

**SISTEMAS FORMADORES DE VÓRTICES ÓPTICOS  
MEDIANTE MÁSCARAS DE FASE DISCRETIZADA:  
ANÁLISIS DE FASE, ENERGÍA, CARGA  
TOPOLÓGICA Y MOMENTO ANGULAR**

Natalia Londoño Londoño

**TESIS DOCTORAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTORA EN  
FÍSICA**

Director: Dr. Edgar Rueda  
Codirectores: Dr. Jorge Gómez, Dra. Dafne Amaya.



Universidad de Antioquia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Física  
Medellín  
Septiembre de 2021



---

# Agradecimientos

---

- Le doy infinitas gracias a mis padres y hermanos por el apoyo brindado durante mi vida académica, cada uno de ellos de diferentes formas me impulsaron a dar siempre lo mejor de mi con el fin de cumplir siempre con mis objetivos.
- A mi asesor el Dr. Edgar Rueda por su apoyo y acompañamiento durante mi formación académica. Gracias por guiarme y brindarme las ideas necesarias para sacar adelante este trabajo cuando parecía que ya no habían más opciones. Admirando su paciencia, dedicación y disposición para resolverme hasta la más mínima inquietud.
- A mi asesor el Dr. Jorge Gómez por sus valiosos aportes, compromisos y sugerencias durante la realización de este trabajo. Gracias por creer en mis capacidades y buscar la forma de que siempre diera lo mejor de mi. Gracias a mis asesores por darme la oportunidad de aprender de sus experiencias.
- A la Dra. Dafne Amaya por el apoyo recibí durante mi pasantía académica y los aportes que hizo para la culminación de este trabajo. También al Dr. Alberto Lencina por sus valiosos aportes en los desarrollos analíticos que son parte fundamental del trabajo.
- Al Grupo de Óptica y Fotónica (GOF) gracias por la oportunidad, apoyo, acogida de cada uno de sus integrantes durante el tiempo de realización de mis estudios de posgrado.
- Por último, quiero agradecer a mi familia académica, a todos los que ahora puedo llamar amigos dentro y fuera de la Universidad. Además a todas aquellas personas que de una u otra forma hicieron parte de mi formación académica y personal, mis compañeros de estudio, el Instituto de Física, sus profesores y a la Universidad de Antioquia.

---

# Índice general

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
1.1. Objetivos . . . . .	5
1.1.1. Objetivo general . . . . .	5
1.1.2. Objetivos específicos . . . . .	5
<b>2. VÓRTICES ÓPTICOS GENERADOS CON MÁSCARAS DE FASE DISCRETIZADA</b>	<b>6</b>
2.1. Propagación en el espacio libre . . . . .	7
2.2. Máscaras de fase discretizadas . . . . .	11
2.2.1. Discretización de una SPP . . . . .	11
2.2.2. Discretización de una VPL . . . . .	14
2.3. Propagación en el espacio libre de funciones de transmitancia discretizadas . . . . .	18
2.3.1. Campo óptico generado con una SPP discretizada . . . . .	18
2.3.2. Campo óptico generado con una VPL discretizada . . . . .	20
<b>3. VÓRTICES PRINCIPALES: ANÁLISIS DE INTENSIDAD</b>	<b>23</b>
3.1. Efectos de desplazamientos fuera del eje óptico del haz Gaussiano . . . . .	24
3.2. Configuración experimental . . . . .	28
3.2.1. Resultados experimentales en intensidad . . . . .	30
<b>4. VÓRTICES SECUNDARIOS</b>	<b>36</b>
4.1. Lente productora de vortice discretizada . . . . .	36
4.2. Cargas topológicas . . . . .	38
4.3. Análisis en intensidad . . . . .	40
4.3.1. Signo de la carga topológica . . . . .	42
4.4. Seguimiento del centro de masa . . . . .	44
4.5. Análisis de energía . . . . .	45
4.5.1. Razón señal-ruido . . . . .	47
4.6. Fase . . . . .	48
4.6.1. Indicadores de medida a partir de la fase . . . . .	49

---

<b>5. DESPLAZAMIENTO DE LA MÁSCARA DE FASE</b>	<b>53</b>
5.1. Efectos de desplazamientos fuera del eje óptico de la máscara de fase . .	53
5.2. Diferencias entre el haz y la DVPL fuera de eje . . . . .	56
5.2.1. Cambios de asimetría en intensidad . . . . .	56
5.2.2. Desplazamientos del centro de masa . . . . .	59
5.2.3. Diferencias en las distribuciones de fase . . . . .	62
<b>6. MOMENTO ANGULAR ORBITAL</b>	<b>66</b>
6.1. Momento Angular Orbital . . . . .	66
6.2. Momento angular orbital para Haz Gaussiano fuera de eje . . . . .	69
6.3. Momento angular Orbital para DVPL fuera de eje . . . . .	75
<b>7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS</b>	<b>79</b>
7.1. CONCLUSIONES . . . . .	80
7.2. PERSPECTIVAS . . . . .	81
<b>8. PRODUCTOS ASOCIADOS</b>	<b>82</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

---

# Índice de Figuras

---

2.1.	Propagación de un haz vórtice a diferentes planos de observación. $f$ : longitud focal de la lente, $Z$ : distancia de separación entre la lente y el plano de observación. . . . .	7
2.2.	Distribución de intensidad y fase de un campo óptico generado con una CSPP (o CVPL) en el plano de observación, con $\ell = 2$ , $f = 200$ mm, $f_{FR} = 1$ m, $w = 3$ mm y $\lambda = 532$ nm. . . . .	10
2.3.	Perfil de intensidad tomado sobre una línea en el eje vertical que pasa por el centro del vórtice de la Figura (2.2). . . . .	11
2.4.	Distribución de fase de una DSPP con niveles: a) $N = 4$ , b) $N = 3$ y c) $N = 2$ . . . . .	14
2.5.	Distribución de fase de una DVPL con niveles: a) $N = 4$ , b) $N = 3$ y c) $N = 2$ . . . . .	16
2.6.	Porcentaje de energía correspondiente a cada vórtice cuando se varía: a) los niveles de discretización $N$ manteniendo $m/\ell = 1$ y b) la carga topológica $m$ con distintos niveles de discretización $N$ . La línea amarilla indica la carga principal $\ell = 1$ programada en la máscara de fase. . . . .	16
2.7.	Corte axial de la propagación de vórtices generados con una DVPL con $N=2$ , $\ell = 1$ , $f=200$ mm, $f_{FR}= 1.2$ m, radio de haz $w=5$ mm y longitud de onda de $\lambda=532$ nm. Para mejor visualización se ha tomado una $n$ -ésima raíz de la intensidad. $Z_t$ corresponde a la posición a lo largo del eje de propagación y $r$ es el radio respecto a éste eje. . . . .	17
2.8.	Distribución de fase e intensidad del campo óptico generado con una DSPP, con $w = 3.0$ mm, $f = 200$ mm, $f_{FR} = 1000$ mm, $\ell = 1$ , $\lambda = 532$ nm. . . . .	20
2.9.	Distribución de fase e intensidad del campo óptico generado con una DVPL, con $w = 3.0$ mm, $f = 200$ mm, $f_{FR} = 1000$ mm, $\ell = 1$ , $\lambda = 532$ nm. . . . .	22
3.1.	Planos de propagación de un haz vórtice con el haz Gaussiano fuera del eje óptico. . . . .	24
3.2.	Cambio de coordenadas. . . . .	25
3.3.	Simulación de vórtice óptico fuera de eje ( $\ell = 2$ ) producido por una DVPL con $N = 2$ . a) distribución transversal de intensidad en el plano de observación, b) perfil de intensidad radial (tomado sobre la línea roja en el eje vertical). . . . .	27
3.4.	Razón de picos de intensidad teóricos Vs desplazamiento fuera del eje normalizado usando una BVPL. . . . .	28
3.5.	Construcción de una BVPL para $\ell = 1$ a) CSPP con $N=256$ , b) lente de Fresnel con $N=256$ (modulada a $2\pi$ ), c) superposición de la CSPP y la lente de Fresnel para crear una CVPL con $N=256$ d) DVPL discretizada con dos niveles de fase (BVPL) . . . . .	29
3.6.	Esquema experimental para la generación de vórtices ópticos. . . . .	30
3.7.	Resultado experimental de vórtices desplazados fuera de eje y sus perfiles de intensidad, para $\ell = 1$ a $\ell = 3$ . . . . .	31
3.8.	Razón de picos máximos de intensidad $R$ vs desplazamiento fuera del eje normalizado. . . . .	31

3.9.	Mejor curva de ajuste para medidas experimentales con $\ell = 3$ .	32
3.10.	Cambio de la asimetría de intensidad con el tamaño del haz ( $w$ ) obtenido a partir del cálculo analítico usando una BVPL de carga $\ell = 1$ . a) Haz centrado b) el haz incide 0.5 mm fuera del eje óptico.	34
3.11.	Dependencia del parámetro $R$ con el tamaño del haz ( $w$ ). Resultado obtenido a partir del cálculo analítico usando una BVPL de carga $\ell = 1$ .	34
4.1.	Estructura de una DVPL generada con $\ell = 2$ , $N=3$ , $f_{FR} = -1$ m y $\lambda = 532$ nm, con escala en niveles de fase está en radianes ( $-\pi$ a $\pi$ ).	37
4.2.	Esquema de la posición del vórtice principal y dos vórtices secundarios con $N = 3$ y $\ell = 1$ . Para $t = -1, 0, 1$ se obtienen los vórtices de cargas $m = -2, m = \ell = 1, m = 4$ , respectivamente, en las posiciones indicadas en la figura. Para mejorar la visualización, las intensidades fueron normalizadas.	37
4.3.	Valores de cargas topológicas secundarias $m$ en función de $t$ para diferentes valores de $N$ y $\ell$ .	38
4.4.	Perfiles de intensidad para diferentes cargas topológicas secundarias, con $w=3$ mm, $\lambda = 532$ nm, $f = 200$ mm, $\ell = 1$ y $f_{FR} = -1200$ mm. a) $N = 2$ , b) $N = 3$ .	39
4.5.	Razón de picos de intensidad Vs desplazamiento fuera del eje óptico con $\ell = 1$ . a) con $N=2$ , b) con $N=3$ .	40
4.6.	Comparación entre la distribución de intensidad de OV's obtenidos con una CSPP, OV's principales con DVPL, y SOV's con DVPL, para diferentes desplazamientos fuera del eje, como se indica en la Figura. Para obtener $m = -3$ se usó $\ell = 1$ , $N = 2$ y $t = -2$ ; para $m = -2$ se usó $\ell = 2$ , $N = 2$ y $t = -1$ ; y para $m = -1$ usamos $\ell = 1$ , $N = 2$ y $t = -1$ . Para los vórtices principales los valores respectivos de carga topológica son programados directamente en la máscara usando $N = 2$ (el área observada es 1 mm x 1 mm). La intensidad es normalizada para facilitar la visualización.	41
4.7.	Vista cercana de la distribución de intensidad enfatizando la ubicación de la posición de la singularidad para vórtices principales generados con una CSPP (primer columna), una DVPL (segunda columna) siendo $\ell = -3$ y un vórtice secundario generado con una DVPL (tercera columna) con carga topológica $m = -3$ , con el haz centrado (fila 1) y a 1 mm fuera del eje (fila 2) (el área observada es 0.56 mm x 0.56 mm). Se emplearon los mismos parámetros de la Figura 4.6.	42
4.8.	Comparación entre SOV's de carga topológicas positivas y negativas para diferentes desplazamientos fuera del eje, usando los mismos parámetros de la Figura 4.6. Las cargas opuestas fueron obtenidas cambiando el signo de $\ell$ .	43
4.9.	Posición del vortice en el plano de observación para diferentes radios del haz Gaussiano $w$ en función de $r_{off}$ . Los parámetros de la simulación son $N = 2$ , $f = 200$ mm, $f_{FR} = -1.0$ m. Para el OV principal $\ell = -1$ , $t = 0$ , y para el SOV $m = -1$ , $t = -1$ .	44
4.10.	Posición del centroide en el plano de observación para diferentes radios del haz Gaussiano $w$ en función de $r_{off}$ con $f = 200$ mm y $f_{FR} = -1000$ mm. Los correspondientes vórtices principales y secundarios tiene la misma carga topológica. Los parámetros son: a) $\ell = -3$ y $m = -3$ , b) $\ell = -2$ y $m = -2$ , y c) $\ell = -1$ y $m = -1$ .	45
4.11.	Energía total (porcentaje) correspondiente a cada término de la ecuación (4.1), $t = 0$ para el vórtice principal y $t = -3, -2, -1, 1, 2$ para vórtices secundarios. Para mejor visualización se usó una escala logarítmica.	46
4.12.	SNR como función de los ordenes para condición sobre eje (primera fila) y los fuera de eje (segunda fila). En todos los casos $f = 200$ mm, $\lambda = 532$ nm, $w = 6.0$ mm, siendo (a) y (d) $\ell = 1$ , $f_{FR} = -1.6$ m y $N$ variable; (b) y (e) $N = 3$ , $f_{FR} = -1.6$ m y $\ell$ variable; y (c) y (f) $\ell = 1$ , $N = 3$ y $f_{FR}$ variable.	47

4.13.	Comparación de las fases de un OV obtenidas usando una CSPP, DVPL vórtice principal, y DVPL vórtice secundario, para los diferentes desplazamientos indicados en la Figura. Se usa una escala de grises donde la fase corre continuamente de 0 (negro) a $2\pi$ (blanco). Se emplearon los mismos parámetros de la Figura 4.6. . . . .	48
4.14.	Vista cercana de la distribución de fase generada con una CSPP (primera columna), una DVPL con $\ell = -3$ (segunda columna), y un vórtice secundario generado con una DVPL con carga $m = -3$ (tercera columna). La fila uno corresponde a un haz centrado, y la fila dos a un haz incidiendo 1 mm fuera de eje. Se usaron los mismos parámetros que en la Figura 4.7. . . . .	49
4.15.	Métricas de traslación usando la distribución de fase de vórtices ópticos secundarios con cargas topológicas: (a) $m = -1$ , (b) $m = -2$ , y (c) $m = -3$ . . . . .	50
5.1.	Cambio de coordenadas. . . . .	54
5.2.	Distribuciones de intensidad para diferentes desplazamientos fuera de eje de la DVPL y el haz, para $m = -1$ con $N = 2, t = -1, \ell = 1$ ; para $m = -2$ con $N = 3, t = -1, \ell = 1$ y para $m = -3$ con $N = 2, t = -2, \ell = 1$ . La intensidad es normalizada para facilitar su visualización . . . . .	57
5.3.	Razón de picos máximos de intensidad Vs Desplazamiento fuera de eje de a) el haz Gaussiano, b) la DVPL. . . . .	58
5.4.	Razón de picos máximos de intensidad Vs Desplazamiento fuera de eje del haz Gaussiano y la DVPL para a) $m = -1$ , b) $m = -2$ , c) $m = -3$ . . . . .	58
5.5.	Desplazamiento del centro de masa de vórtices de cargas $m = -1$ y $m = -3$ , para a) el haz Gaussiano fuera de eje, b) la DVPL fuera de eje con $N = 2, t = -1, \ell = 1$ para $m = -1$ y $N = 2, t = -1, \ell = 3$ para $m = -3$ . Las líneas azules representan en cada Figura el desplazamiento del centro de masa esperado analíticamente. . . . .	60
5.6.	Desplazamiento del centro de masa de vórtices de carga $m = -2$ obtenidos con la DVPL1 de parámetros $N = 2, t = -1$ y $\ell = 2$ , y la DVPL2 con parámetros $N = 3, t = -1$ y $\ell = 1$ . . . . .	61
5.7.	Desplazamiento del centro de masa de vórtices de carga $m = -3$ obtenidos con la DVPL1 de parámetros $N = 2, t = -1$ y $\ell = 3$ , la DVPL2 con parámetros $N = 2, t = -2$ y $\ell = 1$ , y la DVPL3 con parámetros $N = 4, t = -1$ y $\ell = 1$ . . . . .	61
5.8.	Desplazamiento del centro de masa de un vórtice de carga $m = -2$ obtenido con la DVPL2 con parámetros $N = 3, t = -1$ y $\ell = 1$ , comparado con el desplazamiento del punto de intensidad enfocado por la lente de Fresnel con parámetros de discretización $N = 3, t = -1$ . . . . .	63
5.9.	Distribuciones de fase para diferentes desplazamientos fuera de eje de la DVPL y el haz, para $m = -1$ con $N = 2, t = -1, \ell = 1$ ; para $m = -2$ con $N = 3, t = -1, \ell = 1$ y para $m = -3$ con $N = 2, t = -2, \ell = 1$ . . . . .	63
5.10.	Comparación entre las rotaciones de la línea de discontinuidad de la fase para $m = -1$ desplazando fuera de eje a) el haz Gaussiano, b) la DVPL. . . . .	64
6.1.	Perfil de intensidad radial de un VO de carga $\ell = 1$ , con las Longitudes $L_1, L_2$ y $L_3$ y sus respectivos valores mínimos de energía. . . . .	68
6.2.	Ilustración de las porciones correspondientes a las áreas cuadradas $A_1, A_2$ y $A_3$ sobre las cuales se determina el indicador de momento angular orbital. El vórtice mostrado es de carga $\ell = 1$ . . . . .	69
6.3.	Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa para $x_{off} = 0, 0.5$ mm y 1 mm, con $\ell = 1$ para el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de intensidad normalizada del vórtice tomado sobre a una línea que pasa verticalmente por su centro. El tamaño de área usado es el correspondiente a $A_1$ . . . . .	70

6.4.	Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa con $x_{off} = 0$ , en vórtices principales de cargas $\ell = 1, 2$ y $3$ , con el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de la intensidad normalizada del vórtice tomado respecto a una línea sobre el eje vertical que pasa por el centro del vórtice. . . . .	71
6.5.	Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa con $x_{off} = 0.5$ mm, en vórtices principales de cargas $\ell = 1, 2$ y $3$ , con el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de la intensidad normalizada del vórtice tomado respecto a una línea sobre el eje vertical que pasa por el centro del vórtice. . . . .	71
6.6.	Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa con $x_{off} = 1$ mm, en vórtices principales de cargas $\ell = 1, 2$ y $3$ , con el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de la intensidad normalizada del vórtice tomado respecto a una línea sobre el eje vertical que pasa por el centro del vórtice. . . . .	72
6.7.	Ilustración del tamaño de la partícula de área $A_1$ . El recuadro verde representa el tamaño del área de la partícula y la línea roja la línea sobre la cual nos desplazamos verticalmente cada dos píxeles para obtener el indicador MAO partícula. . . . .	73
6.8.	Indicador MAO experimentado por partículas de áreas $A_1, A_2$ y $A_3$ a causa de un vórtice óptico de carga $\ell = 2$ , generado con desplazamientos fuera de eje del haz de $x_{off} = 0, 0.5$ mm y $1$ mm. Con $x_p = 1\mu\text{m}$ . Los resultados son comparados con el MAO centro masa del vórtice. . . . .	73
6.9.	Indicador MAO respecto al centro de masa para carga $\ell = 1$ (línea azul) y $\ell = -1$ (línea magenta) para el área $A_1$ y desplazamientos a) $x_{off} = 0$ , b) $x_{off} = 0.5$ mm y c) $x_{off} = 1$ mm. . . . .	74
6.10.	Distribución del MAO respecto al centro de masa para carga $m = -1$ (segunda columna) y $m = -2$ (tercera columna) para el área $A_1$ y desplazamientos de $x_{off} = 0$ (segunda fila) y $x_{off} = 0.5$ mm (tercera fila). VO corresponde a vórtices principales y SOV al vórtice secundario formado en otro plano de observación. . . . .	74
6.11.	Indicador MAO respecto al centro de masa y el eje óptico para cargas $m = -1, -2$ y $-3$ , para desplazamientos fuera de eje de la DVPL correspondientes a $x_{off} = 0$ mm, $0.5$ mm y $1$ mm. . . . .	76
6.12.	Comparación entre los indicadores MAO obtenidos con el haz fuera de eje (leyenda haz) y DVPL fuera de eje (leyenda DVPL) para cargas topológicas $m = -2$ y $-3$ a diferentes desplazamientos. . . . .	77
6.13.	Indicador MAO centro de masa para cargas $m = -2$ generada con la DVPL1 (puntos rojos) y $m = -2$ generada con la DVPL2 (puntos azules) para desplazamientos fuera de eje de DVPL correspondientes a $x_{off} = 0.5$ mm. . . . .	77

---

# RESUMEN

---

En este trabajo, se deriva una expresión analítica para el campo óptico generado cuando un haz Gaussiano fuera de eje es difractado por una Lente productora de vórtices discretizada (DVPL). Con este sistema se obtiene un arreglo multifocal de vórtices ópticos asimétricos cuyos valores de carga topológica dependen de la posición de observación a lo largo del eje óptico, por tanto, se obtiene un vórtice principal y vórtices ópticos secundarios con cargas topológicas diferentes a la programada inicialmente en la máscara de fase. Adicionalmente, mediante la expresión analítica del campo óptico y simulaciones computacionales, se estudian los efectos inducidos por la discretización y la desalineación sobre la intensidad, fase, el desplazamiento del centro de masa y el indicador de momento angular orbital, tanto para desplazamientos fuera de eje del haz de iluminación como para desplazamientos fuera de eje de la DVPL. Por último, se deriva una expresión de razón señal-ruido para verificar que el ruido no es un problema al momento de observar vórtices ópticos secundarios. En general, cuando se desplaza la DVPL en lugar del haz Gaussiano, se presentan cambios más significativos en la intensidad, fase e indicador de momento angular de los vórtices. Donde los cambios producidos pueden ser controlados manipulando parámetros de la DVPL como sus niveles de discretización  $N$ , el orden  $t$ , la focal de Fresnel  $f_{FR}$  y la longitud focal de la lente física. Así mismo, los vórtices ópticos secundarios permiten modificar la sensibilidad del sistema con el simple desplazamiento a lo largo del eje óptico, al ubicar un vórtice de carga superior al programado inicialmente en la DVPL.

**Palabras clave:** Vórtices ópticos, difracción, arreglo multifocal, desplazamientos fuera de eje.

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

---

Singularidades del campo óptico conocidas como vórtices ópticos (OVs) que poseen un frente de onda helicoidal representado por un término  $\exp(i\ell\theta)$ , siendo  $\theta$  el ángulo azimutal y  $\ell$  la llamada carga topológica, que representa el número de veces que la fase del frente de onda varía en  $2\pi$  [1], albergan una cantidad de momento angular orbital (MAO) asociado a la precesión del vector de Poynting alrededor del eje de propagación [2, 3]. Debido a éstas características tan particulares de los OVs, ellos han sido usados en áreas como astronomía [4], metrología [5–7], pinzas ópticas [8, 9], comunicaciones ópticas [10], entre otras. Entre los diferentes métodos usados para generar vórtices ópticos, algunos consisten en iluminación láser de elementos ópticos difractivos (DOEs) proyectados en un modulador espacial de luz (SLM, por sus siglas en inglés) tales como: hologramas generados por computador (CGHs) [11], placas espirales de fase (SPPs) [12], placas zonales de Fresnel (FZP) en espiral [13] y lentes productoras de vórtices (VPLs) [14]. Sin embargo, en SLMs de bajo desempeño, para tener una buena distribución de intensidad del vórtice estos DOEs deben ser discretizados. Experimentalmente, hemos mostrado que usando un SLM cuya modulación máxima en fase es de tan solo  $\theta_{max} = 1.2\pi$  y una VPL discretizada con  $N=2$  niveles, es posible obtener vórtices ópticos tipo Kummer con buena simetría de intensidad [15]. Por otro lado, otros trabajos han mostrado como a partir de algunas máscaras de fase binarias o discretizadas es posible generar simultáneamente con la misma máscara de fase, tanto arreglos transversales [16, 17] como multifocales [18–23] de vórtices ópticos. Particularmente, Rumi et al. [23] con su desarrollo analítico muestran que cuando se generan OVs con VPLs discretas (DVPLs), un arreglo multifocal de vórtices ópticos secundarios (SOVs) con cargas topológicas secundarias  $m = \ell(Nt + 1)$  aparecen focalizados a distancias específicas  $Z_t = f - (Nt + 1)f^2/f_{FR}$  en torno al eje de propagación, siendo  $\ell$  la carga principal programada en la VPL,  $N$  los niveles de discretización,  $f$  la longitud focal de una lente física,  $f_{FR}$  la focal de la lente de Fresnel que conforma la VPL y  $t$  un contador. En  $t = 0$  se obtiene el vórtice principal correspondiente a la carga topológica  $\ell$  programada en la DVPL.

Además de los efectos de discretización de la máscara de fase, recientes trabajos muestran analítica y computacionalmente que un desplazamiento relativo entre el haz Gaussiano y la máscara generadora del vórtice, conduce a una pérdida de la simetría

de intensidad de los vórtices ópticos [7, 24–27]. Particularmente, Anzolín et al. [7] mediante el uso de una placa espiral de fase continua (CSSP, por sus siglas en inglés), desarrollaron un modelo analítico que permitió medir desplazamientos fuera de eje a través del patrón de asimetría de intensidad de los vórtices, mostrando que entre mayor era la carga del vórtice mayor era la asimetría de la intensidad. Por tanto, las cargas topológicas superiores son las más sensibles a detectar estos tipos de desalineamientos. Dicho comportamiento fue verificado experimentalmente usando una DVPL [28]. Aunque la distribución de la intensidad y sus cambios de asimetría han sido más estudiados, otras características importantes son los cambios en el MAO que albergan estos tipos de haces, y sus distribuciones de fase ante desalineaciones. En este sentido algunos trabajos han abordado la parte de MAO mostrando que esta cantidad depende de que tan lejos se encuentre el haz de iluminación del eje óptico del sistema [25, 29, 30]. Entre los pocos trabajos que analiza los cambios producidos en las distribuciones de fase por la desalineación, se encuentra el desarrollado por V. Kotlyar et al. [31], de modo que la fase ha sido poco estudiada hasta el momento.

Por tanto, para tener una descripción más general, dado un arreglo multifocal de vórtices ópticos producido por una DVPL, como la mayoría de las aplicaciones de vórtices ópticos requieren de una adecuada distribución de intensidad, fase y momento angular orbital que son las características más importantes de los vórtices y, teniendo en cuenta que cualquier desalineación puede inducir errores que no son deseados en los propósitos de sus aplicaciones, en este trabajo se estudia analíticamente y experimentalmente los cambios en la asimetría de intensidad para un haz Gaussiano que incide fuera de eje; además se analizan para vórtices secundarios los cambios en asimetría de intensidad, de las distribuciones de fase, cargas topológicas y el indicador de momento angular orbital obtenidos cuando el haz Gaussiano o la DVPL se encuentran fuera del eje óptico. Se define como eje óptico una línea horizontal que pasa por el centro de la lente física y el centro geométrico de nuestro sistema de detección, siendo perpendicular a los planos transversales paralelos de ambos elementos ópticos. Los resultados obtenidos son comparados con el mejor límite de resolución obtenido en referencia a una CSPP iluminada fuera de eje, mostrando una buena concidencia entre OV's principales y SOV's. Los rangos de valores que afectan más los cambios de asimetría con el desplazamiento fuera de eje en SOV's son completamente detallados mostrando que la intensidad, fase y el indicador de momento angular son más sensibles a desplazamientos fuera de eje de la DVPL. Esta sensibilidad es dependiente de los parámetros de discretización de la máscara de fase y algunos parámetros del sistema.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivo general

Estudiar sistemas formadores de vórtices ópticos generados con máscaras de fase discretizadas y sometidos a perturbaciones; para establecer variables de transducción que conlleven, por medio de su caracterización, a mejorar el desempeño de sistemas de medida basados en la morfología de vórtices ópticos.

### 1.1.2. Objetivos específicos

- Modelar teórica y computacionalmente un sistema formador de vórtices ópticos generado con máscaras de fase discretizadas y sometido a desplazamientos fuera del eje óptico tanto del haz de iluminación como de la máscara de fase.
- Estudiar los efectos inducidos en el sistema sobre la intensidad, fase y carga topológica.
- Caracterizar el sistema definiendo que parámetros afectan más la morfología de los vórtices.
- Analizar cambios en el momento angular asociados al desplazamiento y la discretización.
- Establecer indicadores de medida basados en parámetros morfológicos de los vórtices ópticos.

## CAPÍTULO 2

---

# VÓRTICES ÓPTICOS GENERADOS CON MÁSCARAS DE FASE DISCRETA

---

El uso de moduladores espaciales de luz de cristal líquido (LC-SLM) con baja modulación en fase para la generación de vórtices ópticos, implicaba que, para obtener buena simetría de intensidad los elementos ópticos difractivos que le iban a ser programados debían ser discretizados en  $N$  niveles de fase. Sin embargo, trabajos como el realizado por Rummi et al. [32] mostraron que dicha discretización puede producir como efecto adicional la generación de un arreglo multifocal de vórtices ópticos sobre el eje óptico; adicionalmente, Anzolín et al. [7] encontraron que si el haz de iluminación incide por fuera del centro de la máscara de fase, se producen cambios en la simetría de intensidad del vórtice que incrementan con su valor de carga topológica. Todos estos resultados hacen evidente que se pueden presentar efectos interesantes en la formación de vórtices ópticos dependientes de la máscara de fase utilizada y las perturbaciones presentes en el sistema, esto nos abre la posibilidad de implementar una nueva caracterización a partir de los cambios en la morfología del arreglo multifocal de vórtices obtenido cuando estos dos efectos: discretización de la máscara de fase y desplazamientos fuera del eje del haz gaussiano, son combinados.

En este capítulo se estudia analíticamente las diferencias entre los vórtices ópticos formados cuando un haz gaussiano incide en línea sobre máscaras generadoras de vórtices ópticos tipo Kummer continuas y discretizadas. Para el desarrollo analítico se consideran como máscaras de fase SPPs y VPLs continuas, es decir, aquellas en las que todos los niveles de fase son permitidos; las llamaremos CSPPs y CVPLs, respectivamente. Adicionalmente consideraremos SPPs y VPLs discretizadas que solo permitan ciertos niveles de fase, que serán llamadas DSPPs y DVPLs, respectivamente. El campo difractado es obtenido partiendo de la aproximación de Fresnel en el espacio libre, donde por simplicidad no se consideran pupilas que limiten el sistema, se desprecia el espesor de los elementos ópticos y se toman como válidas todas las hipótesis de la teoría de difracción escalar.

## 2.1. Propagación en el espacio libre

En la aproximación de Fresnel, la propagación de un campo en el espacio libre desde un plano  $(\xi, \eta)$  hasta un plano  $(x, y)$  a una distancia  $z$  está dado por [33]

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2z}(\xi^2+\eta^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta. \quad (2.1)$$

Siendo  $\lambda$  la longitud de onda,  $z$  la distancia de propagación y  $k = 2\pi/\lambda$  el número de onda. Ahora, si consideramos que un haz de perfil Gaussiano de radio  $w$  incide en el centro de una CSPP de carga topológica  $\ell$ , la función de transmitancia estaría dada por

$$A_1(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) e^{j\ell\theta}, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (2.2)$$

Si a su vez esta combinación incide en el mismo plano sobre una lente de Fresnel con longitud focal  $f_{FR}$ , ahora la función de transmitancia estaría dada por

$$A_2(\xi, \eta) = A_1(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{jk}{2f_{FR}}(\xi^2 + \eta^2)\right]. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) representaría el campo inicial cuando se usa como máscara de fase una CSPP, mientras que la ecuación (2.3) representa el campo inicial usando como máscara de fase una CVPL. Llamemos  $U_1(\xi, \eta)$  al campo inicial que representa alguna de estas dos funciones de transmitancia ( $A_1(\xi, \eta)$  o  $A_2(\xi, \eta)$ ). Veamos como es la propagación de este campo en el espacio libre para la configuración mostrada en la Figura (2.1), en varios planos de propagación.

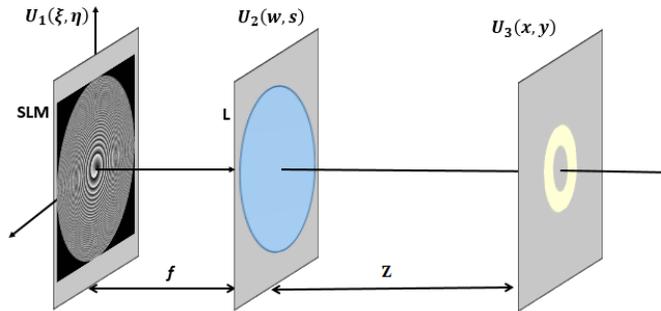


Figura 2.1: Propagación de un haz vórtice a diferentes planos de observación.  $f$ : longitud focal de la lente,  $Z$ : distancia de separación entre la lente y el plano de observación.

Propagando  $U_1(\xi, \eta)$  hasta el plano focal de una lente física delgada  $L$  de longitud focal  $f$ , se tiene que el campo que incide en la lente es

$$U_2(w, s) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}(w^2+s^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2f}(\xi^2+\eta^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda f}(w\xi+s\eta)} d\xi d\eta. \quad (2.4)$$

Por otro lado, el campo a la salida de la lente es de la forma:

$$U'_2(w, s) = U_2(w, s) e^{-\frac{jk}{2f}(w^2+s^2)}. \quad (2.5)$$

Propagando el campo  $U'_2(w, s)$  hasta un plano de observación ubicado a una distancia  $Z$  a partir de la lente  $L$ , se tiene:

$$U_3(x, y) = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{\frac{jk}{2Z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U'_2(w, s) e^{\frac{jk}{2Z}(w^2+s^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda Z}(wx+sy)} dw ds. \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.6)

$$U_3(x, y) = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{\frac{jk}{2Z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_2(w, s) e^{-\frac{jk}{2}(w^2+s^2)\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{f}\right)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda Z}(wx+sy)} dw ds. \quad (2.7)$$

Ahora llevando (2.4) a (2.7)

$$\begin{aligned} U_3(x, y) &= -\frac{e^{jk(f+Z)}}{\lambda^2 f Z} e^{\frac{jk}{2Z}(x^2+y^2)} \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{\frac{jk}{2f}(w^2+s^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2f}(\xi^2+\eta^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda f}(w\xi+s\eta)} d\xi d\eta \right] \\ &\times e^{-\frac{jk}{2}(w^2+s^2)\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{f}\right)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda Z}(wx+sy)} dw ds \\ &= -\frac{e^{jk(f+Z)}}{\lambda^2 f Z} e^{\frac{jk}{2Z}(x^2+y^2)} \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2f}(\xi^2+\eta^2)} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{jk}{2Z}(w^2+s^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda} \left[ \left(\frac{\xi}{f} + \frac{x}{Z}\right)w + \left(\frac{\eta}{f} + \frac{y}{Z}\right)s \right]} dw ds \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

El término entre corchetes representa la transformada de Fourier de una exponencial

cuadrática, resolviendo ésta transformada se tiene que:

$$\begin{aligned}
 U_3(x, y) &= -\frac{e^{jk(f+Z)}}{\lambda^2 f Z} j\lambda Z e^{\frac{jk}{2Z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2f}(\xi^2+\eta^2)} e^{-\frac{i\pi Z}{\lambda} \left[ \left( \frac{\xi}{f} + \frac{x}{Z} \right)^2 + \left( \frac{\eta}{f} + \frac{y}{Z} \right)^2 \right]} d\xi d\eta \\
 &= \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2f}(\xi^2+\eta^2)} e^{-\frac{jk}{2Z}(x^2+y^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\
 U_3(x, y) &= \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_1(\xi, \eta) e^{\frac{jk}{2f}(\xi^2+\eta^2)} \left(1 - \frac{Z}{f}\right) e^{-\frac{j2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Si  $U_1(\xi, \eta) = A_1(\xi, \eta)$ , el campo en un plano de observación ubicado a una distancia  $Z$  respecto a la lente puede ser escrito como:

$$U_3(x, y) = \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1(\xi, \eta) e^{-\frac{jk}{2} \left[ \frac{Z}{f^2} - \frac{1}{f} \right] (\xi^2 + \eta^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \tag{2.9}$$

Mientras que si  $U_1(\xi, \eta) = A_2(\xi, \eta)$ , el campo puede ser escrito como:

$$U_3(x, y) = \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1(\xi, \eta) e^{-\frac{jk}{2} \left[ \frac{1}{f_{FR}} + \frac{Z}{f^2} - \frac{1}{f} \right] (\xi^2 + \eta^2)} e^{-\frac{j2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \tag{2.10}$$

La única diferencia entre las ecuaciones (2.9) y (2.10) se encuentra dentro del argumento de la exponencial de fase cuadrática que hay dentro de las integrales. Cuando ese factor de fase cuadrática se vuelva cero, se cumple que en ambos casos el campo óptico obtenido sería igual a la transformada de Fourier de la función de transmitancia  $A_1(\xi, \eta)$ . De la ecuación (2.9) se puede ver que esto se cumple cuando  $\frac{Z}{f^2} - \frac{1}{f} = 0$ , es decir, para  $Z = f$ ; esto indica que cuando se usa una CSPP los VOs se forman en el plano focal de la lente física. Para  $Z \neq f$ , al ser el factor de fase cuadrático diferente de cero, el resultado final sería la transformada de Fourier de la función de transmitancia convolucionada con un factor de fase cuadrático [34], de modo que ya no se tendría la distribución de fase e intensidad característica del vórtice, siendo mas notoria las distorsiones en fase.

Ahora, la ecuación (2.10) indica que para obtener la transformada de Fourier exacta de la función de transmitancia  $A_1(\xi, \eta)$ , se debe cumplir

$$\frac{1}{f_{FR}} + \frac{Z}{f^2} - \frac{1}{f} = 0,$$

resolviendo para  $Z$ ,

$$Z = f - \underbrace{\frac{f^2}{f_{FR}}}_{Z_{opt}}. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) indica que cuando se utiliza una CVPL el plano de observación se desplaza a una distancia  $Z_{opt} = -\frac{f^2}{f_{FR}}$  a partir del plano focal de la lente. El signo de la focal de Fresnel indicaría si se debe observar a una distancia  $Z_{opt}$  anterior o posterior a  $f$ .

