



TEORÍA DE LA RUINA EN MODELOS DE RIESGO COLECTIVO

Iván Darío Gómez Marín

Trabajo de grado presentado para optar al título de:
Estadístico

Tutor:

Alejandro Roldan Correa

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Estadística
Medellín, Antioquia, Colombia

2021

DEDICATORIA

*Dedicada de forma especial a todos aquellos que creyeron en mi y de alguna u otra forma me apoyaron; también la dedico a todos aquellos que pusieron obstáculos en el camino, no creyeron en mis capacidades ni en la bondad de la educación.
¡Gracias infinitas a todos ellos por hacerme más fuerte!*

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	5
ABSTRACT	5
INTRODUCCIÓN	6
1.. PROCESO DE RIESGO INDIVIDUAL Y COLECTIVO (<i>Individual and collective risk process</i>)	8
1.1. MODELO INDIVIDUAL	9
1.2. MODELO DE RIESGO COLECTIVO	10
2.. TEORÍA DE LA RUINA: TIEMPO DISCRETO (<i>risk theory: Discrete time</i>)	12
2.1. PROBABILIDAD DE RUINA CON HORIZONTE INFINITO	13
2.2. PROBABILIDAD DE RUINA CON HORIZONTE FINITO	14
2.3. COEFICIENTE DE AJUSTE	15
2.4. DESIGUALDAD DE LUNDBERG	16
2.5. SEVERIDAD DE LA RUINA	16
2.6. SIMULACIÓN DE PROCESOS DE RIESGO DE TIEMPO DISCRETO	19
3.. TEORÍA DE LA RUINA: TIEMPO CONTINUO (<i>risk theory: Continuous time</i>)	30
3.1. CONDICIÓN DE GANANCIA NETA	31
3.2. PROBABILIDAD DE RUINA CON HORIZONTE INFINITO	33
3.3. PROBABILIDAD DE RUINA CON HORIZONTE FINITO	33
3.4. SEVERIDAD DE LA RUINA	34
3.5. COEFICIENTE DE AJUSTE	36
3.6. DESIGUALDAD DE LUNDBERG	37
3.7. APROXIMACIÓN DE DE VYLDER	38
3.8. SIMULACIONES DE PROCESOS DE RIESGO DE TIEMPO CONTINUO	38

BIBLIOGRAFÍA 50

Resumen

Analizamos el concepto de riesgo para describir la vulnerabilidad de una compañía de seguros a la insolvencia o ruina. Se presentan algunos modelos de riesgo, a tiempo discreto y a tiempo continuo (modelo clásico de Cramer-Lundberg), junto con resultados y simulaciones para el cálculo de la probabilidad de ruina, el déficit en el momento de la ruina y la distribución del tiempo de ruina.

Palabras clave: riesgo, ruina, reclamos, severidad de la ruina, desigualdad de Lundberg.

Abstract

We analyze the concept of risk to describe the vulnerability of an insurance company to insolvency or ruin. Some risk models, discrete-time and continuous-time (classical Cramer-Lundberg model), are presented, together with results and simulations for the calculation of the probability of ruin, the severity of ruin and the distribution of the time to ruin.

Keywords: risk, ruin, claims, severity of ruin, Lundberg's inequality.

INTRODUCCIÓN

Gran parte de nuestra vida se basa en la creencia de que el futuro es impredecible y por ende en ocasiones riesgoso, cuando de tomar una decisión se trata. Quizás si, el futuro es ciertamente impredecible, sin embargo la curiosidad y tesón característico de la raza humana en un acto heroico por desafiar el tiempo, lo ha llevado a buscar herramientas que le permitan navegar, probablemente no más tranquilos pero si evidentemente más conscientes e informados, en los diferentes escenarios propios del futuro. En este caso particular, nos centraremos en modelar la incertidumbre y la aleatoriedad con ayuda de la teoría de la probabilidad la cual junto con la estadística, constituye la base de ciencia actuarial, que tiene a su vez como eje central la noción de riesgo. De forma general el riesgo puede ser definido como la posibilidad de ocurrencia ciertos eventos de interés, los cuales podrían tener una consecuencia funesta en términos monetarios.

El ser humano, ya sea en el ámbito laboral o personal inevitablemente debe enfrentarse a diferentes riesgos, los cuales pueden tener consecuencias no deseadas pero también traer consigo oportunidades. El objetivo entonces no es evitar los riesgos sino identificarlos, modelarlos y cuantificar las consecuencias de su materialización para posteriormente, después de haber reunido toda la información acerca de ellos, decidir su aceptación o rechazo y eventualmente sacar algún beneficio económico o moral de su existencia.

La teoría de la ruina es una área de la actuaría que utiliza modelos matemáticos para describir el riesgo o vulnerabilidad de una compañía aseguradora a la insolvencia o ruina. En tales modelos, las cantidades de interés son la probabilidad de ruina, la distribución del excedente inmediatamente anterior a la ruina, el déficit en el momento de la ruina y el tiempo de ruina [3].

Las aseguradoras mediante un contrato denominado póliza, asumen el riesgo de que ocurra un evento no deseado al asegurado, a cambio de un precio denominado prima. Estos eventos fortuitos al ocurrir, generan gastos monetarios que deben ser cubiertos por la aseguradora. Por tanto, las empresas aseguradoras deben de estar dotadas de reservas para poder cubrir todos estos eventos. La suma de todos los gastos cubiertos por la aseguradora, desde un instante considerado inicial hasta cierto momento, es el resultado de eventos que no pueden predecirse con absoluta precisión, es decir, debe calcularse utilizando variables aleatorias, un instrumento capaz de manejar efectivamente el riesgo y la incertidumbre de eventos futuros.

El fundamento teórico de la teoría de la ruina, conocido como el modelo de Cramér-

Lundberg, fue introducido en 1903 por el actuario sueco Filip Lundberg [4]. El trabajo de Lundberg fue republicado en 1930 por Harald Cramér [2]. El modelo describe una compañía de seguros que experimenta dos flujos de efectivo opuestos: las primas entrantes y las reclamaciones salientes. Las primas llegan a una tasa constante $c > 0$ de los clientes y las reclamaciones llegan de acuerdo con un proceso de Poisson $N(t)$ y son variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas, que denotamos por Y_i .

Capítulo 1

Proceso de riesgo individual y colectivo (*Individual and collective risk process*)

El término **riesgo** tiene muchos significados dependiendo del contexto en el que sea usado, pero de manera general hace alusión a la ocurrencia de algunos eventos de interés y en especial al análisis de las consecuencias que acarrearán dichos eventos. En particular, en el área de seguros, el riesgo puede definirse como el monto de las reclamaciones totales de los asegurados. El interés se centra en identificar, medir y cuantificar los efectos de los riesgos. En algunos casos estos riesgos pueden tener connotación positiva o negativa; dependiendo de ello, el objetivo será minimizar sus consecuencias o en su defecto sacarle el mejor provecho.

En esta tesis nos centramos en los modelos que sirven como sustento teórico al área de seguros. Un seguro se entiende como un contrato pactado voluntariamente entre dos partes: una que se podría denominar **cliente** y otra que llamaremos **asegurador**. El cliente reconociendo la existencia de un riesgo para su “patrimonio” decide firmar un documento llamado *póliza de seguro* el cual bajo unas condiciones establecidas lo “protege” de las consecuencias de la ocurrencia del riesgo si éste llegara a ocurrir; a cambio el asegurador recibe un pago por adelantado de parte del cliente llamado *prima*. Se entiende así que todo el dinero que recolecta el asegurador debe ser suficiente para cubrir los montos de las reclamaciones ocasionadas a todos los clientes que sufren las consecuencias de la materialización del riesgo. Es válido aclarar que el número de riesgos que se materializan, los momentos en los que estos se presentan y el monto de las reclamaciones son variables aleatorias que deben ser modeladas con ayuda de modelos matemáticos de la teoría de la probabilidad.

A continuación se mostrarán dos modelos matemáticos simples, que ayudan a modelar el carácter aleatorio de las variables antes mencionadas.

1.1. Modelo individual

Supongamos que se dispone de un conjunto de n pólizas que cubren de las consecuencias de un riesgo durante un año. Definamos

- p_j : la probabilidad de que el j -ésimo cliente no efectúe reclamación alguna sobre su póliza.
- q_j : la probabilidad de que el j -ésimo cliente realice exactamente una reclamación.

Asumiendo que un cliente sólo puede hacer máximo un reclamo de su póliza, se sigue que $p_j + q_j = 1$.

Definamos la variable D_j de la siguiente manera:

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{si hay reclamación en la póliza } j, \\ 0, & \text{si no hay reclamación en la póliza } j. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

La variable D_j es una variable aleatoria Bernoulli de parámetro q_j . Sea $C_j \geq 0$ la variable aleatoria asociada al monto de la reclamación de la póliza j , por lo que:

$$D_j C_j = \begin{cases} C_j, & \text{si } D_j = 1, \\ 0, & \text{si } D_j = 0. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Como se puede observar, en éste modelo los datos son colecciones de vectores de la forma

$$(D_1, C_1), \dots, (D_n, C_n), \quad (1.1.3)$$

dónde se supone además que C_j y D_j son variables aleatorias independientes.

Definición 1.1.1 *El monto de reclamaciones agregadas en el modelo individual, es la variable aleatoria:*

$$S = \sum_{j=1}^n C_j D_j, \quad (1.1.4)$$

en donde D_1, \dots, D_n , C_1, \dots, C_n son variables aleatorias independientes con $C_j \geq 0$ y $D_j \sim \text{Ber}(q_j)$.

Observe que S es el monto que la parte aseguradora debe pagar a los clientes por la materialización de los riesgos ocurridos durante el periodo pactado en la póliza.

La definición anterior, estable entonces el denominado **modelo de riesgo individual**, el cual supone que es posible obtener la probabilidad de ocurrencia del evento de riesgo y además el monto a pagar en cada reclamación de la póliza; adicionalmente supone que la cantidad

de clientes es fijo durante el periodo de vigencia de la póliza.

Sea $F_j(x)$ la función de distribución acumulada de $D_j C_j$ y $G_j(x)$ la función de distribución acumulada de C_j . De esta forma podemos establecer para todo $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_j(x) &= P(D_j C_j \leq x) \\ &= P(D_j C_j \leq x \mid D_j = 0)P(D_j = 0) + P(D_j C_j \leq x \mid D_j = 1)P(D_j = 1) \\ &= P(0 \leq x \mid D_j = 0)p_j + P(C_j \leq x \mid D_j = 1)q_j \\ &= p_j + q_j G_j(x). \end{aligned}$$

Para el modelo de riesgo individual se tiene que:

1. $E(S) = \sum_{j=1}^n q_j E(C_j)$
2. $Var(S) = \sum_{j=1}^n q_j [Var(C_j) + p_j E^2(C_j)]$

Es también interesante observar que, aunque inicialmente el modelo individual de riesgo presentado se restringe a esquemas de seguros donde hay como máximo una reclamación por póliza, dicha reclamación puede considerarse como el monto total de varias posibles reclamaciones efectuadas por una póliza a lo largo del periodo de vigencia del seguro.

1.2. Modelo de riesgo colectivo

Consideremos un conjunto de pólizas de tamaño indeterminado, las cuales son vigentes durante un intervalo de tiempo, digamos $[0, T]$. Denotemos la cantidad de reclamaciones que se realizan durante el periodo como N y al monto de cada reclamación como Y_j para j desde 1 hasta N . La cantidad de reclamos (riesgos materializados) y el monto de cada uno de ellos son variables aleatorias independientes; supondremos adicionalmente que las reclamaciones son independientes entre sí e idénticamente distribuidas.

Definición 1.2.1 *El monto de reclamaciones agregadas en el modelo de riesgo colectivo, es la variable aleatoria denotada como S , la cual se define como:*

$$S = \sum_{j=1}^N Y_j \tag{1.2.5}$$

en donde Y_1, Y_2, \dots son v.a. i.i.d positivas y N toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$. Cuando $N = 0$ se define que $S = 0$.

A la función de distribución de cada reclamación Y , la denotaremos como $G(Y)$; se asume como es natural que $G(0) = 0$.

