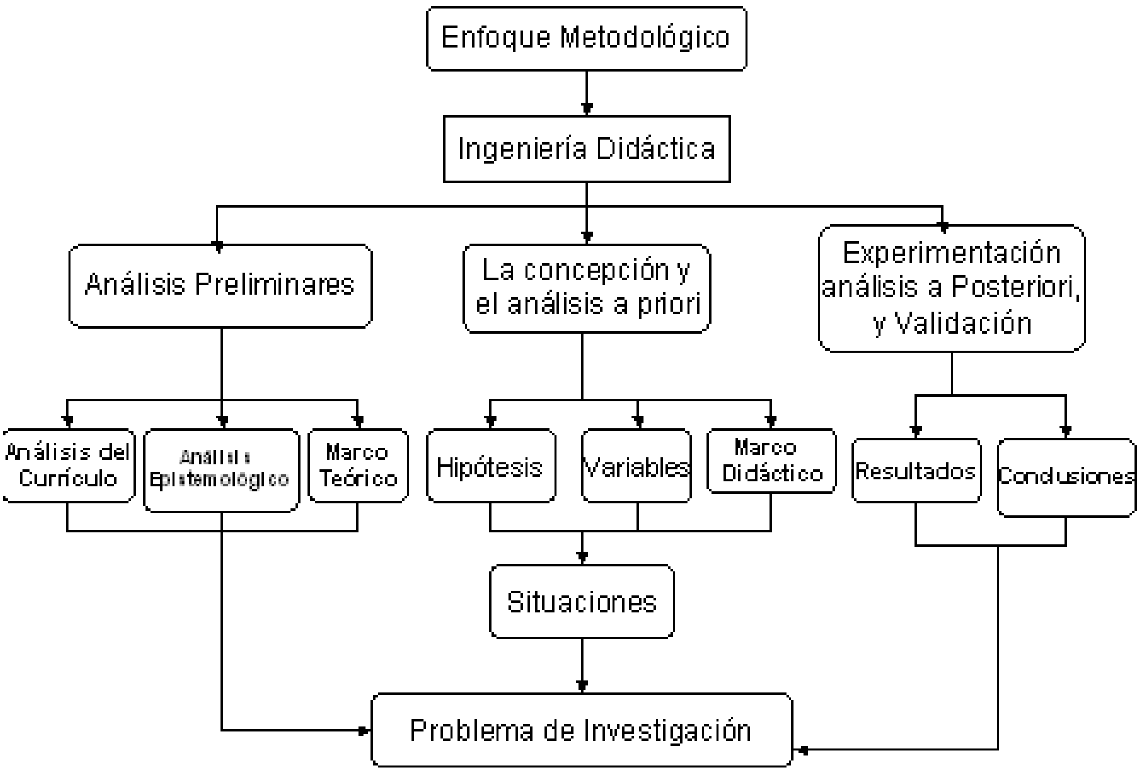


Figura 21. Enfoque Metodológico

4. LA CONCEPCIÓN Y EL ANÁLISIS A PRIORI

La concepción y análisis a priori

> "*comprende una parte descriptiva y una predictiva, este se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar a llevar a los alumnos:*
>
> - *Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprende.*
> - *Se analiza que es lo que esta en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.*
> - *Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados si intervienen, se han resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje*". (ARTIGUE. 1995. Pág. 40-41)

En esta parte de la investigación se describen las variables que se ponen en juego en las situaciones problema, el planteamiento de las hipótesis, el enfoque didáctico, el diagnostico y el diseño de las situaciones.

4.1 VARIABLES

Para el desarrollo de la investigación se tendrán en cuenta las siguientes **variables**:

- Medición
- Estimación

- Valores de la Medición:

Uso de unidades estándar y no estándar.

- Valores de la estimación.

Se nombra el atributo y el objeto a medir:

- El objeto presente y la unidad presente
- El objeto presente y la unidad ausente

4.2 HIPOTESIS

- ¿La utilización de unidades no estándar en procesos de medición permite una mayor comprensión de las unidades estándar y sus sistemas?

- ¿El uso de la estimación es una forma de acercarse a la comprensión de las magnitudes y la medición, además permite conocer el estado del alumno frente al manejo y la medición de áreas?

4.3 ENFOQUE DIDÁCTICO

La situación problema como alternativa didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constituye una de las herramientas más importantes para dar sentido y significado al conocimiento matemático.
En este sentido, muchos son los autores que han dado aportes significativos a esta propuesta de intervención didáctica. Entre los cuales cabe destacar el trabajo de: Guy Brousseau, Luis Moreno Armella, John Jairo Múnera y Gilberto Obando; quienes han resaltado la importancia de la situación problema dentro de la educación matemática.

Es así como a partir de lo planteado por estos autores frente a lo que constituye una situación problema. A continuación se enmarcará este referente didáctico, principalmente desde dos parámetros:

1. La definición de la situación problema y su importancia dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
2. Los elementos y características que conforman una situación problema.

1. Definición de Situación Problema:

Para el desarrollo del primer aspecto, se ha realizado un rastreo bibliográfico donde se han encontrado varias definiciones que los anteriores autores tiene sobre lo que es una situación problema. Se aclara que Brousseau, no habla de una forma explicita de situación problema, sino, de situación didáctica o situación, la cual define (citado por Galvez 1994) como:

> *"un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre el alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente medios u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de construcción."* (Pág. 12).

Según Moreno (2002), la situación problema es parte de los distintos factores que determinan el sistema educativo, al cual hace referencia Brousseau en su definición de situación didáctica.
Para este mismo autor, la situación problema "constituye el punto de partida de las situaciones didácticas…esta es el detonador de la actividad cognitiva" (Pág. 58).

Como se puede notar en las anteriores definiciones, la situación problema constituye uno de los factores con los cuales se determina una situación didáctica. Por lo tanto a continuación se definirán los aportes que hacen los autores John Jairo Múnera y Gilberto Obando sobre lo que para ellos es una situación problema. Según estos autores la situación problema es:

> *“un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación”* (Pág. 185)

Para Múnera (1998), una situación problema es aquel espacio de “informaciones e interrogantes que convocan a un sujeto a buscar respuestas a partir de actividades que promueven la matematización. Es decir, se puede entender como un espacio para generar y movilizar procesos de pensamiento que permitan la construcción de espacios matemáticos”.
En este sentido, la construcción de una situación problema, es producto de tres factores básicos, los cuales se refieren al saber, a su recontextualización y a la secuencia de actividades, en palabras de Múnera (1998):

- *“En primer lugar conocer el saber específico que se propone enseñar.*
- *En segundo lugar recontextualizarlo de acuerdo a los saberes previos del educando.*
- *Y por último elaborar sistemáticamente las actividades que hacen posible la interacción entre el estudiante, con sus condiciones afectivas y socioculturales, el profesor y los contenidos matemáticos”* (Pág. 13).

En resumen, “las situaciones problema pueden asumirse como un instrumento de enseñanza y aprendizaje que propicia niveles de conceptualización y simbolización de manera progresiva hasta la significación matemática” (Múnera, Obando 2003. Pág. 189). Cuyo “objetivo principal es desencadenar un aprendizaje” (Múnera 2001)

Hasta el momento, se ha visto como para Guy Brousseau, las situaciones didácticas se entienden en un contexto de las relaciones entre alumno, maestro y conocimiento. Esto implica que la situación didáctica es una estructura general, siendo este mismo autor, uno de los investigadores que más ha liderado este tipo de intervención. Además se ha mostrado desde los aportes de Luis Moreno, como la situación problema se enmarca dentro de la situación didáctica, por lo cual, la situación problema cobra importancia, en los aporte de John Jairo Múnera y Gilberto Obando.

En definitiva, se puede decir entonces que la situación problema es una estrategia didáctica que propicia niveles de aprendizaje, donde el alumno interactúa libremente con el conocimiento, lo resignifica y avanza hacia la construcción de nuevos conocimientos bajo la *colaboración* del maestro.

Se ha definido hasta aquí las situaciones problema. Ahora se resaltará la importancia que tienen éstas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

De este modo puede decirse que la situación problema de una u otra forma hace que los conceptos matemáticos adquieran sentido y valor para el estudiante, apropiándose del nuevo conocimiento y para el maestro brindarlo, ya que las situaciones problema

> *"permiten una reorganización del currículo de matemáticas, en tanto que estas son el punto de partida para desencadenar los procesos de aprendizaje en los alumnos. Esta vía de trabajo favorece una visión del conocimiento matemático como proceso, que admite pluralidad de procedimientos, que se transforma, que se adapta a las situaciones y a los contextos, al alcance de todos"* (Múnera, Obando. 2003. Pág. 197)

Frente a esta cuestión Grecia Gálvez (1994) afirma que

> "*la situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye así un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación escolar habitual, donde la búsqueda de las aplicaciones de los conocimientos sucede la presentación, descontextualizada*". (pág. 48)

Desde el punto de vista de Múnera y Obando (2003), la situación problema debe permitir al estudiante la exploración y la sistematización donde pueda formular sus propias hipótesis y reformular sus conocimientos. En palabras de estos autores: *"la situación debe tener como parte de los elementos que la constituyen, los dispositivos que permitan a los alumnos desarrollar, de manera autónoma, procesos de exploración, tales como la formulación de hipótesis, su validación y si es el caso la reformulación".*

Desde aquí entonces es como se establece la importancia de la implementación de las situaciones problema, ya que brindan espacios a los estudiantes para particularizar, generalizar, conjeturar y verificar características que son propias del razonamiento matemático.

> *"Lo importante es que la situación problema vincule de manera activa al estudiante en la elaboración teórica, haga el arte de conocer un proceso no acabado, permite utilizar aspectos contextuales como herramientas dinamizadoras de aprendizaje y relacione las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas".* (Munera, Obando 2003)

En este sentido el papel del maestro es permitir que los estudiantes acceden por si mismos al conocimiento interfiriendo de manera que los conceptos matemáticos adquieran nuevos niveles de conceptualización. Como lo afirman Munera y Obando (2003) "el papel del docente se ve redimensionado, pasando de la persona que enseña, aquella que propicia y conduce situaciones de aprendizaje de los alumnos".

El usual rol protagónico del profesor también cambia en la medida en que los estudiantes, desde las situaciones problema, exploran, representan, y hacen preguntas y el docente debe estar atento hacer la orientación de las mismas y a sus requerimientos de sus elaboraciones, desde esta perspectiva se genera un espacio de interacción donde priman los procesos de aprendizaje sobre la enseñanza.

Como conclusión queda claro que las situaciones problema median la actividad matemática en el alumno y los conocimientos matemáticos a través de esta toman sentido y significado. Así una situación problema, genera un ambiente en tiempo y espacio propio, sobre la base del conocimiento de los alumnos para quienes es diseñada.

Es así como la situación problema es una buena propuesta como herramienta de investigación y estrategia didáctica, pues permite que el investigador pueda variar las situaciones y hacer que los alumnos movilicen esquemas de pensamiento. Como afirma Brousseau en 1995 (citado por Panizza) "el docente puede utilizar valores que permitan al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo, fijando un nuevo valor de la variable". (Pág. 66). Además con la situación se puede controlar los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas observando allí aspectos que puedan dar solución a problemas de la enseñanza de esta ciencia.

2. Elementos y características de la situación problema

En los párrafos anteriores se han considerado algunas definiciones y nociones fundamentales de una situación problema. A continuación, se describirán los elementos (motivo, medios, mediadores, momentos, actividades, validación, evaluación e institucionalización) y las características que debe tener una situación problema.

Para que una situación problema movilice la actividad conceptual del sujeto, es necesario considerar las siguientes características:

a) "*Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.*
b) *Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.*
c) *Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.*
d) *Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones*
e) *Debe contener su propia validación.*
f) *La resolución de la situación problema, supone una serie de interacciones simétricas entre estudiantes y asimétricas entre los estudiantes y el profesor"*. (Moreno, Waldegg. 2002. Pág. 58)

Otro aspecto a considerar dentro de las situaciones problema son sus elementos. Según el profesor John Jairo Múnera específica que para abordar su diseño debe partirse de la "organización básica de los contenidos temáticos, la selección de un motivo o problema inicial, la selección de preguntas y actividades fundamentales, la estructuración de niveles de conceptualización y la evaluación" (Múnera, 1998)

Ahora se dará significado a cada uno de los elementos antes mencionados con el fin de que puedan servir de apoyo para la creación de situaciones problema.

Red conceptual

La red conceptual permite recrear y dar valor a la situación problema, puesto que es allí donde se relacionan los conceptos matemáticos y se ponen en juego los conceptos a enseñar de una forma sistemática e integral.

Según los lineamientos curriculares:

> *"La red de relaciones entre conceptos y estructuras matemáticas es inagotable, permite generar continuamente nuevos procedimientos y algoritmos; no es posible pues, dar por terminado el dominio de ningún concepto en un breve periodo de tiempo, ni pretender que se logre automáticamente una conexión significativa entre un conocimiento nuevo y aquellos conocimientos previamente establecidos"* (MEN 1998. Pág. 31)

Desde el punto de vista de Múnera y Obando (2003), la red conceptual *"se entiende como una especie de maya, donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar…no solo es una selección y jerarquización de los contenidos, sino, que es la relación entre los conceptos matemáticos*" (Pág. 189)

Para estos mismos autores una situación no puede movilizar todos los conceptos presentes en una red conceptual, pues esta coincidiendo con los lineamientos es una construcción compleja, producto de un largo periodo de tiempo y de múltiples situaciones problema interrelacionadas.

En la siguiente **Figura 22** se muestra un ejemplo de una red conceptual, donde se muestran los múltiples conceptos y sus relaciones que hacen parte del pensamiento métrico, estos van desde los primeros años de vida, hasta el final de la educación media.

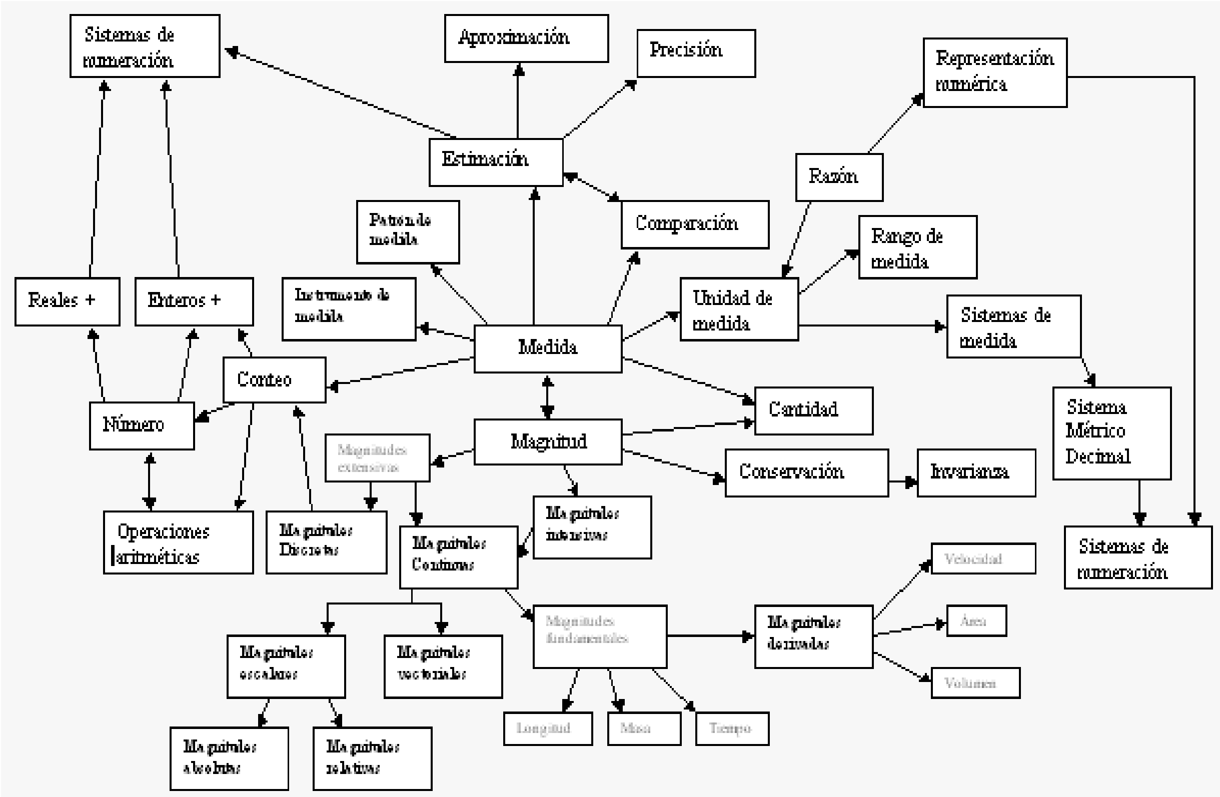


Figura 22. Red conceptual Pensamiento Métrico

Motivo

El motivo puede ser entendido como la excusa o la oportunidad para realizar la situación problema, en este sentido el motivo permite contextualizar y dar sentido a los conceptos matemáticos inmersos en la situación.

Desde el punto de vista de Múnera (1998) el motivo"es toda situación o material concreto o abstracto que posibilite desencadenar conceptos matemáticos acordes con las competencias del individuo y los contenidos curriculares" (Pág. 15).

Frente a este elemento se podrían citar algunos ejemplos, un motivo puede ser un juego: como el parques o el ajedrez, también un contexto conocido para el alumno como: la formula uno o el parque de diversiones, o por otra parte un medio como: el tangram o los bloques lógicos, a su vez un motivo también puede ser un eje conceptual como: la estimación o las figuras geométricas.

Medios:

Un medio es un objeto o instrumento físico o abstracto con el cual es posible representar un conocimiento matemático, en otras palabras es un apoyo para la situación problema.

Según Múnera (1998), los medios son elementos o soportes matemáticos seleccionados de acorde a la actividad y a la red conceptual elaborada que permite establecer relaciones cercanas y directas con los conceptos a desarrollar en las situaciones. Estos pueden clasificarse en objetos abstractos y objetos físicos.