El campo óptico generado por una CSPP en el plano focal de la lente será entonces equivalente al obtenido usando la CVPL solo si este es observado a una distancia  $Z_{opt}$  a partir del plano focal de dicha lente. Bajo esta condición, resolviendo la integral (2.9) (o la (2.10)), cuando el término de fase cuadrática de la exponencial dentro de la integral se hace cero se encuentra que la forma funcional del campo para una máscara de fase continua en el respectivo plano de observación de coordenadas polares  $(\rho, \beta)$  va estar dada por [7]:

$$U(\rho, \beta) = \frac{e^{jk(f+Z)}kw^2\pi^{1/2}}{4f} j^{-(\ell+1)} e^{j\ell\beta} e^{-\frac{\vartheta^2}{2}} \vartheta \left[ I_{(\frac{\ell-1}{2})} \left( \frac{\vartheta^2}{2} \right) - I_{(\frac{\ell+1}{2})} \left( \frac{\vartheta^2}{2} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Siendo  $I_n(x)$  las funciones de Bessel modificadas y  $\vartheta = \frac{k\rho w}{2f}$ . Haces de este tipo son llamados vórtices Kummer [7], en la Figura (2.2), se muestra las correspondientes distribuciones de intensidad y fase obtenidas luego de tomar el módulo cuadrado y el argumento de éste campo. El respectivo perfil de intensidad puede ser visto en la Figura (2.3).

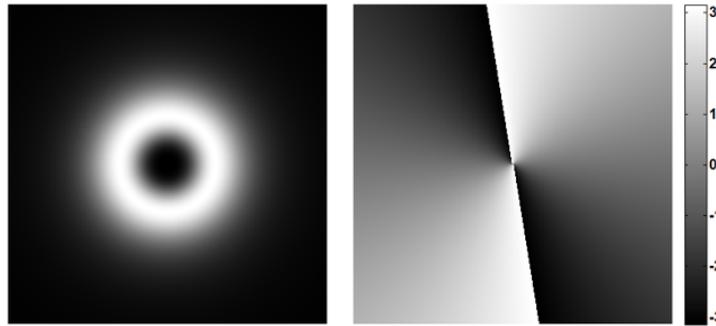


Figura 2.2: Distribución de intensidad y fase de un campo óptico generado con una CSPP (o CVPL) en el plano de observación, con  $\ell = 2$ ,  $f = 200$  mm,  $f_{FR} = 1$  m,  $w = 3$  mm y  $\lambda = 532$  nm.

La ecuación (2.12) da cuenta del campo óptico obtenido a partir del uso de CSPPs o a partir de una CVPLs en la adecuada posición  $Z_{opt}$ . Ahora veamos que sucede cuando se discretizan las máscaras de fase siguiendo un procedimiento análogo al planteado por Rummi et al [32].

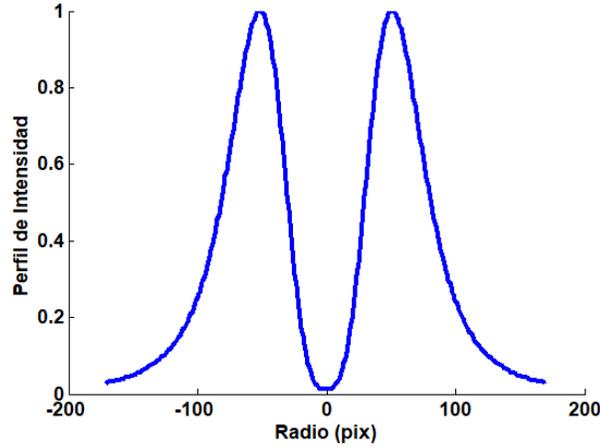


Figura 2.3: Perfil de intensidad tomado sobre una línea en el eje vertical que pasa por el centro del vórtice de la Figura (2.2).

## 2.2. Máscaras de fase discretizadas

En esta sección se mostrarán los efectos en la forma funcional del campo cuando una SPP y una VPL son discretizadas con  $N$  niveles de fase, para ello se consideran variaciones en fase cada  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$  con ancho angular de  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{\ell N}$ , es decir, como función del ángulo azimutal  $\theta$ , la fase se mantiene constante en un intervalo  $\Delta\theta$  y después da un salto  $\Delta\phi$ . Si la posición angular  $\theta$  avanza en un intervalo de 0 a  $2\pi$ , se produce un incremento total en la fase de  $2\pi\ell$  en  $\ell N$  pasos.

### 2.2.1. Discretización de una SPP

Supongamos que la fase  $\phi(\theta)$  de una DSPP puede ser escrita de la siguiente forma [32]:

$$\phi(\theta) = \exp \left[ j\Delta\phi \text{floor} \left( \frac{\theta}{\Delta\theta} \right) \right],$$

por tanto:

$$\phi(\theta) = \exp \left[ j \left( \frac{2\pi}{N} \right) \text{floor} \left( \frac{N\ell\theta}{2\pi} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Donde la función  $\text{floor}(x)$  devuelve el valor entero más cercano menor o igual a  $x$ . Ahora, asumiendo que  $\phi(\theta)$  puede ser descompuesto en una base de cargas topológicas  $m$ :

$$\phi(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\theta}, \quad (2.14)$$

cada  $C_m$  viene dado por:

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) e^{-jm\theta} d\theta. \quad (2.15)$$

La descomposición en la base de Fourier representa la fase total de la DSPP como una combinación lineal de fases ideales  $e^{im\theta}$  pesadas con  $C_m$ , por tanto, la contribución de cada componente a la intensidad total es  $I_m \approx |C_m|^2$ . Para determinar el peso de cada componente se resolverá la integral dada en (2.15) usando la ecuación (2.13):

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[ j \left( \frac{2\pi}{N} \right) \text{floor} \left( \frac{N\ell\theta}{2\pi} \right) \right] e^{-jm\theta} d\theta. \quad (2.16)$$

Para resolver la integral anterior se necesita conocer los valores que toma la función  $\text{floor} \left( \frac{N\ell\theta}{2\pi} \right)$  para  $\theta$  variando entre 0 y  $2\pi$  con cambios  $\Delta\theta$  hasta  $\ell N$ .

$$\text{floor} \left( \frac{N\ell\theta}{2\pi} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \theta < \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right), \\ 1 & \text{si } \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right) \leq \theta < 2 \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right), \\ 2 & \text{si } 2 \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right) \leq \theta < 3 \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right), \\ \vdots & \\ \vdots & \\ k & \text{si } k \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right) \leq \theta < (k+1) \left( \frac{2\pi}{\ell N} \right). \end{cases} \quad (2.17)$$

El máximo valor en fase es de  $\ell N$ , por tanto, el máximo valor que puede tener  $k$  es:  $k_{max} = \ell N - 1$ , esto indica que  $0 \leq k < \ell N$ .

Teniendo en cuenta la ecuación (2.17), la ecuación (2.16) puede reescribirse como:

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\ell N-1} e^{j \left( \frac{2\pi}{N} \right) k} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{-jm\theta} d\theta. \quad (2.18)$$

Donde  $a = \frac{2\pi}{\ell N}$ . Sea  $\theta' = \frac{\theta}{a}$ , por tanto:

$$ad\theta' = d\theta, \quad \theta = ka \rightarrow \theta' = k, \quad \theta = (k+1)a \rightarrow \theta' = k+1,$$

así la integral en (2.18) es:

$$\int_{ka}^{(k+1)a} e^{-jm\theta} d\theta = a \int_k^{(k+1)} e^{-jam\theta'} d\theta' = a \left[ \frac{e^{-j(1+k)am} (e^{jam} - 1)}{jam} \right].$$

El término entre corchetes se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-j(1+k)am} (e^{jam} - 1)}{jal} &= e^{-j(1+k)am} e^{j\frac{am}{2}} \frac{(e^{j\frac{am}{2}} - e^{-j\frac{am}{2}})}{2j\frac{am}{2}} = e^{-j(1+k)am} e^{j\frac{am}{2}} \frac{\sin \left( \frac{am}{2} \right)}{\frac{am}{2}} \\ &= e^{-\frac{j2\pi mk}{\ell N}} e^{-\frac{j2\pi m}{2\ell N}} \frac{\sin \left( \frac{2\pi m}{2\ell N} \right)}{\frac{2\pi m}{2\ell N}} = e^{-\frac{j2\pi mk}{\ell N}} e^{-\frac{j\pi m}{\ell N}} \text{sinc} \left( \frac{m}{\ell N} \right). \end{aligned}$$

Siendo  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ . Por tanto

$$\int_{ka}^{(k+1)a} e^{-jm\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\ell N} e^{-\frac{j2\pi m}{\ell N}(k+\frac{1}{2})} \text{sinc}\left(\frac{m}{\ell N}\right). \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.18):

$$C_m = \frac{e^{-\frac{j\pi m}{\ell N}}}{\ell N} \text{sinc}\left(\frac{m}{\ell N}\right) \sum_{k=0}^{\ell N-1} e^{j2\pi k(\frac{\ell-m}{\ell N})}. \quad (2.20)$$

Miremos que sucede con el término de la sumatoria. Sea  $t$  un número entero, si  $\frac{\ell-m}{\ell N} = t$ , entonces  $e^{j2\pi kt} = (e^{j2\pi})^{kt}$ ; como  $kt$  es número entero  $(e^{j2\pi})^{kt} = (1)^{kt}$  y el término de la sumatoria se reduciría a:  $\sum_{k=0}^{\ell N-1} e^{j2\pi kt} = \sum_{k=0}^{\ell N-1} (1)^{kt} = \ell N$ . Ahora, si  $\frac{\ell-m}{\ell N} = t + \frac{1}{2}$  (número no entero), se tendría que  $e^{j2\pi k(t+\frac{1}{2})} = (e^{j2\pi})^{kt} (e^{j\pi})^k = (1)^{kt} (-1)^k$ , así la sumatoria sería:  $\sum_{k=0}^{\ell N-1} e^{j2\pi k(t+\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{\ell N-1} (1)^{kt} (-1)^k = 0$ . Con estos resultados se encuentra que los coeficientes  $C_m$  pueden ser escritos como:

$$C_m = \begin{cases} e^{-\frac{j\pi m}{\ell N}} \text{sinc}\left(\frac{m}{\ell N}\right) & \text{si } \ell - m \text{ es múltiplo de } \ell N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.21)$$

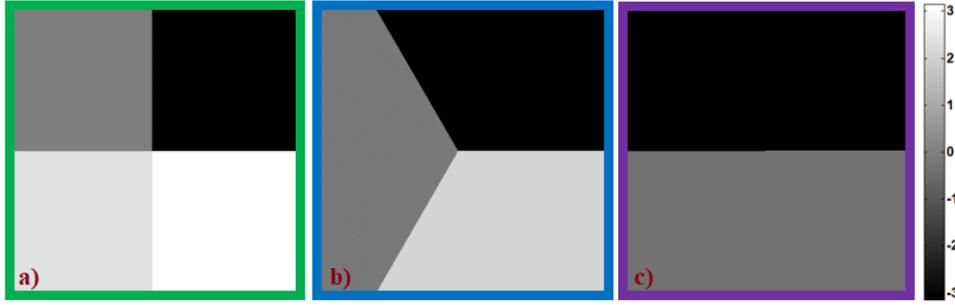
El haz resultante estará compuesto de vórtices con diferentes cargas topológicas, dónde cada carga estará pesada por su correspondiente coeficiente  $C_m$ . Teniendo en cuenta que  $\ell - m$  debe ser múltiplo entero de  $\ell N$ , para que  $C_m$  sea diferente de cero, solo pueden sobrevivir los términos en la sumatoria para los cuales  $m = \ell(1 + Nt)$ , con  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ <sup>1</sup>, por tanto, a partir de una carga topológica  $\ell$ , se pueden generar diferentes cargas topológicas  $m$  cuyo valor va a depender de los parámetros  $N$  y  $t$ . Usando este resultado se llega a:

$$\phi(\theta) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(1+Nt)}{N}} e^{j\ell(1+Nt)\theta} \text{sinc}\left(\frac{(1+Nt)}{N}\right). \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22), representa la función de transmisión de una DSPP con  $N$  niveles de fase, en la Figura (2.4) se puede ver como es su distribución para diferentes valores de  $N$ .

Ahora miremos la función de transmisión de una DVPL.

<sup>1</sup>Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, para no invertir signos en sumatoria y teniendo en cuenta que  $t$  es un número entero que toma valores negativos y positivos se definió  $\frac{\ell-m}{\ell N} = -t$


 Figura 2.4: Distribución de fase de una DSPP con niveles: a)  $N = 4$ , b)  $N = 3$  y c)  $N = 2$ .

### 2.2.2. Discretización de una VPL

Para discretizar un VPL además de la discretización de la fase  $\theta$  también se quiere discretizar la dependencia radial asociada a la lente de Fresnel.

Supongamos que la fase de ésta transmitancia puede ser escrita como [32]:

$$\Phi(r, \theta) = \Delta\phi \text{floor} \left[ \frac{1}{\Delta\phi} \left( \ell\theta - \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right) \right] = \frac{2\pi}{N} \text{floor} \left[ \frac{N}{2\pi} \left( \ell\theta - \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Como la fase es periódica en  $\theta$  la función de transmisión  $e^{j\Phi(r, \theta)}$  puede expandirse en una serie de Fourier con dependencia radial de sus coeficientes:

$$e^{j\Phi(r, \theta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m(r) e^{jm\theta}, \quad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned} t_m(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\Phi(r, \theta)} e^{-jm\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{j2\pi}{N} \text{floor} \left( \frac{N}{2\pi} \left( \ell\theta - \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right) \right) \right] e^{-jm\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sea  $\tilde{\theta} = \frac{N}{2\pi} \left( \ell\theta - \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right)$ ,

$$\theta = \frac{1}{\ell} \left( \frac{2\pi}{N} \tilde{\theta} + \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right), \quad d\theta = \frac{2\pi}{\ell N} d\tilde{\theta}, \quad \theta = 0 \rightarrow \tilde{\theta} = -\frac{kr^2}{2f_{FR}}, \quad \theta = 2\pi \rightarrow \tilde{\theta} = \ell N - \frac{kr^2}{2f_{FR}},$$

de este modo:

$$t_m(r) = \frac{1}{\ell N} \int_{-\frac{kr^2}{2f_{FR}}}^{\ell N - \frac{kr^2}{2f_{FR}}} \exp \left[ \frac{j2\pi}{N} \text{floor}(\tilde{\theta}) \right] \exp \left[ -\frac{jm}{\ell} \left( \frac{2\pi}{N} \tilde{\theta} + \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right) \right] d\tilde{\theta}.$$

Con un procedimiento análogo al realizado para la ecuación (2.17), se puede mostrar que la función floor  $(\tilde{\theta})$  toma valores constantes para  $k \leq \tilde{\theta} < k + 1$ , Por tanto, los coeficientes  $t_m(r)$  dados en (2.25) quedan determinados por:

$$t_m(r) = \frac{1}{\ell N} e^{-\frac{m}{\ell} \frac{jk r^2}{2f_{FR}}} \sum_{k=0}^{\ell N-1} e^{\frac{j2\pi k}{N}} \int_k^{k+1} e^{-\frac{j2\pi m \tilde{\theta}}{\ell N}} d\tilde{\theta}. \quad (2.26)$$

Y la anterior integral puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\int_k^{k+1} e^{-\frac{j2\pi m \tilde{\theta}}{\ell N}} d\tilde{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[ \tilde{\theta} - \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-j2\pi \left( \frac{m}{\ell N} \right) \tilde{\theta}} d\tilde{\theta}.$$

Esta expresión corresponde a la transformada de Fourier de una función rect  $(\tilde{\theta})$  desplazada en  $(k + \frac{1}{2})$ . Así,

$$\int_k^{k+1} e^{-\frac{j2\pi m \tilde{\theta}}{\ell N}} d\tilde{\theta} = \text{sinc} \left( \frac{m}{\ell N} \right) e^{-\frac{j2\pi m}{\ell N} \left( k + \frac{1}{2} \right)}. \quad (2.27)$$

Sustituyendo (2.27) en (2.26) se llega a:

$$t_m(r) = \frac{1}{\ell N} e^{-\frac{m}{\ell} \frac{jk r^2}{2f_{FR}}} e^{-\frac{j\pi m}{\ell N}} \text{sinc} \left( \frac{m}{\ell N} \right) \sum_{k=0}^{\ell N-1} e^{-j2\pi k \left( \frac{\ell-m}{\ell N} \right)}. \quad (2.28)$$

Nuevamente, la sumatoria de la ecuación (2.28) toma valores distintos de cero e igual a  $\ell N$  solo cuando  $\ell - m$  es múltiplo de  $\ell N$ . Por tanto:

$$t_m(r) = \begin{cases} e^{-\frac{m}{\ell} \frac{jk r^2}{2f_{FR}}} e^{-\frac{j\pi m}{\ell N}} \text{sinc} \left( \frac{m}{\ell N} \right) & \text{si } \ell - m \text{ es múltiplo de } \ell N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Comparando las ecuaciones (2.21) y (2.29) se encuentra que cuando se usan DVPLs aparece un término adicional de fase cuadrática análogo a la fase de una lente con longitud focal efectiva:  $f_{m\ell} = \frac{\ell}{m} f_{FR}$ . La función de transmitancia estaría dada por:

$$e^{j\Phi(r,\theta)} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{\ell} \frac{jk r^2}{2f_{FR}}} e^{-\frac{j\pi(1+Nt)}{N}} \text{sinc} \left( \frac{(1+Nt)}{N} \right) e^{j\ell(1+Nt)\theta}. \quad (2.30)$$

En la Figura (2.5) se muestra la distribución de fase de dicha función de transmitancia para distintos valores de N. Las ecuaciones (2.22) y (2.30) indican como son las funciones de transmitancia de una DSPP y una DVPL, respectivamente, en términos

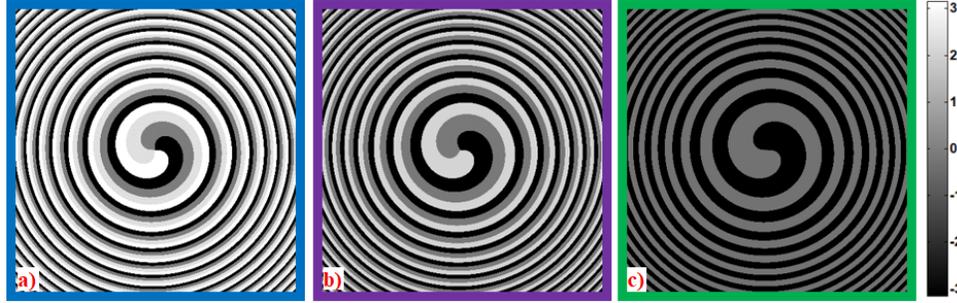


Figura 2.5: Distribución de fase de una DVPL con niveles: a)  $N = 4$ , b)  $N = 3$  y c)  $N = 2$ .

de los parámetros  $N$  y  $t$ . Así mismo, el módulo de las ecuaciones (2.21) y (2.29) indican que tanto aporta cada peso estadístico de orden  $t$  a la distribución de intensidad. Tomando el módulo en ambas ecuaciones se tiene en particular que  $|C_m|^2 = |t_m|^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{Nt+1}{N}\right)$ , que en términos de  $m$  lo podemos reescribir como  $\text{sinc}^2\left(\frac{m}{\ell N}\right)$ . Ahora consideremos dos situaciones para la distribución de la intensidad, en la primera consideremos un valor  $m/\ell$  fijo (constante) y observemos que pasa con la distribución de energía (ver Figura (2.6a)) y un segundo caso en el cual para valores fijos de  $N$  se varía el parámetro  $t$ , lo que es equivalente a modificar los valores de carga topológica  $m$  (ver Figura (2.6b)). En  $t = 0$  diremos que se tiene la carga “principal”  $\ell$  ( $m = \ell$ ) y a los otros ordenes  $t \neq 0$  las cargas “secundarias”  $m$ . La Figura de la izquierda muestra

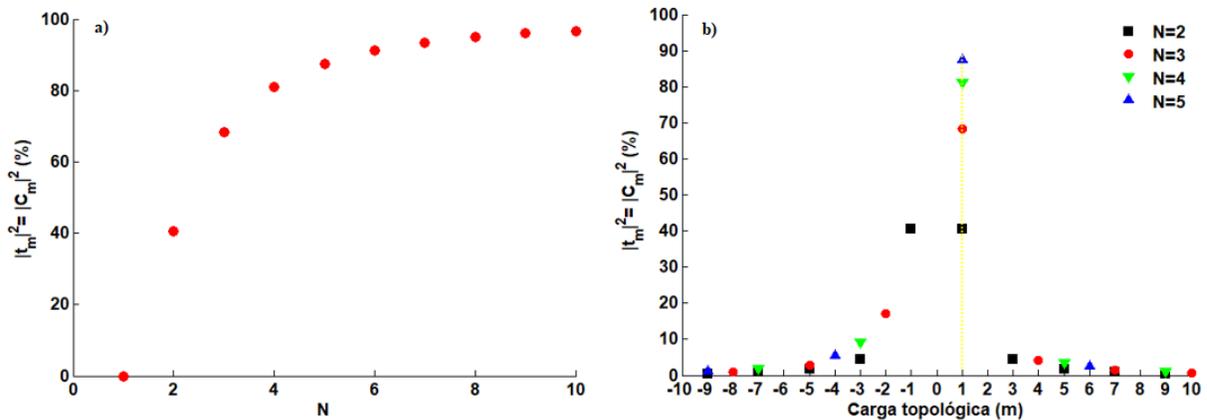


Figura 2.6: Porcentaje de energía correspondiente a cada vórtice cuando se varía: a) los niveles de discretización  $N$  manteniendo  $m/\ell = 1$  y b) la carga topológica  $m$  con distintos niveles de discretización  $N$ . La línea amarilla indica la carga principal  $\ell = 1$  programada en la máscara de fase.

el porcentaje de energía que, en este caso particular  $m = \ell = 1$  le correspondería a esa carga principal. Se puede ver que para  $N = 2$  solo el 40% de la energía va a este orden y que a medida que se aumentan los niveles de discretización, el porcentaje de

energía disponible para la carga principal también incrementa. Pero, ¿qué pasa con el resto de energía que no va al orden principal?... la Figura de la derecha justamente complementa a la de la izquierda, dando cuenta que la energía restante se distribuye en los otros ordenes  $t$  correspondientes a las cargas secundarias  $m$ . En particular para  $N=2$ , se presenta una relación de simetría de intensidad entre las cargas positivas y negativas siendo en este caso las cargas  $m = -1$  y  $m = \ell = 1$  (carga principal) los más energéticos con 40 % de la energía cada uno. En la Figura (2.7) que corresponde a un corte axial de intensidad a lo largo del eje de propagación, se puede ver dicha relación. Note la relación de simetría respecto al plano focal de la lente física  $Z_t = 200$  mm.

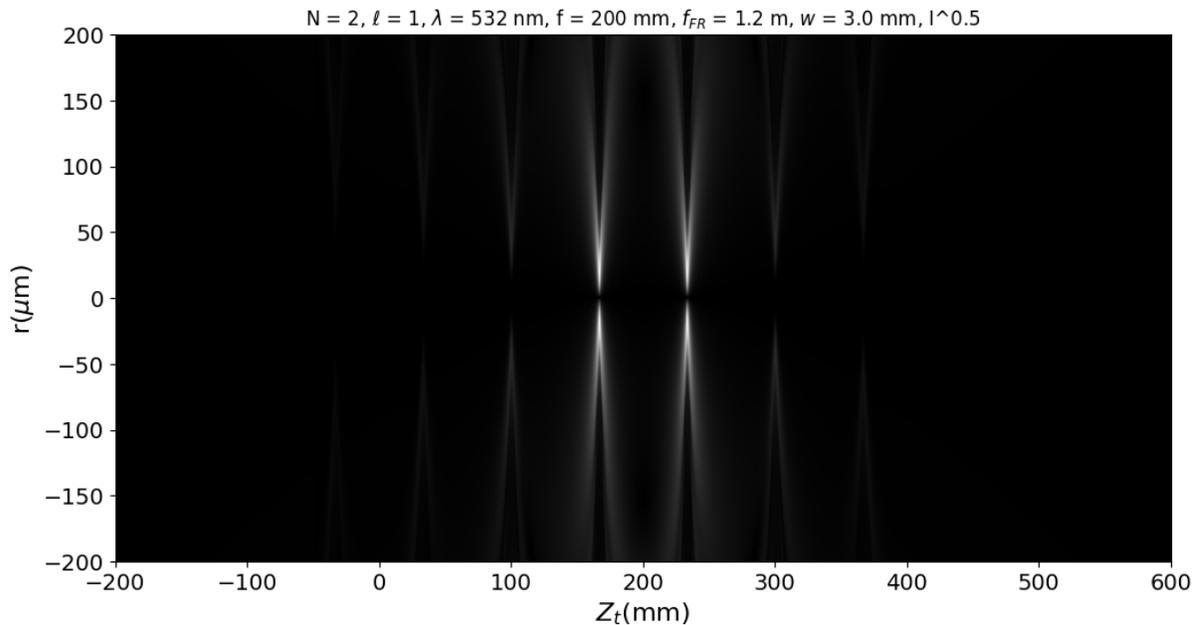


Figura 2.7: Corte axial de la propagación de vórtices generados con una DVPL para:  $N=2$ ,  $\ell =1$ ,  $f=200$  mm,  $f_{FR}= 1.2$  m, radio de haz  $w=5$  mm y longitud de onda de  $\lambda=532$  nm. Para mejor visualización se ha tomado una  $n$ -ésima raíz de la intensidad.  $Z_t$  corresponde a la posición a lo largo del eje de propagación y  $r$  es el radio respecto a éste eje. .

Por otro lado, a medida que se incrementan los niveles de discretización la mayor cantidad de energía recae sobre la carga principal, entonces va disminuyendo la cantidad de energía en las cargas secundarias; para  $N=5$  como el 90 % de la energía recae en el orden principal, solo el 10 % restante se distribuiría en los ordenes secundarios.

Conociendo ya la forma funcional de estas funciones de transmitancia discretizadas y la posibilidad de obtener, con determinado porcentaje de energía dependiente de  $N$ , cargas topológicas  $m$  diferentes a la programada inicialmente, por propagación de Fresnel en el espacio libre veamos como es la forma funcional del campo óptico resultante al usar este tipo de máscaras de fase.

## 2.3. Propagación en el espacio libre de funciones de transmitancia discretizadas

En la sección (2.1) analizando propagación en el espacio libre de una CSPP y una CVPL iluminadas con haz gaussiano en línea, se encontró que el campo óptico producido por la CSPP en el plano focal de la lente, sería igual al que produce la CVPL a una distancia  $Z_{opt}$  medida a partir de ese plano focal. En esta sección se analizará como se modifica la propagación del campo cuando se utilizan como máscaras de fase las presentadas en la sección (2.2).

### 2.3.1. Campo óptico generado con una SPP discretizada

Considerando que el campo inicial  $U_1$  a propagar corresponde a la función de transmitancia mostrada en la ecuación (2.22), en coordenadas polares éste campo puede ser escrito como:

$$U_1(r, \theta) = e^{-\frac{r^2}{w^2}} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \operatorname{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) e^{j\ell(Nt+1)\theta}. \quad (2.31)$$

Siendo  $(r, \theta)$  las coordenadas en el plano de entrada. Sustituyendo (2.31) en (2.8), se encuentra que el campo a una distancia  $Z$  de propagación a partir de la lente física puede ser escrito de la siguiente manera:

$$U(\rho, \beta) = \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_1(r, \theta) e^{\frac{jkr^2}{2f}(1-\frac{Z}{f})} e^{-\frac{jkr\rho}{f} \cos(\theta-\beta)} r dr d\theta,$$

$$U(\rho, \beta) = \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \operatorname{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) \\ \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{j\ell(Nt+1)\theta} e^{\frac{jkr^2}{2f}(1-\frac{Z}{f})} e^{-\frac{jkr\rho}{f} \cos(\theta-\beta)} r dr d\theta.$$

Donde  $(\rho, \beta)$  representan las coordenadas en el plano de observación. Así,

$$U(\rho, \beta) = \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \operatorname{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{\frac{jkr^2}{2}\left(\frac{1}{f}-\frac{Z}{f^2}\right)} \\ \times \left[ \int_0^{2\pi} e^{j\ell(Nt+1)\theta} e^{-\frac{jkr\rho}{f} \cos(\theta-\beta)} d\theta \right] r dr. \quad (2.32)$$

Sea  $\alpha = \beta - \theta + 2\pi$  y  $m = \ell(Nt+1)$ , entonces la integral entre corchetes queda:

$$\int_0^{2\pi} e^{jm\theta} e^{-\frac{jkr\rho}{f} \cos(\theta-\beta)} d\theta = e^{\frac{j\pi 3m}{2}} e^{jm\beta} \int_\beta^{\beta+2\pi} e^{-jm(\alpha-\pi/2)} e^{-\frac{jkr\rho}{f} \cos(\alpha)} d\alpha.$$

Como se tiene dentro del integrando una función periódica en  $\alpha$  ( $f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha)$ ), los límites pueden ser cambiados entre 0 y  $2\pi$ . Además, usando la siguiente relación [35]:

$$J_m(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jm(\phi-\pi/2)} e^{-ja \cos(\phi)} d\phi, \quad (2.33)$$

se llega a:

$$\int_0^{2\pi} e^{jm\theta} e^{-\frac{jk\rho}{f} \cos(\theta-\beta)} d\theta = \underbrace{e^{\left(\frac{j\pi}{2}\right)^{3m}}}_{=j^{3m}} e^{jm\beta} 2\pi J_m\left(\frac{k\rho}{f}\right). \quad (2.34)$$

Llevando (2.34) a (2.32), se tiene:

$$U(\rho, \beta) = e^{jk(f+Z)} \frac{k}{f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi m}{\ell N}} \text{sinc}\left(\frac{m}{\ell N}\right) j^{3m-1} e^{jm\beta} \times \left\{ \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{\frac{jk r^2}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2}\right)} J_m\left(\frac{k r \rho}{f}\right) dr \right\}. \quad (2.35)$$

Usando la definición de la transformada de Hankel de orden  $k$  [35]:

$$\mathcal{H}_k(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_k(r\rho) dr, \quad (2.36)$$

el campo en el plano de salida puede ser expresado por:

$$U(\rho, \beta) = e^{jk(f+Z)} \frac{k}{f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) j^{3\ell(Nt+1)-1} e^{j\ell(Nt+1)\beta} \times \mathcal{H}_k\left(\frac{k\rho}{f}\right) \left\{ e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{\frac{jk r^2}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2}\right)} \right\}. \quad (2.37)$$

Para  $Z = f$  el campo a la salida es proporcional a la transformada de Hankel del haz Gaussiano (haz inicial) acompañada por una fase  $e^{j\ell(Nt+1)\beta}$  y unos términos constantes.

Ahora sea  $b = \frac{1}{w^2} - \frac{jk}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2}\right)$ , además el término  $j^{3m-1} = \frac{(-j)^m}{j} = j^{-(m+1)} = j^{-(\ell(Nt+1)+1)}$ . Resolviendo la transformada de Hankel se llega a:

$$U(\rho, \beta) = e^{jk(f+Z)} \frac{k\pi^{1/2}}{f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) j^{-(\ell(Nt+1)+1)} e^{j\ell(Nt+1)\beta} \times e^{-\frac{(k\rho/f)^2}{8b}} \frac{(k\rho/f)}{8b^{3/2}} \left[ I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)-1}{2}\right)}\left(\frac{(k\rho/f)^2}{8b}\right) - I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)+1}{2}\right)}\left(\frac{(k\rho/f)^2}{8b}\right) \right]. \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) representa la forma funcional del campo óptico generado a partir de una DSPP. Para todos los valores de  $N$  y  $t$  los vórtices se forman en el plano focal de la lente, es decir, en el plano de observación el vórtice resultante será una superposición de todos los ordenes  $t$  que llegan a esa posición. La correspondiente distribución de fase e intensidad con diferentes  $N$  puede ser vista en la Figura (2.8) considerando solo términos en la expansión de la sumatoria de  $-10 \leq t \leq 10$ .

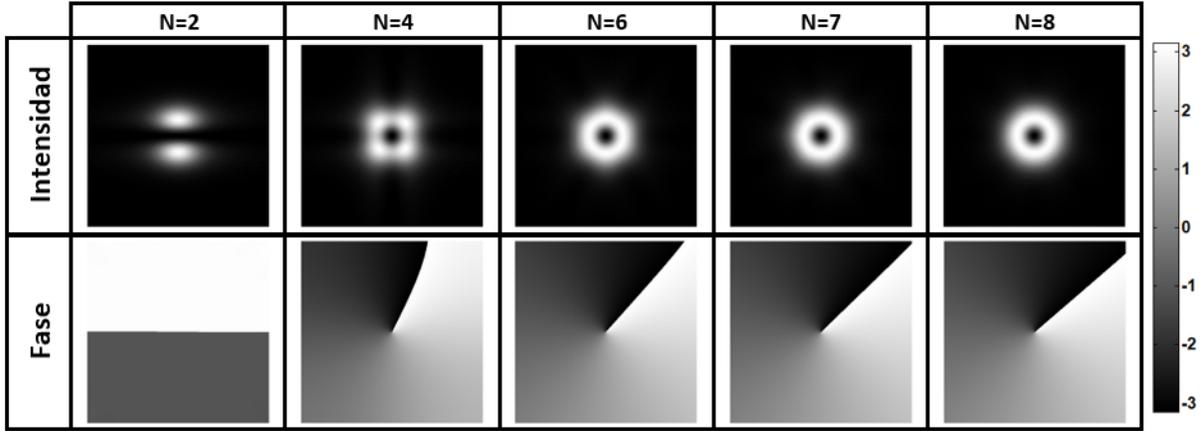


Figura 2.8: Distribución de fase e intensidad del campo óptico generado con una DSPP, con  $w = 3.0$  mm,  $f = 200$  mm,  $f_{FR} = 1000$  mm,  $\ell = 1$ ,  $\lambda = 532$  nm.

Los resultados están acordes a los trabajos computacionales dados en [36,37] donde indican que usando una DSPP la distribución de intensidad depende de los niveles de discretización, y del resultado experimentalmente obtenido por Zhang et al. [38] que indica que solo se puede tener una distribución de intensidad adecuada (en forma de dona) si  $N \geq 6$ .

### 2.3.2. Campo óptico generado con una VPL discretizada

Ahora consideremos que el campo inicial  $U_1$  a propagar corresponde a la función de transmitancia mostrada en la ecuación (2.30), en coordenadas polares éste campo puede ser escrito como:

$$U_1(r, \theta) = e^{-\frac{r^2}{w^2}} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-(Nt+1)\frac{jk r^2}{2f_{FR}}} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) e^{j\ell(Nt+1)\theta}. \quad (2.39)$$

En coordenadas polares, se tiene que el campo a una distancia  $Z$  a partir de la lente física es descrito por:

$$U(\rho, \beta) = \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \operatorname{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{\frac{jkr^2}{2}\left(-\frac{(Nt+1)}{f_{FR}} + \frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2}\right)} \left[ \int_0^{2\pi} e^{j\ell(Nt+1)\theta} e^{-\frac{jkr\rho}{f} \cos(\theta-\beta)} d\theta \right] r dr. \quad (2.40)$$

Reduciendo esta expresión de forma análoga al caso anterior, se tiene que el campo a la salida esta dado por:

$$U(\rho, \beta) = e^{jk(f+Z)} \frac{k}{f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \operatorname{sinc}\left(\frac{(Nt+1)}{N}\right) j^{-(m(Nt+1)+1)} e^{j\ell(Nt+1)\beta} \times \mathcal{H}_k\left(\frac{k\rho}{f}\right) \left\{ e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{\frac{jkr^2}{2}\left(-\frac{(Nt+1)}{f_{FR}} + \frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2}\right)} \right\}.$$

Para cada término  $t$  existe un  $Z_t = f - \frac{(Nt+1)f^2}{f_{FR}}$  para el cuál el campo a la salida es proporcional a la transformada de Hankel del haz Gaussiano (haz inicial) acompañada por una fase  $e^{j\ell(Nt+1)\beta}$  (y otros términos constantes). En planos ubicados a distancias  $Z_t$  se tiene la transformada de Fourier del  $t$ -ésimo término, por tanto, a diferencia de la DSPP, cuando se usa una DVPL se tendría un arreglo multifocal de vórtices ópticos sobre el eje de propagación.

Ahora sea  $b_t = \frac{1}{w^2} - \frac{jk}{2} \left( -\frac{(Nt+1)}{f_{FR}} + \frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2} \right)$ . Resolviendo la transformada de Hankel se llega a:

$$U(\rho, \beta) = e^{jk(f+Z)} \frac{k\pi^{1/2}}{f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \operatorname{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) j^{-(\ell(Nt+1)+1)} e^{j\ell(Nt+1)\beta} \times e^{-\frac{(k\rho/f)^2}{8b_t}} \frac{(k\rho/f)}{8b_t^{3/2}} \left[ I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)-1}{2}\right)}\left(\frac{(k\rho/f)^2}{8b_t}\right) - I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)+1}{2}\right)}\left(\frac{(k\rho/f)^2}{8b_t}\right) \right]. \quad (2.41)$$

La distribución de fase e intensidad para éste campo puede ser visto en la Figura (2.9) dónde nuevamente, sin pérdida de generalidad, solo se consideraron términos en la expansión en el rango  $-10 \leq t \leq 10$ .

