



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Facultad de Educación

**Objetivación de la estructura Isomorfismo de Medidas en el grado
quinto por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Educación
Básica Matemáticas**

**ERICA LORENA AVENDAÑO TOBÓN
ANDRÉS HERRERA OSPINA**

Asesor

DIEGO ALEJANDRO PÉREZ GALEANO

Magister en Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MEDELLÍN

2015



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a:

Dios por ser la luz que me guió y me dio la fuerza durante todo este proceso.

Mi familia y mi pareja por su apoyo incondicional y atención constante.

Los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por su participación e interés.

A mi compañero Andrés, que durante cuatro semestres y pese a todas las dificultades, pudimos lograr con éxito la realización de este proyecto.

Nubia, por fortalecer mi vocación docente.

Érica L. Avendaño T.

Dedico este trabajo a:

A todos y cada uno de los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por su colaboración durante este proceso.

A mi familia por brindarme su apoyo en todo momento, en especial a mi madre Esther Ospina, a mi padre Oscar Herrera y a mis abuelos José, Blanca y María por darme su apoyo a cada instante.

También a mi compañera Lorena por su gran paciencia, apoyo y consejos durante todo este proceso.

Andrés Herrera O.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

AGRADECIMIENTOS

Manifestamos nuestro agradecimiento a los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por su colaboración, interés y participación constante en el desarrollo de este proceso.

También agradecemos a la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera y a sus directivos por permitirnos entrar en ella y adquirir significativas experiencias que enriquecieron nuestro proceso investigativo.

A nuestra maestra cooperadora Astrid Cano, quien con su calor humano y su labor como docente, nos mostró el lado amable de la educación matemática en contextos complejos.

Agradecemos a nuestro asesor Diego Alejandro Pérez Galeano por su comprensión, paciencia, apoyo y motivación en momentos decisivos. A nuestros compañeros Ángela, Yeidy, Daniela, Angie, Luis e Ider por las sugerencias y aportes que nos brindaron frente a la elaboración de nuestro proyecto de investigación.

Finalmente expresamos nuestro agradecimiento a la profesora Monly Torres por los valiosos aportes que nos brindó.

RESUMEN

En el presente trabajo de grado, respondemos a la pregunta: *¿Cómo se da el proceso de objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula?* Y en coherencia con lo anterior, nuestro objetivo fue *Analizar el proceso de la objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula.* El objeto de estudio de este trabajo de investigación fue la objetivación de la estructura isomorfismo de medidas, este se dio a través de las actividades realizadas dentro y fuera del salón de clases.

Para efectos de esta investigación, ésta estuvo enmarcada en un paradigma cualitativo, además, se encuentra en un abordaje crítico dialéctico. Para la recolección de los datos se implementaron registros como fotografías, entrevistas, grabaciones y diarios de campo. La información recogida se estructuró en dos categorías emergentes, las cuales fueron: “Las investigaciones matemáticas en el aula; expectativas y punto de partida” y “Conciencia y reconocimiento de procesos y conceptos”.

Posteriormente como conclusión general de nuestro análisis, encontramos que en medio de las prácticas que se desarrollaron dentro del aula de clase, mediadas por los objeto-motivos, las actividades permitieron que en los estudiantes se generara una necesidad de trabajar en equipo en diferentes situaciones, además la objetivación fue vista como el proceso por medio del cual se adquirió, desarrolló y validó el conocimiento respecto a un tema en específico.

PALABRAS-CLAVE: 1. Errores conceptuales. 2. Objetivación. 3. Perspectiva histórica cultural. 4. Multiplicación. 5. Conocimiento matemático. 6. Actividad. 7. Metodologías Emergentes.

ABSTRACT

In this paper grade, we answer the question: *How is the process of objectification of structure isomorphism measures is given in the 5th grade students of College Ramón Múnera Lopera through mathematical investigations in the classroom?* And in keeping with the above our aim was to *Analyze the process of the objectification of isomorphism structure measures in the 5th grade students of College Ramón Múnera Lopera through mathematical investigations in the classroom.* The object of study of this research was the objectification of structure isomorphism measures, this was given through activities within and outside the classroom.

