COHERENCIA Y ENTRELAZAMIENTO EN UN SISTEMA DE DOS SPINES INTERACTUANTES EN UN CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

Sebastián Lugo Márquez, Jorge Mahecha Gómez
Grupo de Física Atómica y Molecular
Instituto de Física, Universidad de Antioquia, AA1226, Medellín, Colombia.
(Recibido 10 de Oct. 2005; Aceptado 01 de Feb. 2006; Publicado 28 de Abr. 2006)

RESUMEN

Se considera el sistema formado por dos spines en un campo magnético constante a lo largo del eje z. Los dos spines se ubican a lo largo de un vector unitario arbitrario $\vec{r}$ separados por una distancia fija *d* y se supone que su interacción mutua es de tipo dipolar magnética. Se resuelve la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para diferentes condiciones iniciales (una de ellas es un estado coherente de spin) y se encuentra la matriz densidad del sistema de dos spines. Mediante traza parcial sobre el spin 2 se halla la matriz densidad del spin 1 sometido al entorno constituido por el spin 2. Se calculan los parámetros que caracterizan el entrelazamiento y la decoherencia del spin 1 producidos por su interacción con el entorno. Lo anterior se realiza para distintas orientaciones $\vec{r}$ y distintas separaciones *d*. Se observa que la máxima decoherencia y el máximo entrelazamiento se producen cuando $\vec{r}$ es perpendicular a *z* y que estas cantidades oscilan en el tiempo. Lo anterior muestra la relación de dichos comportamientos con la simetría del hamiltoniano.

Palabras Claves: Estados coherentes de spin, decoherencia, entrelazamiento.

ABSTRACT

A two-spin system in a constant magnetic constant field along the z-axis is considered. The two spins are located along a unitary arbitrary vector $\vec{r}$ separated by a fixed distance *d* and it is supposed that their mutual interaction is of magnetic dipole type. The time-dependent Schrödinger equation is solved for different initial conditions (one of them is a spin coherent state) and one finds the density matrix of the two-spin system. By means of partial trace with respect to spin 2, one finds the density matrix of spin 1 submitted to the environment constituted by spin 2. Parameters characterizing the entanglement and decoherence of spin 1 produced by its interaction with the environment are calculated. This is carried out for different orientations $\vec{r}$ and different separations *d*. It is found that the above mentioned quantities are related to the Hamiltonian symmetry.

Keywords: Spin coherent states, decoherence, entanglement.

INTRODUCCIÓN

Según la teoría electromagnética [1], el hamiltoniano del sistema tiene la forma,

$$H=-\vec{B}\cdot(\vec{m}_1+\vec{m}_2)+\left(\mu_0/4\pi r^3\right)\left[\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2-3(\vec{m}_1\cdot\hat{r})(\vec{m}_2\cdot\hat{r})\right], \quad (1)$$

donde $\vec{B}$ es el campo magnético, $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ los momentos magnéticos de los dos spines y $\vec{r}$ es la separación entre ellos. H es una matriz 4 x 4.

La evolución temporal del sistema está descrita por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo $H|\Psi>=i\hbar(d/dt)|\Psi>$, donde $|\Psi>$ es un spinor de cuatro componentes,

$|\Psi\rangle = C_1(t)|\downarrow\downarrow> + C_2(t)|\downarrow\uparrow> + C_3(t)|\uparrow\downarrow> + C_4(t)|\uparrow\uparrow>$. Los coeficientes en general son números complejos, quedando 8 ecuaciones diferenciales lineales acopladas para resolver.

En el presente problema hemos tomado a $\vec{r}$ como un parámetro vectorial (igual que el vector constante $\vec{B}$) y no como una coordenada. Así, los dos spines permanecen fijos en el espacio y solo tienen una dinámica dada por la evolución de su proyección a lo largo del campo magnético. Con el fin de resolver las ecuaciones de movimiento en forma analítica, consideramos casos particulares para $\vec{B}$ y para la separación entre los spines $\vec{r}$. Por ejemplo, el caso en que, $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y se hace una escogencia tal de las unidades para que las constantes sean iguales a 1. Con los anteriores valores se obtiene el hamiltoniano, H = {{15/4,0,0,0}, {0,1/4,1/4,0}, {0,1/4,1/4,0}, {0,0,0,-17/4}}.

ESTADOS COHERENTES DE SPIN

Los valores escogidos para $\vec{B}$ y $\vec{r}$, junto con los valores iniciales de los coeficientes $Ci(t)$, son los que determinan el problema físico. En el presente trabajo se toman las condiciones iniciales correspondientes a un estado coherente de spin. Un estado coherente de spin es un estado que permanece invariante bajo el hamiltoniano $-\vec{B}\cdot\vec{m}$, que describe la interacción de un campo magnético con un spin. Se define en analogía con los estados coherentes de oscilador armónico [2,3], los cuales permanecen invariantes en una evolución dirigida por el hamiltoniano del oscilador armónico. Son funciones propias del operador $a^\dagger$, dependen de un número complejo *z*, y tienen la forma $|z>= \exp(-zz^*/2)\exp(za^\dagger)|0>$. Se construye un estado coherente de spin por analogía con el estado coherente de oscilador armónico. Se toma $|j,-j>$ como el "estado base" y el operador de escalera de un spin general como el "operador de creación". Con ello el estado normalizado se define por [2] $|z>= (1+|z|^2)^{-j}\exp(zj_+)|j,-j>$. Se obtiene un estado coherente de spin ½ remplazando *j* por ½ y expandiendo el operador exponencial $|z>= (1+|z|^2)^{-1/2}|\downarrow> + z(1+|z|^2)^{-1/2}|\uparrow>$.