Se puede ver que, tal como lo habíamos demostrado experimentalmente en la Ref [15], con una DVPL incluso con dos niveles de discretización, se puede obtener una distribución de intensidad ideal. Sabemos que a diferencia de la DSPP, en este caso al incrementar  $N$  no se va a ver afectada la forma de dona del patrón de intensidad, solo

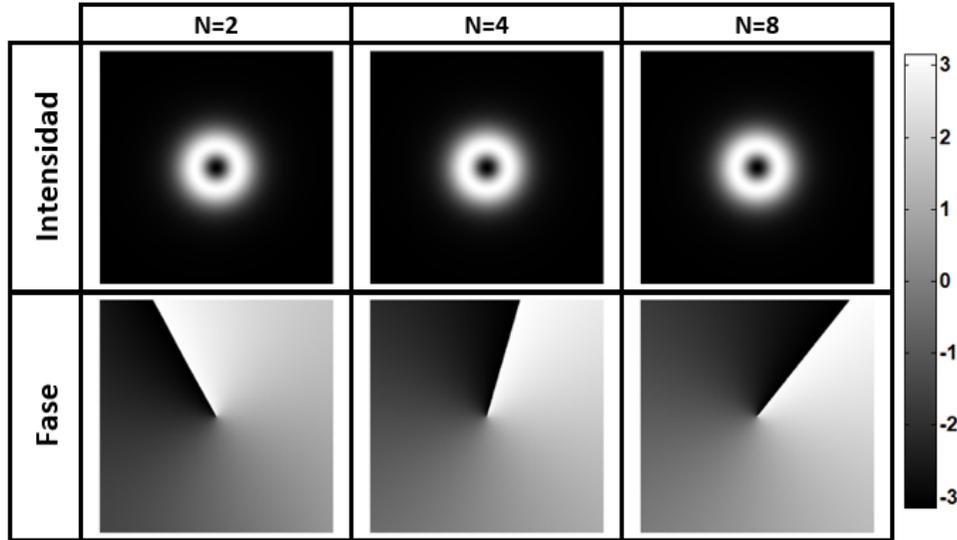


Figura 2.9: Distribución de fase e intensidad del campo óptico generado con una DVPL, con  $w = 3.0$  mm,  $f = 200$  mm,  $f_{FR} = 1000$  mm,  $\ell = 1$ ,  $\lambda = 532$  nm.

hay igual variación sobre el porcentaje de energía que le corresponde a cada orden. Por otro lado, el incremento de los niveles de discretización parece producir una especie de rotación de la línea de singularidad de la fase, efecto asociado a los argumentos dentro de las exponenciales dependientes de  $N$ .

Aunque la expresión matemática dada en (2.38) parece análoga a la mostrada en (2.41), hay una enorme diferencia entre los dos casos, esta diferencia está contenida en los parámetros  $b$  y  $b_t$  y radica en el hecho de que con una DSPP solo se tiene un plano de observación en el que se forman los vórtices (hay una superposición en un mismo plano), mientras que con una DVPL, tal y como lo mostraron en la Ref. [32], se genera un arreglo multifocal de vórtices sobre el eje de propagación de modo que a determinados planos de observación, vórtices ópticos con diferentes cargas topológicas  $m$  pueden ser observados. De ahora en adelante al vórtice obtenido en el orden  $t = 0$  lo llamaremos vórtice principal, en este caso  $m = \ell$ , mientras que a los obtenidos a otros ordenes  $m \neq \ell$  los llamaremos vórtices ópticos secundarios (SOVs, por sus siglas en inglés).

Los resultados obtenidos hace más interesante estudiar el campo óptico generado a partir de DVPLs, por tal motivo, de ahora en adelante nos enfocaremos más en el análisis de VOs y SOVs generados con este tipo de máscara. Para ello primero busquemos una expresión más general para el campo óptico que incluya también desplazamientos fuera del eje del haz de iluminación.

## CAPÍTULO 3

---

# VÓRTICES PRINCIPALES: ANÁLISIS DE INTENSIDAD

---

Aunque sistemas metrológicos basados en las propiedades de distribución de patrones de speckle han sido ampliamente estudiados [39], recientemente ha aumentado el interés por estudiar las características morfológicas de haces tipo Laguerre Gauss y Kummer [24]. Ya es conocido que desplazamientos fuera del eje del haz de iluminación, pueden producir cambios en la simetría de intensidad de vórtices ópticos generados con máscaras de fase continuas. Ahora, en este capítulo se estudiará analítica y experimentalmente los cambios morfológicos de vórtices ópticos tipos Kummer generados con DVPLs cuando hay un movimiento relativo entre el haz Gaussiano de iluminación y el centro de la máscara de fase. Con este fin, se hará un procedimiento análogo al numérico-analítico implementado (utilizando CSPPs) por Anzolín et al. [7] de medir pequeños desplazamientos con base al grado de asimetría de intensidad de un haz vórtice fuera de eje. Nuestro análisis se realizará primero sobre el vórtice principal obtenido con una VPL Binaria (BVPL) (generada con dos niveles) incluyendo resultados tanto analíticos como experimentales de los cambios de asimetría de intensidad del vórtice; en capítulos posteriores se estudiará analíticamente el comportamiento de los vórtices ópticos secundarios. El formalismo matemático nos permite encontrar las diferencias entre el campo óptico obtenido cuando todos los elementos ópticos del sistema, incluyendo el haz de iluminación, están perfectamente alineados respecto al eje óptico de propagación y uno para el cual el haz de iluminación está incidiendo fuera del eje óptico, siendo el eje óptico aquel que pasa por todo el centro de la lente física. La configuración experimental y los resultados de la técnica para cargas topológicas desde  $\ell = 1$  hasta  $\ell = 5$  son completamente detallados.

### 3.1. Efectos de desplazamientos fuera del eje óptico del haz Gaussiano

En el capítulo 2, se encontró que la forma funcional del campo óptico generado por una CSPP, con todo el sistema óptico alineado está dada por

$$U(\rho, \beta) = \frac{e^{jk(f+Z)}kw^2\pi^{1/2}}{4f} j^{-(\ell+1)} e^{j\ell\beta} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \vartheta \left[ I_{(\frac{\ell-1}{2})} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) - I_{(\frac{\ell+1}{2})} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Ahora, veamos como es la expresión para el campo óptico cuando se usa como máscara de fase una DVPL con iluminación fuera de eje.

Para un haz Gaussiano que incide perpendicularmente sobre una DVPL en la posición  $(r_{off}, \theta_{off})$  por fuera del eje óptico (ver Figura (3.1)), el campo de entrada va estar dado por

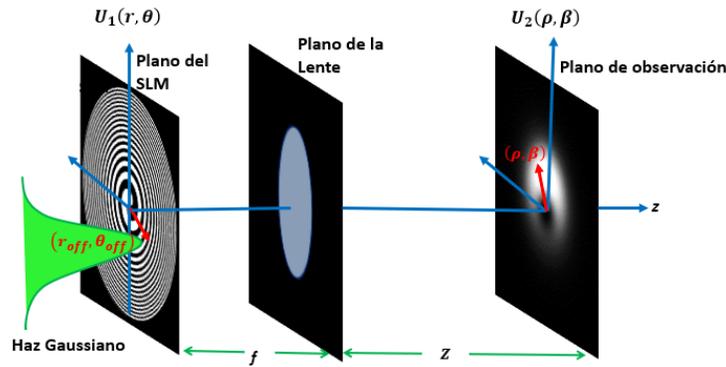


Figura 3.1: Planos de propagación de un haz vórtice con el haz Gaussiano fuera del eje óptico.

$$U_1(r, \theta) = e^{-\frac{r'^2}{w^2}} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-(Nt+1)\frac{jk r^2}{2fFR}} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc} \left( \frac{Nt+1}{N} \right) e^{j\ell(Nt+1)\theta}. \quad (3.2)$$

De la Figura (3.2), se puede ver que  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{off}$ . Por tanto,  $r'^2 = r^2 + r_{off}^2 - 2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off})$ . Sean  $(\xi, \eta)$  y  $(x, y)$  las coordenadas cartesianas del plano del modulador y del plano de observación, respectivamente. Pasando a coordenadas polares se cumple que  $\xi = r \cos(\theta)$ ,  $\eta = r \sin(\theta)$ ,  $x = \rho \cos(\beta)$  y  $y = \rho \sin(\beta)$ .

Por tanto

$$\exp \left[ -\frac{r'^2}{w^2} \right] = \exp \left[ -\frac{r_{off}^2}{w^2} \right] \exp \left[ -\frac{(r^2 - 2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off}))}{w^2} \right].$$

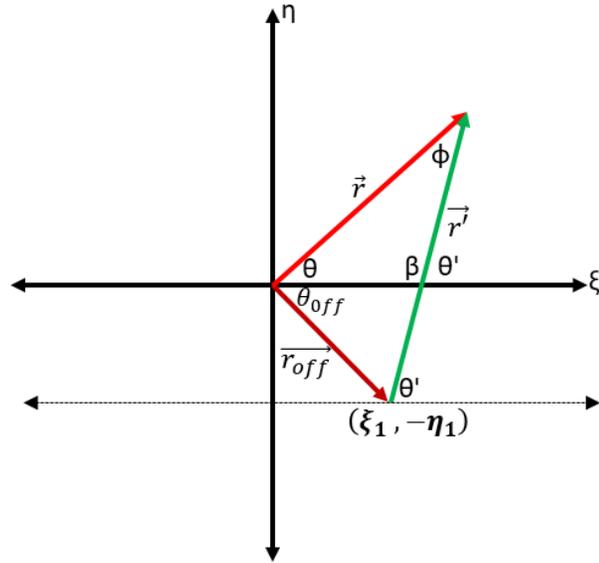


Figura 3.2: Cambio de coordenadas.

Recordando la ecuación (2.8) (ahora en coordenadas polares) y usando la relación  $m = \ell(Nt + 1)$ , en el plano de observación el campo estaría dado por<sup>1</sup>

$$U_2(\rho, \beta) = e^{-\frac{r_{off}^2}{w^2}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp \left[ -r^2 \underbrace{\left( \frac{1}{w^2} - \frac{jk}{2} \left( -\frac{(Nt+1)}{f_{FR}} + \frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2} \right) \right)}_{b_t} \right] r \\ \times e^{\frac{2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off})}{w^2}} e^{-\frac{jk r \rho}{f} \cos(\theta - \beta)} e^{jm\theta} d\theta dr.$$

Que puede ser reescrito como

$$U_2(\rho, \beta) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-b_t r^2} r \exp \left[ - \left( \frac{jk r \rho \cos(\theta - \beta)}{f} - \frac{2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off})}{w^2} \right) \right] \\ \times e^{jm\theta} d\theta dr. \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>Por simplicidad durante el desarrollo del cálculo se van a omitir algunos términos constantes junto con la expresión de la sumatoria, al final del cálculo de la integral se escribirán todos los términos adecuadamente.

El término entre paréntesis de la exponencial es igual a

$$\begin{aligned} \frac{jk\rho r \cos(\theta - \beta)}{f} - \frac{2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off})}{w^2} &= \frac{jkr}{f} \cos(\theta) \left[ \rho \cos(\beta) + \frac{jf}{kw^2} 2r_{off} \cos(\theta_{off}) \right] \\ &+ \frac{jkr}{f} \sin(\theta) \left[ \rho \sin(\beta) - \frac{jf}{kw^2} 2r_{off} \sin(\theta_{off}) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los términos entre corchetes en (3.4) tienen unidades de longitud multiplicadas por factores seno o coseno, así que redefiniendo los términos entre corchetes de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \left[ \rho \cos(\beta) + \frac{jf}{kw^2} 2r_{off} \cos(\theta_{off}) \right] = \gamma \cos(\psi), \\ \left[ \rho \sin(\beta) - \frac{jf}{kw^2} 2r_{off} \sin(\theta_{off}) \right] = \gamma \sin(\psi). \end{cases}$$

Donde  $\gamma$  y  $\psi$  estarían dados por

$$\begin{cases} \gamma^2 = \rho^2 - \frac{4f^2 r_{off}^2}{k^2 w^4} - \frac{4jf\rho r_{off}}{w^2 k} \cos(\beta + \theta_{off}), \\ \tan(\psi) = \frac{\rho \sin(\beta) - \frac{jf}{kw^2} 2r_{off} \sin(\theta_{off})}{\rho \cos(\beta) + \frac{jf}{kw^2} 2r_{off} \cos(\theta_{off})}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Se llega a

$$\begin{aligned} \frac{jk\rho r}{f} \cos(\theta - \beta) - \frac{2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off})}{w^2} &= \frac{jkr\gamma}{f} \cos(\theta) \cos(\psi) + \frac{jkr\gamma}{f} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ &= \frac{jkr}{f} \cos(\theta - \psi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando la ecuación (3.6), la doble integral en (3.3) queda expresada como:

$$U_2(\rho, \beta) = e^{-\frac{r_{off}^2}{w^2}} \int_0^{+\infty} e^{-b_t r^2} r \left[ \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-\frac{jkr\gamma}{f} \cos(\theta - \psi)} d\theta \right] dr. \quad (3.7)$$

La integral entre corchetes es análoga a la mostrada en la ecuación (2.34). Resolviendo de forma similar e incluyendo todos los términos constantes omitidos anteriormente, la forma funcional del campo óptico resultante está dada por

$$\begin{aligned} U(\rho, \beta) &= e^{jk(f+Z)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) j^{-(\ell(Nt+1)+1)} \frac{k\pi^{1/2}}{4fb_t^{3/2}} e^{-\frac{r_{off}^2}{w^2}} \\ &\times e^{j\ell(Nt+1)\psi} e^{-\frac{\eta^2}{2b_t}} \eta \left[ I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)-1}{2}\right)}\left(\frac{\eta^2}{2b_t}\right) - I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)+1}{2}\right)}\left(\frac{\eta^2}{2b_t}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Con  $\eta = \frac{k\gamma}{2f}$ . La ecuación (3.8) da la forma general del campo en el plano de observación ya que considera tanto la discretización como el desplazamiento fuera del eje óptico del haz Gaussiano. Como veremos en capítulos posteriores, analizando ésta expresión del campo es posible observar efectos en la intensidad y la fase que no han sido predichos en otros trabajos. Note que si  $r_{off} = 0$  (si el haz Gaussiano está centrado)  $\gamma^2 = \rho^2$ ,  $\psi = \beta$ ; si adicionalmente  $N \rightarrow \infty$  se volvería a recuperar la ecuación (3.1), mientras que si  $r_{off} \neq 0$ ,  $\eta$  y  $\psi$  pueden tomar valores complejos y esta naturaleza compleja sería la responsable de los cambios de asimetría en la intensidad de los vórtices ópticos; así que, como resultado de la incidencia del haz fuera del eje la distribución de intensidad del vórtice cambia mostrando dos picos máximos de intensidad en el plano de observación (ver Figura (3.3)). Más adelante veremos como éste desplazamiento también puede cambiar la posición de la singularidad de la fase.

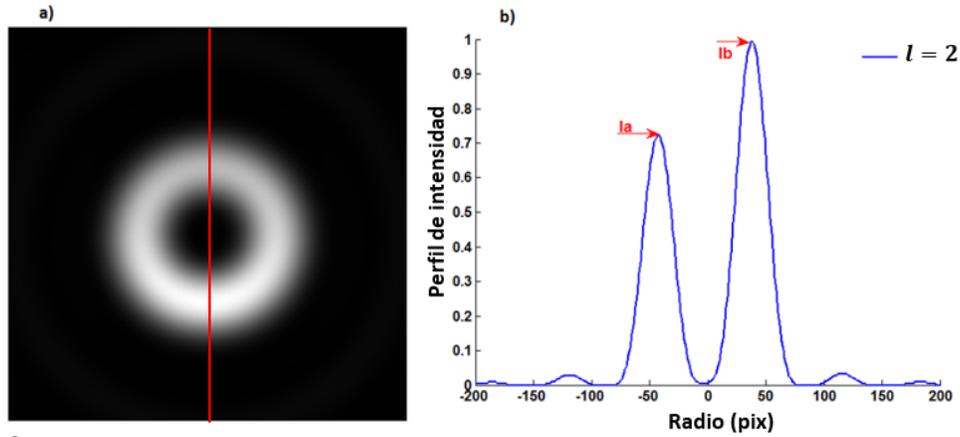


Figura 3.3: Simulación de vórtice óptico fuera de eje ( $\ell = 2$ ) producido por una DVPL con  $N = 2$ . a) distribución transversal de intensidad en el plano de observación, b) perfil de intensidad radial (tomado sobre la línea roja en el eje vertical).

Para evaluar analíticamente la asimetría como un parámetro de transducción, se utilizará la razón entre picos máximos de intensidad  $R = I_a/I_b$ , donde  $I_a, I_b$  corresponden al menor y mayor pico del perfil de intensidad radial, respectivamente. Así mismo, el desplazamiento es normalizado en la mitad del ancho de la máxima intensidad como  $r_{off}/a$ , donde  $a = w\sqrt{\ln 2}/2$ . Usando estas variables, es posible definir el parámetro  $R$ , el cuál decae exponencialmente cuando el desplazamiento incrementa [7]:

$$R = k_1 e^{-(k_2 r_{off}/a)}. \quad (3.9)$$

Las constantes  $k_1$  y  $k_2$  en la ecuación (3.9) pueden ser obtenidas a partir del mejor ajuste de las curvas de  $R$  Vs  $r_{off}/a$ . En la Figura (3.4), se presentan los resultados obtenidos a partir de la evaluación del parámetro  $R$  sobre las distribuciones de intensidad obtenidas con el módulo al cuadrado de la expresión analítica del campo (ecuación (3.8)), en función de los desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano, para vórtices principales de cargas  $\ell = 1$  hasta  $\ell = 5$  usando una DVPL binaria (BVPL).

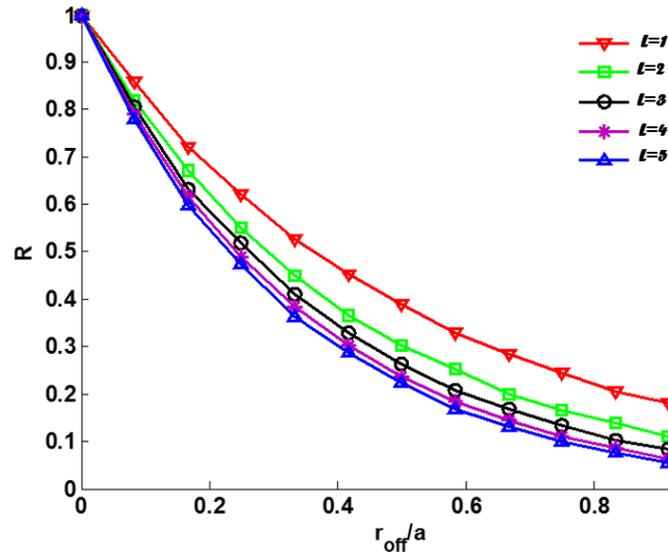


Figura 3.4: Razón de picos de intensidad teóricos Vs desplazamiento fuera del eje normalizado usando una BVPL.

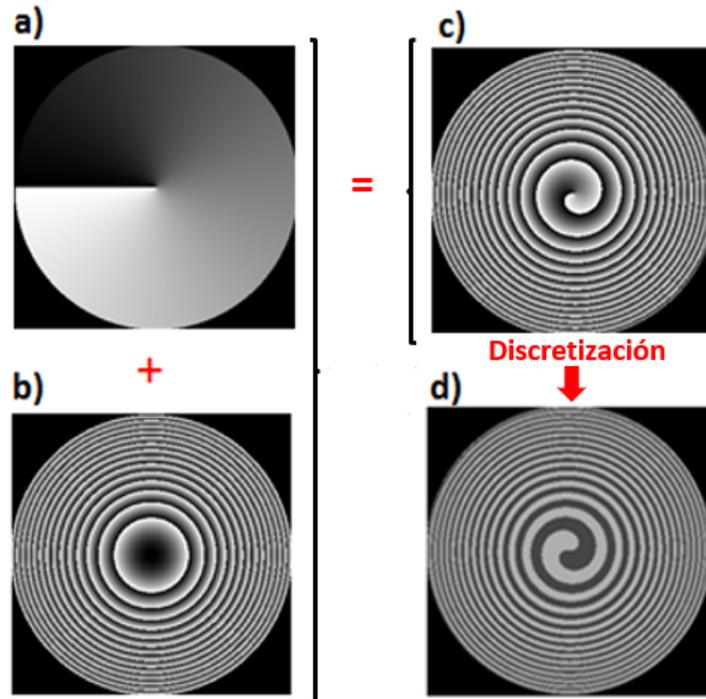
En concordancia con los resultados simulados por Anzolín et al [7], nuestros resultados analíticos indican que usando el parámetro  $R$  es posible crear un sistema de medida de desplazamiento cuya sensibilidad va depender del valor de la carga topológica.

Los desarrollos analíticos hasta ahora mostrados fueron desarrollados para un haz Gaussiano fuera de eje, sin embargo, experimentalmente tiende a ser más sencillo producir un desplazamiento relativo entre el haz de iluminación y la máscara de fase moviendo digitalmente la BVPL en lugar del haz. A continuación se describe el montaje y los resultados experimentales con los cuales se pretende verificar si al desplazar la máscara de fase también se produce (sobre el vórtice principal) una dependencia exponencial decreciente del parámetro  $R$  en función del desplazamiento fuera de eje de la BVPL, análogo al mostrado por Anzolín et al con un CSPP iluminada con el haz fuera de eje.

## 3.2. Configuración experimental

En esta sección se presenta la implementación experimental del sistema metrológico usando una BVPL y observando solo vórtices principales. Como fue demostrado en trabajos previos [14, 15], el uso de VPLs ha permitido la generación de vórtices ópticos de buena calidad en su simetría de intensidad modo dona, reduciendo notablemente los requisitos en la discretización, haciendo posible generar OV's con simetría adecuada incluso con dos niveles de fase. En la Figura 3.5 se muestra la secuencia para construir

digitalmente una DVPL de carga  $\ell = 1$ .



**Figura 3.5:** Construcción de una BVPL para  $\ell = 1$  a) CSPP con  $N=256$ , b) lente de Fresnel con  $N=256$  (modulada a  $2\pi$ ), c) superposición de la CSPP y la lente de Fresnel para crear una CVPL con  $N=256$  d) DVPL discretizada con dos niveles de fase (BVPL)

Inicialmente una CSPP y una lente de Fresnel son generadas y superpuestas formando una CVPL de 256 niveles. Luego ésta CVPL es discretizada de acuerdo a los niveles de fase posibles que alcance el LC-SLM en el cual se va a proyectar; en nuestro caso la máxima modulación en fase obtenida fue  $\approx 1.2\pi$ , lo cual permite discretizar solo con dos niveles de fase. Para la generación y caracterización de los OVs, la BVPL es programada en el LC-SLM de transmisión. La configuración experimental es representada en la Figura 3.6. Allí, los polarizadores lineales  $P_1$ ,  $P_2$  y una lámina  $\lambda/4$  son introducidos para garantizar la máxima modulación en fase con la mínima modulación de amplitud [34]. Un láser verde Nd:Yag es espacialmente filtrado y colimado con el filtro espacial  $O$  y la lente  $L_1$ , respectivamente, y el diafragma  $D$  permite ajustar el diámetro del haz ( $2w = 4.6$  mm). Posteriormente, el haz pasa a través del LC-SLM (Real Light, RL-SLM-T1 con  $1024 \times 768$  pixeles de  $26 \mu\text{m}$  cada uno) y la luz emergente es focalizada con una lente convergente  $L_2$  ubicada a una distancia  $f$  (igual a su longitud focal:  $f = 200$  mm) del LC-SLM. De este modo, un vórtice óptico principal de carga topológica  $\ell$  puede ser observado a una distancia  $Z_{\text{ópt}}$  medida a partir del plano focal posterior a  $L_2$ , solo a ésta distancia, la forma funcional del campo obtenido con la BVPL será igual al reportado por Anzolín et al [7], usando una CSPP. Experimentalmente usamos una

lente de Fresnel divergente y la intensidad del vórtice en el plano de observación fue registrada con una cámara CMOS acoplada a un objetivo de microscopio de 20X. Bajo ésta configuración fue posible obtener en tiempo real la distribución de intensidad que permitió la implementación del sistema metrológico propuesto.

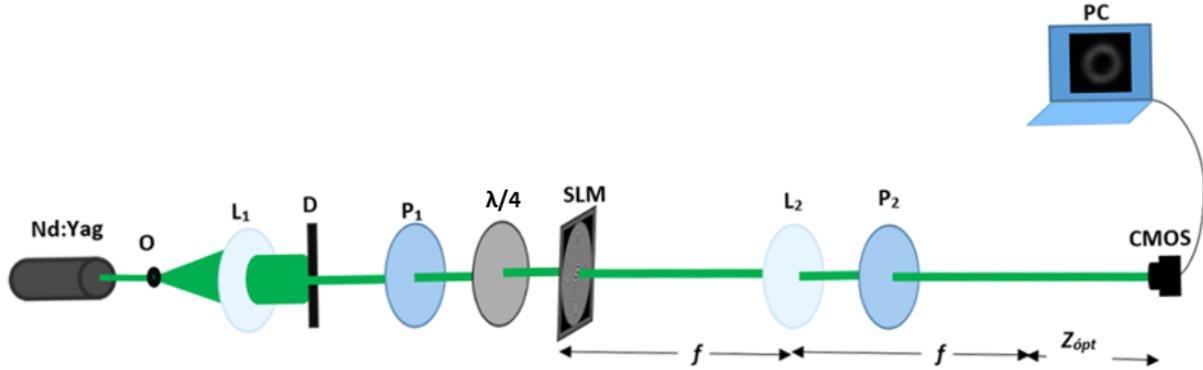


Figura 3.6: Esquema experimental para la generación de vórtices ópticos.

Como se mencionó anteriormente, por simplicidad para evaluar experimentalmente el comportamiento de la asimetría de intensidad del VO como función del desplazamiento, movimos digitalmente la BVPL del centro del modulador en lugar del haz Gaussiano, con pasos de  $26 \mu m$  equivalentes al tamaño de un pixel del LC-SLM. Así mismo, el desplazamiento fuera del eje de la BVPL se codificó solo sobre el eje  $x$ , por tanto  $\mathbf{r}_{off} = \mathbf{x}_{off}$ . Desplazamientos en el intervalo  $0 < \frac{r_{off}}{a} < 0.6$  fueron programados en el modulador registrando a cada paso la distribución de intensidad con la cámara; debido a limitaciones experimentales no se registraron desplazamientos por encima de ese rango.

### 3.2.1. Resultados experimentales en intensidad

En la Figura 3.7 se muestran los vórtices desplazados obtenidos experimentalmente junto con sus respectivos perfiles de intensidad. Note que para desplazamientos en el eje  $x$ , la asimetría de intensidad ocurre en el eje  $y$ .

En la Figura 3.8, se presenta el comportamiento experimental del parámetro  $R$  como función del desplazamiento fuera del eje para diferentes cargas topológicas. cómo se puede ver, el desempeño del parámetro  $R$  depende del valor de la carga topológica, siendo más fuerte la tasa de decaimiento a medida que aumenta el valor de la carga. De modo que los resultados obtenidos para  $R$  desplazando la BVPL, presentan un comportamiento análogo a los mostrados en [7] desplazando el haz. En la Figura 3.9, se muestra la curva de ajuste para los datos experimentales de  $\ell = 3$  claramente se evidencia el comportamiento exponencial del parámetro  $R$ . Por otro lado, los parámetros

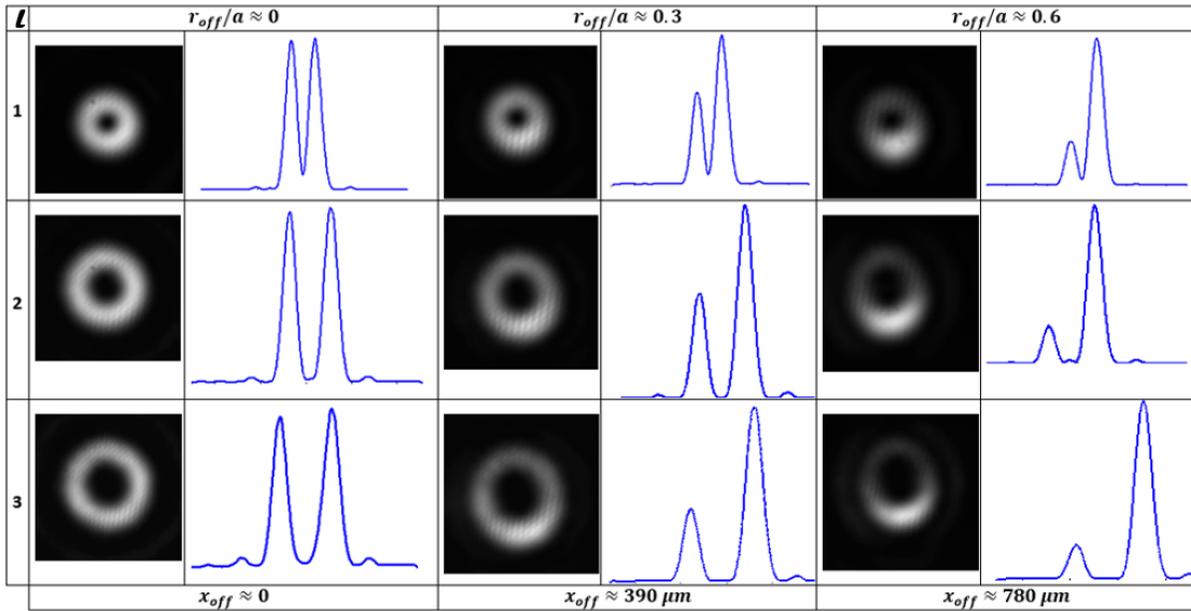


Figura 3.7: Resultado experimental de vórtices desplazados fuera de eje y sus perfiles de intensidad, para  $\ell = 1$  a  $\ell = 3$ .

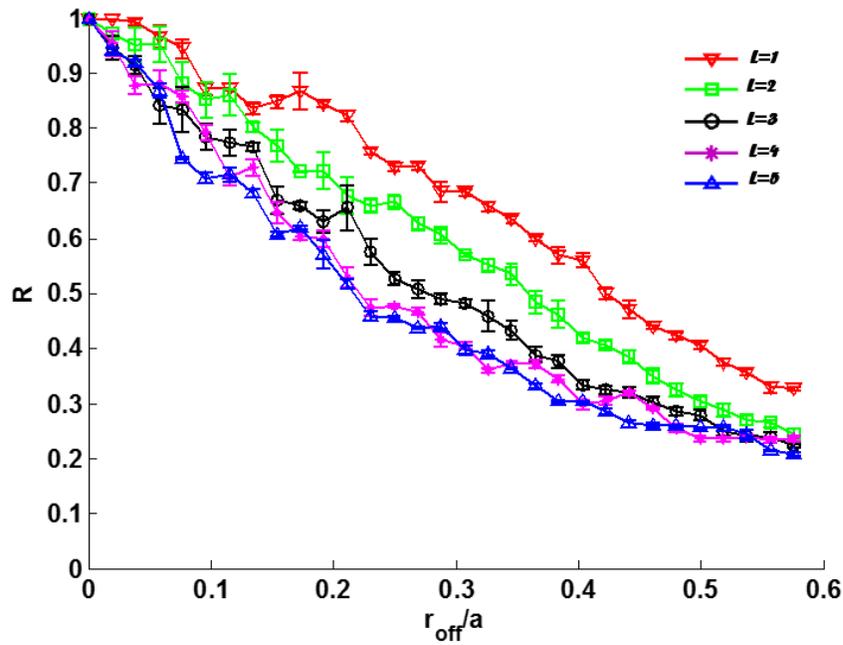


Figura 3.8: Razón de picos máximos de intensidad  $R$  vs desplazamiento fuera del eje normalizado.

del ajuste  $k_1$ ,  $k_2$  y los coeficientes de correlación ( $\mathcal{R}^2$ ), obtenidos para las cargas  $\ell = 1$  hasta  $\ell = 5$  son calculados y listados en la Tabla 3.1.

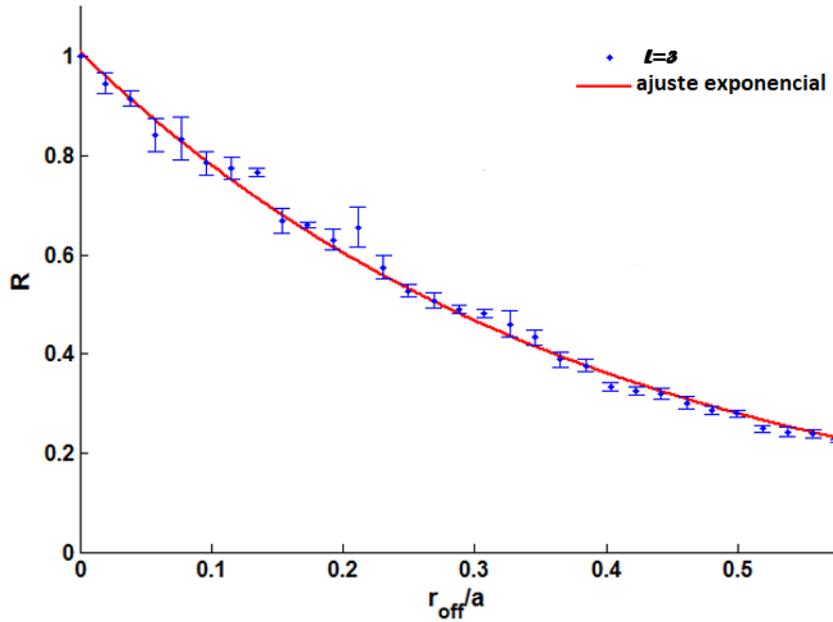


Figura 3.9: Mejor curva de ajuste para medidas experimentales con  $\ell = 3$ .

$\ell$	$k_1$	$k_2$	$\mathcal{R}^2$
1	$1.06 \pm 0.04$	$1.73 \pm 0.15$	0.95
2	$1.02 \pm 0.03$	$2.14 \pm 0.12$	0.98
3	$1.01 \pm 0.01$	$2.57 \pm 0.06$	0.99
4	$1.00 \pm 0.02$	$2.80 \pm 0.09$	0.99
5	$0.99 \pm 0.02$	$2.90 \pm 0.10$	0.99

Tabla 3.1: Valores de los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  con 95% de confianza, y el coeficiente de correlación  $\mathcal{R}^2$  para  $\ell = 1$  hasta  $\ell = 5$ .

Es importante mencionar que las barras de error para  $R$  fueron calculadas computando la desviación estandar de varias medidas en cada punto experimental, con un factor student equivalente al 98% de confianza. Basados en estos parámetros empíricos y usando la ecuación (3.9) es posible estimar la sensibilidad del sistema, es decir, el desplazamiento mínimo que puede ser detectado como un cambio en la asimetría de intensidad del vórtice [7]:

$$\frac{r_{off}}{a} \geq \frac{1}{k_2} \ln \left( \frac{k_1}{R} \right). \quad (3.10)$$

De la ecuación (3.10) es claro que la sensibilidad del sistema metrológico va depender del parámetro  $R$ , el radio del haz  $w$  ( $a = w\sqrt{\ln 2/2}$ ) y la carga topológica, ya que  $k_1$  y  $k_2$  cambian con el valor de  $\ell$ . En la Tabla 3.2 se presentan algunos cálculos asociados a la sensibilidad en el desplazamiento en función del parámetro  $a$ .

$R \backslash \ell$	1	2	3	4	5
0.98	0.045a	0.020a	0.011a	0.007a	0.002a
0.81	0.156a	0.109a	0.086 a	0.075a	0.069a
0.44	0.509a	0.394a	0.323a	0.293a	0.281a

Tabla 3.2: Sensibilidad del sistema metrológico al mínimo desplazamiento detectable ( $\Delta r_{off}$ ), como función del parámetro  $a$ .

De la Tabla 3.2, es posible ver que valores de  $R$  cercanos a uno producen mayor sensibilidad, es decir, desplazamientos pequeños entre  $\Delta r_{off} = 0.002a$  (con  $\ell = 5$ ) y  $\Delta r_{off} = 0.045a$  (con  $\ell = 1$ ) pueden ser experimentalmente detectados; sustituyendo el valor de  $a$ , estos desplazamientos equivalen a  $\Delta r_{off} = 2.7 \mu\text{m}$  y  $\Delta r_{off} = 60.8 \mu\text{m}$ , respectivamente. Observe que el mínimo desplazamiento que puede ser detectado en este caso es aproximadamente una décima del valor del tamaño de pixel del modulador (siendo el tamaño de pixel del modulador igual a  $26 \mu\text{m}$ ). Si el parámetro  $R$  decrece, desplazamientos de mayor grado también podrían ser estimados. Debido a la dependencia de los resultados con el parámetro  $a$ , además de poder ajustar la sensibilidad del sistema metrológico con el valor de la carga topológica, ésta también puede ser ajustada con el tamaño de la cintura del haz Gaussiano.

En la Figura (3.10) se puede ver que cuando todo el sistema está en línea ( $r_{off} = 0$ ) el único efecto del tamaño del haz es cambiar el tamaño del vórtice principal en el plano de observación; pero cuando hay una desplazamiento fuera de eje, en este caso del haz Gaussiano, el valor del pico máximo de intensidad  $I_a$  disminuye a medida que el radio del haz también lo hace, lo cual conlleva a diferentes valores de  $R$ .

Adicionalmente, en la Figura (3.11) se puede apreciar la dependencia de  $R$  con el tamaño del haz Gaussiano. Entre más pequeño sea el tamaño del haz Gaussiano se nota que más rápido decae  $R$  con el desplazamiento.

