Facultad de Educación

DIFICULTADES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN LOS PENSAMIENTOS NUMÉRICO Y VARIACIONAL: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIOTICO

Trabajo presentado para optar al título de:

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DAVID OROZCO FLÓREZ

Asesor

JOSE WILDE CISNEROS

Magister en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín

2018

Agradecimientos

Estoy profundamente agradecido con mi familia, la cual siempre sirvió de apoyo para que este proyecto se hiciera realidad y por la confianza incondicional que tienen sobre mí.

A mi profesor asesor José Wilde Cisneros, quien con su sabiduría y experiencia siempre me guío en la realización de este proyecto.

A la profesora cooperadora Claudia Zapata, por brindarme su apoyo y reflexiones sobre la práctica realizada.

A mi colega Yonatan Cardona, quien siempre estuvo presente para brindarme consejos en los momentos difíciles en la realización de este proyecto.

A la Institución Educativa Andrés Bello por abrirme las puertas y haberme permitido realizar este proyecto en sus instalaciones.

Por último, agradecerles a todos los estudiantes con los que trabajé, los cuales siempre me motivaron sobre el pensar de mi formación como maestro y a todas las personas que, de una u otra manera, aportaron en la realización de este proyecto.

Resumen

Este proyecto se realizó durante la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y tuvo lugar en la Institución Educativa Andrés Bello, donde, el trabajo se realizó con un grupo de estudiantes del grado séptimo de básica secundaria. El objetivo de este proyecto consistió en analizar las dificultades manifestadas por los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos en los pensamientos: numérico y variacional.

El proyecto se centró en la investigación cualitativa (Sampieri, Collado y Lucio, 2010), la cual permite analizar, describir e interpretar las dificultades que manifiestan los estudiantes en la resolución de problemas, estableciendo así la pregunta: ¿Cómo se manifiestan las dificultades sobre los elementos lingüísticos, procedimientos y significado, cuando estudiantes de grado séptimo, de la I. E Andrés Bello, resuelven problemas referidos a los pensamientos numéricos y variacional?

El proyecto se fundamentó en la perspectiva teórica del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero, y Font, 2007; Godino, 2014) en relación con los Pensamientos Numérico y Variacional (MEN, 1998; MEN, 2006) asociados a su vez a la Resolución de Problemas (Schoenfeld, 1985; Polya, 1945); y tiene como objeto de estudio las dificultades que se manifiestan en la resolución de problemas (Socas 1997; Bachelard 2000).

Los análisis de los resultados obtenidos se realizaron desde la faceta ostensiva y no – ostensiva del EOS, bajo la (GROS) Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (Castro, Godino y Rivas, 2011). Como categorías de análisis de la resolución de problemas fueron empleados tres objetos primarios planteados en el EOS: Las situaciones problema, el lenguaje y los procedimientos.

Se encontró que en gran medida las dificultades que manifiestan los estudiantes se enmarcan en dificultades cognitivas, los procedimientos y en el uso de lenguaje al no establecer relaciones entre los datos de los problemas para su resolución y dar significados a los objetos matemáticos.

Palabras clave: Resolución de problemas, Enfoque Ontosemiótico, dificultades.

Abstract

This project was carried out during framework of the Pedagogical Practice of the Bachelor in Basic Education with Emphasis in Mathematics and took place in the Andrés Bello Educational Institution, where the work was carried out with a group of seventh grade students of secondary school. The objective of this project was to analyze the difficulties expressed by the students when solving mathematical problems in the numerical and variational thoughts.

The project targeted on qualitative research (Sampieri, Collado y Lucio, 2010) which allows to analyze, describe and interpret the difficulties that students reveal in problem solving, thus establishing the question: how do difficulties on linguistic elements, procedures and meaning reveal when seventh grade students, from the I. and Andrés Bello, solve problems related to the numerical and variational thoughts?

The project was based on the Ontosemiotic theoretical perspective approach (Godino, Batanero, y Font, 2007; Godino, 2014) in relation to the numerical thoughts and variational (MEN, 1998; MEN, 2006) associated in turn to Problem solving (Schoenfeld, 1985; Polya, 1945); and it has as subject of study the difficulties revealed in the problems' resolution (Socas 1997; Bachelard 2000).

The analysis of the results obtained was made from the ostensive and non - ostensive facet of the EOS, under the (GROS) Guide to Recognition of Objects and Meanings (Castro, Godino and Rivas, 2011). As problem analysis analysis categories, three primary objects proposed in the EOS were employed: problem situations, language and procedures.

It was found, to a great extent, that the difficulties revealed by the students are framed in cognitive difficulties, the procedures and use of language by not establishing relations between problems' data for their resolution and giving meanings to the Mathematical objects.

Keywords: Problem solving, Ontosemiotic approach, difficulties.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Capítulo I

Contextualización

En el marco de la práctica pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemática de la Universidad de Antioquia, que se realizó durante los semestres 2016-2, 2017-1 y 2017-2 en la Institución Educativa Andrés Bello, se dividió en 3 etapas, la primera está evocada a la realización de un diagnóstico Institucional, que comprende el análisis de los factores asociados a la parte administrativa y teleológica, al profesor cooperador se le observó en su práctica pedagógica y a los estudiantes de grado séptimo su proceso de aprendizaje basado en la resolución de problemas, en dicho grado se realizó la práctica pedagógica. La segunda etapa consistió en la intervención en el aula como docente practicante. En el transcurso de la práctica, el profesor cooperador de momento cambió de Institución Educativa, lo que llevó a que se cambiara de profesor cooperador y el grado con el que se iba a realizar la práctica.

La Institución Educativa Andrés Bello, es de carácter público y brinda educación formal en los niveles de Preescolar, Básica, Media Académica y Media Técnica con especialidad en Comercio, educa desde una perspectiva social y cultural, basada en los principios de Justicia, Igualdad y Equidad (PEI, 2016).

La filosofía de la Institución, considera al sujeto como individuos que presentan diversificaciones, factores de diferenciación, lo cual impide que haya homogeneidad. En este sentido, la Institución pretende potenciar la formación y la educación integral mediante el diseño de un currículo pertinente y flexible basado en la implementación de estrategias pedagógicas, socio- afectivo, cognitivas, técnicas, tecnológicas y de promoción en valores, que satisfagan la diversidad cultural con inclusión y permanencia de los estudiantes que ingresen al sistema educativo.

En el momento que realizó la práctica, el personal administrativo estaba conformado por una rectora, un coordinador académico, una coordinadora de convivencia, y una secretaria. La Institución cuentaba con 53 profesores, de los cuales 5 son del área de matemáticas, entre éstos, cuatro tienen título académico profesional en licenciatura en el área de matemáticas y un ingeniero civil.

En la mayoría de clases observadas predominó la característica magistral, donde el plan de desarrollo estaba organizado desde el paradigma “concepto-ejemplo-taller”. La forma de abordar un nuevo objeto matemático es iniciada por su definición formal y propiedades, después de asumir la definición formal se sigue con una ejemplificación bajo un ejercicio de forma de explicación y por último se les entrega a los estudiantes guías o talleres para el trabajo en equipo o individual. Esta forma de práctica pedagógica no está dirigida desde la fundamentación pedagógica de la Institución que se focaliza en la Pedagogía Activa, la cual se caracteriza en crear espacios para fomentar el espíritu investigativo como hacer, indagar, inquietar y generar nuevos interrogantes que permitan la comprensión de los fenómenos de la realidad social y cultural y aporten a las soluciones de los problemas de las comunidades.

Los estudiantes de grado séptimo son adolescentes entre los 11 y 14 años de edad, donde, más del 80% pertenecen a hogares de estrato socio-económico de niveles III; las familias se encuentran constituidas por padres, madres, hijos y en algunos casos por tíos y abuelos.

Se realizó una encuesta a 39 estudiantes de grado séptimo con el objetivo de identificar el gusto por las matemáticas y además evidenciar los conceptos matemáticos que utilizan para su desarrollo en sus contextos cotidianos. De acuerdo a la encuesta, el 70% de los estudiantes tiene simpatía por las matemáticas, y de este 70%, el 65% ve en el área de matemáticas una herramienta u objeto para desarrollar proyectos de vida a corto o largo plazo.

El 30% de los encuestados respondieron que no encontraban simpatía en el área de matemáticas, en su mayoría argumentaron:

a) Es una ciencia difícil de entender.
b) Cuando estudian, les surgen preguntas, lo que lleva a presentárseles dificultades en entender lo trabajado.
c) No ven en las matemáticas una herramienta para resolver problemas en sus contextos.

Por último, se evidenció que los estudiantes en general utilizan las operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división en la ejecución de su diario vivir por medio de la utilización de dinero para compra de alimentos y objetos para la canasta familiar, realizar cuentas de cobro, entre otros.

Planteamiento del problema

Para llevar a cabo el planteamiento del problema, se realizó un análisis desde tres componentes que dan evidencia de las dificultades que presentan los estudiantes del grado séptimo de la Institución respecto a la actividad de resolución de problemas.

El primero consistió en el análisis de la práctica pedagógica del profesor cooperador, buscando identificar si su práctica es acorde a lo planteado por la Institución en el Plan Educativo Institucional (PEI), en el la Malla Curricular, en los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, MEN, 2006).

Segundo, se analizaron los resultados obtenidos en las pruebas Saber en el área de matemáticas, realizadas en los años 2014, 2015 y 2016 para los grados quinto de básica primaria y noveno de básica secundaria.

Por último, se realizó una prueba diagnóstica a los estudiantes de séptimo grado, para dar cuenta de los procesos o estrategias para "particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, verificar una solución" BOC[1] 2002 (Citado por Camacho y Santos, 2004), además observar el significado que los estudiantes le otorgan a los elementos lingüísticos, símbolos y objetos matemáticos, todo ello relacionado con la resolución de problemas en los pensamientos numérico y variacional.

En el plan de área de la Institución que se guían por los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), se proponen tres, cinco y dos estándares para los tres periodos escolares respectivamente, que están relacionados con el proceso de resolución de problemas. Sin embargo, se refleja poca articulación entre lo propuesto por el Plan Integral de Área referente a la resolución de problemas y la planeación y desarrollo del docente en el aula; el docente se limita a la ejercitación cíclica de procedimientos y algoritmos y en ocasiones a la aplicación de modelos (fórmulas). Esta práctica resulta inconveniente para desarrollar habilidades y destrezas asociadas al razonamiento lógico-matemático, así mismo, poco favorece el fortalecimiento de la resolución de problemas, el uso de un lenguaje adecuado, particularizar y la generalización, en este sentido, Polya (1978) afirma que limitar la enseñanza de la Matemática a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es colocarla al nivel de un manual de instrucciones.

En las observaciones de clase realizadas, el papel del profesor se remite a implementar un plan de área, en el cual los conceptos matemáticos que se buscan desarrollar para el aprendizaje con los estudiantes son aplicados de tal forma que sólo se presenta la definición formal del concepto, luego, ejercicios operacionales y por último talleres grupales; esto ayuda a que la mayoría de los estudiantes encuentren poca motivación por el estudio del área de matemáticas, lo cual se refleja en la exigua disposición por parte de éstos, donde la concentración se focaliza en

[1] Boletín Oficial de Canarias (BOC)

atender dispositivos móviles, conversar en clase temas diferentes a los que son explicados en ese momento y ausentarse del aula de clase.

Si bien en las instituciones educativas del país, no deja de ser motivo de preocupación y de reflexión el bajo nivel de desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas tanto a nivel Institucional como a nivel de pruebas estatales; en la Institución Educativa Andrés Bello, igualmente es motivo de preocupación y de reflexión el desempeño en las pruebas Saber, las cuales revelan un bajo nivel de desempeño en el desarrollo de las competencias matemáticas, especialmente en el proceso resolución de problemas.

De acuerdo con el párrafo anterior, se observa cómo las Pruebas Saber dan evidencia de los resultados obtenidos en el proceso de resolución de problemas de la Institución Educativa, en los años 2014, 2015 y 2016 el grado quinto de básica primaria y noveno de básica secundaria respectivamente, como se observa en las figuras 1, 2 y 3.

Figura 1. Resultados prueba saber 5° (2014).Tomado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

Figura 2. Resultados prueba saber 9° (2015). Tomado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

Según los resultados obtenidos, se observa que en el componente resolución de problemas, en los años 2014 y 2015 los estudiantes de grado 5° y 9° se ubican por debajo del promedio nacional, lo cual se constituye en una debilidad.

La figura 3 hace referencia a los resultados obtenidos en el año 2016 por las pruebas Saber del grado quinto, se indican los resultados porcentuales respecto al desempeño emitido por la prueba, los cuales se ilustran por medio de colores, donde el color verde indica desempeño avanzado; color amarillo desempeño satisfactorio; color naranja desempeño mínimo y color rojo desempeño insuficiente.

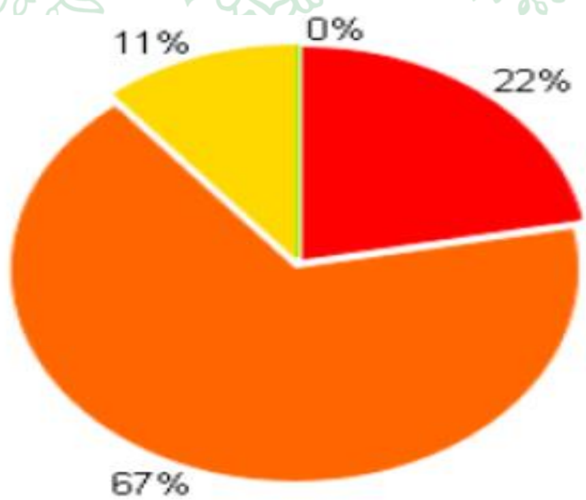


Figura 3. Resultados Pruebas Saber 5° (2016). Tomado de:

http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

De igual forma, se evidencia que el 0% de los estudiantes lograron un desempeño avanzado en los resultados de la prueba, el 11% lograron un desempeño satisfactorio, el 67% de los estudiantes se sitúan en el desempeño mínimo y por ultimo un 22% logró un desempeño insuficiente. Es notable el bajo desempeño obtenido en las pruebas ya que menos del 90% de los estudiantes logran un desempeño satisfactorio y ninguno un desempeño avanzado.

Como se explicitó anteriormente, en las pruebas realizadas en el año 2016, la Institución, respecto a la resolución de problemas presenta un desempeño mínimo o insuficiente en un gran porcentaje de la población de los grados analizados, lo que confirma las debilidades presentadas.

Finalmente, se realizó una prueba diagnóstica teniendo en cuenta los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), donde se evalúo el componente resolución de problemas.

La prueba diagnóstica se llevó a cabo en el semestre 2017-1, estuvo compuesta por cuatro problemas, los cuales fueron diseñados con el objetivo de identificar los procesos o estrategias de particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, verificar una solución y el significado que los estudiantes le otorgan a los elementos lingüísticos, símbolos y objetos matemáticos cuando resuelven problemas.

Problema 1:

Usando baldosas de cerámica negra en la forma de cuadrados fue elaborada una decoración en una pared, mostrada parcialmente abajo

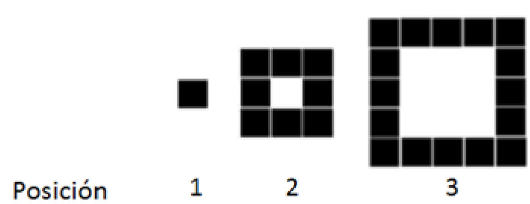


Figura 4. Problema planteado a los estudiantes de séptimo grado de básica secundaria de la IE Andrés Bello.

Se plantea: ¿Existe algún patrón de crecimiento respecto al total de baldosas que se deben utilizar para elaborar cierta decoración? Descríbalo.

Una de las respuestas planteadas por un grupo de estudiantes fue:

Si, la secuencia es que cada vez se aumentan dos baldosas.

Figura 5. Respuesta dada por un grupo estudiantes.

Se observa que los estudiantes, aunque logran proponer un patrón para resolver el problema, lo hacen para los lados del cuadrado, mas no para el cuadrado en sí, de lo cual se logra inferir que existe un obstáculo epistemológico que dificulta obtener la generalización pedida en el problema. Además, no logran explicar claramente la generalización, lo cual evidencia poco uso de un lenguaje apropiado.

