



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Facultad de Educación

**PRÁCTICAS MATEMÁTICAS QUE MOVILIZAN ESTUDIANTES DE PRIMER  
GRADO, AL UTILIZAR LOS BILLETES DECIMALES**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis  
en Matemáticas**

**ANA MARÍA JIMÉNEZ ECHAVARRÍA**

**CRISTIAN STIVEN ZAPATA MARÍN**

**FRANCY LORENA CAUTIVA SOSA**

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Asesora

**OLGA EMILIA BOTERO HERNÁNDEZ**



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Facultad de Educación

**PRÁCTICAS MATEMÁTICAS QUE MOVILIZAN ESTUDIANTES DE PRIMER  
GRADO, AL UTILIZAR LOS BILLETES DECIMALES**



**ANA MARÍA JIMÉNEZ ECHAVARRÍA  
CRISTIAN STIVEN ZAPATA MARÍN  
FRANCY LORENA CAUTIVA SOSA**

# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

JULIO 2017



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

---

## Facultad de Educación



*A nuestras familias y parejas, por su compañía y amor incondicional.*

*A nuestra asesora Olga Emilia Botero por sus orientaciones durante este proceso  
investigativo y sus aportes a nuestra formación.*

*Y a nuestros profesores y compañeros del semillero de investigación MATHEMA  
por sus aportes para nuestra formación académica e investigativa.*

# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Resumen

La presente investigación se propuso caracterizar las prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes de primer grado de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, cuando desarrollaron un conjunto de tareas con manipulativos que se denominan “billetes decimales”, los cuales permiten simular el comportamiento del SND de acuerdo con sus características y desarrollar habilidades propias del pensamiento aditivo.

Los elementos que orientaron la investigación se mediatizaron por la teoría de la objetivación (Radford, 2003, 2006a, 2006b, 2014), en especial, algunas ideas sobre los procesos de objetivación, medios semióticos de objetivación y pensamiento, para reflexionar asuntos alrededor de las prácticas matemáticas en la escuela y se tomó como referencia sobre dichas prácticas a Obando, Arboleda y Vasco (2014) quienes proponen, además, una caracterización de las prácticas matemáticas a partir de los siguientes elementos: problemas para resolver, instrumentos y procedimientos, formas de discursividad, objetos y conceptos. Esta investigación utilizó dichos elementos como categorías de primer orden para el análisis de la información.

El enfoque metodológico es cualitativo y se empleó el estudio de casos propuesto por Stake (1998) como metodología para el registro de la información, además, se utilizó Atlas.ti como recurso para la categorización, sistematización y análisis de la información.

En las prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes se observó cómo a través del uso de los billetes decimales reconocieron características del SND y, desarrollaron habilidades de pensamiento aditivo y otras habilidades propias de las matemáticas.

**Palabras clave:** teoría de la objetivación, enseñanza de las matemáticas, pensamiento aditivo, SND.



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Abstract

This research project was done to characterize the mathematical practice in the Fontidueño Jaime Arango Rojas Educational Institution. When first grade students carry out a set of tasks with manipulatives named “Billetes Decimales”, which allows them to simulate the behavior of the DNS according to its characteristics and to develop skills specifically for the additive thinking.

The elements that oriented this research project were mediated by the theory of objectification (Radford, 2003, 2006a, 2006b, 2014). Evoking especially some ideas about the objectification processes, semiotic objectification and thinking, in order to reflect about the mathematical practices in the schools described by Obando, Arboleda y Vasco (2014) who propose, also, a characterization of the mathematical practice based on the following elements: problems to solve, instruments and procedures, discursive elements, and objects and concepts. Moreover, this study used these elements as first-rate categories to analyze the information.

Additionally, a qualitative methodology approach was used, it was also considered the case study methodology proposed by Stake (1998) to register the data. We used the Atlas.ti software as a resource for categorizing, systematizing and analyzing the data.

We also observed how the use of decimal bills helps the students recognize characteristics of the DNS and develop skills of additive thinking and other mathematical skills.

**Key words:** theory of objectification, teaching mathematics, additive thinking, DNS

1 8 0 3



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Índice de contenido

Contextualización y problemática.....	8
Objetivos.....	16
Objetivo general .....	16
Objetivos específicos.....	16
Antecedentes .....	17
Marco teórico .....	30
Medios semióticos de objetivación .....	36
Sistema de Numeración Decimal (SND) .....	37
Constitución cultural del SND.....	38
Pensamiento aditivo .....	46
Billetes Decimales .....	47
Marco metodológico .....	51
Estudio de casos .....	53
Unidades de análisis y proceso de codificación.....	55
Ruta metodológica.....	61
Primera Tarea: La serpiente.....	63
Segunda tarea: Representación de cantidades con billetes.....	64
Tercera tarea: Elaboración de pulseras.....	65
Cuarta tarea: Elaboración de llaveros.....	66
Quinta y sexta tarea: La lista de compras.....	68
Análisis de investigación .....	69
Consideraciones generales .....	69
Procedimientos e instrumentos.....	74
Composición y descomposición en unidades del sistema .....	74
Completar .....	83
Cambio de unidad.....	96
Conteo uno a uno.....	103
Conteos en unidad múltiple .....	105
Proporcionalidad.....	109



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cálculo mental materializado en el discurso.....	111
Conclusiones.....	113
Referencias bibliográficas.....	120
Anexos.....	126

Facultad de Educación



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



<i>Figura 1: Algoritmo convencional.</i> .....	11
<i>Figura 2: Representación escrita de los numerales.</i> .....	12
<i>Figura 3: Algoritmo convencional de la suma.</i> .....	13
<i>Figura 4: Representación con los billetes decimales.</i> .....	26
<i>Figura 5: Sistema jeroglífico Egipcio.</i> .....	39
<i>Figura 6: Sistema tradicional Chino-Japonés.</i> .....	40
<i>Figura 7: Escritura del numeral 5625.</i> .....	39
<i>Figura 8: Representación Babilónica de numeral.</i> .....	41
<i>Figura 9: Sistema de numeración Hindú.</i> .....	42
<i>Figura 10: Escritura del número en diferentes épocas.</i> .....	43
<i>Figura 11: Primera tarea, la serpiente</i> .....	64
<i>Figura 12: Segunda tarea, representación de cantidades</i> .....	65
<i>Figura 13: cuarta tarea, desarrollo de llaveros</i> .....	68
<i>Figura 14: Red semántica elaborada de las categorías de análisis.</i> .....	73
<i>Figura 15: Tabla de representación del valor de la serpiente</i> .....	75
<i>Figura 16: Discursividad con los dedos.</i> .....	76
<i>Figura 17: Discursividad señalamiento con los dedos</i> .....	80
<i>Figura 18: Registro escrito del procedimiento.</i> .....	82
<i>Figura 19: Conteo uno a uno acompañado de los dedos.</i> .....	92
<i>Figura 20: Uso irregular del algoritmo convencional de la suma (1)</i> .....	93
<i>Figura 21: Uso irregular del algoritmo convencional de la suma (2)</i> .....	93
<i>Figura 22: Solución del algoritmo convencional de la suma</i> .....	94
<i>Figura 23: Procedimiento conteo uno a uno</i> .....	95
<i>Figura 24: Señalamientos con los dedos explicación del procedimiento conteo múltiple</i> .....	106
<i>Figura 25: Instrumentos los dedos y lápiz para explicación del procedimiento conteo de 5 en 5</i> .....	108
<i>Figura 26: Red semántica elaborada de la categoría procedimientos, proporcionalidad</i> .....	110



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Índice de Diálogos

<i>Diálogo 1: Fragmento tomado del vídeo 01_22_Sep_2016 (09)</i> .....	76
<i>Diálogo 2: Fragmento tomado del vídeo 02_04_Oct_2016 (6)</i> .....	78
<i>Diálogo 3: Fragmento tomado del vídeo 02_04_Oct_2016 (3)</i> .....	80
<i>Diálogo 4: Fragmento tomado del vídeo 06_03_Nov_2016 (07)</i> .....	82
<i>Diálogo 5: Fragmento tomado del vídeo 03_02_Nov_2016 (02)</i> .....	84
<i>Diálogo 6: Fragmento tomado del vídeo 05_26_Oct_2016 (01)</i> .....	84
<i>Diálogo 7: Fragmento tomado del vídeo 05_26_Oct_2016 (03)</i> .....	86
<i>Diálogo 8: Fragmento tomado del vídeo 03_05_Oct_2016 (02)</i> .....	88
<i>Diálogo 9: Fragmento tomado del vídeo 04_06_Oct_2016 (03)</i> .....	89
<i>Diálogo 10: Fragmento tomado del vídeo 03_05_Oct_2016 (08)</i> .....	90
<i>Diálogo 11: Fragmento tomado del vídeo 06_03_Nov_2016 (05)</i> .....	94
<i>Diálogo 12: Fragmento tomado del vídeo 06_03_Nov_2016 (06)</i> .....	95
<i>Diálogo 13: Fragmento tomado del vídeo 05_26_Oct_2016 (04)</i> .....	97
<i>Diálogo 14: Fragmento tomado del vídeo 05_26_Oct_2016 (05)</i> .....	99
<i>Diálogo 15: Fragmento tomado del vídeo 05_26_Oct_2016 (03)</i> .....	101
<i>Diálogo 16: Fragmento tomado del vídeo 06_03_Nov_2016 (02)</i> .....	101
<i>Diálogo 17: Fragmento tomado del vídeo 03_05_Oct_2016 (07)</i> .....	103
<i>Diálogo 18: Fragmento tomado del vídeo 03_05_Oct_2016 (01)</i> .....	104
<i>Diálogo 19: Fragmento tomado del vídeo 01_22_Sep_2016 (01)</i> .....	106
<i>Diálogo 20: Fragmento tomado del vídeo 04_06_Oct_2016 (13)</i> .....	107
<i>Diálogo 21: Fragmento tomado del vídeo 05_26_Oct_2016 (03)</i> .....	108
<i>Diálogo 22: Fragmento tomado del vídeo 06_03_Nov_2016 (08)</i> .....	111
<i>Diálogo 23: Fragmento tomado del vídeo 02_04_Oct_2016 (11)</i> .....	112

# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Índice de tablas

<i>Tabla 1: Descripción de categorías de segundo nivel</i> .....	57
--	----

1 8 0 3



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Contextualización y problemática

La experiencia de práctica pedagógica se realizó en la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas (IEFJAR), dicha institución se encuentra en el municipio de Bello-Antioquia, en el barrio Fontidueño de la comuna 6, núcleo 03-10. La primera etapa de la investigación se basó en una práctica de observación informal con estudiantes de los grados primero y segundo de primaria, y un acercamiento reflexivo a varios documentos que se establecen por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y que se elaboraron desde la institución, por ejemplo, el Proyecto Educativo Institucional (PEI), en este se especifica el modelo pedagógico bajo el cual se enmarca el quehacer educativo en la institución, el modelo al que el PEI hace referencia es el modelo cognitivo en el cual:

Se concibe el aprendizaje como un proceso de adquisición individual de conocimientos, de acuerdo con las condiciones personales de cada educando, en el cual interviene el principio de la acción, la práctica del aprendizaje a través de la observación, la investigación, el trabajo y la resolución de situaciones problemáticas, desde una concepción racional y científica (IEFJAR, 2013, p. 78).

Todo lo anterior se orienta por medio de la filosofía constructivista del aprendizaje, propuesta por Piaget. El modelo pedagógico de la institución pone énfasis en el desarrollo de estrategias pedagógicas y se plantea como objetivo desarrollar habilidades del pensamiento, se enfoca en fomentar el aprendizaje significativo según la tendencia pedagógica de Ausubel (1991) en la cual se concede al estudiante un papel importante en su propio proceso de aprendizaje. De esta manera, se habla de un tipo de aprendizaje con la consigna de *aprender a aprender*, y por tanto, el currículo se define como flexible e integral de tal manera que permita la transversalidad de saberes.



Otro documento de la institución que se estudió fue el plan de área, allí se reconoce el carácter histórico de las matemáticas y de la participación del ser humano en su construcción a partir de las prácticas cotidianas. En este plan de área se propone fomentar un cambio de las percepciones negativas que tienen los estudiantes hacia las matemáticas, con la necesidad de reconocerlas en sus prácticas cotidianas que les permitan, además, adquirir un nivel de excelencia propio de su etapa de desarrollo.<sup>1</sup>

En las observaciones que se realizaron en la institución en torno a la enseñanza de las matemáticas se pudo constatar que se le otorga un papel fundamental al desarrollo de procesos que se relacionan con el sistema numérico y el pensamiento numérico, puesto que en la organización del plan de área se propone dedicar los dos primeros períodos escolares a este pensamiento y de manera general en los últimos periodos se dedican a los demás pensamientos. Esta situación no permite que en el proceso de enseñanza los pensamientos se relacionen, sino que se vea como procesos segmentados que impiden lograr lo propuesto en los documentos rectores para la Educación Matemática en Colombia. Al respecto, el MEN (2006) hace referencia en sus estándares básicos de competencias a la coherencia vertical y a la horizontal entre los estándares y pensamientos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.<sup>2</sup>

Por otra parte, en el plan de área de matemáticas del colegio se especifican los temas o contenidos que se deben enseñar, por ejemplo, para los grados de primero a tercero se proponen,

---

<sup>1</sup> Plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas elaborado en el año 2011

<sup>2</sup> Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas publicados en el año 2006 por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia

para el pensamiento numérico, la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, división) y el sistema de numeración decimal (SND)<sup>3</sup>.

Durante las observaciones que se realizaron en la institución se pudieron identificar varias situaciones con respecto a la enseñanza y aprendizaje de estos saberes, en particular, la comprensión de las características del SND y su significado en las operaciones básicas, por lo tanto, los procesos de enseñanza y aprendizaje alrededor de estos conceptos matemáticos tenían como consecuencia, diferentes prácticas por parte de los estudiantes las cuales serán descritas a continuación.

Una de las prácticas que se identificaron de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas son la elaboración de los algoritmos convencionales en contextos de pruebas escritas. En la Figura 1 se identifica el uso del algoritmo convencional de la suma y la resta por parte de un estudiante, en los registros que realizó da cuenta algunas irregularidades en el uso del algoritmo, por ejemplo, al realizar la suma el estudiante que opera las decenas no tiene en cuenta el valor relativo de un número según la posición, característica propia de la escritura de los numerales en nuestro SND en cuanto al sentido posicional, ya que el estudiante suma el 4, 9 y 1 de la columna de las decenas y escribe como resultado 14 que realmente son 14 decenas y debería escribirse según las reglas del algoritmo, las 4 decenas en el resultado, pasar la centena a la posición siguiente y así atender al carácter decimal de SND. En este sentido, Obando y Vásquez (2008) mencionan que:

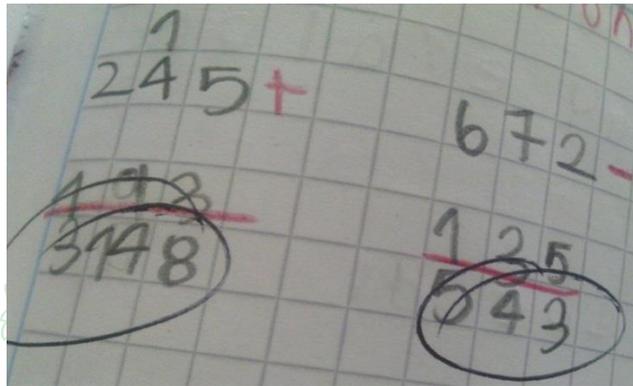
[...] es muy común encontrarse con que las personas utilizan el Sistema de Numeración Decimal de manera mecánica pero no comprenden por qué

---

<sup>3</sup> En adelante se usará SND para referirse al sistema de numeración decimal

funciona. Esta situación se hace más evidente en los algoritmos convencionales, en los cuales, la lógica que los sustenta descansa fundamentalmente en el

Sistema de Numeración Decimal (párr. 75).



*Figura 1: Algoritmo convencional. Tomado de "Notas de cuaderno", octubre 2015<sup>4</sup>.*

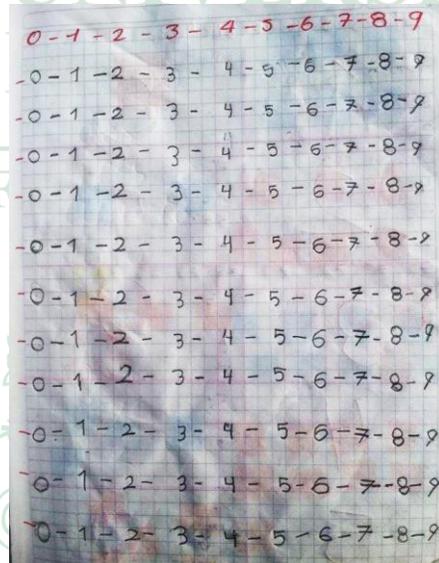
Con respecto a la enseñanza del SND se observó que la metodología que implementaron los profesores consistía en incentivar en los estudiantes prácticas como la repetición oral y escrita de los números, no se percibieron otras metodologías en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del SND que permitieran comprender la complejidad que encierra su estructura al naturalizar este saber matemático.

Como consecuencia de lo anterior, se observó que las prácticas de los estudiantes al desarrollar tareas que se asocian al sistema de numeración y su significación se resumen a planas de la representación escrita uno a uno de los numerales (Ver Figura 2), y los profesores consideran que se debe avanzar de familia numérica según el grado de escolaridad, esto se evidencia en su plan de área, ya que en uno de sus objetivos se indica: “adquirir habilidad para escribir, en base 10, los números de 1 a 100” (IEFJAR, 2011). Las tareas en este grado se desarrollan en esta familia numérica y se pone énfasis en la escritura del numeral.

<sup>4</sup> Las fotografías presentadas fueron tomadas durante el proceso de investigación por lo tanto son elaboración propia de los investigadores



# UNIVERSIDAD QUIA



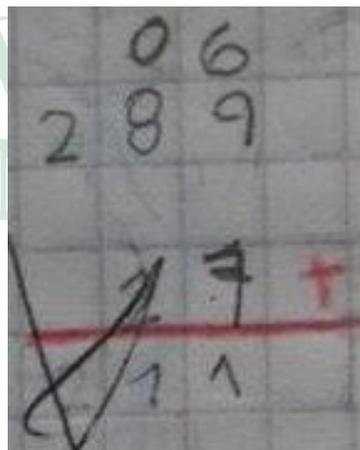
**Figura 2:** Representación escrita de los numerales. Tomado de “Notas de cuaderno”, octubre del 2015.

Al revisar los apuntes que los estudiantes llevan en sus cuadernos y en las pruebas escritas que realizaron, no se identificó otras tipo de prácticas que posibiliten el reconocimiento de las regularidades y características del SND (posicional, decimal, multiplicativo). Los procedimientos que realizan los estudiantes se reducen a una mecanización para cumplir un conjunto de reglas que resultan impuestas, por lo cual se tiene como consecuencia una dificultad en la comprensión y correcta utilización del algoritmo convencional. Al respecto Alsina (2007) al referirse a este tipo de prácticas comunes en la escuela menciona que “la repetición sin sentido más que un beneficio es perjudicial al rendimiento matemático” (p. 316).

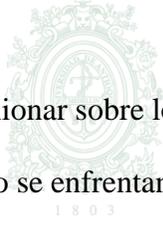
En cuanto a las tareas con las operaciones básicas de las matemáticas que desarrollan los estudiantes de primer y segundo grado, se pudo constatar por medio de la revisión y análisis de las pruebas, los talleres y los ejercicios que plantean los profesores cooperadores, varias dificultades en el uso de los algoritmos convencionales de la suma y la resta, como por ejemplo, el uso irregular por parte de los estudiantes del valor posicional y el carácter decimal al realizar procedimientos de adición y sustracción en lo que respecta a “tomar prestado” y “llevar”.

Este uso irregular se puede observar en la figura 3, el cual expresa una práctica matemática de un estudiante con el algoritmo la suma. En el momento de componer las unidades según su posición, él no hace uso correcto de la reglas del algoritmo, ya que al agrupar las unidades (9 y 7) obtiene 16 y para representar este numeral en el algoritmo, en lugar de escribir la decena en la columna de las decenas (procedimiento que se conoce de manera común como *llevar*), lo hace en el lugar que corresponde al resultado y escribe las unidades sueltas de nuevo en la columna de la unidades. De este modo, es claro que mecaniza la práctica de *llevar* con el uso del algoritmo y no emplea las características del SND en las cuales se basa dicho algoritmo, ya que:

[...] las razones por las que funcionan así esas reglas de los algoritmos se derivan de las propiedades del sistema de numeración: encolumnamos, porque es un sistema posicional; reagrupamos porque es de base diez y, por lo tanto, no puede haber nada que supere los nueve elementos en cada potencia de la base; operamos de derecha a izquierda, para lograr economía al agrupar (Itzcovich, Ressia de Moreno, Noviembre, Becerril y Gvirtz, 2007, p. 38).



**Figura 3:** Algoritmo convencional de la suma. Toma de “Notas de cuaderno”, octubre del 2015.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Facultad de Educación

Al reflexionar sobre los obstáculos que los estudiantes de los primeros grados empiezan a atravesar cuando se enfrentan a tareas que se relacionan con el SND y de manera más tardía en lo que respecta a las operaciones básicas y la comprensión del algoritmo convencional, encontramos como dificultad para el aprendizaje la separación de estos procesos durante su enseñanza, que de alguna manera se convierte en algo contradictorio ya que históricamente se estructuraron de forma conjunta por lo tanto estos saberes se interrelacionan.

A sabiendas de que nuestro SND es de carácter mixto, es decir, que cumple con dos propiedades aditiva y multiplicativa descritas por Ross (citado en Zunica, 2012):

**Propiedad aditiva:** la cantidad representada por todo el numeral es la suma de los valores representados por cada uno de los dígitos que lo componen.

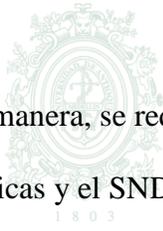
**Propiedad multiplicativa:** el valor de un dígito se da multiplicando su valor aparente por el valor asignado a su posición.

Por ejemplo:  $743 = 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

Al conocer así esta propiedad del SND, los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase no deben restringirse al ejercicio de separar las operaciones básicas y el SND, al respecto Terigi y Wolman (2007) dicen:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
1803

La organización de la numeración escrita y las operaciones básicas guardan estas interrelaciones: Por una parte comprender la notación numérica supone desentrañar cuáles son las operaciones subyacentes a ella; por otra parte, la resolución de las operaciones constituye un terreno fecundo para profundizar la comprensión del sistema de numeración. Ambos aprendizajes -del sistema de numeración y de las operaciones- se influyen recíprocamente (p. 74).



De esta manera, se requiere un cambio en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas y el SND que trascienda las prácticas que se desarrollan en la escuela, pues en palabras de Lerner 1992a; Lerner, Sadovsky y Wolman 1994; Wolman, 1999 (citado en Terigi y Wolman, 2007) “se reconoce así un serio problema de la enseñanza usual: la dificultad de lograr que los alumnos comprendan realmente el principio que rige la numeración escrita” (p. 72).

En consecuencia, es pertinente pensar una investigación en la que se reconozcan otras formas de estar, ser y hacer en el aula por parte de los sujetos que participan de la actividad de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por esta razón, se considera necesario investigar las prácticas que movilizan los estudiantes cuando desarrollan tareas relacionadas con el reconocimiento de las características del SND en contextos de pensamiento aditivo, al usar como referencia la relación dual entre estos dos saberes que influyen entre sí de manera recíproca.

Para esto proponemos los billetes decimales<sup>5</sup> que permitirán al estudiante reconocer las propiedades y características del SND y al mismo tiempo evidenciar su carácter mixto (aditivo y multiplicativo) por medio de estrategias como la composición, descomposición en unidades del sistema, cambios de unidades, entre otras. Todo esto se debe a la estructura de estos billetes que define Botero (2011) de la siguiente manera: “este material [está] diseñado con las mismas características de nuestro sistema, pues consta de unos, dieces, cienes, etc., favorece la manipulación concreta de las unidades del sistema de numeración que usualmente es presentado de forma abstracta” (p. 7).

Si se tiene en cuenta que nuestro interés es investigar las prácticas matemáticas que movilizan los estudiantes en las tareas que desarrollan, es necesario identificar y reconocer

---

<sup>5</sup> Billetes de denominación 1, 10, 100, etc.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Facultad de Educación

1803

diversas formas de acción en la relación del sujeto con el saber, como por ejemplo, el lenguaje hablado, el lenguaje simbólico, los gestos, el uso de artefactos, entre otros, los cuales son recursos que mediatizan las formas de acción y pensamiento de los sujetos, además, el uso de dichos recursos dan cuenta las reflexiones y la toma de conciencia que realizan los estudiantes frente a los objetos de conocimiento. Estos medios materiales y conceptuales los denomina Radford como medios semióticos de objetivación, los cuales nos permiten investigar los procedimientos mediados instrumental y los objetos que movilizan durante las prácticas matemáticas que despliegan los estudiantes al desarrollar tareas durante la clase de matemáticas.

Por lo anterior, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

*¿Cuáles son las prácticas matemáticas que movilizan los estudiantes de primer grado de la IEFJAR, al utilizar los billetes decimales para reconocer características del SND en tareas de tipo aditivo?*

## **Objetivos**

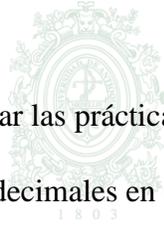
### **Objetivo general**

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se plantea como objetivo general.

- Caracterizar las prácticas matemáticas que movilizan los estudiantes de primer grado de la IEFJAR, cuando utilizan los billetes decimales para el reconocimiento de las características del SND en tareas de tipo aditivo.

### **Objetivos específicos**

- Describir los medios semióticos que movilizan los estudiantes en el desarrollo de las tareas de tipo aditivo.



- Analizar las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes cuando utilizan los billetes decimales en el desarrollo de tareas propuestas en la investigación.

## Facultad de Educación **Antecedentes**

En el proceso de revisión y análisis de las investigaciones que se han desarrollado en el campo del SND y el pensamiento aditivo, se identificaron algunos trabajos de investigación a nivel local, nacional e internacional que nos permitieron ver un panorama de las investigaciones hechas y de esta forma reconocer las prácticas matemáticas que movilizan los estudiantes en tareas que se asocian a estos dos campos de saber y así considerar los medios constituyentes de pensamiento que movilizan los estudiantes al enfrentarse a tareas de tipo aditivo cuando utilizan los billetes decimales.

De igual forma, se encontraron tres investigaciones que desarrollaron tareas asociadas al pensamiento aditivo y las estructuras aditivas: Mosquera y Restrepo (2014); Echavarría, Meza, Ceballos, Valderrama, Mosquera y Quintero (2008); Palacios y Morales (2015), en las cuales se evidencian las prácticas matemáticas de los estudiantes y la utilización de medios semióticos que constituyen y dan cuenta de sus formas de pensamiento ante los objetos de conocimiento en la actividad matemática. Estas investigaciones se describen con más detalle a continuación:

La primera investigación “Estrategias de representación que utilizan los niños y niñas de preescolar y primero para resolver problemas de estructura aditiva” Echavarría, et, al. (2008), tenía como finalidad la profundización de conceptos por medio de las estrategias que implementan los estudiantes al resolver problemas de estructuras aditivas propuestas por Vergnaud, para esto, se observan los diferentes niveles de representación, como un medio para la comprensión de los procesos que desarrollan los estudiantes en la constitución de



conocimientos. Los niveles que se identificaron fueron la representación gráfica-analógica la cual consistió en la elaboración de gráficos que se asociaran con el problema, por ejemplo dibujos de flores, dulces, etc. El segundo nivel es la representación gráfica-simbólica, allí los estudiantes utilizaron dibujos o gráficos, además comenzaron a emplear signos matemáticos (como son por ejemplo el + y -) y numerales para representar las cantidades. Por último, el tercer nivel es la representación simbólica-algebraica en el cual los estudiantes asocian su proceso mental con lo simbólico y utilizan los algoritmos matemáticos como estrategia de solución.