Definición 1.2.2 *La función de distribución del riesgo S en el modelo de riesgo colectivo es*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)P(N = n), \quad (1.2.6)$$

*donde $G^{*n}(x)$ es la n -ésima convolución de $G(x)$.*

El valor esperado y la varianza de la variable S en el modelo colectivo son:

1. $E(S) = E(N)E(Y)$.
2. $Var(S) = Var(N)E^2(Y) + Var(Y)E(N)$.

Capítulo 2

Teoría de la ruina: tiempo discreto (*risk theory: Discrete time*)

El objetivo es modelar de manera simplificada la evolución en el tiempo del capital de una compañía aseguradora en relación con la cantidad de clientes o asegurados. Un proceso de riesgo a tiempo discreto C_n , es un proceso estocástico definido de la siguiente forma:

$$C_n = \mu + n - \sum_{j=1}^n Y_j, \quad (2.0.1)$$

donde $\mu \geq 0$, es un entero que representa el capital inicial de la compañía aseguradora; Y_j es una variable aleatoria que representa el monto de la reclamación en el instante j . Se asume que $\{Y_j\}_{j \geq 1}$ son independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$ y $E(Y_j) \leq 1$.

A la condición $E(Y) \leq 1$ se le llama **condición de ganancia neta** y asegura que en cada unidad de tiempo, el pago de una unidad monetaria por cada póliza es superior o igual al monto promedio de las reclamaciones. Se asume que en cada instante de tiempo el ingreso por primas es unitario, ya que los resultados y fórmulas derivadas tiene expresiones más sencillas que en el caso de asumir primas con valores en los reales.

Dado que asumimos que la variable Y es discreta, se cumple que

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} (1 - F(Y)).$$

El proceso $\{C_n; n \geq 0\}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto cuyo espacio de estados son los números enteros; pueden existir reclamaciones con un monto lo suficientemente grande para que $C_n \leq 0$.

Definición 2.0.1 Se dice que la compañía aseguradora se encuentra en ruina en el tiempo $n \geq 1$ si $C_n \leq 0$. Además, se define el tiempo de ruina, τ , como el primer tiempo en el que la ruina se presenta, es decir

$$\tau = \min\{n \geq 1 : C_n \leq 0\}.$$

En las siguientes secciones se definen otros eventos asociados a la ruina y se presentan algunos resultados para el cálculo de probabilidades de los mismos. Algunas pruebas serán omitidas pero pueden encontrarse en [5].

2.1. Probabilidad de ruina con horizonte infinito

El problema de la ruina consiste en encontrar la probabilidad de que la ruina ocurra en algún conjunto de tiempos de interés. La probabilidad de ruina con horizonte infinito es $P(\tau < \infty)$ y se denota como $\psi(\mu)$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\psi(\mu) &= P(\tau < \infty \mid C_0 = \mu) \\ &= P(\tau \in \{1, 2, \dots\} \mid C_0 = \mu).\end{aligned}$$

Por definición se asume que no hay ruina en el tiempo cero, aún asumiendo que $\mu = 0$ ya que se considera la ruina para $n \geq 1$. Intuitivamente debemos notar que función $\psi(\mu)$ es decreciente, ya que a mayor capital menor probabilidad de ruina.

En la Figura 2.1 se muestra una posible trayectoria del proceso $\{C_n : n \geq 0\}$ con incrementos unitarios referentes a las primas que son pagadas a la aseguradora; se puede observar el tiempo de ruina τ en donde el proceso de ruina $C_n \leq 0$.

A continuación se muestra una formula recursiva para calcular la probabilidad de ruina con horizonte infinito en el proceso de riesgo a tiempo discreto. Es decir se presentará una ecuación recursiva para $\psi(\mu) = P(\tau < \infty \mid C_0 = \mu)$.

Proposición 2.1.1 Para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ con valor inicial $\mu \geq 0$,

1. $\psi(\mu) = \psi(0) + \sum_{y=0}^{\mu-1} \psi(\mu - y)(1 - F(y)) - \sum_{y=0}^{\mu-1} (1 - F(y)).$
2. $\psi(0) = E(Y).$

Una expresión equivalente para $\psi(\mu)$ está dada por

$$\psi(\mu) = \sum_{y=0}^{\mu-1} \psi(\mu - y)\bar{F}(y) - \sum_{y=\mu}^{\infty} \bar{F}(y), \quad \mu \geq 1,$$

donde $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$.

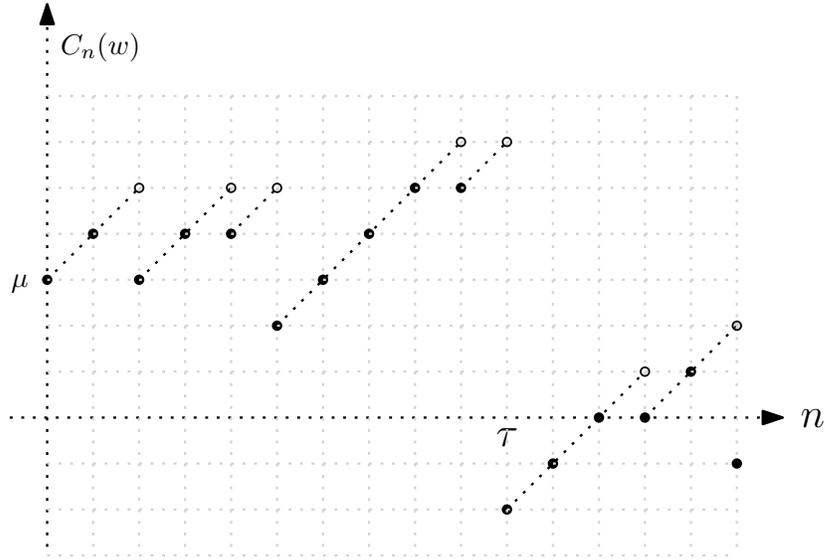


Figura 2.1: Trayectoria de un proceso de riesgo

2.2. Probabilidad de ruina con horizonte finito

La probabilidad de ruina con horizonte finito $\mu \geq 1$ se define como la probabilidad de que la ruina se presente en alguno de los tiempos $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir:

$$\begin{aligned}\psi(\mu, n) &= P(\tau \leq n \mid C_0 = \mu) \\ &= P(\tau \in \{1, 2, \dots, n\} \mid C_0 = \mu).\end{aligned}$$

Se puede verificar a partir de la contención de los eventos que

$$\psi(\mu, 1) \leq \psi(\mu, 2) \leq \dots \leq \psi(\mu, n) \leq \psi(\mu).$$

En particular, cuando el capital tiende a infinito esta probabilidad de ruina también se anula, es decir para cualquier $n \geq 1$ fijo:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \psi(\mu, n) \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \psi(\mu) = 0.$$

A continuación se muestra una forma recursiva de calcular la probabilidad de ruina $\psi(\mu, n)$.

Proposición 2.2.1 *Para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ con valor inicial $\mu \geq 0$, la probabilidad de ruina con horizonte finito $\psi(\mu, n)$ puede calcularse de la siguiente forma:*

1. $\psi(\mu, 1) = \bar{F}(\mu)$.

$$2. \psi(\mu, n) = \bar{F}(\mu) + \sum_{y=0}^{\mu} \psi(\mu + 1 - y, n - 1) f(y), \quad n \geq 2.$$

2.3. Coeficiente de ajuste

Se define el coeficiente de ajuste o *exponente de Lundberg* para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ como la única solución positiva r de la ecuación

$$\begin{aligned} E[e^{r(Y-1)}] &= 1 \\ \sum_{y=0}^{\infty} e^{r(y-1)} f(y) &= 1, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

donde se asume que la función generadora de momentos de las reclamaciones (Y) en el modelo discreto existe y además cumple que $E(Y) < 1$.

El coeficiente de ajuste nos permite establecer una cota superior para la probabilidad de ruina para el modelo discreto (2.0.1).

Para garantizar que la ecuación (2.3.2) tiene una única solución positiva, basta verificar que $\theta(r) = E[e^{r(Y-1)}]$ cumple las siguientes propiedades:

- a) $\theta(r) \geq 0$, para $r \geq 0$.
- b) $\theta(0) = 1$.
- c) $\theta'(r) = E[(Y - 1)e^{r(Y-1)}]$.
- d) $\theta''(r) = E[(Y - 1)^2 e^{r(Y-1)}]$.
- e) $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = \infty$, cuando $F(1) < 1$.

Las propiedades anteriores garantizan que la función es cóncava, y puede ser representada en una curva similar a la que aparece en la Figura 2.2. Se evidencia que la función $\theta(r)$ se comporta de la siguiente manera:

- Cuando $r = 0$, se tiene que $\theta(0) = 1$.
- Por la derecha de $r = 0$ se observa que $\theta'(0) = E(Y - 1)$, la cual es negativa por la condición de ganancia neta $E(Y) < 1$.
- $\theta''(0) = E[(Y - 1)^2] > 0$.
- si $F(1) < 1$ entonces $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = \infty$.

Si se cumplen todas las condiciones anteriores, entonces se puede garantizar que siempre existe un R tal que $\theta(R) = 1$.

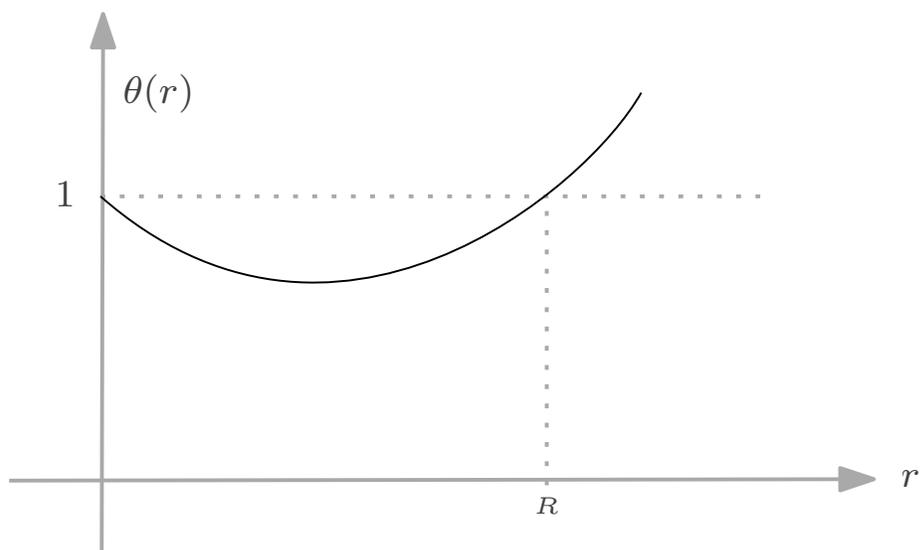


Figura 2.2: Función $\theta(r)$

2.4. Desigualdad de Lundberg

Dada la complejidad que supone calcular la función de riesgo $\psi(\mu)$, es de gran utilidad tener una expresión sencilla para una cota superior de dicha función; la cota se obtiene de la **desigualdad de Lundberg** y está en función del coeficiente de ajuste anteriormente definido. El resultado es el siguiente.

Para el proceso a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ con capital inicial $\mu \geq 0$ y cuando el coeficiente de ajuste R existe, la probabilidad de ruina con horizonte infinito satisface la desigualdad:

$$\psi(\mu) \leq e^{-R\mu}.$$

Para el caso de horizonte finito es claro también que

$$\psi(\mu, n) \leq e^{-R\mu}.$$

2.5. Severidad de la ruina

Considerando un proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ en donde el capital inicial es $\mu \geq 0$; sea τ el tiempo de ruina, entonces, la función de probabilidad de la severidad de ruina (φ) está dada por:

$$\varphi(\mu, z) = P(\tau < \infty, -C_\tau \leq z),$$

para $\mu = 0, 1, 2, \dots$ y $z = 0, 1, 2, \dots$. Esta función representa la probabilidad conjunta de que la ruina ocurra en un tiempo finito y que el déficit de la aseguradora al momento de la ruina sea menor o igual al valor z . A la variable aleatoria C_τ se le llama severidad de la ruina.

Proposición 2.5.1 Para el proceso a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ con capital inicial $\mu \geq 0$ y el tiempo de ruina τ , la función:

$$\varphi(\mu, z) = P(\tau < \infty, -C_\tau \leq z)$$

para $z = 0, 1, \dots$, satisface las siguientes identidades.