For purposes of this investigation, it was framed in a qualitative paradigm also found in a critical dialectical approach. To collect the data, records and photographs, interviews, recordings and field notes were implemented. The information gathered was structured in two emerging categories, which were: "The mathematical investigations in the classroom; expectations and starting point "and" Awareness and recognition of processes and concepts."

Then as a general conclusion of our analysis, we found that in the midst of the practices developed in the classroom, mediated by objects reasons, allowed students in a team need to work in different situations generate also the objectification was seen as the process by which it was acquired, developed and validated knowledge regarding a specific topic.

KEY WORDS: 1. Conceptual errors. 2. Objectification. 3. Historical cultural perspective. 4. Multiplication. 5. Mathematical knowledge. 6. Activity. 7. Emergent Methodologies.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

TABLA DE CONTENIDO

Facultad de Educación	1. PRESENTACIÓN.....	1
	2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	5
	3. MARCO TEÓRICO.....	8
	La Objetivación en la perspectiva Histórico-Cultural.....	8
	Las estructuras multiplicativas en Vergnaud.....	18
	Las Investigaciones Matemáticas en el Aula.....	22
	La institución educativa Ramón Múnera Lopera.....	28
	Nuestra maestra cooperadora: Astrid Elena Cano Zapata.....	31
	4. EL CAMINO RECORRIDO.....	34
	Fundamentos metodológicos.....	34
	Fases de la investigación.....	37
	Protagonistas de la investigación.....	42
	Instrumentos de producción de registros y datos.....	47
	5. LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA: EXPECTATIVAS Y PUNTO DE PARTIDA.....	49
	6. CONCIENCIA Y RECONOCIMIENTO DE PROCESOS Y CONCEPTOS.....	66
	7. CONCLUSIONES.....	80
	8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	85

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1803



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Actividades realizadas durante el trabajo de campo.....	38
--	----

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Esquema general del proyecto. Elaboración Propia.....	4
Ilustración 2. Problemas de una etapa: multiplicación y división.....	21
Ilustración 3. Problemas de una etapa: multiplicación y división. Diferentes incógnitas en las medidas.....	22
Ilustración 4. La profesora Astrid en uno de los trabajos de clase.....	31
Ilustración 5. Carta de autorización para la publicación de registros y datos.....	47
Ilustración 6. Tabla de la Criba de Eratóstenes realizada por Denis Lorena.....	51
Ilustración 7. Actividad 1. Ejercicio 1.....	52
Ilustración 8. Respuesta al ejercicio 1.....	53
Ilustración 9. Ejercicio 2.....	53
Ilustración 10. Respuesta al ejercicio 2.....	54
Ilustración 11. Taller adaptado de Torres (2013).....	55
Ilustración 12. Imagen tomada del diario de campo de Hellen.....	57
Ilustración 13. Solución de la situación de la ruleta de Vergnaud.....	58
Ilustración 14. Estrategia de Juliana y Angélica para resolver el problema.....	60
Ilustración 15. Tablero de la Batalla de Multiplicar.....	67
Ilustración 16. Estudiantes jugando la Batalla de multiplicar.....	70
Ilustración 17. Solución de Óscar para el problema de la tienda 1 de arroz.....	76
Ilustración 18. Solución de Óscar para el problema de la tienda 2 de arroz.....	77

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1803



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

1. PRESENTACIÓN

El proceso de aprendizaje y apropiación por parte de los estudiantes en torno a temas de carácter matemático fue una inquietud que a través del tiempo nos acompañó, despertando en nosotros un interés por analizar y entender cómo se constituye el conocimiento frente a un tema determinado, además quisimos indagar qué elementos se encuentran relacionados en dicho proceso y su incidencia.

Por otro lado, centramos nuestro interés en las estructuras multiplicativas, más específicamente en la estructura *isomorfismo de medidas*, el cual se ve reflejado tanto en el marco teórico como en la categoría número dos.