También, en el mismo problema se evidenció (figura 5) que los estudiantes no verifican soluciones (Camacho y Santos 2004), cuando se les pidió que respondieran la siguiente pregunta: ¿Cuántas baldosas son utilizadas para elaborar la decoración de la posición 5? ¿Cuántas en la posición 10?

9x4=36 R/= En la figuia 5 habrían 36 baldosas
19x4=76 R/= En la figura 10 habrían 76 baldosas

Figura 6. Respuesta obtenida por los estudiantes.

Los resultados obtenidos por los estudiantes no corresponden a la cantidad de baldosas pedidas en el problema. Para la posición 5 corresponden 32 baldosas y para la posición 10 corresponde 72 baldosas. Esto es debido posiblemente a que los estudiantes no realizan un conteo apropiado de la cantidad de cuadrados que hay en las posiciones 1,2 y 3 del problema planteado.

Problema 2:

El siguiente problema buscaba obtener información sobre si utilizan sus conocimientos previos referentes a las medidas de tendencia central y el significado que le otorgan a la media aritmética:

El diagrama de barras a continuación ilustra el resultado obtenido por un grupo en la primera ronda de las Olimpiadas. La nota mínima para pasar a la segunda fase es 6.

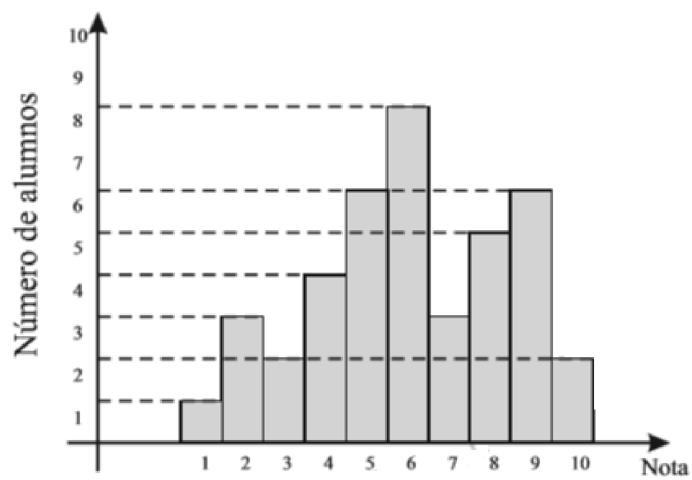


Figura 7. Problema planteado a estudiantes de séptimo grado de la I E Andrés Bello.

Una de las preguntas planteadas era*:* Si se compara el promedio de la nota obtenida por todos los estudiantes, con el promedio de la nota obtenida por los estudiantes que pasaron a la segunda fase, ¿Se puede afirmar que serían los mismos promedios? Si no son los mismos promedios ¿Por qué se obtienen otros valores?

Los estudiantes respondieron:

Figura 8. Respuesta obtenida por los estudiantes.

En la figura 8 puede apreciarse que los estudiantes no usan ni analizan medidas de tendencia central como la media aritmética, lo cual es una dificultad al interpretar y analizar información representada gráficamente, parece ser se les dificulta realizar un análisis sistemático de un conjunto de datos.

Problema 3:

Se presentó el siguiente enunciado y se indicó que se debía responder las preguntas para que completaran la información faltante en la tabla 1:

En la figura abajo, 3 cubos iguales apoyados sobre una mesa tienen sus caras pintadas con los números 0, 1, 3, 4, 5 y 9.

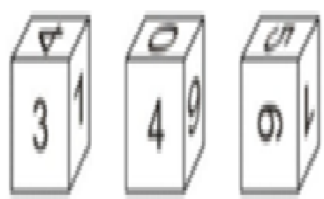


Figura 9. Problema planteado a estudiantes de séptimo grado de la IE Andrés Bello.

Si observas los cubos, cada cara tiene escrito un número A, ¿Cuál debe ser el número B que está escrito en la cara opuesta a la cara del número A?

Tabla 1.
¿Cuál es el número opuesto?

Número de la cara (A)	Número de la cara opuesta (B)
4	
0	
5	

Los estudiantes completaron la tabla1 de la siguiente manera:

Número de la cara (A)	Número de la cara opuesta (B)
4	3
0	1
5	4

Figura 10. Respuesta de estudiante a la prueba diagnóstico ¿Cuál es el número opuesto?

El resultado esperado se presenta en la tabla 2.

Tabla 2.
Resultado esperado de ¿Cuál es el numero opuesto?

Número de la cara (A)	Número de la cara opuesta (B)
4	5
0	1
5	4

En esta solución, los estudiantes relacionaron los números de las caras de los dados con el número que no correspondía a la cara opuesta, lo cual evidencia que poseen dificultades sobre la ubicación espacial, lo que se manifiesta en las relaciones inexactas planteadas en la figura 10. Por otro lado, los estudiantes presentan dificultades en el uso de la propiedad simétrica de la igualdad y, además, no interpretan la información dada en el problema (Berenguer y Martínez, 2003; Camacho y Santos, 2004). También, se presenta que no particularizan ni verifican una solución, además, se infiere que es posible que no le den significado a la palabra *opuesto.*

Problema 4:

Sobre el tablero de la figura 11, hay varias monedas:

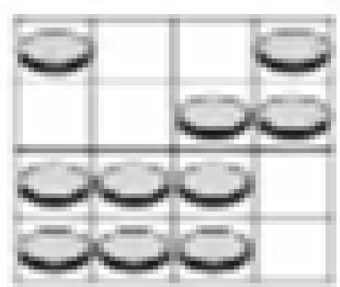


Figura 11. Problema sobre ubicación de monedas.

Pregunta: ¿De cuántas formas puedo acomodar las monedas en el cuadro de 4x4 de tal forma que haya sólo 2 monedas en cada fila y 2 monedas en cada columna? Justifica.

Respuesta esperada: No existe forma de acomodar las monedas con las condiciones presentadas, solamente se cumplen las condiciones cuando se sitúan 8 monedas en el tablero.

Respuesta dada por un equipo:

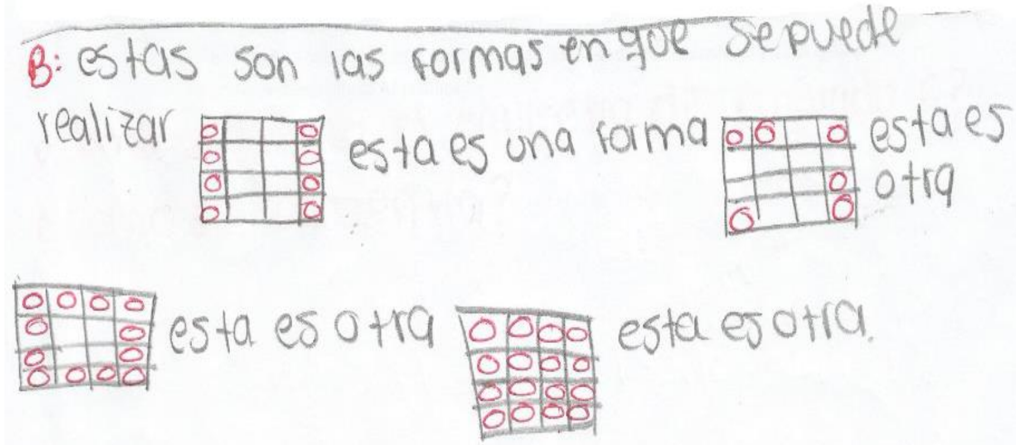


Figura 12. Respuesta planteada por un equipo de trabajo.

La figura 12 pone de manifiesto que los estudiantes no utilizan las condiciones dadas en el problema. Además, se refleja que hacen pocos procesos de reorganización de datos y lectura del problema, ni realizan procesos de particularización (Berenguer y Martínez, 2003; Camacho y Santos, 2004). De igual manera no tiene en cuenta la relación entre el número de filas y columnas con la cantidad de monedas, parece ser que no tienen un significado adecuado para las palabras filas y columnas.

Otra respuesta propuesta por un equipo para el problema anterior se observa en la Figura 13.

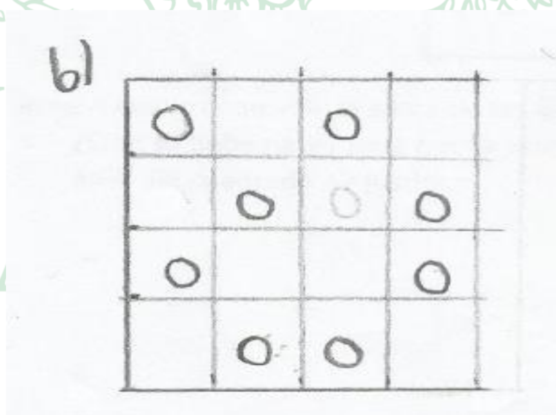


*Figura 13.*Otra respuesta dada del problema 4.

Se puede establecer que los estudiantes logran llegar a una respuesta, pero, no utilizan un lenguaje apropiado para explicar su método de solución (Camacho y Santos, 2004). También, se observa que, aunque los estudiantes dan cuenta de una sola forma de solucionar el problema, esta no cumple las condiciones del problema, poniendo en manifiesto dificultades en verificar una solución.

Al realizar el análisis de las soluciones de los problemas a los que llegaron los estudiantes, se evidenció que presentan dificultades en los procesos o estrategias de particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar y verificar una solución. Esto confirma lo expuesto por las pruebas Saber respecto a las dificultades de resolución de problemas en la Institución Educativa.

Justificación

Diversos estudios (Polya, 1945; De Guzman, 1984; Schoenfeld, 1985; Santos, 1992; Escudero, 1999; Abrantes, 1996; Farah, 2005; Radford, 2006) informan sobre la importancia que tiene la resolución de problemas sobre el desarrollo del pensamiento matemático y del rol fundamental que desempeña en el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde, la resolución de problemas es asumida por parte de los maestros como guía de enseñanza y por los estudiantes como fuente de aprendizaje para desarrollar diferentes formas de pensamiento.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), de igual forma, establecen la importancia de desarrollar el pensamiento matemático, definiendo cinco procesos generales concernientes la resolución de problemas, el cual permite a partir de "situaciones de la vida cotidiana identificar y establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes, formarse representaciones mentales y representarlos en diferentes registros" (MEN, 2006, p.51).

Para la IE Andrés Bello es importante la inclusión y ejecución dentro del currículo, en particular el plan de área, la resolución de problemas en cuanto posibilita mejorar las condiciones evaluativas tanto internas como externas, donde la resolución de problemas puede utilizarse como estrategia pedagógica para la transformación del pensamiento del estudiante, que escenifiquen actitudes y valores y que propicien la toma de decisión idónea (logra desarrollar capacidades para enfrentarse a problemas que se le presentan en su cotidianeidad); además, la resolución de problemas desde el enfoque de la Institución es entendida como un proceso que conlleva al análisis de situaciones específicas acordes con la temática, situación imprevista o evento casual que ocurre en el aula de clase.

Además, cabe destacar la importancia que plantea el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) sobre la resolución de problemas:

> Es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas; porque el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos (p. 24).

Por lo tanto, respaldar el desarrollo de las capacidades de los individuos por medio de la resolución de problemas, es darles herramientas para desenvolverse en la vida y facilitar un pleno desarrollo de éstos en la sociedad.

Por último, en la formación que he tenido para obtener el título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, el componente resolución de problemas es de gran importancia en la fundamentación didáctico-pedagógica, gracias a los diferentes espacios de formación, los cuales me han servido para motivar discusiones de reflexión respecto a lo que se entiende por enseñanza y aprendizaje en la educación matemática. Siempre he tenido presente que la formación en las instituciones educativas en los diferentes niveles establecidos por el MEN (prescolar, básica primaria, básica secundaria y media) deben apuntar a desarrollar potencialidades en los individuos y brindarles herramientas para desenvolverse como personas en sus propios contextos, y es por medio de la resolución de problemas que el sujeto logra construir dichas herramientas.

Pregunta orientadora

Después de analizar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica realizada por los estudiantes y los resultados de las pruebas Saber de los años 2014, 2015 y 2016 en quinto de básica primaria y noveno de básica secundaria, se plantea la siguiente pregunta:

¿Cómo se manifiestan las dificultades sobre los elementos lingüísticos, procedimientos y significado, cuando estudiantes de grado séptimo, de la I. E Andrés Bello resuelven problemas referidos a los pensamientos: numérico y variacional?

Objetivo general

Analizar bajo el enfoque Ontosemiótico desde la faceta Ostensivo – No Ostensivo, las dificultades manifestadas por estudiantes de séptimo grado, de la IE Andrés Bello, cuando resuelven problemas matemáticos referidos a los pensamientos: numérico y variacional, para evidenciar el significado dado a los objetos matemáticos.

Objetivo específico

Identificar y describir por medio de la guía GROS, las dificultades sobre los elementos lingüísticos, procedimientos y el significado que otorgan los estudiantes a los objetos matemáticos en la resolución de problemas sobre los pensamientos: numérico y variacional.

Capítulo II

Marco teórico

A continuación, se presentará un desarrollo teórico sobre el marco conceptual en el que se estructuró el proyecto, este tomó tres tópicos de articulación:

a) El enfoque Ontosemiótico, modelo teórico desarrollado por Godino (2003), sobre el conocimiento y la instrucción matemática.
b) La resolución de problemas, como práctica matemática, donde el Enfoque Ontosemiótico es el punto de partida en la formulación de objetos matemáticos.
c) Las dificultades en la resolución de problemas, objeto de estudio de este proyecto, el cual se relaciona con la Guía de Reconocimiento de Objetos y significados (Castro, Godino y Rivas, 2011).

El Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Se presenta una pequeña síntesis del modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática, entendiendo esta última como el proceso de enseñanza y aprendizaje organizado de las matemáticas y que tiene lugar en los sistemas didácticos. Respecto a lo anterior, Godino, Batanero y Font (2007) indican "El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado" (p. 4).

Llegar a este punto de partida del EOS, la Didáctica de las Matemáticas como campo de investigación, le concierne identificar el significado que los estudiantes confieren a los términos, símbolos, objetos y proposiciones matemáticas, además, investigar sobre los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje y explicar sobre las bases en que se construyen tales significados como resultado de la instrucción matemática.

Los significados son la parte esencial que los estudiantes otorgan a los objetos matemáticos cuando resuelven problemas, al respecto Godino (2010) manifiesta que:

> La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia (p.3).

Los procesos de enseñanza y aprendizaje son complejos por la naturaleza misma de las matemáticas, y el tratar de dar cuenta sobre el rol de los significados de los objetos matemáticos a partir de la instrucción, justifica tener en cuenta la articulación de diversos enfoques y la influencia de contextos socio-culturales, que permiten describir, explicar y diseñar dichos procesos.

Godino (2014) define el EOS como:

> Un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas (p. 4).

El EOS asume una perspectiva sistémica de marcos teóricos ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instruccionales, los cuales permiten ocuparse sobre la complejidad de la educación matemática como un campo de investigación, desarrollo y práctica, el estudio de la relación entre los significados personales e institucionales que se le atribuyen a un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión; y el estudio de los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos usados en las interacciones didácticas (Godino y Batanero,1994; Godino, 2002, Godino et al. 2007).

Los significados institucionales hacen parte del sistema de prácticas operativas y discursivas, que tienen lugar en el aula de clase, las cuales se constituyen en referencia para el estudio del proceso de aprendizaje de los estudiantes y la evaluación (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006) así mismo, los significados personales se entienden como el sistema de prácticas realizadas por una persona individualmente en diferentes campos (Godino y Batanero, 1994) mediante éstos significados, se describen los procesos de aprendizaje de los estudiantes durante la práctica matemática.

La noción de sistema de prácticas tiene un rol central tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Godino et al. (2007), entiende esta noción como el significado personal o institucional de un objeto matemático utilizado para la resolución de un problema. Con esta noción se asume y hace operativo el supuesto antropológico sobre la práctica matemática en que se apoya el EOS, sobre esto, Godino y Batanero (1994) afirman “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 8).

Además, por medio de las formas de expresión que una persona implementa para comunicar sus ideas, impresiones, comprensiones, entre otros, evoca la relación biunívoca entre la expresión y contenido que hay en el uso del objeto matemático. Esta relación es categorizada como una Función Semiótica, entendida como la dependencia entre el texto y el contenido relacionado al mismo, en otras palabras, la correspondencia entre una expresión y su contenido (Godino, 2002). La comprensión se entiende en el sentido dado por Godino y Font (2007) al indicar que un estudiante comprende un objeto matemático cuando logra dar uso de éste en diferentes contextos para la resolución de problemas.