Aunque los parámetros computacionales usados por Anzolín et al. quizás no sean los mismos parámetros experimentales que usamos y, adicionalmente nuestro procedimiento experimental fue diferente por haber desplazado la BVPL en lugar del haz Gaussiano, experimentalmente se obtiene que el comportamiento de  $R$  sobre los vórtices principales generados con la BVPL fuera de eje, es similar al numérico-analítico obtenido a partir de CSPPs con el haz Gaussiano fuera de eje, es decir,  $R$  presenta un decaimiento exponencial con el desplazamiento fuera de eje (del haz o de la máscara) que se vuelve más significativo cuando aumenta  $\ell$ . Vale la pena resaltar que se de-

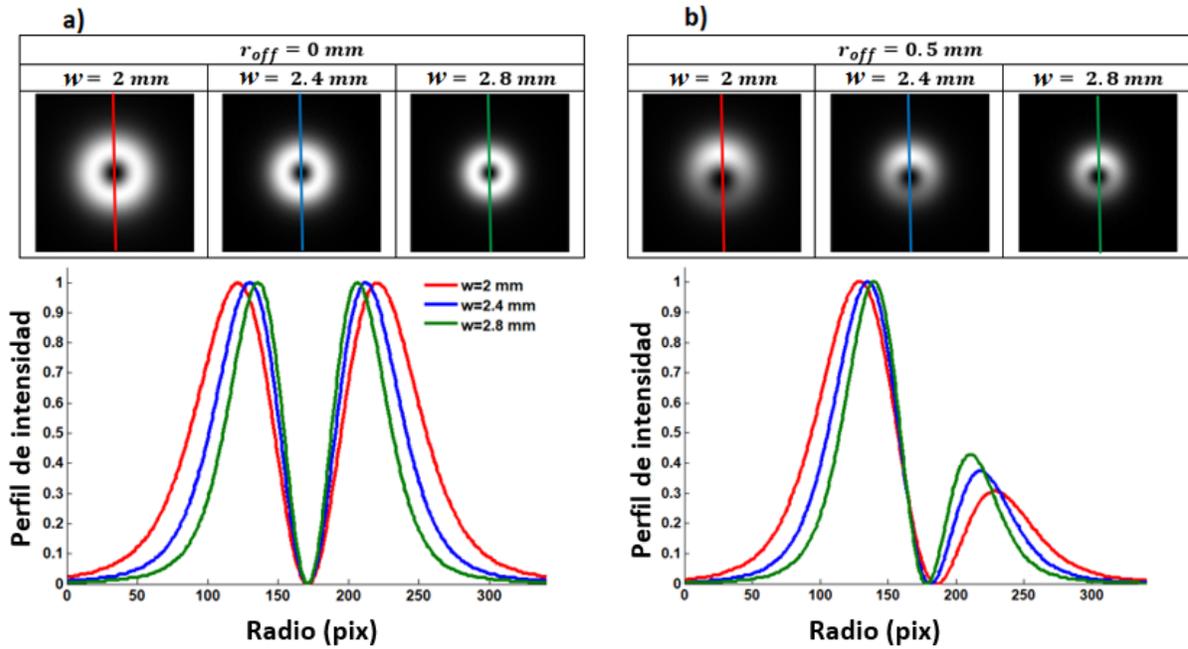


Figura 3.10: Cambio de la asimetría de intensidad con el tamaño del haz ( $w$ ) obtenido a partir del cálculo analítico usando una BVPL de carga  $\ell = 1$ . a) Haz centrado b) el haz incide 0.5 mm fuera del eje óptico.

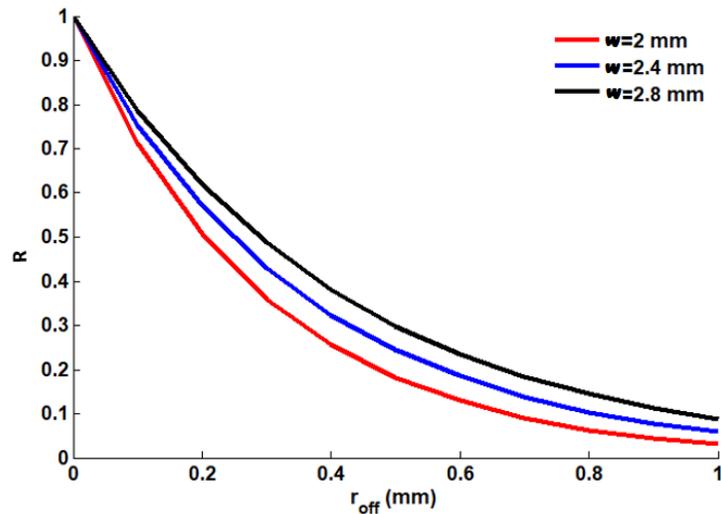


Figura 3.11: Dependencia del parámetro  $R$  con el tamaño del haz ( $w$ ). Resultado obtenido a partir del cálculo analítico usando una BVPL de carga  $\ell = 1$ .

mostró que el comportamiento de dicho parámetro es el mismo independiente si se mueve la máscara de fase o el haz de iluminación, sin embargo, eso no implica que la sensibilidad obtenida por estos dos métodos sea la misma. En el capítulo (5) se analizará computacionalmente con más detalle las diferencias entre desplazar fuera de eje

la máscara de fase discretizada y el haz de iluminación en términos de la sensibilidad del sistema, es decir, usando en ambos casos los mismos parámetros de simulación, se analizará cuantitativamente las diferencias entre estos dos casos.

En esta sección, se presentó y demostró experimentalmente la posibilidad de implementar un sistema micrométrico de medida basado en VOs asimétricos creados con una BVPL fuera de eje cuya mínima resolución, con los parámetros usados, llega a ser de aproximadamente 2.7 micras . BVPLs con cargas  $\ell = 1$  hasta  $\ell = 5$  fueron programadas en un modulador de bajo costo LC-SLM con una máxima modulación de fase de tan solo  $1.2 \pi$ ; los desplazamientos fueron inducidos directamente en el modulador y los resultados experimentales estuvieron acordes a las predicciones analíticas obtenidas cuando se desplaza el haz de iluminación. Se muestra que la baja eficiencia de la BVPL no es un problema para la implementación de la técnica, permitiendo el uso de moduladores de bajo costo.

En este capítulo, todos los análisis (tanto analíticos como experimentales) se hicieron solo en los vórtices principales. Se verificó experimentalmente los cambios en asimetría de intensidad y el comportamiento del parámetro  $R$  con desplazamientos fuera del eje de la DVPL. Se encuentra que parámetros experimentales como la carga topológica  $\ell$  y el radio del haz  $w$ , pueden actuar como sintonizadores en este tipo de sistemas de vórtices ópticos. Sin embargo, como mostramos en el capítulo anterior, usando una DVPL se pueden obtener adicionalmente vórtices ópticos secundarios en diferentes planos de observación.

Los efectos inducidos por desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano sobre estos vórtices secundarios no han sido hasta ahora estudiados. Así que, para tener una descripción más completa de los cambios de asimetría producidos en nuestro campo óptico, a continuación se incluirá un análisis detallado de los efectos inducidos por el desplazamiento fuera de eje sobre los SOVs, dónde además de la intensidad se estudiarán los cambios producidos en la fase, carga topológica y los desplazamientos del centro de masa sufridos por cada vórtice.

## CAPÍTULO 4

---

# VÓRTICES SECUNDARIOS

---

Como se mostró anteriormente, cuando se usa como máscara generadora de vórtices una VPL discretizada, se produce un arreglo multifocal de vórtices ópticos en determinadas posiciones a lo largo del eje de propagación, siendo el vórtice óptico principal aquel cuyo valor de carga topológica coincide con el programado inicialmente en la máscara de fase en  $t = 0$ ; a las demás cargas topológicas con  $t \neq 0$  les corresponde los llamados vórtices ópticos secundarios. Ya se mostraron los cambios de asimetría en intensidad que sufren los OV's principales cuando dicha DVPL es iluminada por un haz Gaussiano fuera de eje, sin embargo, para tener una descripción completa de nuestro campo óptico, en este capítulo se llevará a cabo el mismo análisis de intensidad sobre los SOVs; adicionalmente, a partir del seguimiento de la posición del centro de masa se mostrará como los desplazamientos fuera de eje son los responsables del cambio en la posición de la singularidad de los vórtices, siendo el tamaño del radio del haz Gaussiano un factor determinante de dicho cambio. Se mostrará que el porcentaje de energía que va a cada vórtice secundario no es un inconveniente para los procedimientos realizados y que los resultados son independientes del signo de la carga topológica. Por último, a partir de los mapas de fase se proponen algunos indicadores de medida de acuerdo al valor de la carga topológica. Los resultados obtenidos son comparados con el mejor límite de resolución obtenido en referencia a una CSPP iluminada fuera de eje, mostrando una buena coincidencia entre OV's principales y SOVs. Los rangos de valores que afectan más los cambios de asimetría con el desplazamiento fuera de eje en SOVs son completamente detallados.

### 4.1. Lente productora de vortice discretizada

En la Figura (4.1) se muestra un ejemplo de la estructura de las DVPLs utilizadas para nuestro desarrollo analítico.

Una vez generada la DVPL ésta es iluminada con un haz Gaussiano fuera de eje, de modo que, vórtices ópticos de diferentes cargas topológicas son producidos a determinadas distancias sobre el eje de propagación. En la Figura (4.2) se representan las posiciones del vórtice principal y dos vórtices secundarios adyacentes. Bajo esta configuración recordemos que el campo óptico resultante esta dado por

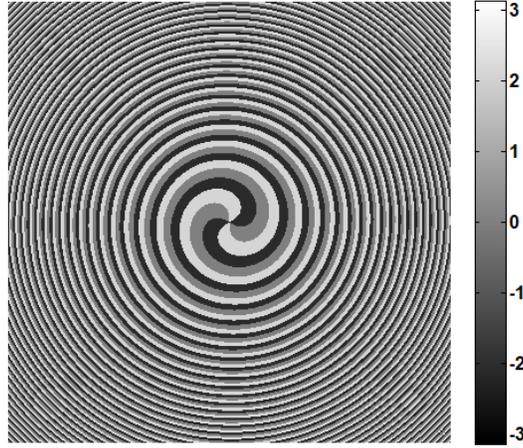


Figura 4.1: Estructura de una DVPL generada con  $\ell = 2$ ,  $N=3$ ,  $f_{FR} = -1$  m y  $\lambda = 532$  nm, con escala en niveles de fase está en radianes ( $-\pi$  a  $\pi$ ).

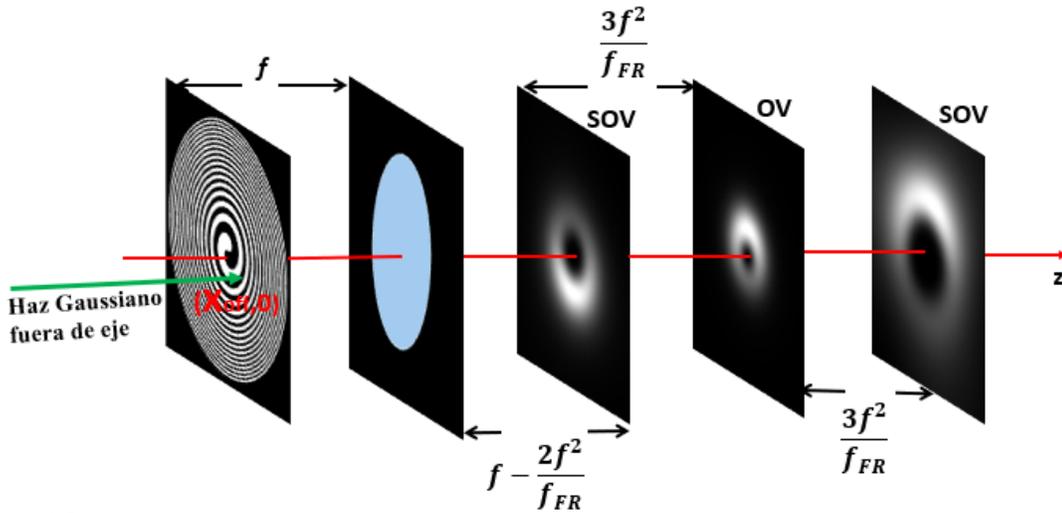


Figura 4.2: Esquema de la posición del vórtice principal y dos vórtices secundarios con  $N = 3$  y  $\ell = 1$ . Para  $t = -1, 0, 1$  se obtienen los vórtices de cargas  $m = -2$ ,  $m = \ell = 1$ ,  $m = 4$ , respectivamente, en las posiciones indicadas en la figura. Para mejorar la visualización, las intensidades fueron normalizadas.

$$\begin{aligned}
 U(\rho, \beta) = & e^{jk(f+Z)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) j^{-(\ell(Nt+1)+1)} \frac{k\pi^{1/2}}{4fb_t^{3/2}} e^{-\frac{r_{off}^2}{w^2}} \\
 & \times e^{j\ell(Nt+1)\psi} e^{-\frac{\eta^2}{2b_t}} \eta \left[ I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)-1}{2}\right)}\left(\frac{\eta^2}{2b_t}\right) - I_{\left(\frac{\ell(Nt+1)+1}{2}\right)}\left(\frac{\eta^2}{2b_t}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde  $\ell(Nt+1) = m$ . Note que, los valores de carga topológica de los vórtices secundarios son dependientes de los parámetros de discretización de la máscara de fase

y no todos los valores son posibles, es decir, solo se pueden obtener valores discretos de cargas topológicas secundarias, tal como se muestra a continuación para algunos valores de  $N$ ,  $\ell$  y  $t$ .

## 4.2. Cargas topológicas

De la ecuación (2.29) sabemos que el término  $t_m$  es diferente de cero solo cuando se cumple la relación  $m = \ell(Nt + 1)$ , por tanto, las cargas topológicas secundarias  $m$  además del parámetro  $\ell$  también dependen del nivel de discretización  $N$  y el contador  $t$ . En la Figura (4.3) se ilustra dicha dependencia para valores pequeños de  $\ell$ ,  $N$  y  $t$ .

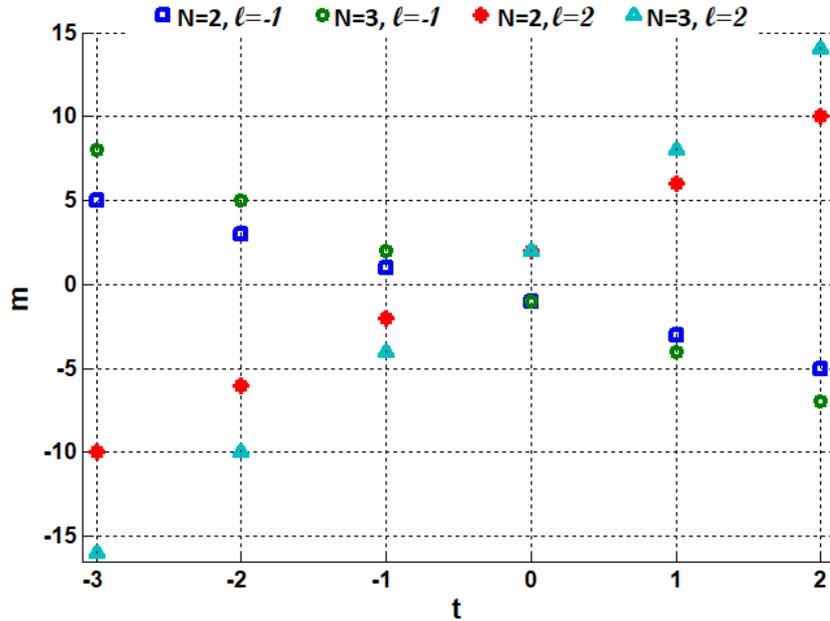


Figura 4.3: Valores de cargas topológicas secundarias  $m$  en función de  $t$  para diferentes valores de  $N$  y  $\ell$ .

Aunque un mismo valor de carga  $m$  puede ser obtenido por distintas combinaciones, sus posiciones en el plano de observación van a ser diferentes ya que difieren en el parámetro  $t$ , que es el asociado a la posición  $Z_t$  en la cuál los vórtices son enfocados.

Una vez definidos los parámetros de la máscara de fase, nuestro propósito es analizar el comportamiento de los SOVs ante desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano. Lo primero es verificar que sobre estos vórtices también se presenta una asimetría en la intensidad con el desplazamiento fuera de eje del haz. Para esto, realizamos un procedimiento análogo al del capítulo anterior pero ahora sobre los vórtices secundarios. En la Figura (4.4) se muestra en función del radio del vórtice los perfiles de intensidad obtenidos con  $t = -1, 0, 1$  y  $2$  para dos valores de  $N$  cuando  $x_{off} = 0.5$  mm. El radio se da en pixeles (pix) donde el tamaño del pixel es de  $0.28 \mu\text{m}$ , correspondiente

al tamaño de muestreo usado para generar la distribución de intensidad a partir del campo óptico analítico.

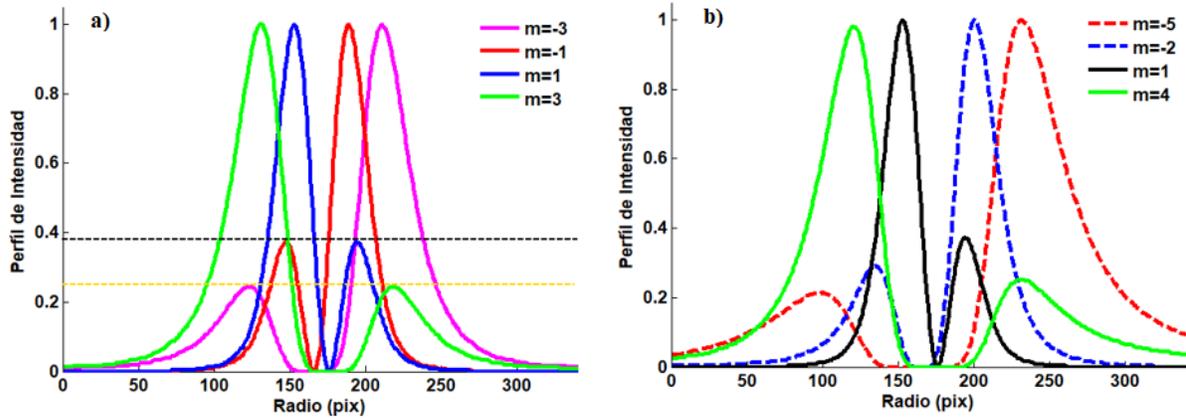


Figura 4.4: Perfiles de intensidad para diferentes cargas topológicas secundarias, con  $w=3$  mm,  $\lambda = 532$  nm,  $f = 200$  m,  $\ell = 1$  y  $f_{FR} = -1200$  mm. a)  $N = 2$ , b)  $N = 3$ .

Para  $N = 2$ , debido a la relación de simetría de este nivel con los valores tomados del contador  $t$ , se obtienen: 3 vórtices secundarios de cargas  $m = -3, -1$  y  $3$  y un vórtice principal de carga  $m = \ell = 1$ . Sin embargo, como se puede observar en la Figura (4.4a), los picos máximos de intensidad (correspondientes a  $I_a$  e  $I_b$ ) serían independientes del signo de la carga topológica, puesto que para  $m = -1$  y  $m = 1$ , respecto al centro del vórtice solo se presentaría una reflexión de  $\pi$  en los perfiles de intensidad y la posición de los picos máximos estarían al mismo nivel (ver línea negra punteada); por tanto, el parámetro  $R = I_a/I_b$  tendría el mismo valor ya que  $I_a$  siempre corresponde al pico de intensidad menor e  $I_b$  al de mayor intensidad. Lo mismo ocurre para las cargas  $m = -3$  y  $m = 3$  (ver línea amarilla punteada). Este resultado no solo es válido para  $N = 2$ , en general, se cumple que cargas topológicas de igual magnitud tendrán la misma tasa de decaimiento de intensidad ante desplazamientos fuera de eje óptico del haz. En particular, para los casos mostrados con  $N = 2$  será equivalente a tener solo dos curvas de decaimiento independientes, una con  $|m| = 1$  y la otra con  $|m| = 3$ . Por otro lado, en la Figura (4.4b) se muestran los perfiles correspondientes al caso  $N = 3$  con el mismo desplazamiento  $x_{off} = 0.5$  mm. En este caso se obtienen tres vórtices secundarios de cargas  $m = -5, -2$ , y  $4$ , y el vórtice principal de carga  $m = 1$ . Por tanto, para este caso se tendrían cuatro casos independientes de decaimiento en la intensidad con el desplazamiento.

### 4.3. Análisis en intensidad

En la Figura (4.5) se muestra el comportamiento de estos SOVs (y el vórtice principal) para desplazamientos fuera del eje del haz entre  $0 \leq x_{off} \leq 1$  mm con pasos de 0.1 mm ahora con  $t \in [-2, 2]^1$ .

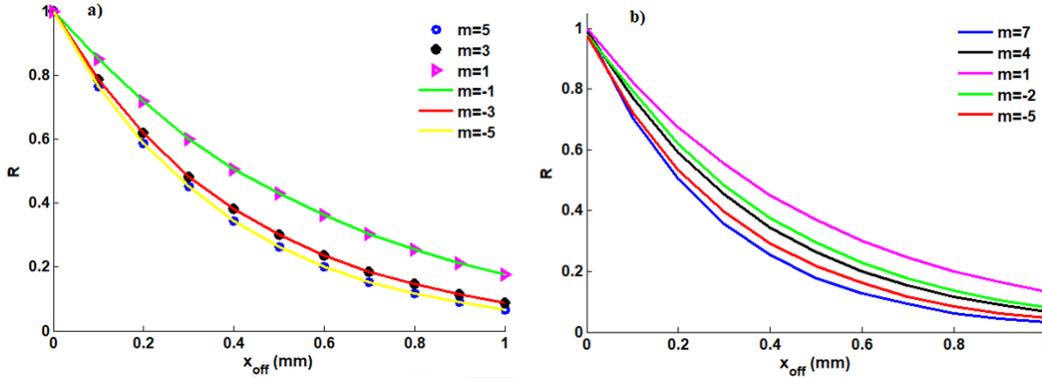


Figura 4.5: Razón de picos de intensidad Vs desplazamiento fuera del eje óptico con  $\ell = 1$ . a) con  $N=2$ , b) con  $N=3$ .

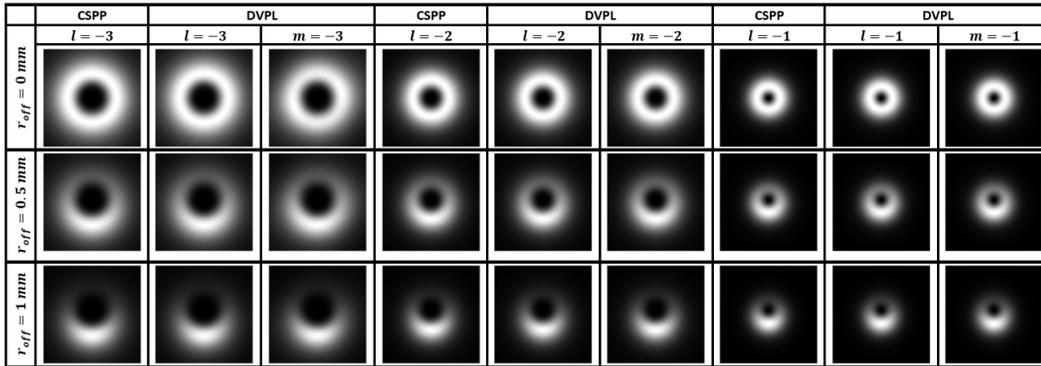
Como era de esperarse, con dos niveles de fase se tienen solo tres vórtices secundarios independientes que podrían contribuir a mejorar la sensibilidad del sistema, ya que desplazamientos grandes y pequeños pueden ser detectados con la misma máscara de fase, siendo mayor el grado de asimetría a medida que aumenta  $|m|$ . Ahora, para  $N=3$ , se puede observar mayor contribución de SOVs; como cada vórtice secundario cumple que  $|m| > l$ , se presenta un decaimiento diferente para todas las cargas. Para el caso mostrado se dispone de cuatro vórtices secundarios que pueden mejorar la resolución en la medida del sistema, es decir, el mínimo desplazamiento que puede ser detectado como un cambio en la asimetría de intensidad.

De este modo, hemos demostrado que los cambios de asimetría de los SOVs es análogo al comportamiento de los OV's principales, es decir, ante desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano es mayor el decaimiento en aquellos SOVs de magnitud de carga topológica superior. El resultado muestra como a partir de una sola DVPL, se puede modificar la sensibilidad del sistema con la simple ubicación sobre el eje de propagación de los diferentes SOVs, sin necesidad de generar nuevas máscaras de fase. Vale la pena resaltar que, de la forma que se define el parámetro  $R$  como indicador de medida a partir de los cambios de asimetría de intensidad, su valor va ser el mismo cuando la carga topológica principal tenga el mismo valor de la secundaria, es decir, la tasa de decaimiento o razón de picos de intensidad  $R$  de un vórtice principal de carga  $\ell$  sería igual a la tasa de decaimiento obtenida con un SOV de igual carga topológica ( $m = \ell$ ).

<sup>1</sup>Para el caso  $N = 2$  se incluye también  $t = -3$  comprobando la relación de simetría, además se grafican solo puntos (y no líneas) en las cargas positivas para verificar su independencia con el signo sin que se solapen las curvas.

Todo nuestro desarrollo analítico de un haz Gaussiano que ilumina una DVPL por fuera del eje, nos permite resaltar las ventajas de utilizar dicha máscara de fase. Primero se muestra que los vórtices principales presentan cambios asimétricos de intensidad análogos a los reportados por Anzolín et al [7], usando una CSPP; posteriormente, se muestra como en términos de los cambios de intensidad los vórtices secundarios presentan el mismo comportamiento que los principales, resultado que no había sido reportado hasta el momento. De este modo, con un arreglo multifocal de vórtice se puede modificar la sensibilidad del sistema óptico ante desplazamientos del haz con solo ubicar sobre el eje de propagación SOVs de ordenes superiores al programado inicialmente en la máscara de fase.

Sabemos que la energía disponible para cada vórtice es finita, así que su observación va depender de que al SOV de interés le llegue la energía necesaria para diferenciarlo de cualquier señal de ruido del sistema. Para verificar que es posible la observación de estos vórtices, se realizará un análisis de energía y razón señal-ruido (SNR, por sus siglas en inglés) de los vórtices secundarios. Pero primero veamos a que se atribuye que los procesos realizados y mostrados al inicio de esta sección sean independientes del signo de la carga. En la Figura (4.6) se comparan las distribuciones de intensidad de vórtices principales de cargas negativas  $\ell = -3, -2, -1$  obtenidas con una CSPP y vórtices secundarios de cargas  $m = -3, -2, -1$  obtenidos con una DVPL; solo consideramos desplazamientos fuera de eje en la dirección  $x$  ( $\theta_{off} = 0$ ). Los parámetros del sistema son  $w = 3.0$  mm,  $\lambda = 532$  nm,  $f = 200$  mm and  $f_{FR} = -1000$  mm. Teniendo en cuenta la distribución total de la energía dada por la ecuación (2.29), solo consideramos los primeros ordenes ( $-3 \leq t \leq 2$ ), que son los que más contribuyen a la formación de los vórtices.



**Figura 4.6:** Comparación entre la distribución de intensidad de OV's obtenidos con una CSPP, OV's principales con DVPL, y SOV's con DVPL, para diferentes desplazamientos fuera del eje, como se indica en la Figura. Para obtener  $m = -3$  se usó  $\ell = 1$ ,  $N = 2$  y  $t = -2$ ; para  $m = -2$  se usó  $\ell = 2$ ,  $N = 2$  y  $t = -1$ ; y para  $m = -1$  usamos  $\ell = 1$ ,  $N = 2$  y  $t = -1$ . Para los vórtices principales los valores respectivos de carga topológica son programados directamente en la máscara usando  $N = 2$  (el área observada es 1 mm x 1 mm). La intensidad es normalizada para facilitar la visualización.

Si se comparan los diferentes patrones, no se observa diferencias apreciables, por este motivo el método propuesto por Anzolín et al. [7] se puede aplicar con las DVPLs y

obtener resultados análogos ; solo hay dependencia con el valor de la carga topológica. Por otro lado, una vista más cercana a la singularidad del SOV mostrará una diferencia debido a efectos de los otros SOVs y el vórtice principal (desenfocados). En la Figura (4.7) se muestra el caso de la carga topológica -3 para desplazamientos fuera de eje de 0 mm y 1 mm. Para la CSPP y la carga topológica principal de la DVPL, los patrones son casi idénticos, y en cada caso, solo se observa una singularidad. Por el contrario, para la carga topológica secundaria de la DVPL, es evidente la separación de la singularidad.

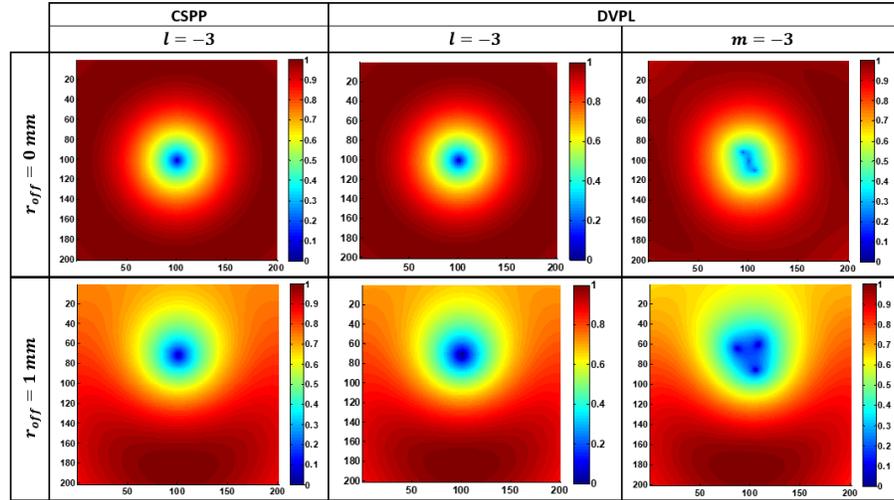


Figura 4.7: Vista cercana de la distribución de intensidad enfatizando la ubicación de la posición de la singularidad para vórtices principales generados con una CSPP (primer columna), una DVPL (segunda columna) siendo  $\ell = -3$  y un vórtice secundario generado con una DVPL (tercera columna) con carga topológica  $m = -3$ , con el haz centrado (fila 1) y a 1 mm fuera del eje (fila 2) (el área observada es 0.56 mm x 0.56 mm). Se emplearon los mismos parámetros de la Figura 4.6.

Pero antes de analizar que pasa con la singularidad, veamos porque se espera obtener un comportamiento similar entre las cargas positivas y las negativas. A continuación se explicará la razón de este comportamiento de independencia del signo de la carga topológica.

### 4.3.1. Signo de la carga topológica

De la ecuación (4.1), se tiene que el factor  $j^{-((Nt+1)\ell-1)} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} = j^{-(m+1)} e^{-\frac{j\pi m}{N\ell}}$  es responsable de una rotación de fase constante del campo. Como hemos dicho anteriormente, una carga topológica  $m$  negativa generaría los mismos resultados que una carga topológica positiva  $m$  en intensidad, miremos que lo mismo sucede con la fase. Para esto revisemos todos los elementos puros de fase de la ecuación (4.1) que dependen de  $m$ , estos son

$$g^+ e^{jm\psi} = e^{k(f+Z)} e^{-\frac{j\pi m}{N\ell}} j^{-(m+1)} e^{jm\psi} . \quad (4.2)$$

Después de elegir el adecuado orden  $t$  que permite observar el vórtice óptico de carga  $m$  en su respectivo plano  $Z_t$ , para cambiar el signo del OV reemplacemos  $\ell$  por  $-\ell$  y luego escribamos  $-m = -2m + m$ . De este modo los términos puros de fase ahora se leen

$$g^- = g^+ j^{2m} e^{-jm\psi} . \quad (4.3)$$

Cómo  $g^+$  es un factor constante, la diferencia entre la fase  $g^+$  y  $g^-$  proviene de la inversión en el signo dada por  $e^{-jm\psi}$  y el cambio extra dado por  $j^{2m}$  el cual depende de la paridad

$$g^- = \begin{cases} g^+ e^{-jm\psi} & \text{si } |m| = 2p; \ p = 0, 1, 2, 3\dots, \\ g^+ e^{-jm\psi} e^{j\pi} & \text{si } |m| = 2p + 1; \ p = 0, 1, 2, 3\dots \end{cases} \quad (4.4)$$

Para cargas topológicas pares se espera entonces que no hayan diferencias en la fase e intensidad además de las asociadas a la inversión de signo en el término de fase  $e^{-jm\psi}$ , mientras que para cargas impares se tendrá adicionalmente una rotación asociada al término  $e^{j\pi}$ . En la Figura 4.8 se muestra este comportamiento en los vórtices centrados (primera fila) usando los mismos parámetros de la Figura 4.6.

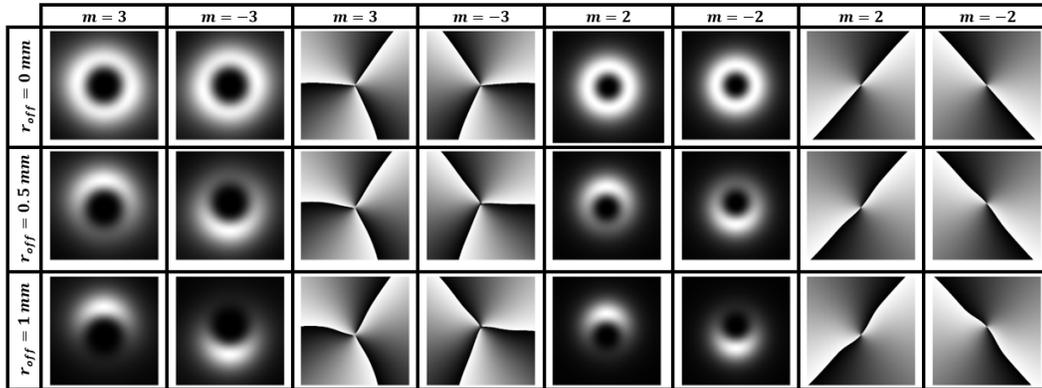


Figura 4.8: Comparación entre SOVs de carga topológicas positivas y negativas para diferentes desplazamientos fuera del eje, usando los mismos parámetros de la Figura 4.6. Las cargas opuestas fueron obtenidas cambiando el signo de  $\ell$ .

Efectos adicionales debidos al desplazamiento fuera de eje en la intensidad y la fase están asociados con la naturaleza compleja de  $\psi$  y  $\gamma$  (filas 2 y 3 de la Figura 4.6). Un efecto importante es el desplazamiento del centro de masa en la dirección opuesta. De la ecuación (3.5), sabemos que el vórtice principal se formará en la posición  $(\rho, \beta) = \left( \frac{2r_{off}f}{kw^2}, \theta - \frac{\pi}{2} \right)$ , de modo que el desplazamiento del centro de masa que sufre tanto los vórtices de carga positiva como negativa puede ser determinado. Note que, la posición del vórtice es independiente de  $N$ ,  $\ell$ ,  $t$  y  $f_{FR}$ , los cuales son parámetros de la DVPL, pero es dependiente de  $w$  y  $f$ , los cuales corresponden al radio del haz Gaussiano y la longitud focal de la lente física (parámetro del montaje óptico), respectivamente. Analicemos con más detalle este desplazamiento del centro de masa.

## 4.4. Seguimiento del centro de masa

Aunque de la Figura (4.7) vemos que la carga topológica secundaria presenta cambios como la división de la singularidad del vórtice, en esta sección vamos a ver que si se analiza el centroide éste experimenta un desplazamiento equivalente al de las singularidades de los vórtices obtenidos en los casos de CSPP y DVPL de las dos primeras columnas de dicha Figura, siendo el centroide la posición del vórtice en una CSPP, o la posición esperada del vórtice principal en una DVPL.

Entre más pequeño sea el tamaño del haz Gaussiano o más grande sea la longitud focal  $f$ , en el plano de observación se presentará un mayor desplazamiento fuera del eje de la singularidad. En la Figura (4.9) se muestra un ejemplo para una carga principal  $\ell = 1$  y una carga secundaria  $m = -1$ , para dos valores diferentes del radio del haz ( $w$ ). La posición del vórtice fue obtenida siguiendo el centroide de la mínima intensidad del centro del anillo de luz, el centroide se encuentra usando la función *regionprops* de MATLAB la cual devuelve los centroides de la matriz analizada. Ajustando la propiedad *centroide* con un umbral correspondiente a 0.2 de la intensidad normalizada. Note que no hay diferencias entre el desplazamiento del vórtice principal y el secundario.

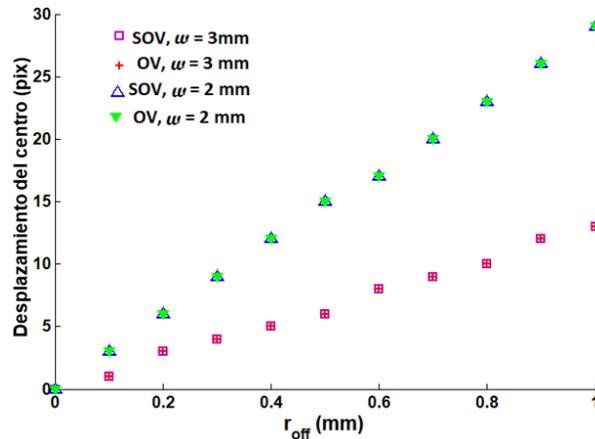


Figura 4.9: Posición del vórtice en el plano de observación para diferentes radios del haz Gaussiano  $w$  en función de  $r_{\text{off}}$ . Los parámetros de la simulación son  $N = 2$ ,  $f = 200$  mm,  $f_{FR} = -1.0$  m. Para el OV principal  $\ell = -1$ ,  $t = 0$ , y para el SOV  $m = -1$ ,  $t = -1$ .

En la Figura 4.10 la posición del centroide como función del desplazamiento fuera del eje es mostrada para cargas  $m = -3$ ,  $-2$ , y  $-1$ , obtenidas desde una DVPL. Al igual que en la Figura 4.9 el desplazamiento es determinado siguiendo el centroide con la mínima intensidad.