Este proyecto de investigación, tuvo como objetivo *Analizar el proceso de objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula*, el cual logramos alcanzar mediante las actividades realizadas y un rastreo bibliográfico en torno a él.

Para consolidar nuestro proyecto de investigación, en el capítulo 2 llamado planteamiento del problema, encontramos la estructuración de nuestra pregunta de investigación y en coherencia con ésta, nuestro objetivo. Allí se ve reflejado cómo fue el proceso por el cual se estableció el objeto de estudio (*objetivación de la estructura isomorfismo de medidas*); además presentamos la justificación del mismo, partiendo de las observaciones iniciales dadas durante las primeras visitas a la institución educativa Ramón Múnera Lopera.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

En el capítulo 3, encontramos el marco teórico. En este capítulo se halla el rastreo bibliográfico que realizamos en torno al objeto de estudio y a nuestra metodología, la cual fue las Investigaciones Matemáticas en el Aula. Allí se encuentran autores como Vergnaud (1990), Torres (2013), Radford & Hernández (2010), Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) y otros representativos de la teoría que desarrolló nuestro proyecto de investigación. Al final de dicho capítulo, mostramos a grandes rasgos las principales características de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, así como un acercamiento a la labor de la profesora Astrid Cano, quien actuó en este proceso como nuestra maestra cooperadora.

Posteriormente en el capítulo 4, se encuentran nuestros fundamentos metodológicos como el abordaje, el cual es crítico dialéctico y el paradigma dentro del cual se encontró enmarcado nuestro proyecto, que para efectos de nuestra investigación fue cualitativo. Para ello, nos apoyamos en autores como Bogdan (1992), Santana (2010) y Sánchez (1998). Además describimos como fue cada una de las fases en las que se desarrolló esta investigación, trayendo a colación las actividades más representativas y a quienes fueron protagonistas en ellas.

En el capítulo 5, en el cual se encuentra nuestra primera categoría llamada *Las investigaciones matemáticas en el aula; expectativas y punto de partida*, hicimos un recorrido y un análisis acerca de cómo se desarrolló nuestra investigación, además de una interpretación del papel que los estudiantes como investigadores realizaron. Para ello tomamos algunas actividades en donde se reflejaron conceptos como suma reiterada, multiplicación e investigación.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

En el capítulo 6, tenemos la segunda categoría, llamada *Conciencia y reconocimiento de procesos y conceptos*. En él hablamos acerca de cómo fue el

proceso de objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en estudiantes del grado 5°. Este análisis lo hicimos en diálogo con autores como Radford (2000) y Torres (2013). En esta categoría también hicimos actividades (entendidas dentro del paradigma de la teoría de la objetivación) que dieron cuenta de ese proceso y de conceptos como el de objetivación.

Finalmente en el capítulo 7, se encuentran nuestras conclusiones, las cuales, dieron respuesta a la pregunta que nos acompañó durante todo este proceso y en las cuales se ve el resultado del mismo.

Teniendo en cuenta todos estos elementos, hemos elaborado un esquema que nos diera un norte durante nuestra investigación. Nuestro trabajo de grado tiene por título “Objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en el grado quinto por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula”, por tal razón consideramos que nuestra investigación fue un camino donde se desarrolló un proceso dentro del cual el sujeto en su andar, realiza actividades donde se involucra la multiplicación en una categoría llamada *Isomorfismo de medidas*.

En la realización de estas actividades, pretendimos evidenciar la **teoría de la actividad** como ese proceso donde hay una relación dialéctica entre sujeto y objeto buscando como fin la objetivación. Todo lo anterior se desarrolló dentro de una metodología llamada Investigaciones Matemáticas en el Aula y a través de cada una de sus fases pudimos evidenciar el objetivo planteado inicialmente.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Ya que el sujeto es un ser social, permeado por una cultura, donde establece relaciones con todo lo que le rodea, es de aclarar que este camino se recorrió dentro de una perspectiva histórico cultural. En la ilustración 1 mostramos dicho esquema.