Godino et al. (2007) argumentan que, en el EOS, el proceso de instrucción matemática consta de seis dimensiones las cuales se caracterizada por ser procesos no deterministas:

d) Epistémica, la cual hace referencia al conocimiento institucional;

e) Cognitiva, origen del significado del objeto matemático.

f) Docente, la practica pedagógica del maestro;

g) Disiente, la práctica educativa y matemática del estudiante;

h) Mediacional, el uso de los recursos en la práctica educativa; cognitiva, génesis de significados personales;

i) Emocional, evocada a las emociones y actitudes.

Este proyecto se enmarca bajo la dimensión cognitiva, la cual estudia los significados personales que el estudiante le otorga al objeto matemático, los cuales son entendidos como el sistema de prácticas operáticas y discursivas que realiza un estudiante cuando resuelve un problema.

Ligada a la dimensión cognitiva, el EOS propone los objetos primarios como aquellos elementos relacionados entre sí que emergen en la práctica de resolución de problemas, los cuales constituyen redes de interacción entre dichos objetos. Godino et al. (2007) indican que estos objetos son:

a) Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual…).

b) Situaciones-Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios…).

c) Conceptos/Definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones, recta, punto, número…).

d) Proposiciones/Propiedades (enunciados sobre conceptos…).

e) Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo…).

f) Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo…) (p. 7).

Los objetos primarios que se estudian en este proyecto se obtienen de las situaciones problema, la cual es el punto de partida de la resolución de problemas (Godino et al., 2007), ello involucra los procedimientos y los elementos lingüísticos, que darán cuenta de los procesos de particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, verificar una solución.

Dichos objetos al ser analizados mediante la herramienta GROS, permite una caracterización de los significados que los estudiantes otorgan a dichos objetos matemáticos, lo cual permite identificar las dificultades que estos manifiestan cuando resuelven problemas matemáticos. Además, el lenguaje en sus formas discursivas y simbólicas constituye en la resolución de problemas una parte fundamental para la emergencia de los objetos matemáticos, a partir de esto, los estudiantes intentan otorgar significados al objeto matemático, los cuales se relativizan y obtienen atributos funcionales, lo que conlleva a que, en la emergencia de los objetos primarios en la práctica matemática, intervengan diferentes tipos de objetos que se definirán como facetas.

Facetas del EOS

Existen facetas que intervienen en las prácticas matemáticas, por ejemplo, los objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), que emergen cuando se resuelven problemas y que son representados en forma textual, oral, gráfica, es decir, en diferentes sistemas de representación.

Tales facetas se clasifican como:

a) Personal – institucional: Los objetos matemáticos son objetos institucionales si emergen en la práctica de socialización entre individuos, los personales nacen de la práctica subjetiva del individuo.

b) Ostensivo – No Ostensivo: los objetos ostensivos son aquellos que se muestran explícitos en la resolución de problema, los no ostensivos se intuyen en la expresión matemática.

c) Expresión – Contenido: "La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado)" (Godino et al., 2007, p. 8).

d) Extensivo – Intensivo: Parte de la particularidad de un elemento matemático hasta la generalización a la que pertenece dicho objeto matemático, un ejemplo de esto es la expresión particular de una función cuadrática ($y = f(x) = x^2 + 1$) y le expresión general de las funciones cuadráticas ($y = f(x) = ax^2 + bx + c$).

e) Unitario – Sistémico: "En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio" (Godino et al, 2007, p. 9).

En este proyecto se centra en la faceta ostensiva - no ostensiva, con el objeto de percibir las dificultades manifestadas en la resolución de problemas a partir del análisis de problemas matemáticos y los diversos modos en que los abordan los estudiantes.

Por último, el EOS entiende la epistemología en la experiencia matemática como aquellos saberes institucionales, culturales y sociales que intervienen en toda práctica matemática y en particular en la resolución de problemas; además, estos están establecidos en un contexto en específico y entiende a los procesos cognitivos como los sistemas de prácticas manifestadas por el sujeto.

El estudio de los procesos epistémicos y cognitivos del sujeto deben estar ligados a la ontología y las entidades semióticas. Las entidades semióticas son las formas que utiliza el sujeto para comunicar los significados que este da a los objetos matemáticos, los cuales surgen en la práctica de resolución de problemas. Respecto a la ontología, esta hace referencia a las prácticas propias del ser, cuales son los mecanismos y formas que utiliza el sujeto para llegar a una respuesta.

Resolución de problemas.

Según Callejo y Zapatera (2014) "la resolución de problemas es el corazón de la actividad matemática, y aprender a resolver problemas se considera un objetivo importante de la educación matemática en todos los niveles educativos" (p. 65). Por lo anterior, se considera que la resolución de problemas es la razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve como herramienta para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. De esta manera, cuando un estudiante realiza procesos de resolución de problemas, se evidencia si se ha logrado concebir el significado de los objetos matemáticos desde una perspectiva pragmático-antropológica, es decir, si se ha alcanzado resaltar los significados personales que incluye lo cognitivo y la comprensión.

Que es un problema.

En la didáctica de las matemáticas, al concepto de *problema* se le ha concedido diversos significados, esto, por los diferentes enfoques e investigaciones que se han realizado a nivel global y la universalidad de características que nacen de las investigaciones sobre el término problema (Berenguer y Martínez, 2003).

Polya (1961) citado por Chavarría y Alfaro (2005), define problema como aquella situación en donde el o los individuos deben buscar una solución concreta del problema, pero la forma de llegar a la solución no está pre-establecida.

También, Alda y Hernández (1998), al citar a Woods, Crowe, Hoffman, & Wright (1985), indican que un problema es “una situación estimulante para la cual el individuo no tiene respuesta, es decir, el problema surge cuando el individuo no puede responder inmediata y eficazmente a la situación” (p.28).

House, Wallace & Johnson (1983), entienden el concepto de problema como una situación que supone una meta para ser alcanzada donde existen obstáculos para alcanzar ese objetivo que requiere deliberación, y se parte del desconocimiento del algoritmo útil para resolver el problema.

Las tres concepciones anteriores llevan a definir un problema como una situación difícil y contextualizada, donde el individuo que se enfrenta a solucionarla no posee un procedimiento o algoritmo establecidos para llegar a una solución. En términos de Schoenfeld (1985), el objetivo de implementar problemas difíciles es que el niño aprenda a pensar matemáticamente. Los problemas son contextualizados porque ubican a las matemáticas en un ‘mundo real’ que las dota de significado, y los problemas dejan de estar aislados.

El término difícil hace referencia al desconocimiento de un algoritmo para la solución del problema, lo cual requiere que el individuo use sus conocimientos para resolver problemas (Berenguer y Martínez, 2003).

En términos de Alda y Hernández (1998), en este proyecto se conciben ‘problemas creativos’, los cuales requieren la “construcción original, por parte de quien los resuelve, de la solución, y del propio proceso de resolución, y que conllevan la toma de decisiones, tanto en el proceso como en la elección de la solución" (p.28).

Resolución de problemas como forma para llegar a una solución.

Pensadores de la antigüedad, como Sócrates, han buscado establecer procesos que permitan resolver problemas, en la actualidad se han reportado diversos estudios sobre los procesos necesarios que debe realizar una persona para resolver un problema. Polya con su obra "*How to solve it*" (1945) establece criterios y caminos para solucionar un problema, es hasta la década de los años 70´s que la comunidad internacional de educadores involucra la resolución de problemas en el diseño curricular para la educación obligatoria (Berenguer y Martínez, 2003).

Autores como (Schoenfeld, 1983; Stanic & Kilpatrick ,1988) han recopilado hasta 14 significados diferentes del término resolución de problemas. Berenguer y Martínez (2003) comentan que dichas definiciones se establecen desde cuatro enfoques según Schoenfeld (1985):

a) Problemas presentados en forma escrita, a menudo problemas muy sencillos pero que colocan la Matemática en el contexto del 'mundo real'.
b) Matemáticas aplicadas o modelos matemáticos, es decir, el uso de matemáticas sofisticadas para tratar los problemas que reflejan el 'mundo real'.
c) Estudio de los procesos cognitivos de la mente, consistente en intentos de exploración detallada de aspectos del pensamiento matemático en relación con problemas más o menos complejos.
d) Determinación y enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos (p. 82).

Con base en los cuatro enfoques mencionados, este proyecto se sitúa en el cuarto, donde Polya (1945) menciona cuatro caminos para solucionar un problema, lo cuales son: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución. Tales heurísticas son los pasos que deben realizar los estudiantes para lograr resolver los problemas que se les plantean.

Schoenfeld (1985) propone que los pasos para resolver un problema que expone Polya son insuficientes, ya que en la resolución de problemas intervienen otros elementos de carácter "emocional, afectivo, psicológico, sociocultural, entre otros" (citado por Chavarría y Alfaro, 2005, p.3).

Schoenfeld adiciona cuatro elementos a los descritos por Polya que intervienen en la resolución de problemas:

Los recursos: Hace referencia a los conocimientos previos que tiene un estudiante. Según Camacho y Santos (2004), la resolución de problemas permite que los estudiantes utilicen los conocimientos previos, se construyan nuevos y ponga a prueba los procesos de "experimentar, particularizar, conjeturar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, utilizar distintas partes de las matemáticas, verificar una solución" (p. 46).

Las heurísticas: son las reglas y planteamientos que realiza el estudiante para abordar el problema.

El control: Este es el punto de encuentro entre los recursos y las heurísticas, pues se entiende como la forma en que el estudiante utiliza, organiza y sistematiza los recursos y las heurísticas para abordar los problemas y realizar los procesos de resolución.

El sistema de creencias: Entendido como un aspecto que se encuentra implícito en todo el proceso de resolución de problemas; son las creencias, ideas y percepciones que tiene el estudiante respecto a los objetos matemáticos.

Procesos para la resolución de problemas.

Camacho y Santos (2004), al citar a BOC (2002) presentan unos procesos generales que están involucrados en los procesos de resolución de problemas. A continuación, se definen unos de los procesos generales en la resolución de problema presentadas por Camacho y Santos (2004), de los cuales se busca analizar cómo se comportan las dificultades manifestadas.

Generalizar: Proceso por el cual el estudiante es capaz de establecer secuencias de objetos, sucesos o elementos que tiene un patrón o constituir algoritmos para el cálculo en la resolución de problemas.

Verificar una solución: Inspeccionar una respuesta obtenida en la resolución de problemas para comprobar su veracidad.

Justificar: Demostrar la veracidad de una respuesta o un proceso en la resolución de un problema.

Particularizar: Proceso por el cual el estudiante es capaz de caracterizar y diferenciar los elementos singulares de un problema.

Lenguaje apropiado: Proceso donde el estudiante comunica de forma clara las respuestas y resultados obtenidos en la resolución de problemas.

Probar una conjetura: Verificar la veracidad de una suposición.

Pensamientos matemáticos.

El MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), argumentan que el conocimiento matemático se agrupa dentro de cinco estructuras generales, las cuales denomina como pensamientos. Los cinco pensamientos que exponen son: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistema de medida, pensamiento aleatorio y sistema de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Dentro de este proyecto se trabajó el pensamiento numérico y sistema numérico y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. A continuación, se presentan de los conocimientos básicos establecidos por el MEN, algunos procesos sobre los dos pensamientos antes mencionados:

En el Pensamiento Numérico y los sistemas numéricos, se considera: (MEN, 1998).

Sobre estos pensamientos, se otorgan una serie de características que lo identifican:

a) Representar la numerosidad de las magnitudes a través de diversos medios y sistemas de representación.
b) Razonar con y sobre los números con el propósito de identificar, argumentar y justificar sobre: relaciones, operaciones, propiedades, procedimientos y resultados.
c) Comunicar ideas con y sobre los números, sus relaciones, sus operaciones.
d) Formular y ejercitar procedimientos para operar, transformar y relacionar cantidades con el propósito de estudiar tipos de variación y covariación entre cantidades (lineal, exponencial, logarítmica).

Para el Pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: (MEN, 1998).

a) Representar procesos de variación y cambio de cantidades en el marco de eventos-personales, profesionales, sociales, científicos- usando diferentes sistemas de representación.
b) Razonar sobre el cambio, la variación, la covariación, lo indeterminado y los sistemas de relaciones en diversidad de situaciones.
c) Comunicar ideas relacionadas con el cambio, la variación, la covariación, la generalización, por medio de diversas representaciones.

d) Proponer, analizar y reconocer diversos procedimientos para producir representaciones de fenómenos de variación y cambio, para transformar dichas representaciones de acuerdo a las reglas propias de cada sistema de representación.

Dificultades en la resolución de problemas.

Socas (1997) expone que en el trabajo que realizan los estudiantes en aula de matemáticas, emergen diferentes dificultades dentro del macro y microsistema educativo, pero, es en este segundo, donde se destaca el estado de compresión que tiene el estudiante de los objetos matemáticos. Estas dificultades se presentan como errores de carácter procedimental que surgen en los procesos de resolución de problema y ponen en manifiesto el estado cognitivo en el que se encuentra el estudiante.

En este proyecto se asume como una de las dificultades los obstáculos epistemológicos o errores que cometen los estudiantes en los procesos o estrategias de particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, verificar una solución en la resolución de problemas.

Los obstáculos epistemológicos son entendidos como las barreras, limitaciones o impedimentos que posee un niño para la resolución de problemas. En términos de Bachelard (2000), los obstáculos epistemológicos se dividen en cinco categorías:

a) Los conocimientos previos que tiene un estudiante sobre un objeto matemático, estos conocimientos influyen en las limitaciones sobre el significado que da el estudiante al objeto matemático. Se subdivide en tres cualidades: las concepciones espontaneas, estas se constituyen en la experiencia sensorial que tienen los niños sobre el mundo y los hechos de su vida cotidiana, las concepciones aducidas, concepciones que se crean en la socialización de un estudiante sobre sus contextos próximos (familia, escuela, amigos, entre otros), y las concepciones analógicas, entendidas como las comparaciones que hace un estudiante de conceptos matemáticos con su cotidianeidad.

b) El obstáculo verbal, el cual se presenta cuando un estudiante busca explicar un concepto por medio del uso de una palabra o grafía.
c) El conocimiento general, este se presenta cuando un estudiante busca generalizar un concepto (dar significado a un objeto matemático), pero, se olvidan características esenciales para la generalización, dando como resultado generalizaciones ambiguas.
d) Conocimiento pragmático y utilitario, es la reducción de un concepto sobre su utilidad o beneficio.
e) Obstáculo animista, por medio de los fenómenos biológicos se busca explicar las características de un fenómeno físico.

Guía de reconocimiento de objetos y significados (GROS).

Castro et al. (2011), proponen la guía de reconocimiento de objetos y significados (GROS) y la definen como una herramienta que permite vislumbrar, por medio de los objetos matemáticos y los significados de estos, los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema matemático.

Esta guía, en términos de Castro et al. (2011), permite:

> Identificación de los tipos de objetos o entidades primarias referidas, puestas en juego en la solución del problema, agrupadas en los siguientes tipos: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas), conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades (enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba) y argumentos (justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas) (p. 77).

Dentro de las cinco entidades primarias que se exponen en la GROS, se implementa los elementos lingüísticos y los procedimientos para dar muestra de los significados que el estudiante le otorga al objeto matemático y describir como se manifiestan las dificultades que poseen los estudiantes en la resolución de problemas.

CAPÍTULO III

Metodología

En este capítulo se informa acerca de la metodología implementada en el proyecto y el método utilizado para realizar los análisis de los problemas resueltos por los estudiantes. El estudio lo centramos en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo (Sampieri, Collado y Lucio, 2006). Desde esta óptica, el proyecto en este enfoque elabora una descripción del problema, en este caso, como se manifiestan las dificultades en la resolución de problemas referido a los pensamientos numérico y variacional, en los estudiantes de grado séptimo de la IE Andrés Bello, haciendo énfasis en los diferentes contextos y los procesos que desarrollan, así mismo, "determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción" (Godino y Batanero, 1994, p. 2)

En la investigación cualitativa, el investigador debe realizar el estudio de forma inductiva con el objetivo de identificar cual será la problemática a estudiar. Se busca que el investigador bajo el paradigma cualitativo se introduzca en el contexto a estudiar con el motivo de interactuar, explorar y descubrir los datos referidos al estudio, donde estos datos son no estandarizados y además se obtenga detalle de las expresiones, motivos, sentimientos de los participantes investigados (Sampieri et al. 2006).