El radio del haz afecta directamente el desplazamiento del centroide dando un mayor desplazamiento cuando el radio es pequeño. Este resultado era de esperarse ya que, como lo mostramos anteriormente la posición radial a la cual se forma el vórtice es inversamente proporcional al cuadrado del tamaño del haz Gaussiano:  $\rho = \frac{2r_{\text{off}}f}{kw^2}$ .

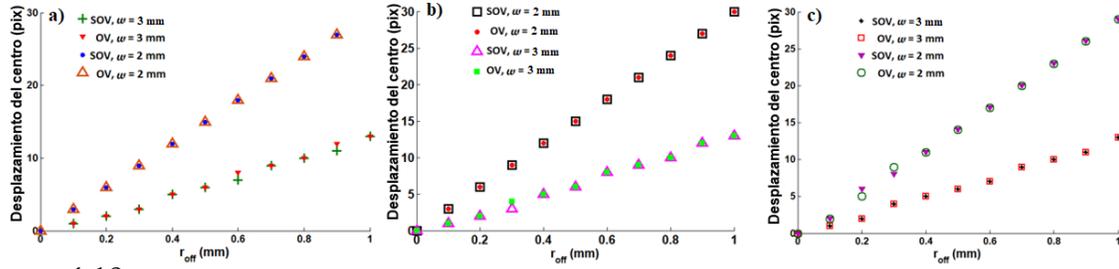


Figura 4.10: Posición del centroide en el plano de observación para diferentes radios del haz Gaussiano  $w$  en función de  $r_{off}$  con  $f = 200$  mm y  $f_{FR} = -1000$  mm. Los correspondientes vórtices principales y secundarios tiene la misma carga topológica. Los parámetros son: a)  $\ell = -3$  y  $m = -3$ , b)  $\ell = -2$  y  $m = -2$ , y c)  $\ell = -1$  y  $m = -1$ .

Desde las Figuras, se verifica que la posición del centroide no depende de la carga topológica. Finalmente, se muestra que para las cargas topológicas y los desplazamientos fuera de eje considerados, la posición del centroide de los SOVs coincide con la de los OVs principales.

## 4.5. Análisis de energía

Volviendo a la ecuación (4.1)), analicemos los efectos de otro término de ésta ecuación sobre el campo óptico resultante cuando sus parámetros son modificados. Definiendo

$$C_{Nt} = \exp \left[ -\frac{j\pi (Nt + 1)}{N} \right] \text{sinc} \left( \frac{Nt + 1}{N} \right). \quad (4.5)$$

Es claro que  $C_{Nt}$  contiene el término  $\text{sinc} \left( \frac{Nt+1}{N} \right)$  que controla la cantidad total de energía correspondiente a cada vórtice  $m$  ( u orden  $t$ ) en la expansión. En la Figura (4.11), para diferentes niveles de discretización  $N$  de la máscara de fase es mostrado (en escala logarítmica) el correspondiente peso  $C_{Nt}$  para el vórtice principal ( $t = 0$ ) y para algunos vórtices secundarios de ordenes  $t = -3, -2, -1, 1, 2$ ; note que esto es válido para cualquier vórtice principal  $\ell$ .

Puede verse que a medida que el nivel de discretización aumenta, la cantidad de energía disponible para los vórtices secundarios disminuye. Por ejemplo, como se había dicho anteriormente para el caso de dos niveles 40% de la energía va al vórtice principal y otro 40% al primer vórtice secundario, de modo que solo el 20% restante recae sobre los SOVs de otros ordenes.

Por otro lado, el término complejo cuadrático  $\exp \left( -\frac{\eta^2}{2b_t} \right)$  está directamente relacionado con el enfoque de cada vórtice cuando la parte imaginaria de  $b_t$  se hace cero a una distancia  $Z_t$ ; permitiendo la generación del arreglo multifocal de vórtices. Para ver

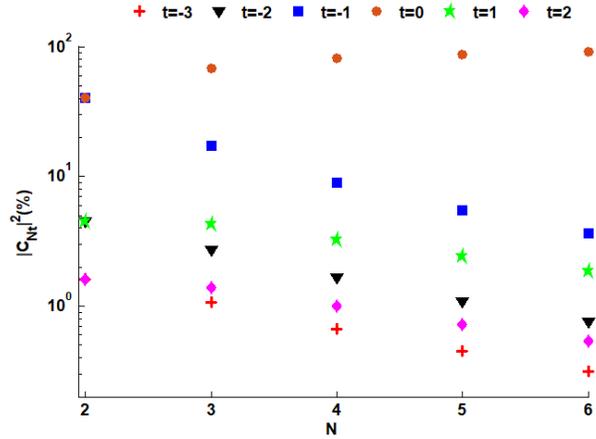


Figura 4.11: Energía total (porcentaje) correspondiente a cada término de la ecuación (4.1),  $t = 0$  para el vórtice principal y  $t = -3, -2, -1, 1, 2$  para vórtices secundarios. Para mejor visualización se usó una escala logarítmica.

esto, tomemos la parte real del argumento del término complejo y reorganicemos los términos para obtener

$$\exp \left( - \frac{(k^2/2f^2w^2)(\rho^2 - 4f^2r_{off}^2/k^2w^4 + 2f\rho r_{off} \cos \beta(1/f - Z/f^2 - (Nt + 1)/f_{FR}))}{4/w^4 + k^2(1/f - Z_t/f^2 - (Nt + 1)/f_{FR})^2} \right). \quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta solo los planos definidos por  $Z_t = f - \frac{(Nt+1)f^2}{f_{FR}}$ , sea  $t$  el orden del OV de interés observado a  $Z_t$  y  $t'$  los ordenes de los vórtices que no están focalizados a esa distancia  $Z_t$ , La ecuación (4.6) se simplifica a

$$\exp \left( - \left( \frac{k^2}{2f^2w^2} \right) \frac{\rho^2 - (2fr_{off}/kw^2)^2 + 2f\rho r_{off} \cos \beta N(t - t')/f_{FR}}{4/w^4 + (kN(t - t')/f_{FR})^2} \right). \quad (4.7)$$

Aparte de un factor constante que es el mismo para todos los términos en la expansión, el numerador tiene tres términos principales. El primero corresponde a un haz Gaussiano centrado en el eje óptico; el segundo a un haz Gaussiano desplazado en función del desplazamiento  $r_{off}$ , siguiendo la posición de la singularidad; el tercer término corresponde a la deformación radial de la forma del haz Gaussiano en función del ángulo  $\beta$  (note que para el vórtice principal  $t = t'$ , éste término es cero). Lo más importante para la distribución de la energía, es el denominador el cuál es proporcional a la cuarta potencia del inverso del radio del haz Gaussiano. Éste alcanza su máximo valor  $4/w^4$  para los vórtices enfocados en  $Z_t$ , e incrementa en múltiplos de  $kN/f_{FR}$ , dependiendo del orden del correspondiente vórtice respecto al vórtice enfocado, es decir, incrementa para los vórtices no enfocados.

### 4.5.1. Razón señal-ruido

En el plano  $Z_t$ , ahora queremos saber cuanto afecta un vórtice no enfocado de orden  $t'$  al vórtice de interés. Para esto, medimos la razón señal-ruido en el plano  $Z_t$  para comparar la potencia óptica del vórtice de orden  $t$  a la potencia óptica del resto de los vórtices (ruido),

$$\text{SNR}_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_t}{P_{ruido}} \right), \quad (4.8)$$

$P_t$  es obtenido al integrar el módulo cuadrado del término  $t$  de interés en la ecuación (4.1) sobre el área de influencia. El radio de las áreas es medido desde el centro del vórtice hasta la distancia donde la intensidad se reduce a la mitad de su máximo.  $P_{ruido}$  es obtenido luego de integrar el otro término de la sumatoria en la ecuación (4.1), sobre la misma área, y sumando todos los términos. Posteriormente analizamos los efectos de usar diferentes parámetros en el sistema. Sin pérdida de generalidad, solo se consideran desplazamientos fuera de eje en la dirección del eje  $x$  ( $\theta_{off} = 0$ ).

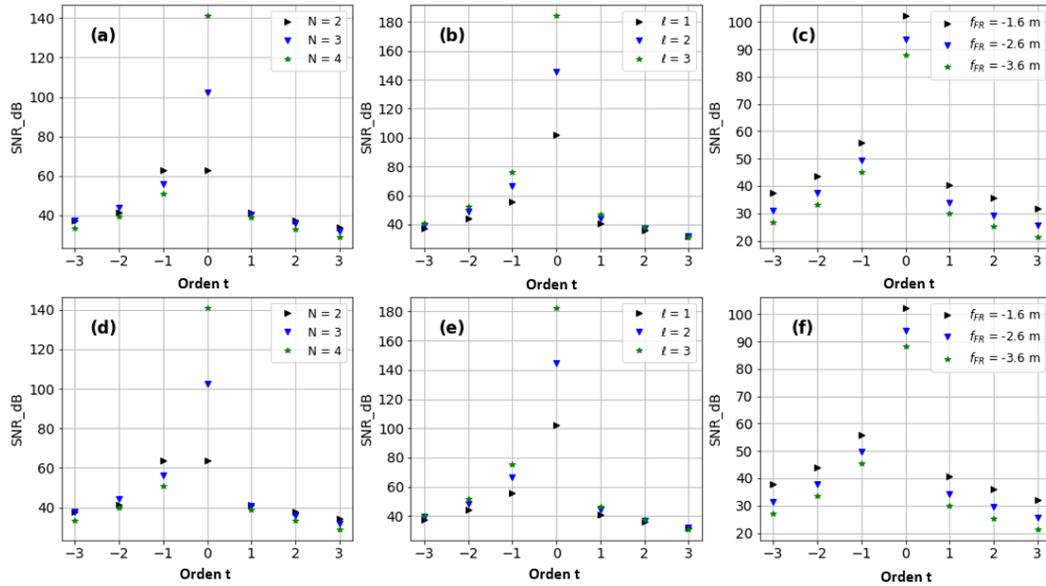


Figura 4.12: SNR como función de los ordenes para condición sobre eje (primera fila) y los fuera de eje (segunda fila). En todos los casos  $f = 200$  mm,  $\lambda = 532$  nm,  $w = 6.0$  mm, siendo (a) y (d)  $\ell = 1$ ,  $f_{FR} = -1.6$  m y  $N$  variable; (b) y (e)  $N = 3$ ,  $f_{FR} = -1.6$  m y  $\ell$  variable; y (c) y (f)  $\ell = 1$ ,  $N = 3$  y  $f_{FR}$  variable.

La Figura (4.12) muestra cuando el haz está centrado en el eje ( $r_{off} = 0.0$  mm, primera fila) y fuera del eje ( $r_{off} = 1.0$  mm, segunda fila). En todos los casos  $w = 6$  mm,  $f = 200$  mm,  $\lambda = 532$  nm, y la sumatoria de la ecuación (4.1) se hace solo con ordenes  $t - 10 \leq t \leq t + 10$ . Las sub Figuras 4.12(a) y (d) representan el SNR para diferentes niveles de discretización de fase, mientras que las sub Figuras 4.12(b) y (e) se refieren a

diferentes cargas topológicas, y en las sub Figuras 4.12(c) y (f) se presentan diferentes valores  $f_{FR}$ .

Desde las Figuras, no hay diferencias aparentes entre los SNR para los casos fuera de eje y en el eje. Además, en todos los casos el SNR es mayor a 20 dB, lo que significa que cualesquiera de los vórtices secundarios podrían ser empleados, por ejemplo, en aplicaciones metrológicas. En todos los casos (excepto para  $N = 2$ ), el orden cero tiene un mejor SNR que los otros ordenes. Las Figuras 4.12(a) y (d), y las Figuras. 4.12(b) y (e) presentan un comportamiento similar: una variación pronunciada en el SNR para  $t = 0$ , una pequeña disminución para  $t = -1$  cuando  $N$  aumenta ( $\ell$  disminuye) y casi ninguna variación para los otros ordenes. Por otro lado, Las Figuras 4.12(c) y (f) presentan una variación casi constante del SNR para todos los ordenes. La reducción en el SNR cuando  $f_{FR}$  se hace más grande es porque la DVPL tiene a volverse una DSPP. Estos resultados indican que la razón señal-ruido no es un limitante y que vórtices secundarios de diferentes ordenes pueden ser generados y observados. Ahora para complementar nuestro análisis sobre vórtices ópticos secundarios, miremos que sucede con sus distribuciones de fase.

## 4.6. Fase

En las Figuras (4.13) y (4.14) se muestran las fases correspondientes a los patrones de intensidad de las Figuras (4.6) y (4.7), respectivamente. De la Figura (4.13), se pueden resaltar tres características importantes: 1. Las singularidades de fase (o el centroide del SOV) se desplazan de acuerdo a lo esperado; 2. Las líneas de discontinuidad de la fase muestran una curvatura proporcional al desplazamiento; y 3. Los ángulos entre las líneas de discontinuidad también cambian. Además, para los SOVs, como en el caso de la intensidad, la separación de las singularidades de la fase cambia proporcional al desplazamiento fuera de eje del haz Gaussiano.

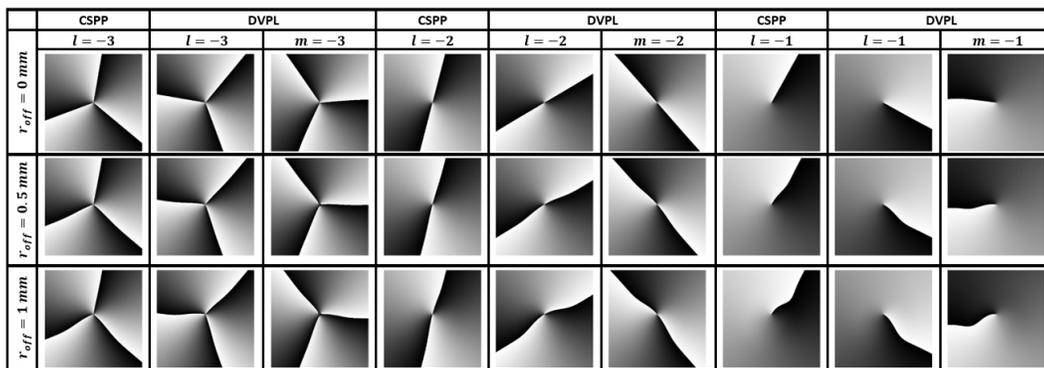


Figura 4.13: Comparación de las fases de un OV obtenidas usando una CSPP, DVPL vórtice principal, y DVPL vórtice secundario, para los diferentes desplazamientos indicados en la Figura. Se usa una escala de grises donde la fase corre continuamente de 0 (negro) a  $2\pi$  (blanco). Se emplearon los mismos parámetros de la Figura 4.6.

Para apreciar con más detalle dichos cambios, en la Figura (4.14) se muestra la distribución de fase de un OV con carga topológica -3.

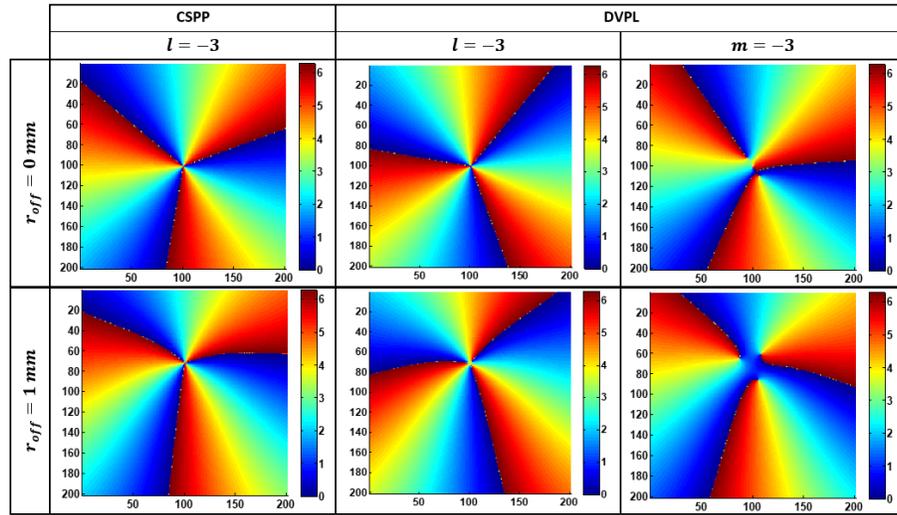


Figura 4.14: Vista cercana de la distribución de fase generada con una CSPP (primera columna), una DVPL con  $\ell = -3$  (segunda columna), y un vórtice secundario generado con una DVPL con carga  $m = -3$  (tercera columna). La fila uno corresponde a un haz centrado, y la fila dos a un haz incidiendo 1 mm fuera de eje. Se usaron los mismos parámetros que en la Figura 4.7.

En la fase al igual que en la intensidad se hace evidente la separación de las singularidades en el SOV.

#### 4.6.1. Indicadores de medida a partir de la fase

Los diferentes comportamientos de la posición de las singularidades de fase y las líneas de discontinuidad pueden ser usadas para seguir el desplazamiento fuera del eje del haz Gaussiano. Con este fin, a continuación exploramos la viabilidad de que alguna de las características de la fase pueda ser empleada como estimador de desplazamiento. En la Figura (4.15) (primera fila) mostramos algunas posibles métricas para cargas topológicas -1, -2 y -3.

Estudiemos la distribución de fase para  $m = -1$  (Figura 4.15a (superior)). Se ve que el efecto principal en los OVs con esta carga es una rotación angular de su línea de discontinuidad. Con esto en mente, se analiza la rotación angular en función del desplazamiento fuera de eje del haz Gaussiano, encontrando una dependencia lineal (ver Figura (4.15a (inferior))). Respecto a los OVs con carga  $m = -2$ , el ángulo entre las líneas de discontinuidad da cuenta del desplazamiento (ver Figura (4.15)b (superior)). Para  $r_{off} = 0$ , su separación es igual a  $\pi$ , pero a medida que el desplazamiento fuera del eje aumenta, las líneas de discontinuidad se acercan más entre sí. Graficando la diferencia de fase entre las líneas de discontinuidad como función del desplazamiento fuera de eje, como puede verse en la Figura (4.15b (inferior)) se presenta una dependencia lineal. Finalmente, para  $m = -3$  (ver Figura (4.15c (superior))), como indicador

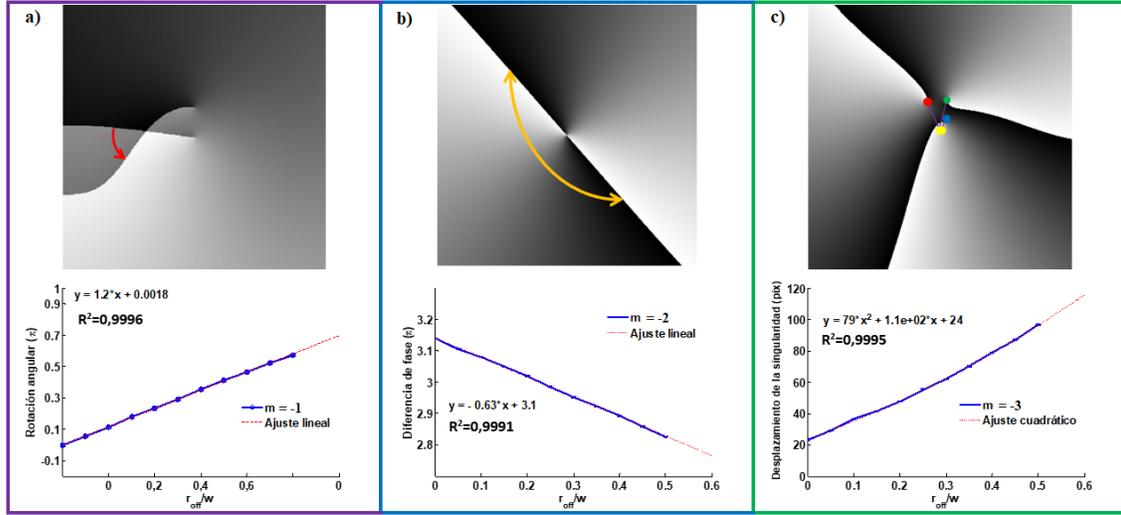


Figura 4.15: Métricas de traslación usando la distribución de fase de vórtices ópticos secundarios con cargas topológicas: (a)  $m = -1$ , (b)  $m = -2$ , y (c)  $m = -3$ .

de medida para el desplazamiento, la suma de las distancias de cada punto de la singularidad (rojo, verde y azul) al centroide (punto amarillo) es evaluada. En este caso, como se muestra en la Figura (4.15c (inferior)), una dependencia cuadrática es encontrada. Para  $r_{off} = 0$ , la mínima distancia obtenida es diferente de cero dado que para SOVs, aún con el haz Gaussiano centrado hay una ligera separación de la singularidad causada por la superposición de otros vórtices que llegan desenfocados a ese plano de observación.

Para el análisis previo, usamos la fase correspondiente a una técnica de recuperación de fase sin error. Sin embargo, si se considera algún error en el procedimiento de recuperación de la fase existirá una limitación en la predicción del desplazamiento. Un análisis superficial nos permitirá algunas estimaciones básicas de los posibles errores que aparecería cuando la fase es usada para seguir el desplazamiento.

### Errores en la medida de fase

Para estimar dicho error consideramos dos aspectos: primero la máxima incertidumbre en la medida de la fase, segundo, que el error se propagará dependiendo de la métrica utilizada. Para nuestro cálculo, nosotros usamos como técnica de recuperación un algoritmo de cambios de fase de tres pasos [40]. Esta técnica requiere tres interferogramas del campo óptico con pasos de fase entre cada interferograma de  $2\pi/3$ . Con estos tres interferogramas la fase se puede recuperar usando la siguiente expresión:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(I_1 - I_3)}{2I_1 - I_2 - I_3}\right). \quad (4.9)$$

Donde  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$  corresponden a los tres interferogramas de irradiancia con pasos de fase de  $0$ ,  $2\pi/3$ , y  $4\pi/3$ , respectivamente. Si asumimos que el error en la determinación de todos los interferogramas es el mismo (que únicamente es el asociado a la potencia de la fuente de iluminación), el error en el método de recuperación de fase será

$$\alpha_\psi = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\alpha_I^2}{I_1^2 - I_1(I_2 + I_3) + I_2^2 - I_2I_3 + I_3^2}}. \quad (4.10)$$

Donde  $\alpha_I$  es el error en las medidas de irradiancia. Para el caso más simple, se puede suponer que el único error en los interferogramas es la variación inherente en la irradiancia, dada por  $\alpha_I = \sqrt{I}$  (asumiendo un proceso de Poisson), y que el haz referencia es una onda plana; luego, se puede demostrar que el error en la fase es  $\alpha_\psi = 0.13\pi$ .

Para la segunda parte, la propagación del error depende de la métrica utilizada. Como ejemplo usemos la métrica correspondiente a  $m = \pm 1$  (ver Figura 4.15a). Primero, tenemos que medir la fase en el mismo punto para dos desplazamientos, luego calcular el ángulo usando la relación  $\Delta\theta = \frac{\psi_2 - \psi_1}{m}$ . El error correspondiente es  $\alpha_{\Delta\theta} = \sqrt{2}\alpha_\psi$ .

Dado que hemos encontrado que para  $m = \pm 1$  la relación entre los desplazamientos y el ángulo es lineal,  $\Delta x = k_1\Delta\theta + k_2$ , con  $k_1$  y  $k_2$  dos constantes a determinar, la incertidumbre en el desplazamiento será  $\alpha_{\Delta x} = \sqrt{2}k_1\alpha_\psi = 0.13\sqrt{2}\pi k_1$  en unidades de longitud. Midiendo  $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$  en diferentes puntos. Si se realizan  $n$  medidas, la incertidumbre final en el desplazamiento es  $\alpha_{\Delta x} = 0.26\pi k_1/\sqrt{2n}$ . Desde ésta expresión es evidente que es preferible un ángulo que cambie rápidamente en función del desplazamiento. Para el caso especial donde  $k_2 = 0$  podemos escribir el error relativo  $\alpha_{\Delta x}/\Delta x = 0.26\pi/\sqrt{2n}\Delta\theta$ , y observar que a mayor ángulo menor el error relativo. Un tratamiento similar puede ser desarrollado para las otras métricas de modo que estimadores de error en la medida de la fase puedan ser obtenidos y de este modo la precisión de las métricas puedan ser establecidas.

Los cambios en la fase como una función del desplazamiento fuera de eje de los SOVs podría encaminarnos a la forma de establecer otros indicadores de medida. En trabajos futuros se deben realizar más investigaciones sobre este tema que permitan determinar la resolución de la medida.

Hasta ahora se ha encontrado una expresión analítica del campo óptico producido cuando un haz Gaussiano fuera de eje es difractado por una lente productora de vórtice discretizada, generando un arreglo multifocal de vórtices ópticos secundarios. Nuestra expresión analítica es más general que las reportadas en la literatura dado que nos permite observar comportamientos en la distribución de fase e intensidad de vórtices secundarios fuera de eje, lo cual no había sido reportado hasta el momento. La contribución de cada término en el campo óptico es analizado, mostrando que los

resultados son dependientes de parámetros del sistema tales como niveles de discretización, tamaño del haz Gaussiano y el orden  $t$ . Los SOVs tienen un excelente SNR sin problemas de ruido. Con respecto a la intensidad, se demostró que para algunos SOVs la carga topológica se divide en vórtices unitarios. Por otra parte, si aparece una desalineación, la separación de las singularidades de fase de los vórtices incrementa. No obstante, independientemente del desalineamiento, el centroide de las singularidades de fase todavía sigue la misma trayectoria de la dislocación de la fase de una CSPP. Con respecto a las fases del campo, los SOVs tienen cambios notorios en sus distribuciones de fase. Debido a las desalineaciones, ellos tienden a presentar rotaciones de discontinuidad más significativas, acompañadas por una separación de las líneas de discontinuidad de la fase. Por tanto, las desalineaciones pueden asociarse con los desplazamientos y la separación de las singularidades de fase. Estos comportamientos podrían dar lugar a la posibilidad de utilizar la fase como parámetro para medir los desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano.

Todo el análisis desarrollado sobre vórtices ópticos secundarios nos permite identificar que, dado los porcentajes de energía asociado a los niveles de discretización y la posibilidad de ser detectados, estos vórtices pueden ser usados para mejorar la sensibilidad de un sistema óptico de DVPL fija, con solo desplazarnos a lo largo del eje óptico, siendo una buena alternativa para mejorar la alineación de sistemas ópticos. Además, dado el arreglo multifocal, la caracterización de estos SOVs permitiría proyectar su aplicación a otros temas de interés actual, por ejemplo cadenas de trampas ópticas cuya separación y fuerza puedan ser sintonizadas con parámetros de la DVPL o del montaje físico.

Detallado ya el campo óptico obtenido con el haz Gaussiano incidiendo fuera del eje óptico, ahora enfoquémonos en las diferencias que se presentan cuando se desplaza fuera del eje la DVPL en lugar del haz Gaussiano. Mediante simulaciones computacionales veamos como se comporta la intensidad, fase y como es el desplazamiento del centro de masa de los vórtices.

## CAPÍTULO 5

---

# DESPLAZAMIENTO DE LA MÁSCARA DE FASE

---

En capítulos anteriores se mostró analíticamente que cuando un haz Gaussiano incide fuera del eje óptico que pasa por el centro de una lente física, se presentan asimetrías de intensidad, desplazamientos del centro de masa y variaciones en los mapas de fase de los vórtices ópticos principales y secundarios. Experimentalmente, también se encontró que cuando se desplaza la máscara DVPL fuera de eje en lugar del haz Gaussiano, el parámetro  $R$  se comporta de forma análoga a cuando se desplaza el haz, es decir, a medida que incrementa el valor de la carga topológica el decaimiento exponencial de éste parámetro se vuelve más pronunciado. Sin embargo, en este capítulo se mostrará que no es equivalente desplazar la DVPL en lugar del haz. Los cambios asimétricos de intensidad son mayores cuando la máscara de fase es desplazada, además, el desplazamiento del centro de masa tiende a ser más significativo y dependiente de parámetros de la DVPL como  $N$ ,  $\ell$ ,  $f_{FR}$  y el contador  $t$ . Así mismo, la fase también presenta cambios significativos como una mayor rotación. A continuación, analíticamente se indica cuál es el desplazamiento esperado del centro de masa y posteriormente, mediante un análisis computacional se mostrarán las diferencias que se obtienen cuando se desplaza el haz Gaussiano a cuando se desplaza la DVPL.

### 5.1. Efectos de desplazamientos fuera del eje óptico de la máscara de fase

Ahora supongamos que la máscara de fase es la que se encuentra fuera del eje óptico en una posición  $(r_{off}, \theta_{off})$ , de modo que el campo a la salida de la máscara de fase está dado por

$$U_1(r, \theta) = e^{-\frac{r^2}{w^2}} \sum_{t=-\infty}^{\infty} C_{Nt} e^{-\frac{jk r^2 (Nt+1)}{2f_{FR}}} e^{j\ell(Nt+1)\theta}. \quad (5.1)$$

Las variables  $r'$  y  $\theta'$  asociadas al desplazamiento fuera del eje de la máscara se deben expresar en términos de las coordenadas  $r$  y  $\theta$ , para resolver la integral dada en (2.8). Recordando nuevamente la Figura de cambio de coordenadas

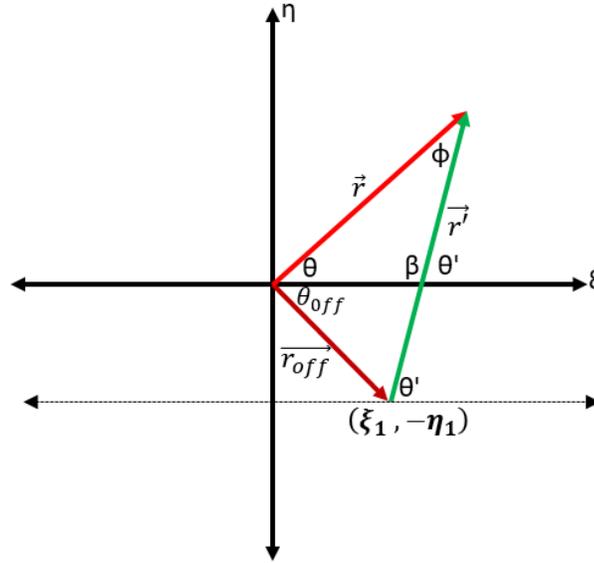


Figura 5.1: Cambio de coordenadas.

se puede ver que  $\theta' = \theta + \phi$  y  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{off}$ . Llevando a  $r'$  en términos de  $r$ , para la lente de Fresnel se obtiene:

$$\exp \left[ -\frac{jk r'^2 (Nt + 1)}{2f_{FR}} \right] = \exp \left[ -\frac{jk r_{off}^2 (Nt + 1)}{2f_{FR}} \right] \exp \left[ -\frac{jk (r^2 - 2rr_{off} \cos(\theta + \theta_{off})) (Nt + 1)}{2f_{FR}} \right].$$

En coordenadas polares, la propagación de Fresnel en el espacio libre del campo dado en la ecuación (5.1) va estar dada por <sup>1</sup>

$$U_2(\rho, \beta) = \exp \left[ -\frac{jk r_{off}^2 (Nt + 1)}{2f_{FR}} \right] \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp \left[ -r^2 \underbrace{\left( \frac{1}{w^2} - \frac{jk}{2} \left( -\frac{(Nt + 1)}{f_{FR}} + \frac{1}{f} - \frac{Z}{f^2} \right) \right)}_{b_t} \right] \times \exp \left[ \frac{jk r r_{off} \cos(\theta + \theta_{off}) (Nt + 1)}{f_{FR}} \right] e^{-\frac{jk r \rho}{f} \cos(\theta - \beta)} e^{jm(\theta + \phi)} r d\theta dr,$$

<sup>1</sup>Para facilitar el desarrollo, algunos términos como la sumatoria y la constante  $C_{Nt}$  se incluirán solo hasta al final del cálculo.

que puede reescribirse de la forma

$$U_2(\rho, \beta) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-br^2} r \exp \left[ - \left( \frac{jkr\rho \cos(\theta - \beta)}{f} - \frac{jkr r_{off} \cos(\theta + \theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} \right) \right] \\ \times e^{jm(\theta + \phi)} d\theta dr \exp \left[ - \frac{jkr_{off}^2 (Nt + 1)}{2f_{FR}} \right]. \quad (5.2)$$

El término entre paréntesis de la exponencial es igual a

$$\frac{jkr\rho \cos(\theta - \beta)}{f} - \frac{jkr r_{off} \cos(\theta + \theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} = \frac{jkr}{f} \cos(\theta) \left[ \rho \cos(\beta) - \frac{r_{off} f \cos(\theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} \right] \\ + \frac{jkr}{f} \sin(\theta) \left[ \rho \sin(\beta) + \frac{r_{off} f \sin(\theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} \right]. \quad (5.3)$$

Los términos entre corchetes en (5.3) tienen unidades de longitud multiplicadas por factores seno o coseno, así que redefiniendo los términos entre corchetes de la siguiente forma:

$$\left[ \rho \cos(\beta) - \frac{r_{off} f \cos(\theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} \right] = \chi \cos(\alpha), \\ \left[ \rho \sin(\beta) + \frac{r_{off} f \sin(\theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} \right] = \chi \sin(\alpha).$$

donde  $\chi$  y  $\alpha$  estarían dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi^2 = \rho^2 + \frac{(fr_{off}(Nt + 1))^2}{f_{FR}^2} - \frac{2f\rho r_{off}(Nt + 1) \cos(\beta + \theta_{off})}{f_{FR}} \\ \tan \alpha = \frac{\rho \sin(\beta) + \frac{r_{off} f \sin(\theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}}}{\rho \cos(\beta) - \frac{r_{off} f \cos(\theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}}} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

De este modo, usando las expresiones anteriores se obtiene

$$\frac{jkr\rho \cos(\theta - \beta)}{f} - \frac{jkr r_{off} \cos(\theta + \theta_{off})(Nt + 1)}{f_{FR}} = \frac{jkr\chi}{f} \cos(\theta) \cos(\alpha) + \frac{jkr\chi}{f} \sin(\theta) \sin(\alpha) \\ = \frac{jkr}{f} \cos(\theta - \alpha). \quad (5.5)$$

La ecuación (5.4) indica que el desplazamiento del centro de masa en el plano de observación ahora estaría dado por

$$(\rho, \beta) = \left( \frac{r_{off} f (Nt + 1)}{f_{FR}}, \frac{\pi}{2} + \theta_{off} \right), \quad (5.6)$$

Por tanto, el desplazamiento del centro de masa va a depender ahora de parámetros de la DVPL como su nivel de discretización, la focal de la lente de Fresnel y el contador  $t$ , además de la focal de la lente física. Recuerde que para desplazamientos del haz Gaussiano la dependencia radial del desplazamiento era de la forma  $\frac{2r_{off}f}{kw^2}$ ; para los parámetros comunmente utilizados los resultados indican que cuando se desplaza la DVPL, el desplazamiento del centro de masa de los vórtices sería aproximadamente un orden de magnitud mayor a cuando se desplaza fuera de eje el haz Gaussiano. Por tanto, la máscara de fase es más sensible a las desalineaciones. La expresión final para la propagación en el espacio libre del campo queda entonces definida por la integral

$$\begin{aligned}
 U_2(\rho, \beta) = & \frac{e^{jk(f+Z)}}{j\lambda f} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\pi(Nt+1)}{N}} \text{sinc}\left(\frac{Nt+1}{N}\right) \exp\left[-\frac{jk r_{off}^2 (Nt+1)}{2f_{FR}}\right] \\
 & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-b_t r^2} r e^{-\frac{jkrx}{f} \cos(\theta-\alpha)} e^{jm(\theta+\phi)} d\theta dr.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Cuya solución va depender de la variación de  $\phi$  con las variables  $r$  y  $\theta$ . Hasta este punto llega nuestro desarrollo analítico, de ahora en adelante, mediante simulaciones computacionales se analizarán las diferencias entre mover la máscara de fase y el haz Gaussiano.

## 5.2. Diferencias entre el haz y la DVPL fuera de eje

Trabajos como los mostrados en las referencias [7, 24–26], entre otros, que se basan en el desarrollo analítico de desplazamientos fuera de eje del haz de iluminación que incide sobre determinados elementos ópticos difractivos, han permitido obtener diferentes tipos de vórtices asimétricos mediante este método. Sin embargo, experimentalmente se encuentra que puede ser más sencillo un desplazamiento digital de la máscara de fase que el desplazamiento del haz de iluminación, en este sentido, es importante resaltar que estos dos movimientos aunque pueden generar un comportamiento similar no son siempre equivalentes. Como un ejemplo de esas diferencias, vamos a ver que si el elemento óptico difractivo es una DVPL y el haz de iluminación es un haz Gaussiano, se producen diferencias significativas entre ambos métodos. Como criterios de comparación se usarán los cambios de asimetría de intensidad (parámetro  $R$ ), los desplazamientos del centro de masa y las perturbaciones en la fase ante desplazamientos fuera del eje óptico de cada uno ellos.

### 5.2.1. Cambios de asimetría en intensidad

Para las simulaciones computacionales se consideran los planos de propagación mostrados en la Figura (3.1), donde en el plano del SLM puede estar desplazada fuera

de eje la DVPL o el haz Gaussiano, según sea el caso de interés. Como consideración adicional para la simulación, se incluye como pupila una función circular cuyo radio es equivalente al del tamaño del haz Gaussiano, dicha pupila multiplicaría a la función de transmitancia dada en la ecuación (2.3). Además se considera  $\lambda = 532 \text{ nm}$ ,  $f_{FR} = -1200 \text{ mm}$ ,  $f = 200 \text{ mm}$ ,  $w = 3.5 \text{ mm}$  y tamaño de pixel de  $0.001 \text{ mm}$ . Bajo estas condiciones se obtienen las distribuciones de fase e intensidad de vórtices ópticos secundarios de cargas  $m = -1, -2$  y  $-3$ , tanto para desplazamientos fuera de eje del haz como de la DVPL. En la Figura (5.2) se muestran algunas de las distribuciones de intensidad obtenidas para cargas  $m = -1, -2$  y  $-3$ .