Ilustración 1. Esquema general del proyecto. Elaboración Propia

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde el inicio de nuestra Práctica Pedagógica en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, centramos nuestro interés en hallar algún tipo de problemática que pudiera ser analizada, discutida, acompañada, tratada y que además, sirviera como elemento clave para nuestro trabajo de grado. El propósito inicial fue hacer un trabajo de investigación donde realizáramos un acompañamiento durante las actividades desarrolladas dentro y fuera de clase y que además, fuese un aporte para la Educación Matemática gracias a un intenso rastreo bibliográfico. Luego de frecuentes visitas a dicha institución educativa, en el grado 5°, encontramos algunas dificultades en temas que estaban relacionados con la multiplicación, es por esto que nuestro interés se fue encaminando desde un análisis de los errores conceptuales y procedimentales en torno a las estructuras multiplicativas. Una de las situaciones encontradas fue la siguiente:

$$5 \times 6 = 25$$

4 veces 4 son 24
 $4 \times 4 = \underline{8}$

La razón que fundamentó este interés, fue la preocupación por el proceso de formación de los estudiantes del grado 5°, dado que para éste nivel y de acuerdo a los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas junto con los Estándares Básicos de Matemáticas, ya deberían estar en la capacidad de desarrollar competencias asociadas a la multiplicación. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional, [MEN] dentro de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), muestran que los estándares para el grado cuarto y quinto son:

Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Facultad de Educación Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.

Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.

Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. (p.82)

Cuando mencionamos que los estudiantes deberían estar en la capacidad para resolver problemas, nos referimos a situaciones de la vida cotidiana de cada uno de ellos, que dentro de sus realidades puedan desarrollar, modelar y reflexionar en torno a actividades que son parte de su diario vivir.

Por otro lado:

El conocimiento de que los números se pueden representar de diferentes maneras, junto con el reconocimiento de que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones de resolución de problemas, es valioso y esencial para desarrollar pensamiento numérico. Por ejemplo: reconocer que $2+2+2+2$ es lo mismo que 2×4 es una conexión conceptual útil entre adición y multiplicación. (MEN, 1998, p.27).

Situaciones como ésta se presentaron durante nuestras observaciones, sólo que en ellas no se evidenció la conexión conceptual que se esperaba observar en 5° grado.

En el transcurso de ésta lectura, presentamos la objetivación como un proceso que posibilita la apropiación de la estructura isomorfismo de medidas por parte de los estudiantes del grado 5° de primaria a través de la metodología Investigaciones Matemáticas en el Aula, todo esto enmarcado en una perspectiva histórico-cultural.

La intención de este trabajo de investigación fue realizar un seguimiento teniendo como propósito analizar el proceso de objetivación de la estructura isomorfismo de medidas



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

y un rastreo bibliográfico en torno a ello, usando las Investigaciones Matemáticas en el Aula como metodología. Esto se dio porque el punto de partida surgió en los hallazgos de errores conceptuales y procedimentales, los cuales podríamos decir, son un obstáculo en la conceptualización de las estructuras multiplicativas, específicamente, la estructura isomorfismo de medidas.

El propósito además, fue que los estudiantes fueran conscientes del proceso que se debía tomar al momento de conceptualizar las estructuras multiplicativas y que de alguna manera dejara de ser un proceso memorístico. Para esto, tomamos las Investigaciones Matemáticas en el Aula como metodología, para poder hacer un análisis en torno al propósito planteado y que además diese cuenta de este proceso en los estudiantes del grado 5°.