- *Los objetos abstractos son aquellos tenidos como "ideas" y que ya se comprender a la luz de las operaciones mentales, serían aquellos que según el profesor Vasco se denominan saberes concretos. Por ejemplo, la tabla de multiplicar, triángulo numérico, un gráfico, una definición, un teorema…*
- *Los objetos físicos para las actividades matemáticas suelen agruparse en dos grandes grupos, discretos y continuos principales, por ejemplo: palitos, canicas, tablas, tapas de envase, figuras geométricas, entre otros. Los segundos se caracterizan por ser moldeables como el caso de bandas elásticas, aserrín, arcilla, plastilina, agua, arena…*(Múnera, 1998 , Pág. 15)

Momentos

Los momentos son una serie de actividades que el sujeto debe resolucionar para construir su propio conocimiento, según Mabel Panizza "los momentos de aprendizaje son concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego" (Pág. 62)

Actividades

Las actividades es le elemento mas importante de la situación, pues permite desencadenar los conocimientos matemáticos puestos en juego.
Es precisamente como a través de las actividades

> *"el alumno desarrolla su actividad y por ende realiza las elaboraciones conceptuales relativas a los problemas que enfrenta. En las actividades se cristalizan los análisis realizados por el maestro sobre la red conceptual, los medios, los mediadores, y se plasma en un diseño que al ser vivido por el alumno, le permiten la construcción del conocimiento"* (Múnera, Obando 2003)

Para la realización de la actividad se debe tener en cuenta que saben los alumnos y que necesitan saber sobre los conocimientos que esta en juego en la situación de este modo "las actividades y preguntas deben construirse como alternativa de movilización de los preconceptos básicos que giran en torno a un determinado tema" (Múnera, 1998)
Esto es posible si dentro del desarrollo de la situación se promueve

> *"la búsqueda de diferentes estrategias, respuestas, maneras de explicación y representación, formulación de conjeturas y problemas a partir de los interrogantes. Por eso las preguntas planteadas durante la intervención deben guardar una estrecha*

> *relación con la selección de los contenidos y deben ser de todo tipo cerradas y abiertas con el fin de promover la reflexión, la creatividad, la investigación"* (Múnera 1998)

Si embargo, dentro de la actividad "mas que planear lista de contenidos, se hace necesario, reorganizarlos de modo que su enseñanza y aprendizaje contribuya a desarrollar en los estudiantes capacidades, competencias y actitudes orientadas en la exploración, conceptualización y comunicación de ideas matemáticas" (Múnera 1998)

Para que las actividades adquieran significado, las preguntas deben constituirse como una alternativa para "iniciar la movilización de los conceptos básicos que giran en torno a un determinado tema, es decir, no son mas que otra manera de dinamizar la enseñanza, vinculando la actividad del estudiante a su propio aprendizaje" (Múnera, 1998)

No se puede desconocer que durante la intervención, también surgen otros interrogantes en los alumnos, los cuales se deben tener en cuenta para ayudarlos a encontrar respuestas por ellos mismos.

Las preguntas planteadas durante la intervención deben ser de dos clases abiertas y cerradas

> *"Las cerradas con el fin de registrar los logros alcanzados alrededor de los aprendizajes básicos. Las abiertas para promoverla reflexión, la creatividad, la investigación. Estas pueden estar relacionadas con la motivación hacia otros conceptos que se derivan de los contenidos básicos. Es decir, de producir interés por la búsqueda de otros aprendizajes de planteados desde la situación problema".* (Múnera 1998)

De forma similar para Brousseau (1986) (Citado por Moreno, Waldegg 2002):

> "desde la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación de buenas preguntas y buenas respuestas. Sobre esta base, el énfasis del acercamiento radica en la identificación y el diseño de las "buenas preguntas" que generen los conflictos cognitivos y socio cognitivos detonadores del aprendizaje; estas "buenas preguntas" constituyen las situaciones didácticas." (Pág. 57)

Desde esta perspectiva las actividades deben constituirse en situaciones, distinguiéndose cuatro tipos:

1. *"Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.*

2. *Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.*
3. *Las situaciones de Validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comparación empírica de lo que dicen en cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.*
4. *Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, formulación y validación. "*(Pág. 43, 44)

Validación

El proceso de validación es de vital importancia para la situación problema, puesto que le permite al alumno comparar sus conjeturas e hipótesis para luego avanzar en la búsqueda de su propio conocimiento.
En palabras de Múnera y Obando (2003) "*la validación es un elemento que le permite al alumno determinar el grado de certeza de sus acciones y, por tanto, desarrollar los cambios de estrategia que sean necesarios*". (Pág. 195)

Evaluación

Para evaluar la situación problema o promover la evaluación por medio de ella, es necesario tener en cuenta según Múnera (2001) "prestar atención a las concepciones de los alumnos no solo antes de que comience el proceso de aprendizaje, sino también a las que van generando durante el mismo. Es decir, que es importante conocer lo que está en la mente de los alumnos durante todo el proceso de enseñanza" (Pág. 18)

Es así como la evaluación según estos mismos autores "dentro de una situación problema debe respetar los ritmos de aprendizaje y canalizar los errores presentes en las respuestas como agentes mediadores para provocar cambios conceptuales en los alumnos" (Pág. 196)

Institucionalización

La institucionalización determina un punto clave dentro de la situación problema puesto que es en esta donde el docente pone en juego los objetos matemáticos que debían aprender los estudiantes. En palabras de Múnera y Obando (2003)

"*la institucionalización es un elemento fundamental del trabajo, ya que en la institucionalización el profesor organiza,*

> *sistematiza, da cuerpo y estructura a los objetos matemáticos que se quería fueran objeto de aprendizaje en los alumnos a través de las situaciones problema. En este momento, el maestro retoma la responsabilidad del trabajo, pues debe organizar de manera clara los objetos de conocimiento matemático presentes en la situación y así, ayudar a los estudiantes a organizar los esquemas generales de pensamiento, a través de los cuales estructura su conocimiento*" (Pág. 197)

En resumen se han mostrado cuales son las características que conforman una situación problema (red conceptual, motivo, medios, mediadores, momentos, actividades, validación, evaluación e institucionalización) describiendo cada uno de estos, y destacando su importancia dentro de la situación problema.
Todos los elementos y características que conforman una situación problema como ya se ha dicho, deben ponerse en juego de una forma dinámica y flexible, donde la responsabilidad que tiene el alumno es resolver y reflexionar acerca de las actividades que el maestro ha puesto en la situación, en palabras de Luis Moreno (2002) esto se conoce como interacción simétrica.

4.4 DIAGNÓSTICO

El diagnostico consiste en la descripción de los aspectos socio – económicos y cognitivos, este último comprende una descripción sobre la actitud de los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Guadalupe, (pues es en dicha institución, donde se realiza el trabajo de experimentación) además de la descripción de la planta física y la identificación de ésta.

4.4.1 Identificación

Institución Educativa Guadalupe

Municipio: Medellín

Comuna: uno

Núcleo educativo 914

4.4.2 Institución

La institución educativa Guadalupe es una institución oficial, está ubicada en la zona nororiental de la ciudad de Medellín en el barrio Manrique Guadalupe.
Cuenta con una planta física nueva que está distribuida de la siguiente manera: la rectoría, la secretaría, la coordinación, una sala de profesores, diez aulas de clase. Cada una de las cuales es amplia y apta para las labores académicas albergando alrededor de cincuenta sillas universitarias, además cada uno posee equipos audiovisuales: televisor y VHS; un aula de informática, un patio salón, tienda escolar, restaurante escolar, baños para los alumnos, baños para los profesores y un patio. En la actualidad no se cuenta con espacio para un laboratorio, ni para la biblioteca, tampoco con el espacio adecuado para la realización de actividades físicas o deportes, pues el patio existente no es muy amplio.

La institución ofrece todo el ciclo de la educación básica secundaria y el ciclo de la educación media bajo la modalidad: *Elementos básicos para el manejo de software*.
A ella pertenecen aproximadamente novecientos alumnos que conforman veinte grupos en total: cuatro grupos del grado sexto, cuatro grupos del grado séptimo, tres grupos del grado octavo, tres grupos del grado noveno, tres grupos del grado décimo y tres grupos del grado once. Estos grupos están distribuidos en dos jornadas: diez pertenecen a la jornada de la mañana y diez a la jornada de la tarde.

4.4.3 Alumnos

En este aspecto se hará una descripción particular sobre los alumnos del grado octavo de la institución educativa Guadalupe, los cuales próximamente estarán en el grado noveno. Para este propósito se tendrá como base la experiencia que se obtuvo tras la observación general del grupo y de algunos elementos proporcionados por las Pruebas Saber en matemáticas para los grados de la educación básica secundaria de dicha institución en el año 2002.

Tenemos entonces que el grado octavo actualmente consta de treinta y seis alumnos, de los cuales dieciséis son mujeres y veinte hombres oscilando entre los 14 y 16 años de edad, estos estudiantes presentan un perfil socio-económico bajo al igual que poca comprensión de los conceptos matemáticos, en su mayoría el manejo de operaciones con números fraccionarios, dificultad que ha traído inconvenientes a la hora de enfrentar el pensamiento variacional y sistemas algebraicos.

Por otra parte, los resultados de las Pruebas Saber nos muestran resultados muy particulares por cada grado del ciclo de secundaria revelando que la mayor dificultad se encuentra en geometría y medición al igual que estadística y probabilidad, lo cual nos lleva a concluir que los estudiantes del grado octavo también podrían presentar tales falencias que les impedirían asimilar determinados conceptos para el grado noveno.

4.4.4 Educadores

La institución cuenta con un Rector, un coordinador encargado de la disciplina y los aspectos académicos y con treinta y dos profesores en total. Dieciséis son de la jornada de la mañana y de ellos tres se encargan del área de matemáticas, sin embargo, sólo dos son licenciados. A la jornada de la tarde pertenecen igualmente dieciséis profesores; para el área de matemáticas se dispone de tres docentes, uno de ellos economista y dos licenciados.

4.4.5 La Comunidad

Con la intención de ser más exactos en la descripción de la comunidad educativa la cual se ubica en los estratos 1,2,3. Se ha estructurado una encuesta de once preguntas tanto de variables cualitativas como cuantitativas, dirigidas a la población de estudiantes del grado octavo de la institución educativa Guadalupe.

Para la recolección de los datos se ha tomado una muestra representativa de dieciocho estudiantes del grado octavo de dicha institución, y con el fin de hacerla aleatoria se han seleccionado aquellos estudiantes que en la lista les corresponde los números impares.

Dicha encuesta pretende conocer aspectos socio-económicos de la comunidad, y a su vez, al indagar sobre la actitud de ésta frente a las matemáticas, pretende caracterizar también aspectos académicos tanto de la misma comunidad como de los estudiantes del grado octavo que próximamente cursarán el grado noveno. Es necesario aclarar que aquí sólo se proporcionarán las conclusiones que ha dado la encuesta

Así, se puede afirmar que el promedio del número de personas que viven con cada alumno del grado octavo de la institución educativa Guadalupe es de seis personas aproximadamente.

Con respecto a los ingresos familiares, aproximadamente el 83.33% de las familias de los estudiantes asegura tener ingresos de menos de 330.000 pesos, el 11.11% asegura tener ingresos familiares entre 330.000 pesos y 700.000 pesos y sólo el 5.55% tiene ingresos de más de 700.000 pesos.
Así en promedio los ingresos familiares de los estudiantes del grado octavo de la institución son de 371.000 pesos mensuales.

Continuando con los aspectos económicos que caracterizan las familias de los estudiantes del grado octavo de la institución educativa Guadalupe. A la pregunta ¿Viven ustedes en casa propia o arrendada?, aproximadamente el 88.88% de las familias respondió que viven en casa propia y sólo el 11.11% sostiene vivir en casa arrendada.

De esto, y según lo anterior, se concluye, que aunque la mayoría de las personas cuentan con casa propia, los recursos económicos disponibles por cada familia no son suficientes para solventar las necesidades de alimentación, de servicios públicos y educativos que requiere una familia con un número de personas tan elevado.

Siguiendo con algunos de los aspectos sociales que caracterizan a la comunidad educativa tenemos que según el artículo 42 de la constitución política de Colombia de 1991, un núcleo familiar lo constituye un padre, una madre y un número determinado de hijos. Con base en esto el 33.33% de los alumnos de grado octavo de la institución educativa Guadalupe hacen parte de dicho núcleo familiar; el 44.44% de estos estudiantes viven con su madre, hermanos y otros familiares, y el 22.22% viven con su padre, madre, hermanos, abuelos y otros familiares.
Estos porcentajes nos llevan a pensar que la mayoría de los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Guadalupe no viven con un grupo familiar debidamente constituido.

Con respecto al proceso académico que tienen los estudiantes del grado octavo fuera de la institución, en relación a quién y qué escolaridad posee la persona que más colabora con sus tareas, se puede notar que el 44.44% de los estudiantes (siendo éste el dato más alto), pide colaboración a una persona que tiene como grado de escolaridad la secundaria, los demás son: el 22.22% pide ayuda a personas con un grado de escolaridad universitario, con igual porcentaje los estudiantes no solicitan ayuda a ninguna persona para sus tareas, los demás estudiantes acuden a personas que han cursado primaria y, secundaria- universidad,- ambos con el 5.55% respectivamente.

Entre las personas que colaboran a los estudiantes de grado octavo en la realización de tareas escolares se encuentran las siguientes categorías: familiares diferentes del núcleo familiar, particulares y ninguna persona le colabora, cada uno con un porcentaje aproximado del 22.22%, el 16.66% de los estudiantes contestaron que sus hermanos les colaboran con sus tareas, el 11.11% respondió que era el padre y sólo el 5.55% respondió que su madre le ayudaba con sus tareas.

La anterior información, nos lleva a concluir que dentro del grupo familiar de los estudiantes del grado octavo de la institución, no se establece un acompañamiento muy directo de los procesos académicos del estudiante como la ayuda en la realización de tareas, de ahí que sobresalga un porcentaje significativo de estudiantes que no acuden a pedir alguna asesoría para sus obligaciones académicas.

Continuando con esta temática, el 83.33% de los familiares aseguran tener sitios adecuados para que sus hijos realicen las tareas escolares, sobresaliendo sitios específicos del hogar: el 16.67% de las familias afirman no tener sitios disponibles para que sus hijos realicen las tareas.
En suma se podría decir que si bien hay un porcentaje elevado de familias que afirman tener sitios aptos para que sus hijos estudien, no sobresale en sus respuestas sitios más adecuados como bibliotecas, cuartos de estudio o sitios con recursos académicos suficientes para que los estudiantes puedan estudiar y realizar sus labores académicas.
En relación con la actitud frente al área de matemáticas se tiene de los datos de la encuesta la siguiente información:

En promedio el tiempo que dedican los estudiantes al estudio de las matemáticas es de 33.33 minutos.
Todos estos datos nos dicen que es muy poco lo que el estudiante del grado octavo de la institución educativa Guadalupe dedica al estudio de las matemáticas, puesto que más de la mitad de la muestra le asigna a su estudio menos de treinta minutos. Esta falencia de una u otra forma incidirá en el rendimiento académico del estudiante y de su aprendizaje en el grado noveno.

Continuando con este aspecto, el 100% de las familias de los estudiantes afirma que las matemáticas son de suma importancia debido a que el mundo gira en torno a factores económicos. Razón que la mayoría de la comunidad educativa expresó.
Esto lleva a pensar que los padres de los estudiantes del grado octavo desconocen que las matemáticas tienen múltiples aplicabilidades en diversos contextos como el social, el de las ciencias y no sólo en el económico.

Otro punto de esta temática se refiere al agrado por las matemáticas, con respecto a esté se evidencia que a la mayoría de las familias no les agrada las matemáticas explicando que esta ciencia es demasiado complicada e

incomprensible. Este aspecto es de suma importancia debido a que esta actitud es la que pueden transmitir a los estudiantes.
Por ultimo al 55.55% de la comunidad educativa le parece que el tema más interesante de las matemáticas visto por los estudiantes fue el de factorización, el otro 44.44% se inclinó por las operaciones con polinomios.

4.4.6 Práctica Pedagógica

En la institución se realizo la practica pedagógica en un periodo de dos años en los grados cuarto a noveno, donde se ha realizado un trabajo previo con el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el enfoque que se le dio al pensamiento métrico durante este periodo fue vía la medición y la magnitud trabajada por medio de este enfoque fue la magnitud longitud, además se hizo un trabajo desde el pensamiento espacial y sistemas geométricos, haciendo énfasis en las propiedades de los polígonos.

A partir de un diagnostico con los estudiantes, se pudo notar poca familiaridad con los procesos de medir, sobre todos aquellos procesos que implican medir unidades de orden inferior con unidades de orden superior, además se encontró un caso particularmente crítico al indagar por aspectos métricos de la magnitud área, donde solo se presenta un tratamiento aritmético sobre las magnitudes.

Por este motivo fue necesario realizar tres situaciones problema con el fin de controlar significados sobre el manejo métrico del concepto de la magnitud área y además observar la pertinencia de las situaciones.

4.5 SITUACIONES PROBLEMA

Las tres situaciones problema que a continuación se presentan buscan que los estudiantes se enfrenten a los procesos de medición donde se pone en juego el concepto de área. Estas situaciones están relacionadas en tanto que cada una implica procesos y conceptos que permiten entender la siguiente situación. Es así como la primera situación (**Situación 1**) posee tres momentos, en el primer momento se ha hecho énfasis en el manejo de unidades no estándar donde los estudiantes deben medir las superficies de forma irregular a partir de recubrimientos, en el segundo momento se le pide a los estudiantes medir superficies más regulares, donde la unidad de medida cabe exactamente en la superficie a medir, y por último se hizo la diferencia entre la forma de la superficie y su medida haciendo énfasis en la equivalencia y congruencia de áreas. La segunda situación (**Situación 2**) consta de tres momentos, donde los estudiantes ya deben manipular unidades estándar descubriendo la necesidad de establecer relaciones de equivalencia entre las unidades y la utilidad de medir con estas, el estudiante debe utilizar procesos de medición similares a los que usaban con las unidades no estándar pero con el atractivo del calculo fruto del proceso de medición. En el primer momento se le pide a los estudiantes que construyan las unidades estándar (m^2, dm^2, cm^2), en el segundo momento se pide que las comparen entre si, buscando que identifiquen la relación de equivalencia existente entre estas, y para ser mas explicita esta relación se les pide que comparen las unidades estándar construidas con el mm^2 y en el tercer momento se observa las decisiones que los estudiantes toman frente al rango y el orden de las unidades, pues deben medir el área de algunas superficies que se encuentran en el salón de clases decidiendo cual de las unidades estándar construidas es la mas conveniente para medir cada objeto. En la tercera situación (**Situación 3**) que consta de dos momentos, se observa no solo el manejo de las unidades estándar y no estándar sino que además se pone en juego en los dos momentos de la situación el uso de la estimación en cálculo y medida donde los estudiantes deben crear alternativas de solución para aproximarse a la medida de la superficie que se pide hallar.

4.5.1 SITUACIÓN 1: UNIDADES NO ESTÁNDAR

Justificación:

Con la elaboración de ésta situación se pretende que los alumnos de manera didáctica y significativa se acerquen al concepto de área, a partir del desarrollo de cada uno de los momentos de la situación.
Los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se llevan a cabo en ésta situación permiten a los estudiantes construir y comprender el concepto de área desde actividades que involucran el recubrimiento, la descomposición-recomposición y la teselación de figuras para hallar el área de superficies con unidades de medida no estándar.