La segunda investigación que realizó Mosquera y Restrepo (2014) se titula “Prácticas matemáticas en torno a la suma con estudiantes de primer grado de la Institución Educativa Ramón Giraldo Ceballos”. Este proyecto tenía como propósito observar las diferentes prácticas matemáticas que despliegan 6 estudiantes de primer grado, al enfrentarse con situaciones de tipo aditivo enmarcadas en un contexto del juego y mediadas por la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990). En este estudio se tienen en cuenta algunos medios semióticos que utilizaron los estudiantes al momento de realizar las tareas como es el caso del lenguaje oral como medio para argumentar ideas, entonces se encontraron estudiantes que argumentaron no poder continuar el conteo con los dedos de las manos. Otro medio que se implementó fue el uso de artefactos como los dedos para realizar el conteo y por último el registro escrito de “palitos” o “rayitas” como ayuda para continuar el conteo que no podía realizar con los dedos de las manos. 1 8 0 3

La tercera investigación se titula “La incidencia del uso de artefactos en la apropiación de la suma a través de situaciones de carácter aditivo” de Palacios y Morales (2015) tiene como propósito analizar los artefactos que utilizan los estudiantes de segundo grado de la educación

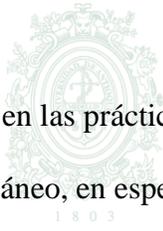


primaria al desarrollar situaciones de carácter aditivo, estas tareas fueron mediadas por las Actividades Orientadoras de Enseñanza (Moura, 1996, 2001, 2010) y por los procesos de objetivación (Radford, 2006, 2011).

En cuanto a las prácticas matemáticas que realizaron los estudiantes en las situaciones de carácter aditivo, los investigadores identificaron el uso de artefactos, estrategias aditivas y acciones de los estudiantes; entre las estrategias que dichos estudiantes utilizaron para la adición está el conteo múltiple de 100, 1000, etc., además, entre los artefactos que emplearon, se identificó el algoritmo convencional de la suma. Sin embargo, los estudiantes se enfrentaron a una serie de dificultades, en particular, con la manera de organizar los números en el algoritmo (posicionalidad). Otros medios semióticos fueron los dedos, uso de símbolos y lenguaje verbal.

De acuerdo con las investigaciones descritas se observa que en las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes emergen diversas formas de expresión en las tareas que se asocian a pensamiento aditivo y estructuras aditivas, por ejemplo, la acción lingüística que se manifiesta en las representaciones escritas y el lenguaje matemático verbal, como también el uso de los artefactos como el lápiz y el papel para la elaboración de las representaciones matemáticas, el uso de los dedos y el algoritmo convencional para realizar procesos de cálculo y conteo. Sin embargo, en estas investigaciones no se evidencia el uso de otras formas de expresión para dar cuenta de la reflexión que hacen los estudiantes frente al objeto de conocimiento “entre ellos” el uso de los movimientos corporales y la gestualidad.

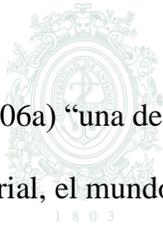
En las anteriores investigaciones se reconoce el uso de algunos medios materiales e intelectuales como partes constituyentes del pensamiento de los estudiantes, sin embargo, en nuestra investigación se considera pertinente que el uso de los medios semióticos por parte de



los estudiantes en las prácticas matemáticas posibilitan tejer relaciones con otros campos de saber en simultáneo, en específico con la comprensión, uso y significado del sistema de numeración que no es explícito al utilizar algunos artefactos, por ejemplo, la mecanización de las reglas del algoritmo convencional de la adición, no permite reconocer que es un artefacto cultural que deposita la sabiduría histórica y se ha constituido como una herramienta para facilitar procesos de cálculo en favor de las características del SND, para que el estudiante haga uso del sistema de numeración en el algoritmo convencional requiere de procesos que impliquen la comprensión de la relación de estos dos campos de saber.

Por otro lado, para la enseñanza del SND se utiliza en la escuela diferentes artefactos que favorecen a la comprensión y el uso de algunas características del SND, estos artefactos culturales son el resultado de la elaboración humana, los cuales se crean para intentar dar respuestas a las necesidades y dificultades que al abordar la complejidad de este objeto matemático se presentan y se posicionan como una convención cultural, de la misma manera, algunos de estos artefactos se encuentran en la escuela sin necesidad de pensarse en el momento de su constitución con finalidades propias de enseñanza y aprendizaje, como es por ejemplo, el ábaco, el cual se crea como instrumento para ayudar al hombre en situaciones de cálculo propias de su vida cotidiana y en especial en prácticas de índole comercial.

Hoy en día el ábaco se encuentra en la escuela para abordar las características del SND tales como el carácter decimal y la realización de cálculos, así, este artefacto deja de ser parte de las prácticas cotidianas que le transfieren en su constitución y elaboración humana algunas propiedades del saber matemático, para posicionarse como un material que hace parte de la actividad matemática en el aula y que al estudiante interactuar con este objeto material constituye significados culturales del objeto matemático, desde esta perspectiva y en palabras



de Radford (2006a) “una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno (objetos, instrumentos, etc.) y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas” (p. 113).

Al reconocer de esta manera el papel de los artefactos en la constitución de conocimiento matemático, se encontraron dos investigaciones que proponen el uso de éstos para la enseñanza del SND: Salazar y Vivas (2013); Soto y Castro (2009) en las que se presentan las prácticas de los estudiantes al utilizar estos materiales y cómo los artefactos pueden mediatizar procesos del pensamiento matemático.

La primera de ellas propuesta por Salazar y Vivas (2013) “Se propone estudiar algunos de los fenómenos didácticos que se configuran durante la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración decimal, en particular el concepto de valor posicional y el impacto en estos procesos de la integración de materiales manipulativos” (p. 8). Para esta investigación si bien se hace mención de los diferentes materiales manipulativos, para la aplicación de las tareas se utilizan Bloques de Dienes “El material se presenta en cajas de madera. Una para cada base de numeración y está compuesto de cubos, placas y barras de madera pulida, sin color a fin de conseguir una mayor abstracción. En cada caja se encuentra: unidades, barras, placas y bloques. Llevan unas ranuras, fácilmente apreciables a un *cm* de distancia” Dienes (citado en Silva y Varela, 2010, p. 31).

Entre las conclusiones que las investigadoras mencionan acerca del uso de los bloques de Dienes resaltan algunos aspectos en el desarrollo de las tareas que plantean a lo largo de su investigación, se describe por ejemplo cómo los estudiantes se apropian y manipulan el material para lograr una comprensión del valor posicional del sistema de numeración, sin



embargo los planteamientos de Silva y Varela (2010) en el artículo *los materiales concretos en la enseñanza de la numeración*, señalan que los cubos de Dienes no cumplen con la

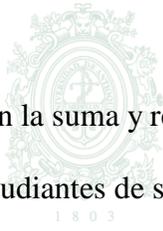
posicionalidad del sistema.

## Facultad de Educación

Entre los análisis que presentan Salazar y Vivas (2013) durante las tareas, indican que algunos estudiantes contaron de uno en uno cada unidad de las barras que representan los dieces o realizaban superposición de cubos sobre la barra sin reconocer la representación de ésta como la decena, esto se debe a las características de este material. En este sentido, si el estudiante no logra superar estas prácticas de recuento es posible que no logre acercarse a procesos de pensamiento en otros campos de saber, como por ejemplo, procesos de estimación, abstracción y generalización que le permitan conceptualizar otras ideas matemáticas como la adición, en especial, con grandes cantidades en las que la práctica del conteo no es una estrategia que se adecúa a estos contextos.

Otro de los materiales de uso común en la escuela primaria para la enseñanza y aprendizaje del SND es el ábaco, una de las tesis que utiliza este artefacto para el desarrollo de la investigación se realizó por Soto y Castro (2009) y se titula “El uso del ábaco para el aprendizaje de los sistemas de numeración en sexto grado de educación básica” este trabajo de investigación tuvo como propósito “desarrollar un aprendizaje de los sistemas de numeración de una manera diferente a la tradicional. Basados en el manejo del ábaco abierto como un material concreto, se puede lograr de una manera didáctica, dinámica, agradable y de muy sencilla comprensión” (p. 2).

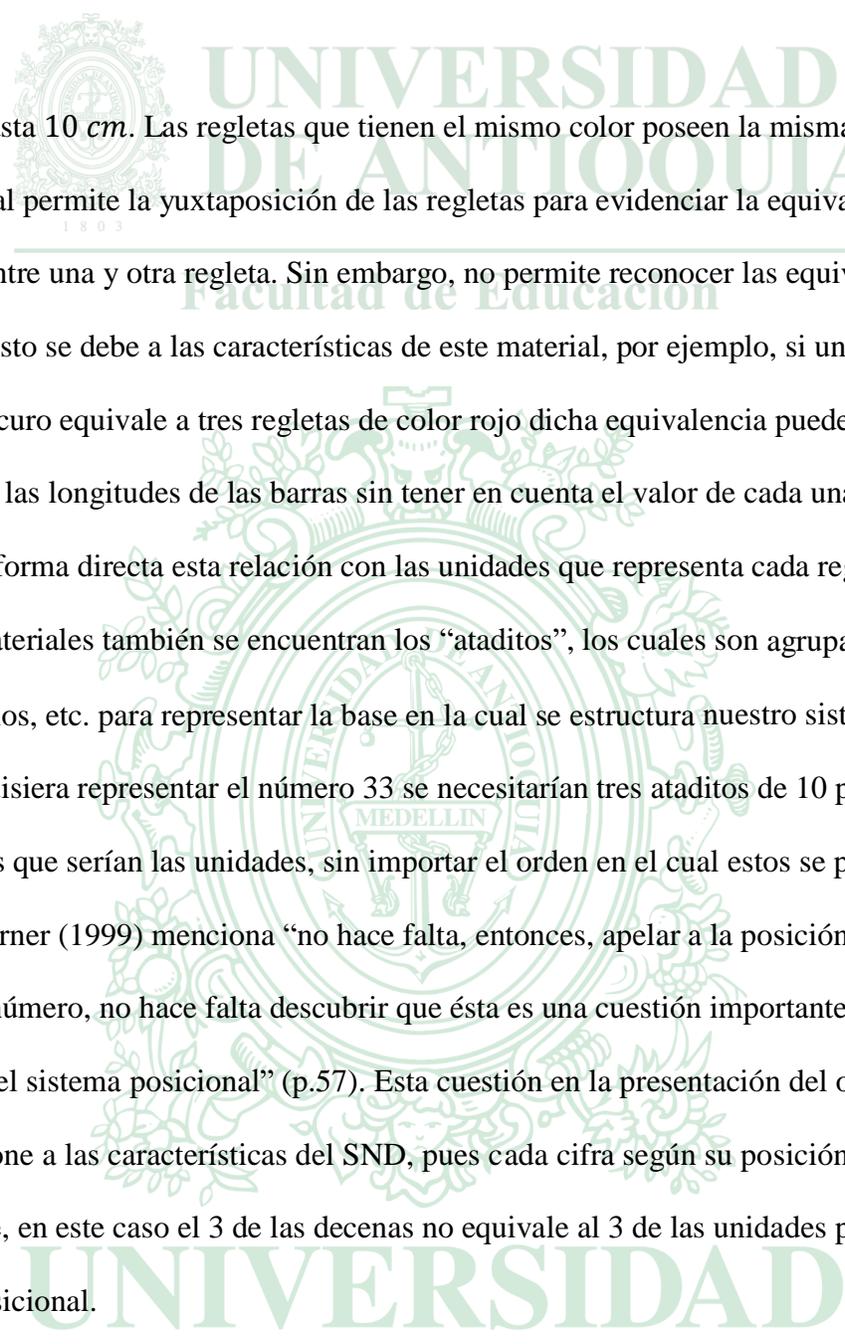
Entre las conclusiones que Soto y Castro (2009) destacaron de su investigación fue que las pruebas escritas y el desarrollo de las tareas en clase con el ábaco evidenció que se dio un gran avance entre los conocimientos y el grado de comprensión que los estudiantes tenían sobre



operaciones con la suma y resta en base 10, es necesario aclarar que esta investigación se elaboró con estudiantes de sexto grado, por lo tanto ya tenían un acercamiento al sistema de numeración y a las operaciones básicas.

En esta investigación se describen algunas situaciones con respecto al uso del ábaco y en particular con operaciones aritméticas, los estudiantes al realizar procesos de cambios de unidad transferían las arandelas de un vástago a otro sin tener en cuenta la equivalencia de esta en las unidades de orden menor, además otros investigadores realizaron diversas observaciones alrededor del uso del ábaco en la escuela, si bien fue un instrumento de gran avance para la humanidad, ahora en términos de enseñanza y aprendizaje es necesario que el profesor reflexione sobre sus posibilidades y limitaciones, puesto que el ábaco se conforma por una base rectangular a la cual se encuentran sujetos barras o vástagos paralelas entre ellas, las cuales representan las unidades, decenas, centenas y/o unidades de mil, a estos vástagos se añaden arandelas que representan un numeral según la posición del vástago, cuestión que debe aclarar el profesor antes de que los estudiantes utilicen el instrumento ya que no es inmediata esta relación. Además, el ábaco no permite diferenciar el valor que representa cada cifra, puesto que todo el tiempo se utilizan las mismas arandelas, por tanto “el ábaco es un artificio más, que deforma al objeto de enseñanza, ya que para comprender el funcionamiento del sistema de numeración se recurre a un objeto que no da cuenta de las cifras, sino de la cantidad de arandelas de cada vástago” (Silva y Varela, 2010, p. 30).

Existen otro tipo de materiales que se utilizan en la educación matemática para la enseñanza y aprendizaje del SND, entre estos materiales manipulativos se encuentran las regletas de Cuisenaire, las cuales también se denominan “números en color”, son una colección de barras en forma de prismas rectangulares de diverso color según las longitudes, estas van



desde 1 *cm* hasta 10 *cm*. Las regletas que tienen el mismo color poseen la misma longitud, este tipo de material permite la yuxtaposición de las regletas para evidenciar la equivalencia que puede haber entre una y otra regleta. Sin embargo, no permite reconocer las equivalencias entre los números, esto se debe a las características de este material, por ejemplo, si una regleta de color verde oscuro equivale a tres regletas de color rojo dicha equivalencia puede realizarse sólo al utilizar las longitudes de las barras sin tener en cuenta el valor de cada una puesto que no se hace de forma directa esta relación con las unidades que representa cada regleta.

Entre estos materiales también se encuentran los “ataditos”, los cuales son agrupaciones de diez fósforos, palillos, etc. para representar la base en la cual se estructura nuestro sistema, si por ejemplo, se quisiera representar el número 33 se necesitarían tres ataditos de 10 palillos, 3 palillos sueltos que serían las unidades, sin importar el orden en el cual estos se presenten. De esta forma, Lerner (1999) menciona “no hace falta, entonces, apelar a la posición para interpretar el número, no hace falta descubrir que ésta es una cuestión importante, que es la regla misma del sistema posicional” (p.57). Esta cuestión en la presentación del orden de los ataditos se opone a las características del SND, pues cada cifra según su posición representa un valor diferente, en este caso el 3 de las decenas no equivale al 3 de las unidades puesto que es un sistema posicional.

En este sentido, si se reconocen los artefactos no sólo como mediadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino como parte constitutiva del pensamiento humano es necesario repensar las prácticas matemáticas con el uso de estos artefactos y sus posibilidades para realizar actividad matemática en el aula.

Uno de los artefactos que posibilita simular el comportamiento del SND son los denominados “billetes decimales” propuestos por Botero (2011) en *Estrategias y reflexiones*

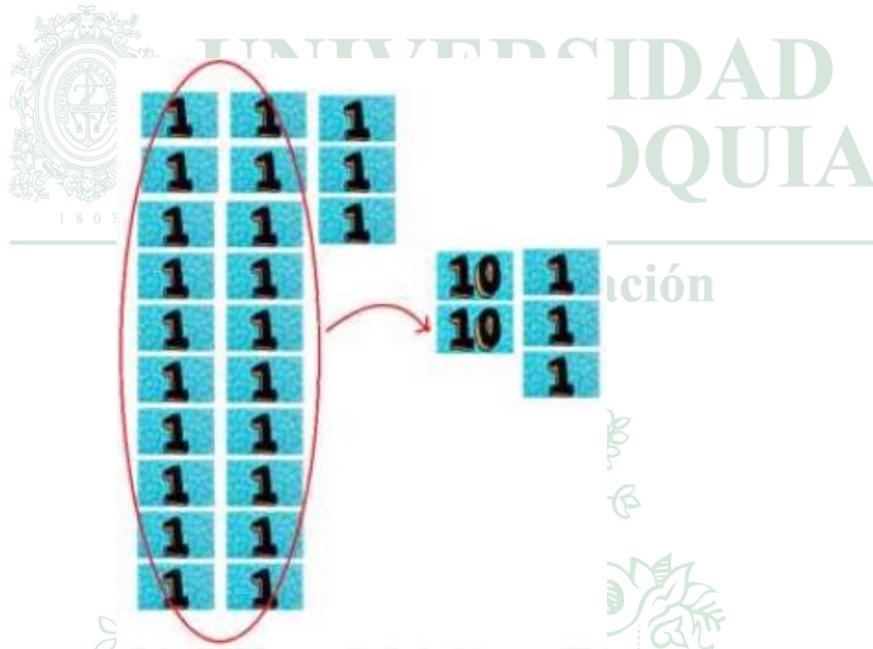


*matemáticas de maestr@s para maestr@s. Propuestas para la Educación Básica Primaria*, los cuales consisten en una colección de fichas rectangulares que se denominan con los números 1, 10, 100, etc. El uso de los billetes decimales como un artefacto permite comprender el significado de las características del SND y su relación con el desarrollo del pensamiento aditivo, esto se debe a que este material permite evidenciar de forma directa las equivalencias entre los billetes debido a sus características, y por tanto, no es necesario que se aclare con anterioridad, esto debe surgir del uso que realizan los estudiantes de dicho material. Por otro lado, la utilización de los billetes decimales permite que los estudiantes no se remitan a la acción de contar para realizar los cambios de base, sino que a través de las relaciones entre las unidades del SND puedan constatar que un billete de 10 equivale a 10 billetes de 1 sin necesidad de realizar el conteo, ni la yuxtaposición.

Además, el uso de este material lleva al estudiante a notar la necesidad del cambio de base y la posicionalidad propia de nuestro sistema, por ejemplo, para representar un 23 el estudiante podría utilizar veintitrés billetes de 1 pero el conteo y el manejo de la cantidad de billetes se dificulta y como estrategia para dar solución a la situación deberá realizar los cambios de 20 billetes de 1 por dos de 10, para economizar su representación (ver Figura 4).

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



**Figura 4:** Representación con los billetes decimales. Elaboración propia. Abril del 2016.

Este material permite hacer composiciones y descomposiciones de un número de acuerdo a las unidades del sistema de numeración, ya que, por ejemplo, el 245 se puede partir o agrupar en 245 billetes de 1, en 24 billetes de 10 y 5 de 1, así como también en 2 billetes de 100, 4 de 10 y 5 de 1. Al respecto Martínez (2000) considera importante la adquisición de la destreza de la composición o descomposición de un número ya que favorece la transferencia de la estructura de la numeración a otros campos de las matemáticas, en este caso, la transferencia a procesos de pensamiento aditivo.

Otra de las características de los billetes decimales es que representan las unidades del sistema según su orden, esto hace que los estudiantes realicen procesos de recuento, es decir, si un estudiante tiene un montoncito de billetes solo basta con agrupar sus denominaciones para saber qué cantidad tiene, a diferencia de otros materiales que no hacen posible este proceso.

De acuerdo con las características y posibilidades que ofrece este tipo de material para realizar actividad matemática en el aula de clase y para abordar de manera simultánea las relaciones que guarda el SND y el pensamiento aditivo, se propuso en esta investigación la



utilización de este material en tareas de tipo aditivo de tal manera que cuando el estudiante desarrolle dichas tareas pueda realizar composiciones, descomposiciones, cambios de unidad y reconocer otras particularidades del sistema de numeración que le permitan desarrollar habilidades de pensamiento aditivo.

De esta manera, las investigaciones descritas hasta este momento se cuestionan por los procesos de enseñanza y aprendizaje de un saber, ya sea la comprensión del uso y significado del sistema de numeración o las operaciones entre los números, se hace manifiesta la separación de estos dos campos de saber y no se tiene en cuenta que las operaciones entre los números se basan en las características del SND.

En esta dirección, se encontraron dos investigaciones que proponen el desarrollo de tareas de tipo aditivo en la que reconocen características del SND, las cuales fueron realizadas por Ramírez y Castro (2012) y Pantano (2014). La primera se titula “El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria”, en esta investigación, los autores diseñan e implementan un taller de resolución de problemas aritméticos verbales para estudiantes de primer grado de educación primaria que se basa en el modelo teórico de Instrucción Guiada Cognitivamente de Carpenter (1999) con el objetivo de generar aprendizaje de algunos aspectos del SND, como el valor posicional y diversas estrategias que se apoyaron en el manejo de grupos de diez unidades y decenas por medio de problemas de estructura multiplicativa y aditiva.

En dicho taller, se observó que las prácticas de los estudiantes para la resolución de problemas aritméticos se dieron en un principio por el conteo uno a uno de todos los objeto reunidos sin tener en cuenta aspectos del sistema de numeración. En esta medida, los investigadores propusieron talleres a los estudiantes con el uso de materiales concretos y se



enfocaron en los bloques de Dienes, esto produjo como consecuencia en un primer momento que los estudiantes realizaran grupos de 10 unidades con los bloques de Dienes para conformar la barra pero al conocer el valor final utilizaron como estrategia el recuento uno a uno de cada unidad.

Sin embargo, en un segundo momento cuando los estudiantes se enfrentaron a los problemas aritméticos comenzaron a reconocer características del sistema de numeración, por ejemplo, el carácter aditivo y el valor posicional. Por otro lado, otro tipo de prácticas que realizaron los estudiantes para responder a los problemas fue que trataban las unidades y decenas como si fuesen las mismas unidades de orden y se tuvo como consecuencia situaciones, como por ejemplo, la representación de 2 decenas (o 20 unidades) como 20 decenas.

Entre los aportes que nos ofrece la investigación tenemos que por medio de los problemas de estructura multiplicativa y aditiva los estudiantes pueden reconocer algunas características del SND como el valor posicional y el carácter aditivo que realizan los estudiantes en las prácticas y así evidenciar la importancia del desarrollo de tareas que permitan abordar características del SND y el pensamiento aditivo de manera simultánea.

La segunda investigación que atiende la relación entre estos dos saberes la desarrolló Pantano (2014) y se denomina “Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales”, dicha investigación tenía como propósito describir y analizar los diferentes medios semióticos que emplean los estudiantes al momento de desarrollar las tareas de tipo aditivo y los procesos de objetivación que se desarrollan durante la actividad matemática.

En el estudio presentan cómo los estudiantes con ayuda de los medios semióticos

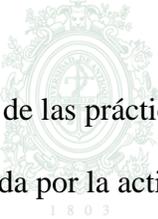


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
1803  
Facultad de Educación

evidencian diversas formas de comprensión del objeto matemático, por ejemplo, la expresión verbal, escrita, corporal, gestual, uso de artefactos, etc. Dichas formas dan cuenta de las diferentes maneras de interpretación por parte de los estudiantes frente al objeto de conocimiento. Esta investigación nos permitió ver que los estudiantes al desarrollar las tareas de tipo aditivo utilizaron características del SND como el carácter decimal y posicional.

De este modo, entre los aportes que nos ofrece la investigación de Pantano son el reconocimiento por la importancia de estudiar los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes, ya que estos son partes constituyentes del acto cognitivo y dan cuenta de las formas de expresión que se manifiestan por medio de la acción lingüística, corporal, gestual, entre otras, expresiones que muestran los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes durante la actividad matemática. También nos permitió adoptar la definición de pensamiento aditivo que el autor propone al seguir los principios epistemológicos de la teoría de la objetivación, además, es una de las investigaciones que se propone estudiar los procesos de objetivación y medios semióticos en tareas de tipo aditivo, ya que por lo general la teoría propuesta por Radford ha orientado procesos de investigación que se relacionan con el pensamiento algebraico (Gómez, 2013; Radford, 2010a, 2010b, 2011, 2012a, 2012b; Vergel, 2014; Villanueva, 2012).

Vale la pena aclarar que la diferencia de la disertación de maestría y la presente investigación se basa en que nosotros nos interesamos por estudiar las prácticas matemáticas que emplean los estudiantes al utilizar los billetes decimales y cómo este material movilizan formas de acción, expresión y reflexión asociadas a las características del SND y el desarrollo de pensamiento aditivo, con el objetivo de dar cuenta las posibilidades que ofrece este material frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos saberes, además, proponemos una



caracterización de las prácticas matemáticas de los estudiantes en el cual dan cuenta sus acciones mediada por la actividad gestual, corporal, el uso de artefactos, entre otros, como también, por la acción discursiva las cuales dan cuenta la movilización de los objetos matemáticos.

### **Marco teórico**

Durante la primera mitad del siglo XX, varios investigadores de diferentes ramas disciplinares se interesaron por asuntos concernientes a la educación y se propusieron constructos teóricos que replantean los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, se deja atrás las teorías individualistas del conocimiento para otorgar especial importancia al sujeto que participa de esta relación -enseñanza y aprendizaje-. Así, se piensa al sujeto como participante de la actividad educativa y, además, como un sujeto perteneciente a una cultura, por tanto, se reconoce como un ser histórico y social que se desarrolla a través de las prácticas que ejerce en relación con el otro y con el objeto de conocimiento que además se mediatizan con el uso de herramientas que encuentra en la cultura. De este modo, surgen teorías para repensar la educación tales como las teorías socioculturales del aprendizaje, en las cuales el aprendizaje del sujeto no está dado de forma predeterminada, sino que tiene lugar en relación con el contexto cultural, social e histórico al cual pertenece.

Estas teorías socioculturales emergen desde los planteamientos expuestos por Vygotsky al pensar el aprendizaje y el desarrollo cognitivo del sujeto, en relación con las condiciones sociales y culturales en que se encuentra. Además, las consideraciones históricas que tienen lugar a partir de la actividad humana, el papel de las herramientas y el lenguaje en el proceso de internalización del objeto de conocimiento. De esta manera, Vygotsky menciona que el aprendizaje del sujeto se da por medio de la interacción social y plantea en su teoría del

desarrollo cognitivo unos niveles evolutivos del sujeto: nivel evolutivo real y nivel de desarrollo potencial. La primera supone que el estudiante tiene las capacidades para realizar una actividad por sí mismo y así se puede evidenciar el desarrollo de su capacidad mental. Por otra parte, el segundo nivel hace referencia a la necesidad del sujeto de la mediación de una persona que tenga la capacidad de desenvolverse en la actividad para orientarlo, estos dos niveles evolutivos nos permiten comprender la zona de desarrollo próximo que define Vygotsky (1978) como:

La distancia entre el nivel de desarrollo real determinado por la solución independiente del problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución del problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otros pares más capacitados (p.86).

En otras palabras, es en la zona de desarrollo próximo en la cual el sujeto tiene las capacidades para aprender y donde tienen lugar los procesos de enseñanza y aprendizaje por medio de la interacción social. Es allí donde se constituyen las formas de pensamiento y donde las capacidades mentales de los sujetos varían según el acompañamiento que se tenga en este proceso de desarrollo.

De este modo, Vygotsky propone en su teoría de desarrollo cognitivo dos conceptos importantes al considerar las interacciones entre los sujetos y las herramientas culturales: funciones psicológicas naturales y culturales. Las primeras emergen en las funciones cognitivas del sujeto en su proceso de crecimiento y desarrollo. En cuanto a las funciones psicológicas culturales, estas surgen de las transformaciones de las funciones psicológicas naturales por medio de instrumentos materiales y simbólicos. Este proceso de transformación se da por medio de la internalización que realiza el sujeto, dicha internalización se entiende como “una



operación que representa inicialmente una actividad externa y que luego empieza a ocurrir internamente” Vygotsky (Citado en Radford, 2014, p. 139).

El concepto de internalización que se presenta en la obra de Vygotsky, es visto como una relación dual en la cual sujeto y cultura son dos entes que participan de esta relación, donde se distingue de manera clara lo interno y lo externo, además en este proceso de internalización se conciben los signos como instrumentos que le permiten al hombre relacionarse con el mundo. Sin embargo, Vygotsky deja de lado el hecho de que este proceso de internalización se da por medio de otros procesos ya sean corpóreos, sensibles, gestuales, etc., como tampoco se preocupa por la subjetivación, es decir, el papel del sujeto y su posicionamiento frente a esos procesos de internalización, y así surgen otras teorías para repensar el aprendizaje en el campo de la Educación Matemática, en las cuales el sujeto no sólo realiza una actividad matemática, sino que se transforma y toma conciencia frente al objeto. De la misma manera, el sujeto y la cultura no deben pensarse como “dos entidades distintas, sino como expresiones de una misma formación histórico-conceptual, o, como diría Hegel, como dos *momentos* de un *mismo todo*” (Radford, 2014, p. 140).

