



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

**APRENDIZAJES POTENCIALMENTE EXPANSIVOS EN PROCESOS DE
MODELACIÓN CON TECNOLOGÍAS DIGITALES**

Juan Fernando Molina Toro

**Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Medellín, Colombia**

2021

Aprendizajes potencialmente expansivos en procesos de modelación con tecnologías digitales

Juan Fernando Molina Toro

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctor en Educación

Asesores (a):

Jhony Alexander Villa Ochoa, Doctor en Educación

Paula Andrea Rendón Mesa, Doctora en Educación

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Grupo de Investigación:

MATHEMA-FIEM

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2021

*A mis padres,
mi esposa Aleyda,
mis hijos
Thomas, Juan Andrés y Camilo;
memoriales de Dios en mi vida.*

Agradecimientos

En estas líneas quiero expresar mi gratitud con todas las personas, colectivos, entidades y grupos de investigación que aportaron a la construcción y refinamiento de este trabajo. En primer lugar, quiero agradecer a *Dios* por todas las bendiciones recibidas en estos años y por permitirme concluir mi proceso de formación a pesar de tantas dificultades que nos trajo la pandemia.

Quiero agradecer de manera muy especial a mis asesores, el Doctor Jhony Villa y la Doctora Paula Andrea Rendón Mesa, por acompañar todo mi proceso de formación y ser una voz de aliento en momentos de adversidad. De igual manera a todas y todos los integrantes de los grupos de investigación que me brindaron la posibilidad de compartir y mejorar mi trabajo, de manera muy especial, al grupo Mathema- Fiem de la Universidad de Antioquia.

Agradecimientos para el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación - COLCIENCIAS por el apoyo financiero brindado para llevar a cabo mi formación doctoral a través de la convocatoria 785 de 2017 y, a la Secretaría de Educación de Medellín por permitirme vincularme a través de una comisión de estudios a este proceso de formación.

Un abrazo y un agradecimiento muy especial a mi madre, Regina; mi padre, Francisco; mis hermanos, mi familia y mis amigos, por toda su colaboración y apoyo en momentos donde no veía como seguir. Este trabajo se lo dedico con todo mi corazón a mi esposa Aleyda, mis hijos Thomas, Juan Andrés y Camilo; quienes son una bendición de Dios para mi.

Resumen

Este documento presenta el resultado de una investigación que indagó por los aprendizajes que emergen en procesos de modelación con tecnologías digitales. Esta investigación se desarrolló en el marco del programa de Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia. La estructura de este trabajo atiende a un formato de múltiples artículos con una sección introductoria a la investigación que se desarrolla en cada uno de ellos y que tiene como fin informar aspectos teóricos y metodológicos que en conjunto responden al objetivo de este estudio.

Se adoptó la teoría de Aprendizaje Expansivo como una manera de establecer comprensiones frente al contexto social y cultural en el que se desarrollan trabajos en las aulas para *analizar aprendizajes que emergen en procesos de modelación en los cuales los estudiantes hacen uso de sus propias tecnologías digitales*. En ese sentido, este estudio proporciona elementos teóricos sobre los cuales se han construido diferentes miradas de la modelación en Educación Matemática y una visión filosófica sobre tecnología que genera reflexiones frente a nuevos roles que los diferentes dispositivos digitales pueden tener en la actividad escolar.

Los resultados presentan una síntesis de roles y usos de las tecnologías que se identificaron en literatura especializada sobre modelación en Educación Matemática y, además, ofrecen un análisis a manifestaciones discursivas de estudiantes de un programa de formación universitaria para futuros profesores que participan en la solución de tareas de modelación donde vinculan de manera natural sus propias tecnologías digitales. Los diálogos y otras manifestaciones de los estudiantes se sistematizaron y analizaron para identificar la presencia de contradicciones y su papel transformador en la actividad de modelación; también, fueron el

insumo para identificar y analizar la presencia de acciones de aprendizaje dirigidas al objeto de la actividad que se estructuró en los espacios de formación donde las tareas tuvieron lugar.

Las implicaciones que se desprenden de esta investigación apuntan a la necesidad de vincular otros contextos en el escenario escolar y permitir que los estudiantes, de manera espontánea, cuestionen los alcances y limitaciones de sus conocimientos matemáticos y su actividad en el aula, además de ampliar el horizonte de conocimiento sobre sus propias tecnologías y otras maneras en que éstas pueden aportar a su aprendizaje. Como una herramienta metodológica para el trabajo en modelación con tecnologías, este estudio presenta las espirales de aprendizajes potencialmente expansivos para identificar secuencias de acciones en las cuales, los estudiantes que participan producen nuevas formas de trabajo en aulas regulares y en intervalos de tiempo que se destinan cotidianamente para una clase de matemáticas.

Palabras clave: Aprendizaje expansivo, educación matemática, modelación, tecnologías digitales

Abstract

This paper presents the results of a research about learning in modeling processes with digital technologies. This research was developed within the framework of the Doctorate in Education program at the University of Antioquia. Its structure corresponds to a multi-paper format with an introduction to each one where both, theoretical and methodological aspects, are reported to respond to the objective of this study.

Expansive Learning theory was used to establish understandings of the social and cultural context in which classroom work is carried out to *analyze learning that emerges in modeling processes when students use their own digital technologies*. In this sense, this study provides theoretical elements which are the basis for different views of modeling in Mathematics Education, and a philosophical vision on technology that allows generating reflections on new roles that different digital devices may have in school activity.

The results present roles and uses of technologies that were identified in the specialized literature on modeling in Mathematics Education and, in addition, they offer an analysis of discursive manifestations expressed by participating students in the solution of modeling tasks where they naturally link their own digital technologies. Dialogues, gestures, and other manifestations were systematized and analyzed to identify contradictions and their transforming role in the modeling activity. Also, they represented input to identify and analyze learning actions aimed at the object of activity that was structured in training spaces where tasks were developed.

Implications of this research point out to the need to link other contexts in the school setting and allow students, spontaneously, to question the scope and limitations of their mathematical knowledge and their activity in the classroom, in addition to expanding the

knowledge about their own technologies and other ways in which they can contribute to their learning. As a methodological tool for modeling with technologies, this study presents potentially expansive learning spirals to identify sequences of actions in which the participating students produce new forms of work in regular classrooms and at intervals of time that are daily allocated for a math class.

Key words: Expansive learning, mathematics education, modeling, digital technologies

Organización del texto

Este informe se configura a partir de tres artículos que se construyeron en correspondencia con el objetivo y las preguntas de investigación. Antes del desarrollo amplio de los tres documentos, se presenta un texto para guiar al lector sobre aspectos teóricos y metodológicos de este trabajo.

En la primera parte se presenta una introducción que describe algunas perspectivas que han consolidado el estudio de la modelación en Educación Matemática a nivel nacional e internacional. Con este apartado se orienta el objetivo de la investigación y se plantean cuatro preguntas de investigación que se responden en el siguiente orden: las dos primeras en el artículo I, la tercera en el artículo II y la cuarta en el artículo III.

En la segunda parte se presenta un breve desarrollo de la teoría de Aprendizaje Expansivo para ofrecerle al lector aspectos clave de esta línea para el desarrollo del trabajo. Esta teoría se reconoce en la literatura como una tercera generación de la teoría de la actividad y, por ello, es necesario centrar la atención en la comprensión de algunas características relevantes que fundamentan visiones metodológicas y teóricas de este estudio. En esta parte también se incluye una sección en la que se desarrollan ideas teóricas sobre modelación con tecnologías.

La tercera parte ofrece una presentación de los elementos metodológicos que fundamentan este trabajo y una versión completa de cada artículo. En el apartado final se retoman los principales hallazgos de cada artículo para atender el objetivo de este estudio y justificar necesidades de investigación para futuros desarrollos en esta línea.

Contenido

Introducción	1
El estudio de la modelación en el contexto colombiano e internacional	2
Objetivo y preguntas de investigación	7
Lista de artículos	9
Aprendizaje Expansivo	10
La actividad de aprendizaje.....	11
Acciones de Aprendizajes Expansivos	14
Modelación con tecnologías digitales en Educación Matemática.....	18
Modelos y modelación	21
Las tareas de modelación	23
Una visión filosófica sobre tecnología.....	25
Metodología.....	27
El diseño de la investigación.....	29
Herramientas metodológicas para el desarrollo del trabajo de campo de la investigación.....	32
El método	32
Los participantes	33
Unidades de análisis.....	35
Producción de registros.....	35
Análisis de los datos.....	37
Validez del estudio.....	41
Resultados	43

Artículo I. Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics

Education 44

Artículo II. Contradicciones en procesos de modelación con tecnologías digitales..... 78

Artículo III. Aprendizajes potencialmente expansivos en procesos de modelación con tecnologías digitales..... 111

Consideraciones finales 153

Modelación con tecnologías que pertenecen a los estudiantes 153

Espirales de aprendizajes potencialmente expansivos en procesos de modelación con tecnologías propias de los estudiantes..... 155

Implicaciones para futuras investigaciones..... 157

Referencias 159

Introducción

Este documento presenta los resultados de una investigación que se desarrolló en la línea de Educación Matemática y con el apoyo del grupo de investigación Mathema-FIEM de la Universidad de Antioquia. El interés por estudiar la modelación con tecnologías en Educación Matemática corresponde a una intención de ampliar la mirada sobre diferentes recursos y procesos que establece la normatividad colombiana para el desarrollo de los programas académicos escolares, y a los propósitos formativos de los programas que ofrece la Universidad de Antioquia para estudiantes en programas de formación para futuros profesores de matemáticas.

Aunque son muchos los avances teóricos y metodológicos en el campo de la modelación en Educación Matemática (en adelante modelación), es claro que nuevos dispositivos tecnológicos abren nuevas posibilidades para el trabajo en las aulas y desafíos en el campo de la investigación. En ese sentido, este trabajo espera fortalecer nuevas apuestas educativas en las cuales los dispositivos tecnológicos de los estudiantes tengan otro rol en el desarrollo de los procesos de modelación que actualmente se pueden proponer en las aulas y, de igual manera, presentar evidencia de cómo estos procesos pueden ofrecer nuevas comprensiones sobre el aprendizaje de las matemáticas.

En el siguiente apartado se presenta una mirada a la modelación en el contexto nacional e internacional y desafíos para su inclusión en espacios académicos escolares.

El estudio de la modelación en el contexto colombiano e internacional

A nivel nacional, desde hace más de dos décadas y con el fin de buscar una estructura curricular, en Colombia se han presentado una serie de documentos con los cuales se busca direccionar los procesos educativos en espacios escolares de todo el país. Con la publicación del documento Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (Colombia-MEN, 1998), varios aspectos de lo que significa aprender matemática aparecieron. Por un lado, la propuesta de que el aprendizaje de las matemáticas debe permitir al alumno aplicar sus conocimientos en espacios diferentes al ámbito escolar, adaptarse al estudio de nuevas situaciones y expresar sus opiniones y sus diferentes puntos de vista; por otro lado, la necesidad de integrar matemáticas al hacer del estudiante y, con ello, apuntar hacia una reorganización curricular de los procesos escolares.

En ese documento, la modelación se integró como uno de los procesos generales en matemáticas con el propósito de que el alumno desarrolle actividad matemática en los contextos en los cuales el aprendizaje emerge y también, con el fin de que su trabajo sea intelectualmente similar al que se desarrolla en la actividad científica (Colombia-MEN, 1998). La visión de modelación era, en ese momento de la educación en Colombia, una forma de interrelacionar las matemáticas y el contexto de tal modo que le permitiera al estudiante el trabajo con datos, conceptos, hipótesis y modelos, entre otros. Bajo esa mirada, de algún modo aún vigente, el profesor debería colocar al estudiante en un escenario donde se llevarían a cabo acciones como simplificar un problema, identificar objetos matemáticos, reconocer regularidades, demostrar o, refinar y utilizar modelos.

Los cambios que este documento introdujo sobre los procesos de enseñanza de las matemáticas se consolidaron desde entonces y documentos posteriores como los Estándares Básicos de Matemáticas (Colombia-MEN, 2006) o los Derechos Básicos de Aprendizaje (Colombia-MEN, 2016), marcan una continuación de esa nueva apuesta por potenciar el conocimiento matemático. Asimismo, en esta línea, la literatura en el contexto colombiano muestra desarrollos teóricos que fortalecen y amplían la comprensión sobre modelación en espacios académicos. Como una muestra de ello, en una perspectiva crítica, algunas investigaciones se han preocupado por analizar ambientes de modelación que promuevan una participación activa de los estudiantes en el estudio de problemas socialmente relevantes y que permitan una posición crítica (Camelo-Bustos et al., 2016; Camelo-Bustos & Acevedo, 2018).

En perspectivas diferentes, otros trabajos se ocuparon de caracterizar la modelación como un proceso que involucra contextos y conceptos matemáticos dotados de significados que no se agotan en la actividad cognitiva de producción de modelos matemáticos (Sánchez et al., 2013; Villa-Ochoa, 2007; Villa-Ochoa & Ruiz, 2009); otros centraron su interés en elementos que intervienen en la manera en que se desarrollan estos procesos y los tipos de tareas que se pueden elegir para orientar el trabajo en las aulas (Villa-Ochoa, 2015; Villa-Ochoa et al., 2017); y otros analizaron el rol de la experimentación con tecnologías y el uso de software para apoyar procesos de simulación (Molina-Toro et al., 2018).

Como lo declaró el Colombia-MEN (1998), el estudio de las matemáticas en la escuela debe ser una actividad social que involucre los intereses y las necesidades de los estudiantes, además de ofrecer múltiples opciones para establecer relaciones entre objetos de cualquier naturaleza. Adicionalmente, esta mirada reconoce que la actividad escolar debe abrir espacios para que el estudiante identifique, formule y construya modelos y conceptos en ambientes que

den sentido al aprendizaje de las matemáticas y permitan analizar la cultura y construir significados socialmente compartidos.

La visión de modelación en Colombia reconoce las relaciones existentes entre la cultura, las matemáticas y la evolución histórica del hombre como ser social que, en su contexto, produce herramientas para la solución de problemas y construye experiencias que aportan en el desarrollo de su pensamiento matemático. En ese sentido, las miradas y modos de hacer modelación son fuentes de conocimiento en constante transformación, entre otras razones, por el vínculo de nuevas herramientas que amplían el campo de actuación de los individuos.

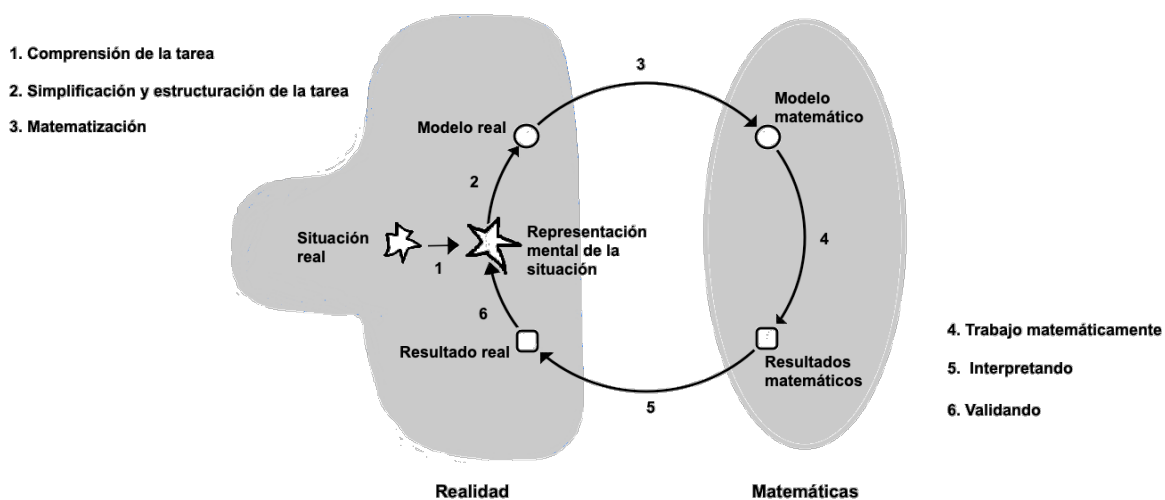
A nivel internacional, las investigaciones han hecho aportes teóricos que vinculan otras perspectivas teóricas asociadas a la modelación matemática en el aula (Blum, 2011; Borromeo-Ferri, 2007; Kaiser & Sriraman, 2006). Como una muestra de ello, la perspectiva cognitiva (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Borromeo-Ferri, 2006a, 2007) centra su atención en la metacognición asociada al estudio de los procesos de modelación y analiza procesos mentales de estudiantes en clases de matemáticas cuando abordan el estudio de una situación real (Borromeo-Ferri, 2006b; Daher & Shahbari, 2015). En esta perspectiva, la modelación es vista como un ciclo en el cual los estudiantes recorren fases o etapas y hay un interés especial por determinar las maneras en que los estudiantes establecen la transición de una fase a otra (Borromeo-Ferri, 2006a).

La manera como se presentan ciclos de modelación en la literatura no es única y sus diferencias están en correspondencia con la perspectiva teórica que declara cada investigador, la complejidad de las tareas que se asignan a los estudiantes, el uso de la modelación en los procesos escolares y el uso de tecnologías, entre otras (Perrenet & Zwaneveld, 2012). La Figura 1 presenta las fases que pertenecen al ciclo enmarcado en la perspectiva cognitiva y, a diferencia de otras formas de representación que se declaran en la literatura (Blum, 2011; Kaiser, 2005;

Stillman et al., 2007), el ciclo de Borromeo-Ferri (2007) coloca como punto de partida las representaciones mentales que los estudiantes realizan al interpretar una situación real. En este ciclo, cada una de las fases supone momentos en los cuales un estudiante que trabaja en modelación reconstruye la situación en función de su conocimiento matemático, toma decisiones, construye modelos (algebraicos, gráficos, entre otros) e interpreta y valida sus resultados en correspondencia con la situación de estudio.

Figura 1

Representación de un ciclo de modelación en una perspectiva cognitiva. Adaptado de Borromeo-Ferri (2007).



La visión de modelación que presentan Daher y Shahbari (2015) concibe la tecnología dentro del ciclo de modelación propuesto por Borromeo-Ferri (2007) y, al interior de su estudio, se analiza la importancia de que los estudiantes estén comprometidos con múltiples acciones

repetidas de traducción de enunciados, descripciones, obtención de datos y predicción de resultados. El estudio de Daher y Shahbari (2015) muestra cómo se modifica el ciclo de modelación cuando se incorpora tecnología, pero al igual que en otros trabajos, no es posible analizar otros matices y dinámicas que generan el vínculo de nuevas tecnologías, como pueden ser los dispositivos digitales móviles en estos procesos.

En otras miradas, la modelación se reconoce como una tendencia en Educación Matemática que puede verse como un enfoque pedagógico en el cual, a partir de un problema, se busca un modelo matemático para analizar, describir y realizar predicciones sobre un fenómeno de estudio (Diniz & Borba, 2012); también se reconoce como un ambiente de aprendizaje que reúne intereses y necesidades de los estudiantes (Campos & Araújo, 2015; Parra-Zapata & Villa-Ochoa, 2016) y como una herramienta de investigación que vincula el método científico para estimular el desarrollo de nuevas técnicas experimentales, el trabajo con datos y una mejor comprensión de la realidad, entre otras (Bassanezi, 2002).

Es claro que cada perspectiva de modelación tiene matices diferentes en relación con su desarrollo y el centro de atención en cada proceso. Sin embargo, la incorporación de tecnología genera otras dinámicas y posibilidades de aprendizaje diferentes al interior de estos procesos; una mirada más amplia de esta incorporación se desarrolla en el primer artículo de esta investigación.

En coherencia con las consideraciones que se presentan en el contexto colombiano y en el contexto internacional sobre modelación, el uso de tecnologías y el estudio de las matemáticas como una actividad social que debe reconocer el contexto del estudiante y sus tradiciones culturales, es necesario abordar un marco teórico que permita encontrar puntos de convergencia entre la actividad social de los estudiantes y las maneras en que usan dispositivos tecnológicos para comprender los sentidos que pueden tomar estas herramientas en el trabajo escolar. En

concordancia, esta investigación toma como marco teórico la teoría de Aprendizaje Expansivo para indagar sobre aprendizajes que emergen en procesos de modelación que vinculan tecnologías digitales y se convierte en una lente para observar, analizar y determinar las complejidades que surgen en el trabajo de aula donde los estudiantes interactúan y manifiestan sus diferentes puntos de vista. Estudios previos (David & Tomaz, 2015; Gedera, 2016; Rozario & Ortlieb, 2015) reportaron los alcances de este marco teórico para abordar trabajos en el campo de la educación. Sin embargo, la investigación en modelación con tecnologías en esta línea necesita de más evidencia empírica para ampliar la comprensión de los aprendizajes en los estudiantes cuando se enfrentan a estos procesos en las aulas. En el segundo y tercer artículo se presentan otras consideraciones que justifican la elección de este marco teórico de referencia y las preguntas de investigación que hacen parte de esta investigación.

Objetivo y preguntas de investigación

La pregunta por el aprendizaje es un elemento constitutivo de esta investigación y frente a ello es necesario el análisis de teorías y conceptos que amplíen las maneras de comprender, cuál es el papel de los recursos tecnológicos que se utilizan en procesos de modelación y qué es lo que aprenden estudiantes que participan en estos procesos. En este sentido, en el marco de la teoría de Aprendizaje Expansivo, el objetivo de esta investigación es analizar aprendizajes que emergen en procesos de modelación en los que los estudiantes hacen uso de sus propias tecnologías digitales.

Para ello, se responderán las siguientes preguntas:

1. ¿Qué roles asumen las tecnologías digitales cuando se integran a procesos de modelación en Educación Matemática?
2. ¿Qué usos tienen las tecnologías digitales al interior de estos procesos?

3. ¿Qué contradicciones se identifican en estudiantes que participan en procesos de modelación en Educación Matemática con sus propias tecnologías digitales?
4. ¿Qué aprendizajes se originan en procesos de modelación en los cuales los estudiantes utilizan sus propias tecnologías digitales?

Lista de artículos

Este estudio en formato multi-paper está constituido por tres artículos que responden a las preguntas de investigación.

1. Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8).
<https://doi.org/10.29333/ejmste/108438>
2. Contradictions in Modeling Processes with Digital Technologies. Contradictions in mathematical modeling with digital technologies. *Educ Inf Technol* (2021).
<https://doi.org/10.1007/s10639-021-10676-z>
3. Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. Potentially Expansive Learning in Modeling Processes with Digital Technologies.

Aprendizaje Expansivo

La teoría de Aprendizaje Expansivo apareció en 1987 como una alternativa a las posturas cognitivas dominantes que representaron la mente humana como una computadora y que desconocían la influencia de la cultura en el aprendizaje de los sujetos (Engeström, 1987, 2015). Con un conjunto de principios que se fundamentan en la Teoría de la actividad, el Aprendizaje Expansivo surge con planteamientos de Vygotsky, Leontyev, Il'enkov, Davydov, Bateson y Bakhtin, cada uno de los cuales desarrollaron líneas teóricas que aportaron de manera diferente a la construcción de esta teoría. Para Engeström y Sannino (2010), esta teoría tiene sus raíces en conceptos como: la zona de desarrollo próximo propuesta por Vygotsky, la distribución de la labor que analizó Leontyev, las contradicciones como tensiones de evolución histórica estudiadas por Il'enkov, el concepto de actividad de aprendizaje de Davydov, los niveles de aprendizaje de Bateson y las ideas de múltiples voces de Bakhtin. Estos aspectos teóricos fueron la base de una propuesta que analiza la acción de los sujetos en sus sistemas de actividad mediada por artefactos.

La teoría no concibe el aprendizaje de manera estandarizada, centrado en procesos en los cuales el sujeto adquiere solo conocimiento o habilidades. En una orientación complementaria, Engeström (1987, 2015) basa su teoría en tipos de aprendizajes que emergen en la acción de los sujetos y considera que una teoría de aprendizaje debe responder a cuestiones que se relacionan con el sujeto que aprende, cómo aprende, qué acciones promueven su aprendizaje, qué lo impulsa a aprender y qué es lo que aprende. En ese sentido, el aprendizaje no es una característica que se

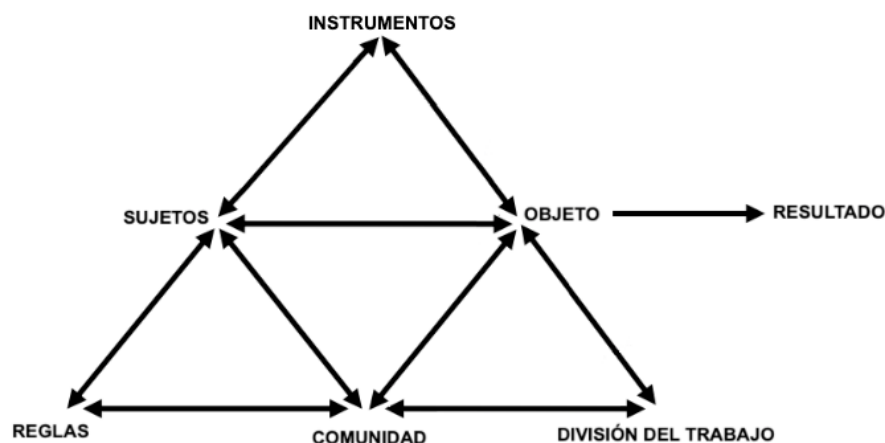
estudia aislando al individuo, y, en una visión amplia, necesita del análisis del contexto en el que se desarrolla su actividad de aprendizaje.

La actividad de aprendizaje

En el diseño de su teoría, Engeström (2015) analiza cómo el aprendizaje humano está relacionado con tipos de actividad social que se constituyen a través de la historia y dirigen la actividad de aprendizaje. En esta línea, la actividad se reconoce como un proceso colectivo que se configura en un sistema. Para Engeström y Sannino (2010), el sistema de actividad está conformado por un sujeto (individuo o subgrupo), un objeto (“materia prima” o “espacio problemático” [se conservan las comillas con el énfasis de los autores] a la que va dirigida la actividad), instrumentos (herramientas o signos), reglas (normas que restringen la acción de los sujetos), comunidad (grupo de individuos que comparten el mismo objeto de actividad) y división del trabajo (división horizontal de tareas y división vertical de poder y estado). Como lo expresa Lektorsky (2009), el sistema de actividad debe verse con relación a otros sistemas que reconozcan la importancia de la comunidad, sus múltiples puntos de vista, necesidades e interacciones entre sus participantes.

Figura 2

Estructura del sistema de actividad de Engeström (1987, 2015).



Para R. Engeström (2009) el modelo triangular (Figura 2) vincula los componentes de la actividad social y las múltiples relaciones entre ellos, además de conservar la esencia de la actividad humana. Por lo tanto, la evolución cultural del aprendizaje a través de sus acciones es un punto de partida para observar el surgimiento del aprendizaje como un sistema de actividad (Engeström, 2015).

Las relaciones sistémicas que reúne el modelo triangular permiten analizar transformaciones en cada uno de sus componentes y estudiar la evolución de la actividad misma. En ese sentido, la actividad de aprendizaje está fuertemente asociada a las acciones que se integran a otros sistemas y a la producción de nuevas estructuras de actividad. La actividad que se desarrolla en la escuela, en el trabajo y en la ciencia y el arte, consolidan procesos en los que emergen transformaciones y nuevas formas de acción (Engeström, 1987, 2015). “Mientras que la escuela tradicional es esencialmente una actividad productora de materias y la ciencia tradicional

es esencialmente una actividad productora de instrumentos, la actividad de aprendizaje es una actividad productora de actividades” [traducción propia] (Engeström, 2015, p 99).

En esta línea teórica, la producción de modelos y metodologías más refinados hacen parte de la actividad en la ciencia y en el arte. Sin embargo, al transferir estos instrumentos a otras actividades, se originan movimientos expansivos que permiten la construcción de nuevos instrumentos de actividad con las características propias de cada sistema. Por esta razón, se considera que el aprendizaje expansivo se produce en transformaciones radicales de sistemas de actividad y no representan soluciones generalizadas para todas las necesidades (Engeström, 2015).

Como parte de un análisis a la evolución de la actividad de aprendizaje, en la teoría se analizan aspectos claves de los niveles de aprendizaje que presentó Gregory Bateson en 1942 (citado en Engeström, 1987). En el primer nivel, se analiza cómo los sujetos se condicionan para responder correctamente determinadas situaciones, se desarrollan procesos de habituación y aparece una forma de aprendizaje ligada a la memoria; en el segundo nivel, se adquieren normas y patrones de comportamiento que estructuran la adquisición de hábitos y se estructuran tipos de aprendizaje del primer nivel. En el tercer nivel, el sujeto cuestiona la actividad, su sentido y su significado en el contexto; según la teoría, es en este nivel donde el Aprendizaje Expansivo aparece con toda su esencia y desencadena transformaciones de la actividad de los sujetos.

El análisis de la teoría a los tipos de aprendizaje centra la atención en aspectos que se relacionan con una solución discreta y experimental de un problema y las limitaciones para salir del espacio en el que ese problema permanece inmodificable. Para Engeström (2015), los aprendizajes en el primer y segundo nivel no implican rompimientos con prácticas establecidas con anterioridad y aceptadas socialmente; sin embargo, las acciones de los sujetos y la creación

de nuevos instrumentos en el segundo nivel pueden dar cuenta de expansiones potenciales. En ese sentido, la mirada sobre los cuestionamientos y las acciones de los sujetos en la práctica son esenciales para identificar aprendizajes expansivos o, de acuerdo con las características del contexto donde la práctica acontece y con los tiempos en que se desarrolla, aprendizajes que son denominados potencialmente expansivos (Engeström, 1999).

Los sistemas de actividad existen en entornos socioculturales como el aula, el contexto escolar o la sociedad (Gedera, 2016) y, aunque la teoría afirma que el Aprendizaje Expansivo no debe asumirse como una idea pedagógica (Engeström, 1987,2015), sí representa un nuevo tipo de aprendizaje que puede tener lugar en la escuela y que incluye, entre otros, una mirada particular sobre objetos en la actividad escolar. La adopción de nuevos objetos (tangibles e intangibles) transforman la acción de los sujetos y genera contradicciones en los sistemas de actividad (Engeström, 2001). Tales contradicciones en la perspectiva del autor son generadoras de disturbios y conflictos en los sujetos que se oponen a transformar su actividad (*una mirada amplia a este concepto se retoma en el artículo II de esta investigación*). Sin embargo, en ese proceso de cambio, emergen nuevas actuaciones y modos de participación social. Para Engeström (2015), el proceso de aprendizaje expansivo es una construcción y resolución de contradicciones que evolucionan de manera constante en el sistema de actividad y se puede identificar a través de las acciones que desarrollan sus individuos en ese proceso.

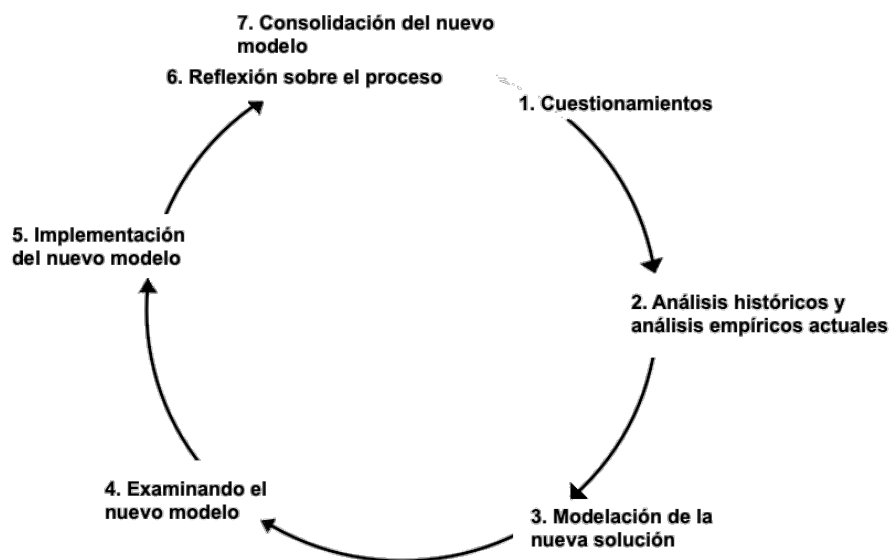
Acciones de Aprendizajes Expansivos

En los sistemas de actividad, los sujetos comparten un objeto común y dirigen sus acciones a ese objeto. Para Engeström, Rantavuori y Kerosuo (2013), la noción de acción de aprendizaje proviene de la obra de Leontyev y se lleva a cabo a través de operaciones

automáticas. La teoría propone que el Aprendizaje Expansivo se puede analizar por medio de una secuencia de acciones que dan la forma a ciclos expansivos en los que se puede identificar cómo evoluciona la actividad. En estos ciclos, las múltiples voces y diferentes puntos de vista de los individuos configuran esfuerzos para el desarrollo objetivo de la actividad. La Figura 3 presenta una secuencia ideal de acciones de aprendizaje que en la teoría se reconoce como el ciclo de acciones de Aprendizaje Expansivo, estas acciones son pasos necesarios para la realización de la actividad de aprendizaje (Engeström et al., 2013).

Figura 3

Ciclo expansivo de acciones de aprendizaje propuesto por Engeström (2000).



La primera acción está orientada al cuestionamiento, crítica o rechazo de las prácticas aceptadas culturalmente; la segunda, al análisis de situaciones que involucran transformaciones

mentales y la búsqueda de argumentos explicativos. La tercera acción, busca establecer un modelo explicativo de las relaciones que se puedan identificar y de esa manera proponer una solución a la problemática. La cuarta acción se orienta a examinar el modelo, explorarlo y experimentar con él para generar comprensiones de la problemática. En la quinta acción el modelo debe ser implementado en la práctica y en esa secuencia, las dos últimas acciones centran su atención en aspectos evaluativos del proceso y la consolidación de resultados que transformen sus modos de actuar.

El ciclo de aprendizaje expansivo no debe interpretarse como una fórmula universal donde se recorren fases o etapas (Engeström & Sannino, 2010); además, es necesario tener en cuenta que las acciones de aprendizaje se producen con acciones no expansivas que pueden generar desviaciones o disturbios en el proceso, algunas acciones son de apoyo, otras neutras o también adversas a la expansión (Sannino et al., 2016); por ello, en esta línea, se hace énfasis en que los ciclos pocas veces aparecen en su forma ideal.