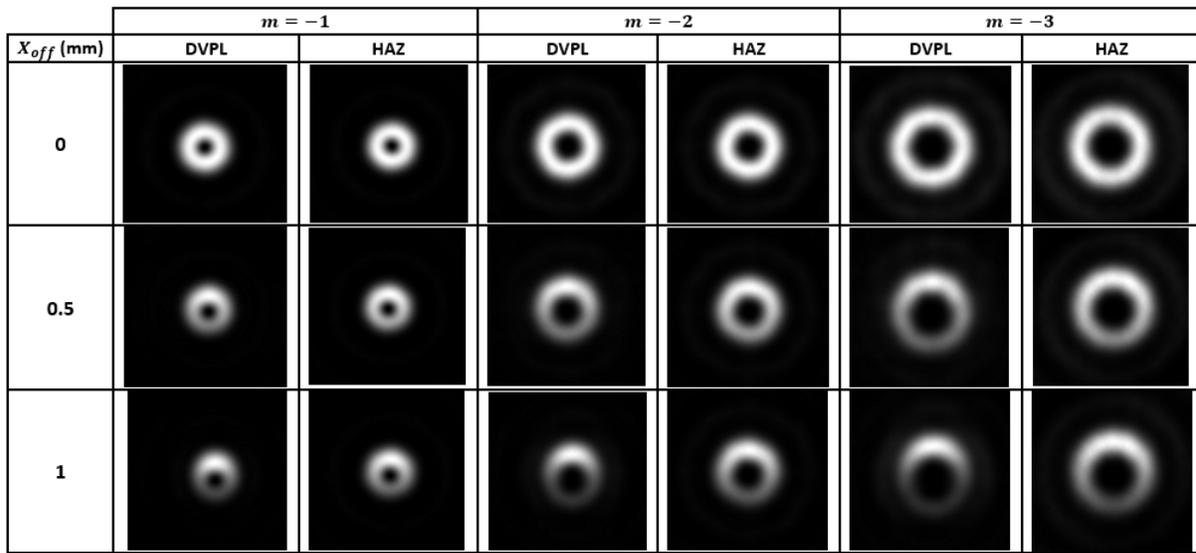


Figura 5.2: Distribuciones de intensidad para diferentes desplazamientos fuera de eje de la DVPL y el haz, para  $m = -1$  con  $N = 2, t = -1, \ell = 1$ ; para  $m = -2$  con  $N = 3, t = -1, \ell = 1$  y para  $m = -3$  con  $N = 2, t = -2, \ell = 1$ . La intensidad es normalizada para facilitar su visualización

Con solo mirar las distribuciones de intensidad es difícil diferenciar cual de los dos elementos se está desplazando fuera de eje, puesto que el patrón de intensidad es muy similar en los dos casos; solo en el máximo desplazamiento inducido (1 mm) se empiezan a observar cambios leves entre los dos métodos, siendo un poco más ovalados los SOVs generados con las DVPLs. Así que como criterio de asimetría de intensidad volvamos a analizar el parámetro  $R$  trabajado anteriormente.

Consideremos el caso en que todas las cargas topológicas secundarias se generan con los mismos valores  $N = 2$  y  $t = -1$ , por tanto cada  $m = -\ell$ . Una vez obtenidas estas distribuciones, se procede a determinar los cambios de asimetría de intensidad de forma análoga a lo realizado en el capítulo (3), para desplazamientos fuera de eje de hasta 1 mm. En la Figura (5.3) se verifica el comportamiento de  $R$  para ambos casos, es decir el decaimiento dependiente del desplazamiento fuera de eje y del valor de la

carga topológica. Para comparar los dos métodos, en la Figura (5.4) se muestran los

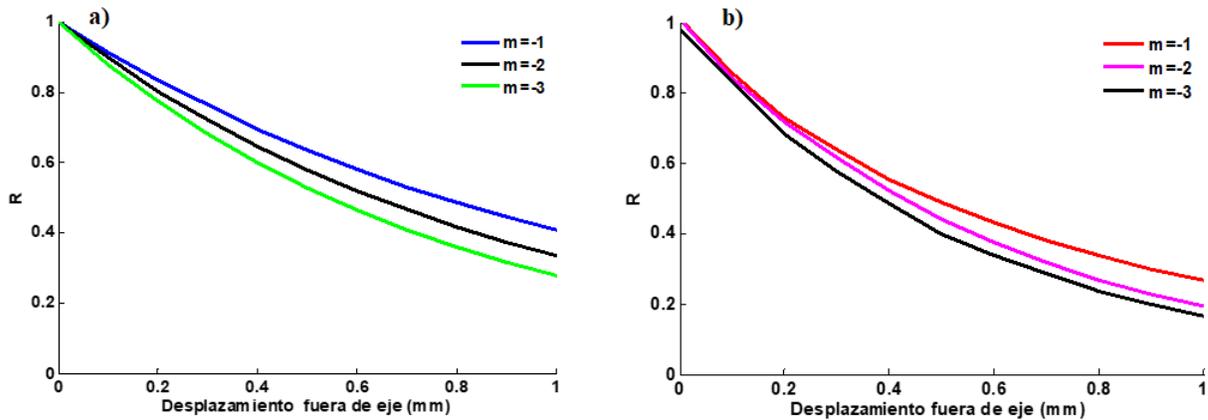


Figura 5.3: Razón de picos máximos de intensidad Vs Desplazamiento fuera de eje de a) el haz Gaussiano, b) la DVPL.

resultados para cada carga topológica.

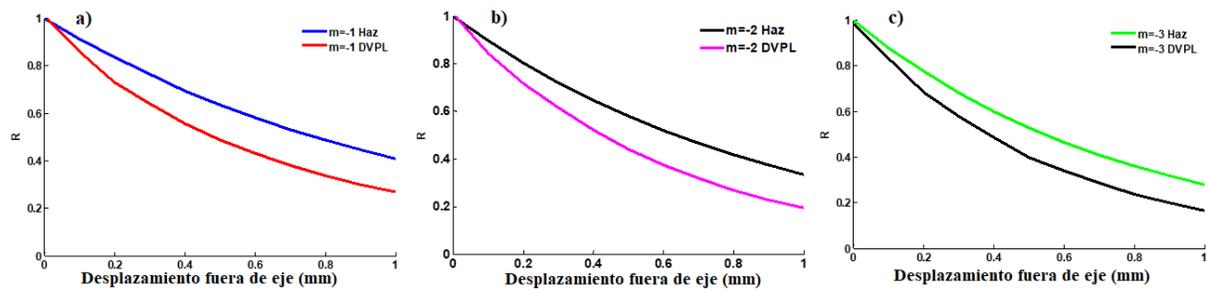


Figura 5.4: Razón de picos máximos de intensidad Vs Desplazamiento fuera de eje del haz Gaussiano y la DVPL para a)  $m = -1$ , b)  $m = -2$ , c)  $m = -3$ .

Observe que con los dos métodos se obtiene el mismo comportamiento para la razón de picos de intensidad  $R$  (un decaimiento exponencial decreciente), lo cual ratifica que para el método utilizado experimentalmente de mover la DVPL en lugar del haz (ver capítulo (3)) es completamente válido tanto el ajuste realizado como los parámetros de ajuste  $k_1$  y  $k_2$  obtenidos (ver Tabla (3.1)) desde el experimento. Adicionalmente, el parámetro  $a$  de la ecuación (3.9) que depende del tamaño del haz Gaussiano, es un valor asociado al máximo desplazamiento fuera de eje que puede sufrir la máscara o el haz para que aún se detecte intensidad del vórtice. En nuestro caso, con un desplazamiento máximo de 1 mm, aún se tendría la intensidad suficiente en el vórtice de interés, por tanto, en las Figuras (5.4) este parámetro fue omitido (solo se observa la dependencia con el desplazamiento  $X_{off}$  sin normalizar con  $a$ ). Por otro

lado, es evidente que cuando se desplaza la máscara de fase,  $R$  decae más rápido con el desplazamiento fuera de eje, indicando un mayor cambio en la asimetría de intensidad de los vórtices obtenidos por este método, siendo esto válido para todas las cargas topológicas. Es decir, el sistema es más sensible a desalineaciones de la máscara de fase. Esto puede verse a partir de los parámetros de ajuste  $k_1$  y  $k_2$  encontrados para cada carga topológica (ver Tabla (5.1)).

$m$	Haz		DVPL	
	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$
-1	$0.999 \pm 0.003$	$0.901 \pm 0.007$	$0.9863 \pm 0.025$	$1.374 \pm 0.069$
-2	$1.000 \pm 0.001$	$1.094 \pm 0.003$	$1.005 \pm 0.008$	$1.650 \pm 0.023$
-3	$0.999 \pm 0.002$	$1.276 \pm 0.004$	$0.985 \pm 0.008$	$1.779 \pm 0.026$

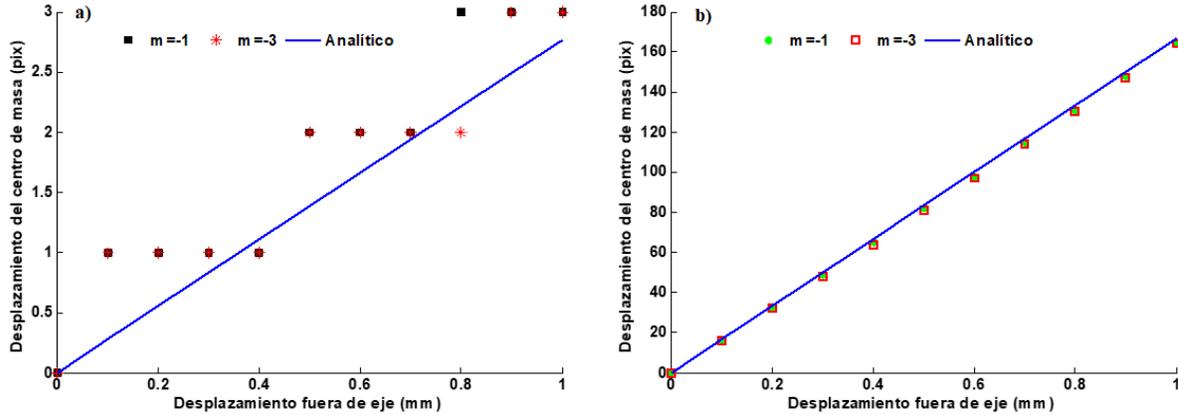
Tabla 5.1: Valores de los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  con 95 % de confianza, con el haz Gaussiano (columnas 2 y 3) y la DVPL (columnas 4 y 5) fuera de eje para  $m = -1, -2$  y  $-3$ .

De la Tabla (5.1), se nota que los valores de  $k_1$  para todos los casos se aproximan a 1, mientras que los valores de  $k_2$  los cuales son las constantes de decaimiento, aumentan con el valor absoluto de la carga topológica y, como era de esperarse, sus valores son mayores cuando se desplaza la DVPL; esto corrobora que si es mayor el cambio de asimetría de intensidad de los vórtices. Ahora miremos que sucede con el desplazamiento del centro de masa de los SOVs.

### 5.2.2. Desplazamientos del centro de masa

Anteriormente vimos que el centro de masa de los vórtices fuera de eje es quien satisface (en el plano de observación) el desplazamiento predicho analíticamente. Cuando el haz Gaussiano se desplaza fuera de eje habíamos visto que el desplazamiento era independiente del valor de la carga topológica y cambiaba con el tamaño del haz Gaussiano. En esta sección vamos a descubrir que sucede cuando la DVPL se mueve fuera de eje. En la Figura (5.5) se muestran los desplazamientos del centro de masa en función del desplazamiento para vórtice de carga  $m = -1$ ,  $m = -3$ . Cabe resaltar que debido al tamaño de la resolución de la simulación ( 1 micra), cuando los desplazamientos sufridos por el centro de masa del vórtice eran más pequeños que dicha resolución, automáticamente utilizando la función  $\text{ceil}(x)$  de Matlab se aproximaba al valor entero más cercano posible por encima de ese valor, de ahí el efecto escalera de la Figura (5.5 a). Note que, para los SOVs generados con el haz Gaussiano fuera de eje, el desplazamiento del centro de masa es independiente del valor de la carga topológica y se aproxima al valor esperado analíticamente (representado por la línea azul) teniendo un valor máximo de 3 pixeles (2.8 micras aprox de desplazamiento que se aproximan a tres pixeles). Por otro lado, para las dos DVPLs (la de carga -1 y -3) como los valores de

$N$  y  $t$  tomados en este caso para ambas cargas es el mismo, el desplazamiento del centro de masa producido por las dos también es equivalente, teniendo un valor máximo de aproximadamente 164 pixeles. Este resultado también está acorde a la predicción analítica (línea azul en la Figura) dada en la ecuación (5.6), que indica que debe ser aproximadamente de 166 micras (equivalente a 166 pixeles para el muestreo utilizado) para ambas cargas dado que el producto  $(Nt + 1)$  da el mismo resultado.



**Figura 5.5:** Desplazamiento del centro de masa de vórtices de cargas  $m = -1$  y  $m = -3$ , para a) el haz Gaussiano fuera de eje, b) la DVPL fuera de eje con  $N = 2$ ,  $t = -1$ ,  $\ell = 1$  para  $m = -1$  y  $N = 2$ ,  $t = -1$ ,  $\ell = 3$  para  $m = -3$ . Las líneas azules representan en cada Figura el desplazamiento del centro de masa esperado analíticamente.

Ahora, veamos que sucede cuando se genera el mismo valor de carga  $m$  pero con diferentes combinaciones de  $N$ ,  $t$  y  $\ell$ . Sea la DVPL1 aquella diseñada con  $N = 2$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 2$ ; la DVPL2 aquella diseñada con  $N = 3$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 1$ ; de modo que en los respectivos planos de observación, con ambas DVPLs se genera un vórtice de carga  $m = -2$ . En la Figura (5.6) se muestra el gráfico con los desplazamientos del centro de masa sufridos por los vórtices como consecuencia del desplazamiento fuera de eje de ambas DVPLs.

De forma análoga, en la Figura (5.7) se muestran los resultados para vórtices de carga  $m = -3$  obtenidos con diferentes parámetros de las máscaras.

Cuando se desplaza fuera del eje óptico la DVPL, el desplazamiento del centro de masa depende de los parámetros  $N$  y  $t$  con los que se generaron las cargas secundarias, de modo que un mismo valor de carga topológica secundaria puede presentar desplazamientos diferentes del centro de masa, siendo mayor para aquellas en las que el producto  $|(Nt + 1)|$  sea más grande, e igual en aquellas que el producto de el mismo resultado. Por otro lado, nuevamente se verifica que el desplazamiento del centro de masa es aproximadamente igual al predicho por la ecuación (5.6). Para un desplazamiento fuera de eje de 1 mm, si  $|(Nt + 1)| = 3$ , el desplazamiento máximo del centro de masa es de aproximadamente 500 pixeles, si  $|(Nt + 1)| = 2$ , es aproximadamente 333 pixeles y si  $|(Nt + 1)| = 1$ , es alrededor de 164 pixeles, lo cual está acorde con los resultados mostrados en las Figuras (5.6) y (5.7). Es decir, si se usara como sistema de

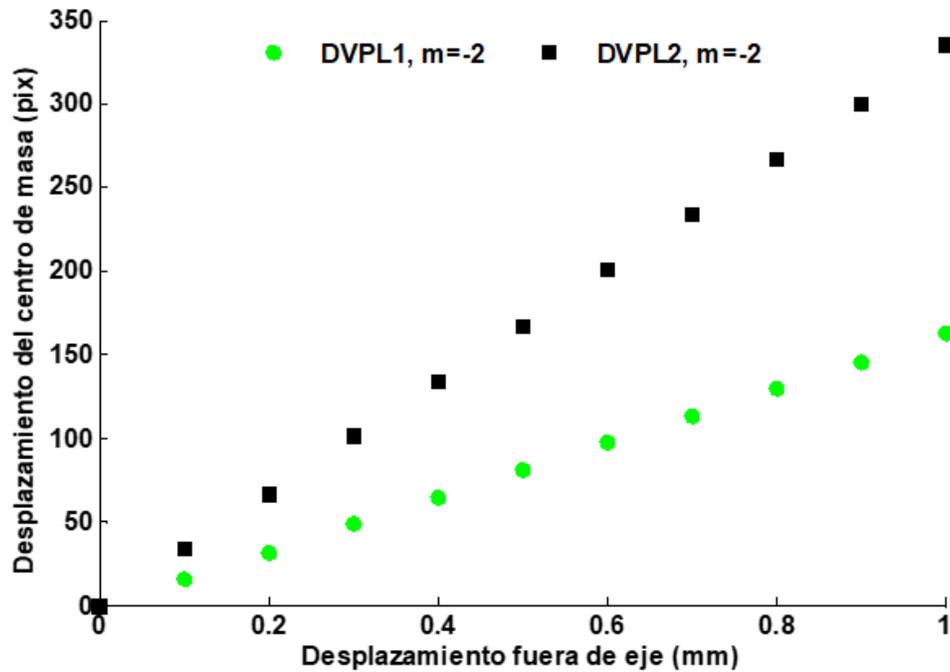


Figura 5.6: Desplazamiento del centro de masa de vórtices de carga  $m=-2$  obtenidos con la DVPL1 de parámetros  $N = 2$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 2$ , y la DVPL2 con parámetros  $N = 3$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 1$ .

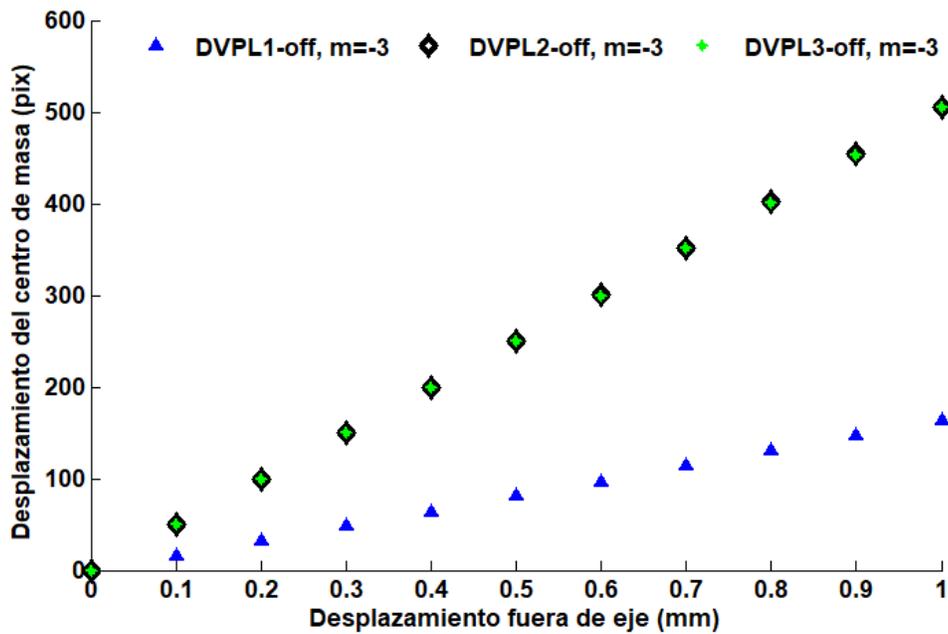


Figura 5.7: Desplazamiento del centro de masa de vórtices de carga  $m=-3$  obtenidos con la DVPL1 de parámetros  $N = 2$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 3$ , la DVPL2 con parámetros  $N = 2$ ,  $t = -2$  y  $\ell = 1$ , y la DVPL3 con parámetros  $N = 4$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 1$ .

detección una cámara CMOS con tamaño de pixel de alrededor de  $5.2 \mu\text{m}$ , en los casos mostrados esto equivale a decir que, por cada  $0.1 \text{ mm}$  que se mueva la DVPL fuera de eje, el vórtice en el plano de observación se va a desplazar transversalmente entre  $0.09 \text{ mm}$  y  $0.26 \text{ mm}$ . Esta característica tan particular puede ser útil al momento de alinear adecuadamente las máscaras de fase, ya que para mejorar la precisión se pueden programar digitalmente DVPLs con diferentes valores de  $N$  y  $t$ , según el tamaño del sensor de la cámara de detección.

Ahora para determinar si este desplazamiento del centro de masa de los SOVs es producto de la discretización de la máscara de fase o de la estructura como tal de la DVPL, reproducimos el mismo análisis computacional expuesto anteriormente pero ya con una DSPP. En este caso se obtuvo que el desplazamiento del centro era prácticamente nulo, así que no es un efecto asociado a la discretización de una máscara de fase, mas bien depende de la estructura de nuestra DVPL. Segundo, recordando que la DVPL se puede ver como la superposición de la función de transmitancia de una lente de Fresnel con la de una SPP, que es posteriormente discretizada, ahora se analiza el caso donde en lugar de una DVPL se tiene solamente programada una lente Fresnel discretizada y se compara con el resultado obtenido para  $m = -2$  (con la DVPL2), usando los mismos parámetros en la discretización de la lente de Fresnel. Se seguirá entonces el centro de masa del SOV de carga  $m = -2$ , y la intensidad de luz enfocada cuando solo se usa como máscara de fase la lente de Fresnel. En la Figura (5.8) se muestran los resultados obtenidos computacionalmente para estos casos.

Se puede observar que cuando se desplaza fuera de eje la lente de Fresnel, se produce un desplazamiento transversal en el plano de observación, de la luz enfocada en esa posición, que coincide con el de un vórtice óptico secundario generado con una DVPL con valores iguales de  $N$  y  $t$ . Se demuestra entonces que no es el vórtice como tal el que produce ese desplazamiento del centro de masa, sino que es la lente de Fresnel la responsable de tal resultado; esto como consecuencia del movimiento relativo respecto a la lente física del sistema (el eje óptico no pasa simultáneamente por el centro de ambas lentes). De estos resultados podemos resaltar que el seguimiento de los cambios en asimetría de intensidad del vórtice permitiría la correcta alineación de un par de lentes del sistema óptico.

### 5.2.3. Diferencias en las distribuciones de fase

En las distribuciones de fase se pueden observar cambios significativos entre los dos métodos. En la Figura (5.9) se muestran algunas distribuciones de fase para desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano y de la DVPL cuando  $X_{off} = 0$  (centrado),  $X_{off} = 0.5 \text{ mm}$  y  $X_{off} = 1 \text{ mm}$ .

Uno de los principales efectos de desplazar la DVPL, es la rotación de las líneas de discontinuidad de la fase con cada desplazamiento fuera de eje, siendo mucho mayor al obtenido cuando se desplaza el haz Gaussiano. En la Figura (5.10) se muestran di-

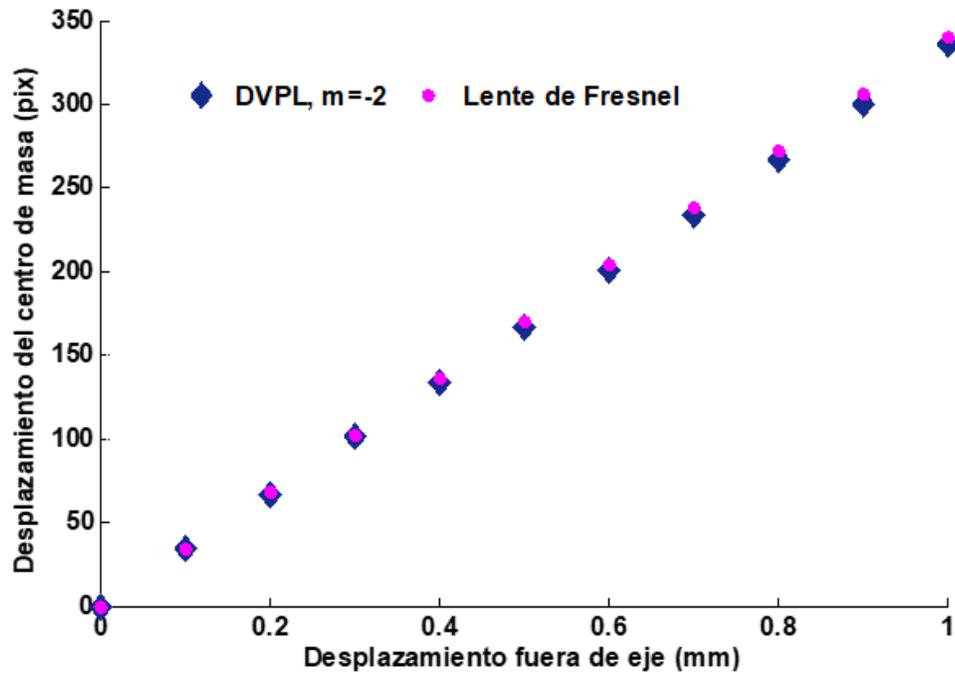


Figura 5.8: Desplazamiento del centro de masa de un vórtice de carga  $m=-2$  obtenido con la DVPL2 con parámetros  $N = 3$ ,  $t = -1$  y  $\ell = 1$ , comparado con el desplazamiento del punto de intensidad enfocado por la lente de Fresnel con parámetros de discretización  $N = 3$ ,  $t = -1$ .

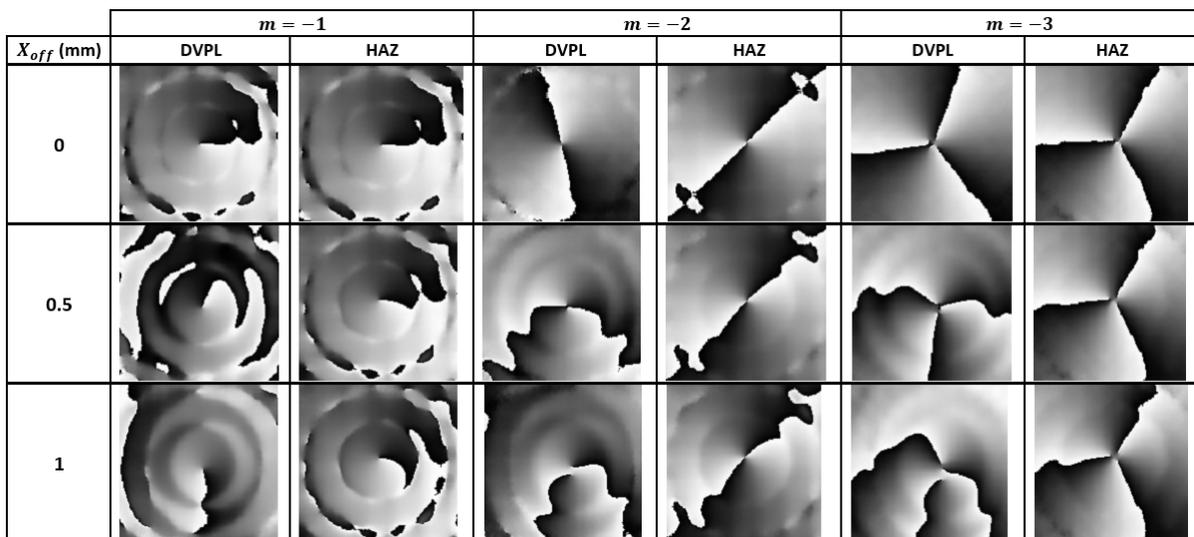


Figura 5.9: Distribuciones de fase para diferentes desplazamientos fuera de eje de la DVPL y el haz, para  $m = -1$  con  $N = 2$ ,  $t = -1$ ,  $\ell = 1$ ; para  $m = -2$  con  $N = 3$ ,  $t = -1$ ,  $\ell = 1$  y para  $m = -3$  con  $N = 2$ ,  $t = -2$ ,  $\ell = 1$ .

chas diferencias para la carga  $m = -1$ . Note que, para los desplazamientos generados, la rotación máxima de la fase cuando se mueve el haz Gaussiano es de alrededor de 0.9 rad (51.6 °) (Figura (5.10 a)) mientras que en el caso de la DVPL, se llega a una rotación máxima de 5.1 rad (292°) (Figura (5.10 b)), es decir, la diferencia entre los dos métodos es de un factor mayor a 5. Esto hace que la fase obtenida con la desalineación de la DVPL, al igual que el parámetro  $R$ , sea más sensible a detectar desalineaciones del sistema. Pues observe también que para las cargas topológicas  $|m| > 1$ , las singularidades de la fase se dividen y separan (ver sus centros) de forma significativa al mover la DVPL.

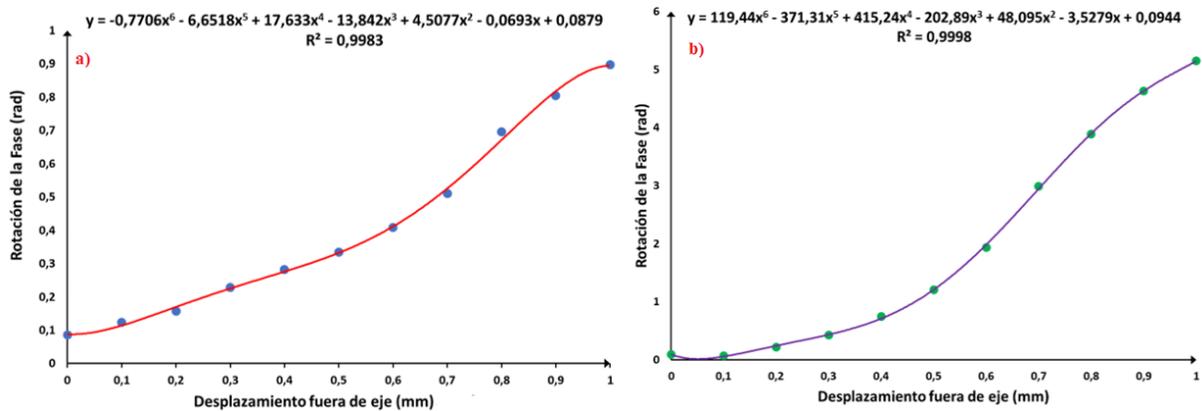


Figura 5.10: Comparación entre las rotaciones de la línea de discontinuidad de la fase para  $m = -1$  desplazando fuera de eje a) el haz Gaussiano, b) la DVPL.

De modo que, si se observara la distribución de fase de cargas  $|m| > 1$ , experimentalmente sería más sencillo (a simple vista) determinar cuál de los dos elementos se encuentra fuera del eje óptico que pasa por el centro de la lente física, puesto que, si se desplaza el haz fuera de eje son leves las distorsiones de las líneas de discontinuidad y éstas no se separan de su centro, mientras que con el desplazamiento de la DVPL las líneas de discontinuidad se separan en su centro y se aproximan entre sí a medida que incrementa la desalineación de la máscara de fase. Este resultado muestra la importancia de analizar la fase cuando se generan vórtices ópticos, ya que ésta permitiría identificar cuál de estos dos elementos está desalineado, facilitando así la adecuada ubicación del haz de iluminación y la DVPL en el sistema óptico. Por otro lado, observe que a mayor valor absoluto de carga topológica tienden a ser más significativas las distorsiones de la fase, de modo que, podríamos desplazarnos sobre el eje óptico a un plano de observación de un SOV de carga superior para mejorar la sensibilidad y hacer ajustes más finos en nuestro sistema óptico. La limitante estaría dada por la condición de disponer de energía suficiente en el SOV y el haz referencia que permita la adecuada recuperación de la fase por métodos interferométricos.

De este modo, se tiene que cuando se desplaza la DVPL en lugar del haz Gaussiano, se presentan cambios más significativos en la asimetría de intensidad de los vórtices, el desplazamiento del centro de masa y las rotaciones de las líneas de discontinuidad de la fase, así como mayor separación de las líneas de singularidad de cargas  $|m| > 1$ . El desplazamiento del centro de masa puede ser controlado manipulando los valores de  $N$  y  $t$  de tal forma que no supere el tamaño regular del sistema de detección de los vórtices, lo cuál es útil al momento de alinear adecuadamente los elementos ópticos de un sistema. Se determina que los desplazamientos del centro de masa, están asociados al movimiento relativo entre la lente física y la lente de Fresnel que conforma la DVPL, ya que sin dicha lente (usando solo una DSPP), no se producirían desplazamientos significativos del centro de masa del vórtice. Con la distribución de fase sería más fácil a simple vista definir cuál de los dos elementos (el haz o la DVPL) se encuentran desalineados.

Hasta el momento, el desarrollo del trabajo se ha enfocado en analizar la generación de cargas topológicas secundarias, las asimetrías de intensidad, distribuciones de fase y desplazamientos del centro de masa de vórtices ópticos principales y secundarios cuando se produce un desplazamiento fuera de eje ya sea del haz Gaussiano o de la DVPL. Para complementar el análisis de nuestro campo óptico, en el siguiente capítulo se abordará otra cantidad importante asociada a los vórtices ópticos: su momento angular orbital, analizando cual es el comportamiento de dicha cantidad ante desplazamientos fuera de eje del haz y la DVPL.

# CAPÍTULO 6

## MOMENTO ANGULAR ORBITAL

Una variable de interés asociada a los vórtices ópticos, es el momento angular orbital que poseen alrededor del eje de propagación. En este capítulo, para tener un análisis más completo de las propiedades de nuestro campo óptico, se incluye un análisis sobre el MAO respecto al eje óptico del sistema y respecto al centro de masa de cada vórtice. Se establece un indicador de medida para el MAO y luego se observa como cambia dicho indicador con los desplazamientos fuera de eje del haz Gaussiano; posteriormente se analiza su dependencia con el desplazamiento de la DVPL (en lugar del haz). Los resultados permiten identificar una disminución del indicador de momento angular orbital cuando nos alejamos de las posiciones correspondientes a máximos de intensidad del vórtice, además de un cambio de asimetría ante desplazamientos fuera de eje tanto del haz como de la máscara de fase.

### 6.1. Momento Angular Orbital

Analíticamente, a partir de la forma funcional del campo óptico, sería posible obtener una expresión para el momento angular orbital en la dirección de propagación  $z$  ( $J_z$ ) usando la siguiente relación [29]

$$J_z = \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty U^* \frac{\partial U}{\partial \beta} \rho d\rho d\beta \right\}. \quad (6.1)$$

Siendo  $(\rho, \beta)$  las coordenadas radial y angular, respectivamente, en el plano de observación.  $\text{Im} \{ \}$  representa la parte imaginaria de la expresión que está entre llaves. La energía total del campo óptico va estar dada por

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty U^* U \rho d\rho d\beta. \quad (6.2)$$

Sin embargo, si observamos las expresiones analíticas obtenidas para el campo óptico con el haz fuera de eje (ecuación 3.8) y la forma del campo cuando la DVPL está fuera de eje (ecuación 5.7), notamos que dada la dependencia implícita del campo con

las variables  $(\rho, \beta)$  y la sumatoria sobre el contador  $t$ , no es fácil obtener una solución analítica trivial para el momento angular orbital, este procedimiento requeriría de mucha destreza matemática y computacional, además de tiempo para tratar de obtener una solución simplificada. Para hacer un poco más simple y rápido nuestro cálculo del comportamiento del MAO, aprovechando los resultados analíticos y computacionales obtenidos anteriormente de intensidad y fase, nos basaremos en el trabajo de diploma de Daniel G Actis [41] para establecer un indicador de medida del momento angular respecto al eje óptico del sistema y respecto al centro de masa de cada vórtice. Con base a ese trabajo, para polarización lineal, la densidad de momento angular ( $j_z$ ) respecto a la posición  $(x_0, y_0)$  esta dada por

$$j_z^{(x_0, y_0)} = \frac{\epsilon_0 I(x, y)}{2\omega} \left( (x - x_0) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} - (y - y_0) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right), \quad (6.3)$$

donde  $I(x, y)$  es la intensidad del campo óptico,  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica en el vacío,  $\omega$  la frecuencia angular del modo del campo y  $\varphi(x, y)$  la fase del campo óptico. A partir de esta densidad se puede obtener  $J_z$  al integrar sobre todo el volumen ( $V$ ) de la región de interés ( $J_z = \int_V j_z dV$ ). Sin embargo, tenga presente que las medidas de intensidad y fase de los vórtices son realizadas en posiciones fijas  $z$ , por tanto, como solo se integra sobre el plano  $(x, y)$  lo que se obtiene es un  $J_z$  por unidad de longitud, que indistintamente seguiremos identificando como momento angular. Adicionalmente, todas las intensidades trabajadas van a estar normalizadas y representadas como  $I_N(x, y)$ , así que  $I_N$  varía entre  $[0, 1]$ .