La recolección de datos en la investigación cualitativa no se desarrolla como un proceso lineal, al ser una investigación no consecutiva permite al investigador tomar datos en la exploración e ir acomodando la pregunta orientadora con el objetivo de dar respuesta a los objetivos de investigación. Además, el investigador al realizar procesos de observación y análisis, está realizando captación de datos lo cual es una característica de la investigación cualitativa, pues al no ser estructurada la recolección de datos permite que el investigador realice toma de estos, al mismo tiempo que se realizan los análisis de ellos. En palabras de Sampieri et al. (2006):

> No hay momentos en el proceso donde podamos decir: aquí terminó ésta etapa y ahora sigue tal etapa. Al ingresar al campo (ambiente, contexto o escenario), por el simple hecho de observar que ocurre en él, estamos recolectando y analizando datos, y durante esta labor, la muestra puede ir ajustándose. Muestreo, recolección y análisis resultan actividades casi paralelas (p. 582).

Para la captación de información (datos) se realizaron problemas y discusiones entre los estudiantes, lo que permitió evidenciar cuales eran las dificultades que presentaban cuando resolvían problemas referidos a los pensamientos: numérico y variacional.

El investigador cualitativo realiza los análisis después de la captación de información por medio de la observación de la unidad de análisis, Sampieri et al. (2006), argumentan que dentro de la investigación cualitativa los análisis:

> Por lo general, no se inicia con ideas preconcebidas sobre cómo se relacionan los conceptos o variables, una vez reunidos todos los datos verbales, escritos y/o audiovisuales, se integran en una base de datos compuesta por texto y/o elementos visuales, la cual se analiza para determinar significados y describir el fenómeno estudiado desde el punto de vista de sus actores. Se integran descripciones de personas con las del investigador (p. 15).

De acuerdo a lo anterior, las características que permite analizar la investigación cualitativa en relación con lo expuesto por Godino et al. (2007) sobre el EOS, los cuales indican que este integra los distintos pensamientos asociados a la resolución de problemas, en tanto se exige precisar argumentos que justifiquen los procesos y la validez de las soluciones obtenidas, la investigación cualitativa da herramientas al investigador para evidenciar los procesos y validez mencionados anteriormente que emergen en la resolución de problemas.

Los problemas propuestos a los estudiantes se enmarcan dentro de lo que Cohen, Manion & Morrison, (2007); Goetz & LeCompte (1988) llaman validez. La validez se entiende como la veracidad de una investigación cuantitativa o cualitativa. De acuerdo con Cohen et al. (2007) y Soneira (2006), es necesario hacer máxima la explicación y comprensión de un fenómeno con el mínimo de conceptos y formulaciones.

Además, Cohen et al. (2006) citando a Maxwell (1992), expone que, en la investigación cualitativa, hay cinco categorías de validez: descriptiva, interpretativa, teórica, generalización y evaluativa. Dentro de estas cinco categorías, este proyecto se sitúa en la validez interpretativa y validez teórica, la primera entendida como la capacidad de la investigación para captar el significado, interpretaciones, términos, intenciones de las situaciones y eventos; la segunda entendida como la medida en que la teoría de la investigación aporta y soporta los análisis de los resultados obtenidos.

En el proyecto se hace un análisis cualitativo de los datos recolectados; los cuales constituyen la esencia en el análisis de la resolución de problemas realizados por los estudiantes, cuando se enfrentan a dar solución a problemas como situaciones difíciles y contextualizadas. Se examinaron los procesos de particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, verificar una solución, donde se tendrán en cuenta los elementos lingüísticos y procedimientos (objetos primarios), y, además, la faceta ostensiva / no ostensiva (Godino et al., 2007), con el fin de analizar las dificultades en la resolución de problemas en los estudiantes intervenidos de grado séptimo.

En el proyecto se busca analizar, describir e interpretar las dificultades que manifiestan los estudiantes en la resolución de problemas, ya sea discursivamente o en los procedimientos implementados, interpretar los fenómenos a través de los significados producidos por la experiencia de los participantes (Sampieri et al., 2006). En este caso en particular, los estudiantes de grado séptimo de la IE Andrés Bello.

El proyecto entrelaza la descripción de los eventos con el análisis de éstos, destaca las acciones más relevantes y se esfuerza por representar "lo que es", lo que sucede en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para tomar en primer plano la realidad de los hechos (Cohen et al., 2007).

El enfoque interpretativo, busca explicar, comprender e interpretar los significados de los procedimientos, las argumentaciones, representaciones y percepciones de los estudiantes durante las clases y la solución que éstos dan a los problemas matemáticos. Además, la herramienta utilizada para interpretar y analizar las respuestas dadas por los estudiantes será la guía GROS, la cual se fundamenta sobre el EOS.

Diseño del proyecto

La investigación se realiza en tres fases durante cuatro semestres de la práctica pedagógica, éstas corresponden al reconocimiento del contexto, el diseño de la intervención en el aula y la sistematización del informe; las cuales se describen a continuación.

Fase 1. Reconocimiento Institucional.

En el I semestre de la práctica pedagógica (semestre 2016– 2) se hace un reconocimiento del contexto Institucional, a través del análisis del Plan de área de matemáticas, el Proyecto Educativo Institucional (PEI), los resultados de las Pruebas Saber de los grados quinto de básica primaria y noveno de básica secundaria en los dos últimos años, algunas observaciones de clases, diálogo con la maestra cooperadora y revisión bibliográfica para soporte del proyecto. Finalizando el semestre se aplicaron algunas pruebas diagnósticas referidas a la resolución de problemas con el propósito de analizar las soluciones que daban y lograr identificar las dificultades y plantear el problema de investigación.

Fase 2. Diseño de la intervención en el aula.

En esta fase se diseñan y aplican diversos problemas asociados a la resolución de problemas el I y II semestre de la práctica pedagógica (semestres 2017 – 1 y 2017– 2), tomando como referencia los Estándares Básicos de Competencia Matemáticas para este grupo de grados (6° y 7°) y la fundamentación teórica sobre el EOS, la resolución de problemas y la GROS. Para la implementación de los problemas se tuvo en cuenta la validez en términos de Cohen et al. (2007).

Fase 3. Análisis y sistematización del informe.

Durante el último semestre de la práctica pedagógica (semestre 2018 – 1) se hizo el análisis de la resolución de los problemas planteados a los estudiantes, tomando como producto para el análisis las respuestas dadas, además, se tomaron como referencia los problemas que correspondieran al currículo institucional de acuerdo a los periodos académicos.

Análisis de información.

En esta apartado, se presentan los análisis de la fase 3 de este proyecto.

El EOS favorece circunscribir la práctica matemática al estudio de diferentes tipos de entidades (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) (Font, Godino y D'Amore, 2007), al igual implica considerar los niveles de objetos que emergen de dicha práctica, en el primer nivel se encuentran entre otros los problemas, los conceptos y en el segundo la tipología de objetos que emerge de las diferentes maneras tanto discursivas como operacionales sobre los objetos (Godino y Batanero,1994).

La GROS por su parte, permite indagar sobre los procesos de resolución de problemas para identificar y analizar los procedimientos de particularizar, el elegir un apropiado, probar una conjetura, generalizar y verificar una solución, para así encontrar las dificultades que manifiestan los estudiantes en la resolución de problemas.

A continuación, se presentan los análisis de cinco de los problemas resueltos por los estudiantes.

Problema 1: Dados.

Tres dados están colocados el uno sobre el otro como lo muestra la figura 14:

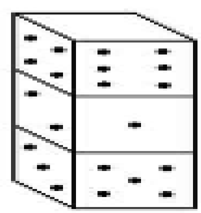


Figura 14. Problema sobre dados.

Preguntas:

a) Según la figura 14 ¿Cuál es el valor máximo que pueden sumar los puntos de las caras que se tocan al poner un dado sobre otro? ¿Cuál es el mínimo valor? Justifique.

Equipo 1:

En la figura 15 se presenta la respuesta que obtuvo el equipo 1 a la pregunta *a* del problema 1.

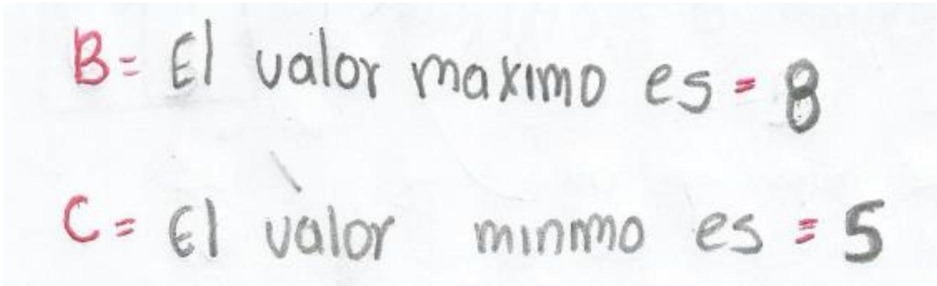


Figura 15. Respuesta obtenida por el equipo 1 de la pregunta *a*.

Se presenta el análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por los estudiantes al resolver el problema de los *Dados.*

Tabla 3.
Identificación de procedimientos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Valor máximo.	Si se suman los valores de las caras de los dados que uno a uno se superponen, se obtiene como resultado el valor máximo.
Valor mínimo.	Si se suman los valores de las caras de los dados que uno a uno se superponen, se obtiene como resultado el valor mínimo.
Variación.	Identificar los valores posibles que pueden tomar las caras desconocidas de los dados. Identificar las descomposiciones posibles de los sumandos en los valores mínimos y máximo.

Análisis del problema 1 según la tabla 3. Comentarios de los procedimientos.

En la figura 15 se muestra que los estudiantes logran hacer sumas del valor de las caras de los dados que se superponen de la siguiente forma:

Suma 1: $5 + 3 = 8$

Suma 2: $2 + 3 = 5$ ó $4 + 1 = 5$

Lo anterior evidencia que los estudiantes logran completar los valores que le faltan a los dados abstrayendo la información que se les presenta en la figura 14.

Respecto el valor máximo y el valor mínimo que los estudiantes encontraron, no son los valores correspondientes al problema. Los estudiantes debieron realizar la suma de las siguientes formas:

Suma 1: $6 + 4 = 10$. Valor que corresponde al máximo valor que pueden sumar las caras superpuestas de los dados.

Suma 2: $3+1 = 4$. Valor que corresponde al mínimo valor que pueden sumar las caras superpuestas de los dados.

El no encontrar el valor máximo y mínimo planteado por el problema, se presenta debido a que los estudiantes (aunque logran abstraer información de los datos que se presentan en el problema), no particularizan las sumas que se pueden realizar con los valores que toman las caras de los dados.

Por otro lado, los estudiantes no realizan un proceso de justificación por el cual manifiesten cómo encontraron los valores anteriormente expuestos y porqué encontraron estos valores, esto puede interpretarse como una falta de un lenguaje apropiado para justificar las soluciones con respecto a los resultados obtenidos.

Tabla 4.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Justifica.	Realizar las operaciones pertinentes.

Análisis del problema 1 según la tabla 4. Comentarios de los elementos lingüísticos.

El grupo de estudiantes no realiza un proceso de análisis que permita describir el conocimiento matemático correspondiente con las prácticas manifestadas en la solución del problema, no encuentran relaciones o conexiones para hallar los valores máximo y mínimo requeridos en el problema, lo que permite interpretar que los estudiantes poseen dificultades en la realización de procesos de justificación.

Problema 2: Competencia de cometas.

En un concurso de elevación de cometas, Jaime del grado noveno compite contra Andrea del grado séptimo, la cometa de Jaime se eleva a 3 metros por cada 10 kilómetros por minuto que es la velocidad del viento y Andrea se hace en un punto del terreno de competencia de tal forma que la cometa se eleva a $2\frac{4}{2}$ metros por cada 8 kilómetros por minuto que es la velocidad del viento.

Preguntas:

a) Construye una tabla de valores que de evidencia del comportamiento de la cometa de Jaime y de Andrea al cabo de 10 minutos.

b) ¿Cuál de los dos competidores gana la competencia? Justifica.

c) ¿Cuántos metros de pita utilizó cada uno de los competidores? Justifica.

Equipo 2:

En la figura 16 se presenta la tabla de valores construida por el equipo 2 referente al punto *a*.

metros	0	$2\frac{4}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{16}{2}$	$\frac{32}{2}$	$\frac{64}{2}$	$\frac{128}{2}$	$\frac{256}{2}$	$\frac{512}{2}$	$\frac{1024}{2}$	2048
minuto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Figura 16. Tabla de valores construida por el equipo 2 sobre el punto *a*.

Se presenta el análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por el equipo 2 al resolver el problema *competencia de cometas*.

Tabla 5
Identificación de procedimientos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Fracciones mixtas.	Se multiplica la parte entera de la fracción por el numerador.
Construye una tabla de valores.	Se relacionan las magnitudes *minutos* y *metros*.

Análisis del problema 2 según la tabla 5. Comentarios de los procedimientos.

Los estudiantes relacionan la fracción mixta $2\frac{4}{2}$ (la cual relaciona los metros recorridos por la cometa en 1 minuto), luego transforman la fracción en $\frac{8}{2}$ y la relacionan con los metros recorridos por la cometa en 2 minutos. Además, en la construcción de la tabla, los estudiantes toman la fracción $\frac{8}{2}$ para identificar los metros recorridos por la cometa según la variación de los minutos. En la figura 16 se evidencia la forma en que los estudiantes construyen la tabla haciendo uso de la fracción $\frac{a}{2}$, donde *a* representa múltiplos del número 2 desde 8 hasta el 1024. Cuando encuentran el múltiplo 2048 que corresponde a 10 minutos, no lo representan de la forma $\frac{a}{2}$ como los números antecesores, sino, como un número natural. Lo anterior puede describirse como si en la construcción, tratamiento y conversión de los diferentes registros de representación que permiten manipular lo desconocido, los estudiantes no encuentran un contexto analítico que les permita identificar relaciones y argumentos para validar los procedimientos realizados en la construcción de la tabla (figura 16). También, puede interpretarse que la no identificación como equivalentes a las facciones $2\frac{4}{2}$ y $\frac{8}{2}$, conlleva la realización de una construcción inexacta de la tabla.

Los estudiantes no presentan una forma de razonamiento ni algebraica ni aritmética, ya que poco centran la atención en la forma en que aparecen los términos a partir de $2\frac{4}{2}$ y su relación con la variable tiempo, además, poco advierten sobre similitudes y diferencias en la secuencia, lo cual, indica la dificultad en el proceso de generalización numérica.

El uso que dan los estudiantes a los objetos matemáticos pone en evidencia dificultades sobre la configuración cognitiva, el significado que otorgan los estudiantes a los objetos matemáticos emergentes (fracciones mixtas, fracciones equivalentes, progresiones geométricas) lleva a que realicen procesos de generalización y particularización no adecuados.

En la figura17 se presenta la respuesta obtenida por el equipo 2 de la pregunta b.

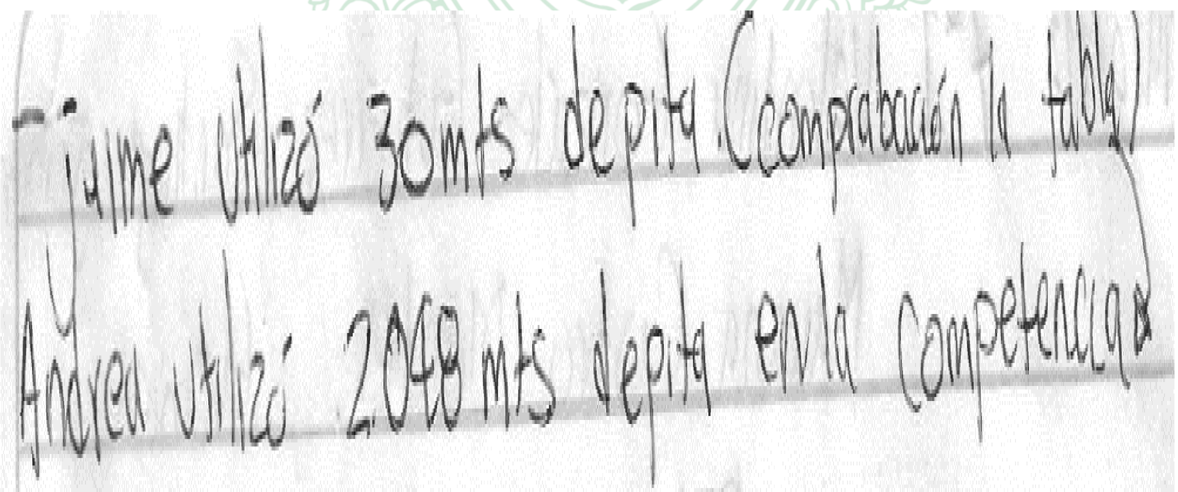


Figura 17. Respuesta obtenida por el equipo 2 a la pregunta *b*.