1. $\varphi(\mu, z) = \varphi(0, z) + \sum_{y=0}^{\mu-1} \varphi(\mu - y, z) \bar{F}(y) - \sum_{y=0}^z [F(\mu + y) - F(y)].$
2. $\varphi(0, z) = \sum_{y=0}^z \bar{F}(y).$

2.5.1. Severidad de la ruina: horizonte finito

Proposición 2.5.2 Para cada entero $\mu = 0, 1, 2, \dots$ y $z = 0, 1, 2, \dots$ se define la severidad de la ruina con horizonte finito como la función:

$$\varphi(\mu, z; n) = P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z).$$

La anterior función cumple que:

- $\varphi(\mu, z; 1) = F(\mu + z + 1) - F(\mu).$
- $\varphi(\mu, z; n) = \varphi(\mu, z; 1) + \sum_{y=0}^{\mu} \varphi(\mu + 1 - y, z; n - 1) f(y)$ para $n \geq 2$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, z; 1) &= P(\tau \leq 1, -C_\tau \leq z) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau \leq 1, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) \\ &= \sum_{y=0}^{\mu} P(\tau \leq 1, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) + \sum_{y=\mu+1}^{\mu+1+z} P(\tau \leq 1, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) \\ &\quad + \sum_{y=\mu+z+2}^{\infty} P(\tau \leq 1, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y). \end{aligned}$$

Observe que se ha dividido la probabilidad de severidad de la ruina en tres escenarios luego de condicionar sobre el valor del reclamo en primer instante de tiempo Y_1 . El primer término de la sumatoria, hace alusión al caso en el que $y \leq \mu$, por lo que la probabilidad de ruina es 0. El tercer término, hace referencia al caso en el que $\mu + 2 + z \leq y < \infty$; allí ocurre la ruina pero no se cumple que $-C_\tau \leq z$. De esta manera, solo nos queda analizar el segundo término, es decir:

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, z; 1) &= \sum_{y=\mu+1}^{\mu+1+z} P(\tau \leq 1, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) \\ &= \sum_{y=\mu+1}^{\mu+1+z} (1) f(y) \\ &= F(\mu + 1 + z) - F(\mu).\end{aligned}$$

Ahora para $n \geq 2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, z; n) &= P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) \\ &= \sum_{y=0}^{\mu} P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) + \sum_{y=\mu+1}^{\mu+1+z} P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) \\ &\quad + \sum_{y=\mu+z+2}^{\infty} P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y).\end{aligned}$$

Al igual que en el caso cuando $n = 1$ se ha dividido la probabilidad de la severidad de la ruina en tres escenarios condicionando el valor del reclamo Y_1 . El tercer término hace alusión al caso en el que $\mu + 2 + z \leq y < \infty$ en el cual ocurre la ruina pero no se cumple que $-C_\tau \leq z$, por lo que esta probabilidad para el evento de interés es 0.

El primer término de la sumatoria, hace alusión al caso en el que $y \leq \mu$. En este primer instante de tiempo no ocurre la ruina por lo que nos queda pendiente calcular la probabilidad de ruina para $n-1$ instantes de tiempo. Dado que C_n es un proceso de Markov, podemos entonces afirmar que:

$$\sum_{y=0}^{\mu} P(\tau \leq n, -C_\tau \leq z | Y_1 = y) f(y) = \sum_{y=0}^{\mu} \varphi(\mu + 1 - y, z; n - 1).$$

La probabilidad del segundo término de la sumatoria es igual a uno ya que la ruina ocurriría en el tiempo $1 \leq n$. Por lo tanto, este término es precisamente $\varphi(\mu, z; 1)$ calculado anteriormente. Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu, z; n) &= \sum_{y=0}^{\mu} \varphi(\mu + 1 - y, z; n - 1) + [F(\mu + 1 + z) - F(\mu)] \\
&= \sum_{y=0}^{\mu} \varphi(\mu + 1 - y, z; n - 1) + \varphi(\mu, z; 1).
\end{aligned}$$

□

2.6. Simulación de procesos de riesgo de tiempo discreto

2.6.1. Problema de la ruina del jugador

El problema con el que ejemplificaremos este capítulo se le denomina comúnmente en la literatura **el problema de la ruina del jugador**. Considere el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n > 0\}$, definido en la ecuación (2.0.1), en donde las reclamaciones tienen la siguiente distribución de probabilidad:

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= p, \\
P(Y = 2) &= 1 - p.
\end{aligned}$$

La Figura 2.3 simula 5 trayectorias del proceso $\{C_n\}$ hasta el tiempo 20, con un capital inicial de $\mu = 5$ y $p = 0,6$.

El proceso de riesgo $\{C_n\}$ definido en este ejemplo, puede verse como el capital que posee un jugador A en su juego contra un jugador B, el cual apuesta una unidad monetaria en cada instante de tiempo; entonces al final de cada periodo, el proceso (ó capital del jugador A) se incrementa en una unidad cuando $Y = 0$ (es decir no gana el jugador B), o se reduce en una unidad cuando $Y = 2$. La condición $1/2 < p < 1$ garantiza que se cumple la condición de ganancia neta, es decir que $E(Y) < 1$.

El objetivo es encontrar, mediante simulación, la probabilidad de que el jugador A eventualmente se arruine, así como la distribución del tiempo de ruina cuando su capital inicial es de μ unidades monetarias.

En general, dada una distribución particular para las reclamaciones, la fórmula recursiva para la probabilidad de ruina $\psi(\mu)$, dada en la Proposición 2.1.1, no produce expresiones compactas o "sencillas". En este caso, si es posible obtener una expresión compacta y mediante inducción puede mostrarse que:

$$\psi(\mu) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^\mu. \tag{2.6.3}$$

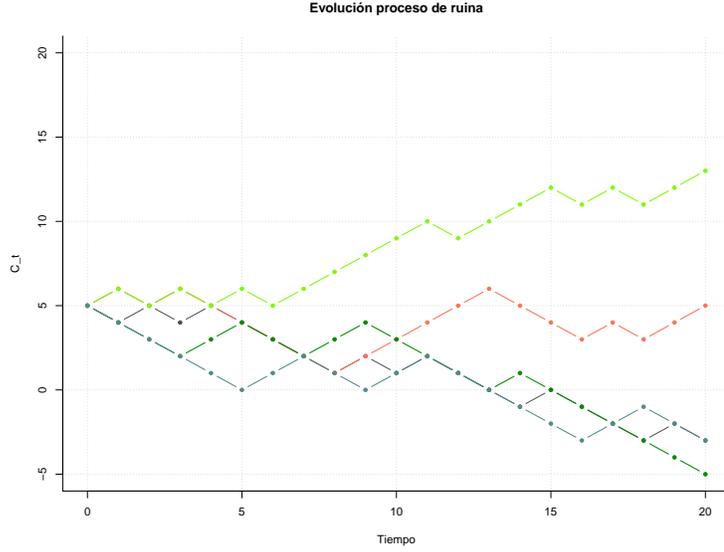


Figura 2.3: Simulación de 5 trayectorias del proceso de riesgo con $p = 0,6$, capital inicial 5, hasta el tiempo 20.

La expresión en (2.6.3) también puede ser calculada usando resultados de paseos aleatorios, ver por ejemplo Bhattacharya y Waymire [1, capítulo I, ecuación 3.9].

La Proposición 2.2.1 proporciona la expresión para el cálculo de la probabilidad exacta $\psi(\mu, n)$, pero conforme el horizonte de tiempo incrementa, se hace más complejo su cálculo; por esta razón se recurre al uso de la simulación. En el ejemplo de la ruina del jugador, es posible calcular la expresión exacta para $\psi(\mu, n)$ de la siguiente manera. Inicialmente calculamos la distribución del tiempo de ruina, τ , el cual puede verse como el tiempo en que un paseo aleatorio simple sobre \mathbb{Z} , iniciando en el estado u , pasa por primera vez por el estado 0. Usando el resultado en Bhattacharya y Waymire [1, capítulo I, ecuación 4.6] se obtiene que

$$P[\tau = n] = \begin{cases} \frac{\mu}{n} \binom{n}{\frac{n+u}{2}} p^{\frac{n-\mu}{2}} (1-p)^{\frac{n+\mu}{2}}, & n = u + 2k, k \geq 0. \\ 0 & \text{, en otro caso.} \end{cases}$$

Así,

$$\psi(\mu, n) = \sum_{m=u}^n P[\tau = m] = \sum_{m=u}^n \frac{u}{m} \binom{m}{\frac{m-u}{2}} p^{\frac{m-u}{2}} (1-p)^{\frac{m+u}{2}}.$$

A fin de acotar la probabilidad de ruina mediante la desigualdad de Lunderbeg, realizamos el cálculo del coeficiente de ajuste, r , que corresponde a la única solución positiva de

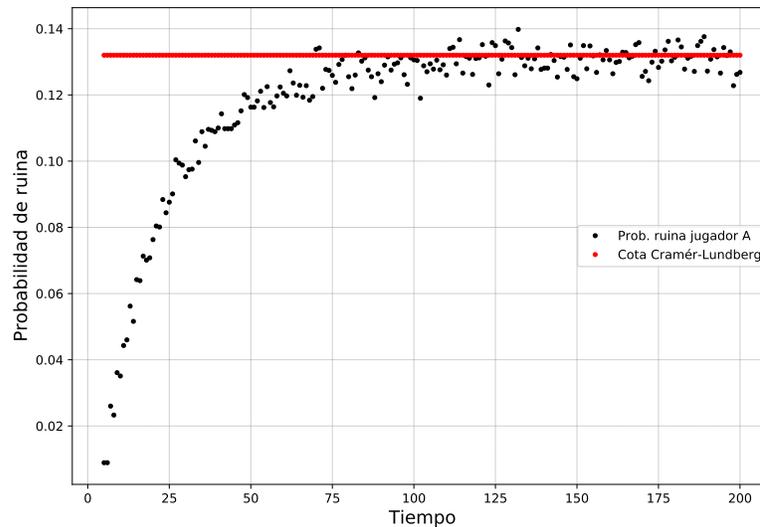


Figura 2.4: Estimación de probabilidad de ruina, $\psi(5, n)$

la ecuación (2.3.2), esto es,

$$pe^{-r} + (1 - p)e^r = 1,$$

cuya solución es:

$$r = \ln \left(\frac{p}{1 - p} \right).$$

Asumiendo $p = 0,6$ y $\mu = 5$, el coeficiente de ajuste es

$$R = \ln \left(\frac{0,6}{0,4} \right) \approx 0,405$$

De esta forma, la cota de Cramér-Lundberg determina que:

$$\psi(5, n) \leq e^{-5R} \approx e^{(-5)0,405} \approx 0,132$$

En la Figura 2.4 se estima la probabilidad de ruina, $\psi(5, n)$, mediante la simulación de 10000 trayectorias del juego con intervalos de duración de entre 5 y 200 repeticiones. La probabilidad de ruina se estimó como el cociente entre la cantidad de veces que el jugador estuvo en ruina y el número de simulaciones (10000).

La Figura 2.5 muestra los valores exactos versus los valores simulados, de la distribución de probabilidad del tiempo de ruina del jugador en el caso particular antes expuesto.

La simulación se realizó con 100000 trayectorias del proceso, de las 12909 entraron en ruina al menos una vez antes del tiempo 200. Se observa que éstos valores son muy cercanos a los valores teóricos lo que le otorga mucha validez práctica a la simulación, particularmente en aquellos casos en dónde obtener la expresión exacta de la distribución del tiempo de ruina y la probabilidad de ruina no es posible.

El Cuadro 2.1 muestra los valores exactos de las probabilidades de ruina estimadas mediante simulación versus los valores exactos para el caso de la ruina del jugador.