Con base en las reflexiones anteriores, planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo se da el proceso de objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula?* Y, En coherencia con lo anterior el objetivo planteado fue: *Analizar el proceso de la objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula.*



3. MARCO TEÓRICO

A lo largo de nuestro trabajo hemos encontrado algunas investigaciones que se han realizado con respecto a la estructura multiplicativa desde diferentes enfoques como Vergnaud (1990), Torres (2013); desde una perspectiva histórico - cultural, trabajos como los de Radford (2000), Radford & Hernández (2010), Jaramillo (2011), Vygotsky (1968), y las Investigaciones Matemáticas en el Aula basada en Ponte, Brocardo & Oliveira (2003). Estos trabajos los tomamos como base para nuestra investigación, desde los cuales nos fue posible desarrollar temas como La Objetivación en la perspectiva histórico-cultural, las Estructuras Multiplicativas y más específicamente el Isomorfismo de Medidas y Las Investigaciones Matemáticas en el Aula. Para que esto fuera posible hablamos también de varios aspectos tales como el de actividad, lo que es el sujeto y el objeto-motivo y cómo a partir de estos hay un proceso en el cual se valida el conocimiento.

La Objetivación en la perspectiva Histórico-Cultural

De acuerdo a Radford (2006), la objetivación consiste en “dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (p.113). Sin embargo antes que hablar de objetivación, hablaremos de aspectos tales como objeto, sujeto, actividad, entre otros para reflexionar en última instancia acerca de significado más extenso de la objetivación; además, estos elementos estarán enmarcados en una perspectiva histórico cultural, la cual ampliaremos en el transcurso de esta lectura al igual que la metodología implementada: Investigaciones Matemáticas en el Aula.

Objeto

Para referirnos a lo que es el objeto, hacemos referencia a lo que menciona Radford (2000) “Todo conocimiento es conocimiento sobre algo, sobre un objeto” (p.2) Un conocimiento que se va formando a partir de necesidades en diferentes épocas y lugares que hacen parte de una determinada cultura, es así como diferentes objetos se van legitimando y validando a través del tiempo. Viéndolo de este modo, el objeto del conocimiento siempre va a estar relacionado con el ser humano, es inherente al sujeto, ya que en esta medida es el objeto un producto del sujeto que se va desarrollando y elaborando a partir de las prácticas sociales en determinada cultura y este objeto da paso a cambios dentro de la sociedad que a la vez van a modificar las formas de vivir de los sujetos inmersos en esta cultura; es decir, el sujeto afecta al objeto y el objeto en este mismo modo afecta a los sujetos que componen dicha cultura, pero estos objetos son dotados de sentido cuando el sujeto establece relaciones mediadas de artefactos¹ y diálogos con otros sujetos; es así entonces como el sujeto puede dotar de significado el objeto.

El objeto visto como una configuración dada por el individuo, es de una u otra manera el motor de la actividad de esos individuos, es lo que va a ser y a mantener la actividad, direccionando las personas a un fin particular. Este objeto está permeado con el concepto de motivo y a la vez tiene una relación con la necesidad, sin embargo motivo y necesidad no son lo mismo, aunque siempre detrás de un motivo habrá una necesidad, pero teniendo en cuenta que hay motivos de la actividad colectiva que pueden ser diferentes a los motivos de la actividad de cada individuo.

¹ Entendiendo artefacto como una construcción cultural dotada de un sentido histórico, donde hay un territorio que llega a formar una objetividad cultural y una subjetividad cultural.

Sujeto

El sujeto se entiende como el ser que está inmerso en una cultura, de modo que la cultura afecta las acciones del sujeto, pero al mismo tiempo el sujeto y la acción colectiva de estos afecta la cultura misma. Posteriormente, Radford (2006), define al sujeto como un ser “auto-regulado y auto-equilibrante, desarraigado de su contexto socio-cultural, capaz de reflexionar como científico que explora los alrededores en busca de fenómenos que confirmen la viabilidad de su saber” (p.105) y que además manifiesta mediante sus actos, una clara autonomía al ser un miembro en búsqueda activa de su propio conocimiento.