Por lo anterior, este trabajo de investigación se orienta por una de estas teorías; se centra en lo propuesto por Luis Radford en la teoría de la objetivación en la cual se piensa el aprendizaje como la dotación de sentido a los objetos conceptuales que el sujeto encuentra en la cultura a la cual pertenece y es por medio de dicha acción que se toma conciencia de este objeto. Este aprendizaje no es visto como una simple imitación o transmisión, es más bien un proceso de objetivación en el cual el sujeto crea sentidos y significados de manera dialéctica con el objeto de conocimiento. En este orden de ideas, se entiende objetivar como un proceso en el cual hay algo que me objeta, dicho proceso está en frente y por tanto me pone

resistencia. Es en este sentido que el sujeto se transforma en el proceso de conocer.

En la teoría que propone Radford se define la objetivación entonces como “el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente” (Radford, 2014, p. 141). Es importante anotar que dicha toma de conciencia es vista desde un punto dialéctico-materialista.

Por otro lado, Radford (2014) destaca dos procesos importantes en la concepción dialéctica de la enseñanza y aprendizaje que se denominan como: *knowing* (conociendo) y *becoming* (volviéndose: transformación perpetua del sujeto). El primero hace referencia a la toma de conciencia que hace el sujeto en su proceso social, emocional y sensible mediado por la cultura material, los sentidos y el cuerpo. El segundo término hace referencia al sujeto como ser inconcluso y en continuo movimiento ya que es un proyecto histórico-social. De este modo, el sujeto en la teoría de la objetivación es visto como un sujeto concreto, que siente y expresa sus emociones, así como también es un sujeto que se constituye a sí mismo a través de las actividades que realiza en la cultura en el que se encuentra. Para Radford (2014) el proceso de enseñanza y aprendizaje se relaciona con la producción de subjetividades y menciona que la subjetivación “consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo” (p. 142).

Uno de los principios fundamentales que plantea Radford en la teoría de la objetivación es la idea de actividad, trabajo o labor conjunta en el sentido que le dieron Hegel, Marx, Leóntiev y el materialismo dialéctico. Se entiende entonces la actividad como un proceso colectivo que desarrolla un grupo de seres humanos en contextos específicos, es decir “una forma social de

acción conjunta que incluye nociones de expresión del sujeto que labora” (Radford, 2014, p. 137). La actividad o labor conjunta se orienta a una intencionalidad de manera social y cultural en la cual el sujeto por medio de su acción reflexiva se desarrolla y se transforma de forma continua al interactuar y relacionarse con el otro, y a su vez constituye sentidos y significados del objeto de conocimiento en su proceso de objetivación del saber mediado por la utilización de recursos materiales y conceptuales (como el uso de artefacto, signos, cuerpo, etc.), como también, modifica y refracta la realidad que se constituye de manera histórica y cultural en un sentido dialéctico materialista.

El contexto donde el sujeto en su proceso de objetivación y subjetivación del saber desarrolla la labor conjunta, Obando, Arboleda y Vasco (2014) lo denominan institucionalidad, este se entiende como:

Ese espacio simbólico — con límites más o menos definidos— de prácticas compartidas por un colectivo de individuos, los practicantes de esa comunidad, espacio donde se comparte, se negocia, se actúa con los otros — donde también se excluye—, en donde resuenan las voces presentes de muchos otros y las voces pasadas que han constituido la memoria cultural de la comunidad (p.74).

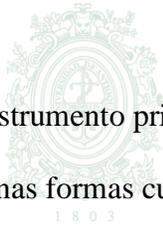
De acuerdo con esto, las prácticas que despliegan los sujetos en una institucionalidad les posibilitan a estos unas formas de accionar en el mundo que se constituyeron de manera histórica por medio de la actividad humana. Además, los sujetos pueden transformar su acción a través del proceso de subjetivación al realizar posicionamiento crítico y reflexivo en las prácticas culturales, así como objetivar el saber constituido a través de la historia en la memoria cultural

de los sujetos que son partícipes de la comunidad. En este orden de ideas, Obando, Arboleda y Vasco (2014) mencionan que con el hecho de referirse a práctica matemática se alude a unas formas específicas de acción y expresión que realizan los sujetos en su proceso de creación de sentidos y significados tanto de la cantidad y la forma, como por ejemplo: comprar, vender, intercambiar, contar, etc. Así como también a la variación de estas actividades (cambio, transformación, etc.) que se constituyen a través de la labor conjunta de los sujetos en relación con unas formas culturales de hacer y pensar el conocimiento matemático, a partir de unos medios para la acción que los sujetos heredan de la cultura para posicionarse ante el mundo y desplegar la práctica matemática. Estos medios para la acción son caracterizados por dichos autores a partir de los siguientes elementos:

**Los objetos y conceptos** del conocimiento matemático están estructurados de manera formal por unas definiciones, axiomas y teoremas propios del campo de las matemáticas sobre los cuales actúa el sujeto en su práctica, los objetos matemáticos no deben entenderse como abstracciones de objetos materiales en sí mismos, sino que estos representan acciones y relaciones sobre los objetos y entre sujetos, en tanto que los conceptos sean enunciaciones matemáticas del objeto de conocimiento.

**Los procedimientos e instrumentos** son las técnicas que emplean los sujetos en la actividad matemática tales como los gestos, movimientos corporales, entre otros. Los cuales se mediatizan a través de los instrumentos que son aquellos recursos simbólicos que utilizan los sujetos durante sus prácticas, como por ejemplo los signos, ecuaciones, artefactos, algoritmos, etc.

**Formas de discursividad** son aquellas formas de razonamiento y enunciación propias de las prácticas matemáticas que posibilitan el uso del lenguaje (comunicar, escribir, decir, etc.)



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Facultad de Educación

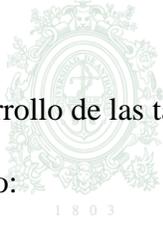
siendo este el instrumento principal que el sujeto utiliza para su acción en la actividad y que se determina por unas formas culturales de hacer y pensar. De esta manera, la discursividad se entiende como una relación esquemática compuesta por enunciados en donde intervienen dos o más sujetos.

**Problemas por resolver** son un espacio de indagación al que se ve enfrentado el sujeto y donde emergen los objetos matemáticos como resultado de procesos de exploración e interacción durante la actividad matemática.

Estos elementos que enuncian los autores se usan en esta investigación como categorías de análisis de primer nivel. Dichos medios para la acción descritos con anterioridad se entienden como aquellos medios materiales e intelectuales que se convierten en constituyentes del acto cognitivo del sujeto en el plano social mediatizado por unos valores estéticos, éticos, etc. que son el resultado de la sabiduría histórica y cultural de la actividad humana de las generaciones pasadas. Estos medios los denomina Radford como medios semióticos de objetivación.

### **Medios semióticos de objetivación**

En la actualidad, se ha puesto gran atención en lo que respecta a la semiótica y su influencia en el campo de la Educación Matemática, una de las razones es la preocupación por la comunicación y las interacciones que tienen lugar dentro del aula de clase y en especial, en lo que respecta al discurso matemático, al respecto Radford (2006b) afirma que “la semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva” (p. 7). Así pues para comprender las acciones y cómo los estudiantes dotan de significado las características del SND y sus relaciones de tipo aditivo, es necesario reconocer los medios semióticos de objetivación, los cuales son aquellos signos, artefactos, símbolos, términos lingüísticos, entre otros. Los cuales emergen de las interacciones que tienen



lugar en el desarrollo de las tareas propuestas. De esta forma, Radford (2003) define los medios semióticos como:

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

### Facultad de Educación

These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, I call semiotic means of objectification (p. 41).

Los medios semióticos en esta concepción de pensamiento no son herramientas por las cuales el sujeto manipula el mundo, sino que son mediadores de nuestras acciones intencionadas a través del uso de artefactos, la corporalidad, los gestos, el lenguaje, los signos, entre otros, es decir, orientan la actividad matemática que los estudiantes realizan en el aula de clase y en esta investigación nos permiten visualizar los procesos de significación que materializan los estudiantes a través de los medios semióticos que se despliegan en las prácticas matemáticas que desarrollan cuando utilizan los billetes decimales.

#### **Sistema de Numeración Decimal (SND)**

El carácter ontológico de los objetos matemáticos en la teoría de la objetivación toma distancia de posiciones epistemológicas que sustentan que los objetos matemáticos son producto de la mente humana y Radford (2006a) afirma que las maneras de conocer y pensar los objetos, se relacionan con los significados culturales que orientan la actividad del sujeto y así los objetos matemáticos se generan a través de las prácticas compartidas que se despliegan de las acciones de los sujetos en un tiempo y espacio dado, “son patrones fijos de actividad reflexiva [...] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006a, p. 111).



En este sentido, el sistema de numeración es un producto de la actividad humana que se desarrolla de manera histórico-social y que otorga significados al objeto matemático, por tanto, es una convención cultural que se dota de una simbología y reglas particulares para su constitución y utilización, en palabras de Bourbaki (citado en Gómez, 1988) su finalidad “es asignar a cada número natural individual (con un límite que depende de las necesidades prácticas) un nombre y una representación escrita, formada por combinaciones de un reducido número de signos, siguiendo leyes más o menos regulares” (p. 31).

### **Constitución cultural del SND**

Como muchos de los conceptos matemáticos, la numeración surge de una necesidad propia en la vida del hombre, necesidades tales como contar sus pertenencias y registrar el conteo. Por ejemplo, para contar sus ovejas, algunos seres humanos recurrieron a tallar pequeñas muescas o poner piedras en representación de cada objeto que deseaban contar, pero luego vieron la necesidad de agrupar dicho conteo con el objetivo de que le fuera posible facilitar la lectura de la cantidad y tener claras sus cuentas cuando el número era demasiado grande. De esta forma, surgen las diferentes bases de los sistemas como base 5, 10, 20, etc. en relación con el número de dedos de una mano, de las dos manos o de los dedos de sus manos y pies.

La primera forma de agrupar resulta bastante simple, pero aparecen luego nuevas formas de agrupamiento como es la múltiple, el cual es un sistema aditivo caracterizado por un símbolo distinto para cada una de las potencias de las bases (Gómez, 1988, p. 34) un ejemplo de este tipo de agrupamiento es el viejo sistema jeroglífico egipcio que se muestra a continuación:



# UNIVERSIDAD

- El 1 se representaba mediante un palo vertical ..... « | »
- El 10 se representaba mediante un arco ..... « ∩ »
- El 10<sup>2</sup> se representaba mediante la espiral ..... « ? »
- El 10<sup>3</sup> se representaba mediante la flor de loto ..... « ⚡ »
- El 10<sup>4</sup> se representaba mediante el dedo señalando ..... « ☞ »
- El 10<sup>5</sup> se representaba mediante el renacuajo ..... « α »
- El 10<sup>6</sup> se representaba mediante el hombre asombrado ..... « ⚡ »

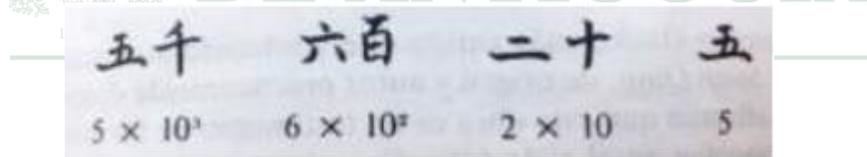
Figura 5: Sistema jeroglífico Egipcio. Tomada de "Libro Numeración y cálculo" Gómez p. 34. Copyright 1998.

Como puede evidenciarse, este tipo de sistemas tienen algunas dificultades como la cantidad de símbolos que se utilizan para la representación escrita, si bien en su momento resolvieron dificultades propias de esta sociedad, se dieron pasos a otro tipo de sistemas como el multiplicativo, los cuales son sistemas por agrupamiento que utilizan dos clases de símbolos, unos para indicar la potencia de la base y otros con una función multiplicadora de ellos, un ejemplo de este sistema es el tradicional chino-japonés que se muestra a continuación:

一	=	1
二	=	2
三	=	3
四	=	4
五	=	5
六	=	6
七	=	7
八	=	8
九	=	9
十	=	10
百	=	100(10 <sup>2</sup> )
千	=	1000(10 <sup>3</sup> )

Figura 6: Sistema tradicional Chino-Japonés. Tomada del "Libro historia de las matemáticas I" por Collette p. 173, copyright 1993.

De esta forma para escribir el número 5.625 se utiliza la siguiente escritura.



*Figura 7: Escritura del numeral 5625. Tomada del "Libro historia de las matemáticas I" por Collette p. 173, Copyright 1993.*

Una de las dificultades que se evidencian en este sistema es la extensa escritura simbólica para la representación de un numeral.

El sistema de numeración Babilónico es un sistema mixto (base 60 y base 10). Se estima que las primeras formas de escritura aparecen hacia el tercer milenio a.c, las cuales son un sistema cuneiforme que utilizaban la marca de una cuña para representar sus numerales y estos se agrupan de manera estrecha para formar una especie de símbolo para cada numeral, su base se debe a la medida del tiempo y se le asignaban valores dependiendo de la posición en la que se encontraban, al respecto Boyer (citado en Gómez, 1998) menciona:

Quizás fuese la poca flexibilidad que ofrecían los materiales de escritura mesopotámicos, o bien un relámpago de intuición imaginativa, lo que hizo consciente a los babilonios de que bastaba con dos símbolos, para el 1 y para el 10, para poder representar cualquier número entero por grande que fuese sin extensas repeticiones. Esto ocurrió hace más de cuatro mil años con la invención del sistema de notación posicional, basado en el mismo principio que el responsable de la eficacia de nuestro sistema de numeración actual (p. 37).

Los babilonios usaban una cuña vertical para representar las unidades y una cuña horizontal para representar las decenas, un ejemplo se muestra a continuación:

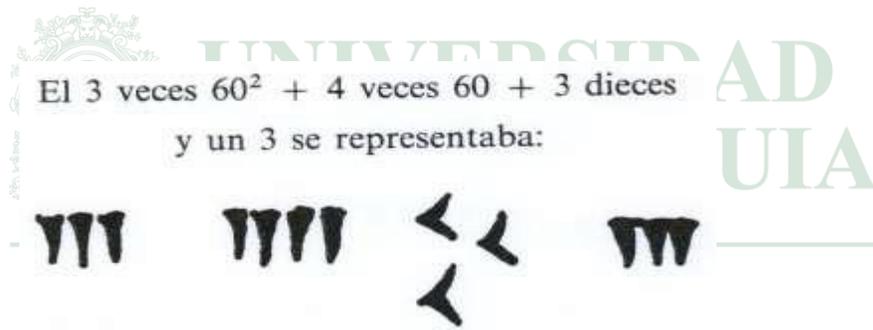


Figura 8: Representación Babilónica de numeral. Tomada de “Libro Numeración y Calculo” Gómez p. 38, Copyright. 1998.

Este sistema presenta una ambigüedad para la interpretación de su escritura, por ejemplo, la figura  se podría representar  $1 \times (60)^2 + 1 \times (60)^1 + 1 \times (60)^0$ ,  $2 \times (60)^1 + 1 \times (60)^0$  o  $3 \times (60)^0$  para superar esta situación, en la época seléucida se empezó a utilizar el símbolo  para indicar la potencia.

Uno de los aportes más importantes para la constitución del sistema de numeración tal como lo conocemos hoy en día es la herencia hindú, que luego de una etapa de evolución, ellos suprimen algunos símbolos de su sistema para utilizar sólo nueve de ellos que podían representar múltiplos de diez según su *posicionalidad*, es importante anotar que en esta cultura aparece además la idea del cero “0” que hasta ahora no se tuvo en cuenta en ninguno de los otros sistemas<sup>6</sup> que se mencionaron antes y, de esta forma, este sistema agrupa tres características importantes de nuestro sistema: decimal, posicional y cifrado.

Los eruditos hindúes utilizaron el sistema de numeración hablado en lengua sánscrita<sup>7</sup>, con lo cual se empieza a identificar similitudes con nuestra numeración hablada, por ejemplo, para los primeros números se les asignaba las palabras *eka*, *dvi*, *tri*, *cuatur* en su respectivo orden, a diferencia de nuestro sistema el orden de representación era de izquierda a derecha en

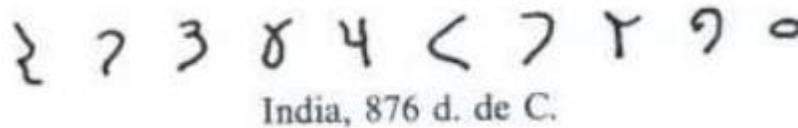
<sup>6</sup> La cultura maya en Latinoamérica también en sus registros se encuentran evidencias de la idea de cero representados con una especie de caparazón como la idea de ausencia

<sup>7</sup> Era algo así como el latín en la Europa medieval, la lengua culta que permitía que gentes de distintas hablas se entendieran Gómez (1998)

sentido creciente de las potencias.

Este sistema de numeración Hindú y las características que se desarrollaron

(Numeración cifrada, decimal, posicional y existencia del cero) se generalizaron al constituirse, ya no sólo como parte de la cultura erudita, sino de toda la comunidad, lo cual dio paso a una forma gráfica de representación que se denominó numeración Indo arábica.



**Figura 9:** Sistema de numeración Hindú. Tomada de “Libro Numeración y Cálculo” Gómez p. 48, Copyright 1998.

Esta representación escrita es muy similar a nuestra numeración escrita en comparación a las civilizaciones babilónica, chino-japonés y egipcia. Sin embargo, Murray (citado en Gómez, 1998) dice que:

Las cifras no tuvieron siempre el mismo aspecto, han variado a lo largo del tiempo e incluso de un país a otro debido al estilo personal de los copistas y a las características de su forma de escritura. Reseñar sus distintas formas es una tarea imposible. En el museo británico hay una colección del año 1914 de doscientas series de números arábigos obtenidos de fuentes medievales (p. 49)

A continuación se muestran algunos ejemplos de esta escritura en diferentes países y épocas de la historia, lo cual muestra una clara evolución hasta constituir el sistema de escritura que hoy se emplea.

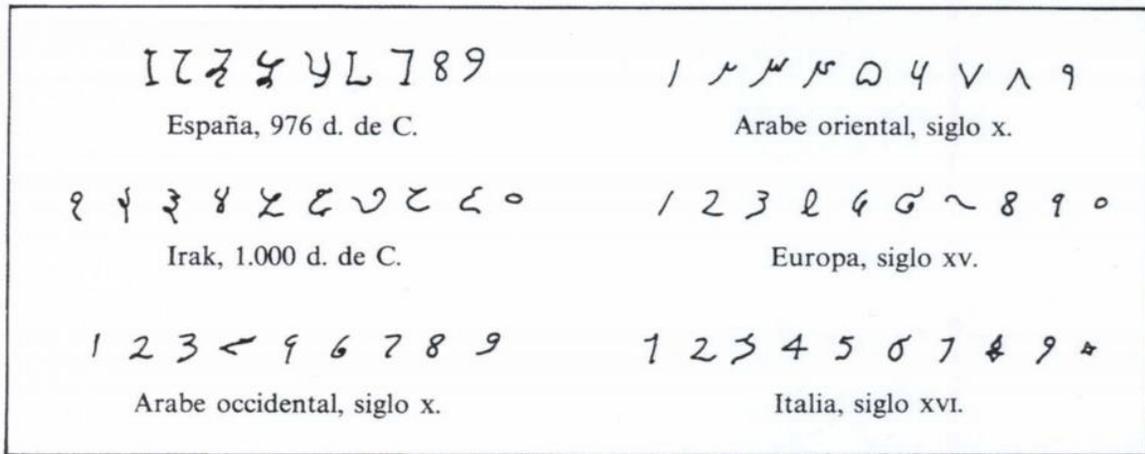


Figura 10: Escritura del número en diferentes épocas. Tomada de “Libro Numeración y Cálculo” Gómez p. 49, Copyright 1998.

Como se mencionó antes, el sistema de numeración que hoy se utiliza ha sido producto de una elaboración cultural e histórica de la actividad humana que resulta de una convención compuesta de reglas y símbolos que responden a diferentes necesidades, el SND cumple con unas características en su formación descrita por (Gómez, 1998, p. 59):

Al añadir al principio de agrupación el principio multiplicativo cifrado y el principio posicional se configura un sistema cuyas características se reseñan a continuación:

- La base del sistema es 10 y se escribe 10.
- Todo número es suma de potencias de la base.
- Adopta un símbolo específico para cada uno de los números inferiores a la base llamado cifras: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Una cifra a la izquierda de otra representa potencias de la base inmediatamente superiores.
- Cada cifra tiene dos valores, uno según su forma y por otro por el lugar que ocupa, de modo que la primera de la derecha expresa unidades simples, la segunda unidades de segundo orden, la tercera de tercer orden, etc.



- Cada unidad de un orden equivale a 10 unidades de orden inferior.
- Para expresar la carencia de unidades de cualquier orden se emplea el cero, 0.

## Facultad de Educación

De este modo, por las características ya descritas se dice que nuestro SND es de carácter mixto, es decir, que cumple con dos propiedades: aditiva y multiplicativa. La primera puesto que cada numeral se compone por la suma de unidades de orden que lo constituyen y la segunda porque cada dígito representa la multiplicación de potencia de 10 según la posición que ocupe. Por ejemplo:  $743=7\times 10^2+4\times 10^1+3\times 10^0$ .

Otra de las cuestiones que son importantes para tener en cuenta del SND es su aspecto de numeración hablada, la cual también encierra ciertas complejidades por las características que la determinan. La numeración hablada en comparación con la escrita no es posicional, por ejemplo, para enunciar el número 5.235 no puede comunicarse como cinco, dos, tres y cinco, al contrario, se debe indicar la cifra y al mismo tiempo la potencia de diez que representa, es decir, cinco *mil* *doscientos* treinta y cinco. Además, la numeración hablada lleva explícito el carácter aditivo y multiplicativo del SND, por ejemplo, el 206 significa  $200 + 6$  ó el 400 *cuatrocientos* significa  $4 \times 100$ .

Además, la numeración hablada encierra otra complejidad que hace parte directa de una convención cultural, por lo tanto, para enunciar los números pertenecientes a cierta familia es necesario expresar la decena entera y luego la unidad, por ejemplo, la familia de los “*veinti*” se expresan *veintiuno*, *veintidós*, *veintitrés*, etc. Situación que no se repite para la familia de los “*dieci*” pues no es correcto decir *dieciuno*, *diecidos*, *diecitre*s, etc. Decimos entonces, para referirnos a estos números *once*, *doce*, *trece*, *catorce* y *quince* en los que de forma oral se enuncia primero la unidad. Se constituyen así irregularidades con respecto a la propiedad multiplicativa



del sistema de numeración hablada y crea algunas dificultades de tipo epistemológico y didáctico.

Por otro lado, algunas potencias de diez del sistema de numeración hablada “no tienen un símbolo específico, sino un símbolo compuesto por los correspondientes a otras potencia” (Cid, Godino y Batanero, 2003, p. 189). Por ejemplo, la potencia de  $10^5$  no tiene una expresión oral específica, sino que es compuesto por *cien mil*, de la misma manera sucede con otras potencias de la base como es  $10^7$  que se enuncia *diez millones* y  $10^8$  que se dice *cien millones*, entre otros, “lo que hace que las potencias mil ( $10^3$ ) y millón ( $10^6$ ) se conviertan en bases auxiliares” (Cid, Godino y Batanero, 2003, p. 189).

Con este recorrido histórico, se puede observar que el SND no resultó ser un producto cultural tan natural como en la escuela se pretende presentar, ya que estas reglas “lejos de ser naturales son producto de la elaboración de un conjunto de convenciones que demandaron siglos para que los seres humanos las construyeran [...] Esto hace necesario ‘desnaturalizar’ nuestro saber de adultos sobre las reglas” (Itzcovich, et al, 2007, p. 32).

Por otra parte, el SND guarda una estrecha relación con las operaciones aritméticas, pues si bien se han constituido por su claridad para la representación numérica, un aspecto importante es su facilidad para realizar cálculos, lo que lo llevó a constituir y adquirir la importancia que hoy posee. En este sentido, varios autores empiezan a identificar la relación entre el SND con las operaciones por ejemplo Gómez (1998) afirma que:

Las diferentes reglas para la obtención de un resultado en una operación son coherentes con el sistema en el que se trabaja, esta es una de las razones por las que nuestro sistema ha logrado imponerse: facilita el cálculo y el estudio de



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

las propiedades y relaciones entre los números empleando fundamentalmente las propias representaciones y simbolizaciones numéricas, sin necesidad de mecanismos auxiliares. Esta potencialidad no se emplea a fondo en nuestra escuela, salvo las rutinas de todos conocidas (p. 59).

Facultad de Educación

Por todo lo anterior, este trabajo de investigación atiende esta relación entre el SND y el pensamiento aditivo para caracterizar las prácticas matemáticas de los estudiantes de primer grado de la IEFJAR, cuando utilizan los billetes decimales para el reconocimiento de las características del SND en tareas de tipo aditivo. Así, se reconoce el carácter mixto que conforma este sistema en tanto aditivo y multiplicativo.

## **Pensamiento aditivo**

Para referirnos a pensamiento aditivo, primero es necesario concebir el pensamiento desde lo propuesto por Radford porque desde el punto de vista metodológico el pensamiento como se entiende en la teoría de la objetivación, nos permite investigar los medios semióticos que movilizan los estudiantes durante las prácticas matemáticas, ya que el pensamiento supera las ideas mentalistas para situarse en posturas donde dicho pensamiento se materializa en las prácticas de los sujetos y por lo tanto es observable.

En este sentido, Radford (2006a) plantea que la teoría de la objetivación parte de presupuestos diferentes y en oposición a otras corrientes de pensamiento racionalistas e idealistas que argumentan que no se necesita ni de la experiencia ni de los sentidos para entender los objetos matemáticos o para comprender sus propiedades, sino que la teoría de la objetivación apuesta por una concepción no mentalista del pensamiento en el cual los medios semióticos son partes constitutivas del pensamiento, además, el aprendizaje se entiende como la toma de conciencia y discernimiento crítico que hace el sujeto frente a los objetos conceptuales, objetos

que han sido dotados de significados culturales. Además, se considera que el pensamiento es una re-flexión que realiza el sujeto frente al mundo mediado por los modos de acción, expresión y reflexión constituidas, es decir, mediatizado por los artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimiento, etc.), el signo, el lenguaje, el ritmo, etc. En este orden de ideas, se toman las consideraciones dadas sobre la idea de pensamiento en la teoría de la objetivación y se define el pensamiento aditivo de la siguiente manera:

La actividad reflexiva y sensible en torno a formas de acción, reflexión y expresión asociadas a las significaciones culturales e históricas con que han sido dotados de significado los objetos matemáticos suma y resta, significaciones que son resultado de la actividad matemática realizada por generaciones pasadas. Estas formas de acción, reflexión y expresión no necesariamente están asociadas al uso de la suma y de la resta sino que también pueden estar relacionadas con el uso del conteo, la comparación de cantidades, la agrupación no posicional y posicional, la equivalencia entre las unidades de primer nivel, las unidades de segundo nivel y cada una de las unidades de niveles superiores, a procesos de agregación y diferencia con objetos concretos, entre otras.

Formas que emergen y se materializan en la actividad matemática cuando los estudiantes se enfrentan a tareas en las que pueden operar aditivamente con los números naturales

(Pantano, 2014, p. 23).

### **Billetes Decimales**

De acuerdo con los elementos de la teoría de la objetivación propuesta por Radford (procesos de objetivación, medios semióticos, pensamiento, etc.) es pertinente reconocer las prácticas que realizan los estudiantes frente a un objeto de conocimiento. Por ende, en esta investigación se propone el uso de los billetes decimales para el desarrollo de tareas de

pensamiento aditivo.



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Muchos son los materiales que se diseñan para los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular para el SND (ábacos, bloques multibase, regletas, ataditos, etc.).

Al respecto los documentos rectores para la educación matemática en Colombia mencionan la importancia de estos materiales para que el estudiante comprenda las operaciones básicas e incluso el SND.

Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados (MEN, 1998, p. 46).

Además, el MEN (2006) propone la importancia del uso de estos materiales para el desarrollo del razonamiento, uno de los cinco procesos generales<sup>8</sup>, ya que posibilita el reconocimiento de generalidades, regularidades y relaciones, así como también realizar interpretaciones, argumentar ideas, entre otras formas de posibilitar el razonamiento en estudiantes de la educación primaria. Igualmente, allí se indica que “los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas” (MEN, 2006, p. 54).

En esta dirección, en los estándares básicos de primer ciclo de 1 a 3 se propone el uso de

---

<sup>8</sup> formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.



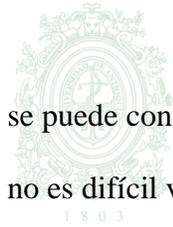
materiales físicos para el desarrollo de pensamiento numérico, como se muestra a continuación.

- Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
- Uso representaciones principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.) (MEN, 2006, p. 80).