En general la situación problema que se presenta tiene como enfoque una de las aproximaciones que según María del Olmo (1993), se pueden hacer a la magnitud área, enfoque que la autora llama *situaciones de medición* en las cuales la superficie aparece ligada a un proceso de medida, dentro de esta aproximación se encuentra el *método por recubrimiento,* siendo este el primer acercamiento al concepto de magnitud área; otro método es el *exhausción con unidades*. Es decir, "*rellenando el interior de la superficie a medir con unidades de medida colocadas unas con otras y no superpuestas, y en aquellas partes de la superficie donde no quepan se recurre a rellenar con unidades más pequeñas. Este proceso se continúa hasta que se recubra totalmente la superficie a medir, o se considere que la porción no recubierta es despreciable para la actividad que se está desarrollando. Esta técnica se utiliza para medir cualquier superficie irregular".* (OLMO y otros, 1993. Pág. 20).
Otra técnica que se considera es la *transformación de romper y rehacer, donde el estudiante puede descomponer una figura en otras figuras o descomponerla para hallar su medida, siendo esta técnica la aproximación a la deducción de formulas geométricas.* ". (OLMO y otros, 1993. Pág. 21).

Motivo:

Aproximación al concepto de área

Grado:

La situación ha sido diseñada y será desarrollado por alumnos de grado noveno de educación básica.

Red conceptual:

La red conceptual que se tiene en cuenta para la elaboración de ésta situación es la del pensamiento métrico y sistemas de medida, con color rojo se encuentran resaltados los conceptos que se desarrollan o se ponen en juego durante la situación:

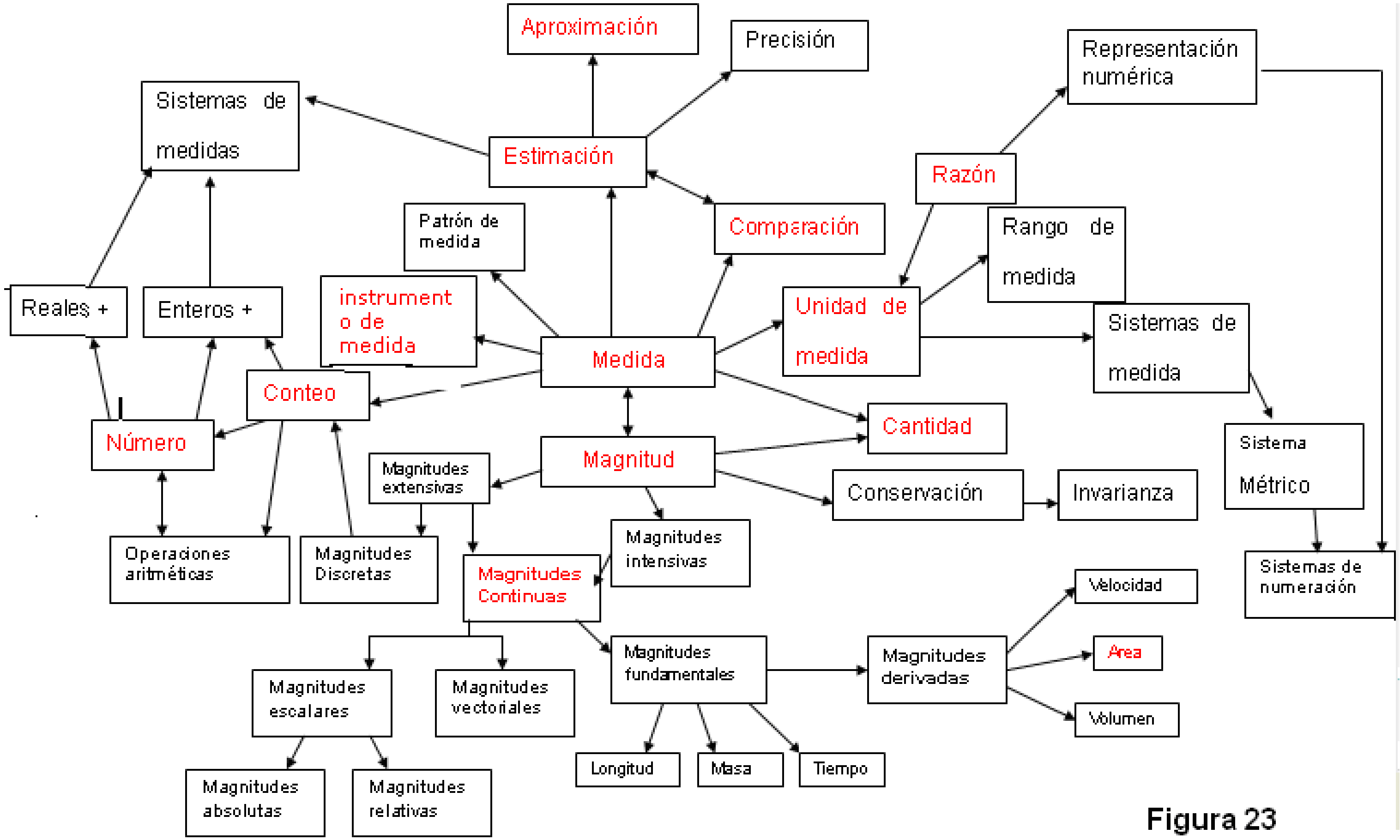


Figura 23

Estándares Asociados:

Los estándares que se tienen en cuenta en la elaboración de la situación corresponden a los pensamientos que se involucran en ésta.
La red conceptual y los estándares están planteados para llevarse a cabo como un proceso a través de la educación básica.

Pensamientos que intervienen:

Los pensamientos que intervienen en la situación son los pensamientos métrico y sistemas de medidas, numérico y sistemas numéricos y espacial y sistemas geométricos.

De manera directa interviene el pensamiento métrico y sistemas de medidas y de manera indirecta el pensamiento numérico y sistemas numéricos y el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas:

- Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo) en diversas situaciones

- Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.

- Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.

- Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

- Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.

- Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

- Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.
- Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo) en diversas situaciones

- Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos:

- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos:

- Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

Medios:

Material Físico

- Hojas de papel
- Tijeras
- Lápiz
- Borrador
- Cinta de enmascarar
- Guías para el alumno

Abstractos:

- Unidades de medida no estándar

Mediadores:

Las hojas de papel se convierten en mediadores ya que permiten a los estudiantes conocer y comprender el concepto de área como una medida de recubrimiento por repetición de una unidad, pero en el proceso de medición permiten captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida ya que estas hojas de papel no son conmensurables con las superficies que se piden medir.
Las tijeras se convierten en mediadores puesto que permiten realizar la técnica de descomposición y recomposición de figuras, sin necesidad de hacer uso de las fórmulas convencionales para hallarla.
La cinta de enmascarar permite diseccionar el área y así delimitar la superficie a medir por cada grupo.

Ambientes de Aprendizaje:

Los ambientes de aprendizaje en los cuales se desarrolla la situación son el patio ($120m^2$) y el aula tradicional, en lo que respecta al patio este se constituye en el ambiente de aprendizaje más adecuado, ya que su superficie no ha sido teselada por baldosas por lo que los estudiantes se ven obligados a trabajar por recubrimiento con las hojas de papel. Por su parte el aula tradicional es un ambiente adecuado para que los estudiantes resuelvan las guías de trabajo y empleen los materiales necesarios para dicha solución, además para la conservación del orden y la disciplina.

ACTIVIDADES:

Momento 1:
Se divide el grupo en subgrupos de cinco estudiantes, se les entrega la guía de trabajo (ver guía 1) y hojas de periódico de dos áreas diferentes: (un pliego $3584cm^2$ y la otra no divisible con la primera $2688cm^2$), con estas hojas se debe determinar el área de la superficie que se limita con la cinta en el patio (ver figura 24), el cual será asignado por el profesor.

La superficie que debe medir cada grupo será marcada con cinta de enmascarar para delimitar la superficie del patio.

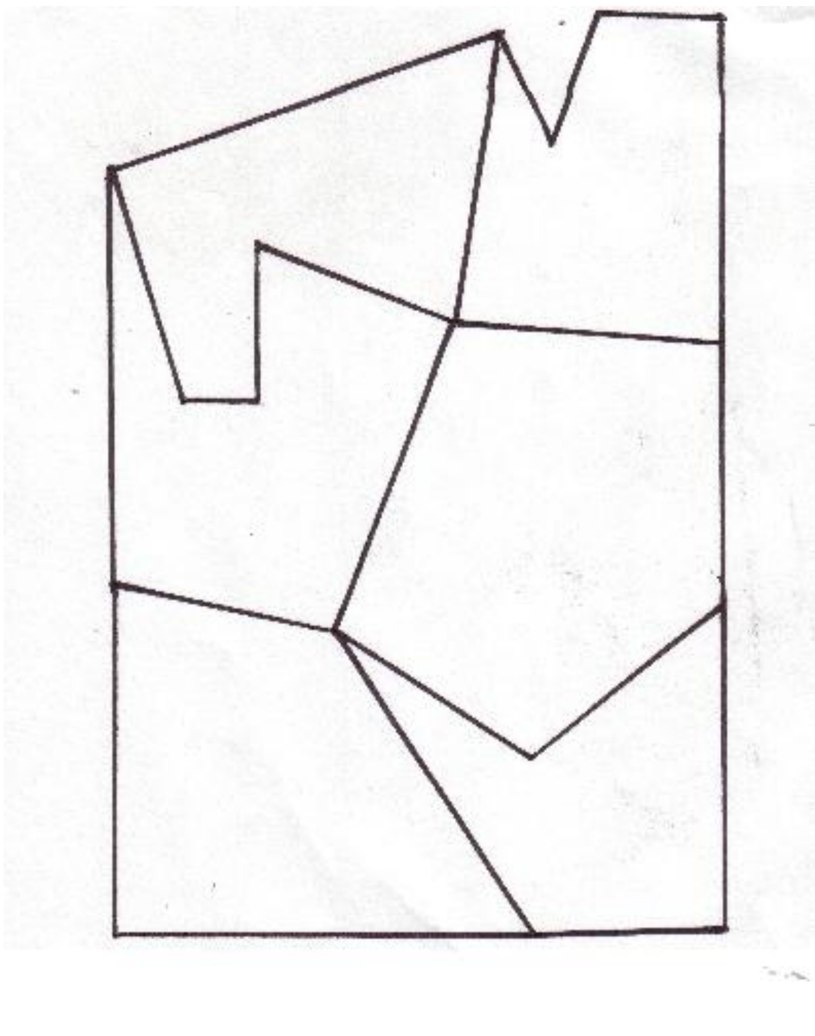


Figura 24

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

<u>Guía 1: Guías para el alumno</u>

Situación No. 1: APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE ÁREA.
Momento 1.

1) Formar un grupo de cinco estudiantes y determinar el área de la superficie correspondiente al patio, la cual será asignada por el profesor; utilizando para ello las hojas de papel periódico que les serán entregadas.

2) Explicar el procedimiento utilizado para determinar el área de la superficie asignada.

Explicar el procedimiento utilizado para responder cada pregunta:

Análisis Preliminar Momento 1:

Este primer momento moviliza los siguientes conceptos: el concepto de área, medición, estimación, comparación.
Durante este primer momento se espera que los estudiantes empiecen a recubrir con el papel periódico la superficie asignada por grupos y describan el procedimiento empleado para ello.
En este proceso de medición se estima que los estudiantes tengan dificultades para recubrir las regiones más irregulares de la superficie asignada por lo que puede ocurrir que doblen la unidad (hojas de papel periódico) para obtener otra que se adapte a dicha región, es decir este momento esta diseñado para que los estudiantes se den cuenta del carácter continuo de la magnitud.
Aunque el objetivo no es que los estudiantes calculen el área por medio de la formula geométrica pueden presentarse momentos donde intenten emplearla. El momento 1, exige que los alumnos deban crear estrategias de medición donde puedan llegar a medidas aproximativas, como por ejemplo puedan llegar a expresiones tales como *más de cinco hojas de papel y menos de seis o expresiones en busca de la equivalencia de unidades tales como seis hojas y un cuarto de la unidad de papel dada*.
La superficie a medir se diseño de esta forma para indicar la idea a los estudiantes de que el área se puede diseccionar en otras partes congruentes y no congruentes.

Para determinar el área de la superficie se espera que digan cuánto mide según la unidad de medida entregada.

Resultados Momento 1:

Este primer momento de la situación fue realizado en 6 grupos conformados por cinco estudiantes, a los cuales se le dio la guía de trabajo (ver guía 1) donde se les pide determinar el área de la superficie del patio que les fue asignada por el profesor, empleando para esto hojas de papel periódico de dos tamaños: (un pliego $3584cm^2$ y la otra no divisible con la primera $2688cm^2$).

Para lograr este objetivo los respectivos grupos de trabajo realizaron los siguientes procedimientos:

Tipo 1: Recubrieron la superficie asignada con las hojas de periódico indiscriminadamente, es decir no teniendo en cuenta el tamaño de las hojas, empezaban con las más grandes ($3584cm^2$), cuando estas no cabían continuaban con las pequeñas ($2688cm^2$) y si estas no cabían se doblaban las hojas para cubrir los espacios faltantes y así por medio de la aproximación daban su respuesta.
Este procedimiento fue llevado a cabo por el 50% de los grupos de trabajo.

Tipo 2: Dividieron la superficie asignada en figuras más comunes como: Rectángulos y cuadrados, y luego recubriendo con las hojas de periódico el largo y el ancho de las subfiguras construidas (Ver figura 25), aquellos pedazos en los que el papel superaba el perímetro de la superficie asignada intentaban formar la unidad de medida dada, ya fuera la de área de $3584cm^2$ o de $2688cm^2$; una vez determinada esta cantidad de hojas, multiplicaban el largo por el ancho para hallar el área por medio de fórmulas geométricas. Para dar respuesta hallaron el área de cada figura construida y luego sumaron las áreas encontradas para componerlas en una sola, diciendo cuántas hojas de papel periódico de $3584cm^2$ y de $2688cm^2$ hay en el espacio asignado.
El 50% de los grupos de trabajo emplearon este método.

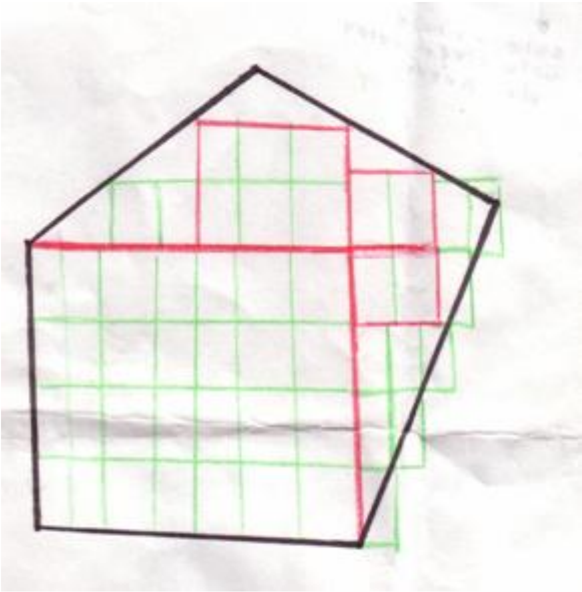


Figura 25

Los resultados se resumen en la **Tabla 13**:

Tipo Respuesta	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
Tipo 1	15	50% aproximadamente
Tipo 2	15	50% aproximadamente
	TOTAL: 30 alumnos	

Tabla 13

Análisis a Posteriori del Momento 1:

Efectivamente los estudiantes utilizaron la medición por recubrimientos, con la cual hicieron una primera aproximación al concepto de la magnitud área, es decir, recubrían con el papel periódico la superficie correspondiente y describían el procedimiento empleado para ello. Ninguno de estos dio la medida aproximada que se esperaba, por ejemplo decir *más de cinco hojas de papel y menos de seis o expresiones en busca de la equivalencia de unidades tales como seis hojas y un cuarto de la unidad de papel dada*. Como consecuencia de esto los alumnos doblaron la unidad de medida dada, viendo la necesidad de utilizar unidades más apropiadas para dar una medida más exacta aproximándose a la naturaleza aproximativa de la medida.

Teniendo en cuenta los procedimientos empleados por los alumnos para determinar el área de la superficie asignada, el 50% de ellos mediante la técnica de recubrimiento determinaron el área de la superficie respectiva por procesos de medición, recubrieron el espacio con las unidades de medida entregadas (hojas de periódico grandes y pequeñas). Aunque este porcentaje de alumnos conciben el área como una medida de recubrimiento manejan indiscriminadamente las unidades de medida dadas para hacerlo, por ejemplo al doblar la unidad la consideraban igual que la unidad que se transformo.

El 33.33% de los estudiantes llevaron a cabo procesos de cálculo, es decir, determinaron la cantidad de hojas de periódico del largo y el ancho de la superficie asignada (ver figura 25) para emplear la formula Base x Altura para así hallar el área de dicha superficie. Estos alumnos a pesar de ello utilizan la técnica de recubrimiento y el cálculo es una consecuencia de dicho proceso, donde dan unas medidas más aproximadas de las superficies a medir, por ejemplo mucho expresaban cinco hojas de papel periódico de $3584cm^2$ de área y tres de $2688cm^2$ de área.

En resumen se puede afirmar que los estudiantes pudieron en primera instancia reconocer que la magnitud área puede ser de carácter discreto, entendiéndose como una medida de recubrimiento, en segunda instancia tuvieron la necesidad de buscar otras alternativas de realizar una medida más aproximada de la superficie a medir y acercándose al carácter continuo que exige la magnitud área.

Momento 2:

El trabajo realizado en este momento será llevado a cabo en parejas, se les da a los estudiantes la guía de trabajo (ver guía 2), que contiene tres figuras y unos patrones de medida, y se les interroga sobre:

a- ¿Cuánto mide la figura S1 medida con la unidad U1?
b- ¿Cuánto mide la figura S2 medida con la unidad U2?
c- ¿Cuánto mide la figura S3 medida con la unidad U3?
d- ¿Qué parte es U1 de S1?
e- ¿Qué parte es U2 de S2?
f- ¿Qué parte es U3 de S3?