2.6.2. Código para la simulación del proceso de ruina a tiempo discreto (Ruina del jugador)

En este caso particular el código está definido por una función que devuelve un vector que contienen los tiempos en los que ocurre la ruina por primera vez; los argumentos de la función son:

- p : Probabilidad de éxito.
- u : Es el capital inicial del jugador.
- t_{max} : Define el horizonte de tiempo máximo a simular (Cantidad de jugadas)
- $nsim$: Define la cantidad de simulaciones a realizar por cada instante de tiempo desde u hasta t_{max} .

```

Simul_discreta<-function(p,u,nsim,t_max) {
run <- matrix(nrow=t_max+2,ncol=nsim+2)
time_ruin<-c()
for (k in seq(u,t_max,by=1)) {
ruinas<-0
w=1
for(i in c(1:nsim)) {
claims=c()
alea <-runif(k,0,1)
for (j in 1:k) {
if (alea[j]< p) {
claims[j]=0}
else{
claims[j]=2}}
data<-data.frame("Tiempos"=seq(1,k,by=1), "reclamos"=claims)
run[1,i] = u
ct<-u

```

Tiempo	Prob. ruina estimada	Prob. ruina exacta	Tiempo	Prob. ruina estimada	Prob. ruina exacta
5	0,01020	0,01024	97	0,00020	0,00018
7	0,01223	0,01229	99	0,00020	0,00017
9	0,01185	0,01180	101	0,00020	0,00016
11	0,01040	0,01062	103	0,00015	0,00015
13	0,00924	0,00934	105	0,00010	0,00014
15	0,00779	0,00816	107	0,00011	0,00013
17	0,00682	0,00712	109	0,00013	0,00012
19	0,00598	0,00623	111	0,00008	0,00011
21	0,00552	0,00546	113	0,00010	0,00011
23	0,00466	0,00481	115	0,00011	0,00010
25	0,00384	0,00424	117	0,00007	0,00009
27	0,00358	0,00376	119	0,00008	0,00009
29	0,00338	0,00335	121	0,00009	0,00008
31	0,00297	0,00299	123	0,00009	0,00008
33	0,00285	0,00267	125	0,00006	0,00007
35	0,00231	0,00240	127	0,00007	0,00007
37	0,00219	0,00216	129	0,00006	0,00006
39	0,00184	0,00195	131	0,00005	0,00006
41	0,00176	0,00176	133	0,00004	0,00006
43	0,00154	0,00160	135	0,00005	0,00005
45	0,00141	0,00145	137	0,00008	0,00005
47	0,00154	0,00132	139	0,00008	0,00005
49	0,00114	0,00120	141	0,00005	0,00004
51	0,00127	0,00110	143	0,00004	0,00004
53	0,00102	0,00100	145	0,00004	0,00004
55	0,00103	0,00092	147	0,00003	0,00004
57	0,00070	0,00084	149	0,00004	0,00003
59	0,00071	0,00077	151	0,00005	0,00003
61	0,00074	0,00071	153	0,00001	0,00003
63	0,00057	0,00066	155	0,00003	0,00003
65	0,00067	0,00060	157	0,00001	0,00003
67	0,00048	0,00056	159	0,00003	0,00003
69	0,00047	0,00051	163	0,00002	0,00002
71	0,00049	0,00048	165	0,00003	0,00002
73	0,00039	0,00044	167	0,00001	0,00002
75	0,00032	0,00041	168	0,00001	0,00002
77	0,00038	0,00038	169	0,00003	0,00002
79	0,00029	0,00035	171	0,00003	0,00002
81	0,00029	0,00033	173	0,00003	0,00002
83	0,00022	0,00030	175	0,00001	0,00002
85	0,00024	0,00028	177	0,00001	0,00002
87	0,00026	0,00026	179	0,00001	0,00001
89	0,00019	0,00024	181	0,00001	0,00001
91	0,00017	0,00023	183	0,00001	0,00001
93	0,00018	0,00021	185	0,00003	0,00001
95	0,00017	0,00020	187	0,00002	0,00001

Cuadro 2.1: Valores exactos y ²³estimados mediante simulación

```

control=FALSE
reclamo=1
fila=2
while (reclamo<=k){
st <-data[reclamo,2]
if (st==0){
run[fila,i]<- run[fila-1,i] + 1}
else {
run[fila,i]<- run[fila-1,i] -1}
if (run[fila,i]<=0 & control==FALSE){
ruinas=ruinas+1
time_ruin[w]=data[reclamo,1]
w=w+1
control=TRUE}
fila=fila+1
reclamo = reclamo +1}}
return (time_ruin)}

```

2.6.3. Proceso de riesgo con reclamaciones geométricas

Consideremos el proceso de riesgo a tiempo discreto en donde las reclamaciones tienen distribución $geo(p)$, es decir, la función de probabilidad está dada por:

$$f(y) = (1 - p)^y p \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

Puede demostrarse mediante inducción y la Proposición 2.1.1 que para cualquier capital inicial $\mu \geq 0$ y para cualquier $p > 1/2$,

$$\psi(\mu) = \left(\frac{1 - p}{p} \right)^{\mu+1}.$$

En el ejemplo particular que desarrollamos a continuación, elegimos $p = 0,6$ y $\mu = 5$, por lo cual $\psi(5) \approx 0,0878$. La Figura 2.6 muestra de color azul la estimación de la probabilidad de ruina con horizonte finito $\psi(5, t)$ para varios instantes de tiempo cuando las reclamaciones tienen distribución geométrica de parámetro $p = 0,6$. Dichos valores pueden verse en el Cuadro 2.2. El cálculo de la probabilidad de ruina para cada instante de tiempo, se realizó simulando el proceso 10000 veces y posteriormente calculando el cociente entre el número de ruinas ocurridas sobre las 10000 corridas del proceso. De color rojo se observa el valor exacto de la probabilidad de ruina con horizonte infinito $\psi(5)$.

La Figura 2.7 muestra la estimación, vía simulación, de la distribución de probabilidad del tiempo de ruina del proceso de riesgo anteriormente expuesto. En este caso, no se tiene

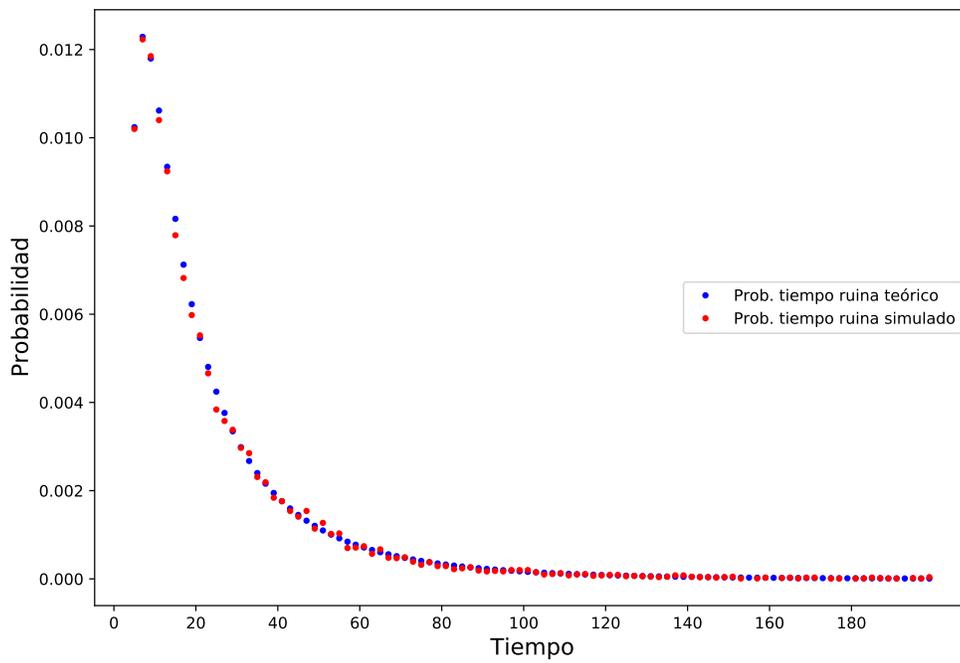


Figura 2.5: Distribución del tiempo de ruina

Tiempo	Prob. de ruina estimada	Tiempo	Prob. de ruina estimada
1	0.0035	51	0.0855
3	0.0161	53	0.0879
5	0.0299	55	0.0849
7	0.0367	57	0.0916
9	0.0464	59	0.0866
11	0.0512	61	0.0838
13	0.0611	63	0.0852
15	0.0631	65	0.0907
17	0.0631	67	0.0863
19	0.0713	69	0.0841
21	0.0687	71	0.0852
23	0.0713	73	0.0858
25	0.0759	75	0.0866
27	0.0758	77	0.0926
29	0.0802	79	0.0887
31	0.0756	81	0.0932
33	0.0819	83	0.0879
35	0.0842	85	0.0898
37	0.0836	87	0.0866
39	0.0833	89	0.0861
41	0.0837	91	0.0952
43	0.0887	93	0.0833
45	0.0841	95	0.0911
47	0.0826	97	0.0922
49	0.0883	99	0.0890

Cuadro 2.2: Probabilidad de ruina estimada, distribución geométrica

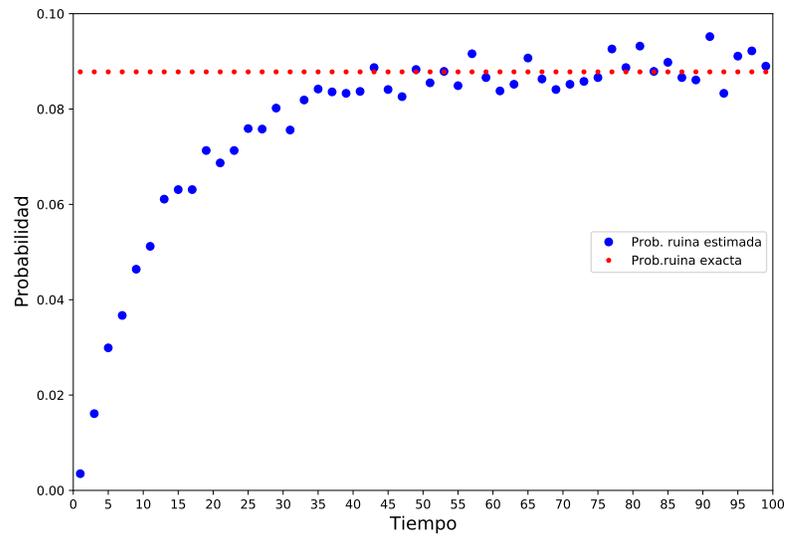


Figura 2.6: Probabilidad de ruina, reclamos geométricos

la expresiones exacta para la distribución del tiempo ruina por lo cual la simulación resulta de gran utilidad para obtener su estimación con buena exactitud.