Ahora consideraremos un estado inicial del sistema de dos spines formado a partir de dos estados coherentes de spin ½. El siguiente es un estado no entrelazado en la forma de un producto directo entre dos estados coherentes del spin 1 y el spin 2 respectivamente:
$|z_1 z_2>= (1+|z_1|^2)^{-1/2}(1+|z_2|^2)^{1-/2}(|\downarrow\downarrow> + z_2|\downarrow\uparrow> + z_1|\uparrow\downarrow> + z_1 z_2|\uparrow\uparrow>)$. Este será el estado del sistema de dos spines en el tiempo cero.

Analicemos la relación entre el estado anterior y un estado coherente de spin 1, dado que un spin 1 puede ser considerado como el estado triplete de dos spines ½. Utilizando la definición de un estado coherente spin *j*, en el caso particular $j = 1$ obtenemos un estado coherente de spin 1 y lo escribiremos en la base desacoplada $|z\rangle = (1+|z|^2)^{-1}\left[|\downarrow\downarrow> + z(|\uparrow\downarrow> + |\downarrow\uparrow>) + z^2|\downarrow\downarrow>\right]$. Si comparamos este estado con el estado producto directo de dos estados coherentes de spin ½, observamos que este último será coherente solo si $z_1 = z_2$.

Otra propiedad importante que queremos estudiar es la propiedad de mínima incertidumbre de los estados coherentes (con $\hbar = 1$),

$$\Delta s_x{}^2 \Delta s_y{}^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle s_z \rangle \right|^2. \qquad (2)$$

Esto se hará para spin ½ y spin 1. Para poder encontrar la condición de mínima incertidumbre debemos calcular primero los valores medios $< s_i >$ y $< s_i{}^2 >$ y evaluar $\Delta s_i{}^2 = < s_i{}^2 > - < s_i >^2$, para spin ½ y luego para spin 1. Al hacer todos los cálculos se obtiene en ambos casos que la condición de mínima incertidumbre implica $(z^2 - z^{*2})^2 = 0$ esto quiere decir que hay incertidumbre mínima si $z^* = z$ o si $z^* = -z$, en otras palabras, el parámetro del estado coherente tiene que ser real o imaginario puro, lo que nos hace conjeturar que este es un resultado general para cualquier spin.

Regresando al ejemplo que estamos estudiando, utilizaremos los resultados obtenidos para preparar el sistema en tiempo cero en un estado coherente de spin ($z_1 = z_2$) que cumpla la condición de mínima incertidumbre ($z^* = z$). Entonces escribimos el estado en el que se prepara el sistema en el tiempo cero como $| zz > = | z >$. Lo que sigue es identificar cada uno de los coeficientes de $| zz >$ y asignárselos a las constantes de integración de la solución del sistema de ecuaciones ya resuelto para obtener la solución que analizaremos. La función de onda que describe el sistema es entonces

$$| \Psi > = (1+z^2)^{-1} \exp(17it/4\hbar) |\downarrow\downarrow> + z(1+z^2)^{-1} \exp(-it/2\hbar)\left(|\downarrow\uparrow> + |\uparrow\downarrow>\right) + z^2(1+z^2)^{-1} \exp(-15it/4\hbar) |\uparrow\uparrow>. \qquad (3)$$

FIDELIDAD, ENTROPÍA, ENTRELAZAMIENTO, COHERENCIA Y POLARIZACIÓN

Luego de obtener la función de onda para todo tiempo, calcularemos algunas cantidades que caracterizan el grado de fidelidad, entropía, entrelazamiento, coherencia y polarización.

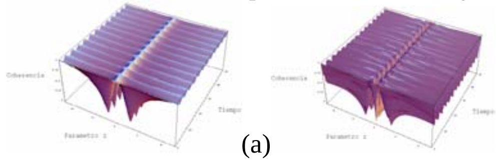
La entropía de von Neumann del spin número 1 mide la pérdida de información acerca del estado inicial de dicho spin como resultado de su interacción con el spin número 2. La entropía en general es función de la matriz densidad del sistema. Se define como $S(\hat{\rho}) = -Tr[\hat{\rho} \log_2(\hat{\rho})]$. Si calculamos la matriz densidad del estado puro general del sistema formado por los dos spines ½, $\hat{\rho}_{12} = | \Psi >< \Psi |$, y luego tomamos traza parcial sobre el spin número 2, entonces obtenemos la matriz densidad del spin número 1 cuando el spin número 2 no tiene un estado definido, $\hat{\rho}_1 = \sum_{\eta_2} {}_2< \eta_2 | \Psi > < \Psi | \eta_2 >_2$, la cual describe una mezcla. Con los valores propios de $\hat{\rho}_1$ calculamos la entropía de von Neumann, $S(\hat{\rho}_1) = -\lambda_+ Log_2 \lambda_+ - \lambda_- Log_2 \lambda_-$. Esta cantidad también mide el grado de entrelazamiento del spin número 1 con el número 2.