S1 U1

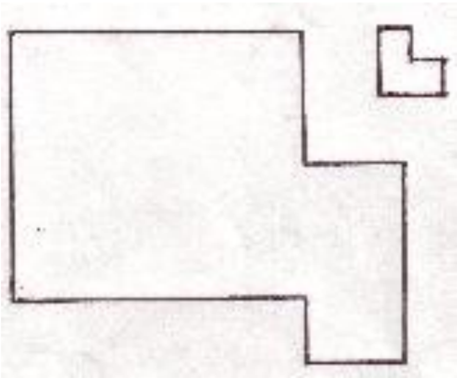
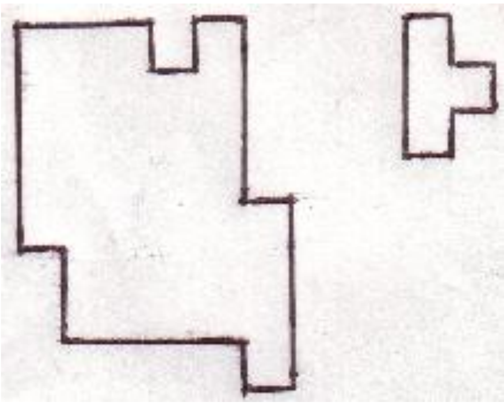


Figura 27

S2 U2



S3 U3

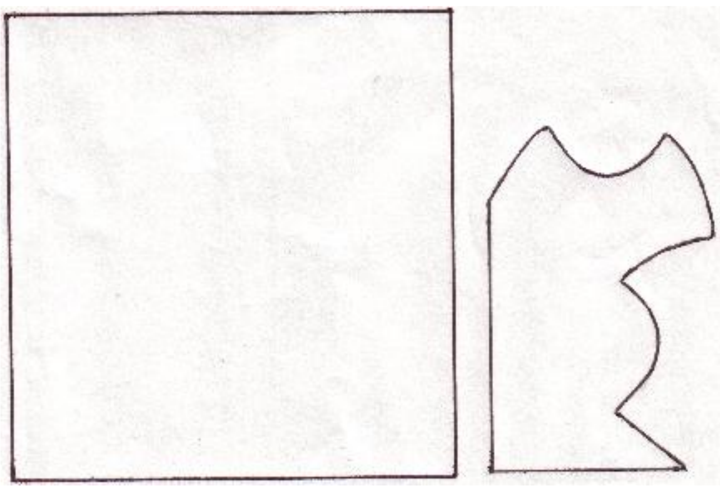


Figura 28

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

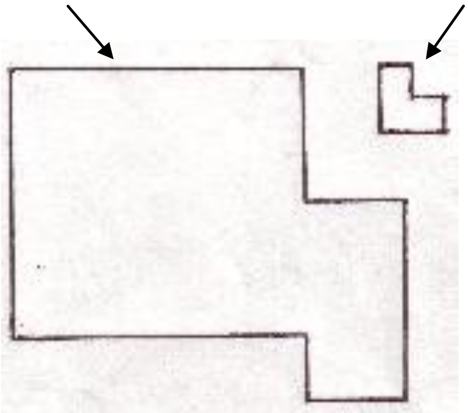
<u>Guía 2: Guías para el alumno</u>

Situación No. 1: APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE ÁREA.

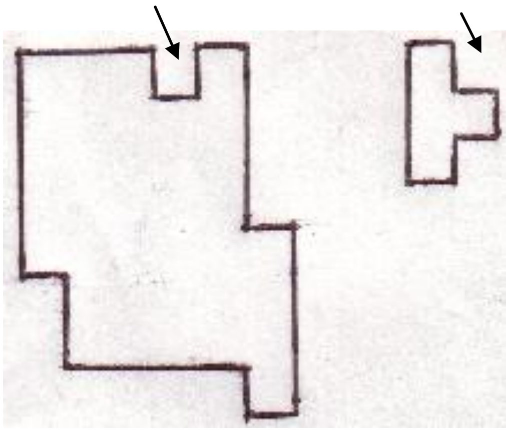
Momento 2.

1) Busca un compañero de tu grupo y dadas las siguientes figuras, respondan:

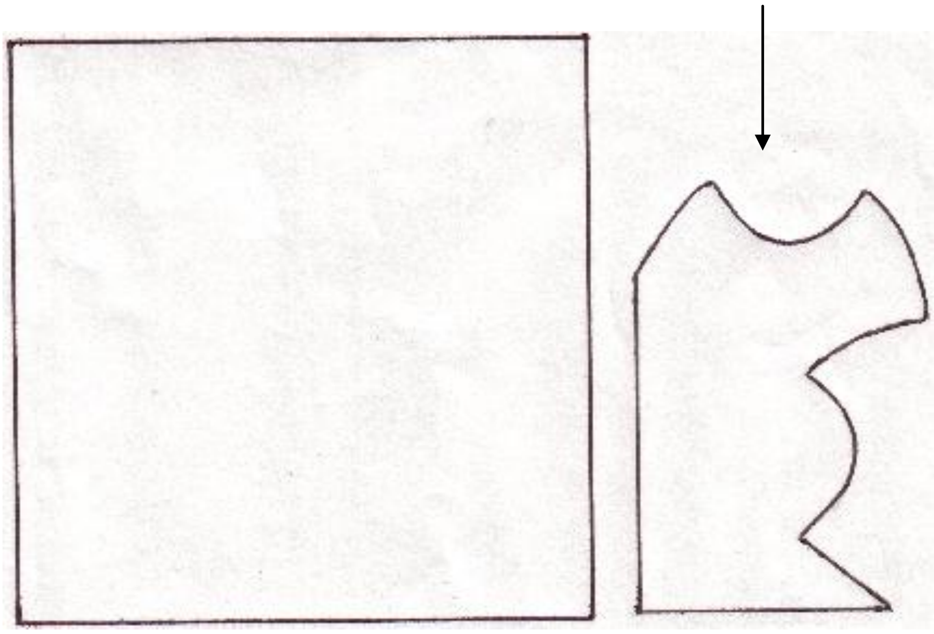
S1 U1



S2 U2



S3 U3



a. ¿Cuánto mide la figura S1 medida con la unidad U1?
b. ¿Cuánto mide la figura S2 medida con la unidad U2?
c. ¿Cuánto mide la figura S3 medida con la unidad U3?
d. ¿Qué parte es U1 de S1?
e. ¿Qué parte es U2 de S2?
f. ¿Qué parte es U3 de S3?
Explica el procedimiento utilizado para responder cada pregunta:

Análisis Preliminar Momento 2:

En este momento de la situación se pretende movilizar los conceptos de: el concepto de área, unidad de medida, medición, estimación, cantidad y conservación del área, los procedimientos que pueden utilizar los alumnos son:

1. Calcar la unidad de medida dada en la figura, repitiendo este procedimiento hasta cubrir toda la superficie.
2. Recortar y sobreponer la unidad de medida en la figura
3. Cuadricular tanto la superficie a medir como la unidad con que se mide, resultando una unidad alterna para medir las figuras. Este procedimiento puede ser complejo para aplicarlo en la figura 28.
4. Calcular la medida racional como resultado de los procesos de medición.

Con cualquiera de estos procedimientos el alumno puede comprender que la figura se compone de un número determinado exacto de la unidad de medida correspondiente.

Este momento exige que el alumno conciba el área como el tamaño de las superficie, además éste es un método conveniente que permite determinar el número de unidades requeridas para expresar la medida de una superficie plana.
La situación está determinada así porque permite efectuar la técnica del pavimentado, la cual es una actividad previa para la comprensión del significado de las fórmulas. (Posibilidad que merece ser ampliada para una nueva investigación) "*El pavimentado posibilita el paso de estructuras aditivas a estructuras multiplicativas*" (OLMO 1993. Pág. 46)

Esta situación fue pensada siguiendo dos parámetros implícitos en el proceso de medición:

1. *"Una superficie se compone de subregiones y se puede realizar diferentes arreglos o reorganizaciones con ellas.*
2. *Las partes componentes (subregiones) deben tener la misma área; esto es, adquirir el concepto de unidad, y hacer uso de la iteración de la misma para asignar un número a una región dada" (OLMO 1993. Pág. 46)*

A continuación se presenta una de las soluciones por pavimentado del momento 2:

Solución del momento 2 de la situación:

S1 U1

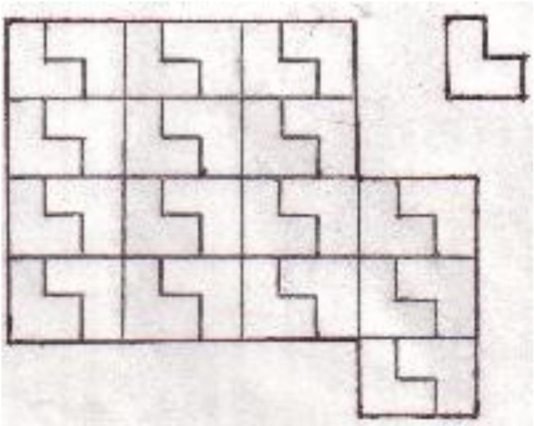


Figura 29

S2 U2

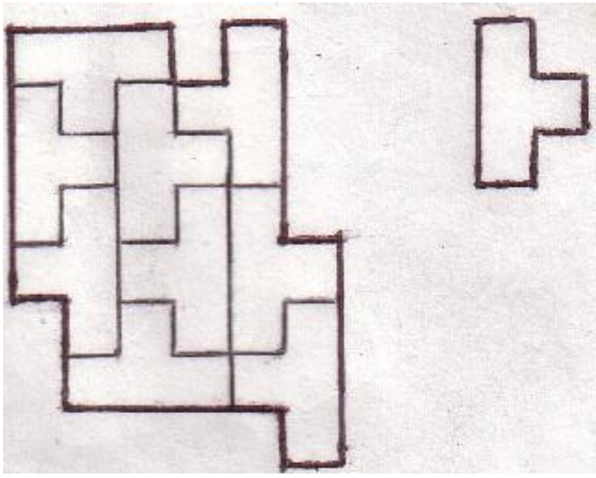
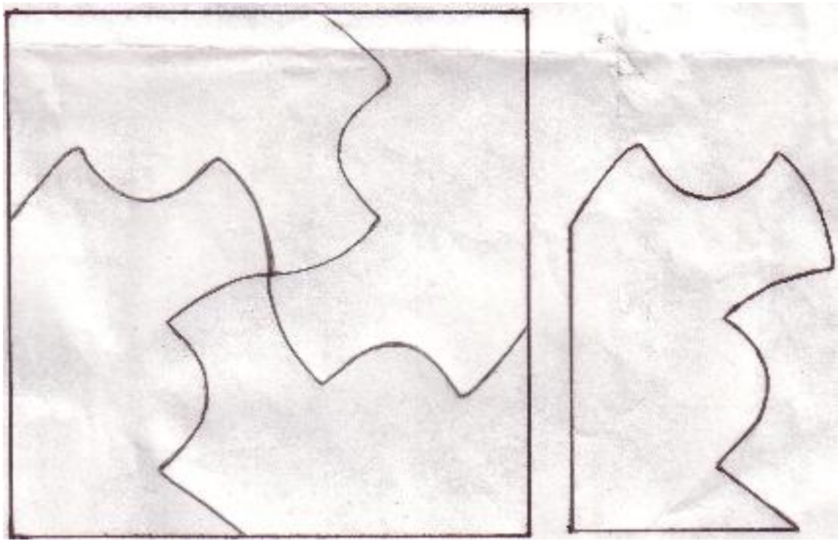


Figura 30

S3 U3



a- La figura S1 mide 30 U1
b- La figura S2 mide 9 U2
c- La figura S3 mide 4 U3
d- U1 es de S1 una 1/30 parte
e- U2 es de S2 una 1/9 parte
f- U3 es de S3 una 1/4 parte

Resultados Momento 2:

Este segundo momento se efectuó en parejas, se les entrego a 30 estudiantes (15 parejas) una guía de trabajo (ver guía 2) que contiene tres figuras y tres unidades de medida.

En general los alumnos utilizaron los procedimientos que se habían esperado, los cuales corresponden a:

Tipo 1: Calcaron la unidad de medida dada en la figura, repitiendo este procedimiento hasta cubrir toda la superficie.
Este procedimiento lo realizaron el 66.66% de los estudiantes aproximadamente.

Tipo2: Recortaron y sobrepusieron la unidad de medida en la figura dada.
El 33.44% de los estudiantes empleo este método aproximadamente.

Tipo 3: Cuadricularon tanto la superficie a medir como la unidad con que se mide, resultando una unidad alterna para medir las figuras. Este procedimiento puede ser complejo para aplicarlo en la figura 28.
Este procedimiento ningún estudiante realizo lo realizó.

Tipo 4: Calcularon la medida racional como resultado de los procesos de medición, pero el 70% aproximadamente no logró expresarla.
El 100% de lo estudiantes llevaron a cabo este procedimiento.

Los resultados se resumen en la **Tabla 14**:

Tabla 14 Resultados Generales de la situación 1: momento 2

Tipo Respuesta	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
Tipo 1	20	66.66% aproximadamente
Tipo 2	10	33.44% aproximadamente
Tipo 3	0	0
	TOTAL: 30 alumnos	

Tabla 14

Específicamente por pregunta se encontraron los siguientes resultados:

a- ¿Cuánto mide la figura S1 medida con la unidad U1?

Las Respuestas obtenidas y los procesos realizados por los estudiantes para dar solución a este interrogante, fueron:

1) Dibujaron la unidad dada en la figura correspondiente, estableciendo el número de veces que cabe:
El 39.9% de los estudiantes utilizaron este método, el 26.7% de éstos respondió correctamente y el 13.2% incorrectamente,

2) Tomaron la unidad dada y la recortaron y empezaron a sobreponerla en la figura, dibujándola; estableciendo el número de veces que cabe en la figura:
El 33.4% de los estudiantes utilizaron este método, el 26.7% de éstos respondió correctamente y el 6.7% incorrectamente.

3) Dibujaron la unidad U1 en la figura S1, formando un rectángulo compuesto por seis unidades U1, luego dibujaron el rectángulo obtenido en la figura S1 y observaron que cabían cuatro rectángulos de estos exactamente y sobraba un espacio, y para medir el espacio sobrante dibujaron la unidad U1 y vieron que cabía seis veces. Así determinaron que la unidad U1 cabe 30 veces en la figura S1:
El 20% de los estudiantes utilizaron este método, respondiendo correctamente.

4) Dibujaron la unidad U1 en la figura S1, formando un rectángulo compuesto por dos unidades U1, luego dibujaron el rectángulo obtenido en la figura S1 y observaron que cabían 15 rectángulos exactamente. Así determinaron que la unidad U1 cabe 30 veces en la figura S1:
El 6.7% de los estudiantes utilizaron este método y las respuestas fueron incorrectas.

b- ¿Cuánto mide la figura S2 medida con la unidad U2?

1) Dibujaron la unidad dada en la figura correspondiente, estableciendo el número de veces que cabe:

El 66.6% de los estudiantes utilizando este método, respondiendo correctamente.

2) Tomaron la unidad dada y la recortaron y empezaron a sobreponerla en la figura, dibujándola; estableciendo el número de veces que cabe en la figura:
Cinco parejas realizaron este mismo procedimiento:
El 33.4% de los estudiantes utilizaron este método, el 26.7% de éstos respondió correctamente y el 6.7% incorrectamente.

c- ¿Cuánto mide la figura S3 medida con la unidad U3?

1) Dibujaron la unidad dada en la figura correspondiente, estableciendo el número de veces que cabe:
El 66.6% de los estudiantes utilizaron este método, el 53.4% de éstos respondió correctamente y el 13.2% incorrectamente.

2) Tomaron la unidad dada y la recortaron y empezaron a sobreponerla en la figura, dibujándola; estableciendo el número de veces que cabe en la figura:
Cinco parejas realizaron este mismo procedimiento:
El 33.4% de los estudiantes utilizando este método, respondiendo correctamente.

d- ¿Qué parte es U1 de S1?

Para dar respuesta a esta pregunta, todos los estudiantes recurrieron a la respuesta de la pregunta "a" y de acuerdo a esa respuesta reconocían la respectiva fracción, así:
El 100% de los estudiantes utilizaron este método, el 73.3% de éstos respondió correctamente y el 26.7% incorrectamente.

e- ¿Qué parte es U2 de S2?

Para dar respuesta a esta pregunta, todos los estudiantes recurrieron a la respuesta de la pregunta "b" y de acuerdo a esa respuesta reconocían su respectiva fracción, así:

El 100% de los estudiantes utilizaron este método, el 93.3% de éstos respondió correctamente y el 6.7% incorrectamente.

f- ¿Qué parte es U3 de S3?

Para dar respuesta a esta pregunta, todos los estudiantes recurrieron a la respuesta de la pregunta "c" y de acuerdo a esa respuesta reconocían su respectiva fracción, así:

El 100% de los estudiantes utilizaron este método, el 86.8% de éstos respondió correctamente y el 13.2% incorrectamente.

Análisis a Posteriori del Momento 2:

Cuando se diseño la situación se esperaba que los alumnos realizaran cualquiera de los siguientes procesos para dar respuesta a los interrogantes planteados:
- Dibujar la unidad de medida, estableciendo el número de veces que cabe en la figura. Con este método los alumnos comprenden que una figura se compone y se descompone por otras, logrando comprobar que el área es un medio conveniente para expresar el tamaño de una región; es decir, para expresar el número de unidades requeridas para cubrir una región plana, y que no se requiere necesariamente del uso de formulas para hallarla, es suficiente con recubrir la figura con la unidad de medida dada y contar el número de veces que cabe en ésta.

- Tomar la unidad dada y recortarla, y empezar a sobreponerla en la figura, dibujándola; estableciendo el número de veces que cabe. Este método se apoya en un material concreto para acoplar la unidad dada en la figura, de esta manera se reconoce que una figura esta conformada por otras. Las teselaciones son recubrimientos de la figura, donde se utiliza la unidad de medida para identificar cuantas veces se repite en la figura, lográndose comprobar que el área es una medida de recubrimiento.

Estos métodos con acoplamientos y teselaciones, permiten a los alumnos desarrollar su creatividad con el diseño de estrategias, observando que una figura se compone y descompone por otras, permitiéndoles construir esquemas de conservación al comprobar que las figuras se componen por un número de partes iguales.

- Cuadricular tanto la figura como la unidad dada, estableciendo el número de veces que cabe en la figura (ningún estudiante realizo este procedimiento). Los alumnos no reconocen que la unidad dada, también se puede componer y descomponer por otras unidades, pudiendo determinar el número de veces que cabe esa nueva unidad en la figura total.

Con la solución de las preguntas "d", "e" y "f", se pudo observar que los estudiantes reconocen las unidades de la figura como fracciones del mismo, pero no saben escribir correctamente las fracciones, puesto que expresan que el área mayor no cabe en la unidad de área menor, mencionando que si la medida es "*-1", "0.1", "-99*", *"no cabe"*.