La creación de conocimiento en esta línea teórica es un proceso en aumento (Engeström, 1999) que trasciende la reproducción de discursos dirigidos al desarrollo de aspectos conceptuales de las ciencias, razón por la cual, el Aprendizaje Expansivo se ha utilizado para el desarrollo de procesos investigativos con grupos y organizaciones en diferentes contextos (Engeström et al., 2013; Nummijoki et al., 2018; Wägar, 2011). El desarrollo de trabajos que involucren modelación y tecnologías en esta línea es un campo en el que aún falta investigación dadas las condiciones y características de los ambientes escolares, del trabajo en las aulas y de los tiempos preestablecidos que los profesores tienen para el desarrollo de los programas en matemáticas. En ese sentido, nuevas investigaciones pueden ser parte de la discusión académica

alrededor de la cual se pueden determinar aprendizajes en los estudiantes que desarrollan estos procesos cuando vinculan tecnologías.

En el siguiente apartado se presentan algunos enfoques que se reconocen en la literatura sobre modelación con tecnologías y elementos que permiten su articulación para el trabajo en las aulas.

Modelación con tecnologías digitales en Educación Matemática

Los diferentes enfoques que ofrece la literatura especializada sobre modelación constituyen una gama de opciones para acompañar y fortalecer procesos escolares. Por un lado, hay estudios que presentan diferentes concepciones de la modelación, como una estrategia o enfoque pedagógico (Borba & Villarreal, 2005; Diniz & Borba, 2012), como un medio para vincular el planteamiento de problemas, la creación de preguntas y la investigación (Barbosa, 2003), o como un instrumento de investigación para estimular la experimentación con estudiantes (Bassanezi, 2002), entre otras. Por otro lado, hay estudios que ofrecen visiones de cómo puede desarrollarse la modelación con los estudiantes en diversos escenarios; uno de ellos, en ambientes que vinculan tecnologías digitales para producir conocimiento matemático en espacios experimentales (Molina-Toro & Villa-Ochoa, 2013; Soares & Borba, 2014).

En las últimas décadas, el computador fue una herramienta de referencia que permitió el desarrollo de procesos cada vez más sofisticados y la posibilidad de explorar otras alternativas para el trabajo en las aulas. Para Blum y Niss (1991), las computadoras ofrecían nuevas posibilidades para realizar cálculos numéricos o algebraicos, para dibujar gráficos y para crear nuevos métodos de enseñanza. Los autores afirman que mientras las capacidades del cálculo eran cada vez menos frecuentes, otras capacidades como la resolución de problemas, el trabajo con modelos, la experimentación, la simulación y la modelación computacional tomaron más fuerza. El uso de los computadores generó nuevas formas de trabajo y cambios en la actividad humana donde la actividad creativa de los sujetos produjo nuevos objetos y motivaciones (Tikhomirov, 1999). Las computadoras y las calculadoras gráficas cambiaron el trabajo con problemas de la realidad en actividades de modelación (Greefrath & Vorhölter, 2016), lo que abrió las

posibilidades de estudiar fenómenos con múltiples herramientas computacionales y configurar ambientes de trabajo colaborativo.

En trabajos donde la modelación es vista a través de ciclos (Blum & Leiss, 2007; Stillman & Brown, 2014), el papel de las tecnologías puede ser situacional y depende del uso que le dan los modeladores al interior del proceso (Geiger, 2011). Para Galbraith et al. (2003), la tecnología influye tanto en el trabajo de quien modela como en otras formas de actividad en la que se presentan una serie de procesos y rutinas matemáticas. En esta visión de modelación, la tecnología es un recurso para apoyar procesos de visualización (Daher y Shahbari, 2015), programación de algoritmos (Perrenet y Adan, 2010) para construir o validar modelos (Stillman, 2011) o para simular fenómenos (Frejd y Ärlebäck, 2017), entre otros.

Para Greefrath (2011), hay momentos claves en los que el uso de tecnologías en procesos de modelación implica hacer traducciones entre el problema que se modela y la máquina. La traducción del problema al lenguaje matemático y al lenguaje de la tecnología que se utiliza para modelar puede vincular, según el autor, diferentes fases del ciclo de modelación, lo que implica que la tecnología pueda intervenir en varias de las etapas del proceso, incluso en acciones de control de modelos que pueden ser alterados numéricamente. El rol de la tecnología en procesos que se desarrollan en esta visión de modelación está asociado a condiciones particulares de los problemas que se retomen y se convierten, en algunos casos, en herramientas simplificadoras de procesos matemáticos y acciones procedimentales o, en herramientas que amplían la comprensión de los problemas y establecen patrones comparativos para procesos de validación.

En otras visiones de modelación con tecnologías (Borba & Villarreal, 2005) se resalta el papel de la experimentación y se apoya la idea de hacer matemáticas con problemas de la comunidad a la cual pertenecen profesores y estudiantes. Esta mirada reconoce las posibilidades

que ofrecen escenarios donde las matemáticas aparecen en un espacio experimental de manera natural y a partir de los intereses de los estudiantes pues, según sus autores, son ellos quienes deben elegir el tema a estudiar, ya sea en el campo de las matemáticas o fuera de él. La manera de asumir la modelación con tecnologías en esta línea reconoce cómo los procesos de experimentación cambian la naturaleza del conocimiento al interior de las aulas, convirtiéndose en un método para predecir resultados, manipular los factores que se estudian en diferentes condiciones y validar o refutar hipótesis. En esta perspectiva, se introduce otro tipo de relación entre la experimentación y la tecnología que permite establecer otras maneras de formular conjeturas e ideas nuevas a partir de múltiples representaciones de la información, de diferentes tipos de “pruebas” y de otro tipo de dinámicas en el llamado “ensayo-error”, dada la posibilidad de poder reestructurar el proceso y validarlo ilimitadamente en algunos casos.

Algunos aspectos que Borba y Villarreal (2005) señalan frente al enfoque experimental con tecnología se vinculan con las múltiples posibilidades para repetir experimentos, construir diversas representaciones de un fenómeno y otras maneras de aprender matemáticas. En esta visión de modelación con tecnologías, los dispositivos no son solo herramientas de uso para acompañar el proceso mismo, en su lugar, son parte constitutiva de la modelación. Trabajos en esta perspectiva defienden la idea que cambiar el tipo de tecnología, cambiaría sustancialmente la naturaleza del proceso que se lleva a cabo y las maneras como los estudiantes producen colectivamente su conocimiento (Borba et al., 2016; Molina-Toro & Villa-Ochoa, 2013).

Con la masificación de la internet y la posibilidad de vincular dispositivos móviles (celulares, tabletas, sensores, entre otros), la funcionalidad de la tecnología en los procesos de modelación amplió sus alcances. Por un lado, procesos que se desarrollaron exclusivamente en sistemas de álgebra computacional, software de geometría dinámica o en hojas de cálculo, hoy es

posible desarrollarlos con la ayuda de dispositivos móviles que ejecutan aplicaciones compatibles y ofrecen herramientas con información similar a la que estos programas entregan en un computador. Por otro lado, la información disponible en la red permite a estudiantes y profesores un acceso ilimitado a diferentes fuentes de información, lo que hace posible hacer transferencias entre datos suministrados en diversas plataformas a aplicaciones que convierten esos datos en modelos descriptivos y promueven otro tipo de análisis de las situaciones que se estudian.

Los aspectos que se presentaron en las líneas anteriores amplían el campo de acción en el cual se desarrollan procesos de modelación con tecnologías y, en consecuencia, permiten atender nuevos desafíos para vincular aspectos que emergen, tanto a nivel cultural como a nivel social, para el trabajo de los estudiantes. En los siguientes apartados se presentan elementos teóricos que la literatura especializada ofrece sobre la construcción de modelos, diferentes situaciones que se pueden proponer para el desarrollo de estos procesos en las aulas y una visión filosófica sobre tecnología que se vincula a este estudio.

Modelos y modelación

Los modelos son entidades representativas que, de acuerdo con Gilbert, Boulter y Elmer (2000), pueden evolucionar desde un individuo (modelo mental) hasta un grupo social (modelos históricos o científicos) a través de diálogos, consensos, debates y experimentos, entre otros. Los modelos pueden caracterizarse como descriptivos, explicativos o predictivos y siempre están relacionados con un objeto, un sistema, fenómeno o proceso (Van Driel & Verloop, 1999).

Existen diferentes modos de representar un modelo en función del medio que se usa para realizar la representación (Boulter & Buckley, 2000). Al respecto, una tipología simplificada de esos modos de representación fue presentada por Gilbert et al. (2000), a saber:

- Concreto: si el modelo se representa a partir de materiales que constituyen el objeto.
- Verbal: si se utilizan metáforas o analogías.
- Matemático: si se utilizan expresiones matemáticas.
- Visual: si se hace uso de representaciones en forma de gráficos o diagramas.
- Simbólico: si vincula los modos visual, verbal y matemático.
- Gestual: si implica acciones o movimientos.

Adicional a estos modos de representación, Boulter y Buckley (2000) analizan otras cualidades de los modelos en función de sus características y sostienen que otros atributos que pueden encontrarse en la representación pueden ser: cualitativos o cuantitativos, estáticos o dinámicos y, determinísticos o estocásticos. Para estos autores, las decisiones que se tomen en la construcción de un modelo son las que determinan un modo de representación.

Investigadores como Blum, Niss y Galbraith (2007) afirman que la construcción de modelos puede ser un vehículo para apoyar los procesos de aprendizaje de las matemáticas y hace parte del porqué las aplicaciones matemáticas y la modelación deben tener un lugar en los planes de estudio académicos. Una contribución de la modelación en matemáticas se relaciona con la construcción de modelos cuyas expresiones simbólicas están cargadas de significado y simplifican la visión sobre la situación que se modela; para Malvern (2000), las expresiones cortas que ofrecen las formulaciones matemáticas permiten contemplar su complejidad y dotar sus afirmaciones de cierta universalidad.

En problemas de elaboración de modelos convergen enfoques epistemológicos que estudian características de las situaciones que se modelan con fines didácticos y enfoques cognitivos que estudian procesos que intervienen al realizar tareas de modelación (García et al., 2006). En ese sentido, la construcción de modelos en procesos de modelación contribuye tanto al

desarrollo de competencias que se relacionan con la actividad científica, como al aprendizaje de las matemáticas en contextos donde el estudio de fenómenos y la solución de problemas cargan de significado las múltiples representaciones que se construyen al interior de estos procesos.

Brown e Ikeda (2019), al analizar un conjunto de estudios sobre modelación, sostienen que el mundo real tiene un papel trascendental en la elaboración de modelos matemáticos, ya que quien modela es consciente de que la solución de una tarea debe tener sentido en la realidad.

Las tareas de modelación

En múltiples visiones que ofrece la literatura sobre modelación, el uso de tareas en clase de matemáticas es recurrente y el análisis de problemas determina diferentes maneras en que se pueden vincular procesos de modelación a la enseñanza de las matemáticas. En algunos escenarios, los estudiantes se enfrentan a tareas complejas con problemas procedentes de la industria o la investigación que se simplifican y se introducen de manera breve en las aulas (Greefrath & Vorhölter, 2016); en otros, a tareas con problemas que involucran monumentos urbanos, construcciones civiles u otros entornos y contextos de la realidad (Blum, 2015; Schukajlow et al., 2012) y; también, a tareas que consolidan proyectos en los cuales los propios estudiantes eligen libremente los temas de trabajo (Borba et al., 2016).

Las tareas son unidades de enseñanza que ayudan a integrar y organizar la instrucción matemática para responder a demandas educativas, buscan aportar al trabajo autónomo de los estudiantes y a disminuir la complejidad matemática (Krainer, 1993). En tareas de modelación, quien resuelve la tarea comienza con la realidad, después centra su atención en las matemáticas que podrían ser útiles para resolver la tarea y luego regresa a la realidad para determinar si esas matemáticas responden al problema del mundo real (Stillman & Brown, 2019).

La posibilidad de articular las matemáticas a diversos contextos y trabajar problemas o fenómenos que impongan desafíos a estudiantes y establezcan otras dinámicas en la construcción de su conocimiento, es un aspecto que aporta a la consolidación de la modelación (Bicudo & Klüber, 2011; Blum, 2011; Borromeo-Ferri, 2007; Villa-Ochoa, 2013). En ese sentido, los diferentes tipos de tareas son una parte constitutiva de los procesos de modelación en las aulas pues, en algunos casos, como lo menciona Krainer (1993), facilitan la generación de preguntas más complejas y brindan otras posibilidades de reflexión y acción de los estudiantes.

Las tareas materializan las diferentes maneras en que es posible hacer modelación en ambientes escolares (Villa-Ochoa et al., 2017) y, bajo ciertas circunstancias que vinculan tecnología, pueden ser un insumo para extender los alcances de estos procesos en las aulas. Para Greefrath y Siller (2017), en tareas de modelación, los estudiantes utilizan tecnologías digitales de diversas maneras, entre ellas: investigar, dibujar, visualizar, calcular, medir y experimentar; lo que muestra la influencia de estas herramientas cuando los estudiantes trabajan en estos ambientes.

La discusión sobre el impacto de las tareas de modelación en la enseñanza de las matemáticas es amplia y la literatura ofrece estudios que se han ocupado de extender la comprensión de las mismas para orientar el diseño de problemas o fenómenos de estudio; un esfuerzo en esta línea se presenta, por ejemplo, en los trabajos de Maas (2010) y Villa-Ochoa et al. (2017), quienes ofrecen esquemas de clasificación y tipos de tareas para el desarrollo de procesos de modelación en las aulas. Para Ortega et al. (2019), se deben incluir tareas en las que el uso de tecnologías permita que los estudiantes reflexionen sobre sus decisiones al trabajar problemas del mundo real con las matemáticas. Una manera de asumir la tecnología de acuerdo con los intereses de este estudio se presenta a continuación.

Una visión filosófica sobre tecnología

El interés por abordar el concepto de tecnología surgió de la necesidad de encontrar elementos que apoyen su conceptualización y ayuden a comprender sus alcances y limitaciones en la actividad escolar. En ese sentido, las dimensiones sociales, culturales y académicas sobre el estudio de la modelación con tecnologías permitieron analizar aspectos clave del Aprendizaje expansivo coherentes con una visión de tecnología en un contexto socio histórico cultural que considera aspectos transformadores de la actividad humana.

La perspectiva filosófica de tecnología que presentó Mitcham (1994) y retomó Vries (2016) consolida un enfoque que conceptualiza este término en un sentido amplio de la actividad transformadora del entorno natural. Para Mitcham, la influencia de diferentes artefactos tecnológicos en las ciencias permite distinguir con mayor claridad preguntas que surgen entre la técnica y la tecnología para comprender las limitaciones en las acciones de los sujetos y cuándo esas acciones obedecen a formas de operar espontáneas y desprovistas de conocimiento y arte. El análisis del espectro de los artefactos que presenta este autor es amplio y, como parte de ello, se hallan algunas ideas en las que la interpretación de máquinas y herramientas como extensión del cuerpo humano está presente. Mitcham (1994) aborda el concepto de tecnología de múltiples maneras y presenta cuatro formas en que se puede conceptualizar, a saber:

- Objeto: como herramientas materiales que son fabricadas por el hombre.
- Conocimiento: una manifestación que refleja principios éticos y los múltiples usos y distinciones que tienen los objetos.
- Actividad: eventos en los que se unen el conocimiento y la voluntad para crear nuevas herramientas para su uso.

- Volición: una manifestación que conecta los artefactos, el conocimiento y su uso en diferentes caminos a elección.

Las múltiples manifestaciones de la tecnología, de acuerdo con Vries (2016), amplían concepciones que solo hacen referencia a herramientas de uso y centran la atención en otras cuestiones como: las implicaciones del uso del artefacto tecnológico, procesos sociales a partir de ese uso y las creencias culturales que se producen por ello. Las perspectivas que se desprenden de esta visión de tecnología para el campo de la Educación Matemática son amplias pues, a pesar de existir intenciones políticas en algunos países para que dispositivos móviles sean prohibidos en las aulas, los avances tecnológicos y los múltiples roles de las tecnologías parecen tomar más fuerza, como en este caso, para el desarrollo de procesos de modelación. En el primer artículo de este estudio (Molina-Toro et al., 2019) se desarrollan ideas complementarias en la línea de modelación con tecnologías digitales y diferentes usos de estas herramientas al interior de los procesos de modelación.

Metodología

En este documento se presentan los resultados de una investigación que informa sobre aprendizajes potencialmente expansivos en el desarrollo de procesos de modelación con tecnologías digitales. En la investigación se adoptó una visión del aprendizaje que involucra un estudio tanto de sujetos que participan de una actividad colectiva como del contexto en el que ella se desarrolla, interacciones y relaciones de poder entre sus participantes, sus alcances, limitaciones, posibilidades de transformación y la mediación de artefactos. Para determinar el enfoque metodológico fue necesario analizar la convergencia de enfoques de investigación compatibles con la teoría de la actividad histórico cultural y a partir de allí, definir un método para estudiar interacciones humanas en un contexto escolar. Además, fue necesario analizar el papel de los artefactos en las prácticas sociales y estudiar las transformaciones expansivas que se producen en esos contextos donde se desarrollan los procesos escolares.

En la literatura se reconocen estudios empíricos en modelación con tecnologías digitales que se consolidaron a partir de datos cualitativos que describen desempeños de los estudiantes cuando utilizan diversas herramientas (Diniz & Borba, 2012; Marshall & Carrejo, 2008; Neves et al., 2013; Soares & Borba, 2014). También, se encuentran trabajos que integran Educación Matemática y Teoría de la Actividad para estudiar interacciones entre profesores en la formulación y solución de problemas de modelación (Galleguillos & Borba, 2018), la influencia de la internet en la producción de conocimiento matemático (Souto & Borba, 2016) y acciones de un grupo de alumnos cuando eligen un tema para iniciarse en investigación y resolver tareas de modelación (Canedo & Kistemann, 2017), entre otros. Estos estudios ofrecen evidencia de la

necesidad de adoptar una perspectiva de investigación que permita describir las actuaciones recíprocas de los participantes, analizar sus exteriorizaciones y observar el uso de diferentes recursos que utilizan para resolver tareas.

En correspondencia con los estudios anteriores, con el objetivo de esta investigación, los referentes teóricos propuestos y la necesidad de indagar por i) *¿Qué roles asumen las tecnologías digitales cuando se integran a procesos de modelación en Educación Matemática?*, ii) *¿Qué usos tienen las tecnologías digitales al interior de estos procesos?*, iii) *¿Qué contradicciones se identifican en estudiantes que participan en procesos de modelación en Educación Matemática con sus propias tecnologías digitales?* y iv) *¿Qué aprendizajes se originan en procesos de modelación en los cuales los estudiantes utilizan sus propias tecnologías digitales?*, esta investigación se enmarcó en una perspectiva cualitativa que permitió, como señalan Aravena et al. (2006), tener una visión particular de las acciones, los eventos y las circunstancias de las personas que están siendo estudiadas y, de igual manera, los contextos en los cuales estuvieron inmersos.

Dadas las características de las dos primeras preguntas, el enfoque cualitativo se desarrolló a través de una revisión crítica de literatura que amplió la comprensión conceptual de los procesos de modelación en las aulas y la incidencia que dentro de ellos tiene el uso de tecnologías digitales. Para la tercera y cuarta pregunta, la perspectiva cualitativa de investigación brindó la posibilidad de hacer comparaciones, identificar las maneras en que los participantes utilizaron sus herramientas tecnológicas, llevaron a cabo acciones dirigidas a objetos y construyeron modelos explicativos y respuestas a diversos interrogantes. Estos aspectos están en coherencia con los aportes de Hernández et al. (2010), quienes afirman que, en una aproximación

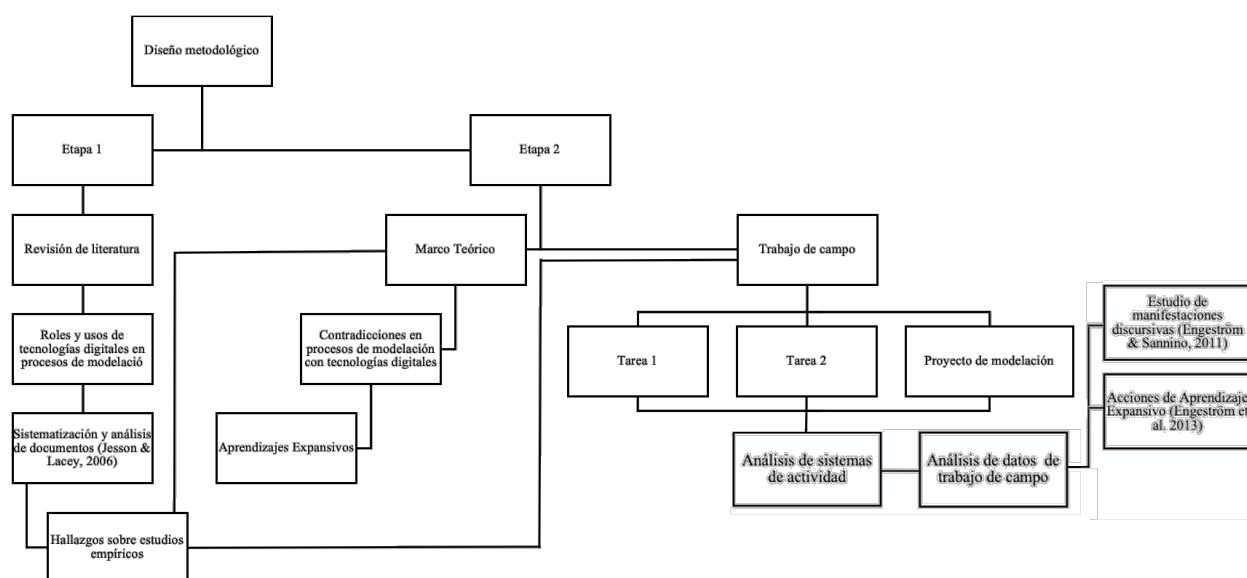
cualitativa, el investigador se puede introducir en la experiencia de los participantes para construir, interpretar y evaluar el desarrollo de los sucesos.

El diseño de la investigación

En atención al objetivo de este estudio y a la naturaleza de las preguntas que se responden en este trabajo, la investigación se desarrolló en dos etapas como se presenta en la Figura 4. En la primera etapa se realizó una revisión crítica de literatura que indagó sobre los usos y roles de las tecnologías digitales en los procesos de modelación y se encontró evidencia de cómo se caracterizan los aprendizajes cuando los estudiantes participan en estos procesos. En la segunda etapa se consolidó el marco teórico que adoptó esta investigación y se desarrolló el trabajo de campo del cual se desprenden aportes teóricos y metodológicos en la línea de este estudio.

Figura 4.

Etapas de desarrollo de la investigación



Para la revisión de literatura se siguieron las orientaciones que presentaron Jesson y Lacey (2006); se realizó un rastreo de información con criterios de búsqueda y selección de material bibliográfico, se garantizó un estudio sobre publicaciones de los últimos 10 años y se generaron criterios de inclusión de documentos que a la vez permitieron evitar sesgos de publicación. Los documentos seleccionados se sistematizaron en el software Atlas.ti y se crearon códigos que delimitaron dos categorías de análisis con relación a las preguntas de investigación para esta etapa del proceso. Además, se agruparon todos los elementos teóricos y empíricos que permitieran encontrar evidencia del papel de las tecnologías cuando se integran a procesos de modelación y el uso que ellas tienen en el desarrollo de estos procesos. En el artículo I de este documento se presenta de manera amplia el desarrollo de esta parte del trabajo y los elementos teóricos que permitieron atender la primera y la segunda pregunta de investigación.

Los hallazgos de la revisión de literatura ofrecieron información sobre los roles y usos de las tecnologías cuando los estudiantes desarrollan procesos de modelación, los tipos y características de las tareas que resuelven y aspectos que se relacionan con conceptos y procedimientos que se abordan en el desarrollo de estos procesos. Estas consideraciones fueron un insumo para delimitar aspectos metodológicos para el diseño de estudios empíricos donde tradiciones culturales y prácticas sociales intervienen en los procesos de enseñanza y también, para identificar elementos teóricos que estuvieron en correspondencia con el desarrollo y análisis de procesos de modelación con tecnologías. En ese sentido, los resultados de la revisión de literatura aportaron tanto a la identificación del marco teórico de esta investigación como al diseño, estructura y desarrollo del trabajo de campo propuesto en la segunda etapa.

Para atender a la tercera pregunta de investigación, se analizaron las manifestaciones discursivas de estudiantes que resolvieron tareas de modelación e hicieron uso de sus dispositivos

digitales. Estudiar las maneras en que los estudiantes exteriorizaron puntos de vista sobre las tareas de modelación y sus diversas propuestas de solución, permitió hallar evidencia de la presencia de contradicciones en el desarrollo de la actividad y cómo éstas fueron evolucionando hasta dar indicios de posibles transformaciones del objeto de actividad. Asimismo, se analizaron las condiciones que permitieron una transformación colectiva de la actividad como resultado de las tensiones internas de quienes participan en ella. En el artículo II de esta investigación se presenta un desarrollo amplio de los elementos teóricos y metodológicos que consolidaron el estudio de las contradicciones en esta parte del trabajo.

La cuarta pregunta de investigación se atendió a partir del análisis de las acciones de aprendizaje expansivo en los sistemas de actividad que se configuraron al trabajar en las tareas de modelación. La secuencia que van determinando las acciones de los participantes de la actividad son, bajo la perspectiva teórica, una manera en que puede identificarse la presencia de aprendizajes expansivos en periodos de tiempo acordes con el desarrollo las tareas. En esta parte del trabajo se analizó tanto las maneras como se fueron manifestando las acciones por parte de los participantes, como el orden en que aparecieron en el desarrollo de la actividad. La secuencia de acciones de aprendizaje que emergieron allí y el papel de las tecnologías en este proceso se presenta de manera amplia en el artículo III de este trabajo.

Como se mencionó antes, como una parte constitutiva de este estudio, se analizaron aprendizajes que emergen en procesos de modelación en los cuales estudiantes de un programa de formación para futuros profesores hacen uso de sus propias tecnologías digitales. Sin embargo, en la perspectiva del Aprendizaje Expansivo, atender este objetivo implica responder en términos de las acciones orientadas a objetos, analizar en detalle procesos, tareas, roles de las tecnologías y, contextos en los cuales se desarrolla la actividad matemática y las contradicciones

que allí aparecen. En el siguiente apartado se presentan las herramientas metodológicas que se adoptaron para el desarrollo de la parte empírica de este estudio.

Herramientas metodológicas para el desarrollo del trabajo de campo de la investigación

El método

La necesidad de indagar qué aprenden los estudiantes, cómo lo aprenden, qué acciones promueven su aprendizaje, fueron aspectos determinantes para buscar un método para esta etapa de la investigación. Estas necesidades, en coherencia con estudios empíricos en la línea del Aprendizaje Expansivo (Engeström, 1987), permitieron identificar un método de investigación que configuró diversos escenarios de indagación en los cuales se recopiló información y se analizaron, interpretaron y validaron datos en correspondencia con los referentes teóricos y las preguntas de investigación. En coherencia, el método de análisis de sistemas de actividad como lo sugiere Yamagata-Lynch (2010), ofreció la posibilidad de analizar datos cualitativos para mejorar la comprensión de la actividad escolar en procesos de modelación con tecnologías digitales y tener herramientas analíticas para interpretar y validar los datos; además, permitió informar causas y efectos en interacciones dinámicas complejas que ocurren en las relaciones humanas (Cohen et al., 2007).

Para Yamagata-Lynch (2010), el análisis de sistemas de actividad a través de un estudio de casos, es un método que dota de sentido datos complejos del mundo real y proporciona un marco para construir interpretaciones e implicaciones sistémicas entre los datos; además, permite analizar en un entorno natural, situaciones en las que un grupo de personas participan en una actividad colectiva. Este método se fundamenta en el análisis de la actividad humana y se

representa por medio del diagrama triangular propuesto por Engeström (1987) para identificar la configuración de la actividad y describir las relaciones entre los participantes, su entorno social y aspectos relevantes para examinar las formas de acción en la actividad. En el modelo triangular se analizan cambios en situaciones contextuales donde las reglas regulan las interacciones aceptadas entre sus participantes y la comunidad. Además, de manera simultánea, se analiza la mediación de artefactos culturales y los efectos que producen en el desarrollo de la actividad.

Para mantener la compatibilidad teórica entre el Aprendizaje Expansivo y la investigación cualitativa, se adoptó el estudio de casos de una manera operativa en correspondencia con los propósitos analíticos implicados en el análisis de los sistemas de actividad y su imposibilidad de separar sus componentes (Yamagata-Lynch, 2010). En esta perspectiva, los sistemas de actividad son *unidades básicas de análisis* que conducen a conocimientos sobre el sujeto constituyente de la actividad humana (Cole & Engeström, 1993) y, las acciones dirigidas a objetivos y sus entornos de actividad o las actividades orientadas a objetos, pueden ser identificados como un *caso* (Yamagata-Lynch (2010). Bajo esta premisa, el modelo triangular, como un sistema que se auto regula y se delimita, ofreció una herramienta que permitió el estudio de las acciones dirigidas a objetos y el estudio de transformaciones del objeto de la actividad.

Los participantes

En la perspectiva del Aprendizaje Expansivo, los sujetos tienen un rol fundamental en todo el diseño e implementación de la investigación. Por ello, para observar la actividad de aprendizaje en un proceso de modelación con tecnologías digitales se deben tener en cuenta las condiciones particulares de los estudiantes que participan en ella, sus intereses, sus necesidades y sus limitaciones. En este estudio, los participantes fueron 15 estudiantes (11 hombres y 4

mujeres) de un curso de modelación que pertenece al programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia en Colombia. El curso se ubica en cuarto año del programa de formación y puede ser matriculado por estudiantes que hayan aprobado disciplinas como Cálculo, Fundamentos de Álgebra y seminarios de didáctica y pedagogía.

El Programa de Licenciatura tiene cinco años de duración y el curso lo pueden tomar estudiantes de los dos últimos años. Las posibilidades de participar del curso de modelación sin estar en el mismo año del programa, permitió que el grupo de estudiantes fuera heterogéneo en relación con la formación disciplinar en matemáticas. Por ello, mientras que algunos participantes habían aprobado el curso de Cálculo III, otros estaban participando de manera paralela en el Cálculo II y, por lo tanto, el nivel de trabajo y la profundidad en el análisis matemático de los fenómenos no era homogéneo en el grupo.

Por los objetivos de aprendizaje del curso de modelación y la oportunidad de articular en su desarrollo curricular elementos teóricos y didácticos que se abordaron en otros niveles de formación del programa, la universidad permitió participar de él en un periodo de vacaciones en el año 2019. El curso se desarrolló en 16 sesiones de cuatro horas, dos veces por semana y las tareas que se relacionaron en este estudio, se trabajaron en la segunda, la séptima y la décimo quinta sesión.

Para atender a propósitos de formación del curso dirigidos a involucrar a los estudiantes en experiencias de modelación que se articulen con la práctica docente y la investigación, se buscó propiciar escenarios donde los participantes pudieran manifestar de manera espontánea sus puntos de vista y hacer uso de todos los recursos tecnológicos que tuvieran a su disposición. Además, se trabajaron temáticas como: la modelación como proceso, diferentes concepciones

acerca de modelación, modelación por proyectos y tareas de modelación. Para el desarrollo de la investigación se solicitó el consentimiento informado de cada estudiante y para la presentación de los resultados se utilizaron seudónimos con el fin de preservar la identidad de cada uno de ellos.

Unidades de análisis

En correspondencia con el método de análisis de sistemas de actividad, la unidad de análisis está conformada por la actividad orientada a los objetos en estos sistemas (Engeström, 1987; Yamagata-Lynch, 2010). En ese sentido, para el caso de este estudio, la unidad de análisis agrupó la actividad colectiva de los estudiantes con todos aquellos datos que permitieron identificar cómo abordaron los procesos de modelación, el vínculo de los dispositivos tecnológicos en sus acciones a través de los ciclos potencialmente expansivos, las decisiones que tomaron al momento de realizar tareas al interior del curso y los elementos matemáticos que incorporaron a su actividad cotidiana en el curso. Las unidades de análisis de esta investigación están en correspondencia con los sistemas de actividad que se configuraron en el trabajo con dos tareas y un proyecto final de modelación.

Producción de registros

En estudios empíricos que analizan sistemas de actividad, es necesario comprender y comunicar que la actividad incluye tanto experiencias observables como actividades mentales que son exteriorizadas por los sujetos y, por lo tanto, la ubicación física donde se lleva a cabo la investigación suele ser el escenario general donde tienen lugar las actividades orientadas a objetos por parte de los participantes (Yamagata-Lynch, 2010). Bajo esta premisa, los espacios físicos en los cuales se desarrolló el curso fueron los escenarios donde se recopilaban datos de

diversa naturaleza (producciones orales, escritas, gestuales, entre otras) y se observaron experiencias y actos comunicativos de los estudiantes para lograr una mejor integración de cada conjunto de datos con cada sistema de actividad. Otra fuente de datos se constituyó a partir de las observaciones a trabajos que se desarrollaron fuera del aula y a diálogos en espacios de asesoría con los estudiantes. A continuación, se presentan los instrumentos que se utilizaron para recopilar datos en coherencia con el análisis de sistemas de actividad en los cuales retoman orientaciones de investigadores como Denzin y Lincoln (2012, 2017), Yin (2009) y Corbin y Strauss (2015).

- La observación

En la perspectiva de la Teoría de la Actividad, las observaciones le permiten al investigador identificar situaciones en las que los participantes se vinculan a actividades orientadas a objetos destacados para el estudio (Yamagata-Lynch, 2010). En este sentido, la observación permitió que el investigador principal de este estudio, en calidad de profesor del curso con otros dos profesores co-investigadores, se introdujeran en el ambiente natural de los estudiantes e identificaran ventajas y limitaciones de los participantes al integrar tecnologías digitales en los procesos de modelación. Asimismo, la observación permitió identificar acciones de los participantes, diversas maneras como aparecieron cuestionamientos, contradicciones y soluciones a diferentes problemáticas.

Para evitar sesgos y prejuicios al interior de la investigación como lo advierte Yin (2009), se requirió de un diálogo continuo que permitiera contrastar las observaciones que realizó el docente investigador, con los docentes co-investigadores que participaron en el curso, el marco teórico y otras fuentes de evidencia que se produjeron en el desarrollo del trabajo de campo de este estudio. Discusiones académicas con otros investigadores y miembros de grupos de investigación en la línea de la Teoría de la Actividad, también permitieron reducir el efecto de

sesgos que puedan aparecer en el desarrollo de la investigación, además de ampliar las posibilidades de interpretación de datos empíricos que se recopilaron de diversas fuentes.

- Entrevista

La necesidad de establecer un diálogo fluido con los estudiantes para centrar la atención en preguntas y conjeturas que emergieron al desarrollar procesos de modelación con tecnologías digitales implicó, por parte del investigador, una conducta que, en coherencia con este estudio, generara interacciones entre el investigador y los estudiantes. Por lo tanto, se sostuvieron diálogos con los estudiantes en el entorno natural en el que se desarrollaron las sesiones del curso y conversaciones en espacio de asesorías a partir de preguntas que se prepararon previamente. Además, se buscó que los participantes se sintieran cómodos para expresar sus puntos de vista y, como lo sugieren algunos investigadores en enfoques cualitativos (Yamagata-Lynch, 2010; Yin, 2009), que la formulación de preguntas surgiera de manera natural.