Tabla 6

Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
¿Cuál de los competidores gana la competencia?	Presentan los resultados del cálculo realizado.
Metros.	Medida utilizada para expresar la cantidad de pita gastada.
Comprobación.	Realización de la tabla.

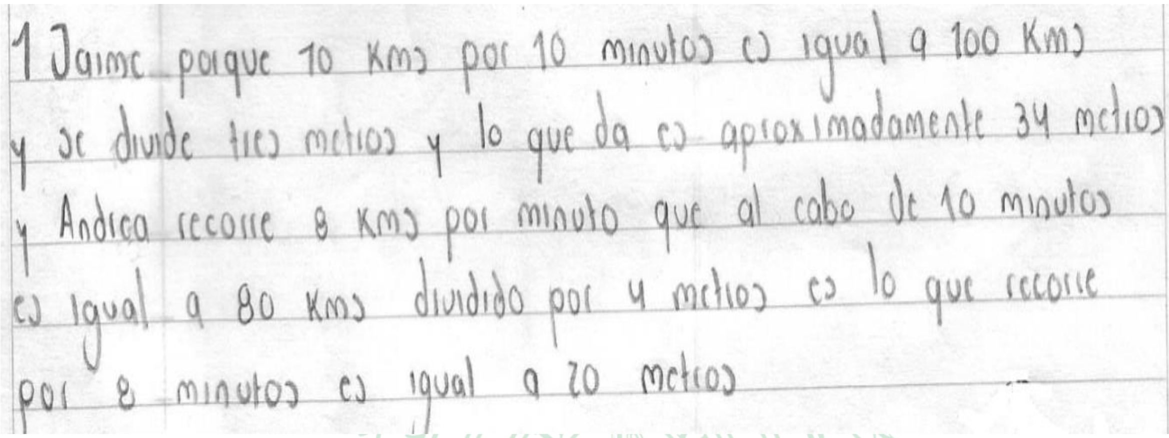
Análisis del problema 2 según la tabla 6. Comentarios sobre los elementos lingüísticos.

El lenguaje utilizado por el equipo 2, es básicamente referente al uso simbólico de las fracciones, se puede describir que para los estudiantes las fracciones $2\frac{4}{2}\ y\ \frac{8}{2}$ no son equivalentes, lo que lleva al número 2048, permitiendo interpretar que los estudiantes no realizan reflexiones acerca de las cantidades intervinientes en el problema, teniendo como resultado la construcción de la tabla de la figura 16.

Lo anterior significa que los estudiantes presentan dificultades para desarrollar conexiones adecuadas, determinar el orden, la equivalencia y juzgar si las respuestas son o no razonables, Lamon (2012) al respecto, indica que los estudiantes presentan dificultades para discernir sobre las cantidades apropiadas y para darle sentido a lo que está sucediendo en la solución del problema.

Equipo 3:

En la figura 18 se presenta la respuesta obtenida por el equipo 3 sobre la pregunta b.



1 Jaime porque 10 Kms por 10 minutos es igual a 100 Kms y se divide tres metros y lo que da es aproximadamente 34 metros y Andrea recorre 8 Kms por minuto que al cabo de 10 minutos es igual a 80 Kms dividido por 4 metros es lo que recorre por 8 minutos es igual a 20 metros

Figura 18. Respuesta del equipo 3 a la pregunta b.

Referente al concepto relacional de km/min, parece que los estudiantes poco observan la conservación de la relación, lo cual se evidencia en la forma en que la misma es transformada al realizar la multiplicación de las magnitudes heterogéneas. En cuanto a los números racionales, se focalizan en la forma que es presentada la información del problema, reflejada en la figura 18, lo cual le permite al equipo realizar un trabajo poco sistemático referido al carácter relativo de las fracciones, esto es, no logran percibir relaciones cuantitativas entre magnitudes.

La justificación del equipo 3 permite describir que multiplicando 10×10 no se multiplican kms por minutos ¿por qué se obtendrán entonces kms? Se interpreta que el equipo presenta una dificultad al dilucidar la noción de correspondencia y sobre los significados de los procedimientos, en los cuales subyacen o emergen elementos no ostensivos, como la noción de razón (km/min).

Tabla 7
Identificación de lenguaje.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Por.	Representa la operación multiplicación.
Por minuto que al cabo de…	Representa el producto entre dos magnitudes.
Y se divide tres metros.	División de un resultado entre 3.
Divido por 4 metros es lo que recorre por 8 minutos.	Multiplicación de kilómetros por minutos para luego ser dividida.

Análisis del problema 2 según la tabla 7. Comentarios de los elementos lingüísticos.

Se observa que el significado que los estudiantes le otorgan a los objetos matemáticos (metros, kilómetros, producto), que subyacen al problema no es adecuado, lo anterior se confirma cuando el equipo 3 interpreta 10 kilómetros por minuto e identifican la palabra *por* como el operador de la multiplicación, lo cual es un proceso no apropiado frente a la relación de proporción entre la distancia recorrida por la cometa y la variabilidad del tiempo.

Por otro lado, la implementación de las magnitudes se hace de una forma tal, que tratan las expresiones kilómetros y metros como unidades que representa la misma cantidad, lo cual se ve reflejado en el lenguaje implementado en la justificación que realizan los estudiantes: *porque 10 kilómetros por 10 minutos es igual a 100 kilómetros y se divide 3 metros y lo que da es aproximadamente 34 metros.*

Lo anterior pone en manifiesto un problema sobre la implementación de expresiones matemáticas, esto se refleja en el lenguaje, en la adquisición del conocimiento y la manera de llevar a implementar los planteamientos matemáticos, lo que presenta como resultado una serie de dificultades de carácter cognitivo, en el sentido que los estudiantes no avancen en la construcción y comprensión de un determinado objeto matemático, reflejándose en el significado que le dan a dicho objeto (términos y expresiones matemáticas).

Tabla 8
Identificación de procedimientos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
10 kilómetros ***por*** 10 minutos es igual a 100 kilómetros…	El por permite multiplicar kilómetros y minutos para dar como resultados una de las magnitudes.
10 *kilómetros*… y se divide entre tres *metros*…	Se puede realizar una división entre dos magnitudes longitudinales de diferente escala sin realizar una conversión previa.

Análisis del problema 2 según la tabla 8. Comentarios de los procedimientos.

En el procedimiento implementado por los estudiantes se presenta que, (aunque la solución de las operaciones básicas es correcta) emerge un obstáculo epistemológico sobre conocimientos previos (Bachelard, 2000), cuando los estudiantes identifican la palabra *por* como una multiplicación entre magnitudes y no como una razón o relación entre éstas, dando a la palabra *por* un significado limitado dentro del problema.

También, en el uso que dan los estudiantes a las magnitudes *metros* y *kilómetro*, se presenta que, al no identificar la diferencia de longitud entre estas, lleva a que realicen las operaciones básicas obviando la relación entre magnitudes, presentándose una dificultad de carácter epistemológico reflejado en el entendimiento que tienen los estudiantes sobre los objetos matemáticos metros y kilómetros.

$$\frac{10\ \boldsymbol{kil\acute{o}metros}\ *10\ minutos}{3\ \boldsymbol{metros}} \approx 34$$

Es evidente que los conflictos que presentan los estudiantes en la resolución de problemas, están directamente relacionados con el significado que otorgan a los términos y expresiones (por, metro, kilometro), lo cual se interpreta al no identificar las relaciones entre las magnitudes presentadas en el problema.

Cuando se analiza la correspondencia que se presenta en la dualidad ostensiva – no extensiva con los elementos lingüísticos y procedimientos, sobre las respuestas de los estudiantes en la resolución de problemas, se observa como los elementos no ostensivos que emergen (por ejemplo, referente a las expresiones metro, kilometro y por) irrumpen dificultades de carácter cognitivo sobre el significado que los estudiantes dan a los objetos matemáticos, teniendo como fuente de expresión los elementos lingüísticos y los procedimientos (Godino, 2002).

Las dificultades de carácter cognitivo antes mencionadas son el foco por la cual los estudiantes tienen problemas en los procedimientos o estrategias de particularizar, verificar una solución y elegir un lenguaje apropiado, también podría interpretarse que la dificultad puede ser debido al uso de unidades que involucra el problema.

Problema 3: Chocolatinas repartidas.

Juliana, Sofía y Daniel decidieron ir a una nueva dulcería localizada en el parque de su barrio. Los tres amigos decidieron comprar unas chocolatinas que vendían en el lugar. Ellos decidieron repartir las chocolatinas de acuerdo con la cantidad de dinero que cada uno aportó. Cada chocolatina tenía un costo de $1200.

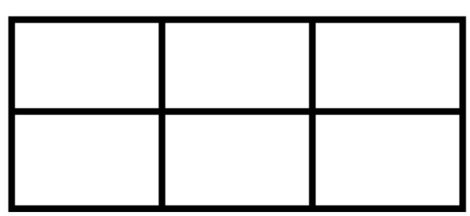
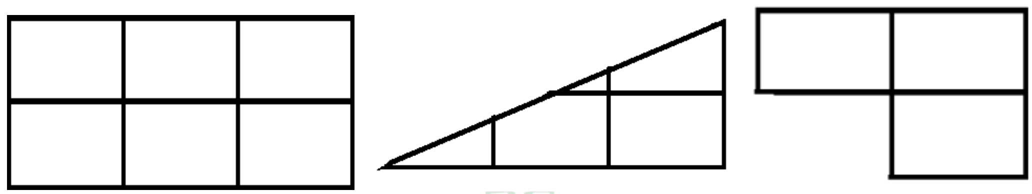


Figura 19. Representación pictórica del problema.

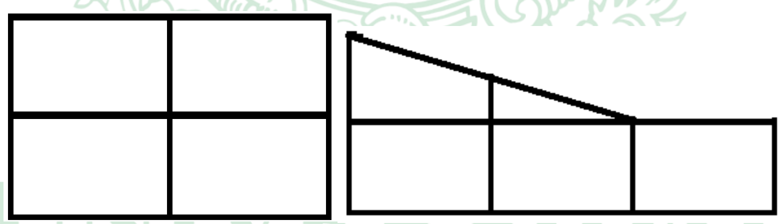
A continuación, se muestra los pedazos de chocolatina que le corresponden a cada amigo:

Juliana:



Daniel:

Sofía:



Preguntas:

a) En total compraron 5 chocolatinas, ¿Cuáles es la fracción que representa numéricamente cada pedazo de chocolatina que le corresponde a Daniel, Juliana y Sofía?

b) Aproximadamente, ¿Cuántas chocolatinas compró cada amigo? y ¿quién aportó más dinero? Justifica tu respuesta.

Equipo 4:

En la figura 20 se muestra la respuesta que da el equipo 4 a la pregunta *a* del problema 3:

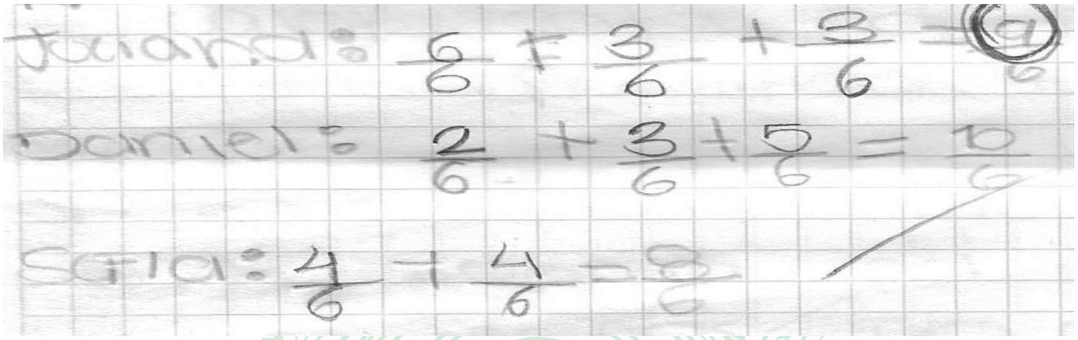


Figura 20. Respuesta del equipo 4 a la pregunta *a*.

Análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por el equipo 4 al resolver el problema *chocolatinas repartidas*.

Tabla 9.
Identificación de procedimientos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Suma de fracciones homogéneas.	Para sumar fracciones homogéneas, en la fracción resultado se deja el mismo denominador y se suman los numeradores.

Análisis del problema 3 según la tabla 9. Comentarios de los procedimientos.

Se manifestó que las sumas de las fracciones homogéneas para encontrar la cantidad de chocolatina que le corresponden a Sofía y Daniel, si corresponde al significado que los estudiantes otorgan al objeto matemático *suma de fracciones*, pero, en la suma que realizan para encontrar la cantidad de chocolatina que le corresponde a Juliana, hay un error de tipo procedimental; al parecer los estudiantes olvidan sumar la fracción $\frac{3}{6}$ con $\frac{3}{6}$ y $\frac{6}{6}$, realizando la suma de la siguiente forma:

$$\frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{9}{6}$$

Por otro lado, el equipo 4 da respuesta a la pregunta b de la siguiente forma:

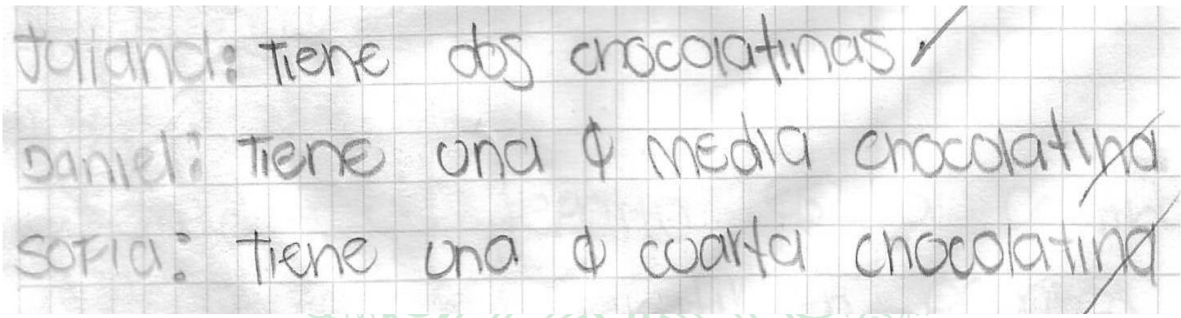

Juliana: Tiene dos chocolatinas
Daniel: Tiene una y media chocolatina
Sofia: tiene una y cuarta chocolatina

Figura 21. Respuesta del equipo 4 a la pregunta *b*.

Tabla 10.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Tiene *dos* chocolatinas. Tiene *una y media*… Tiene *una y cuarta*…	Correspondencia entre la representación de la cantidad de chocolatinas de forma gráfica, la representación verbal y la representación numérica. Cantidad de chocolatinas que le corresponde a cada personaje del problema.

Análisis del problema 3 según la tabla 10. Comentarios de los elementos lingüísticos.

Al comparar las respuestas que obtienen el equipo 4 en las preguntas a y b, se evidencia que presentan problemas en el manejo del lenguaje simbólico o un conflicto semiótico debido a la discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por los estudiantes y por las instituciones, lo cual es perceptible al realizar la relación entre la representación numérica y simbólica de una misma cantidad, es decir, no son conscientes al asignar la correspondencia entre los datos del problema con la identificación de los símbolos utilizados, lo cual se puede interpretarse como la falta de idoneidad epistémica de los estudiantes frente al significado de referencia del objeto *suma de fracciones homogéneas.*

Por otra parte, el equipo 4 en la respuesta que da a la pregunta a, afirman que a Juliana le corresponde un total de $\frac{9}{6}$ de chocolatina, lo cual entra en conflicto con la respuesta que dan a la pregunta b, donde afirman que a Juliana le corresponde 2 chocolatinas. En este punto se presenta que los estudiantes no identifican la correspondencia de representación de un objeto matemático desde diferentes expresiones: el lenguaje verbal y el simbólico, en este caso la forma numérica, simbólica y lenguaje común; lo anterior permite interpretar que el error puede ocurrir al no comparar los resultados que obtienen en los ítems a y b, lo cual acentúa una dificultad en la verificación de la solución cuando se resuelven problemas.