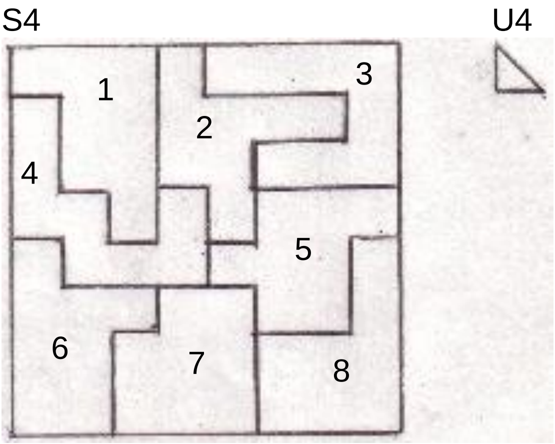
En resumen con este momento los estudiantes pudieron observar diferentes contextos donde aparece el área, comprendiendo que una región se puede componer de subregiones y que pueden realizarse diferentes arreglos o reordenaciones con ellos, también adquirieron el concepto de unidad, al hacer uso de la iteración de la misma para asignar un número.

Los estudiantes en este caso ven la unidad totalmente independiente de la figura u objeto a medir, tanto en forma como en tamaño," (…) y es cuando se consigue una unidad apropiada interfigural, la misma para todas las figuras u objetos. Así se tendrá como resultado de la medida un número, y ambas nociones, medida y número se enriquecen entre al tratar de medir una misma unidad de objetos de diferente tamaño, forma, figura o densidad". (CHAMORRO. 1994. Pág. 22)

Momento 3:

A partir de la relación establecida en el momento 2; se les entrega una guía a los estudiantes, donde se les presenta la figura 4 y se les cuestiona sobre:
a- ¿Cuál de las subdivisiones de las figuras comparadas entre si son iguales, utilizando U4 como patrón de medida?, luego se les interroga sobre:
b- ¿Cuánto mide U4 en la parte número cuatro comparado con S4? Y
c- ¿Cuánto mide U4 comparado con S4?

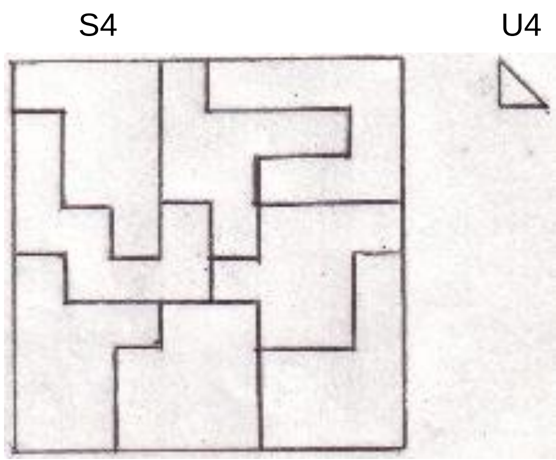
Figura 31



Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
<u>Guía 3: Guías para el alumno</u>

Situación No. 1: UNIDADES NO ESTANDAR
Momento 3.

1) Busca un compañero de tu grupo y dada la siguiente figura respondan:



a- ¿Cuál de las subdivisiones de las figuras comparadas entre si son iguales, utilizando U4 como patrón de medida?
b- ¿Cuánto mide U4 en la parte número cuatro comparado con S4?
c- ¿Cuánto mide U4 comparado con S4?

Explica el procedimiento utilizado para responder cada pregunta:

Análisis Preliminar Momento 3:

De esta manera, se busca que los estudiantes reconozcan que a pesar de que las figuras en las cuales se descompone la figura 4 tiene diferente forma su característica principal es que tienen la misma medida de área; además que interioricen que tanto la unidad de medida dado como las subdivisiones de la figura son parte exacta de la figura 4, un número determinado de veces.
Para alcanzar lo anterior se espera que los estudiantes cuadriculen la figura S4 y a cada cuadrado obtenido le tracen su diagonal, obteniendo dos unidades U4 por cada cuadrado.

Solución del momento 3:

S4 U4 S4 U4

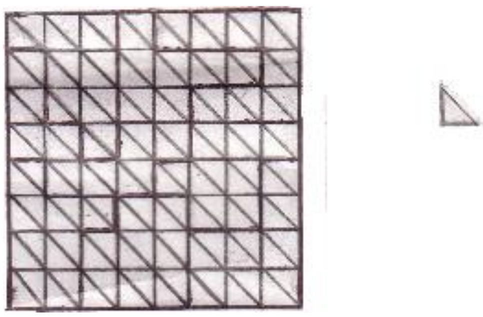


Figura 32

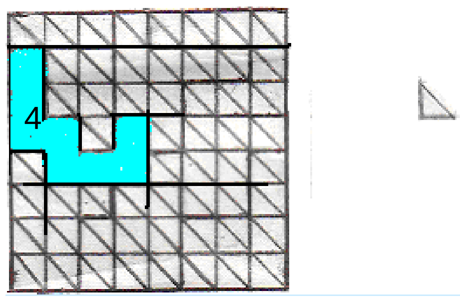


Figura 33

(La parte sombreada es la subdivisión número cuatro de S4).

a- Teniendo U4 como unidad de medida y comparando todas las subregiones en las cuales fue dividida S4 se concluye que todas ellas son iguales.

b- U4 cabe en la parte número cuatro de S4 16 veces, es decir, U4 es de la parte número cuatro de S4 1/16 parte.

c- U4 cabe en S4 128 veces, es decir, U4 es de S4 1/128 parte.

Resultados Momento 3:
El trabajo realizado en este momento se llevo a cabo de manera individual, se les dio a 28 estudiantes la guía 3 que contiene una figura y una unidad de medida y se les interrogo sobre:

a- ¿Cuál de las subdivisiones de las figuras comparadas entre si son iguales, utilizando U4 como patrón de medida?

b- ¿Cuánto mide U4 en la parte número cuatro comparado con S4?
c- ¿Cuánto mide U4 comparado con S4?

Los procesos realizados por los estudiantes para dar solución a esas preguntas, fueron:

1) Cuadricularon la figura dada y a cada cuadrado obtenido le trazaron su diagonal, obteniendo dos triángulos por cada cuadrado, luego procedieron a contar los triángulos que contenía cada subdivisión de la figura.

El 85% de los estudiantes utilizaron este procedimiento.

2) La unidad de medida U4 la unieron con otro triángulo de la misma medida de U4, formando un cuadrado, luego cuadricularon la figura S4 y contaron los cuadrados que contenía cada subdivisión y multiplicaron por dos.

El 15% de los estudiantes utilizaron este método.

Los alumnos tuvieron en cuenta los procedimientos descritos anteriormente, para dar respuesta al interrogante a, el 100% coincidió en afirmar que a pesar de que las subdivisiones tuvieran forma diferente, tenían la misma cantidad de la unidad de medida U4. Al resolver este interrogante inmediatamente encontraban la respuesta al interrogante b, la cual era que U4 cabe 16 veces en cada subdivisión de la figura.

Al dar respuesta a la pregunta c, el 25% de los estudiantes mostraron errores de cálculo o conteo, pues a pesar de haber obtenido correctamente el número de veces de U4 en cada subdivisión, no lograron determinar que U4 cabe 128 veces en S4. Por su parte el 75% de los estudiantes si lograron obtener dicha cantidad.

Análisis a Posteriori del Momento 3:

Al diseñar este momento de la situación se esperaba que los estudiantes reconocieran que a pesar de que las figuras en las cuales se descompone la figura dada tenía diferente forma median lo mismo, es decir, todas las subdivisiones de dicha figura tienen la misma área pero diferente perímetro; además que interiorizaran que tanto la unidad de medida dada como las subdivisiones de la figura son parte exacta de la figura total, un número determinado de veces; permitiéndoles reconocer la propiedad que tiene el área de ser equivalente si se somete a ciertas transformaciones y poder ser diseccionada y ser congruente.

Conociendo los procesos llevados a cabo por los estudiantes se evidencia que el 85% de ellos llevo a cabo el procedimiento que se esperaba el cual era que cuadricularan la figura dada y a cada cuadrado obtenido le trazaran su diagonal, obteniendo dos unidades de medida por cada cuadrado, para dar solución a los interrogantes planteados. Con este método los estudiantes comprenden que la figura total se puede componer y descomponer por otras unidades, a demás de reconocer que el área es una medida de recubrimiento y que no se requiere del uso de fórmulas para trabajarlas, donde se ve la necesidad de recubrir las formas de las figuras y contar la cantidad de unidades iguales que las recubren.

El 15% de los estudiantes restantes emplearon un método afín más no igual, el cual consistió en unir la unidad de medida con otra igual quedando formado un cuadrado, luego cuadricularon la figura total y contaron los cuadrados que contenía cada subdivisión y multiplicaron por dos.

Estos estudiantes al emplear este método reconocen el concepto de área como una unidad de recubrimiento y comprenden que tanto la unidad de medida dada como la figura total se puede componer y descomponer en otras figuras. La estrategia utilizada para dar respuesta a las preguntas planteadas trae implícita un proceso de cálculo, pues al darse cuenta que la nueva unidad de medida obtenida (el cuadrado) cabe un número determinado de veces tanto en las subdivisiones de la figura como en ella misma generalizan la cantidad de veces que cabe la unidad de medida dada en una de las subdivisiones de la figura.

Roles:

Rol del Docente:

El docente debe motivar y guiar el desarrollo de la situación desde los diferentes momentos, evidenciando las dificultades, obstáculos y fortalezas que se presenten en los procesos llevados por los alumnos para responder a los interrogantes planteados.

Rol del alumno:

El alumno debe tener una actitud participativa y creativa, además de ser reflexivo, critico y analítico frente a los procesos que realiza para poder responder las preguntas que se presentan en los diferentes momentos.

Evaluación:

La evaluación es constante y cualitativa, se lleva durante todo el desarrollo de la situación, a partir de los procesos que realizan los alumnos desde los diferentes momentos.

4.5.2 Situación No. 2 UNIDADES ESTÁNDAR

Justificación

La medición de áreas con unidades estándar debe partir de la construcción por parte del alumno del sistema de unidades legales[1] donde éste pueda compararlas entre ellas y pueda reconocer la importancia de recubrir superficies con una unidad preestablecida socialmente.

Es por esto que la siguiente situación da cuenta del proceso de medición que debe llevar un alumno al acercarse al sistema de *unidades legales* y pueda utilizarlas para medir diferentes objetos de su entorno, dándole cotidianidad a la medida, y como consecuencia de ese proceso de medición el alumno puede llegar a la conversión de unidades estándar

En general la situación problema que se presenta tiene como enfoque una de las aproximaciones que según María del Olmo (1993), se pueden hacer a la magnitud área, enfoque que la autora llama *situaciones de medición* en las cuales la superficie aparece ligada a un proceso de medida, dentro de esta aproximación se encuentra el *método por exhausción con unidades*. Es decir, "*rellenando el interior de la superficie a medir con unidades de superficie colocadas unas con otras y no superpuestas, y en aquellas partes de la superficie donde no quepan se recurre a rellenar con unidades más pequeñas*". (OLMO y otros, 1993. Pág. 20).

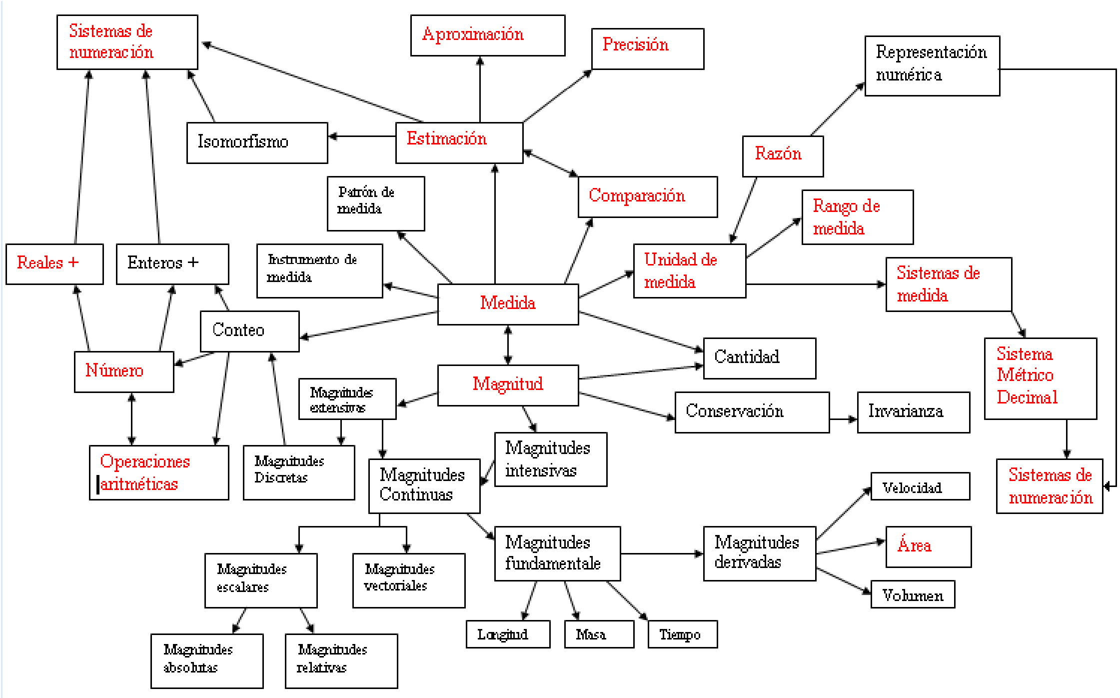
Motivo: Construcción de las unidades estándar

Grado: La situación ha sido diseñada y será desarrollado por alumnos de grado noveno de educación básica.

Red Conceptual de la Situación Problema

Esta es la red conceptual del pensamiento métrico y sistemas de medida que interviene directamente en la situación, con color rojo se encuentran resaltados los conceptos que se desarrollan o se ponen en juego durante la situación:

[1] Entendidas "como aquellas unidades que tienen validez en gran parte de las civilizaciones actuales, es el caso de las expuestas por el sistema internacional de medida" (Maria Ángeles del Olmo y otros 1993)



Estándares asociados

Los siguientes son los estándares que están asociados a la situación propuesta

Pensamiento Métrico y sistemas de medida

- Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo con el contexto.
- Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
- Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
- Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
- Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.
- Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

- Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.

- Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas

Pensamiento Espacial y sistemas geométricos

- Identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.

Medios:

Medios físicos
- Instrumentos de medición: Metro, Regla
- Papel y lápiz
- Pegante o cinta adhesiva
- Hojas de papel

Medios Abstractos:
- Ideas y conceptos respecto a al tema
- Patrón de medida y unidades de medida estándar

Mediadores

Objetos físicos:
- **Instrumentos de medida:** Son de vital importancia para el desarrollo de la situación, debido a que cuando el estudiante accede al proceso de medición toma conciencia sobre la necesidad de medir y su importancia para la ingeniería, la arquitectura, el diseño y las matemáticas. A través de estos instrumentos el estudiante accede esencialmente al concepto de área, aunque implícitamente también interviene la medida de longitudes. La utilización del metro o la regla, le permitirán observar lo práctico de la utilización de las unidades convencionales para la medición de áreas de superficies.

- **Materiales de trabajo** :

Unidades estándar construidas: son mediadores estos materiales pues permiten el posterior desarrollo de la situación, ya que con ellos se realizarán las mediciones pedidas. Además son las unidades estándar de la magnitud área y además se evidencia la idea del sistema de unidades.

Ambientes de Aprendizaje

- ✓ **Ambiente escolar:**
- El aula de clase tradicional: es esencial este ambiente para que el alumno realice y complete las guías que se le propone llenar. Además el aula de clase es uno de los ambientes que se propone para que el alumno realice las mediciones de algunos objetos.

- El patio o espacio amplio: este espacio le permitirá al estudiante realizar la construcción de las unidades de medida que se le piden, pues le da facilidad para distribuir el papel, pegarlo, etc.

Momento 1

Construir las unidades estándares m^2, dm^2, cm^2 con hojas de papel**.**

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en educación básica énfasis Matemáticas

Guía 4: Guías para el alumno

Situación No. 2 UNIDADES ESTÁNDAR

Momento 1. Con el material que acaban de recibir: metro y hojas de papel, deben construir: un metro cuadrado, un decímetro cuadrado y un centímetro cuadrado.

Expliquen el procedimiento utilizado.

Análisis preliminar Momento 1

El momento 1 de la situación, se plantea teniendo en cuenta que los alumnos ya han realizado un trabajo previo con procesos de medición de la magnitud longitud, con la magnitud área solo habían tenido un acercamiento a través de los procesos de calculo, por lo que los estudiantes no han sentido la necesidad de hacer mediciones de área por medio de unidades de medida estándar o no estándar.

Por lo tanto antes de la situación, se ha realizado un trabajo previo con el objetivo de que los alumnos reconozcan la importancia de realizar procesos de medición también para medir áreas.

El objetivo de proponerle al alumno la construcción de las unidades estándar, es que tuvieran la posibilidad de familiarizarse con el patrón y la unidad de medida a partir de su proceso de construcción, pues desde este proceso de construcción se facilita la identificación del nivel de representación que tienen los estudiantes sobre el Metro cuadrado.

Además por medio de la construcción de las unidades se pretende que el alumno haga uso de la medida directa y relacionen la unidad de medida con el patrón de medida.

En este momento se espera que el alumno tome el papel y lo mida con la regla para construir las unidades estándar que se piden. Aunque no se descarta que construyan áreas diferentes que midan $1m^2$, $1cm^2$... se estima que construyan una forma tradicional como el cuadrado.

Los saberes matemáticos que están involucrados en este momento (momento 1) son las unidades estándar de la magnitud área y la medición indirecta.

Similar a lo que se esperaba, los estudiantes realizaron la construcción de las unidades estándar con el material disponible, a partir de la construcción de cuadrados para lo cual realizaron medidas con las unidades de longitud que disponían (metro, regla), algunos de ellos tomaron como referencia otras unidades de medida de área como la baldosa del salón, todos los estudiantes representaron las unidades de medida de área como cuadrados.

Resultados momento 1:

De acuerdo a lo realizado por los estudiantes durante la construcción de las unidades estándar en el momento 1 de la situación, se describen ahora los resultados y el análisis de estos resultados, a continuación se incluye una tabla donde se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizan determinado procedimiento para construir las unidades estándar de la magnitud área.

Las respuestas de los estudiantes en este primer momento se categorizaron como tres tipos diferentes:

Respuestas Tipo 1 (T1): esta respuesta consiste en la construcción de las unidades estándar de la magnitud área (m^2, dm^2, cm^2) utilizando como representación el cuadrado midiendo con el metro su largo y su ancho.