- Documentos y grabaciones

Los registros escritos, las grabaciones de audio y video que se obtuvieron de todas las sesiones de clase, y todos los productos de los estudiantes en los diferentes escenarios en los que se desarrolló la investigación, constituyeron el conjunto de datos de este estudio. Con el análisis de documentos se encontraron puntos de convergencia entre datos que se extrajeron de la observación y los diálogos con los estudiantes en el desarrollo de cada sesión de trabajo y de los momentos en que se realizaron asesorías.

Análisis de los datos

En la segunda etapa, que vinculó el trabajo de campo, la estructura de análisis de datos obedeció a orientaciones de análisis de sistemas de actividad como lo sugieren investigadores en

esta línea (Engeström, 1987, 2015; Engeström et al., 2013; Yamagata-Lynch, 2010) y a herramientas analíticas que presentaron Corbin y Strauss (2015), para analizar y comparar los datos en cada una de las fases del trabajo de campo e interpretarlos a la luz de los referentes teóricos. El reconocimiento de las actuaciones y de las manifestaciones de los estudiantes frente al uso de dispositivos móviles al momento de realizar una tarea o elaborar conjeturas en interacción con otros sujetos, consigo mismo y con múltiples medios digitales, orientó la atención hacia cómo los estudiantes establecieron diálogos mutuos, elaboraron explicaciones de una situación problemática y, posteriormente, exteriorizaron por medio de representaciones, verbalizaciones o registros escritos, esas interpretaciones y análisis que estructuraron en el estudio de diversos fenómenos.

En la línea de la Teoría de la Actividad, el análisis de datos es un proceso inductivo que dirige la descripción de los participantes, sus actividades y el entorno de la actividad (Yamagata-Lynch, 2010). Por lo tanto, con el fin de desarrollar un proceso sistémico de análisis para atender tanto a la tercera como a la cuarta pregunta de investigación, los registros que se obtuvieron en el trabajo de campo se importaron al software Atlas.ti para trabajar de manera simultánea con diferentes fuentes de información y en coherencia con Corbin y Strauss (2015), probar diferentes puntos de vista de los datos. Adicionalmente, se generó una estructura de análisis y codificación que permitiera estudiar de manera conjunta los sistemas de actividad que se configuraron en las sesiones del curso.

El artículo II presenta una estructura de análisis de datos en la cual se centró la atención en las señales lingüísticas que propusieron Engeström y Sannino (2011) para identificar manifestaciones discursivas de las contradicciones que promueven transformaciones de la actividad. Las herramientas analíticas propuestas por Corbin y Strauss (2015) permitieron la

construcción de parámetros para realizar una codificación teórica en relación con las señales lingüísticas y delimitar un marco de análisis de los datos que permitiera: analizar los diálogos y exteriorizaciones de los estudiantes, realizar un proceso de codificación e identificación de las contradicciones presentes en los sistemas de actividad y, analizar la evolución de las contradicciones a través de comparaciones entre la manera como se desarrolló el proceso de modelación y la teoría.

En el artículo III, el marco de análisis de los datos se desarrolló en correspondencia con las acciones orientadas al objeto de la actividad y el ciclo de Aprendizaje Expansivo; la codificación teórica (Corbin & Strauss, 2015) se derivó del conjunto de tipos y subtipos de acciones de aprendizaje propuestos en diversos estudios en esta línea (Engeström, 2015; Engeström et al.,2013).

De manera paralela a la codificación teórica, se generaron códigos para identificar la influencia de los dispositivos móviles en las acciones de los estudiantes al desarrollar procesos de modelación y generar interpretaciones de cómo abordaron la realización de tareas al interior del curso, qué decisiones tomaron al momento de usar sus dispositivos y cómo transformaron sus maneras de solucionar las tareas. Estas consideraciones atendieron a organizar conjuntos de datos en el software Atlas.ti que permitieron, además de analizar las contradicciones que emergieron en el curso y comprender el desarrollo de los ciclos potencialmente expansivos, tener evidencia de posibles transformaciones del objeto de la actividad que se relacionaron con el vínculo de tecnologías digitales. En la Tabla 1 se presentan elementos constitutivos del análisis de los sistemas de actividad en esta etapa de la investigación.

Tabla 1

Análisis de sistemas de actividad en un curso de modelación para futuros profesores de matemáticas

Elementos que constituyen el análisis de sistemas de actividad	Análisis de sistemas de actividad en artículo II	Análisis de sistemas de actividad en artículo III
1. Pregunta de investigación	¿Qué contradicciones se identifican en estudiantes que participan en procesos de modelación en Educación Matemática con sus propias tecnologías digitales?	¿Qué aprendizajes se originan en procesos de modelación en los cuales los estudiantes utilizan sus propias tecnologías digitales?
2. Contexto de los datos	Estudio en un curso de modelación que se realizó en el año 2019 en un programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia en Colombia.	
3. Fuente de los datos	Manifestaciones, interacciones y exteriorizaciones entre un grupo de estudiantes que se obtuvieron en audio y video, notas de campo y producciones escritas de los participantes.	
4. Análisis de los datos	Codificación teórica (Corbin & Strauss, 2015), señales lingüísticas (Engeström & Sannino, 2011)	Codificación teórica (Corbin & Strauss, 2015), tipos y sub tipos de acciones de Aprendizaje Expansivo (Engeström, 2015; Engeström et al.,2013)

5. Unidades de análisis	Actividad colectiva de estudiantes que participan en procesos de modelación, vinculan dispositivos tecnológicos en sus acciones e incorporan elementos matemáticos al realizar tareas en el curso.	
6. Usos de sistemas de actividad	Herramienta para identificar niveles de las contradicciones en la actividad colectiva de los estudiantes.	Herramienta para identificar y analizar la secuencia de acciones de aprendizaje que llevaron a cabo los estudiantes al trabajar en tareas de modelación.
7. Resultados	Se identificaron niveles de contradicciones de los estudiantes a través de sus manifestaciones discursivas. Se analizan posibles transformaciones del objeto de la actividad.	Se representaron secuencias de acciones a través de espirales de aprendizaje potencialmente expansivas junto a los sistemas de actividad que se configuraron en cada tarea.

Validez del estudio

Investigadores que orientan enfoques cualitativos para desarrollar investigaciones (Corbin & Strauss, 2015; Denzin & Lincoln, 2012; Hernández et al., 2010; Stake, 2007; Yin, 2009) manifiestan que, en este tipo de estudios no se pretende generalizar los resultados con otros similares ya que los hallazgos atendieron a condiciones particulares de las personas que se vincularon a la investigación. En coherencia, la validez del estudio se fundamenta en tres elementos afines a la propuesta de Cortés (1997) para abordar la confiabilidad y validez en

estudios cualitativos, i) el investigador estuvo presente en el escenario donde se desarrolló el fenómeno en estudio; ii) el estudio presenta una descripción del escenario, los participantes y la forma como se recopilaron y analizaron los datos para presentar los principales hallazgos de la investigación y, iii) la triangulación de diversas fuentes de información.

Las observaciones, entrevistas y documentos; y también, el rigor con el cual se construyeron las explicaciones e interpretaciones finales, constituyeron un insumo que permitió triangular diferentes fuentes de información y proporcionar la transferencia de resultados a otros colectivos académicos. Al respecto, los espacios de presentación de resultados parciales con otros estudiantes del mismo nivel de formación y el colectivo de investigadores que hacen parte del grupo de profesores del programa doctoral, en calidad de miembros adscritos a diferentes grupos de investigación, permitieron la discusión y el refinamiento de los resultados de este estudio en comparación con el marco teórico y los datos que se obtuvieron en el trabajo de campo.

La pasantía doctoral permitió la comparación de resultados con otros investigadores en la línea y promovió formas de triangulación de la teoría (Stake, 2007) en las que se discutió, entre otros aspectos, la confiabilidad de los hallazgos y posibles maneras de ampliar la comprensión teórica y empírica de la investigación. Estos escenarios, en la perspectiva de Esteban (2000) ofrecen una forma de validez del estudio en términos de una construcción social del conocimiento en la que emergen otras formas de interpretación. Asimismo, se realizó una revisión de todo el proceso y sus resultados tanto por pares internos de la universidad y los asesores de este estudio, como por pares externos que permitieron encontrar un consenso en los argumentos e interpretaciones para la presentación de este informe.

Resultados

Como se mencionó en líneas anteriores, los resultados de este estudio se consolidan en un conjunto de tres artículos que atienden de manera particular al objetivo y las preguntas de investigación que fueron propuestas. Cada artículo, como documento independiente, tiene la intención de presentar los hallazgos esenciales de cada etapa del proceso de investigación y atiende a condiciones generales que exige la comunidad académica nacional e internacional para su publicación.

El conjunto de artículos representa un único proyecto de investigación y, en correspondencia con la forma de reportar sus resultados y mantener un hilo argumentativo, dos de ellos comparten una estructura semejante para la presentación del marco teórico y su metodología. Sin embargo, los hallazgos se ocupan de presentar evidencia de los elementos constitutivos que responden la pregunta de investigación que se propone en cada uno de ellos.

En el primer artículo se presenta una revisión de literatura de la cual se desprenden características de los usos y los roles que tienen las tecnologías digitales en procesos de modelación y aspectos teóricos que llaman la atención en la necesidad de ampliar la investigación sobre aprendizajes que emergen en estos procesos. En el segundo y tercer artículo, respectivamente, se presenta un análisis de las contradicciones y aprendizajes potencialmente expansivos que manifestaron los estudiantes al resolver tareas de modelación en las cuales vincularon sus propios dispositivos digitales.

Artículo I. Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics

Education

(Una versión mejorada de este artículo, en idioma inglés, se publicó en el año 2019 en EURASIA
Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(8), pp. 1-13)

Tendencias en la investigación sobre tecnologías digitales y modelación en Educación Matemática

Resumen

Este documento presenta una revisión de literatura que analiza la articulación de la modelación y las tecnologías digitales en el ámbito de la Educación Matemática. La revisión se propuso encontrar evidencia de los usos de tecnologías digitales en procesos de modelación y sobre cómo se transforman algunas visiones para el trabajo en el aula con los estudiantes. Para tal fin, se analizaron 12 capítulos de libros, 29 artículos y un libro. Los resultados muestran, por un lado, diferentes roles que desempeña la tecnología cuando se articula a un proceso de modelación (recurso en el proceso o medio que reorganiza el proceso) y por otro, los usos que se dan a diversas herramientas tecnológicas en estudios empíricos que fueron analizados. Los hallazgos presentan una nueva categoría que extiende la clasificación de las tecnologías y sugieren la necesidad de ampliar la investigación tanto teórica como empírica para determinar una mejor comprensión del impacto de las herramientas digitales en procesos de modelación, además de llamar la atención sobre la inclusión de dispositivos móviles en estudios futuros.

Palabras clave: Educación Matemática, Modelación, tecnologías digitales.

1. Introducción

La modelación es un dominio de investigación al interior de la Educación Matemática con un alto grado de consolidación en las últimas tres décadas (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Frejd, 2013). Los eventos académicos, comunidades, series de libros y revistas especializadas en la temática se convierten, entre otros, en evidencia de ello. El estudio de la modelación se justifica por sus contribuciones para el trabajo matemático en las aulas, las habilidades

investigativas que se promueven y las posibilidades de establecer vínculos entre la realidad y las matemáticas (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

A nivel internacional las investigaciones sobre modelación tienen diversidad de enfoques, y perspectivas tanto para la investigación como para su desarrollo en las aulas (Kaiser & Sriraman, 2006; Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, & Sánchez-Cardona, 2017). También se encuentran trabajos que analizan el desarrollo de sus procesos, diversos roles que asumen los estudiantes y los profesores, y los medios y recursos que lo constituyen (Lingefjärd & Meier, 2010; Pereira & Júnior, 2013), otras investigaciones ofrecen evidencias de que existe una estrecha relación entre modelación y tecnología, y sus repercusiones en múltiples aprendizajes de los estudiantes (Neves & Teodoro, 2014; Soares & Borba, 2014; Trigueros, 2009).

En la literatura, la modelación y las tecnologías digitales interactúan como dos campos de investigación con énfasis y propósitos delimitados, aunque no siempre convergentes entre sí. En una visión integradora, la articulación entre modelación y tecnología reconoce al menos dos énfasis. En el primero se identifica un conjunto de estudios que analizan aspectos metodológicos y teóricos de procesos de modelación. Los estudios en este énfasis presentan episodios de clase donde los estudiantes construyen modelos matemáticos para resolver problemas, validan modelos con la ayuda de un software y construyen representaciones gráficas para interpretar la situación que se estudia (Possani, Trigueros, Preciado, & Lozano, 2010; Stillman, 2011; Villa-Ochoa, González-Gómez, & Carmona-Mesa, 2018).

En el segundo énfasis se ubican estudios que focalizan sus esfuerzos para que las interrelaciones entre modelación y tecnologías trasciendan usos “domesticados” o simplemente figurativos. En esta visión se asume la tecnología como un componente fundamental en la

reorganización de las maneras de hacer modelación y de los conocimientos que se producen a través de ella (Borba & Villarreal, 2005; Diniz & Borba, 2012).

Estos dos énfasis permiten generar diferentes orientaciones para el desarrollo de la modelación; por un lado, estudios que integran la tecnología a una forma convencional de ver la modelación como un proceso. Por otro, estudios en los que la tecnología reorganiza tales procesos e incluso, la forma de comprender la modelación.

Adicional a estos dos enfoques y a las perspectivas y comprensiones de la modelación, existe una amplia variedad de resultados frente a las contribuciones de la modelación con tecnologías digitales y su incidencia en el desarrollo de los aprendizajes en los estudiantes. En enfoques cognitivos, los aprendizajes se orientan al desarrollo de habilidades y comprensiones de los objetos matemáticos (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Stillman, 2011). En enfoques críticos, los aprendizajes se orientan hacia la necesidad de que los estudiantes desarrollen visiones de la matemática articulados con fenómenos y contextos en los cuales se desenvuelve y, para el uso de las matemáticas en el ejercicio de una ciudadanía responsable (Diniz & Borba, 2012 Soares & Borba, 2014).

En estudio previo, Pereira et al. (2017) identificaron las contribuciones de múltiples tecnologías en los procesos de modelación y hallaron evidencia de cómo los programas computacionales se utilizan como soportes para la coordinación de diferentes representaciones de los objetos matemáticos, la construcción y análisis de modelos matemáticos, gráficos y algebraicos que se vinculan en entornos virtuales a la realidad. Los autores afirman que el uso de tecnologías digitales en modelación matemática promueve la participación y las discusiones entre estudiantes, favorece su motivación y facilita el aprendizaje de las matemáticas.

Aspectos como éstos muestran una estrecha relación de la modelación y las tecnologías digitales y que su repercusión en los aprendizajes de los estudiantes va más allá de presentación de conceptos, algoritmos matemáticos o procesos de ejercitación. En coherencia con ello, investigaciones recientes reconocen los aportes, cambios y reorganización de los procesos de enseñanza de las matemáticas cuando se vinculan la modelación y tecnología (Greefrath & Vorhölter, 2016; Soares & Borba, 2014; Villa-Ochoa et al., 2018).

Los nuevos desarrollos tecnológicos y su rol en la sociedad generan nuevas demandas y dinámicas en el aula tanto para quienes asumen ésta como una herramienta que se articula al proceso de modelación, como para aquellos que la consideran como un medio que reorganiza la producción de conocimiento y la modelación misma. En la literatura se reconocen investigaciones que, bajo estos dos enfoques, enfatizan maneras de desarrollar procesos de modelación (por ejemplo, Trigueros, 2009; Daher y Shahbari, 2015; Molina-Toro, 2013). Sin embargo, se requiere de investigaciones que ofrezcan evidencia empírica de las contribuciones que nuevas formas de reorganizar procesos de modelación con tecnologías ofrecen a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, se requiere un conocimiento más amplio y profundo que integre relaciones entre diferentes tipos de tecnologías con múltiples maneras en que se desarrollan procesos de modelación en Educación Matemática.

Nuevas herramientas digitales van generando otras funcionalidades de las tecnologías en procesos de modelación, es decir, nuevos roles que no dependen solo del uso que tienen los dispositivos. En coherencia con estos planteamientos anteriores, esta revisión presenta los resultados de un estudio que se interesó por indagar la manera en que la literatura internacional comprende la relación entre modelación y tecnología. En particular, el estudio se orientó por las siguientes preguntas:

¿Qué roles asumen las tecnologías digitales cuando se integran a procesos de modelación en Educación matemática? ¿Qué usos tienen las tecnologías digitales al interior de estos procesos?

Para responder a estas preguntas se desarrolló un estudio bajo un enfoque crítico de la literatura. El método, los resultados y las conclusiones componen cada uno de los tres apartados que siguen en este artículo.

2. Metodología

En coherencia con Jesson y Lacey (2006), una revisión de literatura es una narrativa de la información que relaciona perspectivas o paradigmas diferentes y reflejan el punto de vista de quien las construye. Su objetivo es presentar una evaluación de la información publicada con anterioridad y, de esa manera, observar qué se conoce de un tema en especial e identificar una posible brecha en el conocimiento que pueda ampliar un campo de investigación. Conforme se mencionó anteriormente, en esta revisión se busca encontrar evidencia empírica de los diversos roles y usos que asumen las tecnologías digitales cuando se integran a ambientes de modelación, es decir, aspectos que se relacionan con el aprendizaje de contenidos matemáticos, habilidades, procesos, reconocimiento del rol de los modelos y de la matemática en la sociedad, entre otros.

2.1 Criterios de búsqueda y selección del material

En coherencia con los temas de interés de esta revisión, inicialmente se realizó una búsqueda de información en la base de datos Scopus, para ello se utilizó como ecuación de búsqueda las palabras clave “Modelling” AND “Mathematics Education” AND “Classroom”. Este proceso de búsqueda de información aportó 48 artículos para su análisis. Al cambiar el

término “Modelling” por “Modeling” se reportó un registro adicional al conjunto anterior. Con el fin de asegurar un estudio sobre documentos recientes se realizó un filtro de los artículos publicados en los últimos 10 años, lo que arrojó una lista de 32 documentos. Se privilegiaron los textos escritos en inglés, español y portugués.

Cada uno de los documentos se juzgó teniendo en cuenta que (a) el título informara sobre aspectos que se relacionan con modelación, (b) el documento articulara tecnologías digitales al desarrollo de su propuesta, y (c) el resumen ofreciera información sobre un trabajo empírico que reportara el uso de tecnología y modelación en matemáticas. Para evitar el sesgo de publicación (Jesson & Lacey, 2006) se incorporaron los cuatro primeros volúmenes de la serie de libros *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* en Springer y ICME-13 Topical Survey sobre modelación (Greefrath & Vorhölter, 2016). En estos libros se identificaron los capítulos a través de la palabra “Technology”.

Posteriormente, se procedió a realizar la lectura completa de cada documento con el fin de identificar i) roles de las tecnologías digitales en procesos de modelación y ii) usos de las herramientas digitales que se integran en estos procesos. La lectura de estos documentos sugirió la inclusión de otros documentos que desarrollaban ampliamente el tema central de esta revisión. La inclusión de estos nuevos documentos atendió, por un lado, al impacto de las revistas, las cuales, sin estar en la base de datos que sirvió de consulta, tienen numerosas investigaciones en Educación Matemática con un alcance destacado de sus publicaciones. Por otro lado, se incluyeron trabajos que están referenciados en documentos primarios y con los cuales se puede tener una mejor interpretación de las posturas de sus autores. En total se analizaron 29 artículos de revista, 12 capítulos de libro y un libro.

2.2 Análisis de la información

El análisis de los artículos compilados se desarrolló en dos fases. Inicialmente, los documentos se adjuntaron al software Atlas.ti; se crearon dos códigos que delimitaron categorías principales a priori (a. Roles de tecnologías en modelación, y b. Usos de tecnologías digitales en procesos de modelación). La codificación en el software Atlas.ti se realizó para agrupar aspectos teóricos y empíricos que los autores de cada documento declaraban referente a la modelación, el uso de la tecnología y las maneras en que asumen y caracterizan los aprendizajes de sus estudiantes.

En la lectura de cada documento se identificaron los roles de tecnologías digitales; para ello la atención se centró en reconocer los tipos de dispositivos utilizados (sensores, computadores, dispositivos móviles, entre otros), cómo intervenían en el desarrollo de los procesos y las necesidades que se atendían con su implementación. Para identificar los usos de tecnologías en estos procesos, la atención se centró en reconocer para qué fueron utilizados los dispositivos (tomar datos, realizar cálculos, graficar, entre otros) en las prácticas de los estudiantes al desarrollar el proceso de modelación.

Como lo sugieren Jesson y Lacey (2006) se crearon criterios (en este caso componentes), y nuevos códigos que permitieron organizar cada una de las citas que se encontraron en los documentos. Las citas se clasificaron en elementos teóricos y empíricos en los que se encontraran coincidencias con relación a las preguntas que se diseñaron para esta revisión y las categorías principales. La codificación permitió, además de agrupar los trabajos, establecer una fuente de comparación entre las diversas ideas que se encontraron al interior de cada uno de ellos y también generar unas posibles preguntas para futuras investigaciones.

En la Tabla 1 se presentan las categorías que se definieron a priori para el análisis de los documentos y las preguntas que conformaron los criterios de análisis. Los componentes fueron elementos emergentes en esta revisión.

Tabla 1. Categorías que direccionaron el análisis de cada documento.

Categorías	Componentes	Criterios de análisis
Roles de la tecnología en procesos de modelación	Tecnología como recurso para el desarrollo de procesos de modelación	¿Qué se asume por modelación? ¿Cómo se configuran los procesos de modelación?
	Tecnología como reorganizador del proceso de modelación	¿Cómo se modifican los procesos de modelación al vincular tecnologías? ¿Qué elementos promovieron el vínculo de la tecnología en el proceso que desarrollaron los estudiantes?
Usos de tecnologías digitales en procesos de modelación	Usos de herramientas digitales que se integran a procesos de modelación	¿Qué usos tiene la tecnología al interior de los procesos que se desarrollaron? ¿Para qué utilizan tecnologías los estudiantes? ¿Qué incidencias tuvo la tecnología en el desarrollo de los procesos?

3. Resultados

Con base en las preguntas que orientaron la revisión y las categorías y criterios que se presentaron en la Tabla 1 se realizó el análisis de cada uno de los documentos. A continuación, se presentan los principales hallazgos de este estudio.

3.1 Roles de la tecnología en procesos de modelación

La modelación y las tecnologías digitales marcan dos fuertes tendencias en la investigación internacional en Educación Matemática. La modelación, por un lado, muestra ser un camino para integrar las matemáticas con otras ciencias y con la “realidad” (Krekic &

Namestovski, 2009; Rendón-Mesa, 2016; Villa-Ochoa, 2007). En ella existe un llamado para que no se limite solo a desarrollar contenido o ver la realidad como una excusa para introducir temáticas o ilustrar potenciales aplicaciones de las matemáticas (Villa-Ochoa & Berrío, 2015). Por otro lado, también se asume como un proceso dinámico en el que intervienen estudiantes y profesores para formular hipótesis, definir variables, tomar datos, deducir modelos matemáticos y verificar su validez (Almeida & Borssoi, 2002).

Hay una tendencia por incluir enfoques o posturas de la modelación en los planes de estudio a lo largo del mundo (Blum, 2011). Sin embargo, esta es una tarea que demarca desafíos para estudiantes y profesores por los múltiples procesos que se desarrollan al interior de las aulas, en particular, por aquellos que reconocen el impacto de las tecnologías digitales y buscan también su integración en los currículos.

Las tecnologías tienen roles en el proceso de modelación que se asocian con las posibilidades para desarrollar experimentos, simulaciones y promover otros desempeños de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento (Buteau et al., 2016; Kaiser, 2005; Molina-Toro, 2013; Pons & Espinosa, 2015), proveer soluciones numéricas, herramientas de visualización y control gráfico y, suministrar información de internet (Greefrath & Vorhölter, 2016). Las experiencias que se presentaron en el trabajo de Borba y Villarreal (2005) son una muestra de cómo las tecnologías reorganizan la manera de producir conocimiento. Esta reorganización no solo se asume como una manera diferente de desarrollar procesos de producción de conocimiento matemático; sino también, una manera alternativa de concebir este conocimiento.

Conforme se señaló anteriormente, no existe una comprensión homogénea de la modelación matemática ni de sus fundamentos epistemológicos y didácticos (Kaiser & Sriraman,

2006). Bajo esta premisa, diferentes comprensiones de la modelación deberían reflejar diferentes roles de las tecnologías; es decir, puede existir una correspondencia entre el rol de un tipo de tecnología que se utilice y la naturaleza del proceso de modelación que busque desarrollar en el aula. A continuación, se desarrollan dos categorías del rol de las tecnologías en procesos de modelación con visiones epistemológicas no necesariamente complementarias.

3.1.1 Tecnología como un recurso para el desarrollo de procesos de modelación.

Una tendencia en la investigación en modelación matemática se enfoca en reconocer los subprocesos que en ella se involucran. Para ello, se describen fases que intervienen en la conexión de dos dominios, uno denominado matemático y otro extra-matemático también denominado realidad. En conjunto, el proceso de modelación tiene su origen en un problema de la vida real (Blum et al., 2007; Greefrath & Vorhölter, 2016; Perrenet & Zwaneveld, 2012). Este problema, comúnmente ubicado en un dominio extra-matemático o “mundo real”, se simplifica de tal manera que pueda representarse con un modelo en el dominio matemático. Posteriormente, el modelo matemático se refina, se interpreta y se valida a la luz de la situación inicial; lo que constituyen las fases que establecen un ciclo de modelación (Blum et al., 2007).

Esta concepción de la modelación ha sido representada por los investigadores a través de diversos ciclos, algunas diferencias entre ellos, radican en el énfasis que se otorgan a subprocesos o acciones de los estudiantes (Perrenet y Zwaneveld, 2012). Algunas de las representaciones de los ciclos pueden encontrarse en los trabajos de Blum y Leiss (2007), Greefrath y Vorhölter (2016), Stillman y Brown (2014), y Perrenet y Zwaneveld (2012). Particularmente, el ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiss (2007) ha sido retomado por otros autores para indagar

qué tipo de alteraciones se generan cuando se vinculan tecnologías en estos procesos (Daher & Shahbari, 2015; Geiger, 2011; Greefrath, 2011).

En el trabajo de Greefrath, Siller y Weitendorf (2011) se presentan ejemplos de situaciones que permiten analizar la influencia de la tecnología en el ciclo de modelación. Los autores consideran que las herramientas tecnológicas no solo aparecen como un “tercer dominio” para configurar un modelo con fórmulas o estructuras complejas e interpretarlo; sino que, más allá de ello, consideran que la tecnología influye cada parte del ciclo y no se limita solo a disminuir la carga operatoria para obtener resultados de cálculos numéricos o hacer representaciones visuales y transformar datos.

Con una visión diferente, Daher y Shahbari (2015) vincularon la tecnología como un puente que comunica el ‘mundo real’ y el mundo de la matemática en diferentes fases del ciclo de modelación. Para los autores la diversidad de vínculos responde a los momentos particulares en los cuales la tecnología tiene un rol en función del uso que le atribuyen quienes modelan. En sus representaciones del ciclo de modelación, la tecnología tiene un papel dinámico que configura modos particulares de asumir el proceso. Para los autores existe una relación entre el conocimiento tecnológico que tiene el modelador y la manera de integrarlo en el ciclo. Por ejemplo, cuando las personas que modelan tienen un conocimiento tecnológico amplio, la articulación de la tecnología a los procesos de modelación puede darse en varias fases del proceso por ejemplo, cuando es necesario interpretar el fenómeno, caracterizar sus variables y hacer traducciones al medio tecnológico que se utiliza.

Los estudios de Greefrath et al. (2011), Daher y Shahbari (2015), y Rodríguez y Quiroz (2016) integran tecnologías al proceso de modelación. Estos estudios muestran que las tecnologías pueden intervenir en diferentes fases y subprocesos del ciclo; así, en Greefrath et al.

(2011) en la fase de trabajo matemático, la tecnología puede usarse para calcular, medir y experimentar. Rodríguez y Quiroz (2016) muestran que la tecnología se utiliza con diversos propósitos en diferentes fases; por ejemplo, al inicio del trabajo, se usa para configurar el problema de estudio (análisis de un circuito resistivo-capacitivo con sensores de voltaje, computadoras, baterías, resistencias y capacitores), posteriormente se utiliza para construir modelos con el apoyo de gráficas y tablas, y por último, la tecnología permite que los estudiantes confronten cada uno de los resultados que elaboraron en diferentes momentos del proceso de modelación.

Las propuestas de Greefrath et al. (2011) y Daher y Shahbari (2015) si bien integran tecnologías a procesos de modelación, éstas no transforman sustancialmente la comprensión de modelación como ciclo; es decir, el proceso de modelación permanece estructuralmente igual, solo se alteran maneras de hacer subprocesos (cálculos numéricos, representaciones, validaciones, entre otros). Una interpretación de este hecho puede derivarse del tipo de tareas y enunciados que se ofrecen para que los estudiantes modelen. Si bien estos enunciados involucran un contexto o un fenómeno, en varios de los casos, los datos están dados en el mismo enunciado, pueden encontrarse en internet o ser obtenidos a través de la comprensión de la situación misma. En este sentido, el tipo de problema propuesto no exige otros usos de la tecnología en el proceso de modelación, por ejemplo, en la obtención experimental de datos como se aprecia en el trabajo de Rodríguez y Quiroz (2016).

El trabajo de Geiger (2011), con una orientación diferente, adapta un esquema propio de Galbraith, Renshaw, Goos y Geiger (2003) para mostrar que la influencia de la tecnología está en la totalidad de las etapas que se llevan a cabo al desarrollar un ciclo de modelación. Esta adaptación obedece a que el autor en el trabajo con profesores considera que la influencia de la

tecnología en el ciclo de modelación es situacional, es decir, su incorporación depende de las circunstancias y creencias que el profesor tenga sobre ellas, al margen del medio tecnológico que se utilice. Esta visión, aunque no pretende establecer generalidades, es una muestra de que la tecnología no limita ni las diversas maneras como puede desarrollarse un proceso de modelación, ni tampoco, los modos en que ésta puede articularse en su realización.

Si bien los estudios anteriores muestran diferentes usos de las tecnologías acordes con las fases o etapas de los ciclos de modelación, puede observarse, como ya se mencionó, que la comprensión de la modelación como proceso permanece estructuralmente igual. Por ejemplo, en Blum y Leiss (2007) el proceso de modelación se estructura a través de seis fases: situación real y problema, modelo de la situación, modelo real y problema, modelo matemático y problema, resultados matemáticos y resultados reales. En coherencia con esa estructura, en los estudios descritos, la presencia de la tecnología enriquece esta visión del ciclo de modelación.

En estas maneras en que se presentan el ciclo de modelación con tecnologías, los autores integran diferentes herramientas a momentos particulares en que ellas aportan al proceso; es decir, si son herramientas de cálculo se utilizarán para calcular, si son herramienta de visualización se utilizan para representar, y por ello, en ocasiones la tecnología es un elemento externo al proceso mismo y a las personas que modelan. Este tipo de consideraciones, al parecer, reconocen la tecnología en función de lo que ésta pueda hacer y no en función de lo que ella pueda promover. Trabajos con visiones diferentes se presentan en el siguiente apartado.

3.1.2 Tecnología como reorganizador del proceso de modelación

En esta categoría, la modelación se concibe como un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes participan acorde con sus intereses o necesidades (Borba & Villarreal, 2005;

Campos & Araújo, 2015; Parra-Zapata & Villa-Ochoa, 2016); allí los procesos no están previamente establecidos, sino que emergen dependiendo del tipo de problema, las variables y los contextos relevantes para el estudiante. Bajo esta mirada, la tecnología aparece como una manera de atender las necesidades que surgen a lo largo de los procesos. Por ejemplo, para la obtención y análisis de los datos, en la creación de un contexto o simulación de un fenómeno, en la confrontación de modelos y resultados, en la validación o divulgación de un modelo, entre otros.

En esta mirada, la tecnología se concibe como un aspecto no neutro ni en el aprendizaje y ni en el proceso que desarrollan los estudiantes. En otras palabras, la tecnología reorganiza el proceso de modelación en el ámbito escolar. A modo de ejemplo, el proceso de modelación de Geiger (2011) muestra que la tecnología generó interpretaciones y discusiones del fenómeno de estudio que promovió posteriormente la toma de decisiones y la validación del modelo matemático con el mismo recurso digital. En ese sentido los estudiantes pueden abordar problemas más complejos en los cuales el conocimiento matemático no sea una limitante para su estudio.

Otro aspecto a considerar es la posibilidad que tienen los estudiantes de dialogar alrededor de las representaciones que obtienen de diversos programas. En algunos se introducen datos para tomar decisiones frente al proceso que desarrolla, cambiar el rango numérico en los parámetros y variables que componen un objeto dinámico y, además, generar discusiones y diálogos alrededor de los objetos matemáticos y la tecnología (Perrenet & Adan, 2010).

Estas consideraciones son evidencia de diversas maneras en que tecnologías digitales aportan a las dinámicas al interior del proceso de modelación y son, además, condiciones que lo reorganizan y se vinculan con el hecho de que tanto estudiantes como profesores no realizan procesos de manera lineal y rígida. En algunos casos, los participantes en estos procesos generan

discusiones a partir de modelos matemáticos que construyen a través de tecnologías digitales, o en otros, vinculan la tecnología desde el mismo momento en que inician el proceso de modelación hasta que lo culminan.

Los estudios de Molina-Toro y Villa-Ochoa (2013) y Soares y Borba (2014) adoptaron tecnologías como un medio que reorganizó el proceso de modelación y análisis de modelos respectivamente; en estos trabajos, los estudiantes desarrollaron el proceso en función de intereses particulares sobre el fenómeno mismo. Particularmente estos trabajos se apoyaron de manera diferente en el software Modellus para que los estudiantes inmersos en un ambiente tecnológico pudieran manipular variables, gráficos y condiciones de modelos matemáticos que les permitiera caracterizar movimientos o tendencias en el fenómeno de estudio. Una idea que los autores defienden en estos trabajos, es que sin el software sería muy complejo que los estudiantes analizaran y compararan resultados, contrastaran la elección de un modelo con otro producido por sus compañeros y, además, produjeran conocimiento en colectivo.