La fidelidad mide el grado de modificación de un estado inicial cuando evoluciona. Para calcular la fidelidad del estado final del spin número 1 se requiere conocer las matrices densidad del estado inicial y el estado final. La fidelidad se define por la siguiente fórmula [4] $F_1 = Tr\left[(\hat{\rho}_{ini} \hat{\rho}_{fini} \hat{\rho}_{ini})^{1/2}\right]$.

El grado de polarización se define con ayuda de los valores medios de las proyecciones del spin. Está dada por [5] $2(< s_{x_1} >^2 + < s_{y_1} >^2 + < s_{z_1} >^2)^{1/2}$.

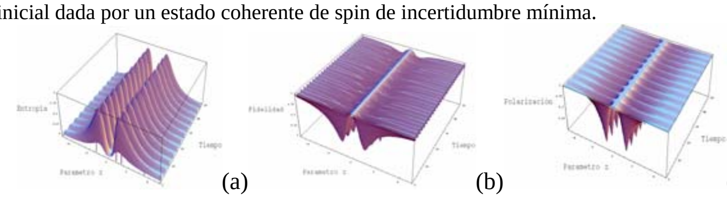
La coherencia se define a partir de los elementos de $\hat{\rho}_1$ de la siguiente manera, $C = |\rho_{\uparrow\downarrow}|(\rho_{\uparrow\uparrow}\rho_{\downarrow\downarrow})^{-1/2}$ Donde $\rho_{\uparrow\downarrow}$ es el elemento no diagonal y $\rho_{\uparrow\uparrow}$ y $\rho_{\downarrow\downarrow}$ son los elementos de la diagonal de $\hat{\rho}_1$, llamados probabilidades.

Podemos observar en la Figura 1 la dependencia de la coherencia con la simetría del sistema notando que cuando el parámetro *z* del estado coherente es grande, en (a) hay menos oscilaciones que en (b). Es importante notar que el valor del parámetro *z* juega un papel fundamental en la coherencia del sistema, así la dinámica del spin número 1 es muy regular cuando *z* es grande.



(a) (b)

Figura No. 1. Evolución del grado de coherencia C del spin número 1. (a) Se tomaron $\vec{B}$ y $\vec{r}$ a lo largo del eje z y una condición inicial dada por un estado coherente de spin de incertidumbre mínima. (b) Se tomaron $\vec{B}$ en z y $\vec{r}$ en x, y una condición inicial dada por un estado coherente de spin de incertidumbre mínima.



(a) (b) (c)

Figura No. 2. Evolución de la entropía de von Neumann, la fidelidad y la polarización. Se tomaron $\vec{B}$ y $\vec{r}$ a lo largo del eje z y una condición inicial dada por un estado coherente de spin de incertidumbre mínima. (a) Entropía de von Neumann, que mide el grado de entrelazamiento. (b) Fidelidad. (c) Polarización.

CONCLUSIONES: Los estados coherentes de spin no conservan sus propiedades cuando evolucionan bajo un hamiltoniano que incluye términos de interacción entre los dos spines. Los estados coherentes de spin de incertidumbre mínima mantienen su coherencia para valores muy pequeños o muy grandes del parámetro *z*. Cuando la entropía del spin número 1 es cero, se tiene la mínima pérdida de información, lo cual está relacionado con la presencia de la mayor coherencia y polarización y con el mínimo entrelazamiento con el spin número 2. Los parámetros que caracterizan la coherencia y el entrelazamiento oscilan con el tiempo, presentándose “colapsos” y “resurgimientos”, ocurre una oscilación que intercambia información entre los dos spines. Estas oscilaciones ocurren con las frecuencias características de la evolución del sistema, dadas en (3). Se encontraron las condiciones para que un estado coherente de spin sea de incertidumbre mínima para spin ½ y spin 1. Se halló la condición para que el producto directo de dos estados coherentes de spin ½ coincida con un estado coherente de spin 1.

REFERENCIAS

[1] D. J. Griffiths. Introduction to Electrodynamics, Third Edition. Prentice Hall, NJ, 1998.
[2] J. P. Blaizot, G. Ripka. Quantum Theory of Finite Systems. The MIT Press, MA, 1986.
[3] M. Novaes. Mecânica Quântica no Espaço de Fase II: Estados Coherentes. Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol. 24, no. 4. (2002) 437.
[4] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
[5] E. M. Lifshitz, L. D. Landau. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, Volume 3, Third Edition. Butterworth-Heinemann, MA, 1981.