En la pregunta a, el equipo manifiestan que a Daniel y Sofía les corresponde $\frac{10}{6}$ y $\frac{8}{6}$ de chocolatina respectivamente, pero, en la respuesta de la pregunta b, indican que a los dos personajes les corresponde *una y media y una y cuarta* partes de chocolatina.

Los elementos ostensivos que utiliza el equipo para representar cantidades, pone de manifiesto que no identifican la correspondencia de igualdad entre éstas, tal comportamiento genera la emergencia de conflictos en el reconocimiento de propiedades de representación de un objeto matemático desde diferentes expresiones, lo cual se circunscribe en los procesos cognitivos.

Lo anterior permite resaltar dificultades en los procesos de particularización y verificación de una solución cuando se resuelven problemas de tipo matemático.

Equipo 5:

En la figura 22 se presenta el procedimiento implementado por el equipo 5 para dar respuesta a la pregunta *a* y *b* sobre la cantidad de chocolatina que le corresponde a *juliana*.

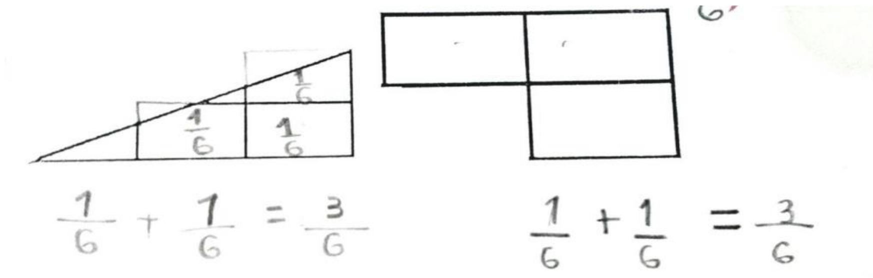


Figura 22. Procedimiento implementado por el equipo 5 para dar respuesta la pregunta *a* y *b*.

El análisis de la respuesta dada por el equipo 5 se realiza por medio de la tabla 9, ya que, aunque concede el mismo significado para el procedimiento de la suma de fracciones homogéneas, emerge otra dificultad. A continuación, se presenta la interpretación y análisis.

Análisis del problema 3 según la tabla 9. Comentarios de los procedimientos.

Aunque la respuesta dada por el equipo 5 respecto a la cantidad de chocolatinas que le corresponde a Juliana es correcta, en el algoritmo suma de fracciones homogéneas cometen una inexactitud al decir $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, =\frac{3}{6}$. Aunque los estudiantes del equipo 5 logran representar las cantidades en las que se reparte las chocolatinas como fracciones, procedimentalmente parecen no identificar los conceptos matemáticos en situaciones concretas.

Se puede interpretar que, al cambiar la forma de representación pictórica de las secciones en la barra de chocolatina, puede aumentar el nivel de dificultad, esto permite identificar un obstáculo tanto en la aplicación de los algoritmos, como en las relaciones que se entretejen entre la representación gráfica y la numérica.

Problema 4: Atrapa los ratones.

Después de realizar exitosamente la limpieza de ratones en el centro comercial, una agencia fue contratada por una empresa para acabar con la plaga de ratones que ésta tiene. La empresa calcula que hay aproximadamente 300 ratones en toda su planta. A pesar que 2 gatos pueden atrapar 5 ratones en 10 minutos, es posible que atrapen menos o más ratones, pero para hacer las cuentas, aceptaremos estos datos:

a) La agencia determinó que dos gatos casan cinco ratones cada 10 minutos.

b) Además, la agencia calcula que cuando utilizan a un gato para atrapar ratones, este tiene un costo de 20000 pesos por cada 60 minutos (Esto es porque cada gato necesita cuidado veterinario, alimentación y salubridad) y cada ratón atrapado es pagado a 6300 pesos.

Preguntas:

a) Aproximadamente ¿Cuánto tiempo se demoran 4 gatos para atrapar los 300 ratones? y ¿Cuánta es la ganancia de la empresa? Justifica tu respuesta.

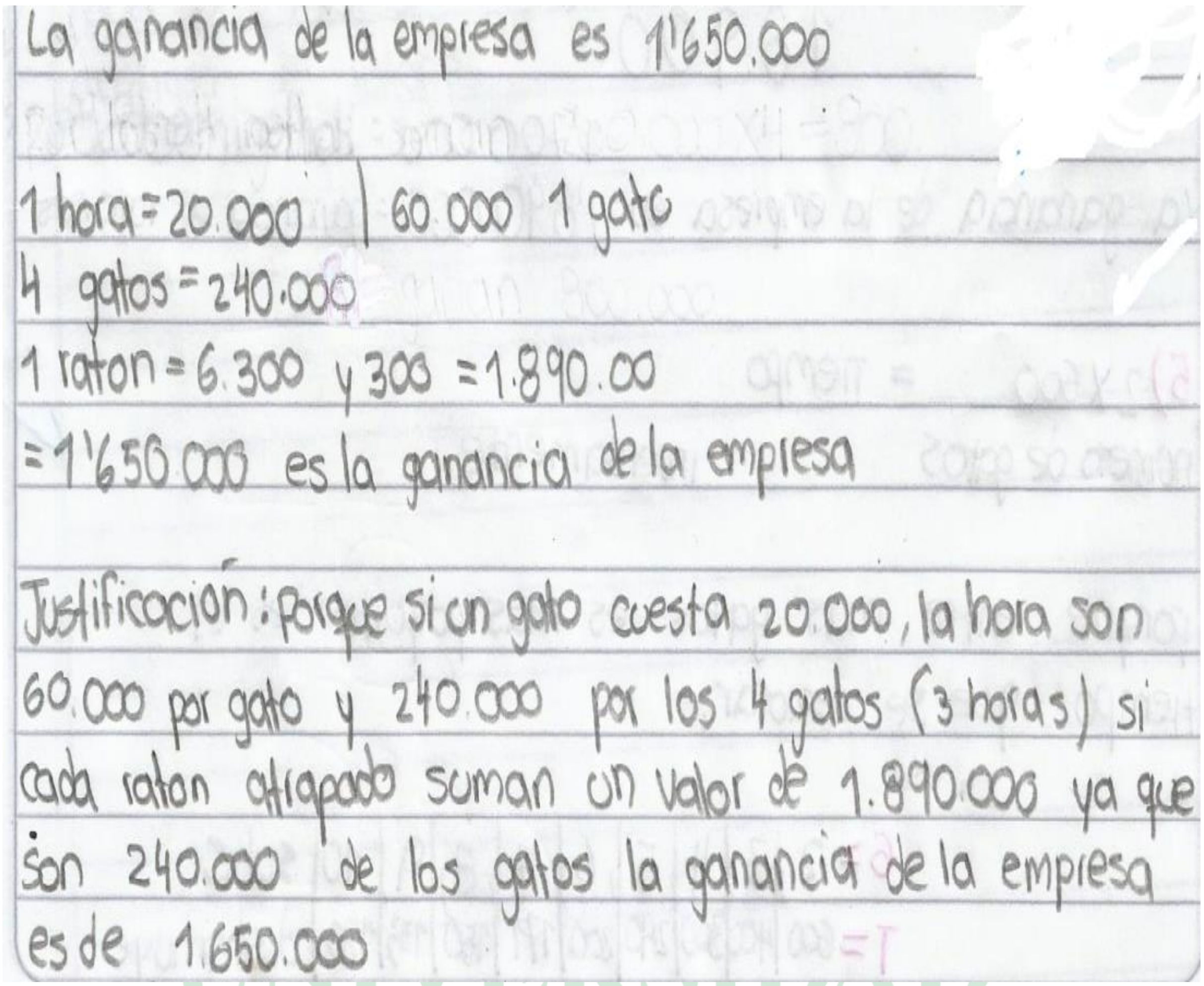
b) Aproximadamente ¿Cuánto tiempo se demoran 7 gatos para atrapar los 300 ratones? y ¿Cuánta es la ganancia de la empresa? Justifica tu respuesta.

c) Aproximadamente, ¿Cuánto tiempo se demoran 17 gatos para atrapar 300 ratones? y ¿Cuánta es la ganancia de la empresa? Justifica tu respuesta.

d) La agencia quiere saber si obtiene las mismas ganancias a atrapar los 300 ratones utilizando 2 gatos, 3 gatos, 4 gatos, 5 gatos, etc. ¿Es posible que siempre se esté ganando el mismo valor? Justifica tu respuesta.

Equipo 6:

En la figura 23 se presenta el procedimiento y justificación implementado por el equipo 6 para dar respuesta a la pregunta *a*.



La ganancia de la empresa es 1'650.000

1 hora=20.000 | 60.000 1 gato
4 gatos = 240.000
1 raton = 6.300 y 300 = 1.890.00
= 1'650.000 es la ganancia de la empresa

Justificación: porque si un gato cuesta 20.000, la hora son 60.000 por gato y 240.000 por los 4 gatos (3 horas) si cada raton atrapado suman un valor de 1.890.000 ya que son 240.000 de los gatos la ganancia de la empresa es de 1.650.000

Figura 23. Respuesta obtenida por el equipo 6 para contestar la pregunta *a*.

Análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por el equipo 6 al resolver el problema *atrapa los ratones.*

Tabla 11.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Un gato cuesta 20000…	Costo de un gato en una hora.
La hora son 60000.	En total, 1 gatos tiene un costo de 60000 por trabajar 3 horas.
Si cada ratón atrapado suma un valor de 1890000.	Valor total de dinero ganado al atrapar 300 ratones.
Ya que son 240000 de los gatos…	Costo de trabajar con 4 gatos.
Si cada ratón atrapado suma un valor de 1890000 ya que son 240000 de los gatos la ganancia es de 1650000.	La ganancia de la empresa se obtiene al restar el valor del costo de 4 gatos con el total del dinero obtenido por 300 ratones.

Análisis del problema 4 según la tabla 11. Comentarios sobre los elementos lingüísticos.

La argumentación que plantea el equipo 6 al afirmar que 4 gatos tardan 3 horas en atrapar los 300 ratones está relacionada con la conjetura operacional que realizan obteniendo como resultado que la hora son 60000 por gato, lo cual contribuye a la construcción de un hecho que viene después como su conclusión: la ganancia.

Lo anterior, lleva a la identificación de conflictos en el uso del lenguaje sobre el significado dado a la variable tiempo, repercutiendo en los cálculos realizados sobre el costo de implementar 4 gatos para atrapar 300 ratones.

Por otro lado, cabe destacar que el equipo 6 realizó la construcción de una tabla presentada en la figura 24, para relacionar el tiempo *t* que tardan *g* gatos para atrapar 300 ratones.

Gato	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo	600	400	300	240	200	171	150	133	120

Figura 24. Tabla construida por el equipo 6 sobre el problema 4.

En la figura 24, se puede apreciar que los estudiantes encontraron que 4 gatos se demoran 300 minutos para atrapar los 300 ratones, pero, en las operaciones realizadas implementaron la magnitud 3 horas para realizar la solución del problema.

Uno de los obstáculos del equipo reside en el manejo inadecuado que dan a las escalas de la variable tiempo al identificar que 300 minutos son equivalentes a 3 horas (significado del asignado al objeto tiempo).

Lo anterior pone en manifiesto que los significados que otorgan los estudiantes a los objetos lingüísticos del problema, posibilita la emergencia de dificultades en los procesos y estrategias de resolución de problema, lo cual se ve reflejado en la interacción expresión – contenido (Godino, 2002).

Equipo 5:

En la figura 25 se presenta la justificación implementado por el equipo 5 para dar respuesta a las preguntas *a, b* y *c.*

-80 000, por que por un gato es 20.000 y 20.000 pos 4 gatos es 80.000

-140 000, por que por un gato es 20.000 y 20.000 por 7 gatos es 140 000

-17 se demorar en atrapar 70 aprox m y se gana la empresa 340.000

Figura 25. Respuesta obtenida por el equipo 5 para contestar la pregunta *a, b* y *c.*

Análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por el equipo 5 al resolver el problema *atrapa los ratones*.

Tabla 12.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Un gato es 20000…	Costo de cada gato en una hora.
Y 20000 por 4 gatos es 80000. Y 2000 por 7 gatos es 140000.	El costo de un gato por hora multiplicado por la cantidad de gatos da como resultado la ganancia de la empresa.
Aproximadamente 70 minutos**.**	Una hora.

Análisis del problema 4 según la tabla 12. Comentarios sobre los elementos lingüísticos.

Sobre el lenguaje que implementa el equipo 5, se evidencia que interpretan que la ganancia de la empresa depende de la cantidad de gatos que utilice, resaltándose cuando indican que "*y 20000 por 4 gatos es 80000"*, además, asumen que cualquier cantidad *g* de gatos se demorará 1 hora para capturar los 300 ratones.

Del análisis anterior, se puede resaltan tres dificultades sobre la interpretación de la información del problema:

a) Dificultades al establecer la relación entre variación del tiempo con la cantidad de gatos que implementa la empresa.
b) Dificultad al interpretar el costo de implementar una cantidad *g* de gatos como la ganancia de la misma.
c) Obvian la información del costo de los ratones.

Las dificultades presentadas muestran que los estudiantes no identifican variables que están relacionadas y no relacionan la dependencia funcional entre las variables (la relación de dependencia de las ganancias con la cantidad de ratones gastados y la cantidad de gatos usados; la relación de dependencia entre el costo de los gatos usados con la cantidad de tiempo implementado para cazar una cantidad fija de ratones).

Las dificultades anteriores tienen como consecuencias el no reconocimiento de los procesos de particularización, de igual forma, la no identificación de las relaciones que se establecen entre las variables del problema y verificar una solución.

En la respuesta que obtiene el equipo 5 del punto d, se presenta una dificultad en la generalización reflejándose en el uso que dan a las variables que hay en el problema (abajo se analiza esta dificultad). La respuesta se muestra en la figura 26.

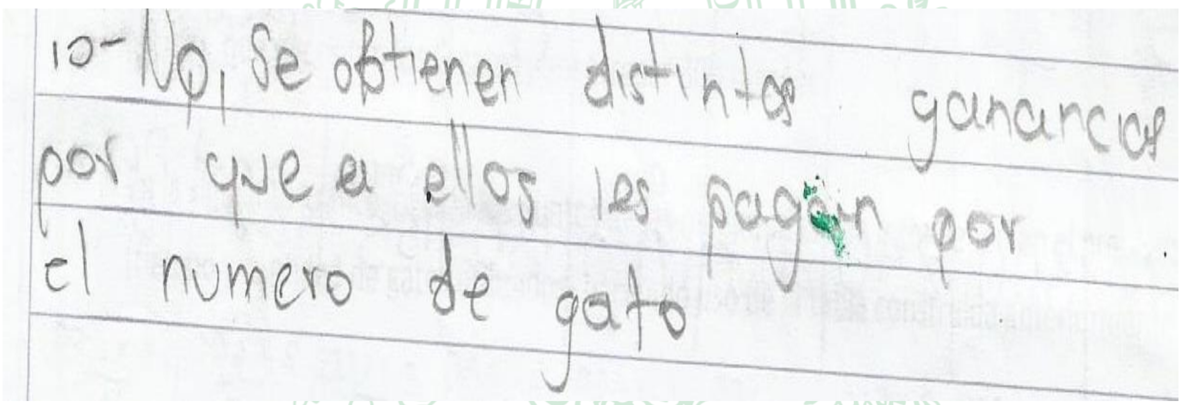

10- No, Se obtienen distintos ganancias
por que a ellos les pagan por
el numero de gato

Figura 26. Respuesta obtenida por el equipo 5 para contestar la pregunta *d.*

Tabla 13.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
No…	La afirmación del problema no es correcta.
Se obtienen distintas ganancias porque…	La ganancia de la empresa es diferente por la cantidad de gatos.
A ellos les pagan por número de gato.	La ganancia de la empresa depende de los gatos usados.