Respuestas Tipo 2 (T2): Esta respuesta consiste en la construcción de las unidades estándar de la magnitud área (m^2, dm^2, cm^2) utilizando como representación el cuadrado pero esta vez se miden sus cuatro lados.

Respuestas de Tipo 3 (T3): Utilizando como referencia las baldosas se construyen un cuadrado de un metro de lado y luego se superpone el periódico y se obtiene la unidad estándar m^2 recortando los sobrantes.

A continuación se tabulan los resultados obtenidos para la actividad según el tipo de respuestas más frecuente

Tipo Respuesta	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
T1	15	50%
T2	11	36,67% aproximadamente
T3	4	13.3% aproximadamente
	TOTAL 30 alumnos	

Tabla 15: Tipos de respuestas dadas por los estudiantes en momento 1

Análisis de los resultados (Momento 1)

Como se esperaba, todos los alumnos construyeron la representación de las unidades estándar de la magnitud área (m^2, dm^2, cm^2) como un cuadrado, pero sin tener en cuenta que el cuadrado debía tener completas sus características (además de lados iguales, todos sus ángulos rectos).

El (50%) de los alumnos construye el cuadrado y para confirmar que efectivamente este cuadrado es una unidad de medida de un metro cuadrado, reconocen que su área se verifica como geométricamente y aritméticamente se conoce: El producto de la base por la altura.
Un porcentaje menor, también significativo (36.67%) se ubica en la pregunta de tipo 2, al construir la unidad de medida con el periódico los estudiantes se percatan de medir cada uno de sus lados, estos a diferencia de los estudiantes que respondieron con el T1, quizá solo reconocen que se estaba construyendo un cuadrado de un metro de lado, y no la unidad de medida de área que se les pide.
El 13.3% que tuvo un acercamiento a la construcción de la unidad de medida de área pedida, se ubican en la respuesta de tipo 3, pues aparte del metro como unidad para medir, utilizaron unidades de medida diferente.

Como conclusión se puede ver que los estudiantes utilizan procedimientos similares a los utilizados en el manejo de unidades no estándar, por lo que cobra sentido el trabajo con unidades no convencionales.

Según estos resultados los alumnos se encuentran en el primer nivel de conceptualización de la magnitud área, puesto que la mayoría de ellos utiliza un procedimiento de cálculo del cual no entienden el significado de la fórmula.

Momento 2

Llenar la siguiente tabla midiendo las unidades que acabas de construir unas con otras.

Medir / **Con**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**
m^2				
dm^2				
cm^2				
mm^2				

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en educación básica énfasis Matemáticas

<u>Guía 5: Guías para el alumno</u>

Situación No. 2 UNIDADES ESTÁNDAR

Momento 2:
Utiliza las unidades construidas para que completes la siguiente tabla.

Medir / Con	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
m^2				
dm^2				
cm^2				
mm^2				

Describe cómo llenaste los espacios correspondientes a las mediciones de la unidad milímetros cuadrados con las otras unidades y consigo misma
____
____
____
____
____
____
____
____

Tener las unidades previamente construidas ¿facilito la medición de unas con otras? ¿Por qué? O sin tenerlas se hubiese podido llenar la tabla ¿cómo?
____
____
____
____
____
____
____.

Análisis Preliminar momento 2:

En el segundo momento la situación involucra un proceso de medición de áreas donde el estudiante interactúa el mismo con el objeto de conocimiento hallando las medidas de área.

En la situación se ponen en juego los siguientes saberes:
Las relaciones de equivalencia de las unidades de medida de área, medición, medida racional y concepto de área, también se observa que las unidades estándar en esta situación requieren ser comparadas unas con otras mediante el proceso de medición.

En este momento se espera que el alumno compare las diferentes unidades estándar unas con otras, y reconozca que hay un sistema entre ellas.

Aunque el objetivo de este momento no es que los alumnos realicen conversiones, se espera que sea la conversión una consecuencia de la medición que el alumno hace al comparar unas con las otras

Este segundo momento de la situación pone en juego dos tipos de procedimientos:

1. Donde los estudiantes con las unidades de medida presentes de la magnitud área deben compararlas entre sí midiendo unas con otras o superponiéndolas y mirar cuánto caben.
2. Donde el alumno tras identificar una relación de equivalencia entre las unidades estándar de la magnitud área puestas en la situación, debe utilizar el cálculo para hallar la medida del milímetro cuadrado comparado con las demás unidades.

Se pide al alumno después de realizar las mediciones consignar la información en una tabla con el fin de tener un seguimiento de las mediciones que realiza, además la tabla permite que el alumno evidencie de manera más práctica las relaciones que existen al medir unidades del mismo sistema, en este caso las unidades de medida de área del sistema métrico decimal.
También se vio pertinente trabajar con una tabla de doble entrada para consignar los datos, pues anteriormente ya se había trabajado con el mismo esquema para la magnitud longitud por lo que se trata es de seguir un proceso.

Análisis de los resultados

Contrario a lo esperado, el primer procedimiento empleado por los alumnos para llenar la tabla, fue la conversión de unidades, utilizaron entonces la calculadora para completar la información pedida en la tabla, en el momento en que se les presentó la dificultad de hacer la conversión de una medida de una unidad de orden menor con una de orden mayor, trataron de utilizar las unidades concretas que habían construido previamente, pero igual les fue difícil resolver la situación, sin embargo fue el calculo y no la medición lo que se mantuvo en la solución de este momento.

En el momento tres de la situación se propone una actividad para que el alumno reconozca y emplee el rango y orden de las unidades de medida de área

Se propone consignar la información de las medidas de área realizadas en este momento de la situación, en una tabla para que además de la identificación del orden y rango de las unidades, se pueda complementar la actividad haciendo que los estudiantes utilicen estas unidades en contexto y sepan la utilidad de medir con ellas además de que con esta actividad es posible hacer un acercamiento a la medición continua, ya que las unidades estándar no son conmensurables con las superficies que generalmente deben medirse.

El alumno deberá reconocer el uso apropiado de cada unidad estándar se espera que este mida superficies diferentes y compare las unidades estándar de las no estándar, se estima que el alumno reconozca la importancia de teselar y del uso de medidas apropiadas para recubrir.
Esta situación comprende que el estudiante al escoger una unidad estándar determinada para medir la superficie pedida, utilice como complemento otra unidad de orden inferior para terminar de cubrir la superficie pedida y obtener una medida más exacta.

En cuanto a la selección de unidades de área para medir las superficies pedidas se puede decir que el tablero sea medido en primer lugar con el metro cuadrado y se complete su medición con el decímetro cuadrado, la baldosa y la mesa del profesor se estima sea medida con el decímetro cuadrado y se completen sus medidas con el centímetro cuadrado.
Durante el desarrollo de este tercer momento los alumnos empezaron a utilizar diferentes unidades de medida, sin embargo quienes utilizaron la unidad de medida más adecuada de acuerdo a la superficie propuesta, influenciaron a los demás y fueron pocos los que experimentaron por ellos mismos la importancia de seleccionar adecuadamente el orden de las unidades según la superficie a medir, sin embargo, todos los alumnos realizaron las mediciones con varias de las unidades y sabían discernir sobre si el procedimiento que seguían sus compañeros era el adecuado o no, o si era lógico aceptar las sugerencias que les hacían, por lo que el objetivo del momento no se dejo de cumplir.

Los conceptos formales asociados a este momento son: orden y rango de las unidades estándar de la magnitud área, la medición, la estimación y el concepto de área.

Una vez propuestas y realizadas las actividades se comparan los procedimientos esperados con los procedimientos hechos por los alumnos, validando los diferentes aprendizajes, la validación se convierte en la situación en un aspecto importante que permite confrontar lo que ellos saben y lo que se esperaba que aprendieran.

Momento 3: Rango y Orden

De acuerdo a la siguiente tabla se deben realizar las medidas de las superficies que allí se describen con cada una de las unidades sugeridas.

Medir / Con	Tablero	Baldosa	Mesa del profesor
m^2			
dm^2			
cm^2			

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en educación básica énfasis Matemáticas

Situación No. 2 UNIDADES ESTÁNDAR

Momento 3: Formar grupos de tres estudiantes y con la estrategia que prefiera el grupo y utilizando cualquiera de las unidades de medida, la que consideren más apropiada usarla para, medir cada una de las tres superficies y consignar su medida en la casilla correspondiente.

Medir / Con	Tablero	Baldosa	Mesa del profesor
m^2			
dm^2			
cm^2			

Qué unidad de medida seleccionaron para medir el tablero________________

Qué unidad de medida seleccionaron para medir la baldosa ________________

Qué unidad de medida seleccionaron para medir la mesa del profesor ________________

Por qué creen que la unidad seleccionada es la adecuada en cada caso o qué otra pudo ser
____
____
____
____
____
____
____
____

Resultados Momento 3:
En las siguientes tablas (tablas 3, 4 y 5), se muestra el porcentaje de alumnos que prefieren medir con determinadas unidades de medida de la magnitud área (m^2, dm^2, cm^2) que prefieren medir con determinadas unidades de medida los siguientes objetos: una baldosa, el tablero y la mesa del profesor.

Unidades de medida	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
dm^2	16	54% aproximadamente
cm^2	14	46% aproximadamente
m^2	0	0%
	TOTAL 30 alumnos	

Tabla 3 Unidades de medida utilizadas para medir la baldosa

Unidades de medida	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
m^2	30	100% aproximadamente
cm^2	0	0% aproximadamente
dm^2	0	0%
	TOTAL 30 alumnos	

Tabla 4 Unidades de medida utilizadas para medir el tablero

Unidades de medida	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
dm^2	18	60% aproximadamente
cm^2	12	40% aproximadamente
M^2	018	0%
	TOTAL 30 alumnos	

Tabla 5 Unidades de medida utilizadas para medir la mesa del profesor

Análisis de los resultados (Momento 3)
Como se estimo la mayoría de los alumnos (54%) utilizó el decímetro cuadrado para medir la baldosa, de este 54% solo el 10.125% utilizó en conjunto el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado para dar la medida de la superficie indicada.

Del mismo modo, el 100% de los alumnos utiliza el metro cuadrado para medir el tablero, solo el 33% aproximadamente utiliza en conjunto el metro cuadrado y decímetro cuadrado para dar una medición exacta.

Por ultimo, como se había previsto la mayoría de los alumnos (60%) escoge el decímetro cuadrado para medir la mesa del profesor, y el 36.66%

aproximadamente utiliza el decímetro cuadrado y centímetro cuadrado en conjunto para obtener la medida de la superficie pedida.

Los resultados obtenidos también muestran un porcentaje significativo de alumnos que aún poseen dificultades en la selección de unidades para medir superficies, tal vez por la familiaridad que los alumnos tienen con el manejo de unidades de medida de orden inferior como es el centímetro cuadrado. Además al no identificar el rango se cae en el error de querer recubrir totalmente la superficie del escritorio.

Los estudiantes en su mayoría tuvieron la habilidad de escoger una unidad de medida apropiada para medir los objetos, con lo cual se demuestra que están construyendo el proceso de estimación que requiere aparte de esta elección de la unidad otras habilidades y conceptos, por lo que fue pertinente implementar el uso de unidades del sistema internacional como antesala para abordar los procesos de estimación.

De lo anterior se puede concluir que el uso de situaciones que impliquen la medición, el manejo y la selección de unidades estándar en contexto, permite que los alumnos reconozcan la unidad de medida apropiada para medir un rango determinado identificando allí un sistema numérico construido por ellos mismos.

ESTIMACIÓN DE ÁREAS.

Introducción:

La estimación es el resultado de estimar: es la medida realizada a simple vista de una determinada cantidad medible de un objeto. Es por lo tanto una conjetura, la cual de ser enseñada en las aulas de clase, sin embargo es tipo de actividades no suelen desarrollarse dentro de ellas, ya sea por la falta de esta habilidad de los maestros, por su grado de dificultad para enseñarlas o falta de orientaciones y estrategias para desarrollarlas. Es necesario que los alumnos sean capaces de realizar estimaciones, lo cual le será útil en situaciones donde en primera instancia tengan que prescindir de instrumentos, tales como: cantidad de tela para un vestido, un mantel, una cortina, distancia a la que se encuentra un lugar, pintura que se necesita para pintar una casa, cantidad de baldosas para el piso de una habitación, medida de objetos, entre otros. Todas estas estimaciones resultan útiles cuando la medición exacta es difícil, y se puede tener un margen de error en la medida pedida. Es importante entonces que los alumnos adquieran mediante la práctica está habilidad y puedan utilizarla en situaciones de su vida diaria.

La actividad de estimación que se propone tiene como objetivo general promover en el estudiante el uso y adquisición de estrategias de estimación en la resolución de problemas, y sepa identificar cuando es apropiado el uso de la estimación y cuando el cálculo. Además de que el alumno desarrolle el sentido del número y relaciones entre ellos.

Una de las estrategias de estimación que se trabajará en la situación son las técnicas de comparación, basada en el uso de unidades de referencia, es decir el conocer e interiorizar la medida de objetos cercanos y conocidos y asociarlos con aquellos que se desean medir.

La situación se desarrollará en dos momentos: en el primer momento se presentará el plano de una casa, en que haciendo uso de unidades de referencia como la cama y la estufa se utilizarán para hallar el área de las habitaciones, la cocina y el baño. En el segundo momento se hará uso de la comparación con unidades no estándar (cuadrito) para hallar el área de Antioquia y a partir de esta establecer relaciones con otros departamentos y con Colombia.

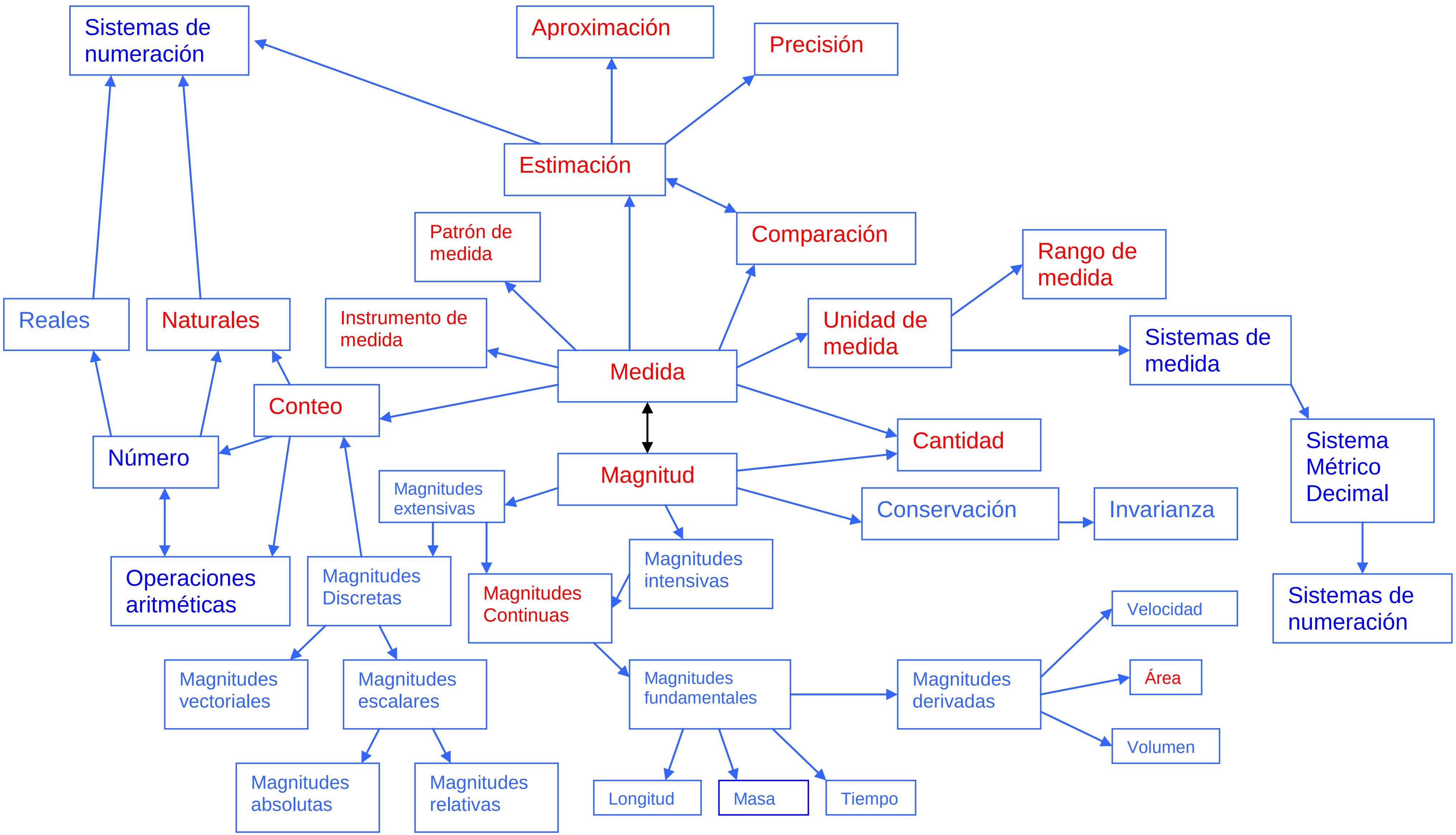
Justificación:

La estimación contribuye a fortalecer el uso de la matemática en la vida real al emplearla en múltiples situaciones sociales, permite mejorar las técnicas y estrategias de razonamiento, es además un complemento para la formación matemática especialmente en lo que se refiere a la enseñanza de la medida, ayuda a la creación de estrategias propias para la resolución de problemas, son algunos de los motivos por los que la estimación merece la incorporación en el currículo.

La estimación hace parte de la matemática y es un componente fundamental en el aprendizaje de la medida, específicamente del área, es por ello que se le debe dedicar tiempo e incorporarla en el currículo, de tal forma que proporcione a los estudiantes una formación básica en los procesos de medida.

Motivo: Estimación de áreas.

Red conceptual: La red conceptual que se utilizará es la del pensamiento métrico. Los conceptos que se movilizarán dentro de la situación aparecen de color rojo.


Sistemas de numeración
Aproximación
Precisión
Estimación
Patrón de medida
Comparación
Rango de medida
Reales
Naturales
Instrumento de medida
Unidad de medida
Sistemas de medida
Medida
Conteo
Cantidad
Número
Magnitud
Sistema Métrico Decimal
Magnitudes extensivas
Conservación
Invarianza
Magnitudes intensivas
Operaciones aritméticas
Magnitudes Discretas
Magnitudes Continuas
Sistemas de numeración
Velocidad
Magnitudes vectoriales
Magnitudes escalares
Magnitudes fundamentales
Magnitudes derivadas
Área
Volumen
Magnitudes absolutas
Magnitudes relativas
Longitud
Masa
Tiempo

Pensamiento involucrado: El pensamiento que interviene de forma directa en la situación es el pensamiento métrico.