En los estudios anteriores, el software más allá de ser una plataforma de uso discontinuo, se convirtió en un actor central para la interacción entre los estudiantes y facilitó el discurso entre sus participantes, el trabajo de manera simultánea e incluso la posibilidad de realizar una realimentación en el proceso. Estos trabajos se vinculan principalmente a la experimentación como un ambiente donde los estudiantes pueden configurar el fenómeno y el proceso para su estudio; por ejemplo, analizar modelos preestablecidos o proyectar tendencias, entre otros. En la Tabla 2 se presentan los dos roles de tecnologías digitales que se hallaron en procesos de modelación.

Tabla 2. Roles que asumen tecnologías digitales en procesos de modelación.

Categoría	Roles	Ejemplos
Roles de la tecnología en procesos de modelación	Tecnología como recurso para el desarrollo de procesos de modelación	(Daher & Shahbari, 2015; Greefrath et al., 2011; Perrenet & Adan, 2010; Possani et al., 2010; Rodríguez Gallegos & Quiroz Rivera, 2016; Stillman & Brown, 2014; Trigueros, 2009)
	Tecnología como reorganizador del proceso de modelación	(Borba, Villarreal, & Soares, 2016; Molina-Toro & Villa-Ochoa, 2013; Soares & Borba, 2014)

En el desarrollo de este apartado se presentaron maneras en que se integran herramientas tecnológicas a procesos de modelación. Las dos visiones atienden a los roles (recurso o reorganizador) que de manera diferenciada asumen las tecnologías al interior de los procesos, algunos fenómenos que se abordaron para su desarrollo y orientaciones teóricas que acompañaron sus propuestas. En el siguiente apartado se presentan diversos usos de las tecnologías digitales que se identificaron en dichos procesos al analizar los documentos de esta revisión.

3.2 Usos de tecnologías digitales en procesos de modelación

Trabajos que se analizaron en esta revisión reconocen los cambios que la tecnología promueve en la cognición humana (Blum, 2015; Diniz & Borba, 2012 y también la posibilidad de evidenciar lo que saben y lo que están aprendiendo los estudiantes (Greefrath, 2011; Possani et al., 2010). Lingefjärd y Meier (2010) por ejemplo, sostienen en su estudio que la interacción entre estudiantes, profesores y tecnologías generan ‘desbloques’ en las ideas de los estudiantes.

Investigadores como Greefrath (2011) llaman la atención en la importancia de tener criterios para realizar tareas de modelación con el uso de herramientas digitales y promover el aprendizaje de las matemáticas, lo que supone un conocimiento amplio de las características de los instrumentos tecnológicos que se utilicen. Al respecto, Stillman y Brown (2014) declaran que

en algún momento, los estudiantes deben ser capaces de anticipar las formas en que los instrumentos puedan emplearse para responder preguntas planteadas. A continuación, se presentan algunos usos que asumen las tecnologías digitales cuando se integran a procesos de modelación.

3.2.1 Usos de herramientas digitales que se integran a procesos de modelación

Los resultados de este estudio dan cuenta de diferentes herramientas que se usan en procesos de modelación. En coherencia con Barzel et al. (2005), citado en Siller y Greefrath (2010) existen tres grupos, a saber: sistemas de álgebra computacionales (CAS), software de geometría dinámica (DGS) y programas de hojas de cálculo (SP). Estos grupos están presentes en la mayoría de los trabajos revisados.

En relación con los CAS, Perrenet y Adan (2010) mostraron que estudiantes universitarios desarrollan procesos relacionados con la programación de algoritmos; otros trabajos integraron este tipo de tecnologías para parametrizar datos, realizar operaciones y analizar gráficos (Possani et al., 2010; Rodríguez & Quiroz, 2016; Trigueros, 2009). Este tipo de tecnologías permitieron a los estudiantes llevar a cabo procesos de abstracción, concretización, análisis y síntesis, además de habilidades relacionadas con la creatividad y la aplicación de conceptos matemáticos en la concretización, definir variables, hacer suposiciones en relación al problema, analizar gráficos y buscar una solución de la situación en estudio. En palabras de Geiger (2011), los CAS y el modelado matemático proporcionan una visión de las posibilidades y obstáculos que se pueden encontrar al diseñar e implementar propuestas que respalden la enseñanza de la modelación a través del uso de tecnologías digitales.

Frente a los DGS, este tipo de programas no solo se utilizaron para resolver problemas geométricos, también se reporta el uso de este tipo de programas para visualizar gráficos y

validar modelos desarrollados por estudiantes, estudiar diferentes conceptos matemáticos que emergen del trabajo con animaciones y tablas de datos para interpretar cálculos (Sekulić & Takači, 2013; Stillman, 2011).

En la línea de las SP, los estudios muestran un uso principalmente para el registro, la organización y el análisis de datos. Por ejemplo, los estudiantes organizaron un conjunto de datos para realizar diagramas de dispersión y regresiones al solucionar problemas cercanos a sus gustos por la música (Stillman & Brown, 2014), obtener velocidades promedio al analizar intervalos de datos (Marshall & Carrejo, 2008), construir representaciones para discutir, interpretar o validar modelos (Daher & Shahbari, 2015) y tabular datos de sensores de voltaje (Rodríguez & Quiroz, 2016). Una característica común en estos trabajos se orienta al uso de regresiones y, con ello, poder encontrar un modelo que se ajuste al conjunto de datos analizados.

Los trabajos que se presentaron hasta ahora, en este apartado, pueden marcar una tendencia frente al uso de tecnologías digitales y el tipo de relación o condicionante entre las características del dispositivo utilizado en procesos modelación. En palabras de Geiger (2011) si bien la tecnología puede incorporar y generar representaciones que ayudan en la transformación de una situación indeterminada a una determinada, éstas también desempeñan un papel central en el razonamiento. El desarrollo de este tipo de procesos promueve que los estudiantes resuelvan problemas, perfeccionen el uso de una herramienta tecnológica y en conjunto con ello, aborden de múltiples maneras el estudio de fenómenos para el aprendizaje de las matemáticas (Greefrath & Vorhölter, 2016).

En esta revisión se pudo identificar que los programas de álgebra computacional se utilizaron especialmente para asociar variables, analizar datos, programar, realizar gráficas y animaciones. Los programas de geometría dinámica, se utilizaron para recrear situaciones en un

ambiente virtual y a partir de éste apreciar el comportamiento del fenómeno al alterar algunas variables. Este tipo de trabajos se aproxima a procesos de experimentación, aunque en algunos casos no alcanzan a recopilar un número amplio de variables que en contexto afectan el fenómeno. Las hojas de cálculo se muestran útiles para la organización y análisis de datos, su representación a través de gráficos y la posibilidad de vincular registros obtenidos por sensores o calculadoras y sistematizarlos en este tipo de programas.

El desarrollo de procesos de modelación con programas como el Modellus, muestra la influencia de las tecnologías digitales no solo para el aprendizaje de las matemáticas, sino también para el aprendizaje de la ciencia naturales y otras áreas del conocimiento. Por ejemplo, en el trabajo de Soares y Borba (2014) se integran las matemáticas con la biología para que los participantes estudiaran el modelo de transmisión de la malaria al centrar su atención en representaciones gráficas e identificar las variaciones del fenómeno con el cambio de parámetros y condiciones. En Molina-Toro (2013) el programa permitió por medio de simulaciones, que los estudiantes construyeran ideas de variación, elaboraran argumentos y cuantificaran movimientos y ciertas características asociadas con el estudio de fenómenos. En ambos trabajos con el software Modellus, los autores también hacen énfasis en que los estudiantes no podían prescindir del software, ya que éste reorganizó la actividad de analizar el modelo, utilizar la información gráfica y numérica y, además, aclarar sus comprensiones frente al fenómeno que estudiaban.

En particular, estos últimos dos trabajos involucran modelos y actividades de modelación articulado a un programa que reúne las condiciones de ser dinámico, de tener una interfaz que combina modelos matemáticos con figuras en movimiento y tablas de datos. Además, según la apuesta didáctica del profesor, en el programa se podrían ocultar diferentes herramientas de

información gráfica, modelos algebraicos y otros datos para proponer a los estudiantes su construcción y, de esta manera, llevar otro tipo de procesos a cabo.

Con la aparición y accesibilidad a internet y a dispositivos móviles se ofrecen otro tipo de herramientas que sugieren la extensión del trabajo de Barzel a un cuarto Grupo. A pesar de que en los dispositivos móviles se puede integrar CAS, SP, DSG, también se involucran APP, Applets, videojuegos, simulaciones y la captura y análisis de videos. Todo ello ofrece otras oportunidades para la interacción y la colaboración entre diferentes participantes y, por tanto, otras formas de modelar y de producción de conocimiento matemático.

Los dispositivos digitales móviles como celulares o tabletas también han permitido configurar otras experiencias de modelación con estudiantes. En estudio presentado por Frejd y Ärlebäck (2017) los estudiantes utilizaron dispositivos digitales para interactuar con un juego, realizar el registro de datos que se representaban de múltiples maneras allí y relacionar contenido matemático que emergiera en la actividad. Ortega y Puig (2017) por su parte, presentaron el desarrollo de una experiencia que integró tabletas electrónicas para que los estudiantes recopilaran y procesaran datos de un fenómeno de caída libre y de esa manera eligieran un modelo matemático de una familia de funciones. En ambos trabajos la influencia de la tecnología condiciona el desarrollo del proceso y muestra ser necesaria para que los estudiantes modelen el fenómeno de estudio.

Como se muestra hasta aquí, hay diversidad de estudios en los que interactúan estudiantes, profesores y tecnologías en procesos de modelación. En correspondencia con ello, se pudo identificar cómo múltiples tecnologías digitales aparecen como un objeto que está presente a lo largo de estos procesos con estudiantes en diferentes niveles escolares. La Tabla 3, presenta

los usos de las tecnologías digitales en el desarrollo de procesos de modelación que se encontraron en esta revisión.

Tabla 3. Usos de tecnologías digitales en procesos de modelación que se reportaron en diversos estudios.

Usos de tecnologías digitales en procesos de modelación	Descripción	Ejemplos
Instrumento de visualización	La tecnología es una herramienta que el estudiante utiliza con fines representativos y a partir de las múltiples representaciones genera conjeturas, argumentos e ideas para abordar o finalizar su proceso de modelación.	(Brown, 2015; Daher, 2015; Suárez Téllez & Cordero Osorio, 2008, 2010)
Instrumento para simular o recrear fenómenos	La tecnología se utiliza como una herramienta para descubrir el comportamiento de un fenómeno, analizar números y representar variables.	(Alves & de Souza Júnior, 2013; Dos Santos Gomes Pereira & Dos Santos Júnior, 2013; Frejd & Ärlebäck, 2017; Krekic & Namestovski, 2009; Neves & Teodoro, 2014)
Instrumento para construir y validar modelos	La tecnología es una herramienta que se vincula al proceso para construir un modelo o también para validar un modelo existente.	(Dalla Vecchia & Maltempi, 2013; Geiger, 2011; G. Stillman, 2011)
Instrumento que reorganiza procesos de experimentación	La tecnología se utiliza como una herramienta para descubrir el comportamiento de un fenómeno, analizar números y representar variables.	(Molina-Toro, 2013; Ortega & Puig, 2017; Soares & Borba, 2014)

Las características de los dispositivos tecnológicos actuales ofrecen otras ventajas para la filmación de contenido digital, el acceso a aplicaciones computacionales e interfaces a través de internet que demarcan otras dinámicas al interior del desarrollo de los procesos modelación. En ese sentido, la aparición de nuevos programas determina roles particulares de las tecnologías digitales por sus beneficios para la construcción de modelos, la simulación de fenómenos y la mediación en procesos de modelación (Greefrath, 2011).

Esta revisión muestra que en los procesos de modelación con tecnología se desarrollan experiencias que permiten a los estudiantes acercarse de diversas maneras al estudio de las

matemáticas a través de prácticas de carácter experimental. Algunas reflexiones al respecto se discuten en el siguiente apartado.

4. Discusión y conclusiones

Los alcances y las limitaciones de la articulación modelación y tecnologías digitales es un tema que continúa abierto en la medida que nuevas tecnologías aparecen y se desarrolla investigación frente a su inclusión en las clases de matemática. En esta revisión, no obstante, el interés por estudiar diversos roles de tecnologías en procesos de modelación y los usos de estas herramientas al interior de estos procesos, permite fortalecer la discusión sobre diferentes características de los ambientes que pueden configurarse y una selección del tipo de dispositivos que se puedan utilizar.

De este estudio se desprenden dos hallazgos importantes, el primero de ellos en relación con los roles que determinan las tecnologías al interior de los procesos de modelación. La literatura ha informado que la tecnología apoya diversas fases de estos procesos y trabajos recientes han hecho un esfuerzo por presentar las maneras como interviene en un ciclo de modelado. En coherencia con lo anterior, esta revisión aporta en la identificación de dos roles como resultado de visiones diferentes sobre la manera de hacer modelación en el aula. Un primer rol se identificó cuando la tecnología se integra como un recurso en estos procesos; en este escenario la visión de modelación representada a través de ciclos no se altera, pero sí se observa que algunas acciones de los participantes se transforman y el análisis que hacen de la situación que estudian es diferente.

La tecnología brinda otras oportunidades para que los estudiantes puedan vivenciar cada una de las fases del proceso y por ello, otras investigaciones que indaguen cómo se configuran los ciclos de modelación con herramientas tecnológicas recientes pueden ser propuestos en estudios

futuros. Algunos avances de desarrollos teóricos en esta línea pueden encontrarse en Greefrath, Hertleif y Siller (2018), Greefrath y Vorhölter (2016), Geiger (2011), Perrenet y Zwaneveld (2012) quienes identificaron cómo la tecnología es usada en el ciclo de modelación.

Otro rol se identificó cuando la tecnología reorganizó las dinámicas de los procesos de modelación, es decir, la tecnología no apareció como una herramienta en un tiempo determinado para resolver una dificultad o facilitar un procedimiento, sino como un medio que permitió el desarrollo del proceso y permaneció a lo largo del mismo. En este sentido, la tecnología muestra no ser exclusivamente un recurso a disposición de quien modela o diseña un proceso de modelación y, en una visión complementaria parece tomar un rol protagónico en todo su desarrollo. Este hecho se deriva de concepciones teóricas en las cuales la tecnología es una extensión del pensamiento del ser humano y, por lo tanto, en esa perspectiva, deja de tener un uso utilitario para convertirse en elemento constitutivo de la acción del estudiante.

Estos hallazgos son evidencia de que dispositivos y programas que se han incorporado desde hace varios años en procesos de modelación en el aula para métodos de obtención, procesamiento, representación y análisis de datos pueden realizarse actualmente con una misma herramienta tecnológica. Por ejemplo, el trabajo de Ortega y Puig (2017) se desarrolló con tabletas electrónicas y aplicaciones y, el estudio de Frejd y Årlebäck (2017) con un juego que podía manipularse en diversos dispositivos móviles. El rol que asume la tecnología, en estos trabajos trasciende el uso de la herramienta a un nivel donde no podría desarrollarse el proceso si ésta no se integra dentro del mismo. Datos empíricos en Soares y Borba (2014) y Molina-Toro (2013) son evidencia de estudios similares en los cuales, la ausencia de tecnologías no arrojaría las características de los resultados que se obtuvieron.

Un segundo hallazgo estuvo en relación con los múltiples usos de las tecnologías en procesos de modelación. La literatura existente muestra que, con frecuencia, las tecnologías que se utilizan en procesos de modelación se clasifican en CAS, DGS y SP. Sin embargo, estudios empíricos que se analizaron, mostraron que existe un cuarto grupo que extiende esta mirada y determina otros usos de estas herramientas en procesos de modelación.

En los CAS, DGS y SP hay instrumentos que al interior de la literatura se reportaron para visualizar la representación de datos, hacer cálculos, construir o validar modelos y, simular o recrear fenómenos. Como un aporte a la discusión en esta línea, esta revisión encontró evidencia de otro grupo de instrumentos que da sentido a una nueva categoría en la cual se reorganizan los procesos de experimentación y se incorporan otros instrumentos que se modificaron o diseñaron a partir de dispositivos móviles.

Los usos de las tecnologías que se encontraron confirmaron los resultados del estudio de Pereira et al. (2017) quienes encontraron evidencia de cómo los programas computacionales permiten el acceso a diferentes representaciones de los objetos matemáticos, el análisis y la construcción de modelos. Sin embargo, en una visión más amplia, esta revisión presentó cuatro usos de las tecnologías que corresponden no solo a identificar sus beneficios para el procesamiento de datos y todo lo que ello incluye; sino también a reconocer una visión de tecnología que tiene la posibilidad de transformar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En ese sentido, los usos y roles de la tecnología no son disyuntos, pero sí podrían determinar otras maneras de hacer modelación.

Una implicación se desprende de este nuevo grupo en relación con el uso de dispositivos móviles; además de las características que presentan las investigaciones de esta revisión, si la tecnología reorganiza procesos de experimentación ¿qué influencia sobre la manera de hacer

modelación tendrá usar los dispositivos que pertenecen a los estudiantes? Esta consideración atiende a reconocer la importancia de las herramientas tecnológicas de los participantes con el fin de generar ambientes de modelación que incluyan determinadas vivencias e intereses de sus contextos.

Los estudiantes deben aprovechar el potencial de las tecnologías para tener un impacto en la transformación de lo que hacen (Brown, 2015). En coherencia con esta premisa, el uso de dispositivos digitales móviles podría convertirse en un recurso que además de aprovechar al máximo todas las posibilidades que ofrecen algunos dispositivos electrónicos, sirva en ocasiones como sustituto de las computadoras o también, como medio que brinde otras alternativas para superar ciertas dificultades en el proceso. Algunas consideraciones al respecto ya fueron discutidas por Villarreal, Esteley y Smith (2018) al analizar las múltiples necesidades que permiten vincular tecnología en procesos de modelación y presentar cómo los estudiantes tuvieron que aprender a utilizar herramientas de hojas de cálculo o buscar información en internet para construir un modelo.

Conforme se mostró en esta revisión, la articulación entre modelación y tecnología permite construir nuevos desafíos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y construir (Lingefjärd, 2012; Sekulić & Takači, 2013; Soares & Borba, 2014) escenarios de experimentación que promuevan competencias de carácter científico (Bassanezi, 2002; Maas, 2007; Perrenet & Adan, 2010). En este sentido, esta revisión aporta a la discusión académica sobre los procesos de continuo cambio que generan las tecnologías en los procesos de modelación y las oportunidades que genera para promover el aprendizaje de las matemáticas.

Otra implicación se desprende con relación al aprendizaje; es necesario ampliar tanto enfoques teóricos como metodológicos que permitan establecer las diversas maneras como se

constituye el conocimiento matemático en procesos de modelación con tecnologías digitales. Si bien, en un análisis a estudios empíricos de esta revisión se encontraron aspectos del aprendizaje que se relacionan con la resolución de problemas, competencias, habilidades, experimentos y procesos de indagación; aún faltan estudios que muestren cómo diferentes concepciones de aprendizaje se ven reflejadas en diversas maneras de abordar la modelación con tecnologías en las aulas.

Finalmente, los dispositivos móviles, el internet, las calculadoras y los sensores, entre otros, también son herramientas constitutivas para el desarrollo de procesos de modelación en las aulas (Borba et al., 2016; Soares & Borba, 2014). En este sentido, esta revisión encontró que aún faltan estudios que indaguen cómo se pueden utilizar todas las potencialidades de estos recursos tecnológicos para desarrollar procesos de modelación y cómo el uso de simulaciones que vinculen modelación y tecnología podría reforzar tanto procesos de enseñanza como de aprendizaje de las matemáticas en diferentes grados escolares. Autores como Greefrath y Siller (2017), Greefrath y Vorhölter (2016) y Geiger (2011) han llamado la atención en este sentido y coinciden en la necesidad de documentar otros estudios al respecto.

Futuros estudios podrían centrar su atención no solo en múltiples herramientas tecnológicas o desempeños de los estudiantes, sino también en cómo modelan, qué utilizan para darle sentido a sus conjeturas, cómo realizan sus experimentos, la incidencia de las tecnologías digitales en ellos y las características de las herramientas que seleccionen para abordar estos procesos. El m-learning ha presentado algunos avances al respecto, pero la literatura en esta línea aún es escasa y en coherencia con Frejd y Ärlebäck (2017) los estudios que pueden encontrarse con dispositivos móviles requieren de más investigación teórica y empírica. Como se mencionó anteriormente, aunque se reconocen los aportes de los trabajos frente a la articulación de

tecnologías digitales y modelación, los aprendizajes y las múltiples maneras en que éstos se configuran aún permanecen sin discutirse en estos procesos.

Referencias

- Almeida, L. M., & Borssoi, A. (2002). Introdução à Modelagem Matemática. In Notas de aula. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
- Alves, D. B., & de Souza Júnior, A. J. (2013). Mathematics Education in a Digital Culture. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(8), 32–41. Retrieved from <http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/3354>
- Bassanezi, R. (2002). Modelagem Matemática—Um Método Científico de Pesquisa ou uma Estratégia de Ensino e Aprendizagem. *Ensino—Aprendizagem Com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15–30). Springer.
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. (W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss, Eds.). New York: Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). Deal with modelling problems? In *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12* (pp. 222–231). Horwood: Chichester.
- Borba, M. de C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.
- Borba, M. de C., Villarreal, M. E., & Soares, D. da S. (2016). Modeling using data available on the internet. In C. Hirsch & E. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics*

- Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics (pp. 143–152). National Council of Teacher of Mathematics.
- Brown, J. P. (2015). Visualisation Tactics for Solving Real World Tasks. In G. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 431–442). Cham: Springer International Publishing.
- Buteau, C., Muller, E., Marshall, N., Sacristán, A. I., & Mgombelo, J. (2016). Undergraduate Mathematics Students Appropriating Programming as a Tool for Modelling, Simulation, and Visualization: A Case Study. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 2(2), 142–166. <https://doi.org/10.1007/s40751-016-0017-5>
- Campos, I. Da S., & Araújo, J. De L. (2015). Envolvimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática: relação com o saber e possibilidades de ação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 167–182. <https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a09>
- Daher, W. M. (2015). Discursive positionings and emotions in modelling activities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(8), 1149–1164. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1031836>
- Daher, W. M., & Shahbari, J. A. (2015). Pre-service teachers' modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 25–46.
- Dalla Vecchia, R., & Maltempi, M. V. (2013). Mathematical modeling and information and communication technology: The reality of the cyberworld as a vector of virtualization [Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: A realidade do mundo cibernético como um vetor de virtualização. *Bolema – Mathematics Education Bulletin*, 26(43), 963–990.
- Diniz, L. do N., & Borba, M. de C. (2012). Leitura e Interpretação de Dados Prontos em um Ambiente de Modelagem e Tecnologias Digitais: o mosaico em movimento. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(43), 935–962. Retrieved from [http://files/536/Diniz y Borba - 2012 – Leitura e Interpretação de Dados Prontos em um Amb.pdf](http://files/536/Diniz_y_Borba_-_2012_-_Leitura_e_Interpreta%C3%A7%C3%A3o_de_Dados_Prontos_em_um_Amb.pdf)

- Dos Santos Gomes Pereira, R., & Dos Santos Júnior, G. (2013). Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico. *Bolema – Mathematics Education Bulletin*, 27(46), 531–546. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300013>
- Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment—a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 413–438. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9491-5>
- Frejd, P., & Ärlebäck, J. B. (2017). Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak. In *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 517–527). Springer.
- Galbraith, P., Renshaw, P., Goos, M., & Geiger, V. (2003). Technology-enriched classrooms: Some implications for teaching applications and modelling. *Mathematical Modelling in Education and Culture*, 111–125.
- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14* (pp. 305–314). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 301–304). Springer.
- Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50(1–2), 233–244.
- Greefrath, G., Siller, H.-S., & Weitendorf, J. (2011). Modelling considering the influence of technology. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 315–329). Springer.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries* (pp. 1–42). Cham: Springer International Publishing.
- Jesson, J., & Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education*, 6.

- Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school—Examples and experiences. In *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum* (pp. 99–108). Hildesheim: Franzbecker.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310.
- Krekic, V., & Namestovski, Z. (2009). Computer modelling in mathematics education. In *2009 7th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics* (pp. 355–360). <https://doi.org/10.1109/SISY.2009.5291132>
- Lingefjärd, T. (2012). Learning Mathematics through mathematical modelling. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 41–49.
- Lingefjärd, T., & Meier, S. (2010). Teachers as managers of the modelling process. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 92–107.
- Maas, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn. *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*, 63–78.
- Marshall, J. A., & Carrejo, D. J. (2008). Students' mathematical modeling of motion. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(2), 153–173. <https://doi.org/10.1002/tea.20210>
- Molina-Toro, J. F. (2013). *La modelación con tecnología en el estudio de la función seno*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Medellín.
- Molina-Toro, J. F., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). La modelación con tecnología en el estudio de la función seno. *Revista Científica*, 2, 80–84.
- Neves, R. G., & Teodoro, V. D. (2014). Computational modelling, interactive environments and science, technology, engineering and mathematics education [Modelação computacional, ambientes interativos e o ensino da ciência, tecnologia, engenharia e matemática]. *Revista Lusofona de Educacao*, (25), 35–58. Retrieved from <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84898826380&partnerID=40&md5=519398f5fbfe12d6e8669eaae43c71b3>
- Ortega, M., & Puig, L. (2017). Using Modelling and Tablets in the Classroom to Learn Quadratic Functions. In *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 565–575). Springer.
- Parra-Zapata, M. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática.

- Revista Electrónica” Actualidades Investigativas En Educación”, 16(3), 1–27.
<https://doi.org/https://doi.org/10.15517/aie.v16i3.26084>
- Pereira, R. Dos S. G., & Júnior, S. (2013). Mathematical modeling and the teaching of adjustment function: a pedagogical handbook. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(46), 531–546. Retrieved from http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2013000300013&script=sci_arttext&tlng=es
- Pereira, R. Dos S. G., Seki, J. T. P., Nivalda Palharini, B., Neto, J. C., Silva, A. C. Da, Damin, W., & Martins, B. De O. (2017). Modelagem matemática e tecnologias digitais educacionais: possibilidades e aproximações por meio de uma revisão sistemática de literatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 8(2), 80–94. Retrieved from <http://files/575/1214.html>
- Perrenet, J., & Adan, I. (2010). The academic merits of modelling in higher mathematics education: A case study. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 121–140.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
- Pons, M. O., & Espinosa, L. P. (2015). Modelización de una situación real con tabletas: el experimento de la pelota. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 67–78.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(8), 2125–2140.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004>
- Rendón-Mesa, P. A. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Antioquia.
- Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 91–110.
- Sekulić, T., & Takači, Đ. (2013). Mathematical modelling, computers and GeoGebra in university and college mathematics education. In 2013 36th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO) (pp. 625–630).

- Siller, H.-S., & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology (pp. 2136–2145).
- Soares, D. Da S., & Borba, M. De C. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 575–587.
- Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser, R. Borromeo Ferri, W. Blum, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA 14* (pp. 165–180). Dordrecht: Springer.
- Stillman, G., & Brown, J. P. (2014). Evidence of implemented anticipation in mathematising by beginning modellers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 763–789.
<https://doi.org/10.1007/s13394-014-0119-6>
- Suárez Téllez, L., & Cordero Osorio, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias*, 3(1), 51–58. Retrieved from http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662008000100005&script=sci_arttext&tlng=en
- Suárez Téllez, L., & Cordero Osorio, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13 (4-II), 319–333.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75–87.
- Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas, un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 19, 63–85.
- Villa-Ochoa, J. A., & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241–250). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19
- Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219–251. Retrieved from

<http://files/622/Villa-Ochoa et al. - 2017 – Tipos de tareas de modelación para la clase de mat.pdf>

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., & Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25–34. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025>

Villarreal, M. E., Esteley, C. B., & Smith, S. (2018) Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM - Mathematics Education* 50(1-2), 327-341. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0925-5>

Artículo II. Contradicciones en procesos de modelación con tecnologías digitales

(una versión mejorada de este artículo se publicó en el idioma inglés, en el año 2021, en la revista

Education and Information Technologies)

Contradicciones en procesos de modelación con tecnologías digitales

Resumen

Este documento presenta un análisis de las contradicciones que manifestaron estudiantes de un programa de licenciatura en matemáticas al realizar dos tareas de modelación y vincular sus propios dispositivos tecnológicos. El estudio se fundamenta en aspectos teóricos de las contradicciones en el ámbito del Aprendizaje Expansivo y de la modelación con tecnologías digitales. Los resultados muestran cómo se manifiestan estas contradicciones y el tipo de transformaciones que promueven, los cambios en la manera de desarrollar las tareas y en la visión de tecnología que trasciende su condición de herramienta. Los hallazgos muestran la influencia de otros sistemas de actividad en el desarrollo de estos procesos y la necesidad de ampliar la investigación por el aprendizaje en estudios futuros.

Palabras clave: Aprendizaje Expansivo, Contradicciones, Modelación, Tecnologías digitales.

Abstract

This paper presents an analysis of the contradictions stated by students of a degree program in mathematics when they perform two modeling tasks and use their own technological devices. This study is based on theoretical aspects of the contradictions in the field of Expansive Learning and modeling with digital technologies. The results evidence how these contradictions are expressed and what are the transformations that these promote, the changes in the way of developing tasks and in the vision of technology that transcends a status as a tool. The findings evidence the influence of other activity systems in the development of these processes and the need to expand the research for learning in future studies.

Keywords: Expansive Learning, Contradictions, Modeling, Digital technologies.

1. Introducción

La literatura ofrece evidencia sobre usos de tecnologías digitales en procesos de modelación en Educación Matemática (en adelante modelación) y sobre cómo se ha articulado al trabajo en el aula con los estudiantes (Molina-Toro et al., 2019; Pereira et al., 2017). Molina-Toro et al. (2019) mostraron que en la literatura internacional se encuentran dos roles que desempeña la tecnología cuando se articula a un proceso de modelación; el primero de ellos, como recurso al servicio de quienes modelan; el segundo, como medio que reorganiza el proceso mismo de modelación. Estos autores informaron que existen usos de la tecnología que se relacionan con la visualización, la simulación o la recreación de fenómenos, la construcción y la validación de modelos y la reorganización de procesos experimentales; además, llaman la atención sobre el uso de dispositivos móviles y su papel constitutivo para el desarrollo de procesos de modelación.

La investigación sobre cómo se articulan procesos de modelación matemática y tecnología es amplia; sin embargo, el continuo crecimiento y desarrollo de recursos tecnológicos en la sociedad abre otros caminos para nuevas investigaciones sobre su integración en las aulas y sus roles en el aprendizaje de los estudiantes (Greefrath, 2011; Lei et al., 2016; Molina-Toro et al., 2019). Cada desarrollo tecnológico, por ejemplo, nuevos dispositivos móviles o realidad virtual y aumentada, ofrece otras posibilidades de actuación en las aulas y oportunidades para el aprendizaje que aprovechen al máximo las potencialidades de los “nuevos” dispositivos y todos los recursos a los que permite acceder. De ese modo, la investigación en esta área podría dar cuenta no solo de los procesos cognitivos o interacciones entre diferentes sujetos y herramientas; también, podría impulsar nuevas formas de interpretar realidades que se sitúan fuera de las aulas

y visiones alternativas de comprensión y promoción de los aprendizajes para que los procesos de enseñanza de las matemáticas evolucionen al ritmo de las sociedades de hoy.

Como una manera de atender con otra mirada la integración de recursos tecnológicos a los procesos de modelación e involucrar otros agentes como profesores, comunidad educativa y entornos sociales y culturales que rodean la escuela, este estudio toma como marco de referencia la teoría de Aprendizaje Expansivo de Engeström (2015) para identificar elementos teóricos y metodológicos que permitan comprender la evolución del aprendizaje humano en escenarios donde la matemática es un propósito de enseñanza.

En los procesos de aprendizaje que se estudian en esta teoría hay un desplazamiento en el centro de atención que pasa de un individuo a un grupo de personas y luego a un sistema de actividad¹, es decir, es una perspectiva que concibe el aprendizaje como un proceso en el que emergen y se resuelven contradicciones que generan transformaciones de ideas, se afianzan en el colectivo y consolidan maneras de actuar socialmente. Engeström y Sannino (2010) retoman el concepto de contradicción para estudiar la evolución de las tensiones² que se transforman en un colectivo de personas. En su estudio, más allá de analizar en principio al individuo, los autores buscaron ampliar la manera en que se comprenden cada una de las manifestaciones discursivas de

¹ Un sistema de actividad es un concepto que emerge en la Teoría de la actividad, en el cual se relacionan sujetos, artefactos y cultura con un objetivo común que se logra a través de múltiples acciones y la distribución de labores. Engeström (1999) sostiene que en los sistemas de actividad hay una reorganización de múltiples voces.

² En el diccionario de la lengua española, la palabra tensión hace referencia a estados de oposición entre personas o grupos humanos. Aunque el término contradicción y tensión tienen cierta similitud para algunos autores, en este estudio, las contradicciones reflejan estados de oposición que no solo emergen entre personas, también pueden surgir con objetos, normas y otras condiciones que generen desequilibrios en la mente humana.

los sujetos que interactúan entre sí; además, establecieron criterios para identificar la presencia de contradicciones en diálogos entre personas que comparten objetivos afines en entornos organizacionales.

En correspondencia con esta línea teórica, para analizar la presencia de contradicciones en procesos de modelación con tecnologías en un grupo de estudiantes, es necesario observar el desarrollo del proceso en ambientes donde, como reflejo de la articulación modelación y tecnología, se manifiesten las contradicciones y se originen cuestionamientos, argumentos y elaboración de nuevas ideas que pueden evolucionar hasta aprendizajes expansivos. Estudiar las contradicciones en procesos de modelación con tecnologías puede ser también un camino para comprender cómo aparecen diversas visiones de la matemática, del contexto y de la cultura en el lenguaje de los participantes y, además, cómo se manifiestan tensiones entre los estudiantes y se entrelazan en múltiples esfuerzos para superar dificultades en el desarrollo del proceso. Diversas investigaciones (Engeström & Sannino, 2010, 2011; Galleguillos & Borba, 2018) coinciden en la necesidad de desarrollar estudios empíricos que aporten a la identificación de contradicciones en sistemas de actividad.

Engeström (1999) reconoció la importancia de analizar el discurso y encontró evidencia de como altera la manera en que los sujetos desarrollan procesos con un fin común. En ese sentido, las contradicciones son la base sobre la cual se configuran aprendizajes expansivos y son el punto de partida de las fuerzas de cambio que promueven una evolución de los sistemas de actividad. Por lo tanto, es necesario una comprensión clara de las contradicciones en procesos de modelación con tecnologías y su papel en la transformación de la actividad matemática en el aula.