Análisis del problema 4 según la tabla 13. Comentarios sobre los elementos lingüísticos.

Relacionando la respuesta que obtiene el equipo 5 sobre la pregunta d, con las respuestas de las preguntas a, b y c, (presentada en la figura 25), se destaca que, aunque los estudiantes logran presentar una generalidad sobre la cantidad de ganancia de la empresa, presentan un obstáculo lingüístico al afirmar *"a ellos les pagan por número de gatos";* los estudiantes determinan que la ganancia de la empresa solamente depende de la cantidad de gatos, lo cual se infiere que no identifican ni usan todas variables que se relacionan en el problema.

Lo anterior pone en evidencia una dificultad en los procesos de generalización, lenguaje apropiado y probar una conjetura por parte del equipo 5.

Problema 5: Después del partido.

Después de jugar un partido de futbol, los amigos Alexander, Andrea, Juan y Sofía deciden ir a una tienda cerca a la cancha donde estaban jugando para comprar una gaseosa y compartirla entre todos… Les regalan vasos desechables con capacidad de 9 onzas.

…. Otro día, después de jugar Basquetbol, como es de costumbre, los cuatro amigos van a la tienda cerca a la cancha a comprar un refresco, en este caso, compran dos jugos Mr Tea los cuales tiene una capacidad de 3 litros de líquido y tiene un costo de $6800. En la siguiente tabla se presenta la forma en que se hizo el reparto de la cantidad de vasos de gaseosa entre los cuatro amigos según el dinero aportado por cada uno.

Tabla 14.
Representación tabular del problema 5.

Persona	*Alexander*	*Juan*	*Andrea*	*Sofía*
Dinero aportado	2850	1150	1150	1700
Vasos de gaseosa entregados	4	3	1	4

a) Analizando la tabla, ¿Consideras que está bien distribuida la cantidad de gaseosa? ¿Por qué?

Equipo 3:

En la figura 27 se presenta la respuesta obtenida por el quipo 3 sobre la pregunta *a*.

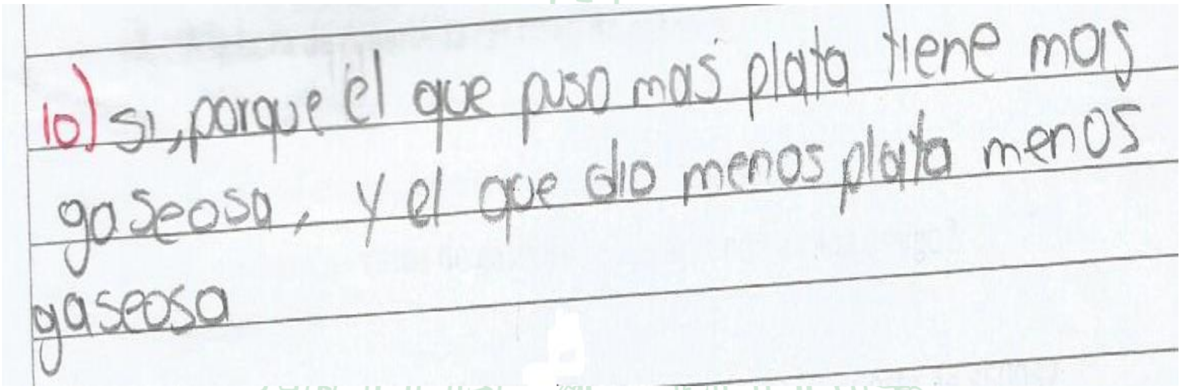

10) si, porque el que puso mas plata tiene mas gaseosa, y el que dio menos plata menos gaseosa

Figura 27. Respuesta dada por el equipo 3 a la pregunta *a*.

Análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por el equipo 3 al resolver el problema *después del partido*.

Tabla 15.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Porque.	Justificación.
El que uso más plata tiene más gaseosa…	A más dinero aporte una persona a la compra de gaseosa, le corresponde mayor cantidad.
El que dio menos plata menos gaseosa.	A menos dinero aporte una persona a la compra de gaseosa, le corresponde menor cantidad.

Análisis del problema 5 según la tabla 15. Comentarios sobre los elementos lingüísticos.

En la respuesta que ofrece el equipo 3 sobre este problema, se evidencia un obstáculo epistemológico de experiencia básica o conocimientos previos (Bachelard, 2000) de tipo concepción espontánea al indicar que "*el que dio menos plata menos gaseosa*"; identifican que Alexander es la persona que aporta más dinero y recibe en total 4 vasos de gaseosa, pero, no evidencian en la tabla 14 que Sofía recibe la misma cantidad de gaseosa, aunque ella haya aportado menor cantidad de dinero.

Lo anterior se interpreta como la emergencia de una dificultad en los procesos cognitivos al no identificar y relacionar todos los datos y variables, compararlos y realizar un tanteo con ellas de forma que le permita obtener el resultado en forma coherente, esto conduce a que los estudiantes no intenten comprobar una conjetura.

Equipo 4:

En la figura 28 se presenta la respuesta obtenida por el equipo 4 sobre la pregunta *a* del problema 5.

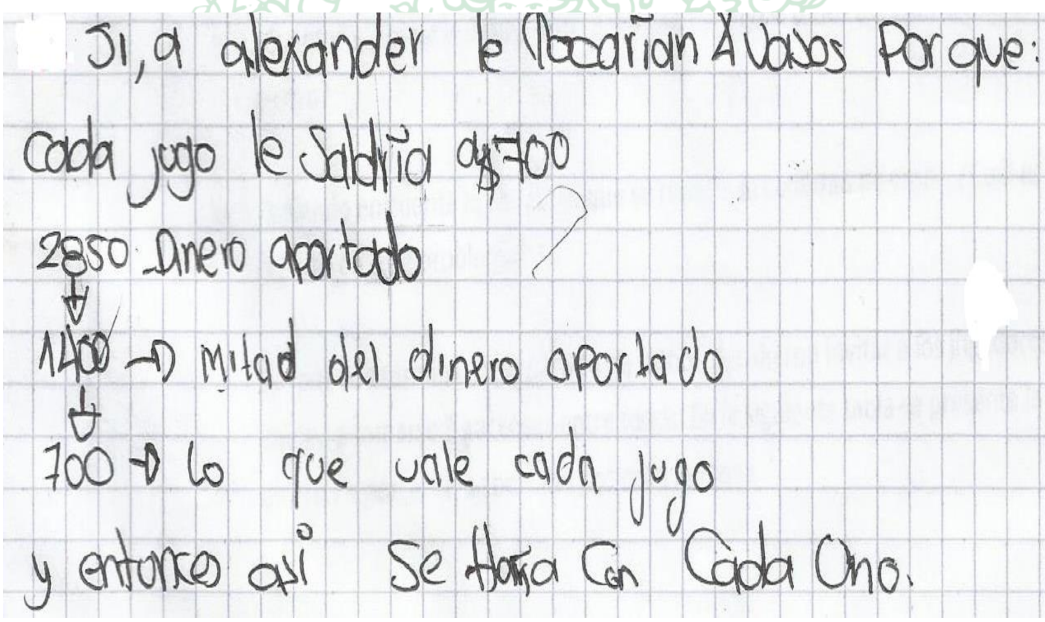

Si, a alexander le tocarian 4 vasos Porque:
cada jugo le saldria a $700
2850 Dinero aportado
1400 → Mitad del dinero aportado
700 → lo que vale cada jugo
y entonces asi se haria con cada ono.

Figura 28. Respuesta dada por el equipo 4 a la pregunta *a*.

Análisis por medio de la GROS de los resultados obtenidos por el equipo 4 al resolver el problema *después del partido.*

Tabla 16.
Identificación de procedimientos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
$2800 \rightarrow 1400 \rightarrow 700$.	La cantidad en dinero puesta por Alexander es dividida entre el número de vasos que se le entregaron.

Análisis del problema 5 según la tabla 16. Comentarios sobre los procedimientos.

El equipo 4 identifica que el costo de cada vaso dependerá de la cantidad de dinero que aporta cada individuo del problema, como se observa en las flechas puestas en el tipo de objetos, al dividir la cantidad de dinero que aportó Alexander por 4 (que corresponde a la cantidad de vasos que recibe), lo que da como resultado $700 de costo. Al no realizar otros procedimientos para los demás, se supone que éste procedimiento se implementa para cualquier caso, con lo cual se obtienen diferentes valores que se calculan respecto al costo de cada vaso, aunque los vasos siempre sean de 9 onzas.

En la relación expresión – contenido (Godino, 2002), de los elementos matemáticos del problema, se destaca en los procedimientos que implementan el equipo 4 para encontrar el costo de cada vaso, identifican que es igual para cada caso, ya que no dan uso de la cantidad de dinero que cada uno aporta, reflejando un mal uso a las variables del problema.

Lo anterior es un reflejo de la dificultad que tiene el equipo en la particularización y generalización cuando resuelven problemas.

Tabla 17.
Identificación de elementos lingüísticos.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (Relación de referencia o de uso)
Elementos lingüísticos: representaciones (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Porque.	Justificación.
Cada jugo le saldría a 700.	Resultado de una operación.
Y entonces así se haría cada uno.	Regla general para calcular la cantidad de vasos que le corresponde a cada persona.
Dinero aportado /Mitad del dinero aportado / Lo que vale cada jugo.	Frases para justificar el valor encontrado.

Análisis del problema 5 según la tabla 17. Comentarios sobre los elementos lingüísticos.

Respecto a los elementos lingüísticos, se evidencia que el equipo 4 presenta dificultades al identificar las características de los datos que se presentan en el problema al no ocuparse sobre la cantidad de vasos que se reparten en total y el costo de las 3 gaseosas. Lo anterior presenta un obstáculo para la interpretación de la información del problema, al identificar la cantidad de vasos dados a cada personaje como el factor que condiciona el valor de ellos.

La dificultad antes presentada sobre el uso de las variables que están dentro del problema, tiene como resultado que los estudiantes no realizan los procesos o estrategias de particularización, generalización, verificar una solución y probar una conjetura.

Conclusiones

Atendiendo el objetivo de analizar las dificultades manifestadas por estudiantes de séptimo grado de la I. E Andrés Bello, cuando resuelven problemas matemáticos referentes a los pensamientos numéricos y variacional, se presentan las siguientes consideraciones finales.

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) como marco didáctico, yuxtapuesto a la pertinencia de la Guía de Reconocimientos de Objetos y Significados (GROS) como herramienta para el análisis didáctico/epistémico, permitieron la identificación de las diferentes dificultades sobre los significados que surgen en la identificación de procedimientos vinculados en la solución de problemas, que emergen a lo largo del análisis epistémico que manifestaron los estudiantes bajo los procesos o estrategias de particularizar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar y verificar una solución.

La herramienta GROS permitió comprender las interpelaciones que realizaron los estudiantes a los enunciados presentados, quedando expresas interpretaciones específicas presentes en las situaciones planteadas (Castro et al., 2011) y a la vez, encontrar relaciones entre el lenguaje, los procedimientos y los significados que otorgaban los estudiantes a los objetos matemáticos.

En los procedimientos implementados, se reveló que, aunque los estudiantes realizan las operaciones básicas sin cometer errores, no tienen en cuenta el contexto en el cual está enmarcado el problema, presentado dificultades en los significados que otorgan a los objetos matemáticos que emergen en la resolución de problemas inscritos a los pensamientos numéricos y variacional. Además, se evidenciaron obstáculos de tipo cognitivo (no comprender he interpretar la información que se presenta en un problema, establecer relaciones erradas entre datos presentados y encontrados) y epistemológico (obstáculos de tipo experiencia básica o conocimientos previos (Bachelard, 2000)), en el significado que otorgan los estudiantes a los objetos matemáticos bajo sus diferentes representaciones (numérico, grafico, entre otros).

La metodología de *análisis epistémico* a partir de la GROS aplicado en este trabajo puede ser una herramienta propicia para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso y reconocimiento de objetos y los significados matemáticos atribuidos a términos, símbolos y expresiones en la resolución de problemas matemáticos o de una tarea. Así mismo, en forma general, permite describir la estructura de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular, en este caso el pensamiento numérico-variacional. En ambos asuntos, el análisis semiótico permite identificar dificultades o contrastes entre los significados atribuidos a las expresiones que se comportaron como objetos matemáticos. Estos *conflictos epistemológicos* permiten explicar, algunas de las dificultades de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2002).

El análisis de los elementos lingüísticos permitió identificar que los significados otorgados por los estudiantes a los objetos matemáticos subyacentes en cada problema, tuvo como resultado, en las interpretaciones de los datos del problema, tanto en el pensamiento variacional como numérico, el surgimiento de dificultades para la resolución del problema (tanto en el proceso de lectura como en el de resolución del problema).

Referente a la dualidad ostensiva – no ostensiva, esta nos permitió caracterizar las dificultades como *dificultades de carácter cognitivo*, pues, a grandes rasgos, la manifestación de las dificultades se presentó sobre la relación expresión – contenido que establecieron los estudiantes sobre las conexiones que dieron a los registros de representaciones y el significado que otorgaban a éstos registros.

Los significados que otorgan los estudiantes a los objetos matemáticos juegan el papel de agentes en los procesos de resolución de problemas, donde, estos agentes están determinados por las prácticas del estudiante, la cultura y el contexto institucionales donde está sumergido (Godino y Batanero, 1994). Los agentes determinan las configuraciones conceptuales de los estudiantes sobre los objetos matemáticos inmersos en un problema, haciendo que estas configuraciones se presenten como funciones semióticas y, es gracias a estas funciones semióticas, que se logran identificar, interpretar y analizar las dificultades que tienen los estudiantes cuando resuelven problemas.

Como se presentó en este proyecto, las dificultades que pueden llegar a presentar los estudiantes deben ser entendidas y analizadas desde diversos ámbitos como lo presenta el EOS al relacionar el pensamiento matemático con el sujeto, sus formas de expresión y la dimensión cognitiva, los elementos primarios y las diferentes facetas, permitiendo al profesor observar la naturaleza de las dificultades que manifiesta el estudiante en los procesos o estrategias de resolución de problemas.

Cabe destacar las dificultades que emergieron como obstáculos epistemológicos en términos de Bachelard (2000), los cuales toman un papel trascendental en la forma que los estudiantes realizan la interpretación de la información que se les presenta en los problemas. Estos obstáculos se comportan como directrices en los procesos de resolución, lo cual se va a ver reflejado en el lenguaje y los procedimientos implementados, como se vio en este proyecto en la emergencia del obstáculo epistemológico de tipo *conocimiento previo*, el cual orientó en gran medida los procesos o estrategias que realizaron los estudiantes.

Este proyectó me permitió establecer los primeros peldaños de mi practica como docente al dejar vislumbrar la importancia de los significados que los estudiantes otorgan a los objetos matemáticos en la práctica de resolución de problemas y las posibles dificultades que estos pueden llegar a presentar. Gracias a este proyecto, logré identificar que las dificultades emergentes están ligadas al entendimiento que poseen de la información, dado que, detrás de una lectura, se establecen significado a dicha información y a los objetos matemáticos que subyacen al problema. Así mismo, el análisis Ontosemiótico y las diferentes dificultades que emergieron me permitieron observar y describir la actividad matemática como un conjunto de prácticas realizadas por los estudiantes al resolver problemas matemáticos.

De la reflexión anterior, planteo las siguientes preguntas para posibles investigaciones posteriores:

a) ¿Cómo se manifiestan las dificultades en los procesos de resolución de problema desde el pensamiento aleatorio, espacial y métrico?
b) ¿De qué manera se pueden caracterizar las dificultades emergentes en la actividad matemática de resolución de problemas aplicando el enfoque Ontosemiótico?
c) ¿Cómo ocurre la dependencia entre los significados personales e institucionales de los que los estudiantes deben apropiarse como consecuencia de la actividad de resolución de problemas?