Estándares relacionados:
Tercer grado: Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la v ida social, económica y a las ciencias.

Quinto grado: Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.

Séptimo grado: Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.
Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.

Grado: El grado en el que se desarrollará la situación será en 9º de la educación básica secundaria.

Medios: Documentos: Taller guía para la realización de las actividades. Material físico: Mapas de Antioquia, Colombia y América del Sur, Planos a escala de una casa, lápiz, regla.

Mediadores:

Los mapas y el plano de la casa se convierten en mediadores cuando permiten llevar a cabo actividades propuestas para el desarrollo del concepto de estimación, ayudando a los estudiantes a desarrollar un marco mental de referencia para los tamaños de las unidades de medida, relacionando unas con otras, con objetos de la vida real; involucran conceptos y habilidades como: comprensión del concepto de unidad y área que se va a medir, habilidad para comparar objetos, habilidad de realizar la iteración de una unidad, habilidad para seleccionar y usar estrategias para realizar estimaciones.

Rol del Docente:

La situación se organizara en equipos de tres estudiantes lo que permitirá la integración de saberes. En el transcurso de la situación el maestro debe estar atento a las inquietudes de los alumnos, se debe estar mirando los procesos de los alumnos y estar formulando preguntas que permitan generar dudas y problemas en ellos, preguntado el porque de las respuestas. Además de animar a los estudiantes a dar estimaciones lo más exactas posibles.

Rol del alumno:

El alumno deberá tener durante toda la realización de la situación una actitud activa, dinámica, explorativa, analítica, reflexiva, creativa, que le permitirá el desarrollo de las situaciones.

Es importante dentro de estos roles hablar de la forma de evaluación en la cual se encuentran inmersos el maestro y el alumno.

Ambientes de aprendizaje:

La situación se realizará en el aula de clase, y se formarán equipos de 3 estudiantes. En el primer momento se les entregará el plano de la casa y a partir de éstos se responderán las preguntas. En el segundo momento se entregará el mapa de Colombia, que les permitirá realizar las estimaciones iniciales y posteriormente una comprobación mediante el conteo de cuadritos.

Evaluación:

Según Maria de los Ángeles del Olmo en su libro Superficie y Volumen (1993) "la evaluación de las actividades de estimación no debe hacerse según el error cometido, es decir, no deben evaluarse según la diferencia entre la medida real y la estimación". No es lo mismo equivocarse en $5m^2$ cuando se este estimando el área de una habitación en la situación 1, que equivocarse en $5m^2$ cuando se este estimando el área de Colombia en la situación 2. De aquí se recomienda evaluar las actividades de estimación de modo inversamente proporcional a la razón entre el error cometido y la medida real de la cantidad a estimar.

Guía de actividades para el alumno: (ver anexo 1)

Reúnete con un compañero y responde las siguientes preguntas.

Momento 1

Con el plano de la casa que acabas de recibir contesta las siguientes preguntas explicando tus respuestas. (Ver anexo 2)

1. Teniendo en cuenta que una cama sencilla mide 2m de largo y 1m de ancho ¿Cuál es el área de la habitación 1?

____

____

2. Observa la habitación principal 2, allí hay una cama doble, ¿cuanto crees que tiene de área la cama, y la habitación?

____

____

3. Teniendo en cuenta la medida de la habitación 1¿Cuál es el área del baño y de la sala?

____

____

4. Observa la cocina, allí hay objeto que corresponde a una nevera ¿Cuál es el área de la cocina?
   ____
5. ¿Podrías estimar el área total de la casa?
   ____

Momento 2

Responde las preguntas a partir del mapa de Colombia que se te acaba de entregar. Explica tus respuestas en las líneas que corresponde en cada pregunta. (Ver anexo 3)

1. ¿Cuál es la superficie de Antioquia?_____________________________
   ____
2. ¿Cuál es el departamento de menor superficie y mayor superficie y cuál es su área con respecto a la de Antioquia?
   ____
   ____
3. ¿Cuánto es el área de Antioquia con respecto a la de Colombia?
   ____
   ____

Análisis a priori

Esta situación se organiza en torno a los conceptos de estimación, unidades estándar, unidades no estándar, unidad de medida, comparación entre otros conceptos señalados en la red conceptual, y los procesos de medición, estimación, conservación de magnitudes, captura de lo continuo con lo discreto (relación de conceptos de medida y conteo), asignación numérica, selección de unidades de medida y razonamiento. Además de la variable la cual es la estimación y sus valores; objeto presente y unidad ausente y objeto presente y unidad presente.

Se espera que en el **momento 1**, los estudiantes escoja como referente la cama y halle la medida de está la cual es $2m^2$ y obtenida está intenten estimar

cuantas veces cabe el área de la cama en la habitación 1 cuya área es $6.9m^2$, se espera que se les dificulte al tener que comparar el área de la habitación con el área del baño ($5.8m^2$) por ser mas pequeña y la sala ($17.5m^2$) por ser mas grande, por lo que se espera una diferencia mas grande entre la medida real y la estimación.
El área de la habitación 2 es $14.5m^2$ y la cama doble $3.5m^2$; el área de la cocina es $11.5m^2$ y el área total de la casa es de $135.1m^2$.

Las respuestas de los alumnos se clasificarán en tres tipos.

Tipo 1: Respuestas cercanas a la medida real
Tipo 2: Respuestas medianamente cercanas a la medida real.
Tipo 3: Respuestas alejadas de la medida real.

En esta pregunta se considerará una respuesta como tipo 1, cuando se encuentre entre el intervalo $6m^2$ y $7m^2$, debido a que son medidas muy cercanas a la medida real ($6.9m^2$) y teniendo en cuenta la imprecisión que pueden tener los alumnos al medir, ya que no se trata de un método exacto. Como respuesta de tipo 2 se considerará, aquellas que estén entre $5m^2$ -$5.9m^2$ y $7.1m^2$ -$8m^2$ y las respuestas tipo 3 se consideraran aquellas que sean menores de $5m^2$ y mayores de $8m^2$.

En la segunda pregunta se considerará respuestas de tipo 1, para el área de la habitación 2, aquellas que se ubiquen en el intervalo $13.5m^2$ y $15.5m^2$. Se consideran respuestas de tipo 2 las que estén $12.5m^2$ -$13.4m^2$ y $15.6m^2$ -$16.5m^2$ y respuestas de tipo 3 las menores de $12.4m^2$ y mayores de $16.7m^2$

En la tercera pregunta se aceptarán como respuestas de tipo 1, las que se encuentren entre $5m^2$ -$6.5m^2$ para el área del baño y $16m^2$ -$19\ m^2$ para el área de la sala; respuestas de tipo 2, $3.5m^2$ -$4.9m^2$ y $6.6m^2$ -$8m^2$ para el área de baño y $14m^2$ -$15.9m^2$ y $19.1m^2$ -$21m^2$ para el área de la sala.

En la cuarta pregunta en las respuestas tipo 1, se ubicarán aquellas comprendidas entre $10m^2$-$13m^2$. En las repuestas tipo 2 las comprendidas entre $8\ m^2$-$10m^2$ y $14.1m^2$-$16m^2$ y las respuestas tipo 3, aquellas menores que $8m^2$ y mayores que $16m^2$.

En la quinta pregunta serán respuestas de tipo 1 las que se encuentren entre $125m^2$ y $145m^2$, respuestas de tipo 2 las comprendidas entre $110m^2$-$125m^2$ y $145m^2$-$160m^2$ y respuestas de tipo 3, las menores de $110m^2$ y mayores de $160m^2$.

En el **momento 2** se espera que los alumnos intenten completar los cuadritos unos con otros, dificultándoseles en las fronteras del mapa que sean muy curvas. En la comparación de área de Antioquia con los otros departamentos y Colombia, se espera una razón más grande entre el error cometido y la medida real de la cantidad a estimar. En esta situación se utiliza como unidad de medida el cuadrito, por lo tanto la respuesta de los alumnos debe ser expresada en éstos.

En este momento se utiliza la cuadricula, ya que por ser el mapa de Colombia una forma irregular es un método apropiado para hallar su área, la idea es realizar sucesivas aproximaciones exteriores e interiores (idea de la integral) con el fin de que la medida sea mas cercana a la real. Como en esta situación el objetivo principal es la estimación y no la aproximación, solo se utilizo una cuadricula, de un tamaño más o menos apropiado, para hallar el área de Antioquia mediante la completación de cuadritos.

En la primera pregunta se espera que los alumnos den una aproximación al área de Antioquia de 29 cuadritos que corresponde aproximadamente a 63.612 km^2; se clasificaran como respuestas de tipo 1, respuestas entre 28-31 y respuestas de tipo 2, las menores de 28 y mayores de 31. En la segunda pregunta se espera que los alumnos identifiquen a Quindío como el departamento mas pequeño y Amazonas como el departamento más grande, siendo el primero 34 veces más pequeño que Antioquia lo que concierne a 61.767 Km^2 menos y el segundo 1.7 veces más grande que Antioquia, correspondiente a 1.078.136 Km^2 mas. Se tomaran como respuestas de tipo 1, aquellas que se encuentren entre 31 y 37 veces más pequeño para Quindío y 1.5-1.8 más grande para Amazonas, y respuestas de tipo 2 las menores de 31 y mayores de 37 para Quindío y menores de 1.5 y mayores de 1.8 para Amazonas.

Estás relaciones se obtuvieron, teniendo en cuenta el área de Colombia 1.141.748 Km. , el área de Antioquia de 63.612 km^2 , el área de Amazonas 109.665 km^2 y el área de Quindío 1.845 km^2 , y teniendo en cuenta que el mapa fue diseñado a escala.

En la tercera pregunta se espera que el alumno se aproxime al área de Colombia, la cual es aproximadamente 18 veces más grande que Antioquia. Se consideraran respuestas de tipo 1, las que se encuentren entre 15-20 veces más pequeño que Colombia, y respuestas de tipo 2, las que estén por fuera del intervalo. En este momento, lo más importante será que el alumno de una estimación inicial y luego con ayuda de los cuadritos compruebe lo estimado.

Análisis a posteriori

En el desarrollo de la situación se presentaron algunas dificultades socioeconómicas que se habían tenido en cuenta en el momento del diseño de la situación. Una de ellas se observo cuando los alumnos debían estimar la medida de la estufa, ya que muchos de ellos no las tenían en sus casas, sino que contaban con otros medios como: fogones de 2 puestos o de petróleo, por lo que se dificulto esta estimación ya que este no era un referente conocido para ellos. Otra dificultad fue la el plano de la casa ya que algunos no poseían una casa tan grande o con tantas comodidas, por lo que para algunos se hizo difícil estimar el área total de la casa.

En el **momento 1** de la situación se esperaba en la pregunta **1,** que los alumnos hallarán el área de la cama mediante el calculo (entendido este como el proceso mediante el cual se hace el producto del largo por el ancho) y obtenida está intentarán estimar cuantas veces cabía el área de la cama en la habitación.
Todos los alumnos hallaron el área de la cama mediante el cálculo, un 75% de los estudiantes utilizaron el área de la cama para encontrar el área de la habitación y un 25% se dedicaron a hallar las dimensiones de la habitación, utilizando las dimensiones de la cama y mediante el cálculo hallar el área.

El 94.4% de estudiantes que dieron respuestas de tipo 1, se acercaron mucho al área de la habitación ($6.9m^{2)}$, por lo que el error entre la estimación y la medida real no se considera alto, lo que si ocurrió con el 5.6% ubicado en las respuestas de tipo 3 cuyo error de estimación se considera alto ya que es de casi el doble del área de la habitación.

Se observaron diferentes estrategias, por ejemplo el 60% de los estudiantes recortaron la cama y la dibujaron en la habitación, hasta completar el área de ésta; otro 20% de los estudiantes utilizaban la cuadricula del cuaderno para hallar cuántos cuadritos tenia la cama y hallar cuántos tenia la habitación con la relación a los de la cama. Y otro 20% de estudiantes median el ancho y el largo de la habitación, teniendo en cuenta la medida de la cama y así hallaban el área de la habitación. Se puede decir entonces que los estudiantes que utilizaron los dos primeros procedimientos, tuvieron en cuenta procesos de medida, acercándose más a la respuesta esperada que los alumnos que utilizaron el tercer procedimiento donde trabajaban procesos de cálculo.

Las siguientes preguntas eran muy similares a la pregunta anterior, las cuales permitieron identificar los mismos procesos anteriores.
En la pregunta 2, un 89% de los estudiantes respondieron que el área de la cama era de $3m^2$ y un 11% dijeron que $4m^2$. El 55% de los alumnos dieron respuestas de tipo 1, un 39% dieron respuestas de tipo 2, y un 6% de las respuestas fueron de tipo 3.
En la pregunta 3, se esperaba que los alumnos les dificultara comparar el área de la habitación con el área del baño y la sala por ser mas pequeña y más grande respectivamente, un 45 % dieron respuestas de tipo 1, y 55% dieron respuestas de tipo 2.
En la pregunta 4, un 55.5% de los estudiantes dieron respuestas de tipo 1, un 33.3% fueron respuestas de tipo 2 y 11.2% se ubicaron en respuestas de tipo 3.
En la pregunta 5, un 44.4% de los alumnos dieron repuestas de tipo 1, un 33.3% dieron respuestas de tipo 2 y un 22.3% dieron respuestas de tipo 3.

En general las respuestas de este momento se pueden observar en la siguiente tabla:

Pregunta	Respuestas Tipo 1	Respuestas Tipo 2	Respuestas Tipo 3
1	94.4%		5.6%
2	55%	39%	6%
3	45%	55%	
4	55.5%		11.2%
5	44%		22.3%

En todas estás preguntas se corroboró el mismo tratamiento de la pregunta 1, los alumnos que utilizaron procesos y técnicas de medición se acercaron mas a las respuestas esperadas, que los alumnos que utilizaron procesos de calculo.

También se notó como los alumnos validaban sus respuestas al compartirlas con los compañeros y algunos casos las cambiaban al darse cuenta de que la estimación hecha no era la más apropiada y hacían otra estimación.

En el **momento 2** se esperaba en la primera pregunta que los alumnos intentaran completar los cuadritos unos con otros, dificultándoseles en las fronteras del mapa donde eran mas curvas. Todos los alumnos utilizaron la estrategia esperada y se acercaron superficie real de Antioquia. El 80% de los estudiantes dieron respuestas de tipo 1, y un 20% dieron respuestas de tipo 2.

En una segunda pregunta los alumnos hicieron una estimación inicial sobre cuál era el departamento mas pequeño y mas grande y luego utilizando los cuadritos pudieron comprobar su estimación. En el momento de la comprobación de su estimación inicial los estudiantes tuvieron dificultades para expresar el área de los departamentos con relación a la de Antioquia, un 70% de los estudiantes dieron respuestas de tipo 1 y un 30% dieron respuestas de tipo 2, donde aunque todos identificaron a ojo el departamento mas pequeño y mas grande, en el momento de comprobarlo tuvieron muchas dificultades, así como en la comparación de su área con la de la Antioquia.

En la tercera pregunta se presentaron dificultades para hallar el área de Colombia, debido al tamaño de este con relación al de Antioquia, sin embargo hubo una buena aproximación al área de Colombia con respecto a la de Antioquia; Un 65% dieron respuestas de tipo 1 y un 35% dieron respuestas de tipo 2. Durante esta pregunta algunos estudiantes recortaron el departamento de Antioquia y trataron de superponerlo o calcarlo en el mapa de Colombia y luego dieron una medida aproximada. Otros trataron de cuadricular toda la hoja para hallar el número total de cuadritos y luego restar los cuadritos que no estaban dentro del mapa, pero este procedimiento fue abandonado rápidamente al ver que era demasiado largo y complicado.

Las respuestas del momento 2 se pueden observar en la siguiente tabla:

Pregunta	Respuestas Tipo 1	Respuestas Tipo 2	Respuestas Tipo 3
1	80%	20%	
2	70%	30%	
3	65%	35%	

Lo importante en la situación es que el alumno después de visualizar el mapa, pueda tomar decisiones a ojo, estableciendo relación más grande que, más pequeño que… y por medio de los cuadritos valide lo que ha estimado. Se evidencia como siendo el problema complejo, los alumnos lograron dar unas estimaciones muy aproximadas a las medidas reales, desarrollando estrategias de estimación dentro del pensamiento métrico.

Análisis de los resultados:

Se pudo ver como los estudiantes están muy poco familiarizados con actividades que requieren en uso de la estimación y sobre todo en la medida. Sin embargo la situación permitió que los estudiantes utilizaran referentes conocidos en su gran mayoría, para la solución de la situación.

En el momento 1 algunos estudiantes utilizaron estrategias no validas para la estimación de áreas, como lo fue al usar la cama y recorrer con ella el largo y ancho de la habitación para hallar el área mediante la aplicación de la fórmula. En su mayoría los estudiantes no tienen sentido numérico, sus estimaciones en la medida en muchas ocasiones son exageradamente grandes, esto se presento cuando se necesito hallar la medida de la estufa.

Se les dificulta el uso de estrategias de descomposición y recomposición, no son capaces de ver un objeto como la composición de otras partes; por ejemplo en la pregunta 5, la mayoría de los estudiantes solo se dedicaron a encontrar las dimensiones del plano de la casa, fueron muy pocos los que utilizaron las medidas ya obtenidas de algunas partes de la casa para luego sumarlas con las que faltaban por hallar.

En el momento 2 se puede notar cuando se pidió comparar el área de Antioquia con la de Quindío y Amazonas, como los estudiantes reconocen a simple vista cuál es más grande o cuál es mas pequeño, pero al momento de asignar un número suelen presentar dificultades para establecer relaciones de comparación (mas grande que, mas pequeño que…), además de la dificultad para expresar una medida como un número racional.

Es muy común ver como los estudiantes usan en su mayoría la aplicación de fórmulas para hallar el área de regiones.

El uso de la cuadricula facilito a los estudiantes la comprobación de las estimaciones iniciales, y la comparación entre los departamentos y Colombia.

Se puede concluir como las estrategias de comparación son útiles para establecer relaciones entre la cantidad a estimar y la unidad, permitiendo a los alumnos empezar a desarrollar la estimación de medidas.

Las actividades de estimación permiten mejorar las técnicas de razonamiento, capacidad para resolver problemas, da una visión general de las matemáticas, permite establecer relaciones entre las matemáticas y la realidad y avanzar en los procesos de medición los cuales a su vez permiten el desarrollo del pensamiento métrico.