2. El papel de las contradicciones en la teoría de Aprendizaje Expansivo

En la teoría de Aprendizaje Expansivo, las contradicciones tienen un papel fundamental en el desarrollo de la actividad ya que son el motor impulsor de transformaciones de la práctica (Engeström, 1999; 2015). Para Engeström y Sannino (2010), el objeto de una actividad siempre es contradictorio internamente; sin embargo, esta condición es la que permite que el objeto esté en continuo movimiento, genere motivaciones en los sujetos y surjan nuevos sistemas de actividad o se transformen los ya establecidos como parte de la solución a las tensiones que promuevan cambios.

Estas tensiones aparecen cuando las contradicciones influyen en la actividad y afectan tanto las maneras en que interactúan los componentes de un sistema de actividad como la capacidad del sujeto para alcanzar el objeto (Yamagata-Lynch, 2010). En consecuencia, las tensiones están fuertemente ligadas a las contradicciones y son un punto de referencia para comprender las desviaciones de las prácticas consolidadas con anterioridad. Es decir, en términos de este estudio, esos estados de oposición pueden mostrar la influencia de las tecnologías digitales para la solución o construcción de nuevos cuestionamientos al hacer modelación y, a la vez, la transformación del desarrollo de estos procesos por parte de sus participantes.

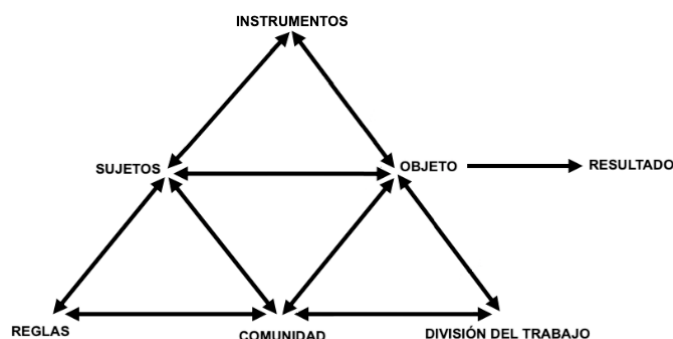
La contradicción es un concepto filosófico fundacional del Aprendizaje Expansivo que no está definido teóricamente y solo puede ser identificado a través de sus manifestaciones (Engeström, 2000; Engeström & Sannino, 2011). Este hecho llevó a Engeström y Sannino a formular un marco conceptual sistemático para identificar las contradicciones en manifestaciones discursivas. Los autores sostienen que varios trabajos que se publicaron antes no mostraban las diferencias entre contradicciones y las nociones de tensión, paradoja, oposición o dicotomía y,

por ello, las manifestaciones o perturbaciones discursivas de los sujetos no podían analizarse como contradicciones internas en sistemas de actividad; además, afirman que conflictos, dilemas y disturbios podrían ser estudiados como manifestaciones de las contradicciones.

Para los intereses investigativos de este estudio, las contradicciones necesitan ser estudiadas bajo el sistema organizacional del aula. Esto implica una mirada profunda a las situaciones que involucren emociones y sensaciones personales de los estudiantes y una comprensión clara de lo que representa un sistema de actividad como el que se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Estructura del sistema de actividad adaptada de Engeström (1987, 2015)



Este modelo triangular se aplica con frecuencia como una lente para analizar procesos educativos bajo investigación y se convierten en una unidad de análisis para el investigador (Engeström, 1999). En este marco de referencia se encuentran cuatro niveles de las contradicciones en la actividad humana. En el **nivel 1**, las contradicciones se relacionan con el valor de cambio o valor de uso; en el **nivel 2**, las contradicciones aparecen entre los elementos constitutivos del sistema de actividad; en el **nivel 3**, cuando se introducen objetos o motivos más avanzados en el sistema y; en el **nivel 4**, entre la actividad central y ‘actividades vecinas’

(Engeström, 2015). Adicionalmente, Engeström y Sannino (2011) presentan cuatro tipos de manifestaciones discursivas de las contradicciones que, bajo su perspectiva, permiten una mejor comprensión sobre ellas, a saber:

- Los dilemas como aspectos de creencias sociales que son compartidas por los individuos y dan lugar a la forma de pensar.
- Conflictos como una forma de resistencia o desacuerdo
- Conflicto crítico como situaciones que implican sentimientos o culpas y afectan el sentido personal.
- Doble vínculo como procesos que llevan a los individuos a formular preguntas retóricas que muestran la imposibilidad de continuar con el trabajo.

Los cuatro tipos de manifestaciones discursivas están acompañados de claves o señales lingüísticas que sirven para identificar una contradicción. La Tabla 1 presenta la propuesta que construyeron Engeström y Sannino (2011) y que contribuye al análisis de diálogos entre individuos en sistemas de actividad de contextos educativos.

Tabla 1

Señales lingüísticas en las manifestaciones discursivas que presentaron Engeström y Sannino (2011)

Manifestaciones	Ejemplos de señales lingüísticas
Dilemas	"Por un lado [. . .] por otra parte"; "sí, pero"; "No quise decir eso"; "en realidad quise decir".
Conflictos	"No"; "no estoy de acuerdo"; "esto no es verdad"; "sí"; "esto puedo aceptar"
Conflicto crítico	Considerar estructuras narrativas personales, emocionales, morales, metáforas vívidas, "Ahora me doy cuenta de que [. . .]"
Doble vínculo	"Nosotros", "nos", "debemos", "tenemos que" preguntas retóricas, expresiones de impotencia "Hagámoslo", "lo haremos"

Bajo la propuesta de los autores, las señales lingüísticas deben ser evaluadas con cuidado, deben ser simples y no presentar ambigüedades ya que, en algunos momentos, una expresión no implicaría necesariamente la formación de una contradicción y, en su lugar, podría desviar la atención del sujeto, de allí la necesidad de analizar la actividad como una red donde interactúen múltiples voces y se produzcan transformaciones expansivas.

La teoría expuesta en este marco de referencia sugiere que las contradicciones se deben solucionar de manera creativa y deben generar nuevos modelos de mediación y sistemas de actividad en los que se superen desacuerdos u oposiciones. En ese sentido, bajo la lente de este estudio, algunas tradiciones culturales para el desarrollo de procesos de modelación en el aula también podrían transformarse, de tal manera que las tecnologías digitales brinden otra ventana que aporte a la solución de tensiones que se generen al abordar estos procesos en la actividad escolar.

En el contexto educativo, algunas manifestaciones discursivas podrían ser aprovechadas para generar labores colectivas y transformar actividades futuras. Es decir, las exteriorizaciones de los estudiantes y sus puntos de vista podrían ser un insumo que permita ampliar el proceso de modelación, experimentar con soluciones alternativas o construir otros objetos de actividad. Del mismo modo, promover espacios donde la creatividad y la investigación científica puedan aparecer de manera natural implica grandes retos, donde el análisis de la manifestación de contradicciones pueda servir de insumo para transformar sistemas de actividad escolar que incluyan los contextos de los sujetos que los componen. Bajo la lente de este estudio, otras consideraciones podrían aparecer en virtud de la introducción, no limitada, de tecnologías digitales en procesos de modelación para el trabajo en las aulas y por ello, es importante una mejor comprensión de las manifestaciones discursivas que puedan surgir de otras maneras de trabajar en el aula y se conviertan en una oportunidad de desarrollo de nuevos sistemas de actividad.

3. Modelación matemática con tecnologías digitales

La inclusión de artefactos culturales en la actividad humana permite, bajo la teoría de Aprendizaje Expansivo, analizar la acción de los sujetos como parte de un sistema de acciones de carácter colectivo que pueden tener una fuerte influencia de sistemas de actividad vecinas. Esta característica que la literatura muestra como una evolución de la Teoría de la Actividad (Engeström, 2015) es, en coherencia con este estudio, una posibilidad para comprender el poder de transformación de las tecnologías en la actividad escolar al interior de los procesos de modelación.

Para Molina-Toro et al. (2019), la tecnología mostró ser un instrumento que puede reorganizar la naturaleza propia de los procesos de modelación y, más allá de intervenir temporalmente en la actividad escolar o estar presente a lo largo de todo su desarrollo, se puede considerar como un instrumento que permite a los estudiantes desencadenar una serie de razonamientos y acciones para abordar una situación al modelar. Este hecho, de interés en la perspectiva de este estudio, sirve de punto de referencia para analizar características de las manifestaciones discursivas que exteriorizan los estudiantes al vincular tecnologías digitales en estos procesos y las transformaciones expansivas que producen.

La modelación matemática tiene diversas comprensiones en la literatura internacional, un aspecto común en la mayoría es la posibilidad de promover maneras de estudiar la “realidad” a través de las matemáticas. Para algunos investigadores, la modelación genera puentes entre las matemáticas y la realidad para introducir nuevos conceptos (Possani et al., 2010), puede ser vista como un enfoque pedagógico (Borba & Villarreal, 2005), como un instrumento de investigación (Bassanezi, 2002), como una actividad científica y pedagógica que favorece prácticas interdisciplinarias (Cifuentes & Negrelli, 2012) o como objeto de formación de profesionales y profesores (Romo-Vázquez et al., 2019). No obstante, en esa diversidad de posturas, la tecnología ocupa un lugar privilegiado en el desarrollo de procesos de modelación y cada vez es menos frecuente encontrar estudios fuera de este margen.

La investigación en este campo ofrece evidencia de tecnologías que se articulan a procesos de modelación con visiones diferentes. En una de ellas, la modelación se desarrolla a través de ciclos en los cuales la atención se centra en cómo recorren los estudiantes cada una de sus fases (Greefrath & Vorhölter, 2016; Perrenet & Zwaneveld, 2012; Rodríguez Gallegos & Quiroz Rivera, 2016; Siller & Greefrath, 2010). En otra, se desarrolla a través de ambientes de

modelación con tecnologías en los cuales se analiza la producción de conocimiento por parte de los estudiantes (Molina-Toro et al., 2018; Soares & Borba, 2014). El centro de estudio en ambas perspectivas es diferente; sin embargo, la presencia de la tecnología es vital tanto para promover la transición de una fase a otra en ciclos de modelación, como para reorganizar subprocesos y maneras de actuar frente al estudio de diversos fenómenos.

Ampliar la comprensión de determinadas situaciones que vinculen observaciones, medidas y otras características cuantificables o descriptibles es, como ya lo evidenció Confrey (2007), otra manera de proporcionar un nivel de sofisticación matemática a los estudiantes a través de la modelación. Analizar la modelación con tecnología en una perspectiva que dialoga con el Aprendizaje Expansivo involucra poner atención frente a aspectos que son claves en la manera de hacer matemáticas en el aula. Por lo tanto, la modelación se asume en este trabajo como un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes se involucran con el estudio de las matemáticas, a través del desarrollo de tareas que vinculan modelos matemáticos y contextos culturales y sociales, procesos de experimentación con tecnología y, desarrollo de procesos de indagación y ampliación del campo de saber matemático. En ese sentido, la tecnología no puede ser vista como un sustituto de lo que hacen otras tecnologías o una yuxtaposición de herramientas y las situaciones a modelar, por el contrario, deben promover una actividad matemática que vincule nuevos dispositivos, contextos, normas, experiencias y creencias de los estudiantes, entre otros aspectos.

La visión de tecnología en este estudio toma aspectos teóricos de las perspectivas filosóficas propuestas por Mitcham (1994) y retomados por Vries (2016), quienes abordan dimensiones sociales y educativas sobre tecnología en los seres humanos. Vries utiliza el término 'tecnología' en un sentido amplio de la actividad humana que transforma el entorno natural en función de sus

necesidades. Para este investigador, la tecnología no es solo una cuestión de nuestras manos, sino también una cuestión de nuestras mentes. Mitcham aborda cuestiones teóricas sobre la tecnología y declara que muchos historiadores usan dicha palabra para referirse a los artefactos de fabricación y uso primitivo o moderno. Según el autor, las reflexiones sobre la tecnología se han centrado en cuatro formas de conceptualizarla: como objetos (*herramientas fabricadas por el hombre*), como conocimiento (*principios éticos y usos de los objetos*), como actividad (*acontecimientos que conectan el conocimiento y la voluntad para crear nuevas herramientas*) y como volición (*motivaciones, impulsos y elecciones*).

Estas cuatro categorías, según Mitcham, proporcionan otra perspectiva desde la cual puede abordarse la tecnología; sin embargo, en resultados mostrados por Vries (2016) comúnmente las personas solo parecen vincular la tecnología a los objetos. En su libro, Vries afirma que las concepciones de jóvenes y adultos sobre tecnología se limitan a menudo a la noción de *artefacto* y se desconocen aspectos que son necesarios en la formación del sujeto.

En estas perspectivas filosóficas de la tecnología, los autores dejan claro que temas fundamentales en esta línea aún se discuten; sin embargo, sus posturas permiten un acercamiento a la tecnología que extiende los horizontes teóricos para que su articulación a los procesos de modelación pueda estar en sintonía con desarrollos tecnológicos actuales. Esto es, por ejemplo, nuevas maneras de establecer la medición de un objeto en función de la herramienta que se utilice, la captura y tratamiento de datos, el trabajo con aplicaciones para dispositivos móviles y otras características que la tecnología posibilita para ampliar los espacios de experimentación que emergen en procesos de modelación.

4. Pregunta de investigación

En la perspectiva de este trabajo, otros roles de las tecnologías al interior de los procesos de modelación podrían delimitar otras formas de actividad en las aulas y, en ese sentido, sistemas de actividad que puedan tener una influencia de otros sistemas de actividad que estén fuera de la escuela. En consecuencia, este artículo reporta los resultados de un estudio que se orientó por la siguiente pregunta:

¿Qué contradicciones se identifican en estudiantes que participaron en procesos de modelación en Educación Matemática con sus propias tecnologías digitales?

5. Metodología

La actividad empírica de esta investigación se desarrolló en un seminario de modelación matemática dirigido por tres profesores con experiencia investigativa en modelación y 15 estudiantes que hacen parte de un programa de formación de profesores de matemáticas. Por su naturaleza, el curso se propuso contribuir a la discusión teórica sobre modelación matemática y sus aplicaciones en la formación de futuros profesores con estudiantes de diferentes semestres académicos.

Los hallazgos que se reportan en este estudio corresponden a un subgrupo conformado por cuatro estudiantes que se agruparon de manera voluntaria y manifestaron su disposición para participar en la investigación. Los estudiantes se denominan por los seudónimos Cristina, Diana, Estela y Sandra. La elección del subgrupo obedeció a la variedad de información que se encontró en los datos, a la participación de sus integrantes en diferentes momentos del desarrollo del

seminario y al uso espontáneo que hicieron de sus dispositivos móviles de manera continua a lo largo del seminario.

El seminario se desarrolló en 16 sesiones de trabajo de cuatro horas cada una. En varias de estas sesiones, los participantes discutieron documentos teóricos sobre modelación y realizaron tareas que les permitieron generar vínculos entre la literatura de referencia para el desarrollo del seminario y la modelación con estudiantes en la práctica escolar. Las tareas se formularon para que los participantes tuvieran que analizar diferentes procesos de medición (longitudes, objetos tridimensionales en espacios bidimensionales, tiempo, entre otros) y también para que la atención no se centrara solo en los contenidos matemáticos, sino que fuera necesario discutir sus propuestas de solución y las particularidades de sus resultados. Además, se empleó una metodología de análisis de sistemas de actividad como lo propone Yamagata-Lynch (2010), para el análisis de actividades orientadas a objetos, en este caso, tareas en ambientes de modelación con tecnologías.

Con la aprobación de los protocolos de ética y el consentimiento informado de los estudiantes se recogieron datos por medio de grabaciones en video, audios, además de las producciones escritas de los participantes. En coherencia con el análisis de sistemas de actividad, estos registros se sistematizaron en el software Atlas.ti y se codificaron de acuerdo con las señales lingüísticas (Tabla 1) que fueron propuestas por Engeström y Sannino (2011) para identificar contradicciones en sus manifestaciones discursivas. Se utilizaron herramientas analíticas propuestas por Corbin y Strauss (2015) y un marco que consistió en (i) transcribir y analizar diálogos de los estudiantes en los cuales manifestaron sus puntos de vista frente a la manera de proceder para resolver las tareas y sus interpretaciones al llevar a cabo cada una de las acciones propuestas (acciones orientadas a objetos); (ii) identificar señales lingüísticas en

correspondencia con los criterios establecidos en la Tabla 1 y patrones de manifestaciones donde aparecieron; (iii) evaluar las señales que se identificaron y el tipo de contradicciones que representan en los participantes y el sistema de actividad; y (iv) estudiar la evolución de esas contradicciones en el desarrollo de los procesos de modelación en correspondencia con la teoría.

El análisis de los datos se centró en la actividad de los estudiantes mientras resolvían tareas de modelación e involucraban sus dispositivos digitales móviles. Se tuvo en cuenta el sistema de actividad en el cual se produjeron los registros y con ello, los roles específicos y las múltiples voces que representaban tanto profesores como estudiantes en la solución de las tareas de modelación. El sistema de actividad del aula en conjunto, como lo sugiere Yamagata-Lynch (2010), fue el escenario en el cual se realizaron observaciones, se dialogó con los participantes y se levantaron todos los registros para esta investigación. En los diálogos, observaciones o sugerencias de profesores a estudiantes no se promovió el uso de ningún recurso tecnológico en particular y tampoco se discutieron referentes teóricos que hacen parte de esta investigación. En el siguiente apartado se presentan los principales resultados de este estudio.

6. Resultados

Para dar respuesta a la pregunta que orientó este estudio, los resultados se estructuran a partir de dos tareas que realizaron los estudiantes y un proyecto de modelación. Estas tareas: (i) medición de una vía circunvalar y (ii) elección de una estación de gasolina, fueron desarrolladas en la segunda y séptima sesión del seminario respectivamente y se presentan para analizar la influencia que tienen los propios dispositivos de los estudiantes en los primeros procesos de modelación que fueron propuestos durante el seminario. El proceso de modelación no fue rígido, es decir, no se desarrolló un único proceso homogéneo con todos los estudiantes ni en todas las

sesiones; en su lugar se establecieron periodos en los cuales los estudiantes tuvieron el rol de modeladores y otros donde se discutieron elementos teóricos, metodológicos y evaluativos de la modelación en Educación Matemática.

Medición de una circunvalar

La primera tarea de modelación a la que se enfrentaron los estudiantes consistía en hallar la medida de la longitud de una vía circunvalar³ que rodea la universidad. A partir del enunciado de la tarea, los estudiantes sintieron la necesidad de buscar maneras de medir una distancia grande (objeto de la actividad); también evidenciaron que las estrategias e instrumentos que habitualmente usaban para medir pequeñas distancias eran insuficientes. El grupo de estudiantes salió del aula y se ubicó en un punto de referencia de la vía circunvalar para iniciar su recorrido y, desde ahí, debían tomar sus medidas. En principio, las primeras manifestaciones se relacionaron con las maneras de establecer la medida contando los pasos; sin embargo, otras consideraciones que empezaron a tomar fuerza en el grupo se relacionaron con el uso de sus teléfonos móviles y la decisión de usar estos dispositivos surgió de manera espontánea al considerar la longitud de la circunvalar. El siguiente diálogo es evidencia de ello:

Diana: a ver qué aplicaciones hay [haciendo referencia a buscar aplicaciones en su celular]

Estela: ¿un podómetro?

Cristina: cronómetro ¿no? Lo que sea

Diana: podemos hacer como grabando el cronómetro, grabando un vídeo o ¿cómo se llama? Miremos qué aplicaciones hay.

(Diálogo entre estudiantes, 7 de junio de 2019)

³ La circunvalar universitaria a la que se hace referencia es una vía interior que rodea toda la universidad y en la cual se ubican también celdas de parqueo y una cicloruta para bicicletas o entrenamiento de atletas.

El grupo de estudiantes vinculó el uso de teléfonos móviles a la tarea siguiendo la propuesta de Diana, porque vieron que las primeras ideas que expresaron no eran suficientemente apropiadas para hallar una medida. A partir de esa propuesta, cada uno de sus integrantes empezó a tener un rol determinado para el desarrollo del proceso. Las estudiantes esperaban hallar una manera de evitar hacer todo el recorrido de la circunvalar; sin embargo, no hubo consenso sobre la estrategia a seguir y se puso de manifiesto la presencia de tensiones entre ellas. Algunas expresiones de las participantes fueron: “*Pero* es que la idea es contar sin dar toda la vuelta [sin hacer todo el recorrido]”, “*pero* ¿cuál es la mitad de esto?”, “*Noo, no, no*, es más fácil hacerlo de acá a allá, o sea toda la circular y ya se multiplica por dos. Es más simétrico así que así [señala dos direcciones en que puede hacerse el recorrido]”, “simétrico no es”. De acuerdo con Engeström y Sannino (2011), estas manifestaciones, en forma de dilemas y conflictos, pueden ser evidencia de la presencia de contradicciones que originaron una manera de desarrollar la tarea.

Después de ese intercambio de expresiones, Cristina centró la atención en “contar pasos”, Diana en “hacer un video para determinar el tiempo en que hicieron el recorrido” y Estela en “observar la medición en el podómetro de su celular”. La diversidad de estrategias es un ejemplo de cómo se distribuyeron las labores en el sistema de actividad del subgrupo. Cada una de esas estrategias posibilitó una solución particular de la tarea y una manera de obtener varias fuentes de medición para confrontar sus resultados, lo cual sería una forma de validación al interior del proceso.

Al finalizar el recorrido, las estudiantes se reunieron de nuevo en el aula para escribir un informe con la solución de la tarea. En este momento, otras tensiones entre las participantes aparecieron en relación con la eficacia de la estrategia. Por ejemplo, Cristina usó la estrategia de contar pasos, pero perdió la cuenta de la cantidad de pasos que llevaba y tuvo que hacer ajustes

para finalizar el recorrido. Por su parte, Estela, quien estaba utilizando el podómetro de su celular, encontró una inconsistencia por el manejo inadecuado del dispositivo y no obtuvo la cantidad total de pasos. Tensiones en relación con la elección de una estrategia vs confiabilidad de sus resultados aparecieron. Las dificultades para escribir el informe llevaron al grupo a considerar la opción de Diana con su dispositivo móvil como se evidencia en el siguiente diálogo tomado de la videograbación de la sesión del seminario.

Vea en la aplicación de salud de mi celular, dice la hora exacta. No, es como un rango de horas. Dice, desde las, hoy 7 de junio, desde las 4:00 hasta las 5:00 [de la tarde] di 2987 pasos, estos pasos... Eh... [hace una pausa corta], hay que descontarle más o menos como un aproximado porque yo llegué a las 4:08, no estuve a las 4 en punto, entonces como lo que entré desde Barranquilla [una avenida que pasa por la universidad] hasta entrar aquí al Bloque 9 y lo que bajamos y subimos hasta acá para llegar. Aquí llegamos a las 5:00 en puntico. Entonces podemos como hacer un aproximado y restar un poquito, unos pasos, cuántos restamos, no sé. (Diana, 7 de junio de 2019)

Las estudiantes deciden tener en cuenta los cálculos de Diana ya que su aplicación de celular no mostró inconsistencias frente a la medida que las demás habían tomado; si bien Cristina y Estela tuvieron problemas con sus resultados, sus ajustes permitieron tener una medida aproximada de la longitud de la vía circunvalar. Diana realizó una búsqueda en Internet de lo que hacía su aplicación, ¿cómo contaba los pasos? y ¿cómo se utilizaba un podómetro?; esta información la compartió con sus compañeras y fue otro elemento que tuvieron en cuenta para continuar con la escritura de su informe. Cristina ajustó la cantidad de pasos con relación al número que entregaba la aplicación de salud en el celular de Diana y, aunque en la aplicación de Estela la medida promedio de un paso eran 66 cm, al observar la extensión de los pasos de Diana deciden tener 70 cm como referencia.

Posteriormente, en correspondencia con los ajustes que realizaron, decidieron multiplicar 2500 pasos por 66 cm, lo que resultó en un longitud de la vía circunvalar de 1,65 Km (medida

para la estrategia de Estela); sin embargo, con los datos de Diana, el cálculo cambió a 1,75 km. Ambos resultados estaban en el rango de medidas que pudieron establecer en el video con unas marcas de pintura en la calle y también con la medida que les mencionó uno de los vigilantes de la Universidad. En el siguiente apartado se presenta la segunda tarea y un análisis de las tensiones que emergieron.

Elección de una estación de gasolina

La segunda tarea de modelación propuesta a los estudiantes tenía dos finalidades: la primera, posibilitar otra mirada de la literatura académica, pues la tarea se rediseñó a partir de un ejemplo del texto de Blum (2015) que los estudiantes leyeron de forma previa; la segunda, configurar un ambiente en el cual se pudiera discutir algunas perspectivas de la modelación y cómo puede convertirse en un insumo de trabajo en sus futuras prácticas de enseñanza de las matemáticas. Los profesores presentaron a los estudiantes tres ubicaciones diferentes de la ciudad de Medellín: una casa con su respectiva dirección, dos estaciones de venta de gasolina donde los precios tenían una diferencia de \$800 [0.25 USD] y una foto del panel de instrumentos de un vehículo donde se mostraba su consumo de combustible (litros) por cada 100 Km. La tarea de los estudiantes era tomar un punto de referencia cerca de la casa para analizar en cuál de las dos estaciones de gasolina era más económico llenar el tanque.

En esta sesión se integró a dos estudiantes más para el desarrollo de la tarea. Todos manifestaron opiniones diferentes cuando tuvieron que elegir un punto de referencia para ubicarse en el mapa y utilizar algún tipo de herramienta; también cuestionaron la importancia de determinar cantidades como la dirección de cada estación de gasolina, la distancia desde la casa a cada una de las estaciones, la cantidad de litros que se consume en cada recorrido y la cantidad de

dinero que representa. Algunas de las propuestas de solución se concentraron en determinar una función matemática para solucionar la tarea. Los estudiantes se cuestionaron por la equivalencia galones/litros e hicieron comentarios como “pero es que vea, mientras más distancia recorra a la estación, más gasolina va a gastar” e intensificaron aún más las posturas opuestas frente a la solución de la tarea. Posteriormente, Diana usó Google Maps para mostrarle a sus compañeros la distancia desde el punto de referencia hasta cada estación de gasolina. Esta acción permitió a los participantes no sólo conocer la distancia, también el tiempo estimado que un vehículo puede invertir para hacer cada recorrido. Los estudiantes realizaron toda una serie de conversiones y operaciones utilizando la aplicación Google Maps de sus dispositivos celulares, para conocer el consumo de gasolina y el dinero que representaba. Diana mencionó aspectos como las rutas de desplazamiento entre el punto de referencia y la estación de gasolina, lo cual hace parte del conocimiento derivado de su experiencia como conductora; este conocimiento y la información que el mapa suministró desencadenaron tensiones que determinaron la manera de desarrollar la tarea.

Diana: pero usted qué puso [preguntó a Estela sobre cómo busca una dirección en Google Maps]

Sandra: pusimos la dirección exacta

Estela: yo puse la dirección exacta. Mire, puse carrera 84 con calle 52 [la estación queda ubicada en una de las esquinas que hay sobre la carrera 84 con la calle 52].

Diana: ¿Desde servicio Texaco? Sí, calle 51 con 84

Cristina: ¿Pero eso si da el número 84?, no hay que colocar carrera 84 número... [ella pregunta por la manera convencional de escribir completamente una dirección, su manifestación toma la forma de un dilema]

Estela: yo la busqué en el mapa [hablando de ubicar un punto en el mapa], yo no la escribí así

Diana: No, no, a ver el número...pero es muy subjetivo, porque depende dónde usted lo ponga, es diferente a que lo ponga el mapa directamente [manifestación en forma de conflicto]. Es como cuando usted está en Uber y usted pone la dirección para mostrar en el mapa, usted lo pone exactamente en el lugar que usted quiere y considere que es. Pero cuando usted lo pone en el mapa como tal y te manda la dirección, te pone la dirección exacta, tiene que poner el número de la dirección. Porque si usted lo pone donde considera que va [escribe de manera aproximada], puede que se mueva [la ubicación].

Cristina: pues vea, en sí, a mí me da 1,4 km en la [estación de gasolina] de Texaco la 80 [mirando la medida en Google Maps], y la de Texaco Palacé es ...

(Diálogo de un grupo de estudiantes, 20 de junio de 2019)

Este episodio muestra las tensiones en forma de dilemas o conflictos que manifestaron las estudiantes Cristina y Diana y la influencia de otros sistemas de actividad (sistemas de actividad vecinas) en el desarrollo de la tarea. En este caso, el conocimiento que Diana tiene de Google Maps evidencia una no aceptación de la dinámica que tiene el grupo y muestra cómo algunas consideraciones con respecto a la tarea pueden determinarse mejor. El interés por configurar un modelo que fuera más funcional puso a los estudiantes ante la selección de diversas variables.

Cristina: [Al buscar la Avenida Palacé y usar Google Maps] entonces ahí, la distancia sería 5,8 km.

Diana: yo pienso que hay algo mal porque dice que es desde la dirección de allá [señalando el punto de partida] hasta la bomba, y no es lo mismo que irse desde la bomba hasta allá porque hay calles diferentes [el recorrido para un carro puede variar dependiendo el sentido entre dos puntos de la ciudad]. Hay que poner primero esta, luego la otra y luego la otra.

Cristina: ah sí, listo. O sea, borre todo eso y coloque...de aquí [Avenida Palacé]

Diana: y miren, ¿sabe qué?, eso depende de qué camino cojan, porque hay unos caminos que son 6,6 km y otros que son 6,2 y 6. Entonces hay muchas variables

Sandra: ¡Ah sí!, hay 6 también.

(Diálogo de un grupo de estudiantes 20 de junio de 2019)

En estos episodios hay evidencia de una actividad colectiva en la cual la comunicación es constante entre los participantes y las acciones individuales influyen en el sistema de actividad. Como lo manifiesta Lektorsky (2009), el hecho que Diana haya considerado que la ruta de ida a la estación de gasolina es diferente a la ruta de regreso, análisis que hace por su experiencia como conductora, puede considerarse una extracción de una interacción para auto reflexionar el proceso, una interacción entre el sistema de actividad propio y el sistema de actividad colectivo. Esa influencia de sistemas de actividad vecinos continuaba promoviendo otro tipo de tensiones en la estudiante; la expresión “yo pienso que hay algo mal...” determina una ruptura en el proceso que ya venía realizando el grupo. En coherencia con estas interpretaciones, en el desarrollo de esas contradicciones emerge una transformación en la manera como se planteó una solución.

Para concluir la tarea, los estudiantes toman en cuenta las consideraciones de Diana y utilizan nuevamente el Google Maps para obtener datos de los recorridos de ida y vuelta, los tiempos, las distancias y la trayectoria más corta en el mapa. En un informe escrito, las estudiantes propusieron dos funciones algebraicas con las cuales determinaron el costo de llenar el tanque de combustible en ambas estaciones de gasolina y el dinero que puede ahorrarse en la estación de la Avenida Palacé.

Análisis de Contradicciones en este estudio

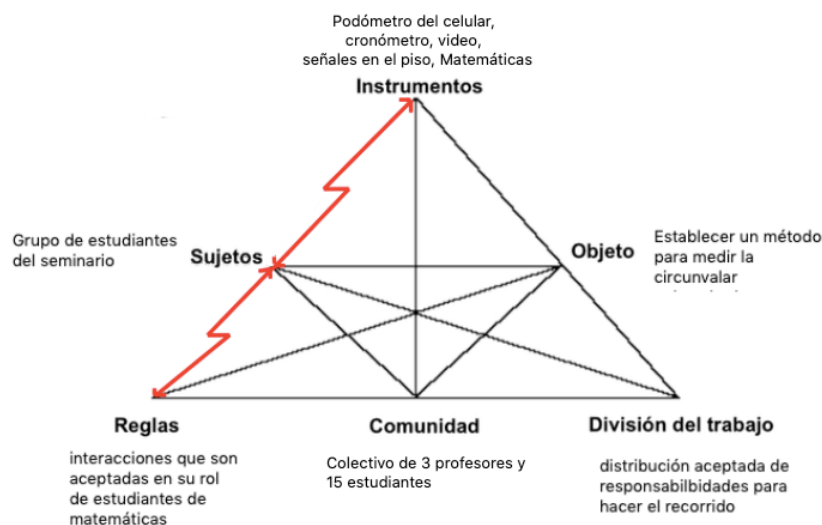
Las contradicciones más relevantes en los dos episodios anteriores se relacionaron de manera directa con los tipos de tareas y se vinculan a los procesos que las estudiantes realizaron para establecer medidas estandarizadas en tareas de modelación. La presencia de dilemas y conflictos estuvo presente en sus manifestaciones, contextos y argumentos frente a las acciones

para solucionar las tareas; estas manifestaciones se convirtieron en un insumo para analizar los sistemas de actividad.

La Figura 2 muestra el sistema de actividad que se analizó en la primera tarea. En coherencia con Engeström (2015), las contradicciones que se identificaron son de **Nivel 2**, es decir, contradicciones entre elementos constitutivos del sistema de actividad. Estas contradicciones aparecieron de manera conjunta en dos sentidos: sujetos-instrumentos y sujetos-reglas. En el primer binomio, si bien las estudiantes tenían ciertos conocimientos sobre el alcance de los dispositivos, las contradicciones se evidenciaron cuando tuvieron que ampliar este dominio para reconstruir con otra perspectiva una manera de solucionar la tarea, de encontrar un resultado.

Figura 1

Contradicciones en el sistema de actividad de la tarea 1



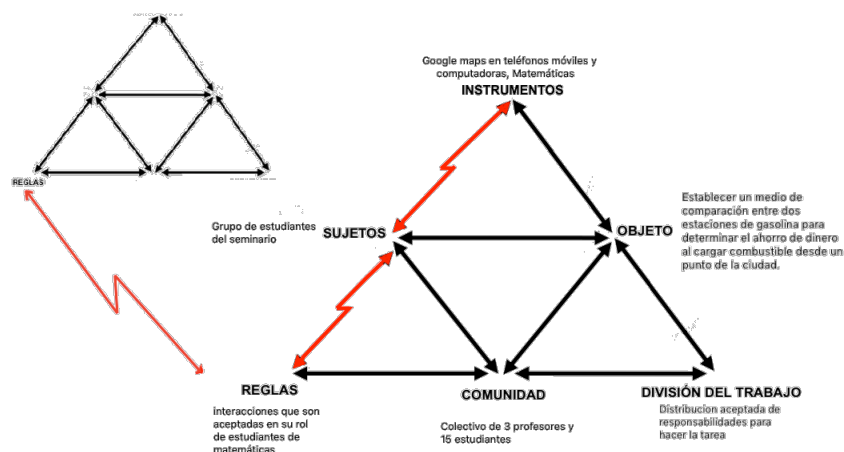
El segundo binomio muestra que la aceptación de ciertos métodos y estrategias para hacer la tarea no encajaban en una tradición matemática, donde la obtención de ciertas medidas se asocia al uso de ciertos dispositivos que se vinculan con prácticas recurrentes y se han convertido en normas al interior de las aulas. El desarrollo de esta contradicción exigió que los estudiantes

conocieran con mayor detalle las funcionalidades de las aplicaciones del dispositivo móvil (herramienta) con la cual estaban haciendo mediciones. A la luz de la teoría de Aprendizaje Expansivo, este hecho puede ser un indicio de una transformación del objeto.