Referencias bibliográficas

Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de Innovación Curricular. *Revista Uno*, *8*, 7-18. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0B-9rZPOvu2D1dzdQM2t2aGFqVUU/view?ts=596f8c8d

Alda, F. L, y Hernández, M. D. (1998). Resolución de problemas. *Cuadernos de Pedagogía*, *31*, 28-32.Recuperado de http://files.2ddu-unam.webnode.mx/200000011-2b61f2c5c0/LECTURA7.PDF

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI. Recuperado de https://doctoradousbcienciaseducacion.files.wordpress.com/2013/01/bachelard-la-formacion-del-espiritu-cientifico.pdf

Berenguer, I. y Martínez, N. (2003) La Resolución de Problemas Matemáticos. Una Caracterización Historia de su Aplicación Como Vía Eficaz Para la Enseñanza de las Matemáticas. *Revista Pedagógica Universitaria*, *8*(3), 81-88. Recuperado de http://cvi.mes.edu.cu/peduniv/index.php/peduniv/article/viewFile/255/246

Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 64 – 88. Recuperado de: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/04.pdf

Camacho, M. y Santos, L. M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *58*, 45-60.

Castro, F., Godino, J. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*, 3,73-88. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/castro_godino_rivas_Union_025_011.pdf

Chavarría, J., y Alfaro, C. (2005). Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld. *In Ponencia presentada ante el IV Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (ClEMAC)*. Instituto Tecnológico de Cartago, Costa Rica. Recuperado de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/32989551/Resoluciondeproblemas.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1520335932&Signature=tx%2F3%2FUjBodbd4i2L9UjSf4AJt1s%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DIV_CIEMAC.pdf

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Validity and reliability. *Research Methods in Education. London: Routledge*, 133-164.

De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Actas de las IV JAEM. Tenerife*, 49-85. Recuperado de https://www.sectormatematica.cl/articulos/juegosmaten.pdf

Escudero, J. (1999). Resolución de problemas matemáticos. *Centro de profesores y recursos*, 1-98. Recuperado de http://platea.pntic.mec.es/jescuder/BLOG-1/Resolucion%20de%20problemas%20matematicos.pdf

Farah, G. V. (2005). La Resolución de Problemas en Matemáticas y el uso de las TIC: Resultados de un estudio en Colegios de Chile. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (19). Recuperado de http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/6015/01220103006970.pdf?sequence=1

Font, V., Godino, J., y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. *Universidad de Granada*. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3),* 325-355. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática *ZDM. The International Journal on Mathematics Education. 39,* 127-135. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/558/1/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *26*(76), 39. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Vicenc_Font/publication/228353336_Analisis_de_procesos_de_instruccion_basado_en_el_enfoque_ontologico-semiotico_de_la_cognicion_matematica/links/0046351a36866c4e4c000000/Analisis-de-procesos-de-instruccion-basado-en-el-enfoque-ontologico-semiotico-de-la-cognicion-matematica.pdf

House, P. A., Wallace, M. L., & Johnson, M. A. (1983). Problem solving as a focus: How? When? Whose responsibility. *The agenda in action*, 9-191.

Institución Educativa Andres Bello (2016). PEI.

Lamon, S. (2012) Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers. *New York. Routledge.*

Maxwell, J. A. (1992) Understanding and validity in qualitative research. *Harvard Educational Review*, *62*(3), 279–300. Recuperado de http://www.msuedtechsandbox.com/hybridphd/wp-content/uploads/2010/06/maxwell92.pdf

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias Y Cuidadanas*, 46–95.

Polya, G. (1945*). How to solve it: A new aspect of mathematical model.* Princeton, New Jersey.

Polya, G. (1978). *Como plantear y resolver problemas - How to solve it*. Recuperado de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38419233/ComoPlantearYResolverProblemasG.Polya.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1520337276&Signature=mOxR4pWEmasMyK0QYCNR64iK7iw%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DComo_Plantear_YResolver_Problemas_G_Poly.pdf

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, M. D. (2006). *Metodología de la investigación*. Mexico DF: Mc-Graw Hill. Recuperado de http://files.especializacion-tig.webnode.com/200000775-097910b6c0/sampieri-et-al-metodologia-de-la-investigacion-4ta-edicion-sampieri-2006_ocr.pdf

Santos, T. L. (1992). Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 4(2), 16-24. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9539/1/Resolucion1992Santos.pdf

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography* (No. 1). Mathematical Association of America, Committee on the Teaching of Undergraduate Mathematics.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematics Problem Solving. *The National Council of Teachers of Mathematics*. Orlando. Estados Unidos.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Soneira, A. J. (2006). La teoría fundamentada en los datos (Grounded Theory) de Glaser y Strauss. *Estrategias de investigación cualitativa*, 153-173.

Stanic, G.M.A. & Kilpatrick. J. (1988). Historical perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solvin,3*.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación1. *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking Sémiotique, Culture et Pensée Mathématique*, 103. Recuperado de https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0ahUKEwi02-fFq5naAhWBq1MKHUMcDncQFgg2MAI&url=https%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F2161545.pdf&usg=AOvVaw3_8vzrbtPJ7etwwNE2UviW

Anexos

Anexo 1. Problema 1: Dados

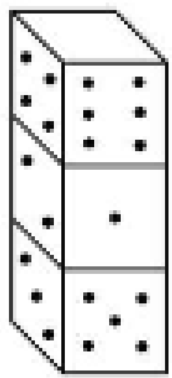
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACION

INSTITUCION EDUCATIVA ANDRES BELLO

PROBLEMA

Tres dados están puestos el uno sobre el otro como lo muestra la figura:



a) ¿Cuáles son los diferentes valores que pueden sumar los puntos de las caras que están juntas, teniendo en cuenta que la suma de los puntos de dos caras opuestas es 7?

b) ¿Cuál es el valor máximo que pueden sumar los puntos de las caras que se tocan al poner un dado sobre otro? ¿Cuál es el mínimo valor? Justifique.

Anexo 2. Problema 2: Competencia de cometas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACION

INSTITUCION EDUCATIVA ANDRES BELLO

PROBLEMA

En un concurso de elevación de cometas, Jaime del grado noveno compite contra Andrea del grado séptimo, la cometa de Jaime se eleva a 3 metros por cada 10 kilómetros por minuto que es la velocidad del viento y Andrea se hace en un punto del terreno de competencia de tal forma que la cometa se eleva a $2\frac{4}{2}$ metros por cada 8 kilómetros por minuto que es la velocidad del viento.

Preguntas:

a) Construye una tabla de valores que de evidencia del comportamiento de la cometa de Jaime y de Andrea al cabo de 10 minutos.
b) ¿Cuál de los dos competidores gana la competencia? Justifica.
c) ¿Cuántos metros de pita utilizó cada uno de los competidores? Justifica.

Anexo 3. Problema 3: Chocolatinas repartidas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

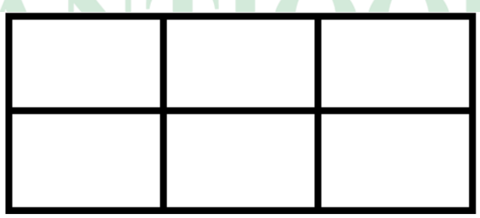
FACULTAD DE EDUCACION

INSTITUCION EDUCATIVA ANDRES BELLO

PROBLEMA

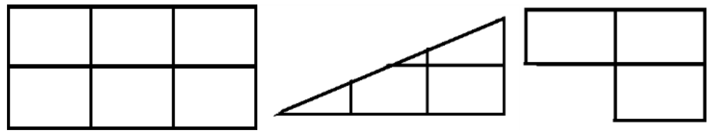
Juliana, Sofía y Daniel decidieron ir a una nueva dulcería localizada en el parque de la iglesia de su barrio. Los tres amigos decidieron comprar unas chocolatinas que vendían en el lugar. Ellos decidieron repartir las chocolatinas de acuerdo con la cantidad de dinero que cada uno aportó. Cada chocolatina tenía un costo de 1200 pesos.

Representación gráfica de una chocolatina:



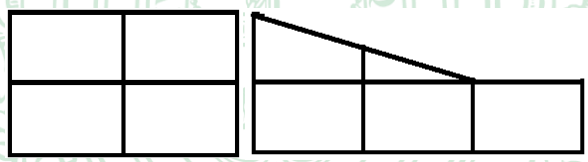
A continuación, se muestra los pedazos de chocolatina que le corresponden a cada amigo:

Juliana:



Daniel:

Sofía:



a) En total compraron 5 chocolatinas, ¿Cuáles es la fracción que representa numéricamente cada pedazo de chocolatina que le corresponde a Daniel, Juliana y Sofía?

b) Aproximadamente, ¿Cuántas chocolatinas compró cada amigo? Y ¿Aproximadamente quien aportó más dinero? Justifica tu respuesta.

c) El tendero de la dulcería les cobró a los tres amigos un total de 7200 pesos por todas las chocolatinas compradas, pero Daniel, Juliana y Sofía le dicen al tendero que está en un error pues está cobrando un valor mayor al real. ¿Los tres amigos tienen la razón? Dado que sea verdad lo que dicen los tres amigos, ¿Cuál es el valor total de las chocolatinas compradas? Justifica tu respuesta.

d) ¿Qué atiendes por unidad de reparto? Y en este problema ¿Cuál es la unidad o a cuanto equivale la unidad?

Anexo 4. Problema 4: Atrapa los ratones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACION

INSTITUCION EDUCATIVA ANDRES BELLO

PROBLEMA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Después de realizar exitosamente la limpieza de ratones en el centro comercial, la agencia fue contratada por una empresa para acabar con la plaga de ratones que esta tiene. La empresa calcula que hay aproximadamente 300 ratones en toda su planta. A pesar que 2 gatos pueden atrapar 5 ratones en 10 minutos, es posible que atrapen menos o más ratones, pero para hacer las cuentas, aceptaremos estos datos:

- La agencia determinó que dos gatos casan cinco ratones cada 10 minutos.
- Además, la agencia calcula que cuando utilizan a un gato para atrapar ratones, este tiene un costo de 20000 por cada 60 minutos (Esto es porque cada gato necesita cuidado veterinario, alimentación y salubridad) y cada ratón atrapado es pagado a 6300 pesos.

Preguntas:

a) Construye una tabla de 11x2 en la cual se muestre como cambia el tiempo que se demoran para atrapar los 300 ratones aumentando cada vez la cantidad de gatos.
b) Aproximadamente ¿Cuánto tiempo se demoran 4 gatos para atrapar los 300 ratones? Y ¿Cuánta es la ganancia de la empresa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
c) Aproximadamente ¿Cuánto tiempo se demoran 7 gatos para atrapar los 300 ratones? Y ¿Cuánta es la ganancia de la empresa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

d) Aproximadamente, ¿Cuánto tiempo se demoran 17 gatos para atrapar 300 ratones? Y ¿Cuánta es la ganancia de la empresa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
e) ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre el número de gatos utilizados para atrapar los 300 ratones y la cantidad de tiempo necesario para atrapar dichos ratones?
f) ¿Qué resultado se obtiene al multiplicar la cantidad de gatos utilizados en cada ocasión con el tiempo gastado? **MUESTRA EL PROCEDIMIENTO IMPLEMENTADO Y JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
g) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
h) ¿Cuál es el procedimiento que se debe implementar para calcular la cantidad de tiempo T que necesitan los G gatos para atrapar 300 ratones?
i) La agencia quiere saber si obtiene las mismas ganancias a atrapar los 300 ratones utilizando 2 gatos, 3 gatos, 4 gatos, 5 gatos, etc. ¿Es posible que siempre se esté ganando el mismo valor? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

Anexo 5. Problema 5: Después del partido

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACION

INSTITUCION EDUCATIVA ANDRES BELLO

PROBLEMA

Después de jugar un partido de futbol, los amigos Alexander, Andrea, Juan y Sofía deciden ir a una tienda cerca a la cancha donde estaban jugando para comprar una gaseosa y compartirla entre todos. Deciden comprar una manzana Postobón de 3 litros la cual tiene un costo total de 5900 pesos y les regalan vasos desechables con una capacidad de 9 onzas.

- Para comprar la gaseosa, Alexander aporta 2000$, Andrea 2500$, Juan 500$ y Sofía 1000$.
- Para realizar el reparto de la gaseosa, deciden que esto dependerá de la cantidad de dinero que cada uno de los amigos aportó.

Entonces:

a) ¿Cuántos vasos de 9 onzas se pueden llenar teniendo una gaseosa de 3 litros?

b) A la hora de repartir la cantidad de gaseosa:

   a. ¿Cuál amigo obtiene más vasos de gaseosa?

   b. ¿Cuál amigo obtiene menos vasos de gaseosa?

   c. ¿Cuántos vasos de gaseosa le corresponde a cada amigo?

c) ¿Cuántos vasos se le deben dar a Juan si este da un aporte de 3500$?

d) ¿Cuantos vasos se le deben dar a Sofía si esta da un aporte de 2250$?

e) ¿Cuántos vasos se le deben entregar a cada amigo si todos aportan la misma cantidad de dinero?

f) Teniendo en cuenta la forma en que se reparte la cantidad de vasos, ¿Cuál es la unidad de reparto en este problema?

g) Después de terminar otro partido de futbol, decidieron invitar a los jugadores del otro equipo a tomarse 3 gaseosas entre todos. En la siguiente tabla se presenta la cantidad de dinero en porcentaje aportado por cada persona:

Persona	*Alexander*	*Juan*	*Andrea*	*Sofía*	*Darwin*	*Geraldine*	*Camila*	*Michael*
Cantidad de dinero aportado en porcentaje	13.95	19.53	2.79	11.16	8.37	25.11	5.58	11.16

h) ¿Cómo se calcula la cantidad de vasos de gaseosa si esto depende de la cantidad de dinero que esta aporta?

i) Si en lugar de 3 gaseosas, ahora deciden comprar 7 gaseosas ¿de qué forma se debe realizar el reparto teniendo en cuenta que se hizo el mismo aporte que el que presenta la tabla 1?

j) Propón un método por el cual puedas calcular la cantidad de vasos de 9 onzas que se le debe entregar a una persona sabiendo que esta da un aporte ***N*** de dinero y se compran ***G*** gaseosas.

k) Otro día, después de jugar Basquetbol, como es de costumbre, los cuatro amigos van a la tienda cerca a la cancha a comprar un refresco, en este caso, compran dos jugos Mr Tea los cuales tiene una capacidad de 3 litros de liquito y tiene un costo de 6800. En la siguiente tabla se presenta la forma en que se hizo el reparto de la cantidad de vasos de gaseosa entre los cuatro amigos según el dinero aportado por cada uno.

Persona	*Alexander*	*Juan*	*Andrea*	*Sofía*
Dinero aportado	2850	1150	1150	1700
Vasos de gaseosa entregados	4	3	1	4

Analizando la tabla, ¿Consideras que está bien distribuida la cantidad de gaseosa? ¿Por qué?

Anexo 6. Encuesta

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACION

INSTITUCION EDUCATIVA ANDRES BELLO

ENCUESTA

Objetivo: Constatar las creencias y gusto de los estudiantes de 7° grado de la Institución Educativa Andrés Bello sobre las matemáticas como ciencia y evidenciar las concepciones que tienen los estudiantes sobre el área.

a) ¿Tus acudientes utilizan las matemáticas para desempeñarse en el cargo que ocupan en sus sitios de trabajo? ¿Cómo lo hacen?

____

____

b) ¿Tus acudientes te ayudan con las tareas y actividades que te ponen en matemáticas?

   Sí___ No___

c) ¿Te gustan las matemáticas? Sí ___ No___

d) ¿Te ves e un futuro estudiando una profesión donde se estudie conceptos matemáticos?

   Si___ No___

e) Si la respuesta de la pregunta 3 es positiva (si), responda: Una o unas de las características por la que te gustan las matemáticas:

   a. Es una materia fácil de entender.
   b. Aunque hay temas que son difíciles de entender, estudiando logro comprender los conceptos.

c. Entender la materia es un reto personal.

d. Me son útiles en diferentes problemas que se presentan en el diario vivir

Otro, ¿Cuál?:

f) Si la respuesta de la pregunta 3 es negativa (no), responda: Una o unas de las características por la que no te gustan las matemáticas:

a. Es una ciencia difícil de entender.

b. No siento que sea útil en mi desarrollo con persona.

c. La forma en cómo se me muestran la materia no me gusta.

d. Cuando intento estudiar me surgen muchas preguntas y se me presentan dificultades.

e. No sirven para resolver problemas en mi diario vivir

Otra, ¿Cuál?:

g) ¿Qué conceptos conoce usted de matemáticas?:

h) ¿Cree que los existen conceptos matemáticos que se aplican a la vida cotidiana? ¿Cuáles?