Ahora, a partir de la densidad de momento angular dada en (6.3) construyamos nuestro indicador de MAO ( $\mathfrak{J}_3$ ). Tomando una superficie cuadrada ( $\square$ ) con centro en  $(x_0, y_0)$ , definamos  $\mathfrak{J}_3$  en el punto  $(x_0, y_0)$  como un indicador proporcional al momento angular en  $z$  por unidad de área

$$\mathfrak{J}_3(x_0, y_0) = q \frac{2\omega}{\epsilon_0} \frac{\int_{\square(x_0, y_0)} j_z dx dy}{\int_{\square(x_0, y_0)} dx dy},$$

Donde se introduce el factor  $\frac{2\omega}{\epsilon_0}$  para normalizar la intensidad; el parámetro  $q$  es una cantidad de magnitud igual a la unidad y dimensiones de  $[q] = L^3$  que cancela todas las unidades de longitud (asociadas al área y a  $J_z$ ) volviendo el indicador MAO adimensional. De este modo el indicador de MAO adimensional queda determinado por

$$\mathfrak{J}_3(x_0, y_0) = \frac{\int_{\square(x_0, y_0)} dx dy I_N(x, y) \left( (x - x_0) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} - (y - y_0) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right)}{\int_{\square(x_0, y_0)} dx dy}. \quad (6.4)$$

La ecuación (6.4) brinda información sobre el MAO angular promedio por unidad de área (en la posición  $z$ ), que puede ser transmitido por el campo óptico. Dado que las medidas de indicador MAO depende directamente de la intensidad del vórtice, para el cálculo se consideran áreas cuadradas en las cuales se concentra la mayor cantidad de energía. En particular, considerando la distribución de intensidad de la carga topológica  $\ell = 1$  a partir de su perfil de intensidad se seleccionaron tres áreas: 1)  $A_3 = L_3^2$  siendo  $L_3$  la longitud del ancho del perfil de intensidad para el cuál el mínimo valor de energía del vórtice decae como  $1/e^2 \approx 0.15$ ; en esta región se encuentra la mayor cantidad de energía del vórtice. 2)  $A_2 = L_2^2$  siendo  $L_2$  corresponde a la longitud del ancho a media altura del perfil de intensidad para la cual el valor mínimo de intensidad es  $I_N \approx 0.5$ . 3)  $A_1 = L_1^2$  donde  $L_1$  corresponde a la longitud del ancho del perfil de intensidad para la cual el valor mínimo de intensidad es  $I_N \approx 0.8$ . En la Figura (6.1) se esbozan dichas longitudes sobre el perfil de intensidad con los valores mínimos de energía. En la Figura (6.2) se ilustra, respecto al centro del vórtice, las porciones correspondientes a cada área a usar para los cálculos del indicador MAO.

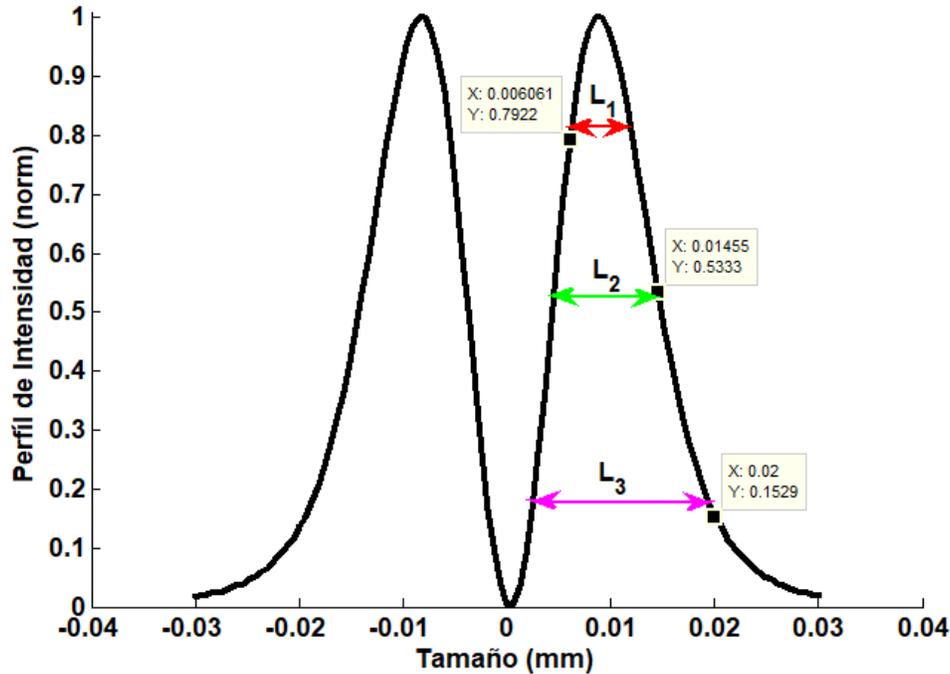


Figura 6.1: Perfil de intensidad radial de un VO de carga  $\ell = 1$ , con las Longitudes  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  y sus respectivos valores mínimos de energía.

Definidas las áreas de evaluación del indicador MAO, ahora veamos como éste varía ante los desplazamientos fuera de eje del haz y de la DVPL.

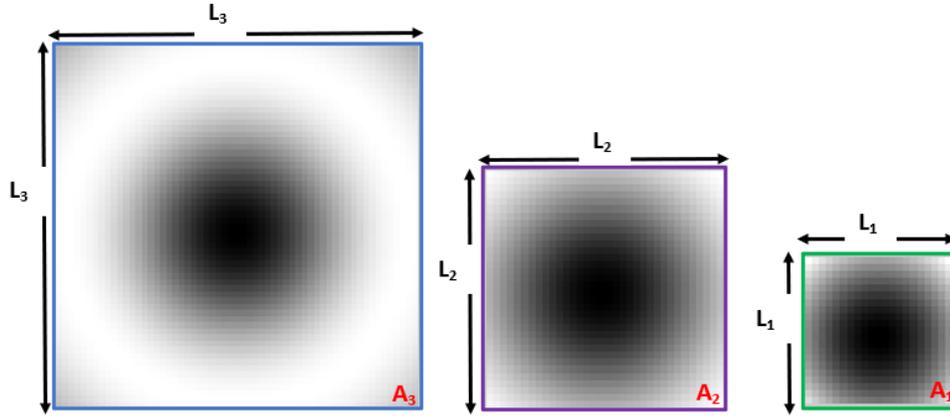


Figura 6.2: Ilustración de las porciones correspondientes a las áreas cuadradas  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  sobre las cuales se determina el indicador de momento angular orbital. El vórtice mostrado es de carga  $\ell = 1$ .

## 6.2. Momento angular orbital para Haz Gaussiano fuera de eje

Primero consideremos solo los vórtices principales obtenidos para tres desplazamientos fuera de eje del haz Gaussiano:  $x_{off} = 0$  (caso centrado),  $x_{off} = 0.5$  mm y  $x_{off} = 1$  mm. Denominemos “MAO eje” aquel obtenido cuando  $\mathfrak{J}_3$  es medido respecto al eje óptico del sistema, esto es  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , y “MAO centro masa” aquel obtenido cuando  $\mathfrak{J}_3$  es medido respecto al centro de masa del VO; recordando que para desplazamientos fuera de eje del Haz Gaussiano en la dirección  $x$ , el desplazamiento del centro de masa está dado por  $(x_0, y_0) = (\frac{2f\lambda x_{off}}{2\pi w^2}, 0)$ . A partir de la expresión analítica del campo ((ecuación 3.8)) se obtienen las distribuciones de intensidad y fase para vórtices de cargas principales  $\ell = 1, 2$  y  $3$  con  $N = 2$  y  $t = 0$ . Los parámetros utilizados fueron  $f = 200$  mm,  $f_{FR} = -1.2$  m,  $w = 3.5$  mm y  $\lambda = 532$  nm. Por ende el desplazamiento máximo esperado para  $x_{off} = 1$  mm es de aproximadamente 2.8 micras. En la figura (6.3) se muestran los valores obtenidos del indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa para los tres desplazamientos fuera de eje analizados. Cabe resaltar que para todas las figuras, los ejes rotulados como “MAO” o “MAO CENTRO MASA” hacen referencia al indicador de momento angular ( $\mathfrak{J}_3$ ). Para los cálculos cada área de interés  $A_1$ ,  $A_2$  o  $A_3$  fue desplazada haciendo un barrido sobre el eje vertical de a dos pixeles. Para los parámetros utilizados, las áreas consideradas tienen tamaños aproximados  $A_1 = 37$  nm<sup>2</sup>,  $A_2 = 110$  nm<sup>2</sup> y  $A_3 = 310$  nm<sup>2</sup>. Primero se determina el gradiente de las fases y luego a partir de la ecuación (6.4) se determina el indicador MAO en cada caso.

Dado que el desplazamiento máximo sufrido por el centro de masa del vórtice respecto al eje óptico es de tan solo  $2.8 \mu\text{m}$ , como se ve en la Figura (6.3) no se presentan

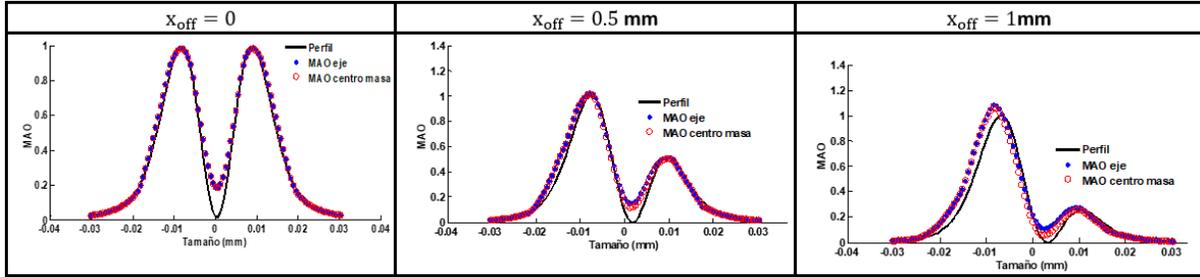


Figura 6.3: Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa para  $x_{off} = 0, 0.5 \text{ mm}$  y  $1 \text{ mm}$ , con  $\ell = 1$  para el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de intensidad normalizada del vórtice tomado sobre a una línea que pasa verticalmente por su centro. El tamaño de área usado es el correspondiente a  $A_1$ .

diferencias significativas entre el indicador MAO centro masa y el indicador MAO eje. Además, como mostramos anteriormente este desplazamiento máximo es independiente del valor de la carga topológica, así que, como no hay casi variación entre los dos casos bastará con calcular uno de los dos. Por tal motivo, para el haz fuera de eje solo se va a determinar el indicador MAO centro masa analizando su dependencia con el tamaño del área. Para ello empezamos usando vórtices principales de cargas  $\ell = 1, 2$  y  $3$ . En las Figuras (6.4)-(6.6) se muestran los resultados obtenidos con las tres áreas y desplazamientos considerados.

De la Figura (6.4) observe que en las áreas más pequeñas los valores máximos del indicador MAO se producen en los picos de máxima intensidad del vórtice, conservando una relación de simetría respecto a su centro cuando no hay desplazamiento fuera de eje del haz, lo cual indica que para esas áreas la forma de los perfiles de intensidad del vórtice son completamente resueltas. Cuando hay un desplazamiento fuera de eje (Figuras (6.5) y (6.6)), ya estas relaciones de simetría se pierden y el indicador MAO tiende a un solo pico máximo de menor valor. Para la carga  $\ell = 1$  se hace más evidente que a medida que aumenta el área respecto a la cual se está midiendo el indicador MAO, incrementa su valor en el centro del vórtice (eje óptico). Dado que  $\mathfrak{J}_3(x_0, y_0)$  brinda es una relación entre el momento angular por unidad de área, es evidente que esta relación no es proporcional, es decir, el momento angular no aumenta proporcional al área, lo que es equivalente a decir que respecto al centro de masa del OV, el MAO que experimentaría una partícula va depender tanto de su posición sobre el plano del vórtice como de su tamaño.

Por otro lado, de la Figura (6.4) observe que el valor máximo que toma nuestro indicador MAO se aproxima al valor de la carga topológica, indicando que la componente en  $z$  del momento angular es proporcional a la carga topológica, como se espera cuánticamente [42]. Ahora, si en las Figuras (6.5) y (6.6) observamos solo el lado positivo de las figuras se tendría que a medida que aumenta el desplazamiento fuera de eje del haz Gaussiano, disminuye el valor del indicador momento angular orbital, pero

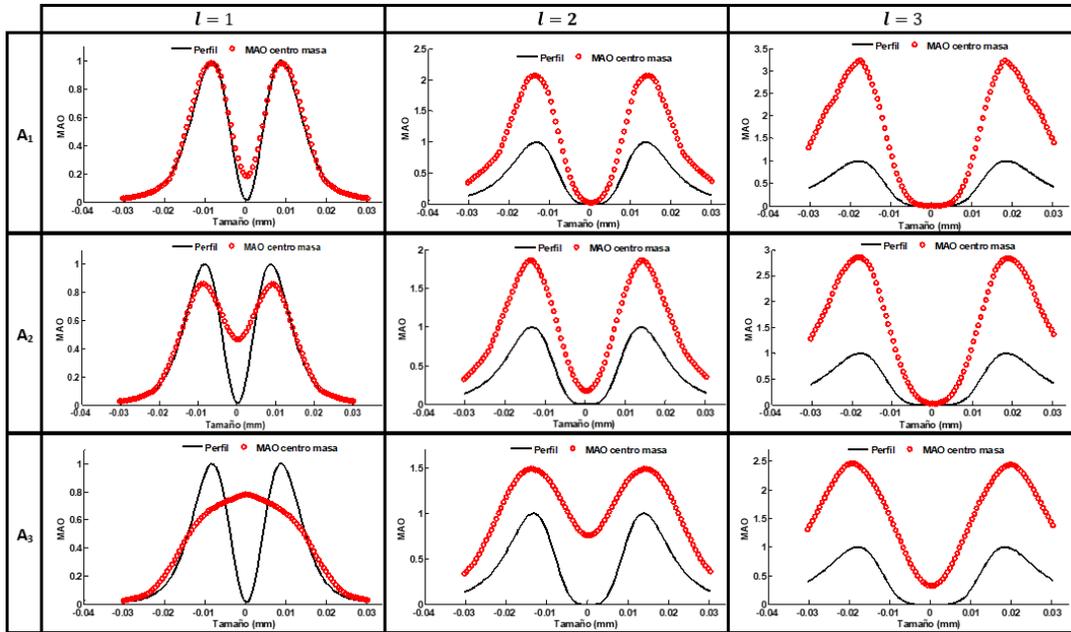


Figura 6.4: Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa con  $x_0 f f = 0$ , en vórtices principales de cargas  $l = 1, 2$  y  $3$ , con el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de la intensidad normalizada del vórtice tomado respecto a una línea sobre el eje vertical que pasa por el centro del vórtice.

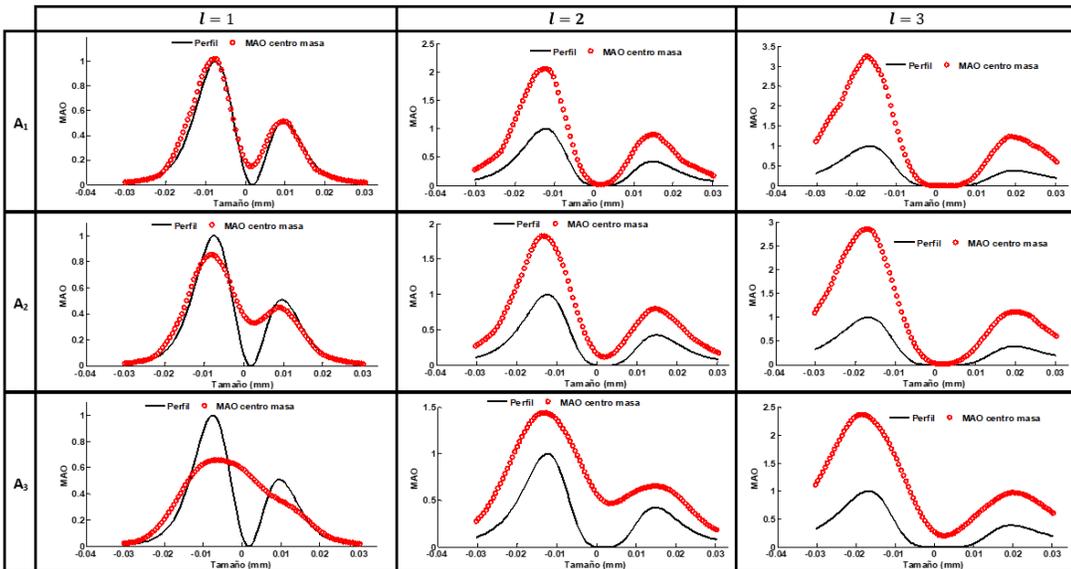


Figura 6.5: Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa con  $x_0 f f = 0.5$  mm, en vórtices principales de cargas  $l = 1, 2$  y  $3$ , con el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de la intensidad normalizada del vórtice tomado respecto a una línea sobre el eje vertical que pasa por el centro del vórtice.

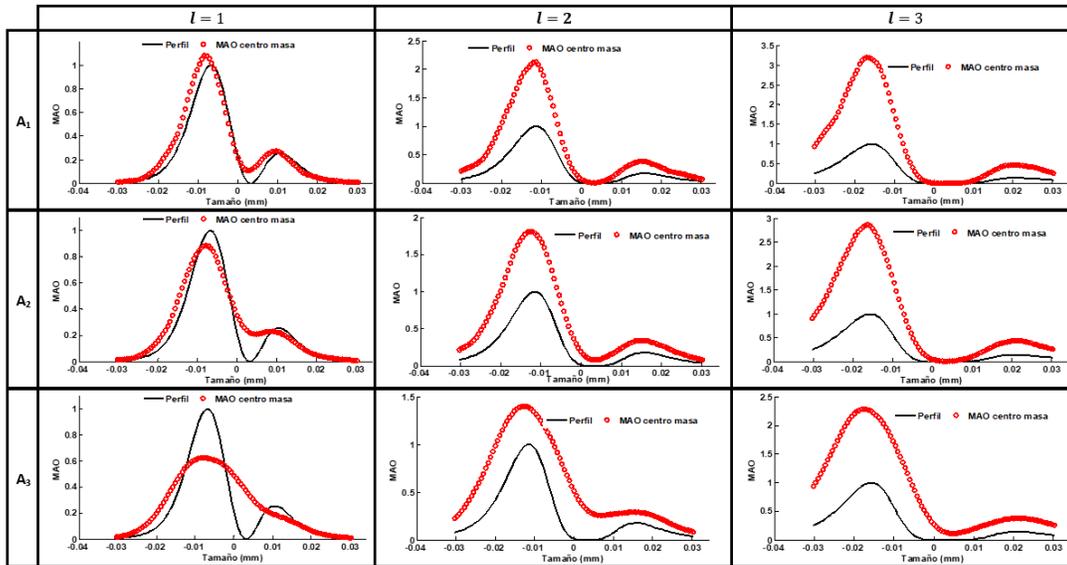


Figura 6.6: Indicador MAO respecto al eje óptico y el centro de masa con  $x_o f f = 1$  mm, en vórtices principales de cargas  $\ell = 1, 2$  y  $3$ , con el haz Gaussiano fuera de eje. La línea negra corresponde al perfil de la intensidad normalizada del vórtice tomado respecto a una línea sobre el eje vertical que pasa por el centro del vórtice.

si se observa el lado izquierdo vemos que en ese sentido aumenta. Por tanto, cuando hay desplazamiento fuera de eje la velocidad de variación de la fase alrededor de la singularidad no sería constante, es decir, el movimiento rotacional no sería uniforme.

Ahora, veamos la dependencia del momento intrínscico con la posición, el cual llamaremos "MAO partícula". Consideremos partículas con dimensiones iguales a las de las áreas cuadradas trabajadas  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  y cuyos centros estarán posicionados en  $(x_p, y_p)$  con  $x_p$  fija y  $y_p$  variando de a dos pixeles. En la Figura (6.7) se ilustra para el área  $A_1$  respecto a el vórtice de carga  $\ell = 2$  usado para el cálculo del indicador MAO partícula.

Se realizan estos cálculos para las tres áreas a diferentes desplazamientos fuera de eje del haz Gaussiano y se compara con los valores obtenidos para el indicador MAO respecto al centro de masa con los mismos desplazamientos.(ver Figura (6.8)).

Los resultados mostrados en la Figura (6.8) dan cuenta de la rotación sobre su propio eje que pueden experimentar partículas simétricas de diferentes tamaños en puntos localizados sobre el plano transversal del vórtice. Note que partículas de tamaño similar al área  $A_1$  solo experimentarían una leve rotación sobre su propio eje en cercanías a la singularidad del vórtice, aunque esta rotación tiende a cero cuando la desalineación es mas grande. Entre mayor sea el tamaño de la partícula se torna más significativa la rotación sobre su propio eje en el centro de masa del vórtice y a su vez aumenta el valor del indicador MAO respecto a la singularidad, observe que cuando aumenta el valor máximo del momento intrínscico de la partícula disminuye su valor máximo de MAO. Con los desplazamientos fuera de eje se pueden presentar posiciones en las que el indi-

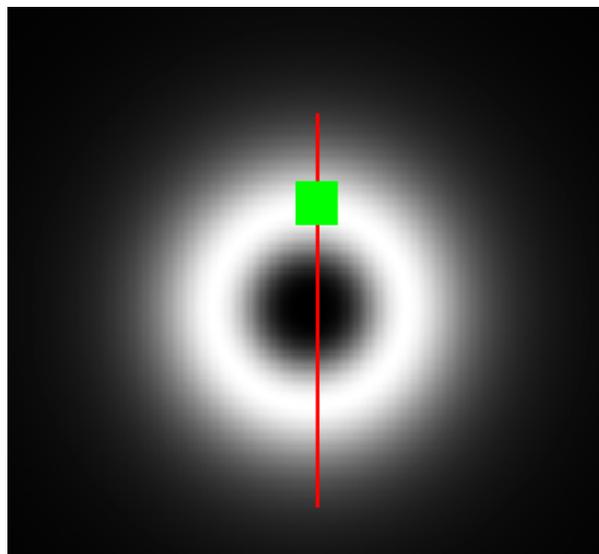


Figura 6.7: Ilustración del tamaño de la partícula de área  $A_1$ . El recuadro verde representa el tamaño del área de la partícula y la línea roja la línea sobre la cual nos desplazamos verticalmente cada dos píxeles para obtener el indicador MAO partícula.

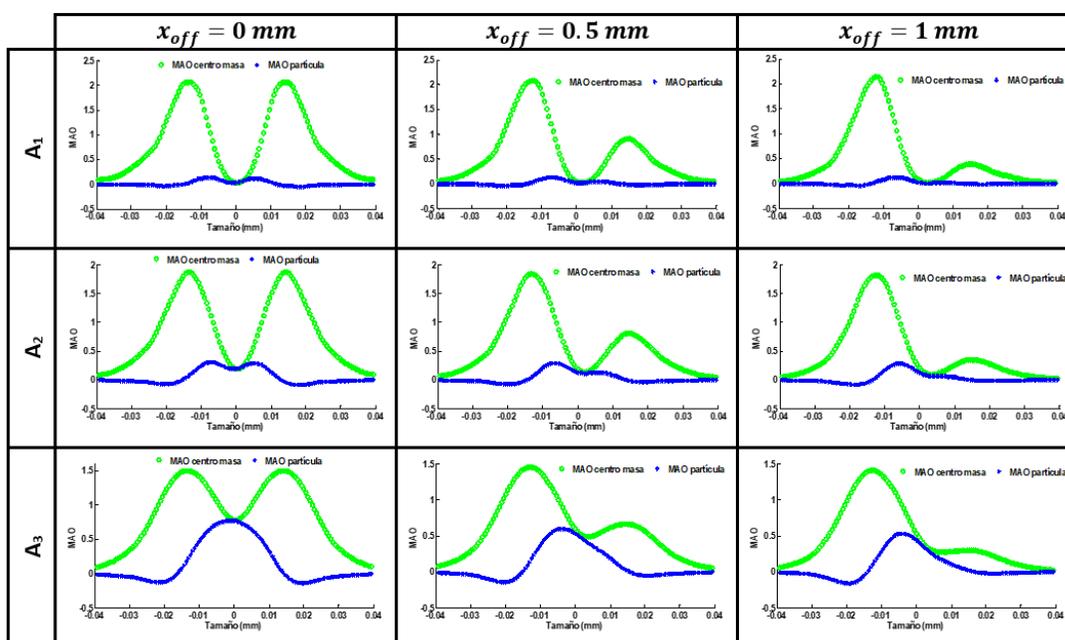


Figura 6.8: Indicador MAO experimentado por partículas de áreas  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  a causa de un vórtice óptico de carga  $\ell = 2$ , generado con desplazamientos fuera de eje del haz de  $x_{off} = 0, 0.5 \text{ mm}$  y  $1 \text{ mm}$ . Con  $x_p = 1 \mu\text{m}$ . Los resultados son comparados con el MAO centro masa del vórtice.

cadador es negativo y otras en las que es positivo, lo cual muestra que con estos cambios de asimetría una partícula podría rotar en sentido horario o antihorario dependiendo de

su posición sobre el plano transversal del vórtice.

Aunque todos los resultados mostrados anteriormente son para cargas topológicas positivas, en la Figura (6.9) podemos ver que si la carga es negativa también se tiene una dependencia similar a la de la carga positiva (pero con signos contrarios).

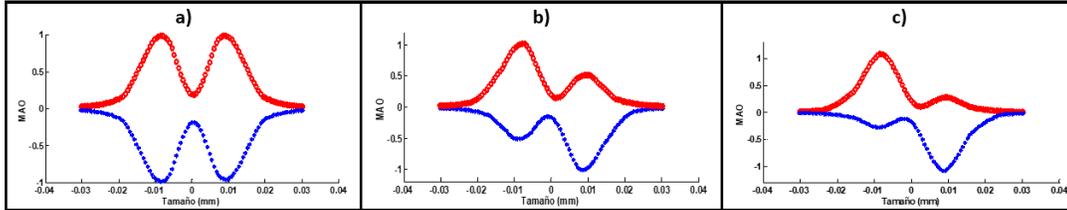


Figura 6.9: Indicador MAO respecto al centro de masa para carga  $\ell = 1$  (línea azul) y  $\ell = -1$  (línea magenta) para el área  $A_1$  y desplazamientos a)  $x_{off} = 0$ , b)  $x_{off} = 0.5$  mm y c)  $x_{off} = 1$  mm.

De modo que el indicador establecido para el MAO se puede utilizar tanto para cargas topológicas negativas como positivas. Así mismo, en la Figura (6.10) se muestra para cargas  $m = -1$  y  $-2$ , que el valor obtenido para el indicador MAO es independiente de si se analiza un vórtice principal o uno secundario. Sabemos que los vórtices secundarios tienen menor energía que el principal, pero como al realizar el cálculo del indicador se toma la intensidad normalizada, es de esperarse el mismo comportamiento para ambos casos. Por lo tanto, con la adecuada intensidad se puede obtener el mismo efecto con un SOV y un OV principal.

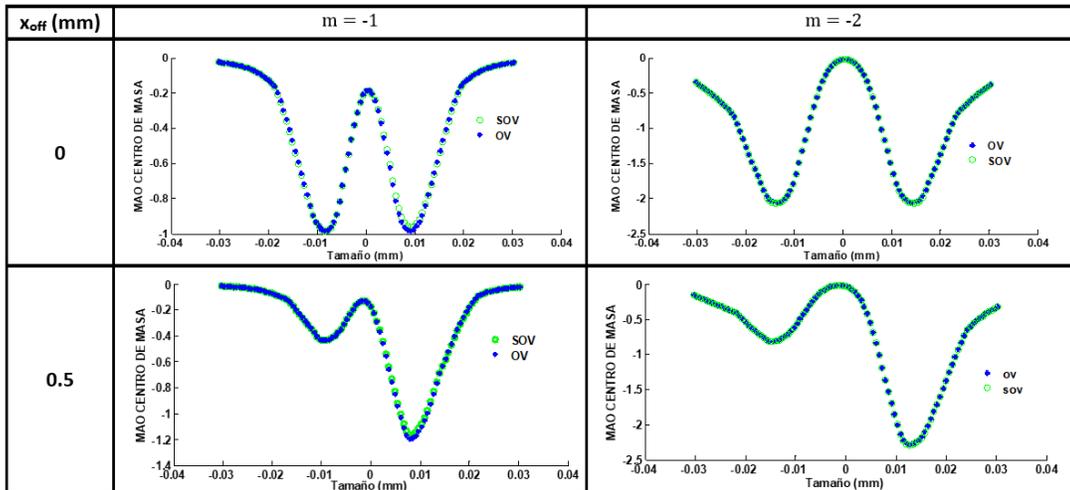


Figura 6.10: Distribución del MAO respecto al centro de masa para carga  $m = -1$  (segunda columna) y  $m = -2$  (tercera columna) para el área  $A_1$  y desplazamientos de  $x_{off} = 0$  (segunda fila) y  $x_{off} = 0.5$  mm (tercera fila). VO corresponde a vórtices principales y SOV al vórtice secundario formado en otro plano de observación.

Por tanto, se puede aplicar nuestro indicador MAO tanto en vórtices principales como secundarios con cargas positivas o negativas. Para el haz Gaussiano fuera de eje

no hay diferencias apreciables entre el indicador MAO calculado respecto al centro de masa y el eje óptico, además no hay dependencia con los valores de  $N$  y  $t$  asociados a la máscara de fase. Ahora veamos que sucede en el caso de desplazamientos fuera de eje de la DVPL, donde en capítulos anteriores habíamos visto que el desplazamiento del centro de masa depende significativamente de sus parámetros de discretización.

### 6.3. Momento angular Orbital para DVPL fuera de eje

En esta sección vamos a analizar el caso del cambio en el indicador MAO cuando la que esta desplazada fuera del eje óptico es la DVPL. Ya vimos que si se aumenta el área sobre la cual se determina el momento angular, el indicador de medida aumentará su valor en el centro (eje óptico) y a su vez disminuirá su valor en las posiciones de máxima intensidad. Como nos interesa es ver la dependencia con los desplazamientos fuera de eje de la máscara de fase, en los siguientes procedimientos solo se trabajará con el área más pequeña, es decir, aquella en la cual la intensidad mínima del vórtice sea de aproximadamente el 80 % y se omitiran los perfiles de intensidad. Veamos si se presentan diferencias con la DVPL fuera de eje. A partir de las distribuciones de fase e intensidad obtenidas computacionalmente para DVPL fuera de eje, se determina el indicador MAO centro masa e indicador MAO eje para SOVs de cargas  $m = -1, -2$  y  $-3$ . Para el tamaño de pixel usado en la simulación ( $1 \mu\text{m}$ ) el área sobre la cual se calcula el indicador MAO es de  $64 \text{ nm}^2$ . Recuerde que en este caso el desplazamiento del centro de masa esta dado por  $(x_0, y_0) = (\frac{f_{\text{off}}(Nt+1)}{f_{FR}}, 0)$ , así que ahora el máximo desplazamiento sufrido por el centro de masa del vórtice si depende de los parámetros  $N$  y  $t$  con los que se discreticen la DVPL. Si  $|(Nt + 1)| = 1$ , el máximo desplazamiento del centro de masa es de aproximadamente  $170 \mu\text{m}$ , mientras que si  $|(Nt + 1)| = 3$ , sería de aproximadamente  $510 \mu\text{m}$ . Como primer caso, miremos aquel en el cual todas las cargas secundarias son obtenidas con los mismos valores de  $N$  y  $t$ . En la Figura (6.11) se muestran los resultados obtenidos para este caso discretizando la DVPL con  $N = 2$ ,  $t = -1$  tomando  $\ell = -m$ .

Cuando la DVPL esta centrada el indicador “ MAO centro masa” coincide con el de “ MAO eje”, mientras que cuando la DVPL es desplazada fuera de eje el indicador MAO eje es prácticamente nulo mientras que el MAO centro masa se vuelve cada vez más asimétrico. La razón por la cual tiende a cero el MAO eje esta asociada al hecho de que su valor se esta determinando sobre una línea vertical que pasa por todo eje óptico; como sabemos, con la DVPL el vórtice se desplaza una distancia considerable fuera de eje, por ende la intensidad sobre el eje óptico debe ser prácticamente nula y así el valor de MAO eje se aproxima a cero. Observando solamente la parte del eje positivo de las gráficas se nota que el valor absoluto del indicador MAO disminuye entre más se aleja la DVPL del eje óptico. Comparando los valores del indicador MAO centro de masa obtenidos para el haz Gaussiano fuera de eje con los de la DVPL fuera de eje, se

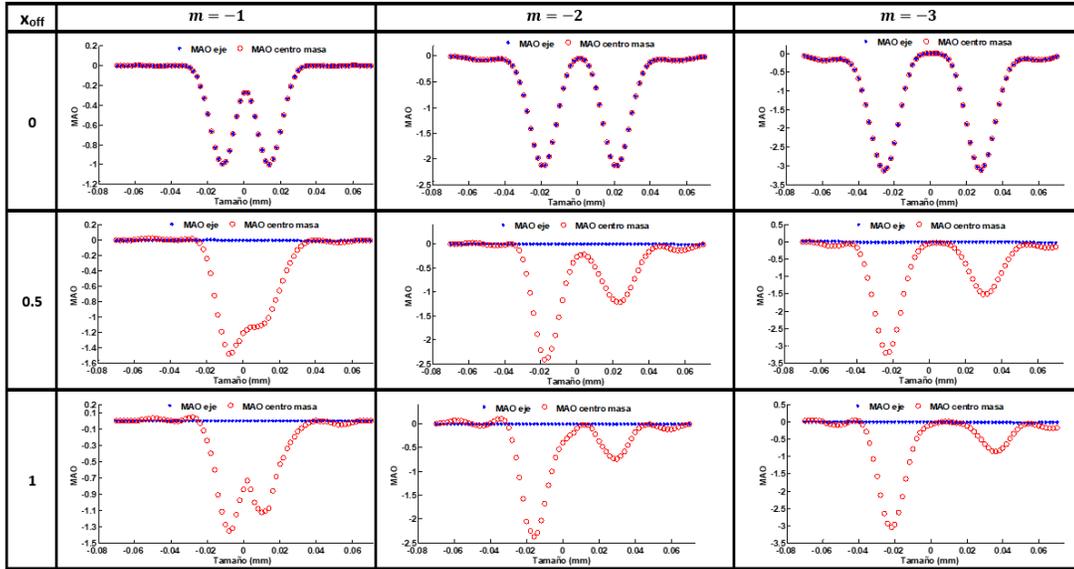


Figura 6.11: Indicador MAO respecto al centro de masa y el eje óptico para cargas  $m = -1, -2$  y  $-3$ , para desplazamientos fuera de eje de la DVPL correspondientes a  $x_{off} = 0$  mm, 0.5 mm y 1 mm.

obtienen diferencias significativas entre los dos valores (ver Figura (6.12)), entre ellas un desplazamiento relativo entre las dos curvas de indicador MAO que aumenta con la desalineación.

Como vimos anteriormente, los cambios en asimetría de intensidad y las distribuciones de fase son más significativas en el caso de la DVPL fuera de eje; ya que nuestro indicador MAO es proporcional a dichas distribuciones era de esperarse diferencias entre los dos métodos. Así que, nuevamente comprobamos que a priori no podemos asumir equivalente desalinearse el haz Gaussiano que la DVPL, pues vemos que en este caso el valor máximo del indicador con DVPL tiende a ser un poco superior (en valor absoluto).

Estos resultados muestran nuevamente que los desplazamientos fuera de eje de la DVPL afectan de manera más significativa las propiedades del vórtice, como su distribución de momento angular, además de los cambios en fase e intensidad mostrados en los capítulos previos. Dado que el centro de masa cambia con los valores de  $N$  y  $t$  veamos como afectan estos cambios los valores de MAO centro de masa.

Consideremos dos vórtices secundarios de carga  $m = -2$ , uno generado con la DVPL1 cuyos parámetros de discretización son  $N = 2, t = -1$  y  $\ell = 2$ ; y con la DVPL2 con parámetros de discretización  $N = 3, t = -1$  y  $\ell = 1$ . Calculando el MAO centro de masa para estos dos vórtices con un desplazamiento fuera de eje de  $x_{off} = 0.5$  mm, se obtiene diferencias significativas entre los dos (ver Figura (6.13)).

El indicador momento angular orbital tiene mayor variación cuando el producto  $(Nt + 1)$  es superior, lo cual corresponde al vórtice generado con la DVPL2, pues en

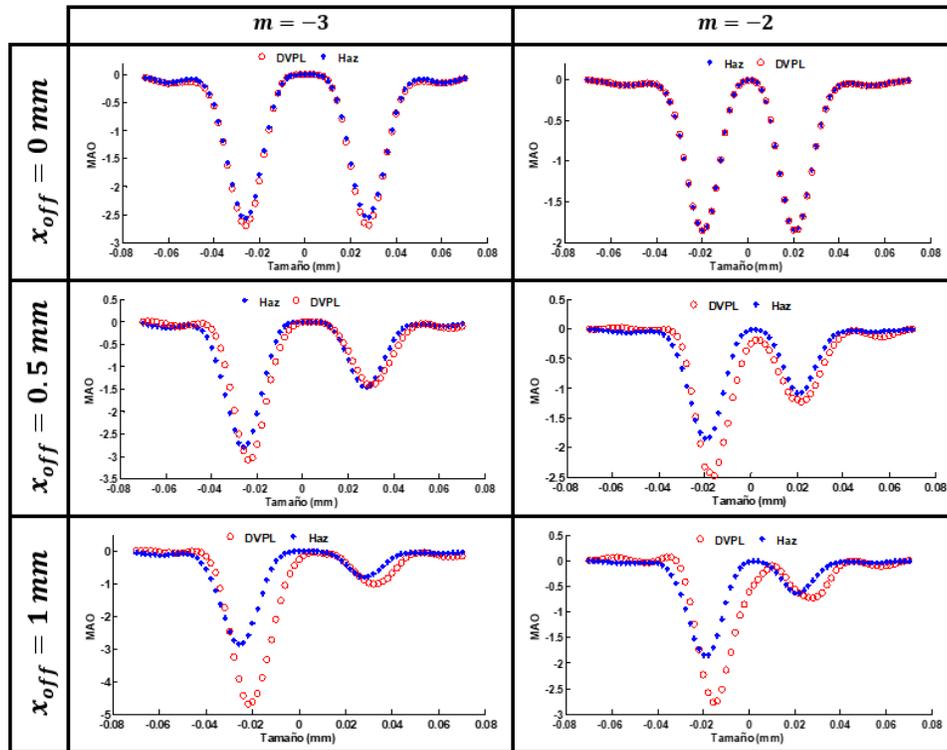


Figura 6.12: Comparación entre los indicadores MAO obtenidos con el haz fuera de eje (leyenda haz) y DVPL fuera de eje (leyenda DVPL) para cargas topológicas  $m = -2$  y  $-3$  a diferentes desplazamientos.