Tiempo	Prob. estimada tiempo ruina	Tiempo	Prob. estimada tiempo de ruina
1	0,004000	50	0,000160
2	0,005790	51	0,000150
3	0,006640	52	0,000130
4	0,006380	53	0,000120
5	0,005680	54	0,000090
6	0,005190	55	0,000110
7	0,004710	56	0,000110
8	0,004200	57	0,000080
9	0,003850	58	0,000060
10	0,003540	59	0,000060
11	0,003300	60	0,000090
12	0,002780	61	0,000060
13	0,002750	62	0,000070
14	0,002150	63	0,000060
15	0,002150	64	0,000020
16	0,001790	65	0,000020
17	0,001750	66	0,000030
18	0,001720	67	0,000060
19	0,001420	68	0,000080
20	0,001290	69	0,000040
21	0,001270	70	0,000040
22	0,001090	71	0,000030
23	0,001060	72	0,000030
24	0,000960	73	0,000020
25	0,000810	74	0,000050
26	0,000780	75	0,000030
27	0,000760	76	0,000030
28	0,000660	77	0,000010
29	0,000610	78	0,000030
30	0,000540	79	0,000010
31	0,000540	80	0,000030
32	0,000470	81	0,000010
33	0,000420	82	0,000040
34	0,000500	83	0,000020
35	0,000390	84	0,000020
36	0,000400	85	0,000030
37	0,000320	86	0,000020
38	0,000290	87	0,000020
39	0,000280	88	0,000040
40	0,000330	89	0,000010
41	0,000170	90	0,000010
42	0,000320	91	0,000040
43	0,000240	92	0,000010
44	0,000160	93	0,000010
45	0,000170	94	0,000010
46	0,000220	95	0,000010
47	0,000230	98	0,000020
48	0,000140	99	0,000010
49	0,000230	100	0,000020

Cuadro 2.3: Probabilidad estimada del tiempo de ruina, distribución geométrica

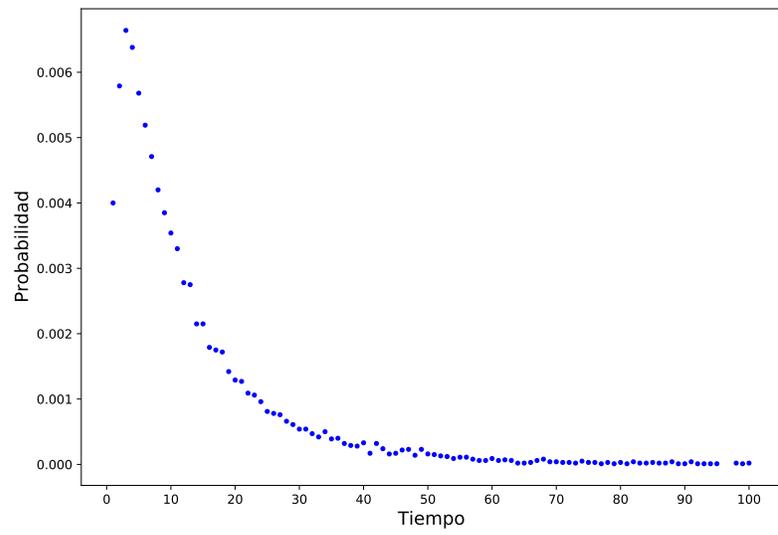


Figura 2.7: Distribución del tiempo de ruina, reclamos geométricos

Capítulo 3

Teoría de la ruina: Tiempo continuo (*risk theory: Continuous time*)

En este capítulo se presenta el proceso de riesgo asumiendo que el tiempo es continuo, el cual se conoce amplia y comúnmente como el **modelo de Cramér-Lundberg**. Este modelo tiene su origen en la tesis doctoral del matemático sueco Ernst Filip Oskar Lundberg del año 1903, en la cual analizó el reaseguro de riesgos colectivos y presentó el proceso de Poisson compuesto. En 1930 Harald Cramér se interesó por el modelo expuesto por Lundberg y utilizó la recién surgida teoría de procesos estocásticos para su modelamiento.

Definición 3.0.1 *El modelo clásico de Cramér-Lundberg es el proceso estocástico a tiempo continuo $\{C_t : t \geq 0\}$ dado por*

$$C_t = \mu + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j,$$

en donde μ y c son constantes positivas, Y_1, Y_2, \dots es una sucesión de v.a. i.i.d. positivas e independientes del proceso de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$ de parámetro λ .

Al igual que en el caso discreto, μ modela el capital inicial de la empresa aseguradora; ct representa la entrada por el pago de primas hasta el tiempo t , Y_j es el valor de la j -ésima reclamación, y el proceso de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$ modela la llegada u ocurrencia de las reclamaciones en el tiempo. Como se puede observar el proceso de riesgo C_t muestra un balance de ingresos menos egresos muy simple, lejos de la realidad contable de una empresa pero el cual resulta de gran utilidad para el modelamiento.

El proceso de riesgo ó proceso de superávit (*surplus process*) como también es conocido, puede seguir trayectorias como la que se muestra en la Figura 3.1

Los montos de las reclamaciones Y_1, Y_2, \dots son variables aleatorias positivas e idénticamente distribuidas, cuya función generadora de momentos se denota como $M_Y(r)$. Los momentos, se denotarán por

$$\mu_n = E(Y^n), \quad n \geq 1.$$

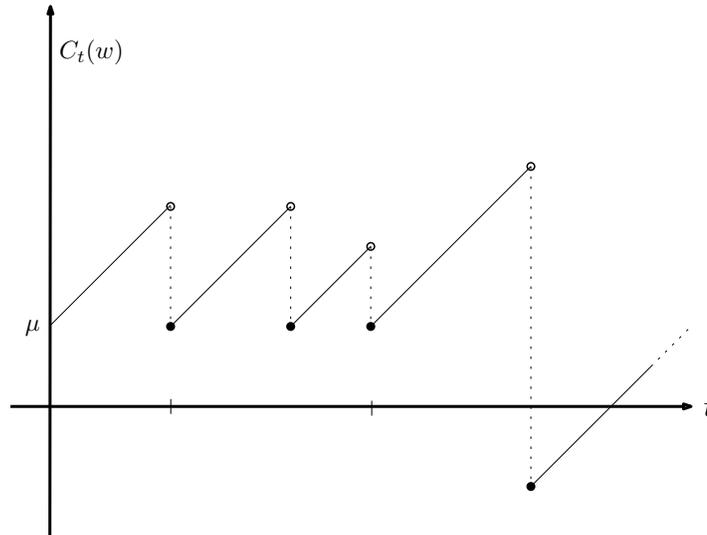


Figura 3.1: Trayectoria proceso de riesgo

En particular, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 E(C_t) &= E\left[\mu + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j\right] \\
 &= E(\mu) + E(ct) - E[N(t)][E(Y_j)] \\
 &= \mu + ct - \lambda t(\mu_1) \\
 &= \mu + (c - \lambda\mu_1)t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var(C_t) &= Var\left[\mu + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j\right] \\
 &= Var(\mu) + Var(ct) - Var[N(t)][Var(Y_j)] \\
 &= \lambda t(\mu_2).
 \end{aligned}$$

3.1. Condición de ganancia neta

Se define la **condición de ganancia neta** como el supuesto que debe satisfacerse para que en el proceso de riesgo C_t la ruina no ocurra con probabilidad uno.

Sean T_0, T_1, T_2, \dots los tiempos donde la aseguradora recibe los reclamos (Se asume que

$T_0 = 0$). Para cada entero $k \geq 1$ se define la variable $X_k = c(T_k - T_{k-1}) - Y_k$, el cual representa el balance parcial de la compañía justamente después de dos reclamos sucesivos. Se tiene que entonces que:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= c E(T_k - T_{k-1}) - E(Y_k) \\ &= \frac{c}{\lambda} - u. \end{aligned}$$

Sea $C_{[k]}$ el proceso de riesgo al momento de la k -ésima reclamación, entonces tenemos que:

$$C_{[k]} = \mu + \sum_{j=1}^k X_j.$$

Haciendo uso de la ley de los grandes números puede demostrarse que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} C_{[k]} = E(X_k).$$

Por lo tanto, para garantizar que $E(C_k) > 0$, condición que se denomina **condición de ganancia neta**, se debe cumplir que

$$E(C_k) = \frac{c}{\lambda} - u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c > \lambda u.$$

La **condición de ganancia neta** significa que los ingresos por primas por unidad de tiempo, c , debe ser mayor que el total de reclamaciones promedio por unidad de tiempo, λu para que la ruina no ocurra con probabilidad 1.

Al igual que en el caso discreto, se define de manera similar el concepto de **Ruina**. Se dice que el proceso C_t se encuentra en estado de ruina en un tiempo t si se cumple que $C_t < 0$ y se define como el **tiempo de ruina** τ , como el primer momento en que la ruina ocurre, es decir:

$$\tau = \inf\{t > 0 : C_t < 0\}.$$

Similar al caso discreto, tenemos que $\tau = \infty$ corresponde al caso en el que la ruina nunca ocurre, es decir el conjunto anteriormente mencionado es vacío. Debido a que el interés se centra en calcular las probabilidades asociadas al modelo de Cramér-Lundberg, se define la probabilidad de ruina con horizonte infinito por

$$\psi(\mu) = P(\tau < \infty \mid C_0 = \mu).$$

Comúnmente se denota esta probabilidad como función del capital inicial μ , aunque en realidad depende de todos los parámetros del modelo, es decir de la tasa asociada frecuencia en la que ocurren los reclamos y de la función de probabilidad asociada al monto de éstos. Por facilidad se hará uso de la siguiente notación

$$\bar{\psi}(\mu) := 1 - \psi(\mu).$$

3.2. Probabilidad de ruina con horizonte infinito

Proposición 3.2.1 *Supongamos que la función de distribución de una reclamación Y cualquiera existe y particularmente es continua, la cual denotaremos como $F(Y)$. Entonces:*

1. $\frac{d}{d\mu}\bar{\psi}(\mu) = \frac{\lambda}{c} \left(\bar{\psi}(\mu) - \int_0^\mu \bar{\psi}(\mu - y) dF(y) \right).$
2. $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}.$
3. $\psi(\mu) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_\mu^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^\mu \psi(\mu - y) \bar{F}(y) dy \right).$

El caso en el que las reclamaciones son exponenciales es uno de los pocos modelos en los cuales es factible encontrar una expresión explícita para $\psi(\mu)$; en este caso tenemos que:

$$\frac{d}{d\mu}\bar{\psi}(\mu) = \frac{\lambda}{c} \left(\bar{\psi}(\mu) - e^{-\alpha\mu} \int_0^\mu \bar{\psi}(y) \alpha e^{-\alpha y} dy \right).$$

Derivando esta expresión y sustituyéndola de nuevo en la ecuación encontrada se obtiene:

$$\bar{\psi}''(\mu) = \left(\frac{\lambda}{c} - \alpha \right) \bar{\psi}'(\mu),$$

cuya solución es $\bar{\psi}(\mu) = a + be^{-(\alpha-\lambda/c)\mu}$, en donde a y b son constantes. Usando las condiciones $\psi(0) = \lambda/(\alpha c)$ y $\psi(\infty) = 0$ se obtiene que:

$$\psi(\mu) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha-\lambda/c)\mu}.$$

3.3. Probabilidad de ruina con horizonte finito

Dado un valor fijo $x > 0$ fijo, la probabilidad de ruina en el intervalo $[0, x]$, la cual es denominada probabilidad de ruina con horizonte finito está dada por:

$$\psi(\mu, x) = P(\tau \leq x \mid C_0 = \mu).$$

La función de distribución del tiempo de ruina $\psi(\mu, x)$, cumple las siguiente desigualdad para $0 < x_1 \leq x_2$

$$\psi(\mu, x_1) \leq \psi(\mu, x_2) \leq \psi(\mu).$$

Por facilidad, nuevamente se usará la siguiente notación

$$\bar{\psi}(\mu, x) := 1 - \psi(\mu, x).$$

De nuevo, el interés es encontrar una expresión para la probabilidad de ruina con horizonte finito. A las expresiones para $\bar{\psi}(0, x)$ y $\bar{\psi}(\mu, x)$ se les conoce como **formulas de Seal** en honor a Hilary L. Seal quien en 1970 las presentó en su libro *Stochastic Theory of Risk Business*.

Proposición 3.3.1 *Considere el proceso de riesgo de Cramér-Lundberg $C_t = \mu + ct - S(t)$, en donde $S(t) = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$. Supongamos que las reclamaciones tienen una distribución absolutamente continua con función de densidad $f(y)$ y defina la función:*

$$\tilde{f}_{S(t)}(y) = e^{\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} f^{*n}(y).$$

Entonces:

1. $F_{S(t)}(x) = e^{-\lambda t} + \int_0^x \tilde{f}_{S(t)}(y) dy, \quad x \geq 0.$
2. $\bar{\psi}(0, x) = \frac{1}{cx} \int_0^{cx} F_{S(x)}(y) dy.$
3. $\frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\psi}(\mu, x) = \frac{\lambda}{c} \left(\bar{\psi}(\mu, x) - \int_0^{\mu} \bar{\psi}(\mu - y, x) dF(y) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(\mu, x) \right).$
4. $\bar{\psi}(\mu, x) = F_{S(x)}(\mu + cx) - c \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{S(t)}(\mu + cy) dy.$

3.4. Severidad de la ruina

Consideremos de nuevo el proceso de riesgo $\{C_t : t \geq 0\}$ con capital inicial μ . Consideremos las siguientes variables aleatorias para el caso en que el tiempo de ruina, τ , es finito:

$$\begin{aligned} X &:= C(\tau-), \\ Z &:= -C(\tau). \end{aligned}$$

La variable X representa el valor del proceso de riesgo justo antes del instante de ruina τ ; por su parte Z , a la cual se le denominada severidad de la ruina, representa el valor del proceso justo en el momento de la ruina (ver Figura 3.2).