En la segunda tarea, además de las contradicciones que se identificaron antes, se observó una influencia de los sistemas de actividad vecinos. En este caso, el conocimiento de Diana como conductora la llevó a manifestar la no aceptación de la dinámica que tenía el grupo para determinar los desplazamientos de ida y regreso de la estación de gasolina. Esas contradicciones pueden considerarse de **Nivel 4**; la influencia de sistemas de actividad vecinos transformó el sistema de actividad inicial y permitió que los participantes determinaran, por medio de unas funciones matemáticas, la cantidad de dinero que puede ahorrarse un conductor al cargar combustible en una estación de gasolina. La presencia de contradicciones de **nivel 2** y **nivel 4** se ilustra en la Figura 3.

Figura 3

Contradicciones en el sistema de actividad de la tarea 2.



Aunque los estudiantes utilizaron sus propios dispositivos móviles en ambas tareas, las *Apps* a las que tuvieron acceso permitieron determinar un medio para estructurar y debatir

algunas ideas alrededor de su solución. Las tensiones entre los sujetos y los instrumentos por las maneras de establecer las medidas y ubicación en el mapa se desarrollaron hasta encontrar una forma de representar algebraicamente la relación entre las variables que vincularon. Sin embargo, las características del recorrido y la manera en que debía hacerse permitieron estructurar una nueva solución que vincula lo que, tradicionalmente, pasa al conducir un vehículo y hacer un desplazamiento de ida y vuelta. Para Lektorsky (2009), esa necesidad de transformar la actividad colectiva es el resultado de un conflicto interno que existe en un sistema. En este caso, los conflictos internos produjeron transformaciones en las maneras en que los estudiantes resolvieron sus tareas y adoptaron otras formas de establecer medidas en procesos de modelación donde tuvieron la posibilidad de decidir qué herramientas incorporar.

Los diálogos de los estudiantes evidencian que la tecnología tiene un rol protagónico no solo en su conceptualización como artefacto (Mitcham, 1994), también en su transformación como objeto de estudio y los aspectos volitivos que conlleva; es decir, es un motivo para que los estudiantes necesiten ampliar el conocimiento acerca de la herramienta y las decisiones que puedan tomar al respecto. Mitcham (1994) conceptualiza estas características de la tecnología como conocimiento, cuando se relacionan con la comprensión de la naturaleza funcional del artefacto; y como volición, cuando influyen en la voluntad, intención y elección que se asocian a ella. En la primera tarea, las estudiantes ampliaron su conocimiento sobre el podómetro para hacer uso de las aplicaciones que tenían en su celular y en la segunda tarea, centraron su atención en la aplicación de mapas que ofrecían sus celulares y computadores, en cómo determinar mejor una ubicación y cómo establecer diferentes rutas.

Resolver tareas de modelación en contextos que no son frecuentes en la tradición escolar (objeto de la actividad) generó en los estudiantes la necesidad de vincular sus dispositivos

tecnológicos y los usos convencionales que tienen en sistemas de actividad vecinos. Este vínculo de sus dispositivos extendió su uso y conocimiento; además, es una posible evidencia de transformación expansiva en la actividad escolar. Bajo la mirada de esta investigación, esto es importante por dos razones. En primer lugar, permite transformaciones del objeto de actividad, es decir, permite que temporalmente los estudiantes de manera espontánea centren su atención en ampliar el horizonte de conocimiento de sus propias herramientas y, con ello, sus acciones dirigidas a objetos. En segundo lugar, resolver estas tareas evidencia comprensiones y usos sobre la manera en que las tecnologías se pueden usar en las aulas sin menospreciar su uso social.

Esas transformaciones por parte de la tecnología en las tareas de modelación son una manera en que se pueden representar los aprendizajes expansivos, según Engeström y Sannino (2010). Para los intereses investigativos de este estudio, esto permite presentar un argumento para mostrar que las contradicciones que aquí se presentaron evolucionaron hasta transformaciones expansivas en los sistemas de actividad que se analizaron.

Los estudiantes incorporaron en estas dos tareas nuevas maneras en que las medidas pueden ser obtenidas y otros artefactos que generaron cambios en el desarrollo de los procesos de modelación. Souto (2014) presentó hallazgos similares a los resultados de este estudio en un curso on-line de formación de profesores y su trabajo reporta una transformación del objeto de actividad por el vínculo de Geogebra para estudiar cónicas; el uso del programa transformó el espacio del problema y dio forma a otras acciones en los participantes.

En el ambiente de modelación en el que se involucraron los estudiantes y sus dispositivos tecnológicos, aumentaron tanto las posibilidades físicas para resolver las tareas como diversas maneras en que pueden amalgamarse ideas o cuestionamientos en la mente. En ese sentido, este estudio ofrece una mirada a cómo los estudiantes amplían el conocimiento sobre la tecnología y

superan algunos problemas que mencionaron William y Goods (2012), en los cuales la tecnología se ve como una caja negra en la que las matemáticas se ocultan.

7. Conclusiones

La idea de estudiar las contradicciones y su papel transformador en procesos académicos de formación no es nueva en la literatura, miradas similares a este sistema de actividad en ambientes escolares ya fueron abordados por Mwalongo (2016) y Gedera (2016) con resultados que promueven la discusión en el campo de la educación. Sin embargo, el interés por estudiar en conjunto contradicciones en procesos de modelación con tecnologías, como se propone en este estudio, tiene características diferenciadas que permiten centrar la atención en futuros trabajos sobre cómo pueden transformarse los procesos de modelación cuando los estudiantes vinculan sus propias tecnologías y amplían su campo de uso, conocimiento y acción frente al estudio de las matemáticas.

Las manifestaciones discursivas mostraron ser el punto de partida para identificar contradicciones, pero hay expresiones de los estudiantes que muestran otras formas lingüísticas que pueden aparecer. Al respecto, otros estudios podrían ampliar este marco de referencia. En ese sentido, este trabajo puede ser un insumo para examinar y probar la usabilidad empírica y metodológica que ofrece la teoría, como lo señalaron Engeström et al. (2013).

Los estudiantes mostraron un uso limitado de las herramientas, pero sus acciones individuales y colectivas permitieron una transformación del proceso de modelación. En la visión de tecnología, que en principio apareció en su forma de herramienta, también apareció como conocimiento (en cuanto al interés colectivo por saber más), como actividad (en cuanto a la manera como permitió llevar a cabo un proceso para solucionar la tarea de modelación) y como

volición (dadas las decisiones que toman los estudiantes para finalizar la tarea). Estos elementos muestran cómo puede haber una evolución de la concepción de tecnología en la línea de Mitcham (1994) y Vries (2016).

Aspectos que se relacionan con la volición, coherentes con esta visión de tecnología, están cambiando la manera en que las personas toman decisiones y como muestran los hallazgos de este estudio, también desafíos para proponer procesos de modelación en Educación Matemática. En la actualidad, dispositivos como el Smartwatch pueden indicar si una persona tiene pulsaciones por fuera del rango normal e informar a su usuario sobre la necesidad de visitar un médico; otras aplicaciones en dispositivos móviles pueden registrar la actividad física y mostrar picos de alta o baja intensidad en una rutina de ejercicios, con lo que una persona podría decidir si aumenta la frecuencia de entrenamiento o la disminuye. Sería interesante observar experiencias de trabajos interdisciplinarios de modelación con estas características y con estudiantes que se formen en ciencias de la salud.

Finalmente, es necesario ampliar el campo de conocimiento de procesos de modelación con tecnologías con características similares a este estudio y, como lo mencionan Molina-Toro et al. (2019), observar cómo modelan los estudiantes, cómo elaboran sus conjeturas y cómo se consolidan los diversos aprendizajes en estos procesos. Involucrar en el aula los dispositivos de los estudiantes puede ser, en coherencia con los intereses de este estudio, una manera de permitir que los aprendizajes en matemáticas no tengan dependencias tecnológicas que trasciendan el contexto escolar y estén a la espera de recursos estatales. Un estudio a los sistemas de actividad que emergen en procesos de modelación con tecnologías digitales de los estudiantes y los aprendizajes expansivos que de allí se desprenden, sugiere ampliar la investigación tanto teórica como empírica en este campo.

Referências

- Bassanezi, R. (2002). *Modelagem Matemática—Um Método Científico de Pesquisa ou uma Estratégia de Ensino e Aprendizagem. Ensino—Aprendizagem Com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Borba, M. de C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer Science & Business Media.
- Cifuentes, J. C., & Negrelli, L. (2012). Uma Interpretação Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática: implicações para a matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(43), 791–815. <http://ojs-teste.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/6888>
- Confrey, J. (2007). Epistemology and Modelling—Overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 125–128). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-0-387-29822-1_10.pdf
- Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. In *Basic qualitative research* (Four Ed.). Sage Publications, Inc.
- Engeström, Y. (1999). Communication, discourse and activity. *The Communication Review*, 3(1–2), 165–185. <https://doi.org/10.1080/10714429909368577>
- Engeström, Y. (2000). From individual action to collective activity and back: developmental work research as an interventionist methodology. In P. Luff, J. Hindmarsh, & C. Heath (Eds.), *Workplace Studies* (pp. 150–166). Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511628122.008>
- Engeström, Y. (2015). Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research. In *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research, Second Edition* (Second Edi). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139814744>

- Engeström, Y., Rantavuori, J., & Kerosuo, H. (2013). Expansive Learning in a Library: Actions, Cycles and Deviations from Instructional Intentions. *Vocations and Learning*, 6(1), 81–106. <https://doi.org/10.1007/s12186-012-9089-6>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 5(1), 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2011). Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts: A methodological framework. *Journal of Organizational Change Management*, 24(3), 368–387. <https://doi.org/10.1108/09534811111132758>
- Galleguillos, J., & Borba, M. de C. (2018). Expansive movements in the development of mathematical modeling: analysis from an Activity Theory perspective. *ZDM*, 50(1–2), 129–142. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0903-3>
- Gedera, D. S. P. (2016). The Application of Activity Theory in Identifying Contradictions in a University Blended Learning Course. In D. S. P. Gedera & P. J. Williams (Eds.), *Activity Theory in Education* (pp. 53–69). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-387-2_4
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 301–304). Springer.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries* (pp. 1–42). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
- Lei, J., Luo, P. H., Wang, Q., Shen, J., Lee, S., & Chen, Y. (2016). Using Technology to Facilitate Modeling-Based Science Education: Lessons Learned from a Meta-analysis of Empirical Research. *Journal of Educational Technology Development and Exchange (JETDE)*, 9(2), 4. http://aquila.usm.edu/jetde/vol9/iss2/4/?utm_source=aquila.usm.edu%2Fjetde%2Fvol9%2Fiss2%2F4&utm_medium=PDF&utm_campaign=PDFCoverPages

- Lektorsky, V. A. (2009). Mediation and discourse: Mediation as a means of collective activity. In A. Sannino, H. Daniels, & K. Gutiérrez (Eds.), *Learning and Expanding with Activity Theory* (pp. 75–87). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809989.006>
- Mitcham, C. (1994). *Thinking through Technology: The Path between Engineering and Philosophy* (1st ed.). The University of Chicago Press.
- Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8). <https://doi.org/10.29333/ejmste/108438>
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87–115. <http://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/506>
- Mwalongo, A. I. (2016). Using Activity Theory to Understand Student Teacher Perceptions of Effective Ways for Promoting Critical Thinking through Asynchronous Discussion Forums. In D. S. P. Gedera & P. J. Williams (Eds.), *Activity Theory in Education* (pp. 19–34). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-387-2_2
- Pereira, R. dos S. G., Seki, J., Palharini, B., Neto, J., Silva, A., Damin, W., & Martins, B. (2017). Modelagem matemática e tecnologias digitais educacionais: possibilidades e aproximações por meio de uma revisão sistemática de literatura. *REnCiMa*, 8(2), 80–94.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(8), 2125–2140. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004>
- Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 19(1), 99–124. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1914>
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la

- modelización matemática. *UNIPLURIVERSIDAD*, 19(2), 161–183.
<https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09>
- Siller, H.-S., & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. 2136–2145.
- Soares, D. da S., & Borba, M. de C. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 575–587. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0568-5>
- Souto, D. L. P. (2014). Transformações expansivas na produção matemática on-line. In repositorio.unesp.br. *Cultura Acadêmica*. <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/126237>
- Vries, M. J. de. (2016). *Teaching about Technology*. Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-32945-1>
- Williams, J., & Goos, M. (2012). Modelling with Mathematics and Technologies. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 549–569). Springer New York.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_18
- Yamagata-Lynch, L. C. (2010). *Activity Systems Analysis Methods*. Springer US.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6321-5>

**Artículo III. Aprendizajes potencialmente expansivos en procesos de modelación con
tecnologías digitales**

(Una versión mejorada de este artículo se encuentra en proceso de revisión en idioma inglés
para su publicación)

Aprendizajes potencialmente expansivos en procesos de modelación con tecnologías digitales

Resumen

Este artículo reporta los hallazgos de una investigación que analiza procesos de modelación con tecnologías digitales para identificar aprendizajes y transformaciones que se fundamentan en la teoría de Aprendizaje Expansivo. Los resultados presentan secuencias de acciones expansivas que surgen al solucionar tareas de modelación donde los mismos participantes vinculan sus dispositivos tecnológicos y ofrecen evidencia de una transformación de la tecnología a nivel de objeto de la actividad. Los hallazgos muestran la influencia de otros sistemas de actividad en el trabajo propuesto a los participantes y cómo, por medio de espirales de secuencias expansivas, se pueden identificar aprendizajes en estos procesos. El estudio también ofrece evidencias de cómo, en procesos de modelación, el vínculo de dispositivos digitales de los estudiantes permite trascender la mirada sobre estos objetos en el aula. Nuevos estudios en esta línea se pueden desarrollar en correspondencia con usos sociales de las tecnologías y sus avances a futuro.

Palabras clave: Aprendizaje Expansivo, Sistema de actividad, Modelación, Tecnologías digitales.

Abstract

This article reports the findings of a research that analyzes modeling processes with digital technologies to identify learning and transformations based on the Expansive Learning theory. The results present sequences of expansive actions that arise when modeling tasks are solved. Participants use their technological devices and evidence a transformation of technology

at the object level. The findings show an influence of other activity systems in the work performed and how, through spirals of expansive sequences, is possible to identify learning in these processes. The study also evidences how, in modeling processes, the link of students' digital devices allows them to transcend the vision on these objects in the classroom. Future studies in this area can be developed in correspondence with social uses of technologies and their advances.

Keywords: Expansive Learning, Activity System, Modeling, Digital technologies.

1. Introducción

En la literatura internacional se discute sobre aspectos teóricos y metodológicos de la modelación en Educación Matemática (en adelante, modelación) que determinan diferentes perspectivas para su inclusión en las aulas. Algunos trabajos presentan desarrollos que se relacionan con competencias de los estudiantes para modelar y el proceso de modelación a través de ciclos (Blum & Leiss, 2007; Borromeo Ferri, 2006; Maass, 2006; Perrenet & Zwaneveld, 2012; Rodríguez Gallegos & Quiroz Rivera, 2016); y otros trabajos, en perspectivas diferentes, centran la atención en la producción de conocimiento matemático y el rol de la tecnología que se utiliza para el desarrollo de estos procesos (Diniz & Borba, 2013; Molina-Toro et al., 2018; Soares & Borba, 2014). Las maneras de hacer modelación en entornos escolares llevan aspectos implícitos como el análisis de fenómenos, la solución de problemas, el estudio de modelos matemáticos y el vínculo con otros campos del saber; en varios casos, estos procesos se desarrollan con el uso de tecnologías que ofrecen una serie de posibilidades para el trabajo de los estudiantes. Si bien se reconoce el potencial de la tecnología para reorganizar los procesos de modelación, la literatura es aún limitada y es necesario el desarrollo de estudios empíricos que amplíen la comprensión en esta línea (Geiger et al., 2010; Greefrath & Vorhölter, 2016; Molina-Toro et al., 2018).

El uso de tecnologías digitales en modelación fomenta la motivación, la participación y la discusión entre los estudiantes (Pereira et al., 2017) y añade más posibilidades de aprendizaje ya que proporciona otras capacidades que involucran procesos sociales, matemáticos y de comunicación (Daher & Shahbari, 2015). En ese sentido, un análisis a nuevos desarrollos tecnológicos y sus usos sociales es clave para ampliar la comprensión sobre cómo los procesos de modelación pueden vincular otras maneras de interpretar, adaptar y comprender el mundo en el desarrollo de la actividad matemática escolar.

En estudios empíricos se ofrece evidencia de cómo el uso de software permite que, en procesos de modelación, los estudiantes tengan acceso a diferentes representaciones de los objetos matemáticos, visualicen gráficos, procesen datos, experimenten, analicen y construyan modelos (Molina-Toro et al., 2019; Pereira et al., 2017). Sin embargo, también se llama la atención en la necesidad de generar más investigación sobre procesos de modelación que vinculen tecnologías digitales, dados los avances recientes en ese campo, y en indagar cómo diversas concepciones de aprendizaje pueden reflejar otros modos de trabajo en modelación con tecnologías (Molina-Toro et al., 2019). Aun cuando existe evidencia de las oportunidades que ofrece la tecnología y la modelación en el aprendizaje, sigue siendo necesario indagar en qué condiciones los dispositivos digitales en procesos de modelación impiden o amplían las posibilidades de aprendizaje (Niss et al., 2007).

Una variedad de dispositivos digitales se vincula cada vez con mayor frecuencia al trabajo en las aulas, pero en muchos casos esa inclusión obedece a intereses que se asocian a desarrollos curriculares y al conocimiento que los profesores tengan sobre esas herramientas. Los beneficios de incorporar tecnología a la enseñanza de las matemáticas no se están aprovechando completamente (Bray & Tangney, 2017) y la necesidad de utilizar las tecnologías digitales en el

aprendizaje de las matemáticas se hace cada vez más evidente en los planes de estudio internacionales (Geiger et al., 2010).

En estudio previo (Molina-Toro et al., 2021) se encontró evidencia de cómo los dispositivos digitales de los estudiantes fueron herramientas que aportaron al desarrollo de procesos de modelación para tomar datos, validar procedimientos y ampliar el campo de conocimiento de la tecnología, entre otros. En ese trabajo se analizaron contradicciones que se originaron al solucionar dos tareas de modelación y se observó cómo esas mismas contradicciones permitieron una transformación de la manera como los participantes resolvían problemas al interior del proceso, modificaban algunas conjeturas y solucionaban las tareas propuestas. El uso social de la tecnología y la integración de dispositivos móviles juegan otros roles en los procesos de modelación en las aulas y, por tanto, en el aprendizaje (Molina-Toro et al., 2019); sin embargo, aún se requiere de investigaciones sobre los usos e integración de estas tecnologías en los procesos de modelación. Con el fin de determinar las maneras en que se reorganiza el aprendizaje con tecnologías en ambientes de modelación, este artículo busca responder a la pregunta *¿qué aprendizajes se originan en procesos de modelación en los cuales los estudiantes utilizan sus propias tecnologías digitales?*

2. Aprendizaje Expansivo y sistemas de actividad en procesos de modelación con tecnologías digitales

La teoría de Aprendizaje Expansivo (AE) aparece como una alternativa a posturas dominantes donde el interés por la cognición desconoce la influencia de la cultura en los sujetos (Engeström, 2015). Esta línea teórica plantea una secuencia de acciones de aprendizaje que constituyen lo que se denominó los ciclos de Aprendizaje Expansivo y atienden a la diversidad de

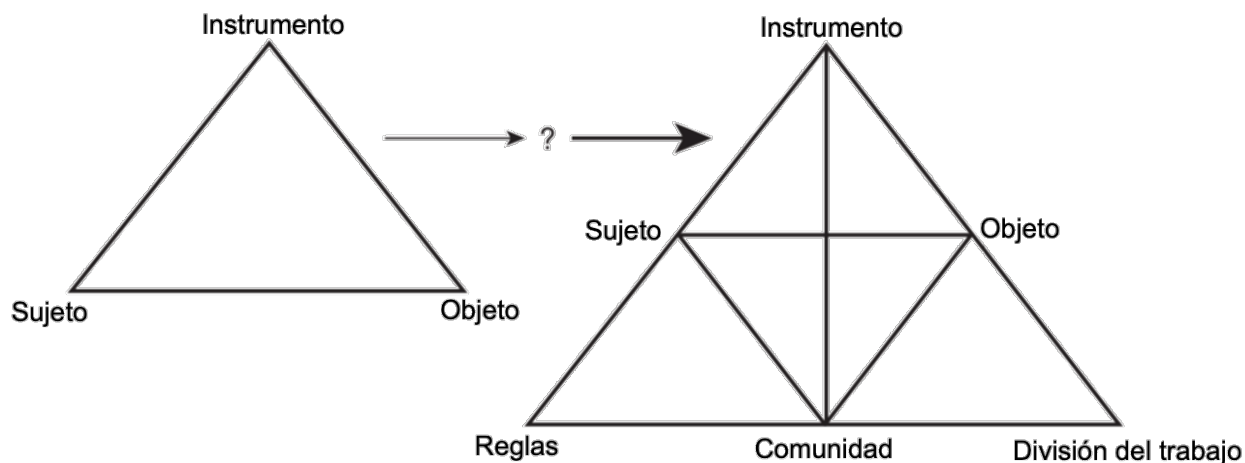
procesos que pueden manifestarse en actividades colectivas de las personas. Por ello, la teoría permite estudiar la transformación de una idea que luego se consolida en una nueva manera de actuar en la práctica social. Engeström (1987) analiza cómo el aprendizaje humano se relaciona con tipos de actividad social e históricamente constituidos y, al respecto, reconoce tres tipos de actividad que dirigen lo que él denomina la formación de la actividad de aprendizaje: actividad de ir a la escuela, actividad del trabajo y actividad de la ciencia y el arte. En esta línea teórica, la actividad se considera un proceso colectivo en un sistema en el que las prácticas sociales son influenciadas por una comunidad, normas, instrumentos, sujetos y objetos o motivos que dirigen diferentes acciones de quienes participan en ella. Una actividad que se preocupa del “hacer para transformar” y no solo del “hacer” como acción involuntaria (Barab et al., 2002).

La esencia de la actividad de aprendizaje es, como lo expresa Engeström (2015), la producción de nuevas estructuras de actividad que se generen por acciones en las cuales se manifiesten contradicciones internas con respecto a la manera tradicional en que se desarrolla esa actividad. Estas nuevas estructuras requieren de un dominio de nuevos artefactos para resolver problemas y transformar acciones individuales que permanecieron inmodificables, en acciones colectivas que configuren otros sistemas de actividad. En la estructura de transición de acciones individuales a acciones colectivas que presentó Engeström (Figura 1), esa relación entre sujeto, objeto e instrumento se introduce en un sistema de actividad en el cual entran otros actores que promueven un análisis colectivo de la actividad existente. De esa manera, la acción del sujeto ya no depende solo de interacciones con el objeto mediadas por instrumentos y, en un escenario más amplio, las reglas, la comunidad y la distribución de la labor se interconectan con la actividad.

Figura 1

Estructura de la transición de acciones individuales a acciones colectivas que presentó

Engeström (1987, 2015)



El modelo triangular representa un esquema que conecta de manera unificada los diversos componentes del sistema de actividad (Mwanza & Engeström, 2005). Este sistema se modifica por factores externos al sujeto que direccionan el curso de la actividad y estructuran una acción colectiva en la que el trabajo se distribuye y las relaciones de poder emergen. Es por esta razón que en una actividad colectiva se analiza la conexión de todos los elementos que conforman el sistema, de manera que las decisiones frente a la alteración o cambio de los modos de desarrollar una actividad o de transformar su objeto están constantemente condicionadas para los sujetos. Este aspecto reconoce las múltiples maneras en que la acción del sujeto se modifica en atención a circunstancias externas que pueden cambiar tanto los instrumentos de mediación como el objeto de la actividad misma.

La influencia de otros contextos en la acción de los sujetos permite establecer vínculos entre sistemas de actividad en los cuales participan por fuera de la escuela y los sistemas de actividad que se pueden configurar al interior de las aulas. En ese sentido, tanto la visión de aprendizaje como el análisis de los sistemas de actividad permiten usar la teoría propuesta por Engeström (1987) para analizar los procesos de modelación con tecnologías que se desarrollan en aulas regulares.

En el marco de la teoría de Aprendizaje Expansivo y bajo la perspectiva de este trabajo, la modelación con tecnología se comprende como un ambiente de aprendizaje que involucra a los estudiantes en el estudio de la matemática a través de tareas en las que convergen contextos culturales, procesos de experimentación, modelos y campos de saber matemático (Molina-Toro et al., n.d.; Rosa & Orey, 2019). Este ambiente permite analizar sistemas de actividad que se configuran en las dinámicas propias de estos procesos y realizar otro tipo de análisis de las maneras en que los estudiantes vinculan el conocimiento matemático y tecnológico en entornos escolares.

La modelación se puede utilizar como un instrumento de investigación para tener un mejor entendimiento de la realidad (Bassanezi, 2002); como una vía para integrar habilidades técnicas y conocimientos (Perrenet & Adan, 2010) o puede resaltar, desde un punto de vista sociocultural, cuestiones fundamentales que enfatizan el desarrollo emergente de ideas complejas que se discuten y perfeccionan a través de interacciones (Confrey, 2007). Estas acepciones permiten reconocer que, en el escenario escolar, la modelación está inmersa en un contexto en el cual convergen necesidades y motivaciones de los sujetos que participan en estos procesos; estas necesidades y motivaciones también influyen en las dinámicas que acompañan el acto de modelar.

El sujeto que modela en ambientes escolares no es un ser aislado de las realidades que ocurren por fuera de las aulas y, en ese sentido, los sistemas de actividad que allí surgen van acompañados de una fuerte carga cultural en cuanto a la tradición escolar de estudiar matemáticas, por ello, las reglas que acompañan estos espacios están inmersos en lo que permite la cultura matemática y sus requerimientos curriculares. Analizar sistemas de actividad que configuran al hacer modelación permite delimitar los artefactos como herramientas o como signos que se vinculan a estos procesos, observar cómo los sujetos se distribuyen responsabilidades para atender a diferentes acciones que deben llevar a cabo y, también, identificar que el objeto de la actividad puede ser descrito en función de las tareas o de los fenómenos en los que centran la atención los sujetos modeladores.

Los sistemas de actividad que se configuran en procesos de modelación con tecnologías deben cumplir con los principios que relacionaron Engeström et al. (2013), entre ellos, que el sistema de actividad sea colectivo y se oriente a objetos, que permita el vínculo de diversos puntos de vista de quienes participan en ellos y que promueva transformaciones cualitativas.

En esta línea teórica, aparecen dos aspectos que bajo la configuración de un sistema de actividad pueden considerarse en el contexto educativo; en primer lugar, las transformaciones culturales que producen nuevas herramientas tecnológicas diseñadas para suplir necesidades humanas; en segundo lugar, los cambios que genera en la actividad escolar el vínculo de nuevos instrumentos que interactúan con los estudiantes cuando están fuera de las aulas. Ambos aspectos no pueden ser vistos de manera aislada y, por tanto, las acciones que los sujetos lleven a cabo en estos procesos también deben ser observadas en relación con sistemas de actividad de los cuales hacen parte cuando están dentro o fuera de las aulas.

3. Acciones de aprendizajes potencialmente expansivos

La teoría de AE considera varias maneras en que puede manifestarse el aprendizaje. Según Engeström et al. (2013), pueden mantenerse enfocadas y se elaboran de manera simultánea en la actividad. Una de ellas se puede identificar por la transformación del objeto de actividad; es decir, una evolución del objeto de una noción general a otra específica que centra la atención de los participantes en el sistema de actividad y puede transformar cualitativamente todos sus componentes.

Otra manera en que se puede identificar la presencia de aprendizajes expansivos es a través de la secuencia que van determinando las acciones de los sujetos en un sistema de actividad. Para Engeström (1987), las acciones forman una espiral o un ciclo que puede llamarse actividad de aprendizaje o aprendizaje expansivo. Según este investigador, un ciclo de aprendizaje comienza con individuos que cuestionan su práctica aceptada y, a través de la solución de contradicciones, producen nuevas formas de práctica que se generan por la actividad de aprendizaje. Estas acciones no están necesariamente definidas en periodos prolongados de tiempo; según Engeström (1987, 1999), pueden existir ciclos de acciones de aprendizaje a pequeña escala que son denominados ciclos de aprendizaje potencialmente expansivos y toman minutos u horas. Estos ciclos pueden tener lugar en uno o varios encuentros de personas e implican análisis colaborativos y solución de problemas.

Para Engeström y Sannino (2010), la actividad de aprendizaje se consolida por medio de acciones de aprendizaje expansivo, a saber:

- Acción de cuestionar: criticar o rechazar prácticas aceptadas previamente.

- Acción de analizar: involucrar una transformación mental, práctica o discursiva de una situación; este análisis permite descubrir causas o principios explicativos de ella.
- Acción de modelar: construir un modelo simplificado que ofrezca una solución a la situación problemática y que sea observable.
- Acción de examinar el modelo: poner el modelo a prueba para comprender sus limitaciones y su potencial.
- Acción de implementar el modelo: poner en funcionamiento el modelo concretando aplicaciones prácticas.
- Acción de reflexionar y evaluar: dar solidez al proceso para encontrar un resultado definitivo.
- Acción de consolidar la nueva práctica: integrar y afianzar los resultados en una nueva forma de práctica.

Las acciones de aprendizaje se llevan a cabo a través de diversos métodos (condiciones) que en la teoría se reconocen como operaciones, las cuales, a la vez, dependen de instrumentos y otras situaciones en las que se desarrolla la actividad. Estas acciones están dirigidas a la obtención de objetivos que pueden aparecer en la práctica colectiva o individual de un grupo de sujetos y no deben entenderse solo como actuaciones que reflejen la conciencia del individuo.

Para Engeström et al. (2013), las acciones de aprendizaje se identifican por medio de conversaciones que van acompañadas de gesticulaciones, posiciones corporales, miradas y usos de artefactos. Además, los autores manifiestan que una acción de aprendizaje solo se lleva a cabo si en la realización de una tarea se transforma una práctica colectiva o se adopta una nueva manera de actuar frente a ella. Lo anterior implica que la práctica colectiva debe ser entendida en las acciones individuales y sociales y, adicional a ello, con la inclusión de artefactos y de medios

culturales que pertenecen a sus contextos cotidianos. Tradicionalmente, el aprendizaje exhibe cambios comportamentales y cognitivos de los sujetos, pero en el aprendizaje expansivo, estos cambios se manifiestan en el objeto de la actividad colectiva (Engeström & Sannino, 2010). En esa dirección, la actividad de aprendizaje debe superar tanto limitaciones individuales como colectivas y favorecer la inclusión de todos los sujetos involucrados.

4. Modelación con tecnologías digitales

La diversidad de herramientas digitales y sus múltiples usos en procesos de modelación ponen en evidencia cambios sustanciales en las maneras como estudiantes y profesores generan vínculos entre las matemáticas y ese dominio fuera de ella que algunos investigadores (Blum et al., 2007) denominan ‘mundo real’. La tecnología es una herramienta pertinente para ampliar los enfoques de aprendizaje y el trabajo con aplicaciones matemáticas (Niss, Blum, & Greefrath, 2007) y es un medio para identificar cómo los estudiantes desarrollan subprocesos como calcular, refinar y analizar modelos o, hacer traducciones entre el lenguaje matemático y el lenguaje del dispositivo que utilicen al modelar; diversos estudios pueden servir de referencia para mirar el impacto de la tecnología al interior de los procesos de modelación (por ejemplo: Sinclair y Jackiw (2010), Geiger (2011) o Greefrath y Siller (2017), entre otros).

Un estudio reciente (Molina-Toro et al., 2019) muestra que el rol de las tecnologías en los procesos de modelación va más allá de usos domesticados (reducidos a los que una herramienta ofrece culturalmente) y bajo ciertas condiciones reorganizan las maneras como los estudiantes desarrollan los procesos, elaboran sus modelos, llevan a cabo acciones propias de su rol de modeladores y extienden el campo de saber matemático. En estos procesos, la influencia de la tecnología permite investigar y experimentar de otras maneras (Greefrath & Siller, 2017), además

de promover el diálogo y la participación de los estudiantes; estos aspectos son claves en la teoría de Aprendizaje Expansivo donde se reconocen y analizan los diversos puntos de vista de las personas que participan en un sistema de actividad.

Bajo esta mirada, la tecnología deja de ser una herramienta de uso discontinuo y, en coherencia con los planteamientos de Mitcham (1994), se puede conceptualizar como un objeto fabricado por el hombre, como conocimiento en cuanto al uso y alcance de la herramienta, como actividad en cuanto a las acciones que conectan el conocimiento y su uso, y como volición en cuanto a los impulsos, las elecciones y las decisiones que éstas puedan originar. Esta visión sobre tecnología reconoce aspectos sociales y culturales de los sujetos y puede ser, junto con la teoría AE, un insumo para comprender cómo los avances tecnológicos transforman la actividad escolar en procesos de modelación en las aulas.

5. Metodología

El desarrollo empírico de este estudio se llevó a cabo en un curso de modelación en el que participaron tres profesores y 15 estudiantes de un programa de formación de futuros profesores de matemáticas. El curso se desarrolló en 16 sesiones de cuatro horas cada una. En este curso se abordaron aspectos teóricos y prácticos de la modelación en escenarios escolares. Además, se integraron temáticas sobre concepciones de modelación, características de los tipos de tareas de modelado, desarrollo de proyectos y evaluación en modelación. Los estudiantes que participaron en el curso pertenecían a diferentes niveles de su programa académico de formación y sus conocimientos en el campo disciplinar y pedagógico de la modelación no eran homogéneos; algunos participantes manifestaron que su acercamiento al estudio de la modelación se dio a través de documentos curriculares.

En cada sesión, tanto profesores como estudiantes dialogaron sobre diversas maneras de vincular la modelación a la enseñanza de las matemáticas. También, en algunos momentos del curso, los participantes trabajaron con tareas de modelación que permitieron, además de centrar la atención en procesos de medición, discutir cómo las matemáticas escolares y la modelación forman un ambiente para la producción de conocimientos matemáticos. Como tarea paralela al desarrollo del curso, se solicitó a los estudiantes desarrollar un proyecto de modelación con otros compañeros, a partir de un tema, contexto o situación de su interés.