Se considera entonces pertinente en esta investigación el uso de los billetes decimales, ya que permite al estudiante realizar una actividad consciente y sensible frente a las características del SND y el pensamiento aditivo. Lo anterior se debe a que las denominaciones de estos billetes son de 1, 10, 100, 1000, etc. y “este material diseñado con las mismas características de nuestro sistema, [...] favorece la manipulación concreta de las unidades del sistema de numeración que usualmente es presentado de forma abstracta” (Botero, 2011, p. 7). Por esta razón, permite al estudiante establecer regularidades y generalidades acerca del SND en su utilización y adquirir la habilidad para componer y descomponer los números. En relación con lo anterior, Martínez (2000) enuncia el uso que se le puede dar a un material con características similares a las que se presentan en los billetes decimales:

Una colección de monedas de 1, 10 y 100 pesetas, y billetes de 1.000 pesetas.

Es un material fácil de obtener y que ayuda en la comprensión del proceso. Los primeros ejercicios pretenden hacer ver como iguales una moneda de 10 pesetas y diez de 1 peseta. [...] lo mismo se hace con una moneda de 100, que



se puede convertir en diez de 10 pesetas y en cien de 1 peseta. Para los niños no es difícil ver que en una moneda de 100 hay monedas de 10 pesetas y, por supuesto, de 1, se trata en definitiva, de que contemplen a la vez todas las posibilidades. (p. 26)

Por lo anterior, los billetes decimales permiten que el estudiante pueda realizar diferentes particiones y agrupaciones de un número, de acuerdo con los criterios de cambio que se pueden realizar entre las unidades del sistema, por ejemplo, el 2493 tiene 3 unidades que no llegaron a agruparse en decenas, sin embargo, el número tiene en total 2493 unidades, de manera similar tiene 90 decenas que no llegaron a agruparse en centenas, pero en total tiene 249 decenas.

Martínez (2000) considera, por otro lado, importante la adquisición de la destreza de la composición o descomposición de un número, ya que favorece la transferencia de la estructura de la numeración a otros campos de las matemáticas, en este caso, la transferencia al pensamiento aditivo. Además, el autor plantea diferentes tipos de ejercicios que se pueden realizar para la composición y descomposición de un número. Estos se presentan a continuación:

[Tipos de ejercicios para la partición o descomposición]

*Consideración simultánea de todas las unidades en que se puede descomponer un número:* llevarán al alumno a considerar cualquier número formado de todas las maneras posibles por las unidades que lo integran. (p. 25).

*Descomposición de un número en función de las unidades que lo constituyen:* una vez que el alumno es capaz de partir el número al tomar como referencia una unidad, lo diferencia entre el número de esas unidades y la cifra que ocupa el lugar de posición que le corresponda. (p. 26).



*Dada una parte de descomposición, hallar la otra: sólo aparece el número que se descompone y una de las partes en que se ha descompuesto. (p. 27).*

## Facultad de Educación

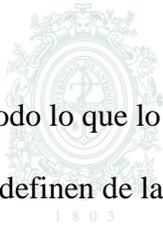
*Composición de números a partir de la numeración de unidades: se trata de trasladar a números un conjunto de unidades de orden, sin mixtificaciones ni encabalgamientos (p. 29).*

*Agrupamientos mixtos y con encabalgamientos de los órdenes de unidades: se han de componer números expresados en órdenes de unidades que se solapan (p. 30).*

### **Marco metodológico**

El presente trabajo de investigación se orientó bajo el enfoque cualitativo ya que este posibilitó un grado de flexibilidad y de reconstrucción constante durante su proceso de realización, además, propone la inmersión por parte de nosotros, los investigadores, al campo de acción (en este caso particular, en la clase de matemáticas) y establecer una interacción con los estudiantes en el contexto donde desarrollan sus prácticas sociales, de modo que, la información que se obtuvo, resultó de primera mano, de forma eficaz y verídica.

Situarnos en el enfoque cualitativo para desarrollar el proceso de investigación supone tener en cuenta que este se basa en un proceso inductivo en el cual aspectos como la exploración y descripción juegan un papel fundamental, para esto, la utilización de técnicas de registro, tales como, la observación directa, los diarios de campo, las entrevistas, entre otras, son pertinentes para describir, interpretar y analizar la información, ya que estos dan cuenta las prácticas que despliegan los participantes, sus subjetividades y aspectos como sus emociones, perspectivas,

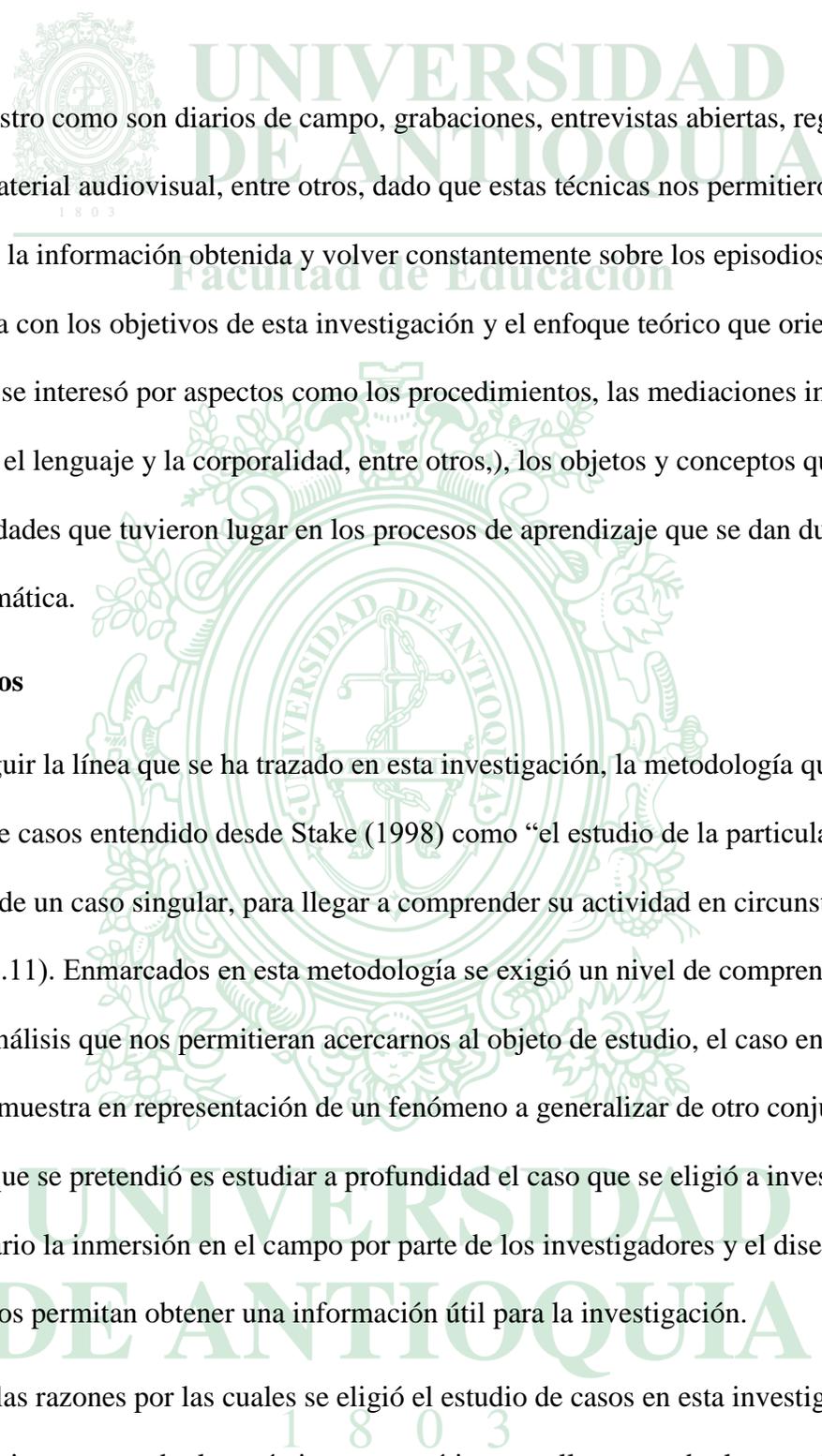


experiencias y todo lo que lo conforma como sujeto, al respecto Hernández, Fernández y Baptista (2010) definen de la siguiente manera la investigación cualitativa:

Puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo “visible”, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia a los objetos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y cotidianidad) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorgan) (p. 10).

Es importante resaltar que en este tipo de investigación no caben aspectos de generalización de un proceso a otros, ya que bajo los supuestos que se mencionaron antes, se puede decir que la subjetividad y las realidades tanto de los participantes como del investigador permean todo el proceso. Además, las experiencias en la investigación resultan particulares en cada situación pues sugiere estudiar a profundidad y comprender las vivencias propias de un fenómeno específico, en el caso de esta investigación, el fenómeno que se propone estudiar son las prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado de la IEFJAR, al utilizar los billetes decimales durante el desarrollo de tareas asociadas al SND y el pensamiento aditivo. Por esta razón, nuestra investigación tiene un enfoque cualitativo, puesto que se estudió las prácticas matemáticas en el contexto real donde ocurren, en este caso particular, en la clase de matemáticas, la vida escolar y todas las situaciones que lo componen.

En vista de que nuestro interés fue estudiar las prácticas matemáticas que despliegan los estudiantes, fue necesario utilizar instrumentos que nos permitan registrar la información para realizar los análisis, en este sentido, para la recolección y análisis se utilizó como principal instrumento las observaciones que realizaron los investigadores. De igual forma, se usaron

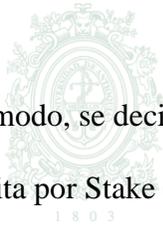


técnicas de registro como son diarios de campo, grabaciones, entrevistas abiertas, registros fotográficos, material audiovisual, entre otros, dado que estas técnicas nos permitieron analizar con más detalle la información obtenida y volver constantemente sobre los episodios, todo esto, en concordancia con los objetivos de esta investigación y el enfoque teórico que orientó el estudio, el cual se interesó por aspectos como los procedimientos, las mediaciones instrumentales (la gestualidad, el lenguaje y la corporalidad, entre otros.), los objetos y conceptos que movilizan y las discursividades que tuvieron lugar en los procesos de aprendizaje que se dan durante la actividad matemática.

### **Estudio de casos**

Para seguir la línea que se ha trazado en esta investigación, la metodología que se utilizó fue el estudio de casos entendido desde Stake (1998) como “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p.11). Enmarcados en esta metodología se exigió un nivel de comprensión, descripción y análisis que nos permitieran acercarnos al objeto de estudio, el caso entonces no constituyó una muestra en representación de un fenómeno a generalizar de otro conjunto de casos, pues lo que se pretendió es estudiar a profundidad el caso que se eligió a investigar, para esto, fue necesario la inmersión en el campo por parte de los investigadores y el diseño previo de las tareas que nos permitan obtener una información útil para la investigación.

Una de las razones por las cuales se eligió el estudio de casos en esta investigación se debe a que permite comprender las prácticas matemáticas que llevan a cabo los estudiante, de manera particular, los procedimientos y discursividades que constituyen alrededor del SND en tareas que se relacionan con el pensamiento aditivo mediada por el uso de los instrumentos, en especial, por los billetes decimales.



De este modo, se decidió tomar de manera específica la definición de estudio de caso intrínseco descrita por Stake (citado en Rodríguez y Valdeoriola, 2009)

El estudio intrínseco se desarrolla porque queremos conseguir una mejor comprensión de un determinado caso. No optamos por un caso concreto porque éste represente a otros casos o porque sea ilustrativo de un determinado problema o fenómeno, sino porque es de interés por sí mismo (p. 58).

La investigación se desarrolló dentro de la cotidianidad de la clase de matemáticas y por esta razón no optamos por apartar un grupo de estudiantes como caso a estudiar, sino, que durante los registros y episodios que resultaron en el desarrollo de las tareas se determinaron los casos particulares para analizar, de esta manera, se conservó el aspecto naturalista propio de la investigación cualitativa, ya que el escenario y contexto donde ocurren los episodios se asemejan a la realidad de su vida escolar.

Para el registro de la información se utilizó el software Atlas.ti como recurso para la categorización, organización y análisis de la información. Este software es una herramienta para el análisis cualitativo que permite realizar tareas como la codificación y análisis de grandes cantidades de datos pero sobre todo permite hacer análisis sobre material audiovisual, registros fotográficos y grabaciones de audio, ya que fueron las principales herramientas de recolección en la investigación. El programa además, nos permitió elaborar redes de acuerdo a las categorías de análisis que se plantearon en la investigación, como también, las categorías que emergieron durante el proceso de codificación y análisis.

Las categorías bajo las cuales se analizaron e interpretaron los episodios fueron las siguientes: los problemas por resolver, formas de discursividad, instrumentos y procedimientos,

objetos y conceptos, se tomó como referente a Obando, Arboleda y Vasco (2014) quienes afirman que las prácticas matemáticas se pueden caracterizar a partir de los siguientes elementos:

Los objetos de conocimientos con —y sobre los cuales se actúa— los conceptos que se enuncian sobre los mismos, los instrumentos para la acción, las técnicas que permiten tales instrumentos, los problemas, en tanto metas que orientan la acción, las formas de discursividad que permiten poner el hacer en el lenguaje — formas de decir, de escribir, de comunicar (p. 83).

Se realizó de igual manera un análisis a partir de las categorías propuestas desde la teoría bajo la cual se orientó este trabajo investigativo, la mirada de los investigadores como participantes directos del proceso y los datos que se registraron durante el desarrollo de las tareas propuestas, y se obtuvo así un proceso de triangulación entre estas tres fuentes de saber. Este proceso nos permitió tener miradas más amplias sobre el fenómeno que se estudió, de manera veraz, eficaz y obtener así una mayor claridad a la hora de categorizar los episodios.

### **Unidades de análisis y proceso de codificación**

Las unidades de análisis que se emplearon en el proceso de investigación fueron orientadas hacia la comprensión de las prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes en su proceso de objetivación de las características del SND y el desarrollo de habilidades de pensamiento aditivo, de esta manera, las unidades de análisis se definieron a partir de las tareas que los estudiantes realizaron durante la clase de matemáticas.

El desarrollo de estas tareas por parte de los estudiantes nos posibilitó el desarrollo de la caracterización de los procedimientos que se movilizaron durante la actividad matemática, los instrumentos que mediatizaron sus maneras de actuar y fueron partes constituyentes de sus formas de pensar, los objetos y conceptos que los estudiantes objetivaron durante las actividades



matemáticas que desarrollaron en las tareas y las discursividades que enunciaron en las interacciones entre estudiantes y estudiantes-investigadores por medio de la actividad verbal, escrita y gestual.

## Facultad de Educación

De esta manera, el proceso de codificación que se elaboró con la información que se registró se basó en una sistematización de los episodios que dieran cuenta de las prácticas matemáticas que movilizaban los estudiantes, además, se renombró cada uno de los episodios de manera que se indicaba el número de la tarea, la fecha en que se registró el episodio y la posición que ocupa con respecto a la otra información que se tenía de dicha tarea, por ejemplo, el episodio 03\_05\_Oct\_2016 (02) indica que es un archivo que corresponde a la tarea número 3, el día 05 de octubre del 2016 y ocupa la segunda posición con respecto a los registros que se tienen de la tarea que se mencionó.

Después se importó los registros al programa Atlas.ti y se codificó los episodios según las categorías generales propuestas en la investigación, en la medida en que esto se hacía, se identificaron y especificaron unas categorías de segundo y tercer nivel en relación con las reflexiones de los investigadores y los referentes teóricos, en especial, los planteamientos de Obando y Vásquez (2008), quienes describen las estrategias por parte de los estudiantes para operar a través del conteo y las características del SND.

De este modo, las nuevas categorías nos permitieron comprender y realizar un análisis con más detalle de las prácticas matemáticas de los estudiantes, dichas categorías se describen a continuación:



Tabla 1: Descripción de categorías de segundo nivel

<b>Categoría</b>	<b>Descripción</b>
<b>Con_Adi_Pal_Núm:</b> <b>Concepto, carácter aditivo de la enunciación palabra-número.</b>	Describe las formas discursivas que los estudiantes emplean en relación con el carácter aditivo de la palabra-número que se ha constituido de manera histórica y social, por ejemplo, el cincuenta y dos son cincuenta más dos.
<b>Con_Car_Dec:</b> <b>Concepto, carácter decimal del sistema de numeración.</b>	El estudiante en su proceso de objetivación realiza agrupamientos de diez unidades para conformar una unidad de orden superior, además, estas agrupaciones establecen una relación de equivalencia entre las unidades según su orden.
<b>Con_Val_Pos:</b> <b>Concepto, valor posicional.</b>	El estudiante en su proceso de constitución de sentidos y significados da cuenta el reconocimiento del valor que ocupa cada cifra de un número o utiliza esta característica del SND durante la actividad matemática que desarrolla
<b>Dis_Acc_Ded:</b> <b>Discursividad, acción corporal con los dedos</b>	Son aquellos movimientos corporales que el estudiante realiza, específicamente con los dedos para comunicar o apoyar el discurso que enuncia a los compañeros o investigadores.



<b>Dis_Acc_Señ:</b> <b>Discursividad, acción corporal, señalamiento.</b>	El estudiante acompaña las expresiones verbales con expresiones corporales, en específico, con lo son el señalamiento con los dedos u otros elementos hacia algún instrumento.
<b>Dis_Exp_Pro:</b> <b>Discursividad, explicación del procedimiento</b>	El estudiante en su proceso discursivo enuncia la explicación del procedimiento realizado en las tareas propuestas.
<b>Dis_Arg:</b> <b>Discursividad, argumentación</b>	Son aquellas formas de enunciación que usan los estudiantes para argumentar o justificar una respuesta a la tarea que desarrolló.
<b>Ins_Acc_Ded:</b> <b>Instrumento, Acción Corporal con los Dedos</b>	Son aquellos movimientos corporales que el estudiante realiza con los dedos y que mediatizan su acción en la práctica matemática
<b>Ins_Acc_Señ:</b> <b>Instrumento, acción corporal, señalamiento</b>	Describe el uso de los dedos para señalar y se constituye como un instrumento mediador de la actividad matemática que desarrolla.
<b>Ins_Art_Bil:</b> <b>Instrumento, artefactos, billetes decimales</b>	Describe el uso de los billetes decimales como artefacto que mediatiza las formas de pensar y de actuar del estudiante.



<b>Ins_Art_Hoj:</b> <b>Instrumento, artefactos,</b> <b>hojas.</b>	Describe el uso de hojas como artefacto que mediatiza la práctica matemática que realiza el estudiante.
<b>Ins_Rep_Ded:</b> <b>Instrumento, representación</b> <b>con los dedos.</b>	El estudiante utiliza los dedos para realizar representaciones de una cantidad.
<b>Ins_Rep_Sim:</b> <b>Instrumento, representación</b> <b>simbólica.</b>	Describe la representación de un número que el estudiante desarrolla de manera simbólica.
<b>Ins_Rep_Ver:</b> <b>Instrumento, representación</b> <b>verbal.</b>	El estudiante utiliza la expresión verbal o escrita como mediadores de la práctica matemática que realiza.
<b>Pro_Cál_Men:</b> <b>Procedimiento, cálculo</b> <b>mental.</b>	Son las habilidades que emplea el estudiante al resolver situaciones de manera mental y se materializan en sus discursos.
<b>Pro_Cam_Uni:</b> <b>Procedimiento, cambio de</b> <b>unidad</b>	El estudiante reconoce la equivalencia entre las unidades del SND y las utiliza como estrategia para resolver la tarea, por ejemplo reconocer que diez unos son un billete de 10, diez de 10 son uno de 100, etc.



<b>Pro_Com:</b> <b>Procedimiento, composición</b>	Son las agrupaciones que los estudiantes realizan entre dos o más cantidades según las unidades del SND para conformar una nueva cantidad.
<b>Pro_Compl:</b> <b>Procedimiento, completar.</b>	Este procedimiento se refiere a una estrategia que usan los estudiantes para desarrollar situaciones de composición, en la cual se tiene una cantidad dada y a partir de allí el estudiante realiza un conteo uno a uno hasta componer la cantidad final.
<b>Pro_Con_Múl:</b> <b>Procedimiento, conteo múltiple</b>	Describe el uso del conteo en unidades múltiples (2 en 2, 5 en 5, 10 en 10, etc.) como técnica que el estudiante moviliza en la práctica matemática.
<b>Pro_Des:</b> <b>Procedimiento, Descomposición</b>	Son las particiones o descomposiciones según las unidades del SND que el estudiante realiza a una cantidad.
<b>Pro_Pro:</b> <b>Procedimiento, proporcionalidad</b>	El estudiante establece una relación entre dos medidas de manera que al aumentar o disminuir la cantidad de una medida, la cantidad de la otra medida también aumentará o disminuirá.
<b>Prob_esc_bil:</b> <b>Problema, escasez de billetes.</b>	Es un espacio de indagación por fuera de los retos que exige la tarea inicial, los estudiantes se encuentran con la situación de no contar con más billetes de cierta denominación y eso



les permite constituir nociones sobre una característica específica del SND que es la equivalencia entre unidades, de esta manera, hacer cambios le permite dar solución a la tarea.

*Nota: Descripción de las subcategorías o categorías de segundo nivel que emergieron durante el proceso de investigación. Elaboración propia.*

En la medida en que se realizaba el proceso de codificación de los episodios, se elaboraban memos, es decir, se escribían comentarios a los registros de información codificados, los cuales contenían transcripciones de los diálogos, como también descripciones, análisis e interpretaciones de las prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes. Por medio de la codificación y organización de la información se elaboraron en el programa redes semánticas las cuales orientaron el proceso de análisis de la investigación.

### **Ruta metodológica**

A continuación se presentan una serie de tareas que se diseñaron con el objetivo de posibilitar al estudiante relacionarse con el objeto de conocimiento, en este caso con el SND en tareas relacionadas con el pensamiento aditivo, por medio del uso de *billetes decimales* debido a las posibilidades que ofrece este tipo de material por sus características. Con las tareas se esperaba que los estudiantes desarrollen en sus prácticas matemáticas procesos de pensamiento aditivo y reconocieran características, propiedades y regularidades del SND como su carácter decimal, posicional, aditivo y multiplicativo por medio de agrupaciones entre números de primer y segundo orden, descomposiciones entre números, cambios de unidad, entre otros, mediado por la utilización de los billetes decimales.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Facultad de Educación

Con las tareas que se diseñaron se esperaba además, que los estudiantes desarrollaran una actividad matemática mediatizada por el uso de artefactos, los movimientos corporales, el lenguaje hablado y escrito, uso de gestos, entre otros, lo cual se moviliza en sus modos de acción, reflexión y expresión al enfrentarse en tareas de tipo aditivo con el uso de los billetes decimales, los cuales a su vez serán objeto de estudio en la investigación.

En las tareas se propuso que los estudiantes utilizaran los *billetes decimales* y el uso que se le da a este manipulativo, varía según el contexto en el cual se utilizan y de los conceptos que emergen en las tareas.

Al respecto el MEN propone unos Estándares básicos de competencia en la Educación Matemática pensados para la comprensión del significado del número, sus relaciones y operaciones, entre ellos consideramos algunos que están en armonía con las tareas diseñadas en la investigación (MEN, 2006, p. 80):

- Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
- Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.).

- 
- UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Las tareas que se proponen a continuación se desarrollaron en el contexto particular de la elaboración de bisutería artesanal (por ejemplo, llaveros, pulseras, etc.) a cargo de los estudiantes, para esto, ellos debían adquirir los materiales por medio de su compra con los billetes decimales. De esta manera, debían realizar composiciones, descomposiciones, cambios de unidades, entre otros, con los billetes para obtener el valor de cada material y/o los materiales que se desean comprar. Por otro lado, se encontraron con tareas en contextos como la compra y venta de los productos artesanales, registro escrito de los gastos en dichas compras, etc.

A continuación se describen las tareas que se realizaron en nuestra investigación con la intención de describir y caracterizar las prácticas matemáticas de los estudiantes al utilizar los billetes decimales y su relación con los objetos de conocimiento que nos propusimos estudiar. Por lo anterior, cada tarea se piensa de tal manera que las prácticas que emergen por parte de los estudiantes involucren algunas características específicas del SND y el desarrollo del pensamiento aditivo.

### **Primera Tarea: La serpiente**

#### **Materiales:**

- Billetes Decimales (Veintiséis de 1 y quince de 10)
- Tablas de registro

#### **Objetivos:**

- Explorar el uso de los billetes decimales.
- Reconocer el valor posicional en la escritura del SND.



- Desarrollar algunas habilidades del cálculo mental.
- Realizar composiciones o agrupaciones de números.

## Desarrollo:

## Facultad de Educación

Para el desarrollo de esta tarea primero se entregaron los billetes decimales a cada uno de los estudiantes, segundo, ellos debían formar una especie de serpiente con los billetes entregados a medida que el profesor sacaba los billetes de diferentes denominaciones, los cuales se encontraban en una bolsa y, tercero, los estudiantes debían llevar la cuenta del valor que componen los billetes en un momento dado. Cada vez que se haya sacado cinco billetes, se le pedía al estudiante que registrara la cuenta que llevaba y se preguntaba a modo general ¿En qué número vamos?



Figura 11: Primera tarea, la serpiente. Elaboración propia. Septiembre 2016.

## Segunda tarea: Representación de cantidades con billetes

### Materiales:

- Billetes Decimales (Veintiséis de 1 y quince de 10)
- Tarjetas con valores

### Objetivos:



- Explorar el uso de los billetes decimales.
- Reconocer el valor posicional en la escritura del SND.
- Desarrollar algunas habilidades del cálculo mental.
- Realizar composiciones o agrupaciones de números.

### Desarrollo:

Se organizaron por parejas los estudiantes y se entregaron los billetes decimales, esta tarea consistió en formar por medio de los billetes decimales una cantidad representada en una tarjeta que será entregada por el profesor o investigador, la primera pareja que lograra formar la cantidad correspondiente a la tarjeta obtenía un punto, quien tuviera mayor puntaje ganaba.

23

### Alternativas de representación

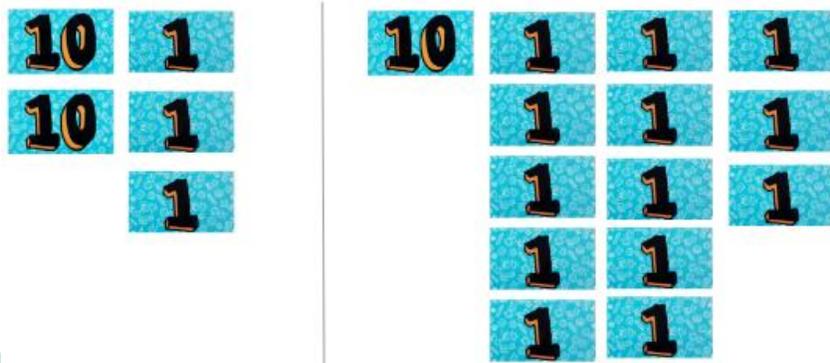


Figura 12: Segunda tarea, representación de cantidades. Elaboración propia. Septiembre 2016.

1 8 0 3

### Tercera tarea: Elaboración de pulseras

#### Materiales:

- Billetes de 1, 10 y 100



- Piedras para la elaboración de bisutería
- Dijes

## Facultad de Educación

### **Objetivos:**

- Realizar composiciones y descomposiciones de números.
- Usar diversas representaciones de un número con los billetes decimales.
- Reconocer algunas características del SND (posicional, decimal, etc.)
- Realizar cambios de unidades como estrategia para compra.

### **Desarrollo:**

Se organizaron grupos de 5 a 6 estudiantes, cada grupo se encargó de realizar un tipo de artesanía en este caso las pulseras, por ejemplo, a un grupo le correspondía la realización de una pulsera con piedras de color amarillo, otro grupo con piedras de color morado, etc. Cada estudiante debería comprar los materiales para la elaboración de las artesanías que le correspondía con el uso de los billetes decimales, el valor de cada pieza se mostró en un catálogo, el cual estaba a la vista de todos de tal manera que pudieran acceder a él cuando quisieran conocer el precio de cualquier material, para que cada estudiante pudiera comprar un material o varios materiales debían entregar el valor exacto. Cuando el estudiante terminara de comprar los materiales debía armar la artesanía que le correspondió.

### **Cuarta tarea: Elaboración de llaveros**

#### **Materiales:**

- Billetes de 1, 10 y 100



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

- Piedras para la elaboración de bisutería
- Arandelas

- Hilo encerado

## Facultad de Educación

- Catálogo de precios

### **Objetivos:**

- Representar diferentes números por medio de los billetes decimales.
- Realizar agrupaciones y particiones sencillas de números.
- Usar diversas representaciones de un número con los billetes decimales.
- Realizar cambios de unidades como estrategia para comprar
- Reconocer algunas características del SND (posicional, decimal, etc.)