ANEXO 1

Universidad de Antioquia
Facultad de educación
Licenciatura en educación básica énfasis matemáticas

Situación No. 3 Estimación de Áreas

Reúnete con un compañero y responde las siguientes preguntas.

Momento 1

Con el plano de la casa que acabas de recibir contesta las siguientes preguntas explicando tus respuestas.

1. Teniendo en cuenta que una cama sencilla mide 2m de largo y 1m de ancho ¿Cuál es el área de la habitación 1?

____

____

2. Observa la habitación principal 2, allí hay una cama doble, ¿cuanto crees que tiene de área la cama, y la habitación?

____

____

3. Teniendo en cuenta la medida de la habitación 1¿Cuál es el área del baño y de la sala?

____

____

4. Observa la cocina, allí hay objeto que corresponde a una nevera ¿Cuál es el área de la cocina?

____

5. ¿Podrías estimar el área total de la casa?

____

Momento 2

Responde las preguntas a partir del mapa de Colombia que se te acaba de entregar. Explica tus respuestas en las líneas que corresponde en cada pregunta.

1. ¿Cuál es la superficie de Antioquia?______________________________

____

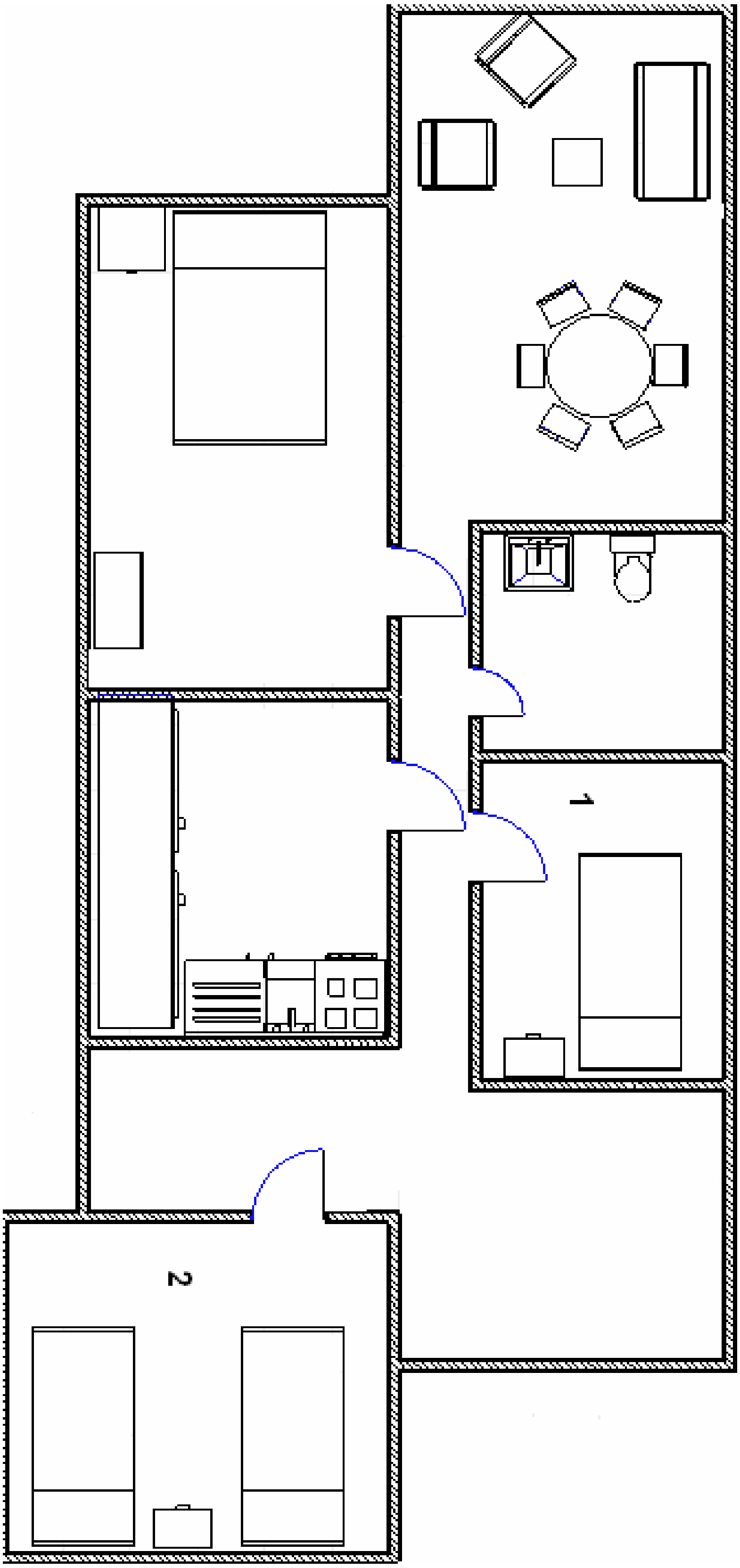
2. ¿Cuál es el departamento de menor superficie y mayor superficie y cuál es su área con respecto a la de Antioquia?

____

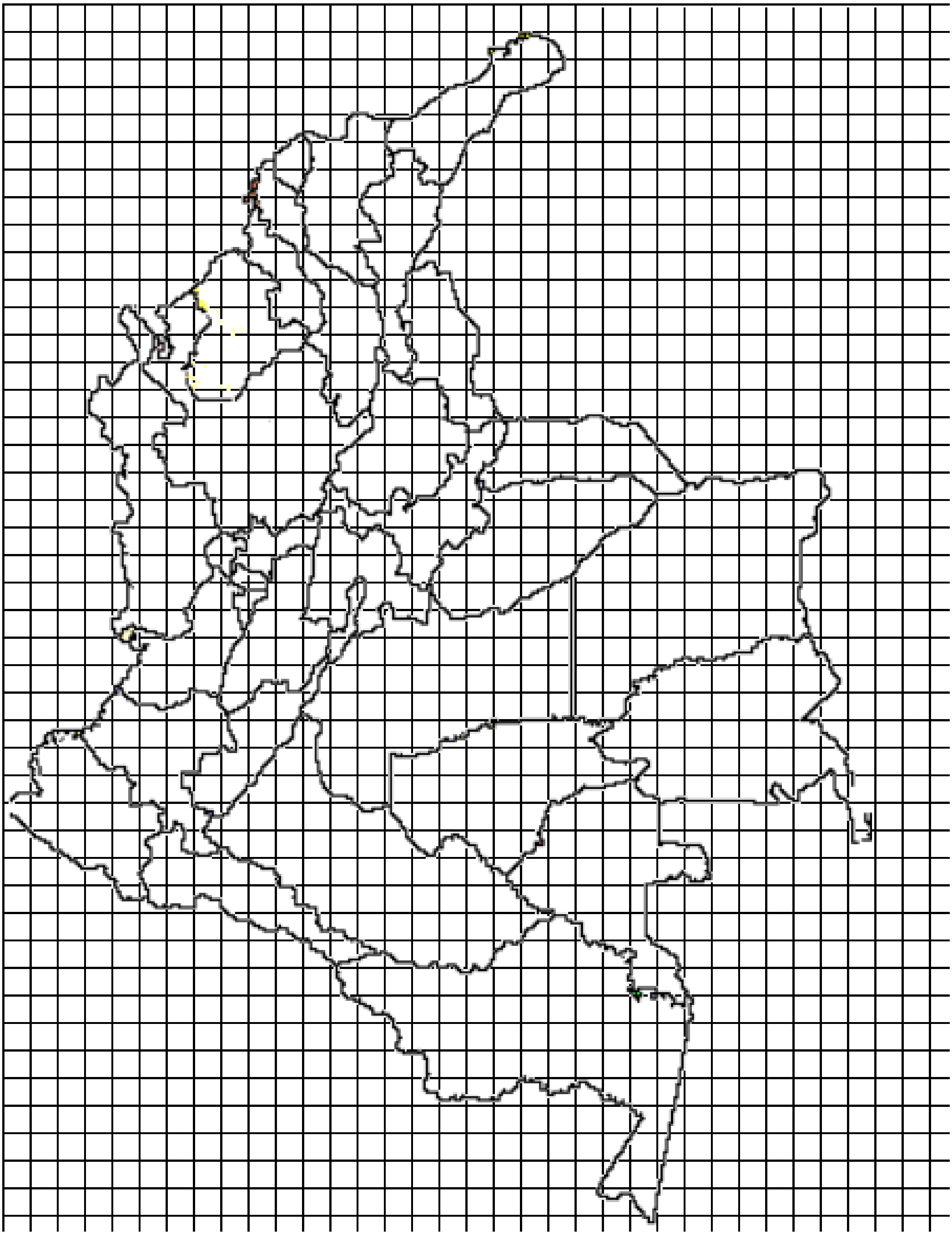
____

3. ¿Cuánto es el área de Antioquia con respecto a la de Colombia?

ANEXO 2



ANEXO 3



Análisis a posteriori

En el **momento 1** de la situación se esperaba en la pregunta **1,** que los alumnos hallarán el área de la cama mediante el calculo (entendido este como el proceso mediante el cual se hace el producto del largo por el ancho) y obtenida está intentarán estimar cuantas veces cabía el área de la cama en la habitación.
Todos los alumnos hallaron el área de la cama mediante el cálculo, un 75% de los estudiantes utilizaron el área de la cama para encontrar el área de la habitación y un 25% se dedicaron a hallar las dimensiones de la habitación, utilizando las dimensiones de la cama y mediante el cálculo hallar el área.

El 94.4% de estudiantes que dieron respuestas de tipo 1, se acercaron mucho al área de la habitación (6.9m$^{2)}$, por lo que el error entre la estimación y la medida real no se considera alto, lo que si ocurrió con el 5.6% ubicado en la las respuestas de tipo 3 cuyo error de estimación se considera alto ya que es de casi el doble del área de la habitación.

Se observaron diferentes estrategias, por ejemplo el 60% de los estudiantes recortaron la cama y la dibujaron en la habitación, hasta completar el área de ésta; otro 20% de los estudiantes utilizaban la cuadricula del cuaderno para hallar cuántos cuadritos tenia la cama y hallar cuántos tenia la habitación con la relación a los de la cama. Y otro 20% de estudiantes median el ancho y el largo de la habitación, teniendo en cuenta la medida de la cama y así hallaban el área de la habitación. Se puede decir entonces que los estudiantes que utilizaron los dos primeros procedimientos, tuvieron en cuenta procesos de medida, acercándose más a la respuesta esperada que los alumnos que utilizaron el tercer procedimiento donde trabajaban procesos de cálculo.

Las siguientes preguntas eran muy similares a la pregunta anterior, las cuales permitieron identificar los mismos procesos anteriores.
En la pregunta 2, un 89% de los estudiantes respondieron que el área de la cama era de 3m^2 y un 11% dijeron que 4m^2. El 55% de los alumnos dieron respuestas de tipo 1, un 39% dieron respuestas de tipo 2, y un 6% de las respuestas fueron de tipo 3.
En la pregunta 3, se esperaba que los alumnos les dificultara comparar el área de la habitación con el área del baño y la sala por ser mas pequeña y más grande respectivamente, un 45 % dieron respuestas de tipo 1, y 55% dieron respuestas de tipo 2.
En la pregunta 4, un 55.5% de los estudiantes dieron respuestas de tipo 1, un 33.3% fueron respuestas de tipo 2 y 11.2% se ubicaron en respuestas de tipo 3.
En la pregunta 5, un 44.4% de los alumnos dieron repuestas de tipo 1, un 33.3% dieron respuestas de tipo 2 y un 22.3% dieron respuestas de tipo 3.

En todas estás preguntas se corroboró el mismo tratamiento de la pregunta 1, los alumnos que utilizaron procesos y técnicas de medición se acercaron mas a las respuestas esperadas, que los alumnos que utilizaron procesos de calculo.

En el **momento 2** se esperaba en la primera pregunta que los alumnos intentaran completar los cuadritos unos con otros, dificultándoseles en las fronteras del mapa donde eran mas curvas. Todos los alumnos utilizaron la estrategia esperada y se acercaron superficie real de Antioquia. El 80% de los estudiantes dieron respuestas de tipo 1, y un 20% dieron respuestas de tipo 2.

En una segunda pregunta los alumnos hicieron una estimación inicial sobre cuál era el departamento mas pequeño y mas grande y luego utilizando los cuadritos pudieron comprobar su estimación. En el momento de la comprobación de su estimación inicial los estudiantes tuvieron dificultades para expresar el área de los departamentos con relación a la de Antioquia, un 70% de los estudiantes dieron respuestas de tipo 1 y un 30% dieron respuestas de tipo 2, donde aunque todos identificaron a ojo el departamento mas pequeño y mas grande, en el momento de comprobarlo tuvieron muchas dificultades, así como en la comparación de su área con la de la Antioquia.

En la tercera pregunta se presentaron dificultades para hallar el área de Colombia, debido al tamaño de este con relación al de Antioquia, sin embargo hubo una buena aproximación al área de Colombia con respecto a la de Antioquia; Un 65% dieron respuestas de tipo 1 y un 35% dieron respuestas de tipo 2.

Lo importante en la situación es que el alumno después de visualizar el mapa, pueda tomar decisiones a simple vista, estableciendo relación más grande que, más pequeño que… y por medio de la cuadricula valide lo que ha estimado. Se evidencia como siendo el problema complejo, los alumnos lograron dar unas estimaciones muy aproximadas a las medidas reales, desarrollando estrategias de estimación dentro del pensamiento métrico.

Se puede concluir que el desarrollo de la estimación aproximada, permite avanzar en los procesos de medición los cuales a su vez permiten el desarrollo del pensamiento métrico.

4. Conclusiones Generales

La enseñanza de la magnitud área tradicionalmente se ha hecho a partir de un enfoque, el aritmético, donde prima el cálculo y la conversión de unidades de área y el único contexto desde donde se enseña esta magnitud es a partir de las propiedades de los polígonos y su fórmula geométrica. En contraste, el aprendizaje de la magnitud área es un proceso complejo que requiere de una serie de conceptos, procesos y habilidades tales como la percepción, la comparación, la medición y la estimación que le permiten al estudiante acceder a los variados matices y representaciones donde aparece inmersa la magnitud área.

Además de lo anterior la enseñanza de la magnitud área involucra los variados contextos y situaciones donde ésta tiene gran utilidad práctica básicamente en situaciones de reparto, de recubrimiento, el territorio de un estado, una pared para ser pintada, un prado que hay que cortar, un campo de fútbol, una pantalla de cine, cuerpos para vestir, el área de un bosque para juzgar su evaporación e intercambio de gas, problemas de empaquetamiento y envoltorios, construcción de manualidades (sombreros, cerámicas, teselados…), elaboración de planos y mapas…Es por esta razón que su enseñanza debe hacerse a partir de procesos de medición donde el alumno vea las múltiples aplicaciones del área. Desde aquí es como el estudiante construirá el verdadero sentido y significado que tienen las unidades estándar y las formulas geométricas.

En este sentido el trabajo en la escuela se debe redimensionar pues el tratamiento que se le debe dar a la magnitud área debe ser a partir de situaciones de aprendizaje donde el estudiante construya el concepto de ésta, viendo bajo los procesos de medición la importancia que tiene comunicar las diferentes medidas, y la necesidad de utilizar técnicas de cálculo más apropiadas para hallar el área de una superficie.

En síntesis esta investigación arrojo la siguiente conclusión:

Se pudo concluir que el mejor camino para iniciar con los procesos de mediciones es a partir de unidades no estándar pues son mas asequibles y permiten facilitar el acercamiento a la naturaleza continua y aproximativa de la medida, además “ayudan al niño a relacionar el proceso de medida con el medio ambiente que le rodea”. (OLMO y Otros. 1992) Luego de esto se pueden construir procesos de medición con unidades estándar pues ya se ha creado la necesidad de utilizarlas y aplicarlas, por ultimo se pueden emplear situaciones que involucren la estimación de áreas para construir niveles de medición mas complejos donde el alumno pueda tomar decisiones sobre el rango y orden de las unidades.

BIBLIOGRAFÍA

- OBANDO ZAPATA, Gilberto y MUNERA CORDOBA, John Jairo. "Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática". En Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35. Pág. 185-199. 2003.

- ARTIGUE, M, DOUADY, R. MORENO, L GOMÉZ, P. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Págs. 33 – 59, "una empresa docente", Grupo editorial Iberoamericana. México 1995.

- CASTRO, Encarnación y otros. Estimación en calculo y medida, matemáticas: Cultura y aprendizaje No. 9. SINTESIS, Madrid 2000.

- MUNERA CORDOBA, John Jairo. "Las situaciones problema como fuente de matematización". En Cuadernos Pedagógicos. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. No. 16. Pág. 25-34. Agosto 2001.

- COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares de matemáticas. 1998.

- COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Matemáticas, Santafé de Bogotá 2003

- COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Resultados Pruebas TIMSS 1999.

- DEL OLMO ROMERO, María Ángeles, y otros. "Superficie y Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?". Editorial Síntesis. España. 1993.

- GODINO, Juan y otros. Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Universidad de Granada. 2002.

- GUTIERREZ, Jesús y VANEGAS, Dennis. Tesis: pensamiento métrico y sistemas de medida. 2005.

- CHAMORRO, Carmen y otro. "El problema de la medida". Editorial Síntesis. España. 1994.

- DE LA TORRE, Andrés. Revista Colombiana de Matemáticas: Método Socrático y el Modelo de Van Hiele, Lecturas Matemáticas, Vol. 24. Bogotá, 2003.

- GODINO, Juan, BATANERO, Carmen y ROA, Rafael. Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros, Proyecto Edumat – Maestros. Granada, 2002.

- GUTIERREZ, Jesús y VANEGAS, Dennis. Tesis Pensamiento Métrico y sistemas de medida, Universidad de Antioquia. Medellín, 2005.

- MANKIEWICZ, Richard. Historia de las Matemáticas : Del Calculo al Caos, Paidos. Barcelona, 2000.

- MEAVILLA, Seguí. Aspectos Históricos de las Matemáticas Elementales, Prensas. Zaragoza, 2005.

- KULA, Wiltold. Las Medidas y los Hombres, Siglo Veintiuno. Madrid, 1980.

- RECALDE, Luis y ANACONA, Maribel. Formación y Manejo Operatorio de Conceptos Matemáticos: La Historia y Epistemología del Infinito. Vol. 04, 1999.

- DE LA TORRE, Andrés. Anotaciones a una lectura de Arquímedes. U de A. Medellín 1993

- DE LA TORRE, Andrés. La modelización del tiempo y del espacio. Universidad de Antioquia, Medellín 2003

- LUENGO, Ricardo y otros. Proporcionalidad Geométrica y semejanza: Cultura y aprendizaje No. 14, Síntesis Madrid 1990.