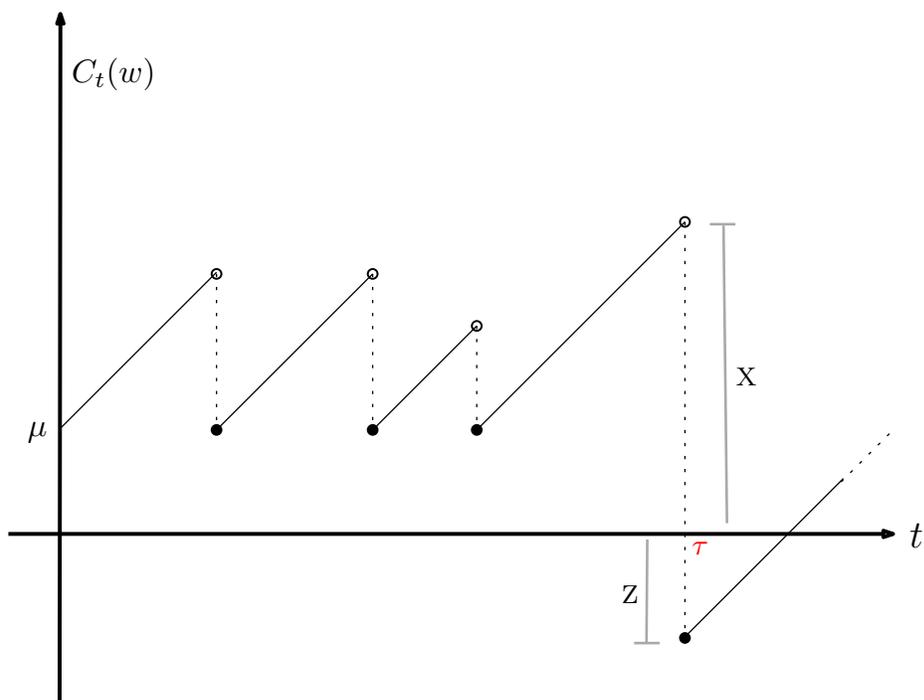


Figura 3.2: Severidad de la ruina, proceso de riesgo continuo.

El objetivo ahora es encontrar la probabilidad conjunta:

$$\varphi(\mu, x, z) = P(\tau < \infty, X > x, Z > z).$$

Al igual que la probabilidad de ruina con horizonte finito e infinito calculada en la sección anterior, no se cuenta con una formula explicita sino con una ecuación integral para $\varphi(\mu, x, z)$.

Proposición 3.4.1 *Suponga que la función de distribución $F(y)$ de las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg es continua. Entonces, para $x \geq 0, y z \geq 0$,*

1.
$$\frac{d}{d\mu}\varphi(\mu, x, z) = \frac{\lambda}{c} \left(\varphi(\mu, x, z) - \int_0^\mu \varphi(\mu - y, x, z) dF(y) - 1_{(\mu > x)} \bar{F}(\mu + z) \right).$$
2.
$$\varphi(0, x, z) = \frac{\lambda}{c} \int_{x+z}^\infty \bar{F}(y) dy.$$
3.
$$\varphi(\mu, x, z) = \left(\int_{\mu+z}^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^\mu \varphi(\mu - y, x, z) \bar{F}(y) dy + 1_{(\mu < x)} \int_{x+z}^{\mu-z} \bar{F}(y) dy \right).$$

3.5. Coeficiente de ajuste

Existen diversas maneras de definir el coeficiente de ajuste, que igual al caso discreto, se requiere para el cálculo de la cota superior de Cramér-Lundberg. Se define la función:

$$\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr,$$

en donde $M_Y(r)$ es la función generadora de momentos de Y . Para todos los valores de r donde la función $M_Y(r)$ existe, la función $\theta(r)$ es diferenciable y se puede definir:

- $\theta'(r) = \lambda M_Y'(r) - c$.
- $\theta''(r) = \lambda M_Y''(r) = \lambda E(Y^2 e^{rY}) > 0$.

Por lo anterior, $\theta(r)$ es una función estrictamente convexa como se muestra en la Figura 3.3. De esta forma se garantiza que siempre existe un valor $r > 0$ tal que $\theta(r) = 0$, al cual se le denomina **coeficiente de ajuste** y se denota con la letra mayúscula R .

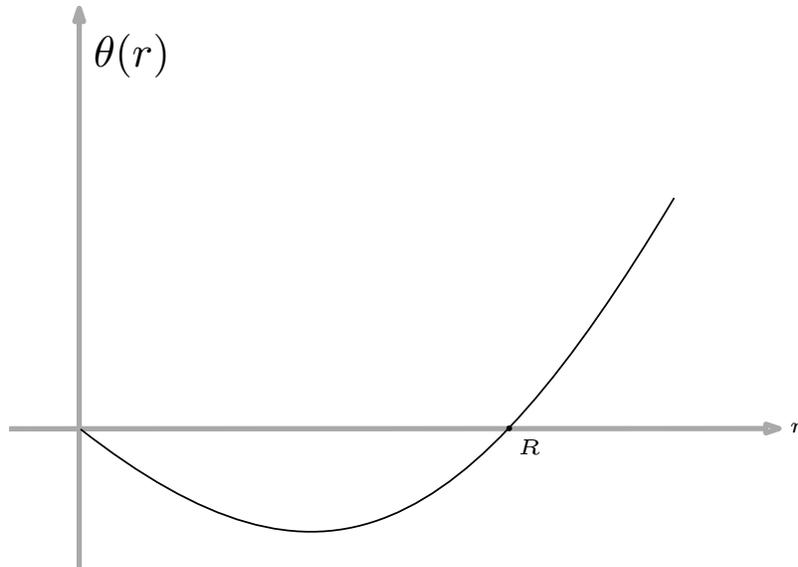


Figura 3.3: Coeficiente de ajuste

El coeficiente de ajuste no siempre existe y éste hecho depende de la distribución de las reclamaciones y de los parámetros del modelo. Aquellas distribuciones para las cuales el coeficiente de ajuste existe, se les llama distribuciones con cola ligera, debido a que gráficamente se puede apreciar como su función de densidad decae a cero exponencialmente, lo cual indica que reclamaciones con montos relativamente grandes tienen baja probabilidad de ocurrencia.

Proposición 3.5.1 Sea $F(y)$ la función de distribución del modelo de Cramér-Lundberg. Entonces la ecuación $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr = 0$ tiene una solución $r > 0$ si y sólo si se cumple que:

$$\int_0^{\infty} e^{ry}(1 - F(y))dy = \frac{c}{\lambda}.$$

Definición 3.5.1 (distribución de cola ligera/cola pesada) A una distribución de probabilidad con soporte en el intervalo $(0, \infty)$ y para la cual:

1. Existe el coeficiente de ajuste se denomina distribución de cola ligera.
2. No existe el coeficiente de ajuste se le llama distribución de cola pesada.

A continuación se demostrará que no es necesario suponer la existencia del coeficiente de ajuste para observar el comportamiento de cola ligera en una distribución. El hecho de que exista la función generadora de momentos, garantiza la existencia del coeficiente de ajuste R y por ende el decaimiento exponencial de la función de densidad.

Proposición 3.5.2 Sea Y una variable aleatoria positiva con función de distribución $F(y)$ y con función generadora de momentos tal que $M(r) < \infty$ para algún $r > 0$. Entonces para cualquier $y > 0$,

$$1 - F(y) \leq M(r)e^{ry}.$$

3.6. Desigualdad de Lundberg

Para todas aquellas distribuciones supuestas en el modelo de Cramér-Lundberg y para las cuales existe el coeficiente de ajuste R , se cumple la desigualdad:

$$\psi(\mu) \leq e^{R\mu}.$$

Proposición 3.6.1 Si el coeficiente de ajuste R existe para las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg, entonces

$$\frac{1}{M} \ln \left(\frac{c}{\lambda\mu} \right) < R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2},$$

en donde la primera desigualdad es válida bajo la hipótesis adicional de que $Y \leq M$ c.s., para alguna constante $M > 0$.

3.7. Aproximación de De Vylder

Debido a la complejidad de la expresión resultante para el cálculo exacto la probabilidad de ruina $\psi(\mu)$, se han propuesto diferentes algoritmos y métodos para aproximar dicho valor. Uno de estas aproximaciones es conocida como **la aproximación de De Vylder**. Consideremos nuevamente el modelo de riesgo de Cramér-Lundberg en donde las reclamaciones tienen distribución arbitraria. De Vylder propone aproximar la probabilidad de ruina de este modelo mediante la probabilidad de ruina de un modelo con reclamaciones exponenciales. Se define entonces el proceso:

$$\tilde{C}_t = \mu + \tilde{c}t - \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{Y}_j.$$

En donde \tilde{c} es una nueva tasa de ingreso por primas, $\{\tilde{N}_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con parámetro $\tilde{\lambda}$, y \tilde{Y}_j son variables aleatorias con distribución $\exp(\tilde{\alpha})$. La probabilidad de ruina en el modelo original se aproxima por la probabilidad de ruina en el modelo con reclamaciones exponenciales mediante la igualdad de los tres primeros momentos centrales de ambos procesos.

Proposición 3.7.1 *Suponga que las reclamaciones en el modelo de riesgo de Cramér-Lundberg, denotadas con la letra Y , tienen tercer momento finito. Entonces la probabilidad de ruina en este modelo tiene como aproximación la fórmula:*

$$\psi(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c} \tilde{\alpha}} e^{-(\tilde{\alpha} - \tilde{\lambda}/\tilde{c})u},$$

$$\tilde{\alpha} = 3 \frac{\mu_2}{\mu_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9}{2} \frac{\mu_2^3}{\mu_3^2} \lambda, \quad \tilde{c} = c - \lambda \mu_1 + \frac{3}{2} \frac{\mu_2^2}{\mu_3} \lambda.$$

En donde $\mu_n := E(Y^n)$.

Como era de esperarse, la aproximación de De Vylder no es muy precisa pero resulta muy interesante y especialmente útil utilizar esta expresión para aproximar la solución desconocida de un problema general.

3.8. Simulaciones de procesos de riesgo de tiempo continuo

3.8.1. Caso 1. Las reclamaciones se distribuyen de forma exponencial.

Para ejemplificar el desarrollo teórico anteriormente presentado para el cálculo de la probabilidad de ruina con horizonte finito, se realizó una simulación del proceso de riesgo

donde el monto de las reclamaciones se distribuye exponencial de tasa $\alpha = 0,1$ para dos capitales iniciales de 50 y 100. Se asume que las reclamaciones ocurren con una tasa $\lambda = 1$. La estimación de la probabilidad de ruina $\psi(50, t)$ y $\psi(100, t)$ para los valores de t entre $[0, 600]$ se hizo para incrementos de 10 unidades de tiempo, tal como se muestra en la Tabla 3.1. Las estimaciones correspondientes a cada instante de tiempo se obtuvieron luego de realizar **diez mil** corridas del proceso y contar la cantidad de veces que estuvo en ruina al menos una vez.

Se tiene que cuando las reclamaciones siguen una distribución $exp(\alpha)$ su función generadora de momentos está dada por:

$$M_Y(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r} \quad \text{para } r < \alpha.$$

Entonces el coeficiente de ajuste, para calcular el limite de Cramér-Lundberg se halla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \theta(r) &= \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \\ &= \lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha - r} \right) - cr \\ &= \lambda \left(\frac{r}{\alpha - r} \right) - cr \\ &= \left(\frac{\lambda}{\alpha - r} - c \right) r. \end{aligned}$$

De esta manera $\theta(r) = 0$ cuando $r = 0$ ó cuando $c = \lambda/(\alpha - r)$. De allí se obtiene que el coeficiente de ajuste R está dado por $R = \alpha - (\lambda/c)$.

Dado que

$$\psi(\mu, x) \leq \psi(\mu) < e^{-R\mu} \quad \text{para } x > 0.$$

Entonces $\psi(\mu)$ puede establecerse también cota superior para $\psi(\mu, x)$.

En este caso particular, tenemos que el coeficiente de ajuste específicamente es:

$$R = \alpha - \frac{\lambda}{c} = 0,1 - \frac{1}{11} \approx 0,009091$$

De esta manera, los limites de Cramér-Lundberg están dados por $e^{-R50} \approx 0,635$ y $e^{-R100} \approx 0,403$ para $\mu = 50$ y $\mu = 100$ respectivamente.