### **Desarrollo:**

Se organizaron grupos de 5 estudiantes, cada grupo realizó un tipo de artesanía, en este caso, los llaveros. Cada estudiante debía comprar los materiales para la elaboración de las artesanías que le correspondía con el uso de los billetes decimales, el valor de cada pieza se mostró en un catálogo que estuvo a la vista de todos de tal manera que pudieran acceder a él cuando quisieran conocer el precio de cualquier material, para que cada estudiante pudiera comprar un material o varios materiales debían entregar el valor exacto. Cuando el estudiante terminara de comprar los materiales debía armar la artesanía que le correspondía.

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



*Figura 13: cuarta tarea, desarrollo de llaveros. Elaboración propia. Septiembre 2016.*

### **Quinta y sexta tarea: La lista de compras**

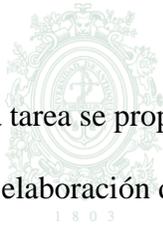
#### **Materiales:**

- Hoja de registro
- Billetes decimales
- Piedras para la elaboración de bisutería
- Hilo encerado
- Dijes
- Catálogo de precios
- Hojas de registro

#### **Objetivos:**

- Realizar registros de la numeración escrita de SND
- Realizar composiciones.
- Realizar cambios de unidades de orden.
- Reconocer equivalencias entre números

#### **Desarrollo:**



Para esta tarea se propuso a los estudiantes realizar una lista de los materiales que debían comprar para la elaboración de las manillas y llaveros, por ejemplo, una manilla se elaboró con 10 bolas, una cuerda y un dije, en el tablero se indicaba el valor de cada material, se propuso la compra de todos los materiales para evitar hacer la fila por cada compra y agilizar los procesos de compra y venta, en general en esta tarea se utilizaron sólo trece billetes de 1, once de 10 y uno de 100, con el objetivo de que los estudiantes se vieran con la necesidad de realizar cambios, además, se buscó evidenciar las estrategias que utilizaban para hallar el valor total de los materiales de la manilla.

### **Análisis de investigación**

#### **Consideraciones generales**

Las prácticas matemáticas que desarrollaron los estudiantes se constituyeron en relación a diversas tareas propuestas mediadas por el uso de los billetes decimales, en un primer momento se realizaron dos tareas –la serpiente y representación de cantidades con los billetes– las cuales se proponen con el objetivo principal de que los estudiantes tuvieran un acercamiento al uso de los billetes decimales, su estructura y posibilidades para la representación, al observar las informaciones que se registraron durante el desarrollo de estas tareas, se identificó que son relevantes los elementos discursivos ya que los estudiantes intentaron comunicar las estrategias que utilizaron a sus compañeros e investigadores en relación a la naturaleza de las tareas por medio del lenguaje hablado.

De esta manera, las enunciaciones de los estudiantes se orientaron hacia procesos de argumentación, explicación y validación de procedimientos, además estos elementos discursivos permitieron movilizar otros elementos propios de las prácticas matemáticas como lo fueron los

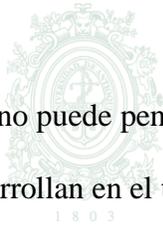


conceptos y objetos que se develan a partir del discurso que usan los estudiantes, mediados por los registros de representación que realizaron con los billetes decimales, entre otros, elementos que se relacionan durante la actividad en el aula, producto de la complejidad de las prácticas matemáticas.

En un segundo momento se desarrollaron dos tareas –elaboración de pulseras y elaboración de llaveros– y los registros de los participantes dieron aportes para analizar elementos en torno los procedimientos e instrumentos ya que las situaciones se registraron en el momento en que emerge de manera espontánea diversas estrategias y en ellas los instrumentos que mediatizan la actividad, sin embargo como ya se enunció, en el transcurso de estas tareas también emergen otros elementos que permiten caracterizar las prácticas matemáticas como los problemas por resolver, que se comprenden como esos espacios de indagación en los cuales emergen los objetos y conceptos matemáticos.

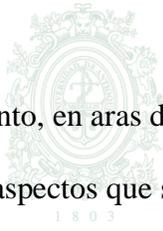
En el último momento se desarrollaron un par de tareas en las que se propone la elaboración de una lista de compras para adquirir los materiales para elaborar la bisutería, esto con el fin de posibilitar otros registros de representación que permitieran materializar sus procesos de pensamiento aditivo, en estas tareas se emplearon diversos tipos de instrumentos para mediatizar la actividad matemática del estudiante como lo son registros escritos, simbólicos y pictóricos, en especial se destaca el uso de los billetes decimales ya que este instrumento fue consustancial en su proceso de constitución de sentidos y significados alrededor del SND, debido a sus posibilidades para la representación y la manipulación de las características de dicho sistema.

En relación con los planteamientos expuestos hasta el momento, es necesario reconocer que aunque se destacan en distintas tareas algunos elementos durante la actividad matemática de



los estudiantes, no puede pensarse que estas categorías se movilizan de manera independiente, sino que se desarrollan en el transcurso de la actividad matemática de manera conjunta, es decir, en las prácticas matemáticas los estudiantes movilizaron técnicas y estrategias en su proceso de constitución de significados que dan cuenta de la materialización de las formas de pensamiento, mediadas por instrumentos que le permitieron pensar con y sobre los objetos y conceptos matemáticos, su acción se orientó por los objetivos o metas que se plantearon en los problemas a resolver y dicha acción es puesta en el lenguaje a partir de la discursividad.

En este sentido, en el presente escrito se desarrolla un análisis que pone como eje central la categoría de instrumentos y procedimientos para reflexionar sobre las acciones que se desarrollan mediatizados por el uso de diversos instrumentos, en especial los billetes decimales que permiten la manipulación de las características del SND, desarrollar estrategias de cálculo mental y habilidades de pensamiento aditivo. Sin embargo, no se realiza el análisis de esta categoría por separado, ni tampoco se toma cada tarea como eventos sin relacionar, sino, que al reconocer la naturaleza de la actividad matemática y todos los elementos que emergen para caracterizar las prácticas matemática, se parte de una categoría -procedimientos e instrumentos— y se describen las subcategorías: relaciones proporcionales, cálculo mental, completación, conteo, conteo múltiple, cambio de unidad, composición y descomposición en unidades del sistema, como técnicas que emergieron durante la actividad matemática mediatizadas instrumentalmente, en particular por los billetes decimales, los problemas por resolver como ese campo en el cual se indaga, explora y los objetos y conceptos matemáticos y por último los elementos discursivos que posibilitan la comunicación y elaboración de argumentos y explicaciones, entre otros medios, como la gestualidad, señalamientos, etc. que materializan los procesos de pensamiento matemático.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803  
Facultad de Educación

Por lo tanto, en aras de facilitar el proceso escritural de este documento pero sin desconocer los aspectos que se mencionaron sobre la complejidad de las prácticas matemáticas, se describirá cada procedimiento que emerge y los instrumentos que mediatizan las acciones, para develar los objetos y conceptos que se movilizan, además los elementos discursivos y los problemas por resolver que tuvieron lugar en el desarrollo de las tareas, de esta manera realizar la caracterización de los medios para la acción que movilizaron los estudiantes en las tareas de tipo aditivo con el uso de los billetes decimales y por tanto responder a los objetivos propuestos en la investigación.

A partir de estos procesos de codificación de la información, se comenzó a realizar una red con la categoría de instrumentos y procedimientos con el objetivo de tener un panorama general de las subcategorías que se establecieron en la investigación en el cual nos permitiera sistematizar, identificar y comprender las prácticas matemáticas movilizadas por los estudiantes, como también los episodios que compartían categorías y subcategorías en común y sus diferencias. Además, es necesario reconocer los instrumentos y procedimientos como una categoría conjunta, ya que los pensamientos que materializan los estudiantes en sus acciones son mediadas instrumentalmente, es decir, no puede haber una acción sin el uso de unos instrumentos que se constituyeron de manera histórica-cultural. De esta manera, la estructura general de la red para la categoría de instrumentos y procedimientos se presenta a continuación:

UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803

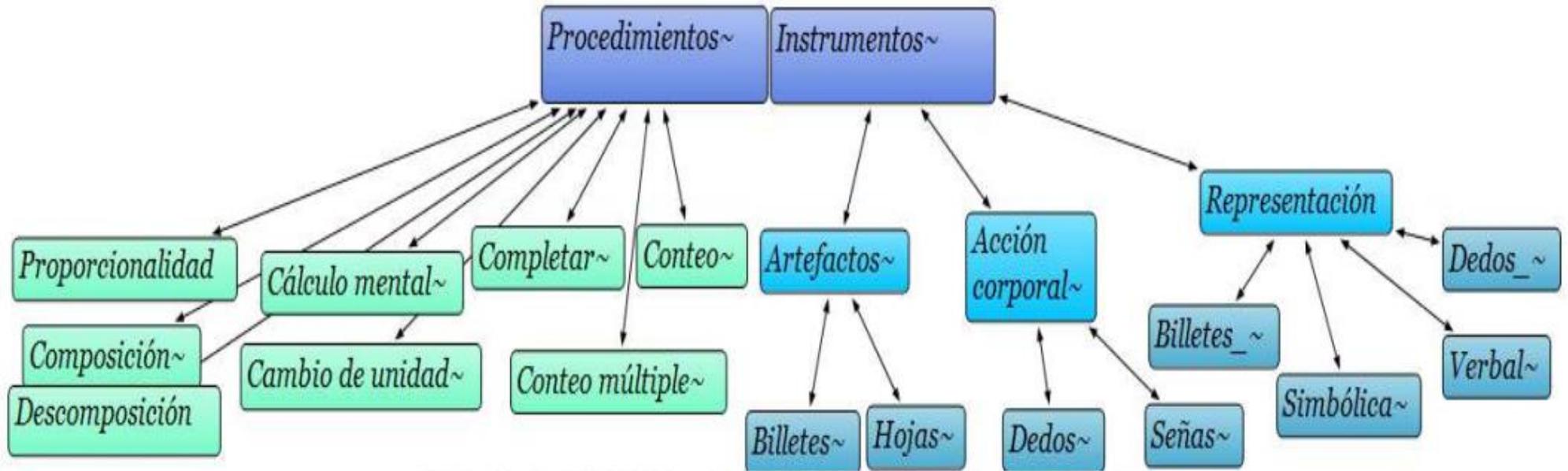


Figura 14: Red semántica elaborada de las categorías de análisis, tomada de "Software atlas.ti" febrero del 2017.

## Procedimientos e instrumentos

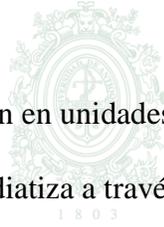
### Composición y descomposición en unidades del sistema

---

Uno de los procedimientos más frecuentes en las tareas propuestas es el proceso de composición de cantidades, como una técnica en la cual si se tienen dos o más cantidades que son las partes, al agruparse y constituir una nueva cantidad que será el todo, se convierte en una habilidad que le permitirá acercarse a otros saberes como lo son las operaciones básicas, en especial de carácter aditivo en su categoría de relación-parte-todo. Estos procesos de composición permiten constituir sentidos y significados alrededor de la noción de número, sus diferentes representaciones y composiciones, además, cuando estos procedimientos se mediatizan con el uso de los billetes decimales que por su estructura permite al estudiante reconocer que cualquier número puede componerse a partir de 1, 10 y 100 en general cualquier potencia de 10, se constituyen significados alrededor del SND y de conceptos matemáticos de este objeto cultural como su carácter decimal y posicional, además, posibilitar otro tipo de procesos como los cambios de unidades, que le permiten constituir nociones para desarrollar diversas habilidades de pensamiento aditivo y de cálculo mental.

Esta técnica de composición se evidenció durante el proceso de investigación como una estrategia que usan los estudiantes para enfrentarse a diversas tareas, en especial, emerge como estrategia de manera natural y eficaz en tareas como la serpiente, la representación de cantidades con billetes y aquellas que se desarrollaron en contextos de compra y venta, en las cuales el estudiante frente a las tareas y los diversos problemas que emergieron, recurren a la composición situación que se media, además, por la estructura del material propuesto y las posibilidades que ofrece para la representación de los numerales.

En la primera tarea los estudiantes al calcular la representación de su serpiente realizaron



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Facultad de Educación

una composición en unidades del SND para conocer el valor total, esta acción de constituir una totalidad se mediatiza a través de los billetes decimales como un artefacto que le posibilita trascender situaciones como el conteo uno a uno dada su estructura, es decir, un billete de 10 es una abstracción de las 10 unidades que representa y sobre este billete no podrán hacerse conteos para verificar la equivalencia, situación que posiciona al estudiante ante un problema a resolver, de esta manera su estrategia debe transformarse y realizar conteos múltiples, completaciones, cálculo mental, entre otros procesos en los cuales se tiene como unidad de conteo las decenas y centenas, así emergen conceptos matemáticos como la posicionalidad del SND ya que en la medida en que se añade un nuevo billete a la serpiente según su denominación resulta una nueva composición que al apoyarse en la representación escrita los estudiantes pueden realizar conjeturas sobre el valor posicional de un número como se muestra en la Figura 15, en la cual el estudiante elaboró su serpiente con los billetes y al agrupar todas las cantidades resulta la composición de un numeral que al registrarse en la tabla se observan algunas regularidades, pueden hacerse conjeturas y generalizaciones sobre el valor relativo de un numeral dependiendo de la posición que ocupa.

10	1	Total
2	3	23
3	4	43
6	5	051
4	1	41
5	4	54
5	8	58

**Figura 15:** Tabla de representación del valor de la serpiente. Tomada de "Actividad matemática realizada por un estudiante en la primera tarea", 22 de septiembre del 2016



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Un elemento que emerge con gran importancia en las prácticas matemáticas de los estudiantes en estas tareas son los elementos discursivos, ya que los estudiantes de manera frecuente recurrieron a la enunciación de la palabra número para realizar las composiciones del numeral, por lo tanto en esta enunciación el estudiante empleaba el carácter aditivo de la palabra numero con el fin argumenta sus soluciones o la usa como estrategia de solución, en general en el desarrollo de esta tarea los estudiantes se involucraron en situaciones en las que debían argumentar sus estrategias y soluciones para expresar el valor total de los billetes que componían la serpiente, este es el caso de una estudiante que al preguntarle por el valor total de una serpiente, ella argumenta por medio de la enunciación la frase *se convierte* que da cuenta de su proceso de composición.

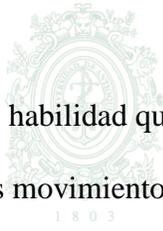
### ***Diálogo 1:** Fragmento tomado del vídeo 01\_22\_Sep\_2016 (09)*

*Estudiante (E): Cinco 10 y tres 1 se convierten en cincuenta y tres (usa su mano izquierda para comunicar cinco decenas y la derecha para expresar las unidades).*



**Figura 16:** Discursividad con los dedos. Tomada de “Actividad matemática realizada por un estudiante en la primera tarea”, 26 de septiembre del 2016.

Como puede verse la estudiante usa una mano para representar las decenas y la otra para expresar las unidades, materializa sus procesos de pensamiento a partir de la estructura de unos y



dieces del SND, habilidad que se da por la manipulación constante de los billetes decimales, en este episodio los movimientos corporales empleados para apoyar su enunciación mediatizan el proceso comunicativo de las estrategias usadas para resolver la tarea, pero además, dan cuenta de los procesos de pensamiento que constituye a partir de la interacción con el material, que se caracteriza por el uso de los 1, 10 y 100 y en el cual se encuentra depositado un saber constituido de manera histórica de un objeto matemático que es el SND y sus características.

Como puede verse la estudiante usa una mano para representar las decenas y la otra para expresar las unidades, materializa sus procesos de pensamiento a partir de la estructura de unos y dieces del SND, habilidad que se da por la manipulación constante de los billetes decimales, en este episodio los movimientos corporales empleados para apoyar su enunciación mediatizan el proceso comunicativo de las estrategias usadas para resolver la tarea, pero además dan cuenta de los procesos de pensamiento que constituye a partir de la interacción con el material, que se caracteriza por el uso de los 1, 10 y 100 y en el cual se encuentra depositado un saber constituido de manera histórica de un objeto matemático que es el SND y sus características.

En la segunda tarea se propuso la representación de diversos numerales por medio de los billetes decimales, este tipo de tarea permitió que los estudiantes constituyeran significados y sentidos alrededor del SND y desarrollaran procedimientos de composición y descomposición en unidades del sistema como dos procesos que se relacionan uno como el inverso del otro para constituir habilidades de pensamiento aditivo y las operaciones básicas. Se entiende la composición como el proceso de agrupar varias cantidades para obtener una sola cantidad, descomposición será entonces el procedimiento de determinar a partir de una cantidad dada las partes que la conforman según las unidades del sistema, y según Obando y Vásquez (2008) “la descomposición se basa en la composición, y en la medida que el estudiante construye

estrategias para la composición de dos cantidades, también podrá desarrollar estrategias para la realización de la descomposición” (párr. 58).

En esta tarea los estudiantes eligieron al azar un numeral para representar o en ocasiones era asignado y debían usar sus billetes decimales, al analizar los elementos que emergen en las prácticas matemáticas de los estudiantes nos encontramos con el caso de un estudiante en el que se identifica cómo los elementos se correlacionan, en este caso la discursividad, los problemas por resolver mediatizados por los billetes decimales a través de los procesos de composición y descomposición en unidades del sistema y de esta manera emergen conceptos matemáticos que se materializan a través de la enunciación del estudiante.

En el episodio **02\_Oct\_04(6)** el estudiante tiene un problema por resolver que es la representación del numeral que se encuentra escrito en el tablero, para esto debe descomponerlo en 1 y 10 al usar los billetes decimales, En este episodio el estudiante debía representar el 124 y para esto usa dos billetes de 100 y cuatro de 1, el estudiante usa los unos para representar las unidades que componen el numeral, no usa ninguna decenas, cuando el investigador le pregunta el porqué de su representación, el estudiante responde

### ***Diálogo 2: Fragmento tomado del vídeo 02\_04\_Oct\_2016 (6)***

*Estudiante (E): Hay un uno y un dos ((indica el numeral escrito en el tablero)) entonces con el uno (señala el 100 de sus billetes) le juntamos un uno ((se refiere al 1 del numeral del segundo 100, coloca un billete sobre otro y hace coincidir los 1 de los billetes de 100)) y el uno lo juntamos con el otro 100 entonces me forma el 1 y 2 y ponemos cuatro 1, y ya...*

*Investigador (I): A ver, yo les hago una pregunta ¿100 y 100 cuánto da?*

*E: (Se ríe) doscientos.*

*I: ¿Doscientos? y ¿qué número tenía que representar?*

*E: (Observa la representación escrita en el tablero) Mmmm, es ciento veinticuatro.*

*I: ¿Y con estos billeticos da para representar el 124?*

*E: (Se ríe y luego se apresura a tomar un billete de 100 de la caja, que coloca delante de los otros billetes) ¡Ay! tengo un... , ahhh ahora ¡sí!, mire acá está el ciento y el doscientos ...*

*I: Entonces ¿Esto es ciento y doscientos cuánto da?*

E: Mire el 1 que es este (señala el primer billete de 100) más los dos que son el 20 (señala los dos de 100) y los cuatro 1 ¿ya sí entendió?

I: Pero ¿100, 100 y 100 cuánto da? son tres cienes entonces ¿cómo sería si tengo tres cienes?

E: Trescientos por eso.

I: ¡Ah! y ¿cuál es el número que debía hacer?

E: El 124.

I: ¡Ah! ¿Entonces si será así? si es el 124 y acá tiene un 300 ¿si le daría?

E: Sí porque le quitamos el 1 (señala el primer 100) entonces sería el 100 acá solito y juntamos estos dos 100 entonces serían el 20 (señala los dos billetes de 100 que siguen) y cuatro unos es el 124.

I: ¿Y por qué no hay 10? si yo saco estos dos 10 (los saca de la caja donde guarda los billetes) y los cambio por estos dos 100 ¿qué pasa?, ¿sería lo mismo?

E: (Cambia los dos billetes de 10 por los dos de 100) si me da 10 y 10 van 20 y este 100 son 124.

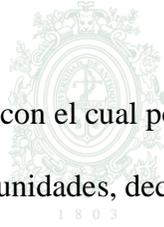
I: ¡Ah! entonces ¿cómo sería con los 10 o con estos dos 100?

E: Con los 10.

Se observa cómo el estudiante usa como estrategia para la representación la posicionalidad del SND con ciertas irregularidades, que orientado por el investigador que le pide componer el numeral no coincide con el 124, de esta manera si bien debe descomponer el 124 para representarlo con los billetes decimales debe componerlo de nuevo para validar su representación, estos dos procesos durante todas las tareas no se ven como dos procesos separados sino que las estrategias de los estudiantes varían constantemente entre uno y otro proceso.

En las prácticas del estudiante se observa como la enunciación y en especial el uso de la palabra número lo llevan a problematizar la representación mediada por los billetes decimales, en constante apoyo de las preguntas que realiza el investigador sobre su representación ante el problema por resolver sobre explicación y validación de la representación que realiza.

El mismo estudiante en otro episodio que tuvo lugar durante la misma tarea debía representar el numeral 137, al argumentar sus procedimientos usa su lenguaje corporal que son las señas con los dedos con los cuales comunica gestualmente sus procesos de pensamiento, y el



lenguaje verbal con el cual pone en las palabras la acción que realizó para descomponer el numeral en sus unidades, decenas y centenas, en la enunciación el estudiante materializa un saber que objetivó al hacerlo de manera natural, pues dotó de sentidos y significados el carácter escrito del SND y como resultado comunica el concepto de posicionalidad del sistema de manera clara con el objetivo de argumentar el procedimiento que realizó, durante toda su actividad matemática el estudiante usa dos registros de representación que media sus procedimientos y lo hace explícito cuando en su discurso usa el registro escrito del numeral y la representación con los billetes, esta última es la elaboración propia del estudiante y en ella materializa su pensamiento.

***Diálogo 3: Fragmento tomado del vídeo 02\_04\_Oct\_2016 (3)***

*Estudiante (E): Porque mire Pro como acá hay un 1 (señala el número 1 del numeral 137 escrito en el papel como se observa en la figura 17) se parece un ciento (señala el billete de 100 de su representación) porque acá se pasó de tres números ((se refiere al registro escrito)), entonces si le ponemos tres 10 que hacen un treinta (de nuevo señala la decenas como se observa en la figura siguiente) y siete 1 porque es un siete, entonces sería todo eso (se refiere a los billetes) el ciento treinta y siete.*



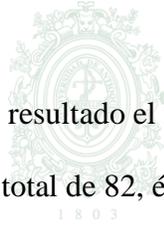
**Figura 17:** Discursividad señalamiento con los dedos. Tomado de “Actividad realizada por un estudiante en la segunda tarea”.

En el caso que se ha descrito, el estudiante para representar el numeral en sus decenas, unidades y centenas usa diversas estrategias entre ellas, el valor posicional del SND al relacionar cada cifra con la unidad correspondiente al lugar que ocupa y usa la enunciación de la palabra número ya que por su estructura la mayoría de las palabras tiene un carácter aditivo por ejemplo

el –ciento treinta y siete es un cien más treinta más siete, si se componen esas cantidades se obtiene el numeral a representar, pero cuando los estudiantes intenta argumentar sus procedimientos o los registros que han elaborado se desarrollan procesos de composición al usar la representación con los billetes obtiene una nueva cantidad, de esta manera la composición y descomposición en unidades del sistema son procesos que se involucran durante las tareas al realizar la representación de un numeral.

Nótese que en los episodios descritos con anterioridad los estudiantes emplearon estrategias de descomposición en unidades del sistema y composición de cantidades mediatizadas instrumentalmente por el uso de los billetes decimales y acciones corporales, para constituir en sus prácticas matemáticas sentidos y significados sobre las reglas o características que históricamente y culturalmente se han constituido sobre el SND como es el valor posicional y la regularidad en la enunciación de la palabra número.

Sin embargo, se identificaron otro tipo de prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes en las cuales sus procedimientos involucraron no sólo acciones relacionadas con la descomposición en unidades del sistema y composición de un numeral, sino, que utilizaron otras estrategias tales como contar, completar, realizar cambios de unidad, etc. con el objetivo de desarrollar las tareas en las cuales se enfrentaban, de manera que estas acciones mediadas instrumentalmente fueron constituyentes para movilizar otros conceptos y procesos matemáticos, como se observa, por ejemplo, en el siguiente episodio en el cual el estudiante debía saber cuál era el costo de todo el llavero que quería construir al conocer de manera previa los precios, una arandela que cuesta 34, un hilo que cuesta 18 y seis bolas que cuesta 5 cada una. El estudiante en su discurso explica el procedimiento que realiza mediado por el lenguaje hablado y la expresión con los dedos, en la explicación realiza una composición de manera total entre el 34 y 18,



menciona como resultado el numeral 52, además añade el valor de las seis bolas que le cuestan 30 y obtiene un total de 82, él lo enuncia de la siguiente manera:

**Diálogo 4:** Fragmento tomado del vídeo 06\_03\_Nov\_2016 (07)

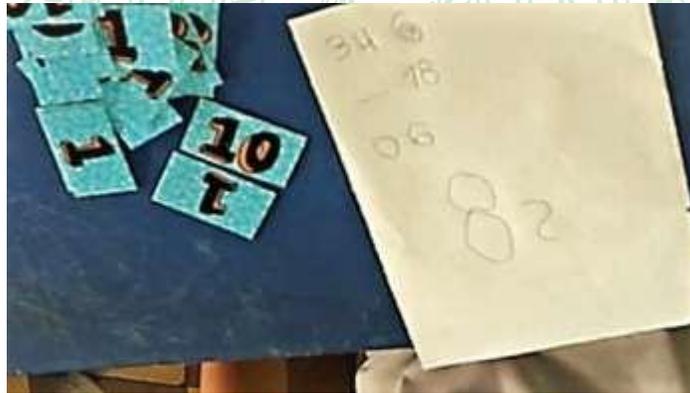
*Estudiante (E): El aro vale 34, más la cuerda 18, ¿cuánto valdría? 52, más los 10 de bolitas 3 dieces me darían 6 bolas ((se refiere a los 3 de 10 que le alcanzan para 6 bolas)) 10 de bolas porque 5 más 5 me dan 2 bolas porque valen 5 entonces 10 me darían 2, más un 20 me darían 4, más un 3 ((se refiere a tres de 10)) me darían 6, entonces junto todo esto ¿cuánto sería? 82.*

*Investigador (I): ¿Cuánto?*

*E: 82*

*I: ¿Cómo sabes que es 82?*

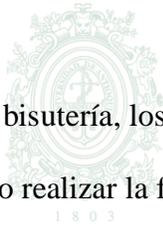
*E: Porque acá hay 55 (Realiza una pausa y corrige) 52, entonces porque el 10 le prestó para que se unieran el 2 y el 10 y le dieron 62, más los otros 10 le darían setenta y dos más los otros 10 serían 82.*



**Figura 18:** Registro escrito del procedimiento. Tomada de “Actividad matemática realizada por un estudiante en la quinta tarea”, 4 de octubre del 2016.

En este episodio el estudiante emplea como procedimiento la proporcionalidad directa debido a que estableció una relación entre dos magnitudes (el valor de la bola y cantidad de las bolas) que consistió en que a dos bolas le corresponde un valor de diez, cuatro bolas 20 y 6 bolas 30, siendo este procedimiento una técnica que le permite al estudiante aproximarse a procedimientos multiplicativos en su relación proporcional.

Los procedimientos de composición de varias cantidades que se desarrollaron de manera especial durante las últimas dos tareas de la intervención sobre la elaboración de listas de



compras para la bisutería, los estudiantes para facilitar dichos procesos de compra y evitar situaciones como realizar la fila varias veces para comprar producto por producto debía saber cuánto costaba todo lo que quería comprar para su manilla o llavero, en este proceso debía elaborar un registro escrito (la lista) con el valor de cada producto y el total a pagar, sus billetes mediatizan procesos de composición como una herramienta de cálculo para saber todo lo que debían pagar, durante estas tareas de composición los estudiante movilizaron otras estrategias como la completación, el cambio de unidades y en especial en este episodio observamos el cálculo mental que el estudiante materializa a través de la enunciación, él usa el carácter posicional del sistema y realiza agrupaciones de las unidades de orden, apoyado de las habilidades desarrolladas para pensar en estructuras de 1, 10 y 100.

### **Completar**

Uno de los procedimientos que los estudiantes en su proceso de objetivación movilizaron en las prácticas matemáticas fue la completación, esta se entiende como los procesos que realiza el estudiante de completar una cantidad a partir de otra cantidad dada, “este conteo completando exige al niño el realizar un doble conteo: uno que le permitirá determinar el resultado final y el otro, que le dice cuando parar el primer conteo” (Obando y Vásquez, 2008, párr. 14).