Este estudio reporta los hallazgos de un subgrupo de estudiantes que se agruparon de manera espontánea en cada sesión y manifestaron su disposición de hacer parte de la investigación. Cuatro estudiantes (Diana, Estela, Cristina y Sandra) hicieron parte de este subgrupo en todas las sesiones, pero hubo momentos donde se integraron dos o más participantes adicionales. La elección de este grupo obedece a la participación constante de las cuatro estudiantes, la variedad de información que proporcionaron sus datos, su participación en las discusiones y el uso continuo y espontáneo que hicieron de tecnologías móviles en el curso.

El interés por estudiar aprendizajes que emergieran en procesos de modelación con tecnologías digitales limitó a los profesores a no sugerir a priori ninguna herramienta para el desarrollo de las tareas de modelado que fueron propuestas, en su lugar, sus intervenciones buscaron ampliar los diálogos entre los estudiantes y fomentar su participación. Por ello, en el desarrollo de las tareas, los estudiantes tuvieron la posibilidad de utilizar cualquier recurso tecnológico disponible en las aulas o fuera de ellas y, además, pudieron conformar subgrupos de trabajo sin ninguna restricción.

Para el desarrollo del curso se siguieron protocolos éticos de investigación, se solicitó la firma de un consentimiento informado y se utilizaron seudónimos para preservar la identidad de

los estudiantes. Se recolectaron datos a través de grabaciones en audio y video y se incluyeron las producciones escritas de los participantes. Por las características de este estudio, su concepción teórica y las posibilidades que ofreció el curso, se empleó una metodología de análisis de sistemas de actividad (Yamagata-Lynch, 2010) para analizar las acciones de los estudiantes en actividades orientadas a objetos y transformaciones del objeto de actividad; en el caso de este estudio, en tareas en ambientes de modelación con tecnologías digitales.

Con el fin de realizar un análisis a los sistemas de actividad en correspondencia con Yamagata-Lynch (2010), los registros se sistematizaron en el software Atlas.ti y, como parte del proceso inductivo que propone el autor, se utilizaron herramientas analíticas que presentaron Corbin y Strauss (2015) y se delimitó un marco analítico de los datos para: i) analizar las grabaciones de video de cada sesión e identificar diálogos de los estudiantes en los cuales manifestaron sus puntos de vista sobre cómo resolver las tareas; ii) transcribir los diálogos y generar códigos en correspondencia con las acciones que se llevaron a cabo para resolver las tareas (acciones orientadas a objetos) (Tabla 1); iii) hacer uso de los códigos para hacer comparaciones y contrastar las acciones que llevaron a cabo los estudiantes con la teoría; iv) analizar la secuencia de acciones e identificar ciclos que correspondan a posibles aprendizajes expansivos.

Las acciones de aprendizaje no se estudiaron como secuencias predeterminadas que acontecen en un proceso de modelación. Por ello, para definir condiciones operacionales que facilitaran el análisis (Engeström et al., 2013) se consideró como un criterio para identificar la aparición de un ciclo de aprendizaje potencialmente expansivo, v) la aparición de al menos cuatro acciones de aprendizaje diferentes en el orden general de las acciones, no necesariamente en la

secuencia ideal que determina la teoría. Además, vi) se identificaron episodios en los cuales, en correspondencia con el AE, podría existir una posible transformación del objeto de la actividad.

Como herramienta complementaria para codificar las acciones expansivas y analizar diferencias epistémicas significativas, se utilizaron los subtipos de acciones de aprendizaje que presentaron Engeström, et al. (2013). La aparición de cada uno de los subtipos de acciones, no es necesaria para identificar una acción de aprendizaje y en correspondencia con el planteamiento de los autores, los subtipos de acciones se pueden clasificar en: cuestionar (Q1-desafiar cuestionamientos de otros participantes; Q2-criticar la práctica previa; Q3-cuestionar alguna propuesta de desarrollo); analizar (A1-articular ideas o necesidades; A2-análisis histórico; A3-análisis de problemas o desafíos; A4-identificar contradicciones; A5-examinar soluciones alternativas); modelar (M1-esbozar ideas iniciales de un modelo; M2-aprovechar modelos preexistentes; M3-nombrar y definir un modelo; M4-establecer un modelo de forma material o gráfica; M5-hacer adaptaciones al modelo); examinar (E1- discutir el modelo de manera crítica; E2-enriquecer el modelo); implementar (I1-demostrar la aplicación; I2-preparar la aplicación; I3-usar el modelo; I4-informar sobre el uso del nuevo modelo); reflexionar y consolidar una nueva práctica.

La Tabla 1 presenta los códigos para las acciones y subtipos de acciones de aprendizajes expansivos. Además, se codificó con las siglas TO aquellos episodios donde hubo una posible transformación del objeto con relación a la tecnología.

Tabla 1

Codificación de las acciones y subtipos de acciones de aprendizaje expansivo para este estudio en correspondencia con Engeström (2015) y Engeström et al. (2013)

Acción de aprendizaje	Argumentos para codificación	Código
1. Cuestionar	Expresiones o gestos que indiquen crítica, rechazo o controversia	Q1-Q2-Q3
2. Analizar	Expresiones o acciones que impliquen la búsqueda de causas o principios en el desarrollo de la tarea	A1-A2-A3-A4-A5
3. Modelar	Construir un modelo o representación que permita solucionar la tarea	M1-M2-M3-M4-M5
4. Examinar el modelo	Verificar el modelo	E-E1-E2
5. Implementar el modelo	Hacer uso del modelo para solucionar la tarea	I-I1-I2-I3-I4
6. Reflexionar y evaluar el proceso	Analizar la coherencia y solidez del modelo	R
7. Consolidar una nueva práctica	Hacer uso del modelo en situaciones análogas a las que se estudiaron	N

6. Resultados

En este apartado se presentan y se analizan las acciones de aprendizaje que se identificaron en dos sesiones donde los estudiantes tuvieron que resolver tareas de modelación y también, en espacios donde dialogaron con los profesores para el diseño del proyecto final del curso y su presentación. Además, se analiza la incorporación de la tecnología y las decisiones de los participantes para el desarrollo de cada tarea.

Medición de una vía circunvalar

La primera tarea de modelación consistió en hallar la medida de la longitud de una vía circunvalar que rodea la universidad. Para ello, los estudiantes conformaron subgrupos y se dirigieron a la vía para el desarrollo de la tarea. En sus primeros diálogos, la necesidad por generar un proceso de medición para largas distancias fue latente y puso en evidencia que los instrumentos y las estrategias que se usan tradicionalmente en las aulas no eran un recurso suficiente para resolver la tarea. Frente a esta situación, se presentaron preguntas como: “¿y esto cómo se mide?”, “si medimos con pasos ¿podremos lograr una medida precisa?” o “la gente que trabaja en la construcción de vías y carreteras ¿cómo mide esas distancias?”. Estas preguntas fueron evidencia de las primeras acciones de cuestionamiento (Q1) y también, del inicio de un primer ciclo de aprendizaje potencialmente expansivo. Al cuestionar la manera de hallar la medida, los participantes vincularon tecnología y buscaron otros recursos para solucionar el problema. En el siguiente diálogo, Diana, Estela y Cristina manifiestan ideas que vinculan sus dispositivos móviles y analizan posibles maneras de medir; este diálogo entre las tres estudiantes se puede interpretar como una articulación entre necesidades e ideas (A1).

Diana: a ver qué aplicaciones hay [haciendo referencia a buscar aplicaciones en su celular]

Estela: ¿un podómetro?

Cristina: cronómetro ¿no? Lo que sea

Diana: podemos hacer como grabando el cronómetro, grabando un vídeo o ¿cómo se llama? Miremos qué aplicaciones hay.

(Diálogo entre estudiantes, 7 de junio de 2019)

El reconocimiento del podómetro como un medio para resolver la tarea amplió las formas de acción de las estudiantes y, con ello, aparecieron manifestaciones que esbozaron ideas

iniciales (M1) frente al proceso a seguir. La atención puesta en la tecnología llevó a las estudiantes a tomar decisiones frente a cómo debía realizarse el recorrido, cómo se distribuirían algunas responsabilidades (medir contando los pasos, haciendo un video del recorrido) y la comprensión de cómo se realizaba la medición con el podómetro. Sugerencias como medir utilizando pasos y al mismo tiempo con el uso del podómetro, pusieron en escena aspectos de la matemática considerados al medir para hacer simplificaciones al proceso (preguntarse por la forma de la vía circunvalar y si reflejaba alguna simetría para hacer solo una parte del recorrido y luego calcular la otra), y hacen parte de una exploración de modelos existentes (M2) en términos de las herramientas que la matemática ofrece y la discusión del modelo (E1) para llegar a acuerdos antes de su implementación.

Aunque algunas perturbaciones discursivas (desacuerdos, malentendidos) aparecieron antes de iniciar el recorrido, las participantes implementaron (I3) cada una de las estrategias que propusieron; Cristina contó los pasos cuando caminaron, Estela utilizó el podómetro de su celular y Diana realizó un video del recorrido para determinar cuánto tiempo utilizaron. Como no hubo consenso, realizaron el recorrido completo antes de regresar al aula y redactar la solución.

El trabajo de las estudiantes en el aula puso en evidencia algunos problemas al hacer el recorrido, por ejemplo, Cristina perdió la cuenta de los pasos que llevaba y Estela encontró inconsistencias entre su dispositivo y la medición que realizó. Por estas razones, Diana verificó la aplicación de salud de su celular y suministró otros datos para completar la tarea; posteriormente buscó información en Google sobre el podómetro, cómo contaba los pasos y cómo se utiliza un podómetro y la compartió con sus compañeras para la escritura del informe final (TO). Las estudiantes utilizaron todos los datos que recopilaron, realizaron ajustes a la cantidad de pasos e

hicieron cálculos que les permitieron hallar la longitud que tiene la circunvalar universitaria. En su informe indicaron que la longitud de la vía circunvalar medía 1,75 Km.

En esta parte del proceso, las estudiantes llevaron a cabo otros subtipos de acciones de aprendizaje; algunas de ellas, como reflejo de la experiencia que tuvieron al hacer el recorrido y otras, como resultado de hacer el informe final de la solución. En la Tabla 2, se presenta un resumen de las acciones y subtipos de acciones de aprendizaje potencialmente expansivo que se identificaron en esta sesión de trabajo.

Tabla 2

Resumen de Acciones y subtipos de acciones de aprendizaje (Engeström, 2015; Engeström et al., 2013) que se encontraron en la primera tarea de modelación.

Intervalo del tiempo (minutos) en el que se desarrolló la tarea	Descripción de los momentos en que el grupo de estudiantes desarrolló la tarea	Códigos
5 – 30	Desplazamiento hacia la vía circunvalar para realizar el recorrido caminando	Q1 - A1- M1 - M2 - E1 - I3
33 – 39	Análisis de un mapa de la universidad que aparece en la vía circunvalar.	E - Q3 - A5
40 – 56	Finalización del recorrido y desplazamiento al aula para elaborar un informe en el que presentaron sus hallazgos, procedimientos y respuestas a la tarea.	M2 - E2 - E1 - E - R - M - I - I4
57- 80	Después de un receso analizaron el proceso e hicieron simplificaciones y adaptaciones a la propuesta de solución.	A5 - M5 - M1 - E - I - R

Como se presenta en la Tabla 2, en el trabajo de las estudiantes aparecen de manera reiterada acciones como analizar, modelar, examinar e implementar. Observar el mapa de la

universidad llevó a las estudiantes a identificar que la vía circunvalar no es simétrica y, por lo tanto, se debía hacer el recorrido completo y no solo una parte de él. Cuando perdieron la cuenta de los pasos, las estudiantes se preguntaron cómo podían hacer ajustes a los datos de los dispositivos y cómo podrían calcular la cantidad final de pasos. Esta situación colocó a las estudiantes en secuencias iterativas para analizar el proceso (acciones de análisis), realizar cálculos, refinar el modelo (acciones de modelar) y ponerlo a prueba a través de comparaciones entre los datos (acciones de examinar e implementar). El dispositivo de Diana tuvo un rol determinante en estas secuencias, ya que los datos que proporcionó fueron claves para que las estudiantes refinaran la expresión algebraica (modelo), simplificaran cálculos, verificaran sus resultados y llegaran a la solución final. Las acciones finales que se presentan en la Tabla 2 aparecieron como consecuencia del vínculo de la información de Diana sobre el podómetro y los datos de su dispositivo.

Elección de una estación de gasolina

En la segunda tarea de modelación los estudiantes se enfrentaron a una situación adaptada de Blum (2015). En clase, los profesores proyectaron tres ubicaciones diferentes en la ciudad de Medellín; en dos de ellas se encontraban estaciones de gasolina de la misma empresa distribuidora y, en la tercera, una casa con su respectiva dirección; además presentaron una imagen de un vehículo donde se mostraba su consumo de combustible en litros por cada 100 km. Los precios por galón de combustible tenían una diferencia de \$800 [0.25 USD] entre ambas estaciones de gasolina. Los estudiantes debían tomar un punto de referencia cerca de la casa y analizar en cuál de las dos estaciones de gasolina era más económico llenar el tanque de combustible.

Después de agruparse en subgrupos, al equipo de Diana, Cristina, Estela y Sandra se integraron dos compañeros más. Sus primeros cuestionamientos se relacionaron con conocer cómo establecer la ubicación de las estaciones de gasolina y cómo medir la distancia desde la casa a cada una de ellas, y la equivalencia entre galones y litros. Los estudiantes manifestaron preguntas como: “¿Alguien se ubica? No tengo ni idea de dónde queda eso”, “¿Qué distancia hay desde el punto que nos dieron hasta cada ubicación? ¿Cómo podemos encontrar esas distancias?”. Estas preguntas provocaron que otros participantes cuestionaran la necesidad de conocer una longitud para cuantificar un consumo de combustible de un auto y el gasto de dinero que representaría (Q1). En un análisis inicial aparecieron expresiones como: “...esas son funciones, obviamente, [...] en cierto punto va a ser más económica una de las dos (refiriéndose a las estaciones de combustible), [...] pero el modelo sería solo la función”. Estas manifestaciones dirigieron la atención de los estudiantes hacia el cálculo de distancias y medición de tiempos intentando relacionar variables que se contemplaron previamente, lo que muestra una articulación de ideas (A3) en las que la matemática emergió como un medio para relacionar variables.

La necesidad de vincular Google Maps obligó a Diana a reunir a sus compañeros frente a un computador para visualizar la ubicación de cada estación de combustible y el punto de referencia; como esta aplicación también suministró información sobre el tiempo en que un auto podría hacer el recorrido, los participantes tomaron nota de esos datos y realizaron cálculos y conversiones para construir una función (M1). Por varios segundos, Diana y Sandra observaron con atención el mapa y los recorridos mientras los otros integrantes del equipo hacían algunos cálculos finales. Algunas tensiones aparecieron entre los participantes por la forma como escribieron la dirección de cada lugar en la aplicación de Google Maps; comparaciones entre la

información que ofrecía la aplicación de celular y lo que tenía Diana en su computador se realizaron para establecer con mayor precisión las ubicaciones y las distancias (TO).

El grupo de estudiantes configuró una función de costos de la forma $f(x) = mx$ donde m representaba el valor del litro de gasolina y x la distancia recorrida desde el punto de partida a la gasolinera y dio forma a una relación entre las variables que habían identificado para configurar un modelo (M3); sin embargo, la experiencia de Diana como conductora le permitió identificar inconsistencias en el proceso ya que la ruta de ida desde el punto de referencia a cada estación no era la misma que de retorno al punto inicial, lo que obligó a realizar adaptaciones a la función (modelo matemático) que habían propuesto (M5). Los diálogos posteriores posibilitaron comparaciones entre las distancias y los tiempos de cada recorrido; el modelo se hizo más robusto puesto que incluyó un análisis a los recorridos de ida y regreso a cada estación, lo que es evidencia de una ampliación del modelo (E2). La aplicación de Google Maps ofreció diferentes rutas para ir de un lugar a otro y ello llevó al grupo a tomar decisiones con respecto al tiempo para hacer los recorridos, a contemplar un desplazamiento mayor, pero con menor tráfico de vehículos y, a realizar cálculos adicionales con el modelo. En este momento, aunque el diálogo entre los participantes se intensificó por la necesidad de elaborar criterios para una selección final de las rutas de desplazamiento, la acción de examinar el modelo y enriquecerlo (E) seguía presente en los puntos de vista que expresaron los participantes. De forma seguida, realizaron adaptaciones al modelo (M5) que incorporaron tanto en el trayecto de ida como de regreso de la gasolinera y construyeron una función para trabajar (M).

Con la función propuesta, los estudiantes evaluaron algunas condiciones que ofreció el modelo. Diana manifestó: “En plata te ahorras \$2000 (0,625 USD) [haciendo una comparación final de gastos]”. Para Gabriel esta diferencia de dinero no valía la pena pues en pesos

colombianos es poco dinero; sin embargo, el análisis de Cristina incluyó, además del ahorro en dinero, el tiempo adicional para llegar hasta esa estación de gasolina (18 minutos en el desplazamiento), lo que llevó a Gabriel a aclarar que matemáticamente el modelo era correcto.

Para Sandra y Diana, las manifestaciones de sus compañeros fueron un elemento para centrar la atención en aspectos sociales, una muestra de que el ahorro de dinero implicaba más contaminación del medio ambiente. Estas manifestaciones pueden interpretarse como una implicación sobre el uso crítico del modelo (E2) que dirige el interés hacia el ahorro de dinero y tiempo, en función de un análisis matemático. En estas manifestaciones, los estudiantes centran sus puntos de vista no solo en una respuesta matemática que refleja condicionantes de ese sistema de actividad del aula; también entran en juego otros sistemas de los cuales ellos hacen parte como ciudadanos e influyen en la manera como desarrollan el proceso.

Algunas consideraciones de los estudiantes sobre el modelo ofrecen evidencia de relaciones constantes que establecen entre sistemas de actividad que tienen incorporado un rigor matemático y sistemas de actividad fuera del aula. Para Gabriel era necesario dejar claro que la solución de la tarea incluía funciones matemáticas en las que estaba representado el modelo de ahorro de dinero. Para las demás compañeras, ese era un aspecto relevante de la solución. Expresiones como: “Es el plus”, “se quiere llegar a un modelo que se pueda utilizar” o “si llegado el caso no se quiere llenar toda la capacidad [llenar por completo el tanque de combustible], sino que se quiere la mitad, se cambia la x por 25 litros”, son una muestra de una implementación del modelo (I). Estas manifestaciones permiten inferir que los estudiantes reconocen las potencialidades de su modelo matemático e interpretan el significado de las representaciones x y $f(x)$ y de los cambios que serían necesarios para aplicarse a otra situación.

Por varios minutos, los estudiantes debatieron otras interpretaciones que podría tener el modelo y, a la luz de una conferencia que tuvieron en una de las sesiones anteriores del curso, discutieron sobre otras comprensiones de lo que es modelación, la validación del modelo, el contexto y el trabajo matemático; estos diálogos pueden interpretarse como una reflexión del modelo que construyeron y un intento por consolidar sus hallazgos (R).

El proyecto final de modelación

Desde la primera sesión de clase y durante todo el curso, los estudiantes desarrollaron un proyecto de modelación con un tema de libre elección. Para tal fin, en la sexta sesión, ellos presentaron ideas sobre las cuales tenían previsto desarrollar su proyecto de modelación y los integrantes que conformarían cada grupo. En la décimo segunda sesión se destinó un espacio de asesorías para orientar la continuación del proceso de construcción del proyecto y observar cómo evolucionaban las miradas de los estudiantes sobre las situaciones que propusieron para trabajar. Aunque algunos proyectos no mantuvieron los problemas originales que se presentaron en la sexta sesión, el espacio de la asesoría brindó herramientas teóricas y metodológicas para que ellos pudieran terminar sus trabajos y buscaran información adicional para complementar su estudio.

Por la divergencia entre sus intereses de trabajo, los estudiantes se agruparon de una manera diferente a la que venían trabajando en cada una de las sesiones. Por ello, con un interés particular en las redes sociales, Diana y Sandra decidieron conformar un grupo con otras dos compañeras para explorar un modelo que permitiera aumentar el número de seguidores en Instagram. Cuando los profesores preguntaron de dónde venía la idea de trabajar con esa plataforma, algunas manifestaciones fueron “Instagram es tendencia ahora, yo lo uso, pero no tengo conocimiento de eso, [...] quiero saber más de eso a ver cómo podemos sacar provecho a

otra red social”, “Cómo podemos sacar información [haciendo referencia a Instagram], tanto para mi empleo como para otras personas que están en el medio”. Además, las estudiantes expresaron motivaciones que hicieron referencia al trabajo de Diana, quien se desempeña como modelo y, por ello, sus compañeras querían buscar una manera de aumentar los seguidores de su perfil (objeto de la actividad). Estos argumentos permitieron identificar cuáles fueron los cuestionamientos (Q) que dieron origen al proyecto y qué motivó a las estudiantes a vincular tecnologías en el proyecto.

Ellas expresaron que el desarrollo del curso y el uso de tecnologías les permitió reconocer en las matemáticas y la estadística una herramienta para analizar características del proyecto. Expresiones como: “ver cómo desde diferentes gráficos podíamos sacar tanta información [...]”, para mí fue importante ver cómo se podía utilizar en el campo de nosotras”, “hemos buscado personas con muchos seguidores, que generen ingresos, pero que sus estadísticas de ‘me gusta’ y de seguidores, sean reales”, ofrecieron evidencia de cómo articularon ideas matemáticas al proyecto (A1). Aunque Instagram parecía inicialmente ser una herramienta en este proceso y la atención estaba más enfocada en estrategias para aumentar el número de seguidores, un desplazamiento en el motivo de la actividad se identificó en la expresión de Ana:

Lo que hicimos fue acotar el proyecto a una meta numérica, entonces íbamos a establecer que una cantidad de seguidores iba a ser nuestra meta en un tiempo determinado y cómo todas las actividades que nosotros íbamos a hacer, programar, durante esos días iban a afectar a que se cumpliera esa meta o no. (Julio 2 de 2019)

Las estudiantes expresaron que después de proponer esa meta buscaron un plan de trabajo para que Diana publicara en su perfil, investigaron características del Instagram y buscaron

trabajos de investigación en mercadeo con redes sociales. A manera de explicación, Diana manifestó que en Instagram Business había recursos que utilizarían para el trabajo:

Esto nos ofrece muchas estadísticas [señalando la aplicación en su dispositivo móvil], aquí está el contenido, la actividad y el público. En el contenido están las publicaciones y los alcances, (...) y el número de personas que en realidad vieron el perfil. (2 de julio de 2019)

Las manifestaciones de Ana y Diana permitieron identificar cómo aparecieron acciones de modelar (M), cómo buscaron modelos existentes (M2) y cómo Instagram dejó de ser solo un artefacto y se transformó en parte del objeto de actividad en el desarrollo del proyecto (TO). Al centrar la atención en cómo estaban desarrollando su proyecto, manifestaron que identificar los recursos que ofrece Instagram les brindó la posibilidad de encontrar parámetros para saber cuándo, la relación de ‘me gusta’ con número de seguidores refleja una cantidad real de seguidores del perfil (aspectos que ofrecen evidencia adicional de una posible transformación del objeto). Ana y Diana tuvieron en cuenta estos parámetros para definir un plan de trabajo y analizar la cantidad de personas que pueden seguir su perfil en una semana.

En la presentación final y como parte del trabajo, las estudiantes hicieron un recuento de todo el proceso que siguieron para el desarrollo de su proyecto. Centrar la atención en Instagram Business (TO) les permitió identificar parámetros determinantes para aumentar la cantidad de seguidores en función del contenido y su incidencia en el número de publicaciones diarias, cuentas alcanzadas, visitas al perfil, interacciones y número de seguidores. Estos elementos fueron el insumo para que diseñaran un modelo de trabajo que determinara la cantidad de publicaciones en un día, los requerimientos de cada publicación y el diseño del contenido con las formas de interactuar con los seguidores. En esta presentación, las participantes manifestaron que

alcanzaron más seguidores de los que inicialmente se habían propuesto como meta para conseguir en una semana.

7. Discusión: Aprendizajes potencialmente expansivos y posibles transformaciones a nivel de objeto

En este estudio se ha analizado cómo un grupo de estudiantes de un curso que se agruparon en diferentes subgrupos, desarrollaron dos tareas y un proyecto de modelación en los que emergió la necesidad de vincular tecnologías de manera espontánea y con fines no necesariamente preestablecidos por la naturaleza de las tareas. Los aprendizajes que se presentan en este estudio no deben ser vistos en función de esquemas o patrones de pensamiento que reflejan una diversidad de conocimientos disciplinares; por el contrario, como lo manifiesta Engeström (1999), la teoría de Aprendizaje Expansivo pone su atención de manera especial en la construcción discursiva del objeto. En ese sentido, los hallazgos que presenta este estudio están fuertemente relacionados con las manifestaciones discursivas de los participantes, el uso de sus propias tecnologías y las transformaciones que se produjeron en el desarrollo de los procesos de modelación.

Los sistemas de actividad que se configuraron al solucionar cada tarea y el proyecto fueron el centro de análisis de este trabajo, como se sugiere en la literatura (Engeström, 1987, 2015; Yamagata-Lynch, 2010), y también el escenario en el que se identificaron aprendizajes que se desprenden de la actividad matemática en la que los estudiantes abordan tareas de modelación. En coherencia con Engeström (2015), esto muestra que los procesos de aprendizaje son diversos y pueden cambiar continuamente.

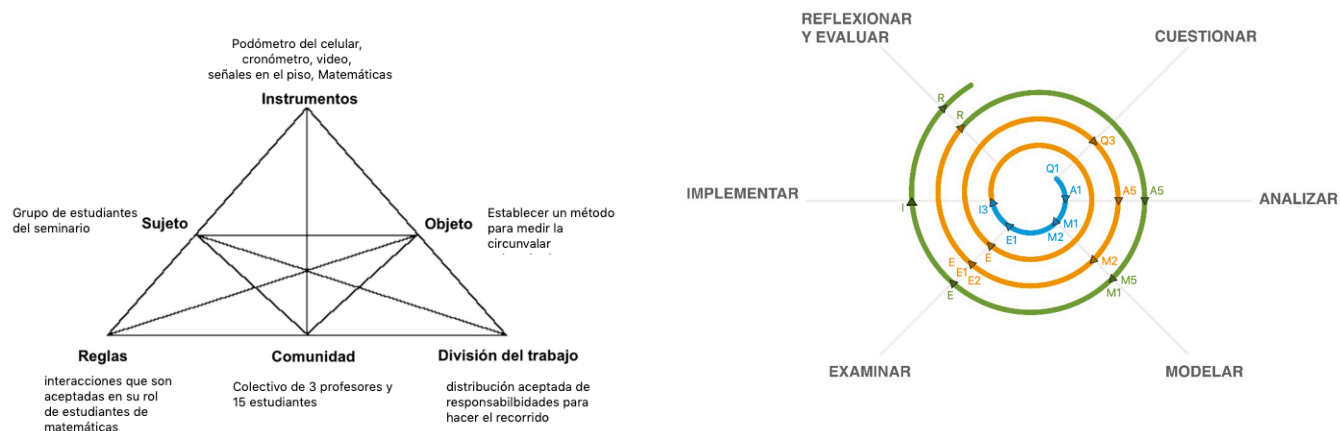
La naturaleza de las tareas de modelación que se propusieron en el curso tuvo como fines centrar la atención en procesos de medición que ofrecieran oportunidades para hacer abstracciones y conversiones a términos matemáticos en un problema (Perrenet & Adan, 2010), construir y analizar modelos (Blum & Leiss, 2007) o interpretar resultados matemáticos en cada situación (Maass, 2007), entre otros. Por esta razón, las tareas llevaron a los estudiantes a escenarios donde la actividad no se limitara a establecer una medida sino que fuera necesario analizar contextos en los cuales las matemáticas encontraran relaciones explicativas y predictivas sobre algunos fenómenos, con conexiones entre disciplinas y sistemas de representación que vincularan conocimientos previos de los estudiantes (Confrey, 2007).

Bajo la lente de la teoría de Aprendizaje Expansivo se examinaron las acciones que los estudiantes llevaron a cabo para desarrollar cada una de las tareas y, con las condiciones operacionales (Engeström et al., 2013), se identificaron secuencias en las cuales es posible identificar aprendizajes. Si bien la teoría reconoce que existen acciones no expansivas, en este estudio se analizaron de manera especial las secuencias de acciones que ofrecen evidencia de aprendizajes potencialmente expansivos (Engeström, 1999). La Figura 2 presenta el sistema de actividad que se identificó en la primera tarea y la secuencia de acciones y subtipos de acciones que se hallaron.

En el sistema de actividad se representa el proceso colectivo que tomó forma con el desarrollo de la primera tarea de modelación a la que se enfrentaron los estudiantes. La representación en forma de espiral recoge la secuencia de acciones que se llevaron a cabo. En un plano bidimensional, esta espiral se expande a medida que empiezan a manifestarse las múltiples voces en el sistema de actividad y los diferentes puntos de vista de quienes participan en ella.

Figura 2

Sistema de actividad de la primera tarea con la secuencia de acciones y subtipos de acciones potencialmente expansivas



Por la naturaleza del proceso y su desarrollo en un entorno escolar, las condiciones operacionales permitieron identificar momentos en los cuales se intensificó el trabajo de los estudiantes en función del objeto de la actividad. La espiral presenta tres secuencias de acciones de aprendizaje en las cuales se identificaron transformaciones cualitativas en el desarrollo del proceso de modelación.

La primera secuencia de acciones (color azul) aparece en la primera tarea, en el momento en que se discutió cómo hacer el recorrido; después de los primeros cuestionamientos se vinculó tecnología y con ello, en el desarrollo de la actividad, se evidenciaron las primeras cinco acciones del ciclo de aprendizaje. En esta primera secuencia se puede inferir que los estudiantes abordan procesos de aprendizaje de nivel III donde cuestionan la actividad y desencadenan transformaciones (Engeström, 2015) y en los que el carácter colectivo de la actividad exige la colaboración de todos los sujetos que intervienen en ella (R. Engeström, 2009).

La segunda secuencia de acciones de aprendizaje (color naranja) se identificó al momento de observar el mapa de la universidad y descartar algunas ideas matemáticas que se habían propuesto previamente para simplificar la tarea. A partir de ese momento y después de examinar y descartar algunas maneras como habían planteado resolver la tarea, el grupo de estudiantes cuestiona el proceso y logra analizar y refinar el modelo con el cual hallarían la medida de la vía circunvalar. Estos aspectos permiten identificar cómo competencias matemáticas se dirigen a la acción de los estudiantes (Blomhøj & Jensen, 2007) y permiten identificar etapas de un proceso de modelación a través de ciclos (Perrenet & Adan, 2010) en el que algunos subprocessos pasan del “resto del mundo” al dominio matemático (Blum & Leiss, 2007).

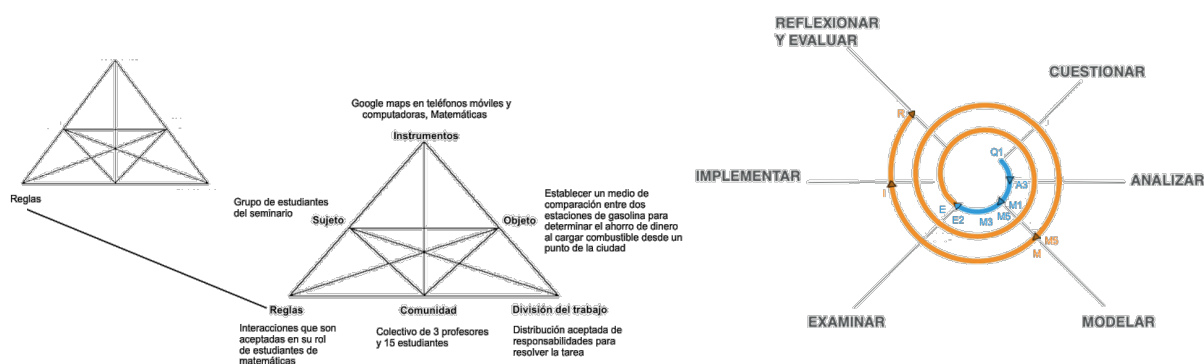
La tercera secuencia (color verde) se identificó en el trabajo que realizaron en el aula. Una mirada a todo el proceso y a las incoherencias que arrojaron algunos registros llevó a las estudiantes a centrar la atención en la tecnología para ampliar su comprensión sobre el podómetro y ajustar algunas cantidades que serían insumo para escribir una solución. El rol de la tecnología en el desarrollo del trabajo ofrece evidencia, en palabras de Mitcham (1994), de acciones que conectan el conocimiento y el uso de la herramienta en la actividad, y de acciones volitivas que hacen parte de las decisiones que las estudiantes tomaron para finalizar la tarea. En esta última parte del trabajo, todo el proceso se analizó de nuevo para proponer un modelo que ayudara a solucionar la tarea; ese modelo se examinó, se implementó y con ello se presentó una solución final.

En la segunda tarea que se analizó en este estudio, las acciones de aprendizaje se identificaron en un periodo de tiempo menor en comparación con la primera tarea y el proceso se desarrolló de una manera más fluida. La necesidad de desarrollar todo el proceso dentro del aula centro rápidamente la atención de los estudiantes en la información que la tecnología podría

ofrecer; el uso de la aplicación de Google Maps permitió que ellos identificaran variables para la construcción de un modelo matemático que no solo les permitiría solucionar una tarea, sino también interpretar otras variaciones al modelo en función del cambio de ubicaciones en el mapa. En términos de Blum (2015), aparecen competencias en modelación con las cuales los estudiantes llevan a cabo ciertas acciones dirigidas a construir modelos. La Figura 3 presenta el sistema de actividad y la secuencia de acciones y subtipos de acciones que se identificaron en la segunda tarea.

Figura 3

Sistema de actividad de la segunda tarea con la secuencia de acciones y subtipos de acciones potencialmente expansivas



Dos secuencias de acciones de aprendizaje se identificaron en esta sesión. En la primera (color azul) se observa un desarrollo en el que emergieron transformaciones cualitativas en el proceso para establecer una función como un modelo matemático que les permitiera determinar el consumo de combustible de un vehículo al realizar un recorrido en una ciudad. En la segunda (color naranja), después de examinar el modelo propuesto, el grupo de estudiantes observa la necesidad de analizar y replantear el modelo para incorporar reglas de otro sistema de actividad

vecino (normas para conducir, manejo del tráfico y cambio de rutas de desplazamiento en la ciudad) para analizar, desde otra perspectiva, el contexto de la tarea y hacer adaptaciones al modelo que se implementaría para su solución. En correspondencia con Engeström (2015), estas secuencias son un instrumento en el que las transformaciones cualitativas permiten observar las transiciones entre las acciones de los participantes en la actividad y también, muestran el potencial creativo del trabajo colectivo para solucionar la tarea (Engeström et al., 2013).