A continuación se muestran cuatro gráficos para cada capital inicial considerado; en cada uno de ellos se puede observar cinco realizaciones del proceso de riesgo para el instante de tiempo 600. La Figura 3.4 muestra la evolución del proceso cuando el capital inicial es

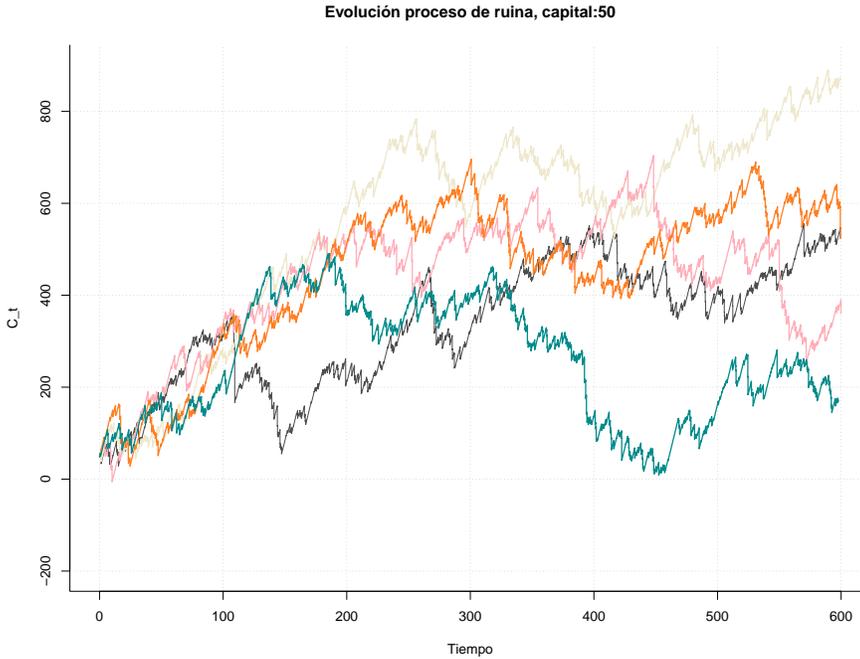


Figura 3.4: Simulaciones proceso de riesgo para $\mu = 50$.

de 50, mientras que las Figura 3.5 representa la evolución del proceso de riesgo cuando el capital inicial es de 100.

En la Figura 3.6 se puede ver el resultado de la simulación realizada para cada instante de tiempo simulado (ver Tabla 3.1). Los puntos de color negro representan cada una de las probabilidades estimadas $\psi(50, t)$ y los puntos de color rojo, representan el límite de Cramér-Lundberg calculado anteriormente. La Figura 3.7 muestra similarmente las probabilidades estimadas de la función $\psi(100, t)$ y su correspondiente límite de Cramér-Lundberg.

3.8.2. Distribución del tiempo de ruina para reclamaciones exponenciales.

Mediante la simulación de 200,000 trayectorias del proceso de riesgo anteriormente expuesto hasta el tiempo 600, se obtuvieron los tiempos de ruina para la construcción del histograma de la Figura 3.8. Con los tiempos de ruina obtenidos con la simulación se puede construir un histograma del tiempo de ruina τ condicional, es decir se obtiene la probabilidad condicional $P(x < \tau < y | \tau < 600)$. Para construir la probabilidad $P(x < \tau < y)$ que se muestra en la Figura 3.8 basta con multiplicar por $P(\tau < 600)$, la cual se estimó como la fracción de ruinas ocurridas en las simulaciones realizadas. De este

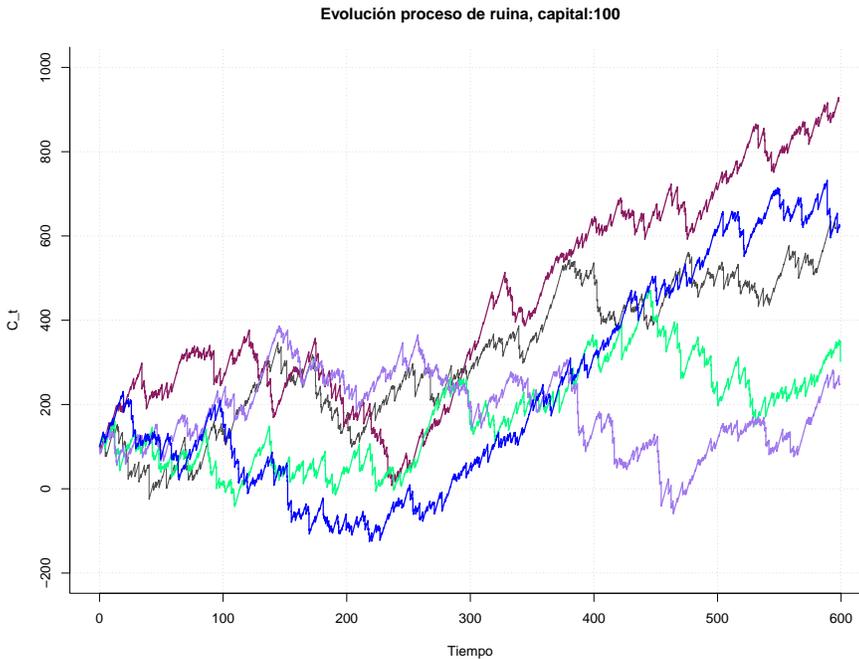


Figura 3.5: Simulaciones proceso de riesgo para $\mu = 100$.

gráfico se evidencia que la ruina ocurre en los primeros instantes del proceso con mayor probabilidad.

De manera análoga fue construido el histograma de la Figura 3.9 en el cual similarmente se muestra que la probabilidad del tiempo de ruina es decreciente, lo cual indica mayor riesgo o probabilidad de ruina en los primeros instantes de tiempo.

3.8.3. Código usado para la simulación del caso exponencial

```
Simulation<-function(lambda,alpha,u,nsim,t_max,prima){
resultados<-data.frame("tiempo"=c(), "prob_ruina"=c())
run <- matrix(nrow=nsim,ncol=length(seq(0,t_max,by=10)))

for (k in seq(0,t_max,by=10)){
ruinas<-0
for(i in c(1:nsim)){
N<- rpois(1,k*lambda)
C<- sort(round(runif(N,0,k),2))
claims<-round(rexp(N,rate=alpha),3)
```

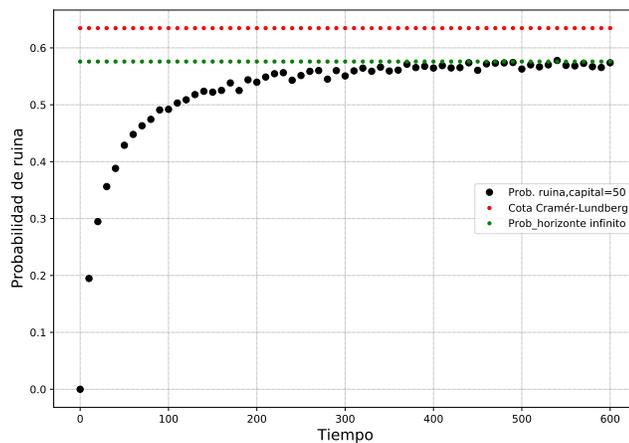


Figura 3.6: Simulación de proceso de riesgo, $\mu = 50$

```

data<-data.frame("Tiempos"=C, "reclamos"=claims)
st<-0
ct<-u
reclamo=1
while (reclamo<=N & ct>0){
  st <- st + data[reclamo,2]
  ct <- u + (prima*data[reclamo,1]) - st
  reclamo = reclamo +1
  if (ct<=0){
    ruinas <- ruinas +1
    break}}
p<-round((ruinas/nsim),7)
resultados1<-data.frame("tiempo"=k, "prob_ruina"=p)
resultados<-rbind(resultados, resultados1)
return (resultados)

```

3.8.4. Caso 2. Las reclamaciones tienen distribución Pareto.

Una variable aleatoria Y se distribuye Pareto con parámetros positivos α y λ , si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + y)^{\alpha+1}}, \quad y > 0.$$

Probabilidad ruina, $\mu = 50$				Probabilidad ruina, $\mu = 100$			
Tiempo	Probabilidad estimada	Tiempo	Probabilidad estimada	Tiempo	Probabilidad estimada	Tiempo	Probabilidad estimada
0	0	310	0.5596	0	0	310	0.3394
10	0.1947	320	0.5644	10	0.0309	320	0.3486
20	0.2947	330	0.5589	20	0.0835	330	0.3490
30	0.3562	340	0.5662	30	0.1261	340	0.3422
40	0.3882	350	0.5594	40	0.1555	350	0.3508
50	0.4288	360	0.5609	50	0.1805	360	0.3478
60	0.4479	370	0.5713	60	0.2123	370	0.3470
70	0.4631	380	0.5654	70	0.2222	380	0.3598
80	0.4744	390	0.5676	80	0.2357	390	0.3527
90	0.4910	400	0.5646	90	0.2455	400	0.3523
100	0.4920	410	0.5688	100	0.2621	410	0.3472
110	0.5031	420	0.5648	110	0.2675	420	0.3550
120	0.5088	430	0.5653	120	0.2773	430	0.3513
130	0.5179	440	0.5738	130	0.2904	440	0.3552
140	0.5237	450	0.5606	140	0.2871	450	0.3586
150	0.5222	460	0.5719	150	0.3013	460	0.3564
160	0.5253	470	0.5732	160	0.3048	470	0.3564
170	0.5384	480	0.5736	170	0.3132	480	0.3546
180	0.5251	490	0.5743	180	0.3085	490	0.3630
190	0.5439	500	0.5629	190	0.3193	500	0.3556
200	0.5397	510	0.5702	200	0.3196	510	0.3616
210	0.5488	520	0.5666	210	0.3261	520	0.3571
220	0.5546	530	0.5702	220	0.3221	530	0.3530
230	0.5564	540	0.5779	230	0.3239	540	0.3619
240	0.5431	550	0.5692	240	0.3276	550	0.3587
250	0.5514	560	0.5684	250	0.3282	560	0.3549
260	0.5588	570	0.5728	260	0.3340	570	0.3636
270	0.5602	580	0.5669	270	0.3284	580	0.3549
280	0.5450	590	0.5655	280	0.3369	590	0.3577
290	0.5601	600	0.5738	290	0.3384	600	0.3589
300	0.5507			300	0.3387		

Cuadro 3.1: Estimación probabilidad de ruina mediante simulación

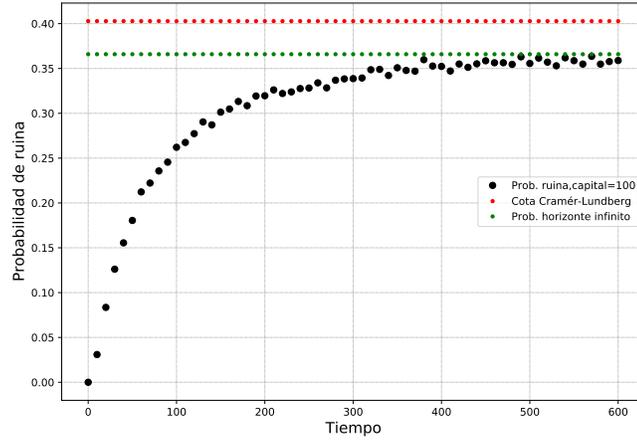


Figura 3.7: Simulación de proceso de riesgo, $\mu = 100$

Su función de supervivencia $1 - F_Y(y) = \bar{F}_Y(y)$ está dada por:

$$\bar{F}_Y(y) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + y} \right)^\alpha \quad y > 0.$$

Sus momentos están dados por

$$E[Y^n] = \int_0^\infty y^n f(y) dy = \alpha \lambda^\alpha \int_0^\infty \frac{y^n}{(\lambda + y)^{\alpha+1}} dy = \alpha / \lambda \int_0^\infty \frac{y^n}{\left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha+1}} dy.$$