Este tipo de estrategias que emplearon los estudiantes fueron mediatizadas por el uso de unos instrumentos tales como la actividad corporal, lingüística y el uso de artefactos, los cuales fueron partes constitutivas y consustanciales de sus formas de pensar y actuar con y sobre los objetos matemáticos, por lo tanto, este tipo de estrategia, sus mediaciones instrumentales y discursividades le posibilitaron a los estudiantes un trabajo conjunto con características del SND (como son por ejemplo, el valor posicional y el carácter decimal) y procesos de pensamiento aditivo (como son por ejemplo, las acumulaciones sucesivas de una misma cantidad).

UNA DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS QUE REALIZAN LOS ESTUDIANTES EN RELACIÓN CON LA ACCIÓN DE COMPLETAR CANTIDADES SE OBSERVA EN EL SIGUIENTE DIÁLOGO 5, EN EL CUAL UN ESTUDIANTE UTILIZA LOS DEDOS DE SUS MANOS PARA EXPLICAR POR QUÉ DEBÍA PAGAR 128 CUANDO AGREGO A SU LISTA (CORRESPONDIENTE A UN VALOR DE 112) DOS BOLAS QUE CUESTAN CADA UNA OCHO UNIDADES:

***Diálogo 5: Fragmento tomado del vídeo 03\_02\_Nov\_2016 (02)***

*Estudiante (E): iba en ciento doce y yo conté: ciento trece, ciento catorce, ciento quince (emplea los dedos para hacer los conteos)*

*Investigador (I): ¿Contó de a ocho unos y llegó a ciento veintiocho?*

*E: Sí.*

El estudiante para consultar el valor total del llavero toma la cantidad inicial de 112 y agrega el valor de las dos bolas por medio de la acción de añadir cada cantidad unidad por unidad hasta completar el valor total, todo esto, mediado por el uso de los dedos para llevar las cuentas.

Una práctica matemática similar se observa en el siguiente diálogo 6, en el cual un estudiante debía consultar el precio de una manilla que contiene diez bolas que cuestan cada una, una cuerda que cuesta 18 y un dije que cuesta 26. El estudiante ya conocía el valor que componen las diez bolas, ahora debía añadir el valor de los otros materiales:

***Diálogo 6: Fragmento tomado del vídeo 05\_26\_Oct\_2016 (01)***

*Estudiante (E1): Cuánto va, cincuenta ¿cierto?*

*Investigador (I): O si quieres lo registras y luego lo haces, ... , cincuenta valen todas las bolas, ahora debes calcular cuánto vale la manilla con las bolas, la cuerda y el dije. ¿Cuánto valdría toda la manilla?*

*E1: Tengo diez, son cincuenta y cinco, sesenta. ((Realiza conteo de cinco en cinco hasta completar la decena))*

*I: y de ¿dónde sacaste ese diez?*

*E1: de la cuerda.*

*I: ¿De la cuerda? ¡Ah! Bueno, van sesenta, ahora ¿qué falta?*

*E1: Sesenta y uno, sesenta y dos, sesenta y tres, sesenta y cuatro, sesenta y cinco, sesenta y seis, sesenta y siete, sesenta y ocho (utiliza los dedos para apoyar su conteo y al terminar señala el valor de la cuerda).*

*I: Sesenta y ocho con la cuerda y ¿qué falta?*

*E1: Falta el dije.*

*I: Entonces ¿cómo vas hacerlo?*

*E1: Sesenta y ocho, sesenta y nueve... , sesenta y ocho, sesenta y nueve ...¿cuánto iba? sesenta y ocho ¿cierto?..., sesenta y ocho, sesenta y nueve ...*

*Estudiante 2 (E2): Setenta.*

*E1: ¡Eso! Setenta, setenta y uno, setenta y dos, setenta y tres, setenta y cuatro, setenta y cinco, setenta y seis, setenta y siete, setenta y ocho, setenta y nueve, ochenta, ochenta y uno, ochenta y dos, ochenta y tres, ochenta y cuatro, ochenta y cinco, ochenta y seis, ochenta y siete, ochenta y ocho, ochenta y nueve, noventa, noventa y uno, noventa y dos. (Realiza el conteo con el uso de los dedos)*

*I: ¿Noventa y dos?*

*E1: Todo eso es noventa y dos.*

*I: Y ¿Por qué comenzaste a contar de uno en uno?, ¿qué contaste primero de uno en uno?*

*E1: Los dos diez.*

*I: ¿Los dos diez? y ¿por qué los dos diez?*

*E1: Porque sí.*

*I: ¿Los dos diez del dije?*

*E1: Sí.*

El estudiante para continuar el cálculo del valor total de la manilla utiliza como técnica el conteo uno a uno con el objetivo de completar la cantidad total, en este procedimiento el estudiante realiza primero el conteo de las unidades de segundo orden y se apoya en el uso de los dedos para llevar sus cuentas, al tener en cuenta que los humanos tenemos diez dedos en las manos, el estudiante puede identificar de manera inmediata cuando terminó de contar un diez al observar todos sus dedos levantados y así cerrar los dedos para contar las otras unidades, ya sea de segundo orden o primer orden, siendo los dedos un instrumento que mediatiza y materializa el pensamiento del estudiante, además no se alejan de las características del SND, como por ejemplo el carácter decimal, se reconoce así este saber histórico y cultural que se constituyó al utilizar los dedos para contar y completar.

De acuerdo a los dos últimos diálogos que se mencionaron con anterioridad, se observa

que las estrategias de completación se mediatizaron por la acción de contar uno a uno con el uso de sus dedos, sin embargo, hubo otro tipo de prácticas matemáticas que los estudiantes movilizaron en relación con procesos de completar con el uso de otros instrumentos, por ejemplo, en el siguiente diálogo 7, un estudiante utiliza los dedos para completar una cantidad, además reflexiona y repiensa la estrategia que utiliza al emplear otros instrumentos en la actividad matemática que desarrolla.

La tarea a la cual se enfrentó el estudiante consistió en realizar la compra de diez bolas que cuestan 5 cada una, una cuerda que cuesta 18 y un dije que cuesta 24, el estudiante realiza las representaciones del valor de cada material con el uso de los billetes decimales de la siguiente manera: cinco billetes de 10 para las bolas, un billete de 10 y ocho de 1 para la cuerda, por último, dos billetes de 10 y cuatro de 1 para un dije. Antes de que el estudiante se dirigiera a comprar los materiales se le pregunta:

**Diálogo 7: Fragmento tomado del vídeo 05\_26\_Oct\_2016 (03)**

*Investigador (I): Ahora ¿cuánto es el total que vale la manilla?*

*Estudiante (E): Ochenta y dos*

*I: ¿Ochenta y dos? ¿Seguro? Mire a ver, yo quiero ver cómo lo haces.*

*E: Diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho (cuenta el valor representado para la cuerda) diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós (tomó los billetes de denominación uno de la representación del dije y completa al realizar conteos con los billetes de uno), veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho, veintinueve, treinta, treinta y uno, treinta y dos (tomó un diez y completó al realizar conteos de uno en uno con ayuda de los dedos).*

*I: Treinta y dos ¿a treinta dos le agrego diez?*

*E: Treinta y tres, treinta y cuatro, treinta y cinco, treinta y seis, treinta y siete, treinta y ocho, treinta y nueve, cincuenta, cincuenta y uno, cincuenta y dos (completa un diez al realizar el conteo de uno en uno con el apoyo de sus dedos). Cincuenta y dos.*

*I: A treinta y dos le agrego diez ¿cuánto?*

*E: Cincuenta y dos.*

*I: ¿Si es cincuenta y dos? ¡Ay! Hagámoslo otra vez que estoy confundido.*

*E: ¡Ah!, cuarenta y dos ... , cuarenta y tres, cuarenta y cuatro, cuarenta y cinco, cuarenta y seis, cuarenta y siete, cuarenta y ocho, cuarenta y nueve, cincuenta, cincuenta y uno, cincuenta y dos. (Tomó otro billete de diez y realiza el conteo uno a uno con el apoyo de sus dedos)*

*I: ¡Ah!, siempre, está dando treinta y dos, cuarenta y dos, cincuenta y dos, entonces ahora ¿Qué sigue?*

*E: Cincuenta y dos, cincuenta y tres, cincuenta y cuatro, cincuenta y cinco, cincuenta y seis, cincuenta y siete, cincuenta y ocho, cincuenta y nueve (Tomó otro billete de diez y realiza el conteo de uno en uno con el apoyo de sus dedos) ...*

*I: ¿Después de cincuenta y nueve?*

*E: Sesenta. Cincuenta y dos, cincuenta y tres, cincuenta y cuatro, cincuenta y cinco, cincuenta y seis, cincuenta y siete, cincuenta y ocho, cincuenta y nueve, sesenta, sesenta y uno, sesenta y dos (repite el conteo) ..., ya me cansé de contar.*

*I: Y ¿por qué no cuenta de diez en diez? A sesenta y dos le agrego diez.*

*E: Es que va dar lo mismo, sesenta y dos, ochenta y dos, noventa y dos. (Agrega cada billete de denominación diez cada que enuncia la palabra número).*

El estudiante para conocer el valor total que debe pagar utiliza como estrategia el conteo uno a uno de los billetes comienza con el valor que compone la cuerda (correspondiente a un billete de diez y ocho de uno), continúa con los billetes de denominación uno de las otras representaciones y después comienza a tomar cada billete de diez y lo compone al realizar conteos de uno en uno con la ayuda de sus dedos hasta agregar diez unidades, este procedimiento lo realiza con varios billetes de diez hasta llegar al numeral sesenta y dos. El estudiante allí manifiesta que se cansó de contar y en su proceso de objetivación identifica la regularidad de la enunciación de la palabra número, ya que él manifiesta el salto de nudos o familias al agregar diez unidades. En esta práctica matemática, el estudiante utilizó los billetes decimales como instrumentos que le posibilitaron repensar y reelaborar la práctica matemática que realizó, ya que al utilizar este manipulativo el estudiante tomó conciencia de la regularidad de la enunciación de la palabra-número, específicamente en el salto de los nudos o familias al añadir billetes de 10.

Otra práctica matemática similar que movilizó este mismo estudiante al completar cantidades con la utilización de diferentes instrumentos, tales como el uso de los dedos y los billetes decimales se observa en el siguiente episodio, en el cual una estudiante (E2) va a realizar la compra de un material para elaborar la bisutería, este tiene un costo de 29, ella entregó seis billetes de denominación 1 y comienza a tener ayuda de sus compañeros para entregar la

cantidad correspondiente:



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

*Diálogo 8: Fragmento tomado del vídeo 03\_05\_Oct\_2016 (02)*

*Estudiante (E): Como vale veinti, ¿veinti qué?*

*Estudiante 3 (E3): Veintinueve E: Entonces ponga nueve unos Investigador (I): Entonces ponga ¿qué? E: Nueve 1, ponga dos 10 y nueve 1*

*I: ¿Si E2? ¿Estás de acuerdo con lo que dice E?*

*E2: Sí.*

*E: Recoja todos estos unos (señala los seis billetes de 1 que había entregado)*

*I: ¿Cuántos unos me ha dado?*

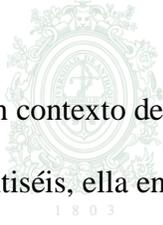
*E: Seis*

*I: Y por qué no. ¿Los puede completar?*

*E: ¡Ah! sí, ponga dos 10 (representa dos 10 con la expresión de dos dedos) ... , eso da veintiséis, veintisiete, veintiocho, veintinueve (utiliza los dedos para realizar los conteos) ponga tres 1 (representa tres 1 con la expresión de tres dedos) ... , y ya, compra lo que se quiso comprar.*

Para componer la cantidad que se requería para comprar la bisutería, el estudiante movilizó el concepto del valor posicional del SND en su discurso al reconocer que el numeral 29 se conforma por dos billetes de 10 y nueve de 1, siendo los billetes decimales un instrumento que posibilitó el reconocimiento del valor que ocupa cada cifra del número, además al preguntarle si podía completar la cantidad a partir de las seis unidades, el estudiante en su proceso de objetivación comienza a completar la cantidad al agregar o componer dos billetes de 10 a los seis billetes de 1 para conformar el veintiséis y continúa la completación al añadir uno a uno las unidades hasta llegar al número 29. En este sentido, se observa que por medio del uso de los billetes decimales el estudiante en su proceso de constitución de sentidos y significados moviliza varias estrategias de manera conjunta, ya que el estudiante no sólo completa por medio de la acción de contar uno a uno, sino que además utiliza agrupaciones con base en las características del SND, de manera que moviliza el valor posicional de un número en la práctica matemática que desarrolla.

Estas acciones que realizó el estudiante se mediatizan de manera instrumental por los billetes decimales también se movilizaron por una estudiante en otro diálogo. La estudiante se



presentaba en un contexto de compra de un material para la elaboración de la bisutería que tenía un costo de veintiséis, ella entregó una cantidad de dieciséis en seis billetes de 1 y un billete de 10. Al observar que el valor del material costaba veintiséis la estudiante empieza a realizar procesos de completación al añadir de uno en uno billetes de 1, sin embargo se enfrentó con un problema, ya que no tenía suficientes billetes de 1 para completar la cantidad, cuando la estudiante toma un billete de la siguiente subdivisión de la caja observa que tiene un 10 y se le pregunta:

***Diálogo 9: Fragmento tomado del vídeo 04\_06\_Oct\_2016 (03)***

*Investigadora (I): ¿Cuánto le falta?*  
*Estudiante (E): Diez.*

De esta manera la estudiante completa la cantidad al agregar un diez al dieciséis para conformar el veintiséis, en este sentido se observa que la estudiante en su proceso de objetivación comienza a completar la cantidad de uno en uno, sin embargo el problema que se le presentó en la actividad matemática le exigieron repensar la estrategia que la estudiante utilizaba, y realizó un cambio entre diez unidades por una decena con el objetivo de conformar el diez y agruparlo con la cantidad dieciséis para completar el valor que necesitaba para comprar el material, se reconoce así el carácter decimal del SND al realizar las equivalencias entre las unidades y decenas.

Además, este tipo de procedimientos que movilizaron los estudiantes en los diálogos 4 y 5 para realizar una representación con los billetes decimales también fue objeto de comunicación entre un grupo de estudiantes, como se observa en el siguiente episodio, en el cual un estudiante debía comprar un material para la elaboración de la bisutería, que cuesta 29, para esto, debía representar dicha cantidad con los billetes decimales, en este proceso dos estudiantes (E1 y E2)



intervienen en el procedimiento que él realiza y mencionan lo siguiente:

**Diálogo 10:** Fragmento tomado del vídeo 03\_05\_Oct\_2016 (08)

Facultad de Educación

*Estudiante 1 (E1): Es muy fácil ... , diez, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho, veintinueve y ya.*

*Estudiante 2 (E2): Dos 10, ¿cuánto es? ((se refiere al valor que cuesta el material))*

*Investigador (I): veintiocho*

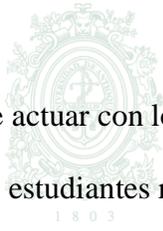
*E2: ¿Veintiocho? dos diez y ocho unos.*

*E1: Sí o de esa forma.*

*I: bueno, ya tiene dos diferentes formas de hacerlo.*

Como se observa en el anterior diálogo, la manera en que *E1* propone realizar la representación con los billetes decimales se basa en que a partir de un billete de 10 cuenta de uno en uno hasta completar la cantidad que se indica, por otro lado, el estudiante realiza la partición del numeral 28 según sus unidades de orden para componerlo, al proponer por medio de dos billetes de 10 y ocho 1, moviliza el concepto del valor posicional del SND. En este sentido, se observa cómo las interacciones entre los estudiantes dan cuenta de las diferentes maneras de proceder con los billetes decimales para realizar la representación de un numeral, como también, las diferentes acciones y mediaciones instrumentales que posibilitan la comprensión de las prácticas matemáticas, las cuales movilizan procesos de objetivación en relación con las características del SND y desarrollo de habilidades de pensamiento aditivo.

Como se presentó hasta el momento la acción de completar está mediada por unos instrumentos tales como la acción corporal y el uso de artefactos, los cuales se consideran como "portadores de la inteligencia humana y las formas históricas específicas de la producción humana que afectan, de manera definitiva, la manera en que llegamos a saber sobre el mundo" (Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2016, p. 23), en este caso, estos instrumentos posibilitaron



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803  
Facultad de Educación

unas maneras de actuar con los objetos matemáticos, en especial los billetes decimales ya que permitió que los estudiantes realizarán una actividad matemática al manipular las reglas del SND que se constituyeron de manera histórica y cultural como son por ejemplo el valor posicional, el carácter decimal y las regularidades en la enunciación de la palabra-número. De manera general los procesos de completación tienen lugar durante la actividad matemática cuando se tiene como objetivo realizar una composición. Sin embargo, las prácticas matemáticas que movilizaron los estudiantes en relación con los procesos de completación fueron mediadas por otros instrumentos como son los sistemas semióticos de representación, por ejemplo las representaciones simbólicas y el uso de los algoritmos convencionales.

La figura 19 representa los registros escritos que realiza un estudiante durante su actividad matemática, en el momento de su actividad se observa que él está agrupando la cantidad entre 25 y 5, utiliza como técnica el conteo uno en uno con el apoyo de sus dedos a partir del 25 hasta agregar 5 unidades para completar la nueva cantidad, además utiliza un sistema de representación simbólico en el que da cuenta que el estudiante en su proceso de objetivación reconoce que la agrupación de estas dos cantidades se transforman en una nueva cantidad.



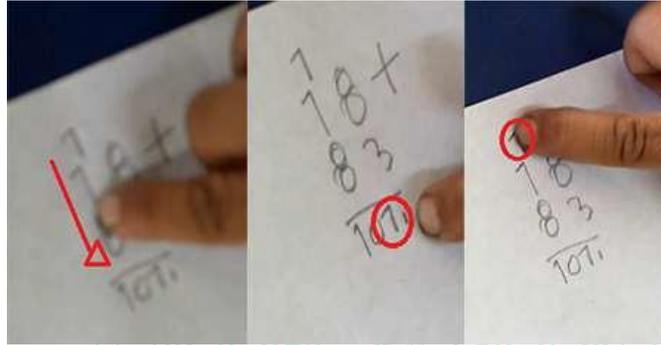
**Figura 19:** *Conteo uno a uno acompañado de los dedos. Tomado del video “Actividad matemática realizada por un estudiante en la sexta tarea”, 3 de noviembre del 2016*

Al preguntarle al estudiante por la actividad matemática que realizó, él en su proceso discursivo explica que tomó dos hojas, una para realizar las sumas por medio del algoritmo y otra para representar el resultado de las agrupaciones que hacía, para el caso de la suma entre el dieciocho y treinta y ocho (correspondientes a los valores de la arandela y la cuerda) el resultado que obtiene es el ciento uno. El uso que el estudiante le dio al algoritmo lo expresa por medio de señalamientos de las columnas de los algoritmos y la expresión verbal, allí da a comprender que escribió el 18 en la primera columna de manera vertical descendente y el 38 en la segunda columna de manera vertical ascendente (como se muestra en la figura 20), él resolvió el algoritmo al realizar una composición total entre los numerales de la segunda columna (8 y 3) y le da como resultado 11, escribe la unidad del 11 en el lugar donde se escribe el resultado y la decena la pasa a la primer columna, después se dirige hacia la primera columna (1,1 y 8) y el estudiante realiza un proceso de conteo uno a uno hasta obtener como resultado 10 y lo escribe debajo como resultado. En esta práctica matemática que el estudiante moviliza, presenta una irregularidad con el uso del algoritmo convencional, en este caso la forma en la cual se escribe



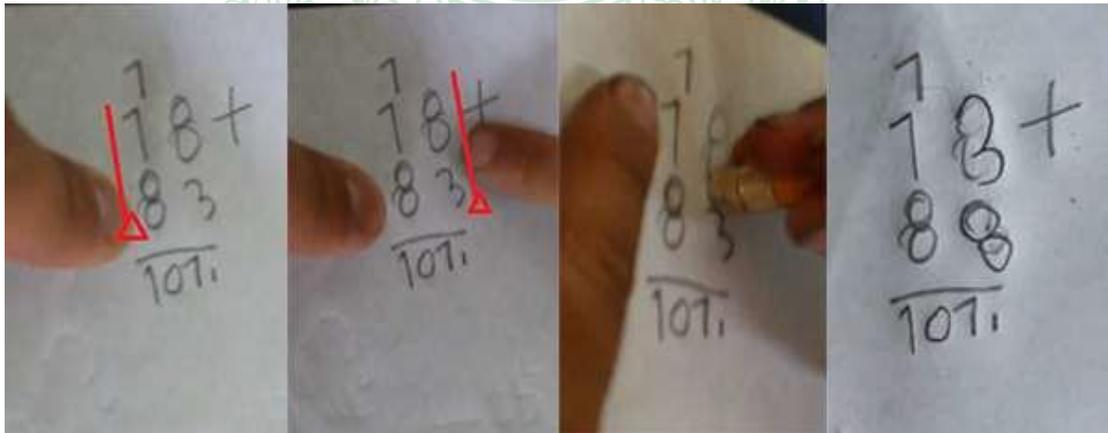
los numerales (verticalmente) ya que al realizar los procesos de descomposición en unidades del sistema y conteo el estudiante no utilizó las características del SND en tanto posicional y decimal.

Facultad de Educación



**Figura 20:** Uso irregular del algoritmo convencional de la suma (1). Tomada de "Actividad matemática realizada por un estudiante, en la sexta tarea". 3 de noviembre del 2016.

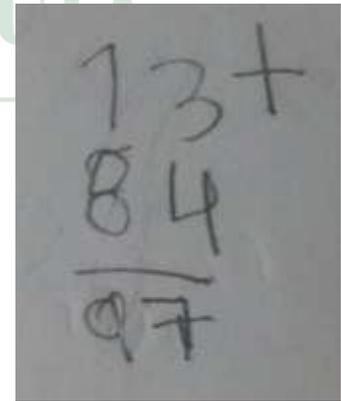
Además el estudiante, observa la manera en que escribe ambos numerales y borra los números de la segunda columna y lo escribe de manera descendente y menciona que seguirá dando como resultado once porque es lo mismo si ubica los números de manera al revés,



**Figura 21:** Uso irregular del algoritmo convencional de la suma (2). Tomada de "Actividad matemática realizada por un estudiante en la sexta tarea", 3 de noviembre del 2016.

Al observar estas irregularidades se le propone al estudiante realizar el procedimiento con los billetes decimales, entonces el estudiante comienza a representar la cantidad 38 que corresponde al valor de la arandela, sin embargo al preguntarle ¿cuánto cuesta la arandela?, él

observa que el valor es de 34, entonces el estudiante emplea de nuevo el uso del algoritmo de la suma para saber cuál es el valor que componen estas dos cantidades y en su proceso de escritura escribió cada numeral de manera vertical descendente, la técnica que empleó para resolver el algoritmo es tomar cada columna y realizar procesos de completación a partir de una cantidad, sin embargo se observa que el estudiante presenta de nuevo la irregularidad en el uso del algoritmo, ya que la forma en que escribe el algoritmo de la suma no posibilita la manipulación adecuada de las características del SND, ya que por ejemplo el numeral 34, al agrupar sus cifras se obtiene como resultado 7 unidades, situación que no cumple con las características del SND en cuanto a posicional, decimal y multiplicativo. Estas irregularidades son puestas en discusión a continuación:



**Figura 22:** Solución del algoritmo convencional de la suma. Tomado de “Actividad matemática realizada por un estudiante en la sexta tarea”, 3 de noviembre del 2016.

***Diálogo 11: Fragmento tomado del vídeo 06\_03\_Nov\_2016 (05)***

*Investigador (I): El treinta y cuatro está compuesto por ¿cuántos billetes de diez?*

*Estudiante (E): Tres.*

*I: De ¿qué?*

*E: De diez tres, y de unos cuatro. ((Descompuso el número en sus unidades de orden))*

*I: Entonces tres de diez y cuatro de unos ¿me van a dar siete?*

De acuerdo a la discusión que se generó con el uso del algoritmo de la suma que realizó el estudiante, se le propone utilizar los billetes decimales para calcular el valor a pagar de los materiales para la elaboración de la bisutería, el estudiante primero representa la cantidad 30 con 3 dieces, después agregó un diez que corresponde al valor de dos bolas que cuestan 5 cada una y por último representa la cantidad 34 que corresponde a la arandela y el 18 de la cuerda, estas representaciones las realiza de acuerdo al valor posicional que ocupa cada cifra del número. Al preguntarle ¿cuánto da todo eso? El estudiante comienza a tomar los dieces de todas las

agrupaciones y realiza el conteo de los billetes de diez de manera múltiple y después continúa con los unos.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

**Diálogo 12:** Fragmento tomado del vídeo 06\_03\_Nov\_2016 (06)

*E: diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, sesenta y uno. (Agrega cada billete de denominación diez mientras hace los conteos Ver figura 23)*

*I: ¿sesenta y uno? (señala el billete de 10 que agregó)*

*E: Setenta, ochenta, (termina por agregar los billetes de 10 y comienza con los billetes de 1 Ver figura 23) ochenta y uno, ochenta y dos, ochenta y tres, ochenta y cuatro, ochenta y cinco, ochenta y seis, ochenta y siete, ochenta y ocho, ochenta y nueve, noventa, noventa y uno, noventa y dos.*

*I: ¿Vas a pagar con todos esos billetes?*

*E: Sí*

*I: O hay otra forma de pagar [con] menos [billetes], ¿cuánto era?*

*E: Noventa y dos*

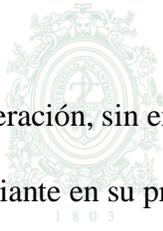
*I: ¿No hay otra forma de pagar con menos billetes?*

*E: Sí, quitando todos estos unos y sólo dejando dos (quita diez unos y deja dos, Ver figura 23) y luego poniendo otro diez (coloca un diez sobre la representación)*



**Figura 23:** Procedimiento conteo uno a uno. Tomado de “Actividad matemática realizada por un estudiante en la sexta tarea”, 3 de noviembre del 2016.

En este episodio se observa cómo el uso de los artefactos culturales alteran las maneras en que se manipulan los objetos y conceptos matemáticos, en este caso, las maneras de actuar del estudiante con el algoritmo de la suma no le permitieron reconocer las características del



sistema de numeración, sin embargo al actuar, mediado instrumentalmente por el uso de los billetes, el estudiante en su proceso de objetivación movilizó las características del SND, como es el caso del valor posicional al realizar procesos de descomposición en unidades del sistema y composición de los numerales y utiliza reglas que se asemejan al algoritmo convencional de manera natural, por medio de la agrupación de las unidades según su orden y el carácter decimal debido a las equivalencias entre unidades de orden que realizó, todo esto en contraste con el uso del algoritmo de la suma, ya que el algoritmo que el estudiante utilizó no le permitió identificar la irregularidad que empleaba al dar solución a la tarea.

### **Cambio de unidad**

Uno de los procedimientos que movilizaron los estudiantes en las prácticas matemáticas al manipular los billetes decimales para realizar representaciones de un número y composiciones de numerales, fueron los cambios de billete/s de una denominación por billete/s de otras denominaciones, de manera que se constituyó en su actividad mediada por el uso de este artefacto, permitió además sentidos y significados del carácter decimal del SND dado a las relaciones de equivalencias que realizaron los estudiantes al establecer el principio de agrupamiento y partición del sistema de numeración, ya que cada diez unidades se componen para formar una unidad de orden superior, como también, una unidad de cualquier orden se descompone en diez unidades del orden inferior inmediato.

En esencia, todos los procedimientos que se describen a continuación dan cuenta de relaciones de equivalencia que establecieron los estudiantes de manera natural al usar los billetes decimales y sus denominaciones, sin embargo, además de este tipo de procedimiento los estudiantes movilizaron otras acciones para explicar o argumentar los cambios que realizan en su proceso de objetivación como son por ejemplo, los conteos en unidad múltiple de diez, los

conteos uno a uno, agrupaciones y particiones en potencias de diez, entre otras que se mediatizan con la acción corporal para representar, señalar y hacer cálculos, en especial por el uso de los billetes decimales para constituir otros significados del sistema de numeración como el valor posicional.

En general este tipo de procedimientos emergen durante la actividad matemática del estudiante cuando se enfrenta ante un problema por resolver como es la escasez de billetes de alguna denominación, es decir si ya no cuenta con unidades para realizar sus representación y pagar el valor exacto de lo que desea comprar, usa el cambio de unidades como estrategia para resolver dicho problema, emerge de esta forma una idea matemática propia de nuestro SND que es la equivalencia de sus unidades de orden y el concepto de carácter decimal. Sin embargo en algunas ocasiones el estudiante desea hacer el cambio de unidades cuando observa que ya posee poca cantidad de billetes, al relacionar la cantidad de billetes con el tener o no mucho dinero sin prestar mayor atención a las denominaciones de los mismos.