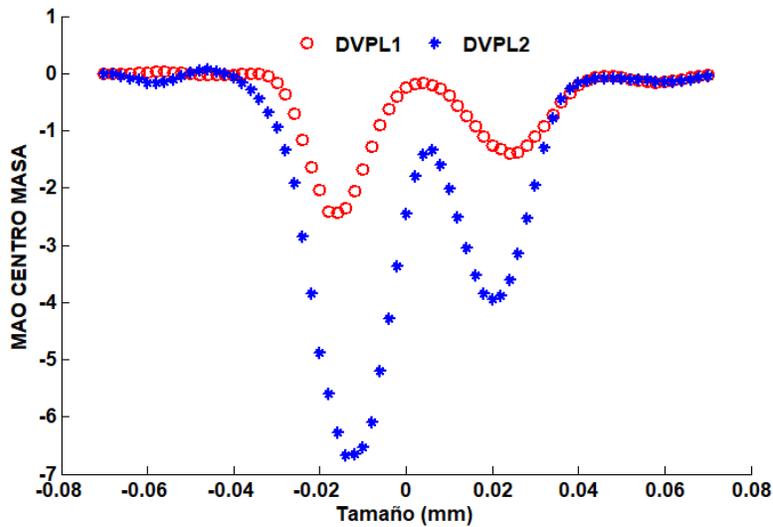


Figura 6.13: Indicador MAO centro de masa para cargas  $m = -2$  generada con la DVPL1 (puntos rojos) y  $m = -2$  generada con la DVPL2 (puntos azules) para desplazamientos fuera de eje de DVPL correspondientes a  $x_{off} = 0.5 \text{ mm}$ .

este caso la posición del centro de masa es el doble de la obtenida con la DVPL1. Esto afirma que su valor depende directamente de los parámetros de discretización de la DVPL.

Los resultados obtenidos muestran que cuando se desplaza el haz Gaussiano, dado que el centro de masa de los vórtices sufren un desplazamiento muy pequeño, no hay variaciones significativas entre el indicador momento angular calculado respecto al centro de masa con el obtenido respecto al eje óptico. Pero si el desplazamiento es de la DVPL hay una gran diferencia entre los dos cálculos, siendo más radical el cambio sobre el MAO centro masa. Todo nuestro análisis indica que características de los vórtices ópticos como su intensidad, fase y momento angular, son más susceptibles a desalineaciones de la DVPL. Dicha sensibilidad puede ser controlada con parámetros como los niveles de discretización, el contador  $t$ , la longitud focal de la lente física y la focal de la lente de Fresnel.

## CAPÍTULO 7

---

# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

---

En este trabajo, se estudian los cambios de asimetría de intensidad, distribuciones de fase, momento angular y las cargas topológicas obtenidas cuando un haz Gaussiano o una DVPL se encuentran fuera del eje óptico. Dado el arreglo multifocal de vórtices obtenido con la DVPL, se analizan como cambian estas propiedades, tanto en los vórtices principales como en vórtices secundarios, ante los desplazamientos fuera de eje. Experimentalmente se verifica que los cambios de asimetría de intensidad usando una DVPL fuera de eje son análogos a los obtenidos con una CSPP continua con el haz fuera de eje. Aunque el comportamiento es similar, computacionalmente se demuestra que no son equivalentes, presentando mayores distorsiones cuando se encuentra desalineada la DVPL. Análiticamente se llega a una expresión más general para el campo óptico que nos permite observar comportamientos en la distribución de fase, intensidad y momento angular de vórtices secundarios fuera de eje, lo cual no había sido reportado hasta el momento. La contribución de cada término en el campo óptico es analizado, mostrando que parámetros afectan más los resultados. Un análisis de señal-ruido permite justificar porque los SOVs pueden ser generados y observados, de modo que todos los procedimientos realizados son factibles de reproducir experimentalmente. En ambos casos se produce un desplazamiento del centro de masa que depende de parámetros del sistema o de la discretización de la DVPL, según sea el caso. En general, cuando se desplaza la DVPL en lugar del haz Gaussiano, se presentan en los vórtices cambios más significativos en: la asimetría de intensidad, el desplazamiento del centro de masa, las rotaciones de las líneas de discontinuidad de la fase y el indicador momento angular orbital. Donde los cambios producidos pueden ser controlados manipulando parámetros de la DVPL como sus niveles de discretización  $N$ , el orden  $t$  y la focal de Fresnel  $f_{FR}$ , además de la longitud focal de la lente física.

En terminos generales a continuación se resaltan los aportes de este trabajo y se identifican futuras consideraciones entorno al tema desarrollado que complementarían lo realizado.

## 7.1. CONCLUSIONES

- Se verifica experimentalmente los cambios de asimetría de intensidad de vórtices ópticos ante desplazamientos fuera de eje. Computacionalmente se demuestra que hay mayor variación en el indicador de asimetría de intensidad  $R$  cuando se desplaza la DVPL.
- El desplazamiento mínimo que puede ser detectado como un cambio en la asimetría de intensidad, depende de parámetros como el tamaño del haz Gaussiano  $w$  y el valor de la carga topológica. Con los valores trabajados experimentalmente dicha resolución es de aproximadamente  $2.7 \mu\text{m}$ .
- El porcentaje de energía que va a cada vórtice secundario no es un inconveniente para su generación, dado que para diferentes valores de  $N$ ,  $\ell$  y  $f_{FR}$  se obtiene una buena relación señal-ruido.
- A partir de una sola DVPL se puede modificar la sensibilidad del sistema con la simple ubicación sobre el eje de propagación de SOVs de otro orden.
- Las distribuciones de fase permitirían identificar más fácil cual elemento óptico esta fuera de eje, información que no puede ser obtenida con solo mirar la intensidad.
- A partir de las distribuciones de fase de vórtices generados con una DVPL se pueden establecer nuevas métricas que permitan identificar y corregir las desalineaciones en sistemas ópticos.
- El valor del indicador MAO es dependiente del área y el producto de  $(Nt + 1)$ , presentando un valor máximo en las posiciones en las que la intensidad del vórtice es máxima (cuando el área es pequeña).
- Cuando se producen cambios de asimetría por desplazamientos fuera de eje, el momento intrínscico (y su orientación) que experimentan las partículas va depender de su tamaño y de la posición sobre el plano transversal del vórtice óptico. Cuando aumenta el indicador de momento intrínscico de la partícula disminuye su indicador de momento angular respecto al centro de masa del vórtice.
- El desplazamiento del centro de masa de los vórtices con una DVPL fuera de eje depende de los valores de  $N$ ,  $\ell$ ,  $f_{FR}$  y el contador  $t$  con los que se generan la máscara. Este desplazamiento esta asociado al movimiento relativo de la lente de Fresnel que compone la DVPL con la lente física del sistema óptico.
- Características de los vórtices ópticos como su intensidad, fase y momento angular, son más susceptibles a desalineaciones de la DVPL. Donde parámetros como la carga topológica  $m$ , los niveles de discretización  $N$ , el orden  $t$ , la focal de Fresnel  $f_{FR}$  y la focal de la lente física  $f$ , pueden actuar como sintonizadores en este arreglo multifocal de vórtices ópticos fuera de eje.

## 7.2. PERSPECTIVAS

- Descomponer la intensidad y fase en polinomios de Zernike de modo que los desplazamientos fuera de eje tanto del haz como de la máscara puedan verse como aberraciones inducidas por dichos desplazamientos, analizando si la relación de nuestros indicadores de medida con los coeficientes de Zernike permiten establecer métricas de fácil implementación.
- Ampliar el estudio de errores en la medida de fase y métodos de recuperación que permitan experimentalmente reproducir los cambios obtenidos analítica y computacionalmente.
- Verificar experimentalmente que los vórtices ópticos principales y secundarios siguen un comportamiento similar ante desplazamientos fuera de eje, y que los resultados son independientes del signo de la carga topológica.
- Estudiar los decaimientos de intensidad, desplazamientos del centro de masa, distribuciones de fase e indicador de momento angular cuando se producen simultáneamente desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano y la máscara de fase.
- Implementar un sistema metrológico automatizado a partir de un arreglo multifocal de vórtices secundarios.

# CAPÍTULO 8

---

## PRODUCTOS ASOCIADOS

---

Parte de los resultados reportados en este trabajo doctoral han sido publicados o presentados en eventos académicos como:

- N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez, D. Amaya y A. Lencina. “Medida experimental de micro-desplazamientos basadas en vórtices ópticos tipo Kummer.” IX Reunión Iberoamericana de Óptica y XII Reunión Iberoamericana de Óptica, Láseres y Aplicaciones (RIO/OPTILAS), Noviembre 21-25, Pucón, región de la Araucanía, Chile, 2016.
- N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez y D. Amaya. “Estudio de cambios en asimetría de intensidad de vórtices ópticos secundarios.” XV Encuentro Nacional de Óptica y la VI Conferencia Andina y del Caribe en Óptica y sus Aplicaciones. Universidad Industrial de Santander, Noviembre 20-24, Bucaramanga, Colombia, 2017.
- N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez, y D. Amaya. “Experimental micrometer-displacement measurements based on optical vortices.” *Opt. Pura Apl.* 50 (2) 173-180 (2017).
- Natalia Londoño, Edgar Rueda, Jorge A. Gómez, Dafne Amaya, Alberto Lencina. “Description of a multifocal arrangement of asymmetric Kummer-beam optical vortices.” *Opt. Lasers Eng.* 130 106098 (2020).



## ESTUDIO DE CAMBIOS EN LA ASIMETRÍA DE INTENSIDAD DE VÓRTICES ÓPTICOS SECUNDARIOS

N. Londoño<sup>a</sup>, E. Rueda<sup>a</sup>, J. A. Gómez<sup>b</sup>, D. Amaya<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Grupo de Óptica y Fotónica, Instituto de Física, Universidad de Antioquia, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia.

<sup>b</sup> Grupo de Física Básica y Aplicada, Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Medellín-Colombia.

<sup>c</sup> Centro de Investigaciones Ópticas (CONICET La Plata - CIC), c.c. 3, 1897 Gonnet, Argentina.

### RESUMEN

En este trabajo, se estudian los cambios en la asimetría de intensidad de vórtices ópticos secundarios generados a partir de la discretización de una Lente Generadora de Vórtices (VPL por sus siglas en inglés) iluminada con un haz Gaussiano fuera del eje óptico. Por medio de soluciones analíticas, se analizan cambios entre la razón de picos máximos de intensidad del vórtice principal asociado a la carga topológica programada en la VPL y los vórtices secundarios producidos por la discretización. Se encuentra que es mayor el cambio de asimetría en intensidad en vórtices secundarios, indicando que estos vórtices presentan mayor grado de sensibilidad ante desplazamientos fuera del eje óptico. Así mismo, se muestra que el grado de sensibilidad es independiente del signo de la carga topológica y dependiente del radio del haz.

### INTRODUCCIÓN

Un método utilizado para generar vórtices ópticos (VOs), consiste en incidir un haz con perfil Gaussiano sobre una Lente productora de vórtice (VPL) programada en un modulador espacial de luz de cristal líquido (SLM) [1], donde si la máxima modulación en fase del modulador es inferior a  $2\pi$ , la VPL debe ser discretizada en un número de niveles  $N$  para obtener variaciones de fase constante. Actualmente, ha sido mostrado que esta discretización conduce a un arreglo multifocal de VOs donde a partir de una carga topológica  $m$  programada en la VPL, se pueden generar simultáneamente VOs con carga topológica  $l$  en diferentes planos de observación ( $Z_{opt}$ ) [2], cuyas relaciones son:  $l = m(Nt + 1)$  y  $Z_{opt} = -(Nt + 1) f^2 / f_{FR}$ , siendo  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $f$  y  $f_{FR}$  longitud focal de la lente física del sistema óptico y la programada en la VPL, respectivamente.

Por otro lado, experimentalmente, se ha mostrado que si la VPL es desplazada transversalmente fuera del eje óptico, la pérdida de simetría de los VOs es más sensible a medida que se aumenta la carga topológica del sistema [3], abriendo la posibilidad de implementar una nueva metrología de vórtices asociada a sus cambios de asimetría. En base a estos antecedentes, en este trabajo se estudia analíticamente la combinación de estos dos efectos: discretización y desplazamientos fuera del eje óptico sobre los cambios en asimetrías de intensidad de VOs generados con VPLs discretizadas con dos niveles de fase.

### ANÁLISIS TEÓRICO

Asumiendo que la fase de la transmitancia de una VPL discreta a dos niveles, puede ser descrita por la expansión en series de Fourier en una base de cargas topológicas  $l$ :

$$e^{j\Phi(r,\theta)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_l(r) e^{jl\theta} \quad (1)$$

Siendo:

$$\Phi(r, \theta) = \pi \text{floor} \left[ \frac{1}{\pi} \left( m\theta - \frac{kr^2}{2f_{FR}} \right) \right] \quad (2)$$



Figura 1. Máscara VPL discretizada con N=2 niveles de fase y m=1.

Se tiene que  $T_l(r) \neq 0$  solo si  $m - l = -2mt$ , con  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Por tanto, las cargas topológicas secundarias deben cumplir la relación:

$$l = m(2t + 1) \quad (3)$$

Y los pesos de la expansión están dados por:

$$T_l(r) = e^{-\frac{(2t+1)kr^2}{2f_{FR}}} e^{-j\frac{m(2t+1)}{2} \text{sinc} \left( \frac{2t+1}{2} \right)} \quad (4)$$

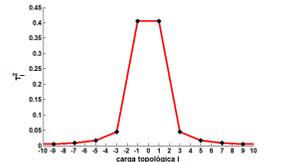


Figura 2. Contribución de los pesos de la expansión en series de Fourier a cada carga topológica  $l$ .

El término exponencial de la ec (4) que incluye la fase de la lente de Fresnel con longitud focal ( $f_{FR}$ ), da cuenta del arreglo multifocal, ya que para cada valor de  $t$  se tiene un foco distinto. Así mismo, el término "sinc" de esa misma ecuación, es el encargado de establecer el porcentaje de energía que iría a cada vórtice óptico del arreglo multifocal (ver Figura 2).

En la aproximación de Fresnel, la propagación de un campo en el espacio libre desde un plano  $(\epsilon, \eta)$  a un plano  $(x, y)$  a una distancia  $z$  está dado por [4]:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{j\lambda z} \exp \left[ \frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right] \iint_{-\infty}^{\infty} \{ U(\epsilon, \eta) \exp \left[ \frac{jk}{2z} (\epsilon^2 + \eta^2) \right] \} \exp \left[ -\frac{j2\pi}{\lambda z} (x\epsilon + y\eta) \right] d\epsilon d\eta \quad (4)$$

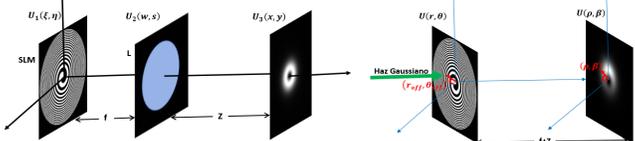


Figura 3. Propagación de un haz vórtice a diferentes planos de observación.  $f$ : longitud focal de la lente,  $Z$ : distancia de separación entre la lente y el plano de observación.

Figura 4. Propagación de un haz vórtice fuera del eje óptico.

El campo en el plano de observación, para el haz Gaussiano fuera del eje óptico, está dado por:

$$U(\rho, \beta) = \text{Exp} \left( ik(f + Z) \right) \sum_{t=-\infty}^{\infty} \text{Sinc} \left( \frac{2t+1}{2} \right) e^{-\frac{j\pi(2t+1)}{2}} t^{-(2t+1)m+1} \text{Exp} \left( im(2t+1)\psi \right) \frac{k\sqrt{\pi}\eta}{4f b_t^{3/2}} * \text{Exp} \left( \frac{-\eta^2}{2b_t} \right) \text{Exp} \left( \frac{-r_{off}^2}{w^2} \right) \text{Exp} \left( \frac{ik\rho r_{off} \text{Cos}(\theta_{off} - \beta)}{f} \right) \left[ I_{|m(2t+1)-1} \left( \frac{\eta^2}{2b_t} \right) - I_{|m(2t+1)+1} \left( \frac{\eta^2}{2b_t} \right) \right] \quad (5)$$

Los términos  $\eta$  y  $\psi$  son análogos a los reportados en [5]. El parámetro  $b_t = \frac{1}{w^2} - i \frac{k}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{Z}{f^2} - \frac{(2t+1)}{f_{FR}} \right)$ , da cuenta del plano de observación cuando su parte imaginaria se hace cero, esto se da en:

$$Z_t = f - \frac{(2t+1)f^2}{f_{FR}} \quad (6)$$

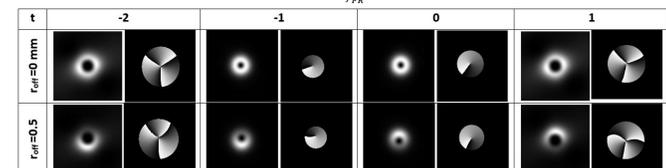


Figura 5. Arreglo multifocal de vórtices ópticos considerando  $m = 1$  y  $N = 2$ . Fila 1: sistema centrado, fila 2: haz incide 0.5 mm por fuera del eje óptico. Para cada  $r$  se tiene la correspondencia de vórtices de carga:  $l = -3, -1, 1, 2$  (columnas 2 a 5, respectivamente).

### PERFILES DE INTENSIDAD

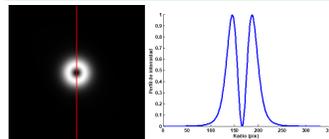


Figura 6. Distribución de intensidad en el plano de observación principal con el haz Gaussiano en el eje óptico.

En las Figuras 7 y 8 se puede ver que el vórtice principal de carga 1 y el vórtice secundario correspondiente a  $l = -1$ , presentan el mismo grado de asimetría de intensidad con un desfase de  $\pi$ .

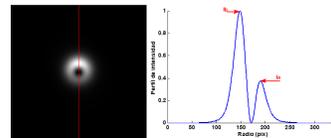


Figura 7. Distribución de intensidad en el plano de observación principal con el haz Gaussiano fuera del eje óptico.

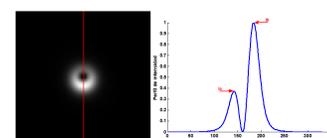


Figura 8. Distribución de intensidad en el plano de observación del vórtice secundario de carga  $l = -1$  con el haz Gaussiano fuera del eje óptico.

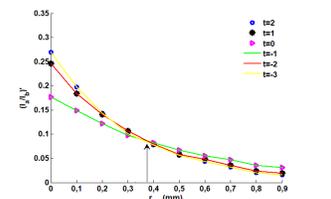


Figura 9. Derivada de la razón de picos de intensidad Vs desplazamientos fuera del eje óptico para una VPL binaria en distintos planos de observación.

Para  $t = -3, -2, -1, 0, 1$  y  $2$ , con cargas topológicas secundarias correspondientes a  $l = -5, -3, -1, 1, 3$  y  $5$ , respectivamente, la Figura 9 muestra que los vórtices secundarios son más sensibles a desplazamientos fuera del eje óptico y que esta sensibilidad es independiente del signo de la carga, ya que para valores de  $t$  a los cuales corresponde (en valor absoluto) el mismo valor de carga topológica, el decaimiento de los picos máximos de intensidad es el mismo.

### DEPENDENCIA CON EL RADIO DEL HAZ

Se analizan varios radios del haz Gaussiano encontrando que para desplazamientos pequeños, a menor diámetro del haz es mayor la sensibilidad del sistema a desplazamientos fuera del eje óptico (ver Figura 10).

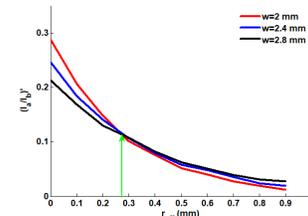


Figura 10. Derivada de la razón de picos de intensidad Vs desplazamientos fuera del eje del haz Gaussiano para una VPL binaria a diferentes radios del haz en el vórtice secundario correspondiente a  $l = 3$ .

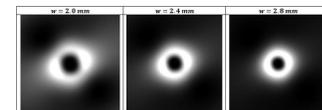


Figura 11. Cambios en la distribución de intensidad con el radio del haz en el vórtice secundario de carga  $l = 3$ .

A medida que se disminuye el radio del haz Gaussiano, se va distorsionando un poco el patrón de intensidad del VO secundario (se va perdiendo el modo dona).

### CONCLUSIONES

- ❖ Con una VPL discreta a dos niveles de fase es posible obtener un arreglo multifocal de vórtices ópticos.
- ❖ Los vórtices secundarios son más sensibles a desplazamientos fuera del eje óptico que el vórtice principal.
- ❖ La sensibilidad del sistema es independiente del signo de la carga topológica y dependiente del radio del haz Gaussiano.
- ❖ Los vórtices secundarios generados en un arreglo multifocal de vórtices ópticos, debido a su grado de sensibilidad, serían mejores indicadores de medida para un sistema metrología a partir de sus cambios morfológicos.

### AGRADECIMIENTOS

- ❖ Instituto de Física de la Universidad de Antioquia.
- ❖ Proyecto CODI y Universidad de Antioquia (2015-760).

### REFERENCIAS

- [1] E. Rueda, D. Muñetón, J. A. Gómez, A. Lencina, Opt. Lett. **38**, 3941-3944 (2013).
- [2] G. A. Rumi, A. Lencina, Trabajo de diploma (Licenciado en Física), Universidad Nacional de la Plata (2015).
- [3] N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez, D. Amaya, A. Lencina, Opt. Pura Apl. **50** (2) 173-180 (2017).
- [4] Goodman: Introduction to Fourier optics, 2 ed (1996), pag 67.
- [5] G. Anzolin, F. Tamburini, A. Bianchini, and C. Barbieri, Phys. Rev. A. **79**, 033845 (2009).

# Experimental micrometer-displacement measurements based on optical vortices

## Medidas experimentales de desplazamientos micrométricos basadas en vórtices ópticos

N. Londoño<sup>1\*</sup>, E. Rueda<sup>1</sup>, J. A. Gómez<sup>2</sup>, D. Amaya<sup>3</sup>, A. Lencina<sup>4</sup>

1. Grupo de Óptica y Fotónica, Instituto de Física, Universidad de Antioquia U de A, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia.

2. Grupo de Física Básica y Aplicada. Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid. Medellín-Colombia.

3. Centro de Investigaciones Ópticas, CONICET-UNLP-CIC, P.O. Box 3, 1897 Gonnet, Argentina.

4. Laboratorio de Análisis de Suelos, Facultad de Agronomía, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, CONICET, P. O. Box 47, 7300 Azul, Argentina.

(\*) E-mail: [natalia.londonol@udea.edu.co](mailto:natalia.londonol@udea.edu.co)

Received: 27/10/2016

Accepted: 10/04/2017

DOI: 10.7149/OPA.50.2.49018

### ABSTRACT:

In this work, a system for measuring micrometer-displacements based on the characteristics of optical vortices is presented. In the proposal, a binary vortex-producing lens (BVPL) programmed to generate optimized optical vortices is transversally displaced from the optical axis, inducing perturbations on the optical characteristics of the vortices that are used as transduction parameters. Specifically, the method proposed theoretically by Anzolin et al. [18], which is based on the asymmetry of the intensity patterns of the off-axis optical vortices, is studied experimentally by using BVPLs. Experimental implementation is completely described and compared with theoretical results, likewise, metrological characteristics of the experimental metrological system are analyzed. Based on the results, we experimentally confirm the possibility of creating high sensitivity metrological systems by using optical vortices, opening the door for new vortex metrology techniques.

**Key words:** Optical Vortices, Metrology, Micro-displacement.

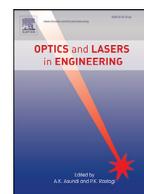
### RESUMEN:

En este trabajo, un sistema para medir desplazamientos micrométricos basados en las características de vórtices ópticos es presentado. En la propuesta, una lente productora de vórtices binaria (BVPL) programada para generar vórtices ópticos optimizados es desplazada transversalmente del eje óptico, induciendo perturbaciones en las características ópticas de los vórtices que son usadas como parámetros de transducción. Específicamente, el método propuesto por Anzolin et al [18], el cual es basado en la asimetría de los patrones de intensidad de los vórtices ópticos fuera del eje, es estudiado experimentalmente usando BVPLs. Se describe completamente la implementación experimental y se compara con los resultados teóricos, así mismo, se analizan características metroológicas del sistema metroológico experimental. En base a los resultados, confirmamos experimentalmente la posibilidad de crear sistemas metroológicos de alta sensibilidad utilizando vórtices ópticos, abriendo la puerta para nuevas técnicas de metrología de vórtices.

**Palabras clave:** Vórtices ópticos, Metrología, micro desplazamientos.

### REFERENCES AND LINKS / REFERENCIAS Y ENLACES

- [1] J. F. Nye and M. V. Berry, "Dislocations in wave trains," Proc. R. Soc. London Ser. A **336**, 165-190 (1974). <https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0012>



## Description of a multifocal arrangement of asymmetric Kummer-beam optical vortices

Natalia Londoño<sup>a,\*</sup>, Edgar Rueda<sup>a</sup>, Jorge A. Gómez<sup>b</sup>, Dafne Amaya<sup>c</sup>, Alberto Lencina<sup>d</sup>

<sup>a</sup> Grupo de Óptica y Fotónica, Instituto de Física, Universidad de Antioquia U de A, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia

<sup>b</sup> Grupo de Física Básica y Aplicada, Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Medellín, Colombia

<sup>c</sup> Centro de Investigaciones Ópticas, CONICET-UNLP-CIC, P.O. Box 3, 1897 Gonnet, Argentina

<sup>d</sup> Laboratorio de Análisis de Suelos, Facultad de Agronomía, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, CONICET, P.O. Box 47, Azul, 7300, Argentina

### ARTICLE INFO

#### Keywords:

Off-axis illumination  
Multifocal arrangement  
Optical vortices

### ABSTRACT

In this work, we derived an analytic expression for the optical field generated by an off-axis Gaussian beam diffracted by a Discretized Vortex-Producing Lens. With this system, a multifocal arrangement of asymmetric optical vortices is obtained whose topological charge values change with the position along the optical axis. This scheme allows both, obtaining a principal asymmetric vortex corresponding with the topological charge value of the phase mask, and other asymmetric vortices with charges different from the phase mask charge. With the analytical expression, the effects induced by the discretization and misalignment on the irradiance and phase of each vortex can be simultaneously studied. A signal-to-noise ratio expression is derived to verify if the noise of the multifocal system might affect the optical vortices of interest in a significant way: We found that noise is not a problem. In conclusion, a Discretized Vortex-Producing Lens can be used as a continuous Spiral Phase Plate. Finally, we explored the feasibility that the vortex phase could be employed as a displacement estimator.

### 1. Introduction

Optical vortices (OVs) are localizations in space, lines in 3D, or points in 2D, where the amplitude of the field is zero while its phase is undefined [1,2]. Around them, the phase has a helical shape represented by the term  $\exp(i\ell\theta)$ , where  $\theta$  is the azimuthal angle and  $\ell$  is the so-called topological charge which represents the number of times the wavefront phase varies  $2\pi$  [3]. A widely used method to generate optical vortices consists of a beam with a Gaussian profile impinging on a spiral phase mask with a linear dependence between 0 and  $2\pi\ell$ . OV with a doughnut-shape irradiance pattern, i.e., with radial symmetry, is obtained at the far-field. Such OVs can be easily produced from diffractive optical elements such as computer-generated holograms (CGHs) [4], spiral phase plates (SPPs) [5] or vortex-producing lenses (VPLs) [6,7]. A transverse arrangement of vortex beams can also be obtained by using grating-based and checkerboard-based zone plates [8]. Besides, a recent manuscript presents a method to generate a variety of vortices by a bi-segment spiral zone plate, so that each segment has its width, topological charge, and radial phase shift [9]. Due to the OVs' intrinsic features and the relative easiness of generating them experimentally, the interest in the study of these types of beams has grown, leading to some interesting applications in metrology [10], phase-shifting interferometry [11], stel-

lar coronagraphy [12], optical tweezers [13,14], optical communication [15], among others. In recent works, it has been shown both, analytically and numerically, that relative displacements between the input Gaussian beam and the phase mask generating the vortex, lead to loss of the irradiance radial symmetry [16–20]. Particularly, Anzolin et al. [18] using a continuous spiral phase plate (CSPP) developed an analytical model to measure off-axis displacements by measuring the asymmetry of the irradiance pattern. They showed that OVs with higher topological charges tend to lose their irradiance symmetry faster than those of lower charges, meaning that higher topological charges are more sensitive to misalignments. This behavior was experimentally verified using binary VPLs [21]. Binary or discretized phase masks differ from the one used by Anzolin et al. in that they produce multifocal arrangements with multiple OVs [24–28]. In particular, Rumi et al. [25] showed, analytically, that an on-axis Gaussian beam impinging into a discretized vortex-producing lens (DVPL) produces optical vortices at different positions of the optical axis, depending on the topological charge of the principal vortex  $\ell$  and the number of discretization levels  $N$ . Another important aspect about those works concerning off-axis beams is that they only study the irradiance behavior, and occasionally the angular momentum [17,22,23], paying little attention to the phase of the optical field.

\* Corresponding author.

E-mail address: [natalia.londonol@udea.edu.co](mailto:natalia.londonol@udea.edu.co) (N. Londoño).

---

# Bibliografía

---

- [1] Leach J , Yao E , Padgett MJ, "Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam," *New J Phys.* 6, 71 (2004).
- [2] M. J. Padgett and L. Allen, "The Poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes," *Opt. Commun.* 121, 36 (1995).
- [3] A. M. Yao and M. J. Padgett, "Orbital angular momentum: origins, behavior and applications" *Adv. Opt. Phot* 3, 161-204 (2011).
- [4] J. H. Lee, G. Foo, E. G. Johnson , and G. A. Swartzlander Jr, "Experimental verification of an Optical Vortex Coronagraph," *Phys. Rev. Lett.* 97, 0539011 (2006).
- [5] S. Furhapter, A. Jesacher, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte, "Spiral phase contrast imaging in microscopy." *Opt. Exp.* 13, 689-694 (2005).
- [6] J.A. Gómez, E. Rueda, Á. Salazar, M. Tebaldi, N. Bolognini, A. Lencina, "Effects of the induced birefringence in photorefractive crystals on speckle optical vortices," *Opt. Eng.* 50, 359-365 (2012).
- [7] G. Anzolin, F. Tamburini, A. Bianchini, and C. Barbieri, "Method to measure off-axis displacements based on the analysis of the intensity distribution of a vortex beam," *Phys. Rev. A* 79, 033845 (2009).
- [8] J. E. Curtis, B. A. Koss, and D. G. Grier, "Dynamic holographic optical tweezers," *Opt. Commun* 207, 169-175 (2002).
- [9] A. Arias, S. Etcheverry, P. Solano, J. P. Staforelli, M. J. Gallardo, H. Rubinsztein-Dunlop, and C. Saavedra, "Simultaneous rotation, orientation and displacement control of birefringent microparticles in holographic optical tweezers," *Opt. Exp* 21, 102-111 (2013).
- [10] J. Wang, *Photonics Res.* 4, B14 (2016).
- [11] V. Y. Bazhenov, M. V. Vasnetsov, and M. S. Soskin, "Laser beams with screw dislocations in their wavefronts," *JETP Lett.* 52, 429-431 (1990).

- 
- [12] M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen, and J. P. Woerdman, "Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate," *Opt. Commun.* 112, 321-327 (1994).
- [13] Benedikt Rösner, Florian Döring, Primoz R. Ribic, David Gauthier, Emiliano Principi, Claudio Msciavecchio, Marco Zangrado, Joan Vila-Comamala, Giovanni Da Ninno y Christian David, "High resolution beam profiling of X-ray free electron laser radiation by polymer imprint development," *Opt. Exp.* 25, 30686-30695 (2017).
- [14] E. Rueda, D. Muñetón, J. A. Gómez, and A. Lencina, "High-quality optical vortex-beam generation by using a multilevel vortex-producing lens," *Opt. Lett.* 38, 3941-3944 (2013).
- [15] N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez, and A. Lencina, "Generation of optical vortices by using binary vortex producing lenses," *Appl. Opt.* 54, 796-801 (2015).
- [16] A. Sabatyan, "Comprehensive focusing analysis of bi-segment spiral zone plate in producing a variety of structured light beams," *J Opt Soc Am B.* 36, 3111-3116 (2019).
- [17] A. Sabatyan and J. Rafighdoost, "Grating- and checkerboard-based zone plates as an optical array generator with a favorable beam shape," *Appl. Opt.* 56, 5355-5359 (2017).
- [18] Machado FJ , Monsoriu JA , Furlan WD, "Fractal light vortices, vortex dynamics and optical vortices," *Hector Perez-de-Tejada, Intech—Open* 257-273 (2017).
- [19] Fu S , Wang T , Gao C, "Perfect optical vortex array with controlable diffraction order and topological charge," *J Opt Soc Am A.* 33, 1836-1842 (2016).
- [20] Furlan , Walter D , Giménez , Fernando , Calatayud , Arnau , Monsoriu , Juan A, "Devil's vortex-lenses," *Opt Express.* 17(24), 21891-21896 (2009).
- [21] Yu J , Wu J , Zhou C , Wang S , Cao W , Jia W , Hu A, "Generation of dipole vortex array using spiral dammann zone plates," *Appl Opt.* 51(28), 6799-6804 (2012).
- [22] Zang, Huaping, Mengguang Wang, Lai Wei, Quanping Fan, Chuanke Wang, Xiaomin Liu, Erjun Liang, and Leifeng Cao, "Focusing properties of spiral zone plate based on m-bonacci sequence" *Opt. Commun.* 483, 126638 (2021).
- [23] Gonzalo Rumi, Daniel Actiss, Dafne Amaya, Jorge Gómez, Edgar Rueda and Alberto Lencina, "Analytical description of optical vortices generated by discretized vortex-producing lenses, *Phys. Rev A.* 97, (2018) 063813.

- 
- [24] A. Dudley, N. Majola, N. Chetty, and A. Forbes, "Implementing digital holograms to create and measure complex-plane optical fields," *Am. J. Phys.* 84, 106-112 (2016).
- [25] V. Kotlyar, Alexey A. Kovalev and Alexey P. Porfirev, "Asymmetric Gaussian optical vortex," *Opt. Lett.* 42, 139-142 (2017).
- [26] A.Ya. Bekshaev, S.V. Sviridova, "Effects of misalignments in the optical vortex transformation performed by holograms with embedded phase singularity," *Opt. Commun.* 283, 4866-4876 (2010).
- [27] Bekshaev A, Sviridova S, Popov A, Rimashevsky A and Tyurin A, "Optical vortex generation by volume holographic elements with embedded phase singularity: Effects of misalignments," *Ukr. J. Phys. Opt.* 14, 171-186 (2013).
- [28] N. Londoño, E. Rueda, J. A. Gómez D. Amaya and A. Lencina, "Experimental micrometer-displacement measurements based on optical vortices" *Opt. Pura Apl.* 50 (2), 173-180 (2017).
- [29] V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, and V. A. Soifer, "Asymmetric Bessel modes," *Opt. Lett.* 15, 2395-2398 (2014).
- [30] A. A. Kovalev, V. V. Kotlyar, and A. P. Porfirev, "Asymmetric Laguerre-Gaussian beams," *Phys. Rev A.* 93, 063858 (2016).
- [31] V. Kotlyar, A. Kovalev, A. Porfirev, and E. Kozlova, "Orbital angular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate," *Opt. Lett.* 44 (15)3673-3676 (2019).
- [32] Gonzalo A. Rumi, Alberto lencina, "Generación de haces con vórtices ópticos mediante lentes generadoras de vórtices discretas," Trabajo de diploma (Licenciado en Física), Universidad Nacional de la Plata, 2015.
- [33] Goodman, Joseph W, "Introduction to Fourier optics," Roberts and Company Publishers (2005), pág 67.
- [34] Natalia Londoño, Edgar Rueda y Jorge Gómez, "Óptimización de vórtices ópticos tipo Kummer generados mediante máscaras discretas en moduuladores espaciales de luz de cristal líquido." Tesis de investigación para optar al título de Magíster en Física, Universidad de Antioquia, 2016.
- [35] Z. S. Sacks, D. Rozas, and G. A. Swartzlander, Jr, "Holographic formation of optical-vortex filaments," *J. Opt. Soc. Am. B* 8, 2226-2234 (1998).

- 
- [36] Cheng-Shan Guo, Dong-Mei Xue, Yu-Jing Ha and Jianping Ding, "Optimal phase steps of multi-level spiral phase plates," *Opt. Commun* 268, 235-239 (2006).
- [37] Victor V. Kotlyar, Anton A. Almazov, Svetlana N. Khonina, and Victor A. Soifer, "Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate," *J. Opt. Soc. Am. A* 22, 849-861 (2005).
- [38] N. Zhang, J. A. Davis, I. Moreno, Don M. Cottrell, and X.-C. Yuan, "Analysis of multilevel spiral phase plates using a Dammann vortex sensing grating," *Opt. Exp* 18, 25987-25992 (2010).
- [39] L. Angel-Toro, D. Sierra-Sosa, M. Tebaldi, and N. Bolognini, "In-plane displacement measurement in vortex metrology by synthetic network correlation fringes," *J. Opt. Soc. Am. A* 30, 462-469 (2013).
- [40] Huang, Peisen S and Zhang, Song, "Fast three-step phase-shifting algorithm", *Apl. Opt.* 45 (21), 5086 (2006).
- [41] Daniel G. Actis y Alberto Lencina, "Determinación del momento angular en haces con vórtices ópticos." Trabajo de diploma para obtener el título de Licenciado en Física. Universidad Nacional de la Plata.
- [42] L. Allen, M. J. Padgett, "The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density," *Opt. commun.* 184, 67-71 (2000).