Sea $u = \frac{y}{\lambda}$, por lo tanto $du = \frac{1}{\lambda} dy$. De esta forma:

$$E[Y^n] = \alpha \lambda^n \int_0^\infty \frac{u^n}{(1 + u)^{\alpha+1}} du = \alpha \lambda^n \text{Beta}(n + 1, \alpha - n),$$

donde $\text{Beta}(a, b)$ se define como

$$\text{Beta}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1 - x)^{b-1} dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1 + y)^{a+b}} dy.$$

Para obtener la igualdad anterior se realizó el cambio de variable $x = \frac{y}{1+y}$. Haciendo uso de los resultados anteriores se puede demostrar que

$$E[Y^n] = \frac{n! \lambda^n}{\prod_{i=1}^n (\alpha - i)}.$$

La distribución lleva el nombre de su inventor, Vilfredo Pareto (1848 – 1923) quien la usó inicialmente para modelar la economía del bienestar, la cual es una rama de las

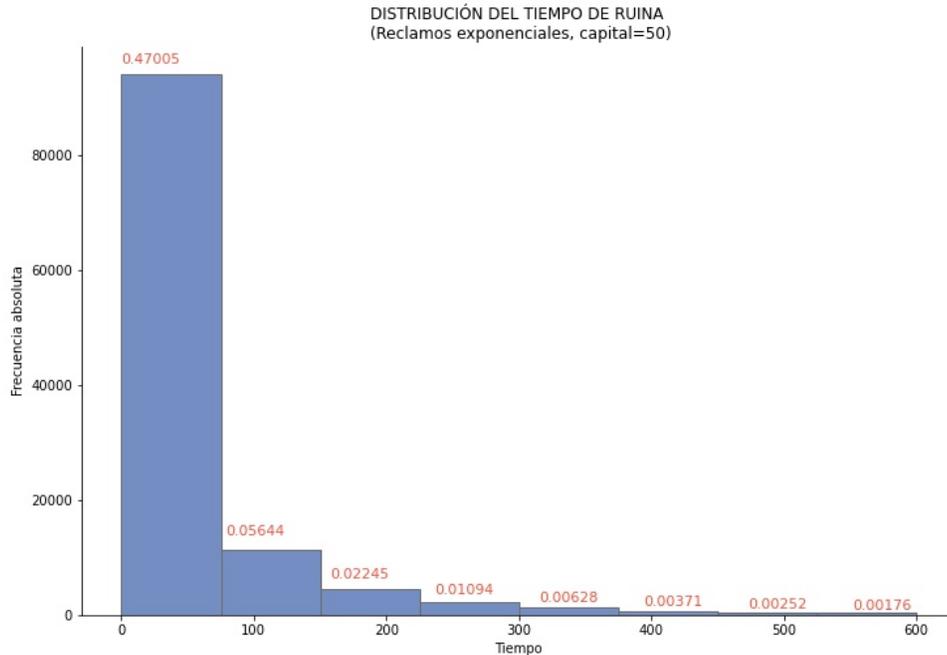


Figura 3.8: Distribución del tiempo de ruina

ciencias económicas y políticas que trata de cuestiones relativas a la eficiencia económica y al bienestar social. Actualmente se usa para modelar la distribución de ingresos, riquezas y en particular para modelar el monto de los reclamos en procesos de riesgo.

La función Pareto tiene soporte el intervalo $(0, \infty)$ pero no posee función generadora de momentos por lo que no existe expresión de la cota de Cramér-Lundberg.

En este caso, se simuló un proceso de riesgo en donde las reclamaciones (Y) tiene una distribución Pareto con parámetros $\alpha = 4$ y $\lambda = 20$, por lo que $E(Y) = \frac{\lambda}{\alpha-1} \approx 6,67$. Además, se supone que el tiempo que transcurre entre dos reclamaciones consecutivas tiene una distribución exponencial de tasa $\theta = 1$ y un capital inicial $\mu = 50$. Se realizaron 10000 corridas del proceso de riesgo para cada instante $t \in \{10, 20, \dots, 1000\}$ y a partir de allí se realizó cada estimación de la probabilidad de ruina como el cociente entre el número de casos en los que el proceso estuvo en ruina al menos una vez sobre el total de realizaciones.

De la Figura 3.10 se puede observar que, a pesar de que no es posible usar la cota de Crámer-Lundberg para $\psi(\mu, t)$, vemos que $\psi(\mu, t) < 0,1$ para $0 < t < 100$. Sabemos que $\psi(\mu, t) \leq \psi(\mu)$ por lo que una aproximación de $\psi(\mu)$ serviría como cota para $\psi(\mu, t)$.

Para ello se estimó la probabilidad de ruina con horizonte infinito $\psi(u)$, mediante la

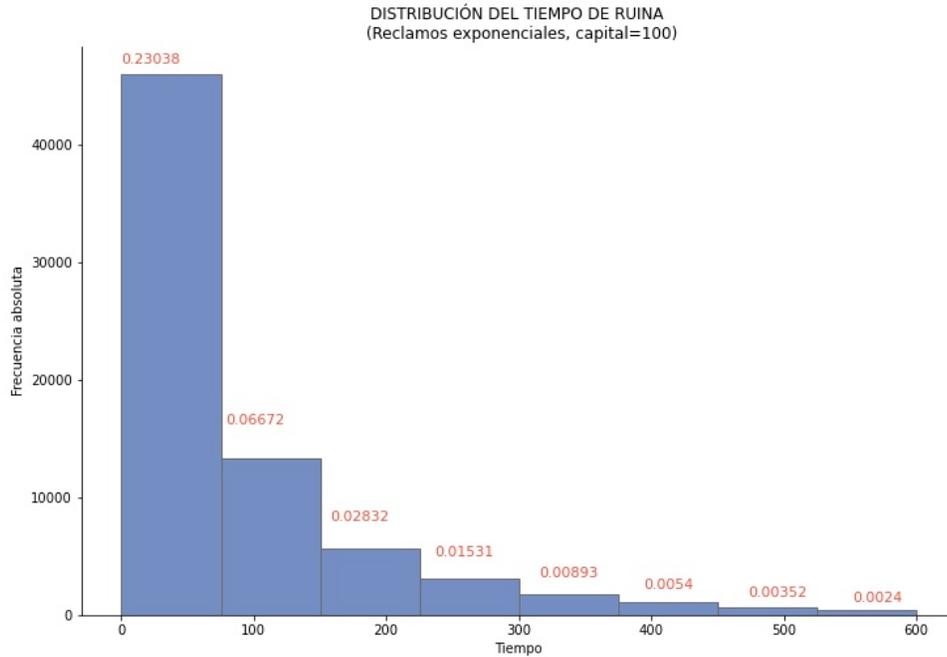


Figura 3.9: Distribución del tiempo de ruina

aproximación propuesta por De Vylder, la cual se puede observar en la Figura 3.10 de color rojo. Podría en este caso considerarse una aproximación apropiada si la comparamos con los resultados obtenidos mediante simulación.

Resulta entonces que la simulación de los procesos de riesgo, es particularmente muy útil cuando las reclamaciones tienen una distribución de cola pesada.

3.8.5. Distribución del tiempo de ruina

Similar al caso exponencial, mediante simulación se obtuvieron los tiempos de ruina hasta el tiempo 1000 en este caso y posteriormente se construyó la Figura 3.11. La probabilidad de ruina para los primeros instantes de tiempo es mayor, lo cual indica que el proceso de riesgo es más propenso a entrar en ruina en los primeros momentos y considerablemente menos probable en tiempos posteriores al tiempo 38.8.

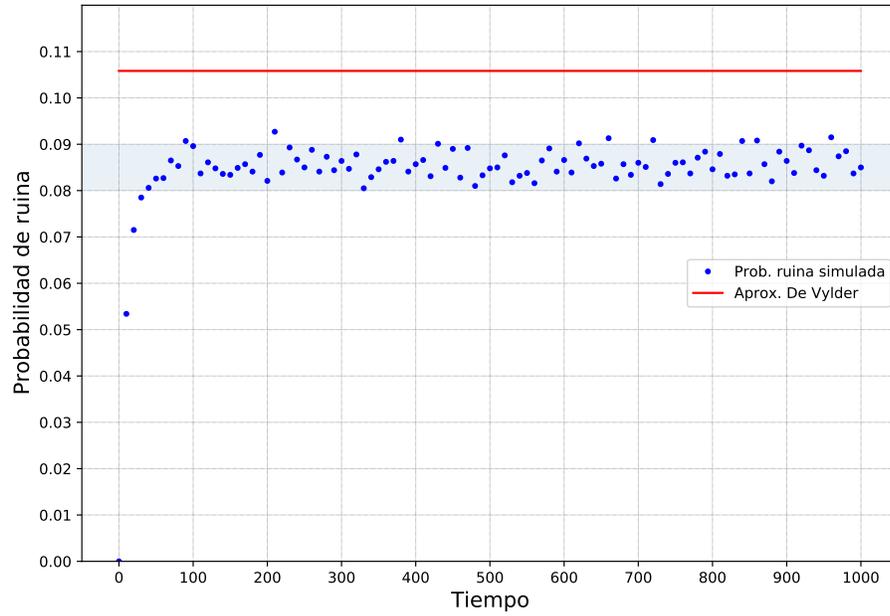


Figura 3.10: Simulación de proceso de riesgo Pareto, $\mu = 50$



Figura 3.11: Distribución tiempo de ruina

3.8.6. Código para la simulación del proceso de ruina a tiempo continuo(Distribución Pareto)

En este caso el código está definido por una función que devuelve un dataframe que contienen para cada instante de tiempo simulado la probabilidad de ruina, calculada como el cociente del numero de ruinas sobre el total de simulaciones determinado por el parámetro *nsim*; los argumentos de la función son:

- *Lambda*: Parámetro del proceso Poisson asociado a los reclamos.
- *Alpha*: Parámetro de forma de la distribución Pareto.
- *Escala*: Parámetro de escala de la distribución Pareto.
- *u*: Capital inicial del proceso de riesgo.
- *tmax*: Tiempo máximo a simular.
- *nsim*: Define la cantidad de simulaciones a realizar para cada instante de tiempo desde *u* hasta *tmax*;se decidió arbitrariamente realizar simulaciones en instantes de tiempo múltiplos de 10.
- *prima*: Cantidad que paga el cliente a la aseguradora cada instante de tiempo.

```
Simulation<-function(lambda, alpha, escala, u, nsim, t_max, prima) {
  resultados<-data.frame("tiempo"=c(), "prob_ruina"=c())
  run <- matrix(nrow=nsim, ncol=length(seq(0, t_max, by=10)))
  for (k in seq(0, t_max, by=10)) {
    ruinas<-0
    for(i in c(1:nsim)) {
      N<- rpois(1, k*lambda)
      C<- sort(round(runif(N, 0, k), 2))
      claims<-round((escala*((runif(n=N))**(-1/alpha)-1)), 3)
      #Relación entre uniforme y pareto
      data<-data.frame("Tiempos"=C, "reclamos"=claims)
      st<-0
      ct<-u
      reclamo=1
      while (reclamo<=N & ct>0) {
        st <- st + data[reclamo, 2]
        ct <- u + (prima*data[reclamo, 1]) - st
        reclamo = reclamo + 1
      }
    }
  }
  resultados$prob_ruina<-run/length(run)
  resultados$tiempo<-seq(0, t_max, by=10)
  resultados
```

```
if (ct<=0){
ruinas <- ruinas +1
break}}
p<-round((ruinas/nsim),7)
resultados1<-data.frame("tiempo"=k, "prob_ruina"=p)
resultados<-rbind(resultados, resultados1)}
return (resultados)}
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. N. Bhattacharya, E. C. Waymire. Stochastic Processes With Applications. *Society for Industrial & Applied*. (2009).
- [2] Blom, G. "Harald Cramer 1893-1985". *The Annals of Statistics*. 15 (4): 1335. doi:10.1214/aos/1176350596. JSTOR 2241677. (1987).
- [3] D. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge, Cambridge University Press. (2005).
- [4] Lundberg, F. *Approximerad Framställning av Sannolikehetsfunktionen, Återförsäkring av Kollektivrisker*, Almqvist & Wiksell, Uppsala. (1903).
- [5] Rincón, L. *Introducción a la Teoría de Riesgo*, Cd. de México, México. (2012).