Así por ejemplo, en el siguiente diálogo un estudiante se acerca hacia el investigador y entrega un billete de 100 para que le cambie por billetes de 1, al preguntarle por cuántos billetes de 1 le cambiaba el billete, el estudiante responde:

***Diálogo 13: Fragmento tomado del vídeo 05\_26\_Oct\_2016 (04)***

*Estudiante (E): Diez.*

*Investigador (I): ¿Diez unos? y ¿por qué diez unos?, ¿diez unos cuánto da?*

*E: Son diez.*

*I: Y ¿si vale la pena de cambiarle esto ((el billete de cien)) por diez unos?*

*E: No.*

*I: Entonces.*

*E: Entonces por diez, por diez cincos (Expresa diez con sus dedos).*

*I: Por ¿diez cincos? Y diez cincos ¿cuánto da? y ¿yo tengo billetes de cinco? empezando por eso.*



E: ..., Cien.

I: Cien ¿qué?

E: No.

I: No ¿qué?

E: Diez.

I: Diez ¿qué?

E: Diez.

I: Pero ¿qué?, le doy billetes de diez o

E: Diez cien.

I: ¿Le doy diez cien?

E: Me cambia mire, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, (expresa diez con sus dedos cada vez que enuncia la palabra número de cada número que cuenta) por diez, diez.

I: Y para qué quiere cambiarlos.

E: Porque se me está acabando la plata.

I: Y eso ¿es lo mismo? (Refiriéndose al billete de cien que equivale a diez de diez)

E: No

I: ¿Es lo mismo tener un cien y diez dieces?

E: Sí, porque conté de diez en diez y si uno cuenta de diez en diez los puede cambiar, por ejemplo, estoy en cien y quiero llegar al diez ((con dieces)). Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa y cien. (Expresa diez con sus dedos cada vez que enuncia la palabra número de cada número que cuenta)

I: O sea que ¿es lo mismo diez dieces que un cien?

E: Sí.

I: Y ¿por qué ahora me dijiste que no?

E: Porque no sabía.

I: ¡Ah!, estaba pensando que muchos billetes era mucha plata ¿no? y que un billete era poquito pero ya vemos que no o ¿sí?

E: (el estudiante mueve la cabeza de izquierda a derecha, de manera que indica que no es lo mismo)

En la anterior práctica matemática, el estudiante expresa varias veces la equivalencia de manera irregular (como es por ejemplo, diez billetes de unos, diez billetes de cinco y diez billetes de cien equivalen a un billete de cien), sin embargo, al interactuar con el estudiante, él toma conciencia de las irregularidades que presenta en el cambio de unidad y toma la decisión de realizar un conteo múltiple al tener como unidad de conteo el diez y comunica con sus diez dedos de las manos cada diez que cuenta, hasta manifestar que un cien equivale a diez dieces. Al preguntarle por qué quería cambiarlos el estudiante menciona –porque se me está acabando la plata- hace una relación entre la cantidad de billetes más no, en sus denominaciones, sin embargo

el estudiante se da cuenta que sin importar la cantidad de billetes, obtendrá el mismo valor debido a las relaciones de equivalencia que realiza entre las decenas y centenas.

En el siguiente diálogo, se presenta otra práctica matemática de otro estudiante, que si bien se parece al anterior, tiene diferencia en la actividad corporal que realiza con sus dedos, este estudiante se acerca al investigador y menciona lo siguiente:

**Diálogo 14:** Fragmento tomado del vídeo 05\_26\_Oct\_2016 (05)

*Estudiante (E): me cambia este billete por de cinco*

*Investigador (I): Por ¿cuánto?*

*E: Por de diez*

*I: ¿Cuál billete?*

*E: (toma un billete de cien y lo entrega) por de diez.*

*I: ¿Cuántos?*

*E: (Realiza un proceso mental mientras utiliza los dedos de una mano para llevar las cuentas y realiza un grupo de cinco dedos y otro de cuatro dedos) nueve.*

*I: ¿Nueve? Nueve dieces ¿cuánto da?*

*E: Cien*

*I: ¿Nueve?*

*E: Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, ochenta, noventa y cien (realiza un conteo con el apoyo de sus dedos)*

*I: ¡Ay! Vamos hacerlo una vez más que me confundí, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa ((el estudiante también cuenta mediado por el uso de los dedos hasta que representa el noventa con nueve dedos)). Ah, entonces ¿qué falta para llegar a los cien?*

*E: Uno*

*I: Uno ¿qué?*

*E: Diez*

*I: Un diez, entonces ¿cuántos dieces?*

*E: Diez*

*I: Diez dieces y ¿es lo mismo que tener uno de cien que diez de diez?*

*E: Sí*

*I: ¿Si es lo mismo? ¿Por qué?*

*E: porque me va cambiar eso (El billete de cien) por de dieces.*

El estudiante en su procedimiento realiza un cambio de unidad entre las centenas y decenas movilizó el carácter decimal del SND debido a las equivalencias que realiza entre un cien y diez dieces, al preguntar cuál es la equivalencia, es decir, cuántos dieces componen un



cien, el estudiante en su actividad matemática utiliza el conteo con el apoyo de sus dedos de manera silenciosa y responde nueve e intenta validar su respuesta al enunciar los conteos en unidad múltiple de diez hasta llegar al noventa, sin embargo en este proceso de conteo omite la familia del setenta. Cuando el investigador realiza el conteo en unidad múltiple con el estudiante observa que nueve dieces conforman el noventa y manifiesta que son diez dieces que debe cambiar por un cien.

La diferencia que se identifica entre los procedimientos descritos en el diálogo 13 y diálogo 14 es que en el primero, el estudiante emplea la expresión de sus diez dedos como un elemento discursivo que utiliza para comunicar cada cantidad que cuenta y, en el segundo episodio, el estudiante utiliza la acción corporal para realizar procesos de conteo en unidad múltiple y utiliza cada dedo de sus manos para llevar las cuentas, de esta manera cada dedo representa un diez o una decena, sin embargo es de aclarar que estos dos procedimientos se fundamentan en las relaciones de equivalencia que realizaron entre las potencias de y con los billetes decimales.

Los contextos en los cuales los estudiantes realizaron estos procedimientos fueron en un proceso de dirigirse hacia el investigador para solicitar el respectivo cambio de unidad y movilizar su práctica matemática por medio de su discursividad y las acciones mediadas instrumentalmente, sin embargo, también se identificó procedimientos en los cuales el estudiante en el momento de desarrollar la tarea se enfrenta con un problema por resolver, en específico con la escasez de billetes, como es por ejemplo en el siguiente diálogo entre un investigador y el estudiante, en el cual el estudiante representa con los billetes decimales la cantidad correspondiente a diez bolas que cuestan 50, un dije 24 y una cuerda 18.

 UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA

**Diálogo 15:** Fragmento tomado del vídeo 05\_26\_Oct\_2016 (03)

*Estudiante (E): Aquí son cinco de cada uno (señala las bolas de cinco) cinco, diez, quince, veinte, veinticinco, treinta, treinta y cinco, cuarenta, cuarenta y cinco, cincuenta. Entonces acá hay cincuenta..., tengo el dije, las bolitas ((refiriéndose a las representaciones que realizó del valor de cada uno de los dos materiales)) y la cuerda, tengo diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete. (Toma cada billete que cuenta)*

*Investigador (I): ¿Diecisiete?, ¿qué le falta?*

*E: Voy a cambiar este (toma un billete de diez)*

*I: ¿Se lo cambio?*

*E: Sí, por diez unos.*

Nótese que el estudiante para representar el valor de la cuerda, descompuso su costo en las unidades según su orden para conformar la respectiva cantidad y en el proceso de composición realiza los conteos de uno a uno al comenzar por los 10 y después con los 1 hasta que llega a representar el diecisiete y se queda sin billetes de 1 para conformar la cantidad, en esta medida el estudiante en su proceso de objetivación procede a realizar un cambio de un billete de 10 por diez billetes de 1 de una manera natural para poder continuar al realizar las representaciones que requiere con los billetes decimales. De manera que, la manipulación que realiza el estudiante con este artefacto da cuenta la movilización del carácter decimal del SND.

Otra práctica matemática que se observó en relación con procesos de cambios de unidad, se presenta en el siguiente diálogo, en el cual consta de un estudiante que consulta el valor a pagar de una lista correspondiente a una dos flores que cuestan 25 cada una, dos bolas que cuestan 5 cada una, una cuerda que cuesta 18 y una arandela que cuesta 34.

**Diálogo 16:** Fragmento tomado del vídeo 06\_03\_Nov\_2016 (02)

*Investigado (I): ¿Cuántas flores vas a comprar?*

*Estudiante (E): Dos*

*I: Entonces ¿cuánto valen dos flores? Una vale veinticinco*

*E: cincuenta, uno dos tres, cuatro, cinco,..., cincuenta (pone cada billete de diez sobre la mesa para formar una representación),..., con las dos bolitas pequeñas serían sesenta (agrega un billete de diez a la representación)..., con la cuerda sería setenta y ocho (agrega un billete de*



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

*diez a la representación)*

*I: ¿Con la cuerda?*

*E: Sí*

*I: y ¿dónde está los ocho unos?*

*E: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. (Toma los billetes de uno y los pone sobre la representación)*

*I: ¿Qué sigue?*

*E: Esto (señala el dibujo de una arandela)*

*I: La arandela, ¿cuánto es que cuesta?*

*E: Treinta y cuatro..., acá hay 7 ¿cierto? (señala un diez de la representación del 78)*

*I: Siete dieces, sí.*

*E: ocho, nueve, diez, once. (Pone cada diez sobre la representación del 78 a medida que menciona cada billete que cuenta)*

*I: Tenía siete dieces y ¿cuántos agregó?*

*E: Cuatro (expresa el cuatro con sus dedos)*

*I: ¿Por qué cuatro?*

*E: ¡Ah! tres.*

*I: Y ¿por qué tres?*

*E: porque este cosito ((Se refiere a la arandela)) vale treinta y cuatro. (Agrega los tres billetes de 10)..., diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien (toma cada billete de diez mientras realiza el conteo)*

*I: ¿Cien?*

*E: Sí y por qué no cambio estos diez por este cien (toma el billete de cien y lo muestra)*

Obsérvese que el estudiante al agrupar los valores de cada material que pensaba comprar, empleó varios procedimientos como son los conteos en unidades múltiples, procesos de completación y, descomposiciones y composiciones de un numeral según sus unidades de orden, todo esto se mediatizó por el uso de los billetes decimales con lo cual el estudiante en su proceso de objetivación movilizó conceptos como el valor posicional y el carácter decimal al dar cuenta la complejidad de las prácticas matemáticas que moviliza durante el desarrollo de la tarea. Sobre decir, que el uso instrumental que el estudiante realiza con los billetes para desarrollar equivalencias entre números y las agrupaciones de diferentes maneras (conteo, completación, conteo múltiple, etc.) da cuenta las posibilidades que tiene para desarrollar una práctica matemática en la cual moviliza procesos aditivos al utilizar características del SND y viceversa.



## Conteo uno a uno

# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

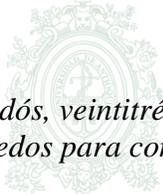
Otra de las estrategias o técnicas que se identificaron en las prácticas matemáticas de los estudiantes como medios que materializan sus pensamientos son el conteo uno a uno y se comprende como la acción de “totalizar dos cantidades dadas, cuenta uno a uno los elementos de ambas colecciones, determinando que la última palabra número pronunciada es el resultado de la totalización pedida” (Obando y Vásquez, 2008, párr. 14). Esta estrategia la emplearon los estudiantes como apoyo para la continuidad de otros procedimientos (conteo múltiple, completar, etc.) con el fin de agrupar una cantidad, por ejemplo, se presentaron casos en que los estudiantes al momento de realizar procedimientos de completación emplearon el conteo uno a uno a partir de otra cantidad dada. Esta estrategia de conteo uno a uno se mediatizó por unos instrumentos que el estudiante utilizaba en su práctica matemática como la acción corporal, artefactos y la representación verbal.

Todo lo anterior, se puede observar en el siguiente diálogo, cuando un estudiante para poder comprar una cuerda que tenía como valor 28, inicia con la entrega de una cantidad de billetes de 1, el investigador al preguntar por cuál era la cantidad, el estudiante emplea el conteo uno a uno de los billetes y obtiene como resultado 18, otro estudiante observa que además entrega un billete de 10, por lo tanto este realiza un conteo uno a uno para completar la segunda cantidad a partir de la primera, es decir, a partir del 18 inicia el conteo uno a uno hasta llegar a 28, este procedimiento es mediado por instrumentos como la representación verbal y la acción corporal en este caso los dedos con el fin de saber cuándo termina el conteo.

### ***Diálogo 17: Fragmento tomado del vídeo 03\_05\_Oct\_2016 (07)***

*Estudiante 1 (E1): Dieciocho (cuenta uno a uno los billetes de denominación 1).*

*Estudiante 2 (E2): (observa un billete de 10 e inicia el conteo uno a uno) Diecinueve, veinte,*

 UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
*veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho (se apoya con los dedos para contar).*

Como se observó en el presente diálogo, el conteo uno a uno se empleó en dos momentos, el primero para iniciar el proceso de cálculo y segundo para acompañar el procedimiento de completación. Sin embargo, se presentó otra práctica matemática en este mismo contexto de compra y venta de materiales, en el cual un estudiante debía comprar un material que cuesta 25 con los billetes decimales y en su momento de compra, primero agrupa las unidades de segundo orden y después realiza una completación por medio del conteo uno a uno hasta llegar a representar la cantidad con los billetes decimales.

***Diálogo 18: Fragmento tomado del vídeo 03\_05\_Oct\_2016 (01)***

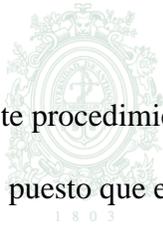
*Investigador (I): ¿Qué vale la bicicleta?, ¿qué cuesta?*

*Estudiante (E): Veinticinco.*

*Investigador (I): Entonces me debes pagar...*

*Estudiante (E): Veinte (entrega dos billetes de 10), veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco (agrega cada billete de 1 cada que enuncia la palabra número).*

En otra práctica que se describió con anterioridad (Ver, **Diálogo 7**) se observa la estrategia de conteo uno a uno por parte de un estudiante para hallar el valor total de la pulsera, ya que debían registrarlo en un hoja para así poder comprar todos los materiales de la pulsera. El estudiante utiliza como instrumento los billetes decimales para representar las cantidades de cada uno de los materiales, después, el investigador le pregunta ¿cuál es el valor de la pulsera?, allí el estudiante comienza a realizar los cálculos con los billetes que utilizó para representar el valor de los materiales a comprar e inicia por el valor que compone la cuerda, continúa con los billetes de denominación 1 de las otras representaciones y después comienza a tomar cada billete de 10 y lo completa por medio del conteo uno en uno con la ayuda de sus dedos hasta agregar diez unidades, este procedimiento lo realizó con varios billetes de 10 hasta llegar al numeral sesenta y



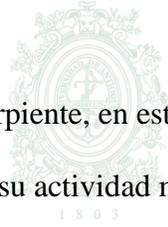
dos. Además, este procedimiento permitió movilizar conceptos como el carácter aditivo de la palabra número, puesto que el estudiante identifica la regularidad de la enunciación de la palabra número al manifestar el salto de las familias numéricas.

De este modo, el presente episodio nos permite comprender la complejidad de las prácticas matemáticas en términos de la materialización de los pensamientos en las acciones de los estudiantes, los cuales se mediatizan de manera instrumental, se comunican discursivamente y se movilizan de manera conjunta para constituir en su proceso de objetivación estos saberes que se constituyeron de manera histórica y cultural.

### **Conteos en unidad múltiple**

Unos de los procedimientos que con mayor frecuencia emplearon los estudiantes en sus prácticas matemáticas fue los conteos en unidades múltiples, estos procedimientos son diferentes a los conteos de uno en uno puesto que se realizan en unidades múltiples de dos, cinco, diez, etc. además “estos conteos permiten desarrollar estrategias más eficientes para resolver situaciones aditivas (sumas o restas) que involucren números grandes” (Obando y Vásquez, 2008, Párr. 16). Dicha técnica que emplearon se mediatizó por el uso de los billetes decimales y otros instrumentos que movilizaron la actividad matemática del estudiante, además, este tipo de prácticas matemáticas permitieron acercamientos a conceptos del SND.

En varios episodios se identificaron los conteos en unidades múltiples de 10 que realizaron los estudiantes con los billetes decimales, esta estrategia de contar de 10 en 10 fue el más común, en sus razones, por las características de los billetes y por la naturaleza de las tareas, en especial cuando las tareas se orientaron hacia la representación de cantidades por ejemplo en



la tarea de la serpiente, en este proceso los estudiantes emplearon diferentes formas de enunciación en su actividad matemática como son la explicación de procedimientos o la argumentación mediado por las acciones corporales, en especial, el señalamiento con los dedos, además se observaron los procesos de objetivación de los estudiantes en cuanto a la movilización del carácter aditivo de la palabra número y el carácter decimal.

Lo anterior se puede observar en el siguiente diálogo, el cual un estudiante al realizar el cálculo de la serpiente comunica que son 41, por lo tanto el investigador se acerca y le pregunta ¿por qué esa cantidad?, el estudiante se apoya del discurso verbal y el señalamiento con los dedos para explicar su respuesta (ver figura 24), en su discurso se observa que el estudiante emplea conceptos matemáticos como la adición en la palabra-número cuando enuncia “diez, veinte, treinta, cuarenta y uno” y el carácter decimal cuando el estudiante agrupa las denominaciones de los billetes según su orden.

***Diálogo 19: Fragmento tomado del vídeo 01\_22\_Sep\_2016 (01)***

*Estudiante (E): Cuarenta y uno*

*Investigador (I): ¿Por qué dice que cuarenta y uno?*

*(E): Porque diez, veinte, treinta, cuarenta y uno (señala cada billete mientras realiza el conteo ver figura 24).*



**Figura 24:** Señalamientos con los dedos explicación del procedimiento conteo múltiple. Tomada de “Actividad matemática realizada por un estudiante en la primera tarea”, 22 de septiembre del 2016.



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Otra práctica matemática en la cual los estudiantes realizaron conteos en unidad múltiple de diez, es en contextos de cambios de un billete de 100 por diez billetes de 10. El conteo múltiple en esta actividad matemática se utilizó como una estrategia para justificar las relaciones de equivalencia que empleaban, ya que en el momento en que los estudiantes solicitaban un cambio debían comunicar por cuántos billetes y de qué denominación, de modo que realizaban procesos de argumentación. De esta manera, movilizan conceptos del SND como el carácter decimal por las equivalencias entre números, además estos procedimientos se mediatizaron por la acción corporal, como por ejemplo, por el uso de los dedos para realizar procesos de conteos, cada dedo cumplió la función de los billetes decimales, en específico los de denominación 10, es decir, a cada dedo se le asignaba el valor de 10, esto lo podemos evidenciar en el siguiente diálogo, cuando un estudiante solicita el cambio de un billete de 100 por 10, el investigador le pregunta al estudiante ¿cuántos dieces? para poder cambiar el billete de denominación 100, por lo tanto, él recurre al conteo en unidades múltiples de 10 apoyándose de los dedos para saber cuál es la cantidad de billetes de 10 que necesita para que sea equivalente al billete de 100.

## ***Diálogo 20: Fragmento tomado del vídeo 04\_06\_Oct\_2016 (13)***

*Investigador (I): ¿Cuántos dieces?*

*Estudiante (E): ¡Ay! no sé.*

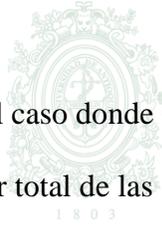
*I: a ver haga la cuenta, uno de 10 (levanta uno de sus dedos)*

*E: diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien (utiliza los dedos e indica que en cada dedo hay 10 unidades)*

*I: ¿Entonces cuántos le entregó?*

*E: Diez (muestra los diez dedos de las dos manos)*

En otro contexto, donde se puede identificar procesos de conteo en unidades múltiples es el de compra y venta de materiales para la elaboración de una pulsera, allí se les propone a los estudiantes que para poder adquirir dichos materiales debían llevar el valor total de todos estos,



pero el principal caso donde se emplea la estrategia de conteo múltiple es cuando los estudiantes hallaban el valor total de las 10 bolas que formaban parte de la pulsera, pero estos conteos no eran de 10 en 10 sino, de 5 en 5, esto se debe a que el valor de cada piedra fue de 5 unidades, este procedimiento se mediatizó por el uso de artefactos y la acción corporal, como instrumentos que movilizaron los estudiantes en su proceso de objetivación del objeto matemático, se materializó además, en su discurso verbal para explicar el procedimiento que realizaron. Esto se puede observar en el siguiente fragmento de diálogo, en el cual un estudiante realiza conteos de 5 en 5 por medio del discurso verbal y el lápiz como medios que permitieron comunicar el procedimiento realizado.

**Diálogo 21:** Fragmento tomado del vídeo 05\_26\_Oct\_2016 (03)

*Estudiante (E): Aquí son cinco de cada uno (señala con el dedo todas las bolas dibujadas en el papel)*

*Investigador (I): Ajá*

*E: Entonces empecé a contar de a puntico, cinco, diez, quince, veinte, veinticinco, treinta, cuarenta ((se equivoca en el conteo y corrige)), treinta, treinta y cinco, cuarenta, cuarenta y cinco (señala con el lápiz cada bola dibujada ver figura 25)*



**Figura 25:** Instrumentos los dedos y lápiz para explicación del procedimiento conteo de 5 en 5. Tomada de “Actividad matemática realizada por un estudiante en la sexta tarea”, 3 de noviembre del 2016.

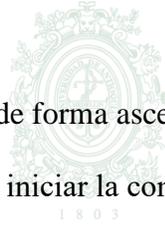
## Proporcionalidad



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

En este proceso de investigación emergen de manera eventual procedimientos de relaciones proporcionales en especial para realizar composiciones para hallar el total a pagar, además, esta actividad se relaciona con otras acciones como son la completación en estrategias de cálculo mental y que puede verse en la figura 26, se identificaron dos episodios en los que dicho procedimiento emerge como un técnica que emplearon los estudiantes para desarrollar tareas en las cuales debe agrupar dos o más cantidades, materializándose a partir de los discursos durante la comunicación entre los estudiantes y el investigador con el objetivo de argumentar sus procedimientos, como también en la acción corporal y mediatizado por los billetes decimales y registros escritos como la lista de compras.

En general este procedimiento puede entenderse en palabras de Obando, Arboleda y Vasco (2014) como “la conservación proporcional de la relación entre las partes y el todo permite definir una proporcionalidad directa entre la serie de cantidades que puede tomar el todo en su variación, y la serie de variaciones que puede tomar cualquiera de las partes a medida que el todo va tomando sus valores respectivos” (p. 982). De manera, intencional durante la investigación se propuso el precio de manera individual de ciertos productos que debía comprar en cantidad de tal manera que el estudiante al querer pagar por la cantidad de bolas que quería usar (generalmente más de la unidad) realizará procedimientos como el conteo, conteo múltiple y en este caso particular en el cual la bola constaba 5 el estudiante de manera natural reconocía que un billete de 10 se compone por 5 y 5, y por lo tanto un billete de 10 alcanza para 2 bolas, y de esta manera reconocían una primera relación proporcional que les permitía hallar el precio de todas la bolas, o por medio del conteo múltiple que según Obando y Vásquez (2008) “en estos casos, cuando el conteo se puede hacer ya no solo de uno en uno, sino de dos en dos, tres en tres,



etc., y además, de forma ascendente y descendente, entonces, se dispone de una herramienta importante para iniciar la comprensión de la multiplicación y la división” (párr. 63). En este caso aspectos multiplicativos relacionados con las relaciones proporcionales.

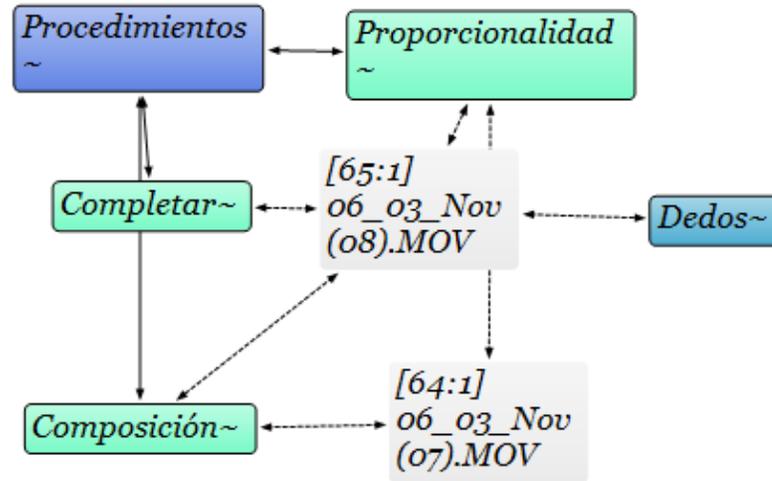


Figura 26: Red semántica elaborada de la categoría procedimientos, proporcionalidad. Tomada de “Software Atlas.ti”. Febrero del 2017.

Uno de los dos episodios en los cuales se reconoce de forma explícita este procedimiento se presenta a continuación, un estudiante para hallar la cuenta del valor a pagar por los materiales del llavero, primero realiza una composición entre los valores 34 y 18 (correspondientes al valor de la arandela y el hilo), de manera, que primero agrupa las unidades de segundo orden y después cuenta las unidades de primer orden con el apoyo de sus dedos y da como resultado 52, este valor lo registra en la hoja y después continúa con la agrupación del valor que conforma dos flores que cuesta cada una 25, el estudiante manifiesta que da como resultado 50, además, al preguntarle si podía agrupar el 52 del hilo y la arandela y, el 50 de las flores el estudiante menciona que da 102 porque “cincuenta más cincuenta da cien y le pongo otro dos (Expresa dos con sus dedos)”.



**Diálogo 22:** Fragmento tomado del vídeo 06\_03\_Nov\_2016 (08)

*Estudiante (E): con diez son dos, con veinte serían cuatro..., faltan dos.*

*Investigador (I): Van cuatro bolas cierto y son diez.*

*E: Faltan dos, van ocho.*

*I: Ocho ¿qué?, ¿ocho bolas?*

*E: Sí.*

*I: Me dijiste cuatro bolas valen veinte ¿cuánto valen ocho bolas? Si cuatro valen veinte, cuánto valen ocho.*

*E: Ocho da cuarenta.*

*I: A bueno, entonces ocho me valen cuarenta, entonces diez ¿cuánto me valen?*

*E: ¿Diez?*

*I: Diez bolas ¿cuánto me valen? Si ocho me valen cuarenta, diez ¿cuánto me valdrán?*

*E: Cincuenta.*

Se observa que el estudiante utiliza relaciones proporcionales como técnica de desarrollo de la tarea al manifestar una relación entre número de bolas y valor a pagar, en el cual dos cuestan diez, cuatro cuestan 20, ocho cuestan 40 y diez cuestan 50. Siendo esta una estrategia que posibilita resolver ciertas situaciones multiplicativas.

Como se menciona con anterioridad, el estudiante durante su práctica matemática se encuentra ante un problema por resolver, el cual consistió en hallar el precio total de su llavero, allí emergió la proporcionalidad como un procedimiento en el cual relaciona la cantidad de bolas y el precio de cada una, en este espacio de indagación emplea conceptos matemáticos como los aspectos multiplicativos y se movilizan en conjunto con otros procedimientos como son la composición, el conteo múltiple y el cálculo mental desarrollado a partir la objetivación de las regularidades del SND y su estructura, manifestada en los billetes decimales, los cuales mediatizan sus acciones y procesos de pensamiento.

### **Cálculo mental materializado en el discurso**

El cálculo mental es un procedimiento que los estudiantes movilizaron en sus prácticas matemáticas, este se entiende como aquellos procesos mentales que el estudiante moviliza en el

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
1803  
Facultad de Educación

proceso de constitución de sentidos y significados sobre los conceptos del sistema de numeración y el desarrollo de habilidades de pensamiento aditivo, este tipo de estrategias se materializan en la acción y reflexión discursiva que el estudiante moviliza a través del lenguaje como también en expresiones corporales.

En el siguiente diálogo se muestra la explicación de las acciones por parte un estudiante, las cuales orientaron su actividad matemática en el momento de representar el numeral ochenta y dos con el uso de los billetes decimales.