El trabajo propuesto como proyecto final evidenció la sostenibilidad de las acciones de aprendizaje que las estudiantes llevaron a cabo en las tareas previas y también, de cómo en ese sistema de actividad (proyecto de modelación) emergieron relaciones con otros sistemas de actividad vecinos. En estos aspectos se identifican principios de la Teoría de la Actividad entre ellas: acciones individuales y colectivas orientadas a objetos, la mediación de artefactos y la multiplicidad de voces en el sistema de actividad (Engeström, 2001). Además, se amplía el universo de las prácticas en las que la actividad de aprendizaje se reconoce en los modelos y las metodologías de su construcción (Engeström 1987, 2015).

La manera como los participantes vincularon las matemáticas y sus propios dispositivos tecnológicos en el curso permitió establecer que los instrumentos de cada sistema de actividad eran cada vez más robustos, aplicaciones de dispositivos móviles y conceptos matemáticos más elaborados que influyeron en el análisis y decisiones de los estudiantes para avanzar en la solución de sus tareas y el proyecto. Los participantes en este estudio indagaron sobre características particulares de aplicaciones que utilizaron en diversos momentos del trabajo, lo que puede interpretarse como una ampliación del conocimiento de sus dispositivos y de las aplicaciones (Mitcham, 1994); el podómetro, Google Maps e Instagram son una muestra de ello. Además, llevaron a cabo acciones mediadas por sus herramientas y tomaron decisiones a partir de

los datos que ofrecieron. La integración de la tecnología por parte de los estudiantes en las tareas y en su proyecto final ofrece evidencia sobre su papel en procesos de modelación en los que se supera su naturaleza de objeto físico y se conceptualiza de otras maneras que dialogan con la visión de Mitcham (1994) y Vries (2016).

La tecnología tuvo un doble papel a lo largo de estas experiencias: por un lado, fue una fuente de información que proporcionó datos y permitió el registro de cantidades numéricas y sus relaciones, por el otro, generó una comprensión potencial del objeto. De esta manera, la tecnología fue una herramienta que se transformó para generar cambios en el sistema de actividad; esto puede considerarse como una transformación a nivel de objeto (Engeström & Sannino, 2010; Souto, 2014). Para Engeström y Sannino (2010), estos dos niveles del objeto son una prueba del potencial expansivo del proceso. Así mismo, bajo la lente de la teoría, estos niveles corresponden a una posible expansión del objeto en su dimensión anticipatoria-temporal en la que sus participantes analizan fases previas y futuras que deben considerarse en el proceso.

En revisión previa (Molina-Toro et al., 2019) se justificó la necesidad de ampliar enfoques teóricos y metodológicos que permitan identificar cómo se constituye el conocimiento matemático en procesos de modelación con tecnologías digitales. Como una manera de aportar a esta discusión, este estudio ofrece evidencia de cómo los procesos de modelación se pueden observar con una lente teórica que centre su atención en las acciones de quienes participan en ellos y, a través de las secuencias que emerjan allí, caracterizar ciclos de aprendizaje potencialmente expansivos que reúnen conocimientos sobre el proceso mismo, sobre las matemáticas que sean necesarias para su desarrollo y sobre las tecnologías que integren. Además, este trabajo puede ser un insumo para que futuras investigaciones exploren otras posibilidades de las espirales de aprendizaje potencialmente expansivas en tareas que se diseñan para trabajar en

las aulas y documentar en qué condiciones las secuencias forman espirales más robustas que puedan llevar a secuencias ideales a largo plazo.

Este estudio amplía la discusión sobre aspectos teóricos y metodológicos de la modelación con tecnologías. Por un lado, ofrece una manera de comprender aprendizajes que emergen en estos procesos y son coherentes con otros hallazgos que reconocen cómo la construcción de modelos puede ser un medio para apoyar los procesos de aprendizajes de las matemáticas (Niss, Blum, & Galbraith, 2007), y también ofrece otra alternativa para vincular las matemáticas escolares y la vida cotidiana (Villa-Ochoa, 2015). Por otro lado, amplía el espectro de respuestas sobre cómo la tecnología se puede utilizar para apoyar procesos de modelación (Greefrath, 2011; Greefrath & Vorhölter, 2016), cómo se puede trascender el uso domesticado de estas herramientas en las aulas de matemáticas (Molina-Toro et al., 2019) y cómo trabajar con tecnologías disponibles que impacten el aprendizaje de la modelación (Geiger, 2011).

Formas nuevas de aprendizaje son posibles mediante el uso de nuevos dispositivos en el marco de la Teoría de la Actividad (Hu & Webb, 2009). En coherencia, los hallazgos de este estudio pueden ser un punto de partida para que investigaciones futuras amplíen la comprensión sobre cómo los procesos de modelación con tecnologías pueden ser vistos como ciclos de Aprendizajes Expansivos que promuevan transformaciones cualitativas, tanto a nivel individual como a nivel colectivo, y visiones de trabajo orientadas al futuro (Sannino et al., 2016).

8. Conclusiones

En un esfuerzo teórico para extender la comprensión de la teoría de Aprendizaje Expansivo en entornos escolares, se utilizó la noción de ciclos de acciones de aprendizaje expansivos (Engeström et al., 2013), la noción de transformación del objeto (Engeström &

Sannino, 2010) y la visión de tecnología propuesta por Mitcham (1994) para analizar cómo los estudiantes desarrollaron tareas de modelación con sus propias tecnologías en un curso de formación de futuros profesores.

Dos implicaciones se desprenden de este estudio. En primer lugar, las espirales de aprendizaje potencialmente expansivos que se presentaron junto a los sistemas de actividad que se conformaron en cada sesión de trabajo, pueden ofrecer una manera de identificar momentos en los cuales las transformaciones cualitativas emergen y el proceso avanza hacia una expansión potencial (Engeström, 1999, 2015; Engeström et al., 2013). Estudios previos en Educación Matemática (David & Tomaz, 2015; Souto, 2014) mostraron evidencia de transformaciones a pequeña escala con visiones y usos diferentes de tecnologías; en esa línea, este estudio ofrece una herramienta para identificar dónde están presentes las secuencias de aprendizaje que define la teoría y dónde hay saltos en los que puedan encontrarse acciones no expansivas o fuentes potenciales de transformación de la actividad. Este trabajo puede ampliar la discusión sobre Aprendizajes Expansivos en espacios escolares y ofrecer otra manera de interpretar el alcance de los procesos de modelación con tecnologías en términos de aprendizajes.

En segundo lugar, los hallazgos ofrecen evidencia que permite identificar cómo los participantes, al utilizar sus propios dispositivos digitales, se movían entre la solución de tareas y la comprensión de lo que las tecnologías digitales pueden ofrecer a estos procesos. Esto sugiere la necesidad de explorar otras opciones para el diseño de tareas que permitan poner el estudiante en escenarios donde la actividad en la escuela, la actividad en el trabajo y la actividad en la ciencia y el arte (Engeström, 2015) puedan amalgamarse y potenciar otra manera de desarrollar la actividad escolar para orientar visiones a futuro de lo que podría implementarse en aulas regulares.

Los hallazgos que se presentaron en este trabajo abren la posibilidad de realizar otros estudios exploratorios en la línea del Aprendizaje Expansivo, discutir otras características de tareas de modelación para trabajo en aulas escolares regulares y los periodos de tiempo en que se puedan desarrollar procesos en este enfoque. Analizar aprendizajes en el aula con la lente del Aprendizaje Expansivo es una posibilidad de transformar el sistema de actividad del aula y proporcionar otros escenarios donde los intereses, los gustos, las acciones volitivas de los estudiantes se exterioricen y transformen la actividad matemática escolar. Las espirales de aprendizaje pueden ser, en el futuro, una herramienta para establecer diálogos entre diversas perspectivas de la modelación en Educación Matemática en los que contenidos curriculares, competencias, producción de conocimiento y visiones críticas pueden ser parte del escenario educativo escolar. Además, pueden ser un insumo para ver la modelación como ciclos de aprendizaje potencialmente expansivos.

Referencias

- Barab, S. A., Barnett, M., Yamagata-Lynch, L., Squire, K., & Keating, T. (2002). Using Activity Theory to Understand the Systemic Tensions Characterizing a Technology-Rich Introductory Astronomy Course. *Mind, Culture, and Activity*, 9(2), 76–107. https://doi.org/10.1207/S15327884MCA0902_02
- Bassanezi, R. (2002). *Modelagem Matemática—Um Método Científico de Pesquisa ou uma Estratégia de Ensino e Aprendizagem. Ensino—Aprendizagem Com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What’s all the Fuss about Competencies? In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 45–56). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In Cho S. (Eds) *The Proceedings of the 12th International Congress on*

Mathematical Education (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? In *Mathematical Modelling* (pp. 222–231). Elsevier.

<https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>

Blum, W., Niss, M., & Galbraith, P. (Eds.). (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education. *The 14th ICMI Study* (Vol. 10). Springer.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics EducationInternational*, 38(2), 86–95. <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02655883>

Bray, A., & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, 114, 255–273.

<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004>

Confrey, J. (2007). Epistemology and Modelling—Overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 125–128). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-0-387-29822-1_10.pdf

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. In *Basic qualitative research* (Four Ed.). Sage Publications, Inc.

Daher, W. M., & Shahbari, J. A. (2015). Pre-service teachers' modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 25–46.

David, M. M., & Tomaz, V. S. (2015). Expansive learning revealed by research on classroom mathematical activity. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 29(53), 1287–1308.

<https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a24>

Diniz, L. do N., & Borba, M. de C. (2013). Reading and interpreting ready data in an environment of modeling and digital technologies [Leitura e Interpretação de Dados Prontos em um Ambiente de Modelagem e Tecnologias Digitais: O mosaico em movimento]. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 26(43), 935–962.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

- 84881319725&partnerID=40&md5=700b0f3b49b873fbac9c629d8a9e46be
- Engeström, R. (2009). Who is acting in an activity system? In A. Sannino, H. Daniels, & K. D. Gutiérrez (Eds.), *Learning and Expanding with Activity Theory* (pp. 255–273).
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511809989.017>
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. <https://doi.org/10.1016/j.intcom.2007.07.003>
- Engeström, Y. (1999). Innovative learning in work teams: Analyzing cycles of knowledge creation in practice. In Y. Engeström, R. Miettinen, & R.-L. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 377–404). Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133–156.
<https://doi.org/10.1080/13639080020028747>
- Engeström, Y. (2015). Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research. In *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*, Second Edition (Second Edi). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781139814744>
- Engeström, Y., Rantavuori, J., & Kerosuo, H. (2013). Expansive Learning in a Library: Actions, Cycles and Deviations from Instructional Intentions. *Vocations and Learning*, 6(1), 81–106. <https://doi.org/10.1007/s12186-012-9089-6>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 5(1), 1–24.
<https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002>
- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14* (pp. 305–314). Springer Netherlands.
- Geiger, V., Faragher, R., & Goos, M. (2010). Cas-enabled technologies as 'agents provocateurs' in teaching and learning mathematical modelling in secondary school classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 48–68.
<https://doi.org/10.1007/BF03217565>

- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 301–304). Springer.
- Greefrath, G., & Siller, H.-S. (2017). Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools (pp. 529–539). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_44
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries* (pp. 1–42). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
- Hu, L., & Webb, M. (2009). Integrating ICT to higher education in China: From the perspective of Activity Theory. *Education and Information Technologies*, 14(2), 143–161. <https://doi.org/10.1007/s10639-008-9084-6>
- Maass, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Maass, K. (2007). Modelling in Class: What Do We Want the Students to Learn? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics (ICTMA 12)* (pp. 63–78). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.2.63>
- Mitcham, C. (1994). *Thinking through Technology: The Path between Engineering and Philosophy* (1st ed.). The University of Chicago Press.
- Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8). <https://doi.org/10.29333/ejmste/108438>
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Rendon-Mesa, P. A. (2021). Contradictions in modeling processes with digital technologies. *Educ Inf Technol*
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87–115. <http://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/506>
- Mwanza, D., & Engeström, Y. (2005). Managing content in e-learning environments. *British Journal of Educational Technology*, 36(3), 453–463. <https://doi.org/10.1111/j.1467->

8535.2005.00479.x

- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introducción. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3–32). Springer.
- Niss, M., Blum, W., & Greefrath, G. (2007). Introducción. In W. Blum, M. Niss, & P. Galbraith (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (Vol. 10, p. 521). Springer.
- Pereira, R. dos S. G., Seki, J. T. P., Nivalda Palharini, B., Neto, J. C., Silva, A. C. da, Damin, W., & Martins, B. de O. (2017). Modelagem matemática e tecnologias digitais educacionais: possibilidades e aproximações por meio de uma revisão sistemática de literatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 8(2), 80–94. <http://files/575/1214.html>
- Perrenet, J., & Adan, I. (2010). The academic merits of modelling in higher mathematics education: A case study. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 121–140.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
- Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 91–110.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Unipluriversidad*, 19(2), 80–102. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.04>
- Sannino, A., Engeström, Y., & Lemos, M. (2016). Formative Interventions for Expansive Learning and Transformative Agency. *Journal of the Learning Sciences*, 25(4), 599–633. <https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1204547>
- Sinclair, N., & Jackiw, N. (2010). Modeling Practices with The Geometer's Sketchpad. In R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 541–554). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_47
- Soares, D. da S., & Borba, M. de C. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 575–587. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0568-5>

- Souto, D. L. P. (2014). Transformações expansivas na produção matemática on-line. In repositorio.unesp.br. Cultura Acadêmica.
<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/126237>
- Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación En Educación*, 8(16), 133. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>
- Vries, M. J. de. (2016). Teaching about Technology. Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-32945-1>
- Yamagata-Lynch, L. C. (2010). Activity Systems Analysis Methods. Springer US.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6321-5>

Consideraciones finales

En este apartado se presenta una síntesis de los resultados de cada uno de los artículos que consolidan este estudio y se discuten los principales hallazgos para responder a la pregunta de investigación de cada documento. En la parte final, estos elementos se articulan para centrar la atención en el objetivo de la investigación y posibles implicaciones que se desprenden para futuros trabajos en esta línea.

Modelación con tecnologías que pertenecen a los estudiantes

En el primer artículo se presentó una revisión de literatura con dos preguntas de investigación que se convirtieron en los vectores de la revisión; ellas centraron la atención en (i) *roles que asumen las tecnologías digitales cuando se integran a procesos de modelación en Educación Matemática* y (ii) *usos que tienen las tecnologías digitales al interior de estos procesos*. Estos aspectos surgieron por la necesidad de comprender los alcances y limitaciones de las tecnologías al interior de los procesos de modelación; y también, por una intención *a priori* de conocer cuál es el impacto que tienen los dispositivos digitales de los estudiantes en el desarrollo de estos procesos y en qué condiciones pueden ser parte del trabajo que plantean los profesores.

Los resultados ofrecen, por un lado, tecnologías que hacen las veces de recurso para desarrollar una serie de subprocesos en modelación que permiten al estudiante consolidar resultados, características, conjeturas e ideas sobre el fenómeno que analiza; por otro lado, las tecnologías tienen un papel determinante al interior de estos procesos, son un actor activo de la modelación misma y reorganizan tanto la manera de desarrollar los procesos como la producción

de conocimiento en los estudiantes. En este segundo caso, la variación de una herramienta tecnológica puede generar cambios susceptibles dentro del proceso, lo que le aleja de una mirada utilitarista de la herramienta misma.

Otro resultado que ofrece este primer artículo se relaciona con las diferentes maneras como la tecnología es utilizada en estos procesos (visualizar, simular, recrear, construir y validar modelos o, reorganizar los procesos de experimentación). Cada uno de esos usos guarda una relación especial con el rol de las tecnologías al interior de los procesos de modelación, pero en los documentos que se analizaron en esta revisión de literatura no se encontró evidencia de un vínculo de las tecnologías de los estudiantes y esos hallazgos apuntan más a la idea de una introducción suscitada por quien diseña o propone los fenómenos o situaciones a estudiar.

Los resultados de esta primera parte de la investigación ampliaron la comprensión sobre momentos específicos en que se utilizan las tecnologías al interior de los procesos de modelación y hasta dónde los estudiantes logran hacer parte activa del proceso a sus propios recursos digitales. En correspondencia, los hallazgos de la revisión de literatura y un análisis paralelo de aspectos teóricos de la teoría de Aprendizaje Expansivo proporcionaron elementos para reconocer el papel de las contradicciones en el desarrollo de la actividad escolar; de ese modo, el segundo artículo centró la atención en *identificar contradicciones en estudiantes que participaron en procesos de modelación en Educación Matemática con sus propios tecnologías digitales*.

En esta parte de la investigación se introdujo un elemento diferenciador a muchos de los estudios que se analizaron en la revisión de literatura. Se diseñaron tareas donde los estudiantes encontraron aportes de la literatura especializada en esta línea que, amalgamados a experiencias previas de los profesores, promovieron ambientes de modelación donde los usos y roles de las tecnologías no estuvieron condicionados. Este aspecto fue clave para que los participantes

vincularan sus propios dispositivos y exteriorizaran, de manera natural, cuestionamientos en los que reflejaban oposiciones entre normas que van ligadas a la tradición matemática escolar y normas que culturalmente se aceptan fuera de las aulas.

Las tecnologías que vincularon los estudiantes, además de dirigir sus acciones, permitieron observar transformaciones en sus maneras de hacer modelación; cuándo cambiaron planteamientos previos frente a las tareas, bajo qué parámetros construyeron sus soluciones y cuáles fueron los recursos que utilizaron para validar sus resultados y sugerir otros cambios. El segundo artículo ofrece evidencia de cómo las contradicciones que aparecieron en algunos momentos del proceso evolucionaron y permitieron que los participantes resolvieran las tareas y ampliaran el conocimiento de sus dispositivos; además, fueron un elemento constitutivo de cambios en los procesos que llevaron a cabo, cambios que se identificaron por medio de acciones en los ambientes de modelación que se analizaron de manera amplia en la última parte de esta investigación.

Espirales de aprendizajes potencialmente expansivos en procesos de modelación con tecnologías propias de los estudiantes

Con una mirada a las acciones de aprendizaje de los estudiantes al solucionar tareas de modelación, el segundo y tercer artículo ofrecen evidencia de los sistemas de actividad que se configuraron en los ambientes de modelación propuestos en el curso, además, permiten identificar en conjunto, cómo las contradicciones que emergieron en estos procesos evolucionaron hasta aprendizajes potencialmente expansivos. Como se mencionó antes, indagar por los aprendizajes en esta línea teórica, implica apartar la mirada de escenarios donde solo tengan sentido los esquemas de pensamiento o los reflejos del conocimiento disciplinar y, en su

lugar, analizar cómo se establece una construcción colectiva de los objetos de actividad en estos procesos y las múltiples transformaciones de esos objetos.

Las espirales que se presentaron en el tercer artículo ofrecieron evidencia de *aprendizajes potencialmente expansivos que se originan en procesos de modelación en los cuales los estudiantes utilizan sus propias tecnologías digitales*. Además, permitieron identificar cómo se da el paso de una etapa a otra en el ciclo de aprendizaje; cuáles son las manifestaciones que movilizan la actividad, que suscitan cambios e introducen otras dinámicas en las múltiples maneras en que un grupo de estudiantes puede llevar a cabo un proceso de modelación. En ese sentido, las espirales de aprendizaje tienen la posibilidad de informar no solo cómo aparecen las acciones de los participantes en la actividad, sino también cómo esas acciones pueden contener una serie de elementos constitutivos de su rol de modeladores. Estos aspectos pueden relacionarse con competencias en modelación, el trabajo con modelos matemáticos o aspectos que pueden evidenciar otras manifestaciones de la tecnología (objeto, conocimiento, actividad o volición).

En un escenario escolar, todos estos elementos que se identificaron en los procesos de modelación que desarrollaron los estudiantes ofrecen múltiples posibilidades para que la actividad matemática transforme a futuro visiones que se relacionan con el conocimiento de las matemáticas, el trabajo escolar y un diálogo entre diferentes perspectivas de modelación. En el siguiente apartado se presentan algunas implicaciones de este estudio.

Implicaciones para futuras investigaciones

Esta investigación es un reflejo de intenciones y reflexiones al interior del aula y el papel transformador de la Educación Matemática en la actualidad. Por ello, en un esfuerzo por generar ambientes de modelación donde los estudiantes y sus propios recursos educativos tengan cabida, este estudio se propuso encontrar evidencia de las posibilidades que ofrece el análisis de procesos de modelación con tecnologías en la perspectiva del Aprendizaje Expansivo y con una visión filosófica de la tecnología.

Además de los hallazgos y las implicaciones que se presentaron en cada artículo que configuró este estudio, es necesario extender la investigación teórica y empírica que amplíe la discusión sobre el alcance del Aprendizaje Expansivo para analizar procesos de modelación en las diferentes perspectivas que ofrece la literatura. Además, por las características y los hallazgos de esta investigación, es posible generar espacios donde la marginación y la desigualdad que impone la falta de recursos económicos en las escuelas y sus comunidades, se puedan dejar de lado para promover espacios donde los estudiantes logren de manera colectiva, constituir otro tipo de actividad escolar en el que el conocimiento sobre matemáticas, modelación y diferentes maneras de asumir la tecnología puedan dialogar.

Aspectos volitivos de la tecnología pueden empezar a ser propuestos como un medio para que los estudiantes discutan sobre otras maneras de recoger datos numéricos, de medir y de desarrollar trabajos donde la actividad científica esté cada vez más cerca de los diseños curriculares escolares. Con el paso de los años y el desarrollo de nuevas tecnologías, el trabajo algorítmico puede quedar cada vez más rezagado en la actividad matemática, lo que sugiere

empezar, de manera anticipada, la construcción de diseños de tareas que promuevan el vínculo de los nuevos desarrollos y sus múltiples formas de interacción social en la actividad escolar.

Referencias

- Aravena, M., Kimelman, E., Michelli, B., Torrealba, R., & Zuñiga, J. (2006). Scribd. Investigacion Educativa I. <http://es.scribd.com/doc/60213332/Investigacion-Educativa>
- Barbosa, J. C. (2003). What is Mathematical Modelling? In S. Lamon, A. Willard, Parker and Ken Houston (Eds) *Mathematical Modelling* (pp. 227–234). Elsevier. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781904275039500259>
- Bassanezi, R. (2002). *Modelagem Matemática—Um Método Científico de Pesquisa ou uma Estratégia de Ensino e Aprendizagem. Ensino—Aprendizagem Com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Bicudo, M. A. V., & Klüber, T. E. (2011). Research in mathematical modeling in Brazil: The way for a metacomprehension [Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: A caminho de uma metacompreensão]. *Cadernos de Pesquisa*, 41(144), 905–927. <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84861004927&partnerID=40&md5=1cfe87d9ee2731ce1743c46f456155af>
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15–30). Springer. http://link.springer.com/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In S. Cho (Ed), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58. <http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620>
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Eds), *Mathematical Modelling* (pp. 222–231). Elsevier. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>

- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Blum, W., Niss, M., & Galbraith, P. (Eds.). (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education. *The 14th ICMI Study* (Vol. 10). Springer.
- Borba, M. de C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer.
- Borba, M. de C., Villarreal, M. E., & Soares, D. da S. (2016). Modeling using data available on the internet. In C. Hirsch & E. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 143–152). National Council of Teacher of Mathematics.
- Borromeo-Ferri, R. (2006a). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86–95. <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02655883>
- Borromeo-Ferri, R. (2006b). The teachers' way of handling modelling problems in the classroom—What we can learn from a cognitive-psychological point of view. <http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/BorromeoFerri.pdf>
- Borromeo-Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12*, (pp. 260–270). Woodhead Publishing.
- Boulter, C. J., & Buckley, B. C. (2000). Constructing a Typology of Models for Science Education. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education* (pp. 41–57). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0876-1_3
- Brown, J. P., & Ikeda, T. (2019). Conclusions and Future Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. In G. Stillman, J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 233–253). Springer Open https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_13
- Camelo-Bustos, F. J., & Acevedo, D. M. (2018). Subjetividad política y modelación matemática. In funes.uniandes.edu.co (Vol. 3). <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME>

- Camelo-Bustos, F. J., Perilla, W. Y., & Mancera, G. (2016). Prácticas de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 9(2), 67–84.
- Campos, I. da S., & Araújo, J. de L. (2015). Envolvimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática: relação com o saber e possibilidades de ação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 167–182. [https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a09](https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a09)
- Camarillo, G. (1997). Confiabilidad y validez en estudios cualitativos. *Educación y ciencia*, 1(15), 77-82.
- Canedo, N da R., & Kistemann, M. A. (2017). Seres-Humanos-com-mídias e Teoria da Atividade: possibilidades expansivas para as Pesquisas em Modelagem e para a atuação em sala de aula de Matemática. *Boletim do LABEM*, 8(14), 68-85.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods education*. Rauldledge. Sixth edition.
- Cole, M., & Engeström, Y. (1993). A cultural–historical approach to distributed cognition. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 1–46). New York: Cambridge University Press.
- Colombia-MEN. (1998). (Ministerio de Educación Nacional). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- Colombia-MEN. (2006). (Ministerio de Educación Nacional). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- Colombia-MEN. (2016). (Ministerio de Educación Nacional). *Derechos Básicos de Aprendizaje - Matemáticas*. Panamericana Formas e Impresos.
- Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. In *Basic qualitative research* (Four Ed.). Sage Publications, Inc.
- Cortés, G. (1997). Confiabilidad y validez en estudios cualitativos. *Educación y ciencia*, 1 (15), 77-82.
- Daher, W. M., & Shahbari, J. A. (2015). Pre-service teachers' modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International*

- Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 25–46.
<http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-013-9464-2>
- David, M. M., & Tomaz, V. S. (2015). Expansive learning revealed by research on classroom mathematical activity. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 29(53), 1287–1308.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a24>
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2012). La investigación cualitativa como disciplina y como practica. In N. Denzin & I. Lincoln (Eds.). *Manual de investigación cualitativa. Volumen I el campo de la investigación cualitativa* (pp. 43–102). Gedisa.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3864817>
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2017). The Sage handbook of qualitative research (N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.); Fifth Edit). Sage Publications, Inc.
<http://dln.jaipuria.ac.in:8080/jspui/handle/123456789/4229>
- Diniz, L. do N., & Borba, M. de C. (2012). Leitura e Interpretação de Dados Prontos em um Ambiente de Modelagem e Tecnologias Digitais: o mosaico em movimento. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(43), 935–962. [http://files/536/Diniz y Borba - 2012 - Leitura e Interpretação de Dados Prontos em um Amb.pdf](http://files/536/Diniz%20y%20Borba%20-2012-Leitura%20e%20Interpreta%C3%A7%C3%A3o%20de%20Dados%20Prontos%20em%20um%20Amb.pdf)
- Engeström, R. (2009). Who is acting in an activity system? In A. Sannino, H. Daniels, & K. D. Gutiérrez (Eds.), *Learning and Expanding with Activity Theory* (pp. 255–273).
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511809989.017>
- Engeström, Y. (1987). Learning by expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research. <https://doi.org/10.1016/j.intcom.2007.07.003>
- Engeström, Y. (1999). Innovative learning in work teams: Analyzing cycles of knowledge creation in practice. In Y. Engeström, R. Miettinen, & R.-L. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 377–404). Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156,
<https://doi.org/10.1080/13639080020028747>
- Engeström, Y. (2015). Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research. In *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research, Second Edition* (Second Edi). Cambridge University Press.

<https://doi.org/10.1017/CBO9781139814744>

- Engeström, Y., Rantavuori, J., & Kerosuo, H. (2013). Expansive Learning in a Library: Actions, Cycles and Deviations from Instructional Intentions. *Vocations and Learning*, 6(1), 81–106. <https://doi.org/10.1007/s12186-012-9089-6>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 5(1), 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.12.002>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2011). Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts. *Journal of Organizational Change Management*, 24(3), 368–387. <http://dx.doi.org/10.1108/09534811111132758>
- Esteban, M. P. S. (2000). Criterios de validez en la investigación cualitativa: de la objetividad a la solidaridad. *Revista de investigación educativa*, 18(1), 223–242
- Frejd, P., & Ärlebäck, J. B. (2017). Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak. In G. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 517–527). Springer.
- Galbraith, P., Goos, M., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Technology Enriched Classrooms: Some Implications for Teaching Applications and Modelling. In Q.-X. Ye, W. Blum, K. Houston, & Q.-Y. Jiang (Eds.), *Mathematical Modelling in Education and Culture: ICTMA 10* (pp. 111–125). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1016/B978-1-904275-05-3.50015-8>
- Galleguillos, J., Borba, M. de C. (2018) Expansive movements in the development of mathematical modeling: analysis from an Activity Theory perspective. *ZDM Mathematics Education*, (50), 129–142. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0903-3>
- García, F. J., Pérez, J. G., Higuera, L. R., & Casabó, M. B. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 226–246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>
- Gedera, D. S. P. (2016). The Application of Activity Theory in Identifying Contradictions in a University Blended Learning Course. In D. S. P. Gedera & P. J. Williams (Eds.), *Activity Theory in Education* (pp. 53–69). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-387-2_4

- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14* (pp. 305–314). Springer Netherlands.
- Gilbert, J. K., Boulter, C. J., & Elmer, R. (2000). Positioning Models in Science Education and in Design and Technology Education. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education* (pp. 3–17). Springer Netherlands.
https://doi.org/10.1007/978-94-010-0876-1_1
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 301–304). Springer.
- Greefrath, G., & Siller, H.-S. (2017). Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools (pp. 529–539). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_44
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries (pp. 1–42). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México DF: Mc-Graw Hill.
- Jesson, J., & Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education*, 6. <http://fipcc.com/pharmacyeducation/article/view/103>
- Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school—Examples and experiences. In *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation*. Festband für Werner Blum (pp. 99–108). Franzbecker. <http://files/80/Kaiser - 2005 - Mathematical modelling in school—Examples and expe.pdf>
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302–310.
- Krainer, K. (1993). Powerful tasks: A contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 24, 65–93.
<https://doi.org/10.1007/BF01273295>
- Lektorsky, V. A. (2009). Mediation and discourse: Mediation as a means of collective activity. In

- A. Sannino, H. Daniels, & K. Gutiérrez (Eds.), *Learning and Expanding with Activity Theory* (pp. 75–87). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809989.006>
- Maas, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285–311. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2>
- Malvern, D. (2000). Mathematical Models in Science. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education* (pp. 59–90). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0876-1_4
- Marshall, J. A., & Carrejo, D. J. (2008). Students' mathematical modeling of motion. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(2), 153–173. <https://doi.org/10.1002/tea.20210>
- Mitcham, C. (1994). *Thinking through Technology: The Path between Engineering and Philosophy* (1st ed.). The University of Chicago Press.
- Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8). <https://doi.org/10.29333/ejmste/108438>
- Molina-Toro, J. F., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). La modelación con tecnología en el estudio de la función seno. *Revista Científica*, 2, 80–84.
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87–115. <http://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/506>
- Neves, R. G., Neves, M., & Teodoro, V. D. (2013). Modellus: Interactive computational modelling to improve teaching of physics in the geosciences. *Computers & Geosciences*, 56(Supplement C), 119–126. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2013.03.010>
- Nummijoki, J., Engeström, Y., & Sannino, A. (2018). Defensive and Expansive Cycles of Learning: A Study of Home Care Encounters. *Journal of the Learning Sciences*, 27(2), 224–264. <https://doi.org/10.1080/10508406.2017.1412970>
- Ortega, M., Puig, L., & Albarracín, L. (2019). The Influence of Technology on the Mathematical Modelling of Physical Phenomena. In G. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*, ICME-13 Monographs (pp. 161–178). https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_9

- Parra-Zapata, M. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Revista Electrónica" Actualidades Investigativas En Educación"*, 16(3), 1–27.
<https://doi.org/https://doi.org/10.15517/aie.v16i3.26084>
- Perrenet, J., & Adan, I. (2010). The academic merits of modelling in higher mathematics education: A case study. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 121–140.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
- Rozario, R., & Ortlieb, E. (2015). *Using expansive learning as a model for video reflection in teacher education. In Literacy Research, Practice and Evaluation* (Vol. 6, pp. 287–305). Emerald Group Publishing Ltd. <https://doi.org/10.1108/S2048-045820150000006014>
- Sánchez, J. F., Obando, J. D., Muñoz, L. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). La modelación matemática: Un ejemplo en el contexto cafetero. *Revista Científica*, 2, 474.
<https://doi.org/10.14483/23448350.6570>
- Sannino, A., Engeström, Y., & Lemos, M. (2016). Formative Interventions for Expansive Learning and Transformative Agency. *Journal of the Learning Sciences*, 25(4), 599–633.
<https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1204547>
- Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 215–237.
<https://doi.org/10.1007/s10649-011-9341-2>
- Soares, D. da S., & Borba, M. de C. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 575–587. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0568-5>
- Souto, D. L. P., & Borba, M. de C. (2016). Seres humanos-com-internet ou internet-com-seres humanos: uma troca de papéis?. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(2), 217-242.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser, R. Borromeo Ferri, W. Blum, & G.

- Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA 14 (pp. 165–180). Dordrecht: Springer.
- Stillman, G., & Brown, J. P. (2014). Evidence of implemented anticipation in mathematising by beginning modellers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 763–789.
<https://doi.org/10.1007/s13394-014-0119-6>
- Stillman, G., & Brown, J. P. (2019). Preface. In G. Stillman & J. P. Brown (Eds.), Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education, ICME-13 Monographs. Springer Nature PP - Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4>
- Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J. P., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, 2, 688–697.
<http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED503746.pdf#page=691>
- Tikhomirov, O. K. (1999). The theory of activity changed by information technology. In Y. Engestrom, R. Miettinen, & R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 347–359). Cambridge University Press.
- Van Driel, J. H., & Verloop, N. (1999). Teachers' knowledge of models and modelling in science. *International Journal of Science Education*, 21(11), 1141–1153.
<https://doi.org/10.1080/095006999290110>
- Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas, un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 19, 63–85.
- Villa-Ochoa, J. A. (2013, October 25). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. *VIII Conferência Nacional Sobre Modelagem Matemática Na Educação Matemática*. <http://files/99/Villa-Ochoa - 2013 - Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática.pdf>
- Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación En Educación*, 8(16), 133. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmp>
- Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219–251.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada

- desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, 27, 1–21.
- Vries, M. J. de. (2016). *Teaching about Technology*. Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-32945-1>
- Wägar, K. (2011). Expansive learning in a service system: Insights from a study of car-service advisors. *International Journal of Quality and Service Sciences*, 3(1), 13–38.
<https://doi.org/10.1108/17566691111115063>
- Yamagata-Lynch, L. C. (2010). *Activity Systems Analysis Methods*. Springer US.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6321-5>
- Yin, R. K. (2009). *Case study research, Design and methods*. Sage Publications, Inc.