***Diálogo 23: Fragmento tomado del vídeo 02\_04\_Oct\_2016 (11)***

*Investigador (I): Explíquenme, ¿qué número les tocó?*

*Estudiante (E): Ochenta y dos*

*I: ¿Ochenta y dos? y ¿qué hicieron?*

*E: Contar y sumar en el cuaderno*

*I: ¿En el cuaderno? ¡Ay!, muéstreme, ¿cómo lo hizo?*

*E: Vea, estábamos sumando acá (señala los registros que realizó en el cuaderno)..., diez más diez son veinte y otros tres diez...*

*I: Y ¿por qué paraste de escribir?*

*E: Porque me puse a sumar*

*I: Y ¿cómo los sumó?, ¿con los billeticos o con el cuaderno?*

*E: En la mente (se toca la cabeza)*

Nótese que las representaciones que el estudiante realiza sobre el cuaderno que sostiene es un artefacto que mediatiza y materializa su forma de pensar y de actuar, pues en la explicación del procedimiento que el estudiante enuncia y en los registros simbólicos que elaboró se puede observar los primeros procesos de composición que realizó, sin embargo, en su discurso menciona que interrumpió la estrategia que realizaba y utilizó el cálculo mental para continuar con la realización de composiciones. De esta manera, se puede decir que el estudiante en su proceso de objetivación percibió una regularidad (o un patrón) en las agrupaciones que realizaba con las unidades de segundo orden de manera escrita y utilizó el cálculo mental para agilizar su actividad matemática.



## Conclusiones

El objetivo que se propuso en esta investigación fue caracterizar las prácticas matemáticas de los estudiantes de primer grado de la IEFJAR, cuando utilizan un material manipulativo que se denomina billetes decimales que por su estructura permiten el reconocimiento de características del SND, esto se desarrolló en tareas de tipo aditivo en particular en contextos que involucraron asuntos de compra y venta de material para la elaboración de manillas y llaveros, entre otras tareas que emergieron con la mediación de los billetes y en las cuales los sujetos desarrollaron diversos procedimientos y estrategias propias del pensamiento aditivo y la toma de conciencia frente al SND y las características que lo conforman.

Para finalizar, consideramos pertinente analizar las prácticas matemáticas ya que nos posibilita la comprensión de su complejidad, como también, los procesos que se involucran durante la actividad matemática del estudiante, los cuales se enmarcan en principios institucionales y se consensuan de manera social, cultural e históricas, además, el sujeto se inscribe en el conjunto de prácticas compartidas, de modo que, toma conciencia de los objetos culturales en su proceso de objetivación y reconstituye su subjetividad.

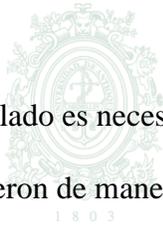
Caracterizar las prácticas matemáticas implica reconocer los elementos que emergen durante la actividad matemática como la discursividad ya que permite materializar los pensamientos de los estudiantes al desarrollar las tareas, en interacción constante con los investigadores y con los demás compañeros en el proceso de actividad conjunta, los problemas por resolver que se presentan durante el desarrollo de las tareas y que orientan la acción del sujeto y en los cuales movilizaron conceptos y objetos matemáticos como las características del SND su carácter decimal, posicional, etc. y por último los instrumentos en particular los billetes



decimales que mediatizan la actividad matemática y posibilitaron diversas estrategias para actuar con dichos instrumentos y que permiten el desarrollo de habilidades de pensamiento aditivo y de procesos de cálculo mental a través de procedimientos como la composición y descomposición según las unidades del sistema, cambios de unidad, completación, conteos múltiples, etc. Los elementos descritos no se movilizan durante las prácticas matemáticas de los sujetos de manera aislada, sino, que al definirse un episodio para el estudio, se involucran y relacionan los diversos elementos que dan cuenta de la actividad matemática del estudiante y la constitución de su conocimiento durante las tareas.

El principal objeto matemático que se estudió durante la investigación fue el SND al cual se le reconoce un carácter social y cultural en su construcción histórica, como un saber que resulta de una convención cultural. Entenderlo así implica que como profesores tengamos una mirada diferente sobre este objeto y las ideas matemáticas que se relacionan, trascender prácticas que impiden reconocer la estructura y todas las características de este objeto que se presenta en la escuela de una manera abstracta, se reduce este saber a enunciación de unidades, decenas y centenas, etc. o a la numeración escrita o hablada sin un proceso de posicionamiento crítico o toma de conciencia por parte de los estudiantes frente este objeto matemático y su relación con otros saberes de las matemáticas y el desarrollo de otros procesos de pensamiento matemático

Por lo anterior, es necesario reflexionar sobre los instrumentos que se llevan a la escuela y sus posibilidades para mediatizar la actividad matemática del sujeto. En esta investigación se propone los billetes decimales y sus posibilidades para manipular, simular, emplear, etc. las características del SND, en otras palabras, posicionarse de manera consciente frente a este objeto matemático, sus reglas y relaciones que lo constituyen y a su vez posibilitan el desarrollo de habilidades de pensamiento aditivo.

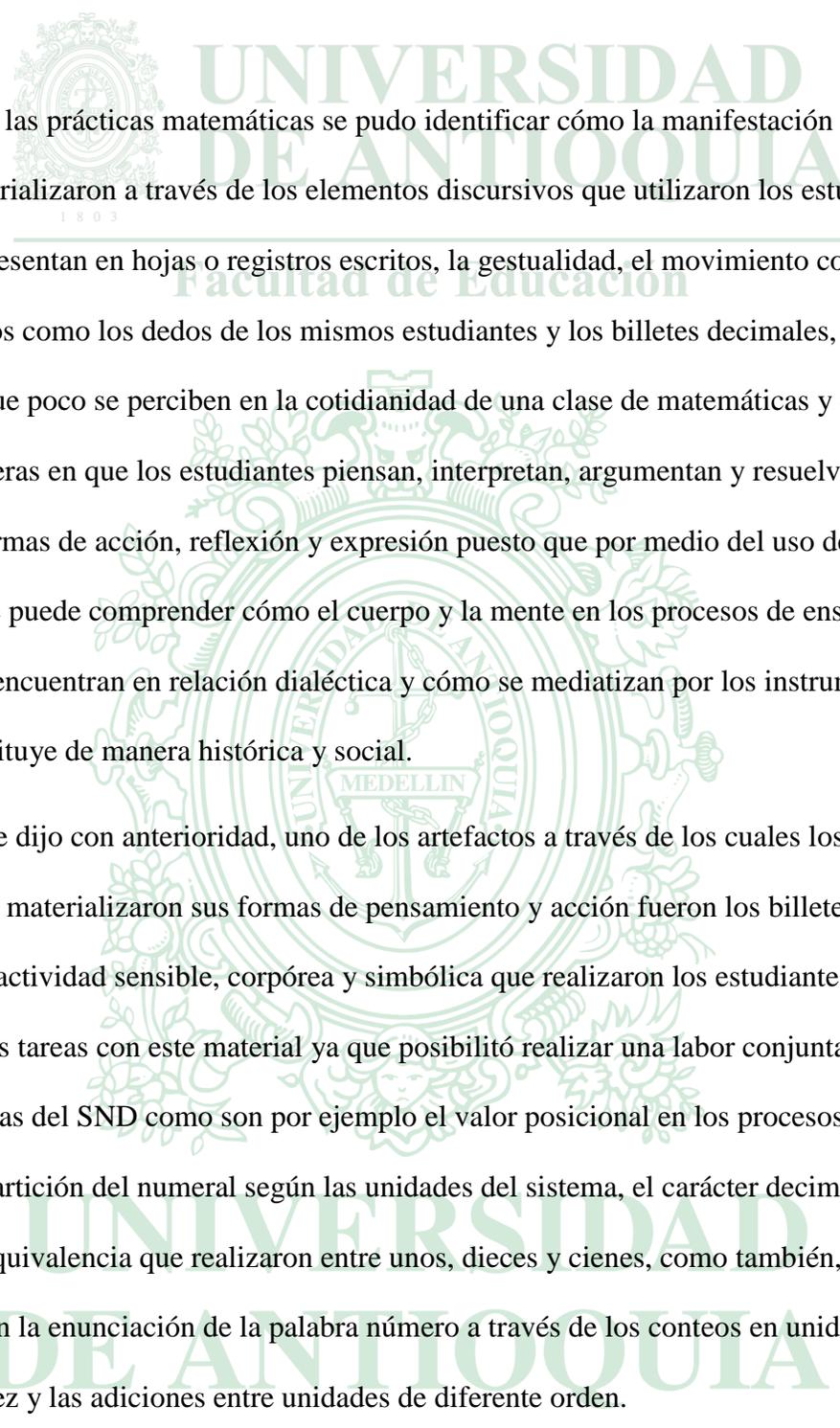


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Facultad de Educación

Por otro lado es necesario reconocer que los contextos en los cuales se desarrollaron dichas tareas fueron de manera principal en situaciones de compra y venta, como una actividad cotidiana que los sujetos realizamos de manera común y en la cual emergen interacciones sociales que posibilitan constituir subjetividades durante la actividad matemática, acciones como esperar el turno, comunicar sus ideas y defender sus posicionamientos, argumentar sus estrategias y explicar o ayudar a los demás sujetos que se involucraron en la actividad matemática procedimientos o técnicas para resolver diversos problemas, estas prácticas emergen en la naturalidad de una situación en la que su objetivo era conseguir materiales para elaborar pulseras y llaveros para uso personal o regalar a sus familiares o amigos lo que asignaba cierto interés y una carga emocional particular al desarrollo de la tarea del estudiante. Por lo tanto, durante el desarrollo de las tareas los estudiantes constituyen sus aprendizajes en relación con las interacciones que establecen con sus compañeros e investigadores y con la cultura de la cual hereda los objetos y conceptos matemáticos con los que actúa y se posiciona frente al mundo.

En este sentido, el salón de clases se constituyó como un espacio en el cual se movilizaron formas culturales e históricas de pensamiento y de ser, además, la actividad conjunta en los procesos de enseñanza y aprendizaje (tanto de estudiantes como investigadores) nos permitieron comprender las formas de producción de saberes y de subjetividades. Estos procesos de formación y transformación continua por parte de los estudiantes se mediatizaron a través de los recursos o medios semióticos de objetivación que emplearon durante las prácticas matemáticas los cuales fueron partes constituyentes y consustanciales en los procesos de toma de conciencia y discernimiento crítico frente a las características del SND y el desarrollo de habilidades de pensamiento aditivo.

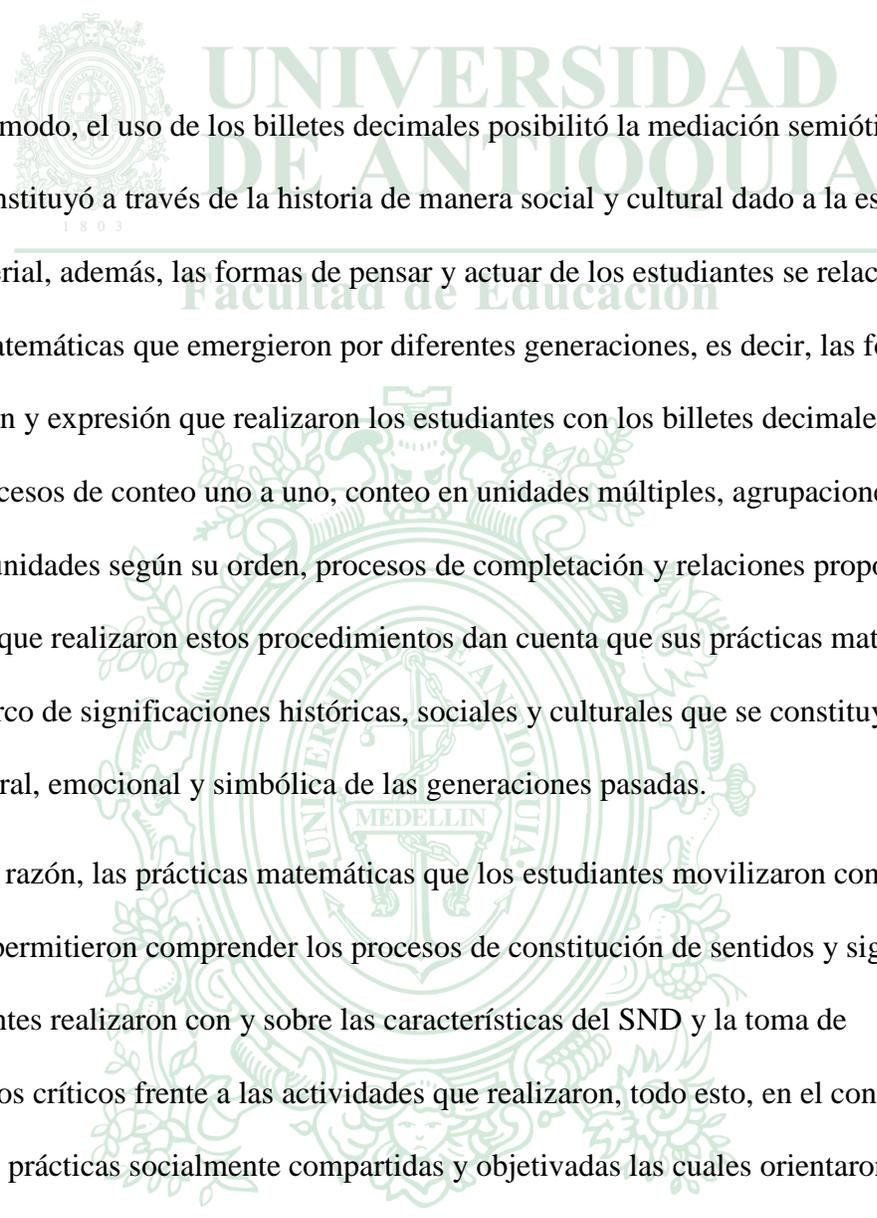
De esta manera, se observa que a través de la movilización de los medios semióticos de



objetivación en las prácticas matemáticas se pudo identificar cómo la manifestación de estos saberes se materializaron a través de los elementos discursivos que utilizaron los estudiantes, los signos que representan en hojas o registros escritos, la gestualidad, el movimiento corpóreo y el uso de artefactos como los dedos de los mismos estudiantes y los billetes decimales, instrumentos que poco se perciben en la cotidianidad de una clase de matemáticas y que dan cuenta las maneras en que los estudiantes piensan, interpretan, argumentan y resuelven las tareas, es decir, sus formas de acción, reflexión y expresión puesto que por medio del uso de estos instrumentos se puede comprender cómo el cuerpo y la mente en los procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentran en relación dialéctica y cómo se mediatizan por los instrumentos que la cultura constituye de manera histórica y social.

Como se dijo con anterioridad, uno de los artefactos a través de los cuales los estudiantes concretizaron y materializaron sus formas de pensamiento y acción fueron los billetes decimales, esto se debe la actividad sensible, corpórea y simbólica que realizaron los estudiantes durante el desarrollo de las tareas con este material ya que posibilitó realizar una labor conjunta con y sobre las características del SND como son por ejemplo el valor posicional en los procesos de agrupación y partición del numeral según las unidades del sistema, el carácter decimal en las relaciones de equivalencia que realizaron entre unos, dieces y cienes, como también, las regularidades en la enunciación de la palabra número a través de los conteos en unidades múltiples de diez y las adiciones entre unidades de diferente orden.

Además, el uso de los billetes decimales alteraron las maneras de actuar y pensar de los estudiantes en el transcurso de sus prácticas matemáticas ya que por la naturaleza de las tareas y por la estructura del material permitió la movilización por parte de los estudiantes de formas de proceder con los objetos de conocimiento.



De este modo, el uso de los billetes decimales posibilitó la mediación semiótica con el SND que se constituyó a través de la historia de manera social y cultural dado a la estructura que posee este material, además, las formas de pensar y actuar de los estudiantes se relacionaron con las prácticas matemáticas que emergieron por diferentes generaciones, es decir, las formas de acción, reflexión y expresión que realizaron los estudiantes con los billetes decimales se asociaron a procesos de conteo uno a uno, conteo en unidades múltiples, agrupaciones y particiones de unidades según su orden, procesos de completación y relaciones proporcionales y, las maneras en que realizaron estos procedimientos dan cuenta que sus prácticas matemáticas se sitúan en el marco de significaciones históricas, sociales y culturales que se constituyeron por la actividad corporal, emocional y simbólica de las generaciones pasadas.

Por esta razón, las prácticas matemáticas que los estudiantes movilizaron con los billetes decimales nos permitieron comprender los procesos de constitución de sentidos y significados que los estudiantes realizaron con y sobre las características del SND y la toma de posicionamientos críticos frente a las actividades que realizaron, todo esto, en el contexto que se delimita por las prácticas socialmente compartidas y objetivadas las cuales orientaron la actividad matemática de los sujetos y la constitución de sus subjetividades.

La estructura de las tareas se basó en contextos de compra y venta de materiales con el uso de los billetes decimales, los cuales posibilitaron identificar cómo las estrategias o técnicas que emplearon los estudiantes movilizaron habilidades para realizar y reconocer relaciones proporcionales con el fin de apoyar procedimientos de composición, en este sentido, tuvieron un acercamiento a procesos multiplicativos en su relación proporcional, al establecer una relación entre dos medidas entre la cantidad de bolas y el precio de cada una, para agilizar los procesos que se utilizaron con anterioridad como los conteos uno a uno o conteos múltiples. Otras



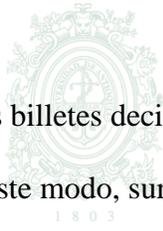
UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1803  
Facultad de Educación

habilidades que desarrollaron los estudiantes fue el cálculo mental, ya que en sus proceso de objetivación encontraban una regularidad en los conteos múltiples o las composiciones que realizaban, por lo cual interrumpe su estrategia anterior para utilizar el cálculo mental como un recurso del intelecto para agilizar sus procesos de cálculo, procedimiento que se observó al momento que los estudiantes lo materializaban por medio del discurso.

En cuanto al campo de la Educación Matemática, nuestro trabajo de investigación aportó una nueva metodología para la enseñanza y el aprendizaje del SND, por medio de una serie de tareas que posibilitaron a los estudiantes relacionarse con los objetos de conocimiento al utilizar los billetes decimales, ya que las acciones con este material permite la dotación de sentidos y significados de las características del SND y a su vez desarrollar habilidades para el pensamiento aditivo. Además, se realiza una invitación a tener en cuenta los diferentes medios para la acción que movilizan los sujetos en su proceso de objetivación del saber y subjetivación, los cuales se constituyen a través de la interacción con los otros en relación con el medio en que se encuentran y los objetos de conocimiento que se movilizan.

Al observar las diferentes prácticas que movilizaron los estudiantes nos permitió reflexionar en torno a nuestro quehacer como profesores, con el fin de reestructurar nuestras prácticas en las cuales los estudiantes doten de sentidos y significados los objetos de conocimiento, por lo tanto, sus metodologías no deben ser orientadas hacia la transmisión de conocimientos, sino, que se debe proponer diversas tareas que conlleven al sujeto actuar y desenvolverse en su diario vivir, que sean cercanas a los estudiantes y su contexto social, ya que permiten la interacción con el otro, la expresión de ideas, aceptar y reflexionar los diferentes puntos de vista de los compañeros, etc.

No obstante, es necesario investigar las posibilidades que se tiene al realizar una labor



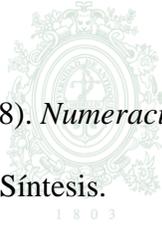
conjunta con los billetes decimales e identificar las formas de pensamiento multiplicativo que se movilizan. De este modo, surge la necesidad de hacer una investigación acerca de las prácticas matemáticas de los estudiantes con el propósito de identificar y caracterizar las formas de pensamiento multiplicativo, sus relaciones con las características del SND y las habilidades de pensamiento aditivo, a su vez ayudaría a reconfigurar y consolidar interrelaciones entre los procesos de enseñanza y aprendizaje con estos saberes. En esta misma dirección, es necesario investigar los procesos de toma de conciencia por parte de los estudiantes, como también los posicionamientos críticos y reflexivos frente a las prácticas que realizan con estos saberes que se constituyeron de manera histórica, social y sobretodo conjunta.



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

## Referencias bibliográficas

- Agudelo, E., Espinosa, M., Cardona, N., Castañeda, C., Moreno, P. y Valencia, D. (2007). *Sistematización de situaciones problema para el desarrollo del pensamiento aditivo* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Alsina, A. (2007). ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular?: Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3) Agosto, 315-333.
- Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (1991). *Psicología educativa: un punto de vista cognitivo*. Medellín, Colombia: Editorial trillas.
- Calle, G., Orozco, J., Piedrahita, L., Gómez, L. y Saldarriaga, S. (2003). *Propuesta de intervención pedagógica en el aula para el desarrollo del pensamiento numérico de los grados segundo y tercero, del colegio Juvenal nuevo futuro* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Madrid, España: Universidad de Granada.
- Collette, J. (1993). *Historia de las matemáticas, volumen I*. Madrid, España: Siglo veintiuno s.a.
- Echavarría, A., Meza, A., Ceballos, D., Valderrama, D., Mosquera, E. y Quintero, S. (2008). *Estrategias de representación que utilizan los niños y niñas de preescolar y primero para resolver problemas de estructura aditiva* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.



Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo. Colección: Matemáticas Cultura y Aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas desde una perspectiva semiótica cultural. Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Gómez, J. y Mojica, J. (2014). Una mirada sociocultural del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 81-99.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México D.F.: Mcgraw-hill / Interamericana editores, s.a de c.v.

Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, (2011). *Plan de área*. Bello-Antioquia, Colombia: No publicado.

Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, (2012). *Proyecto educativo institucional (PEI)*. Bello-Antioquia, Colombia: No publicado.

Itzcovich, H., Ressa de Moreno, B., Novembre, A., Becerril, M. y Gvirtz, S. (2007). Los números naturales y el sistema de numeración. En H. Itzcovich, B. Ressa de Moreno, A. November, M. Becerril y S. Gvirtz (Eds). *La matemática escolar: las prácticas de enseñanza en el aula*. (p. 31–61). Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.

Lerner, D. (1999). *Reflexiones sobre: Uso del Material concreto en Matemáticas. Problemas de la Vida cotidiana*. QUEHACER EDUCATIVO N° 34 (Marzo), 56-60.



Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: Cisspraxis, S.A.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Mosquera, H. y Restrepo, A. (2014). *Prácticas matemáticas en torno a la suma con estudiantes de primer grado de la institución educativa Ramón Giraldo Ceballos* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica*, 3(20), 72-90.

Obando, G. y Vásquez, N. (2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica*. Curso dictado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Palacios, M. y Morales, Y. (2015). *La incidencia del uso de artefactos en la apropiación de la suma a través de situaciones de carácter aditivo* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Pantano, L. (2014). *Medios semióticos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. y Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Switzerland: Springer.



Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 7-21.

Radford, L. (2010a). *Elementary forms of algebraic thinking in young students*. Paper presented at the Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2011). *Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking*. Paper presented at the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking. 93.

Radford, L. (2012a). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues*. Paper presented at the 12th international Congress on mathematical education.

Radford, L. (2012b). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150.

Ramírez, M. y Castro, C. (2012). *El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria*.

- Rodríguez, D. y Valdeoriola, J. (2009). *Metodología en investigación*. Barcelona, España: Eureka Media, SL.
- Salazar, C. y Vivas, Y. (2013). *Enseñanza del sistema de numeración decimal a través de la integración de material manipulativo* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Silva, A. y Varela, C. (2010). Los materiales —concretos— en la enseñanza de la numeración. Didáctica y prácticas docentes. *QUEHACER EDUCATIVO*, 26-36.
- Soto, L. y Castro, O. (2009). *El uso del ábaco para el aprendizaje de los sistemas de numeración en sexto grado de educación básica* (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Stake, R. (1998). Estudio intensivo de los métodos de investigación con estudio de casos. En R. Stake (Ed.), *Investigación con estudio de casos*. (p.11-14) Madrid, España: Ediciones Morata, S.L.
- Stake, R. (2000). Qualitative Case Studies. En N. Denzin, Y. Lincoln (Eds). *Handbook of Qualitative Research (2.a ed)*. (p.435-448). Londres, Inglaterra: Sage.
- Terigi, F., y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43(4), 59-83.



Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

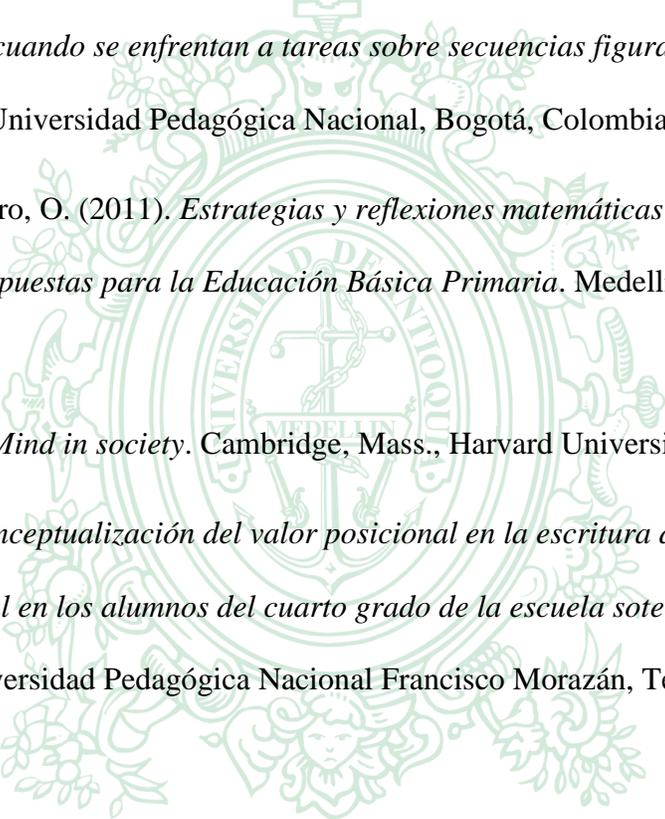
---

Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*, Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Villa-Ochoa, J. y Botero, O. (2011). *Estrategias y reflexiones matemáticas de maestr@s para maestr@s. Propuestas para la Educación Básica Primaria*. Medellín, Colombia: Escuela del Maestro.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Zunica, Y. (2012). *Conceptualización del valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal en los alumnos del cuarto grado de la escuela sotero barahona* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras.



UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA  
1 8 0 3



# UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Anexos



## UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA DEPARTAMENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

### Consentimiento de participación:

Yo \_\_\_\_\_ padre, madre o acudiente del estudiante \_\_\_\_\_ estoy de acuerdo en permitir que mi hijo(a) participe de la investigación titulada —Medios semióticos desarrollados por estudiante de primer grado de IEFJAR al utilizar los billetes decimales— que se llevará a cabo por los estudiantes de la universidad de Antioquia: Ana María Jiménez Echavarría, Cristian Stiven Zapata Marín y Francy Lorena Cautiva Sosa, que se encuentran cursando sus últimos semestres de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, teniendo en cuenta que la participación del estudiantes es voluntaria y que además se le es permitido: (a) No participar (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón o recibir alguna penalización. Puedo además decidir que la información de mi hijo(a) sea regresada a mi o sea destruida.

**Propósito:** Analizar los medios semióticos manifestados por los estudiantes de primer grado de la IEFJAR, al utilizar los billetes decimales para reconocer características del SND en tareas de tipo aditivo

**Procedimiento:** el estudiante será observado en el contexto del aula escolar, de igual manera sus producciones serán analizadas, fotografiadas, grabadas o el estudiante podrá ser entrevistado para ahondar en alguna cuestión concerniente a la educación matemática.

La investigación respetará toda la confidencialidad, es decir, ni el nombre del niño ni su rostro aparecerán en el proceso investigativo, la información tendrá acceso restringido y bajo la supervisión de los investigadores, sólo con fines académicos. Toda la información recogida durante la investigación será confidencial y se usaran seudónimos para el informe final de investigación.

Cualquier tipo de información puede dirigirse a los investigadores:

Ana María Jiménez **cc:** 1152697932 **cel:** 3113450931 **correo:** ana.jimeneze@udea.edu.co

Cristian Stiven Zapata **cc:** 1036655945 **cel:** 3147328492 **correo:** cstiven.zapata@udea.edu.co

Francy Lorena Cautiva **cc:** 1020449759 **cel:** 3134347843 **correo:** francy.cautiva@udea.edu.co

Consentimiento: me queda claro que firmando este consentimiento autorizo a mi hijo(a) en la participación de esta investigación.

Nombre del padre, madre o acudiente

Firma

Cédula

Nombre del investigador

Firma

Cédula

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de la falta ética de la investigadora puede ser discutida con la asesora Olga Emilia Botero correo: oebotero@gmail.com