En coherencia con lo anterior, el sujeto se encuentra en un constante desarrollo biológico como lo menciona Torres (2013, p.29): “El sujeto como ser biológico tiene unas etapas de desarrollo descritas por varias vertientes psicológicas donde, según la edad el sujeto desarrolla ciertas habilidades como la memoria, la atención, la asimilación de conceptos.” En este sentido, para hablar del sujeto, consideramos importante hablar desde algo biológico, pero también es importante hablar del sujeto como alguien que se está desarrollando constantemente en una cultura. Alguien que tiene aspectos biológicos, psicológicos, sociales e históricos.

De acuerdo a esto, vemos al sujeto como alguien que puede tener conciencia y/o poder de dotarse de un conocimiento en la sociedad a la que pertenece, siendo consciente de los actos realizados acordes a unas necesidades específicas, pero para poder estructurar su conciencia debe estar en una relación con otros sujetos y mediado de objetos, en unos



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

espacios determinados por la cultura. De esta manera se dota así el sujeto de una conciencia y hace de él un sujeto pensante y autónomo.

Cuando hablamos del conocimiento que se encuentra en relación con los sujetos a través de la historia y del tiempo es importante mencionar que

El conocimiento es producido por sujetos subsumidos en tradiciones históricas de pensamiento. El sujeto de las teorías culturales es, en efecto, un sujeto que piensa y siente dentro de un trasfondo cultural que va más allá de las necesidades de adaptación y meros impulsos y afanes... (Radford y Hernández, 2010, p.43)

Es decir, el sujeto cuando logra tomar conciencia, no va a responder a necesidades e impulsos meramente personales, que no tengan algún sentido para su entorno, es por esto que el conocimiento transforma al sujeto haciendo una subjetivación de él, entendiendo subjetivación como el proceso por el cual nos convertimos en sujetos o en otras palabras, el proceso por el cual constituimos nuestra propia subjetividad.

Actividad

La teoría de la actividad explica cómo se ajusta el individuo al contexto y a las condiciones dadas, además hace referencia a tres relaciones particulares; la interacción con los objetos, con los otros y con el yo. En este sentido Patiño (2007, p.56), menciona que “La actividad se concibe como estructuras y sistemas que producen eventos a partir de las mediaciones”, es decir, dichas mediaciones están enfocadas dentro y fuera del aula de clase, ya que se dan mediaciones sociales, históricas y culturales que afectan al individuo y lo desarrolla como un sujeto de la historia; además, se tiene en cuenta que esta no se desarrolla solo dentro del aula, porque en ocasiones dichas actividades tienen tantas implicaciones pueden ser desarrolladas fuera del aula de clase, basado en las esas tres



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

condiciones de interacción. Y es que por medio de todo esto se genera una conciencia en los individuos, pero dicha conciencia solo es posible cuando todas las acciones dentro de una actividad estén direccionadas a un fin específico, permitiendo dotar de sentido al sujeto con un conocimiento que lo involucra en el mundo y a la vez se modifica el mismo sujeto, llegando a una subjetivación que lleva a formar un sujeto ético para el mundo con un conocimiento que emerge de él en pro de su propio contexto.

Teniendo en cuenta que esta investigación se encuentra enmarcada en una perspectiva histórico cultural, cabe mencionar de acuerdo a Patiño (2007), que esta perspectiva “considera que la forma esencial de existencia de lo psíquico se da en su calidad de actividad” (p.56) apuntando a que hay diferentes fenómenos que van surgiendo y se van desarrollando por medio de dichas interacciones correlacionas en dos puntos, uno de la actividad externa y otro de la actividad interna.

La teoría de la actividad se evidencia en los estudios de autores como Vygotsky y Leontiev; además, esta teoría se ha venido desarrollando y construyendo en un proceso histórico-científico que tuvo como punto de partida fundamental dos aspectos. Mencionados por Cubero (1994).

Por un lado, las concepciones de la filosofía de Marx y Engels y por otro, la psicología desarrollada por su maestro, Vygotsky. Aspectos tales como el carácter dialógico, social, histórico y mediado de las funciones mentales, así como la concepción activa de sujeto y la búsqueda de unidades holistas (p, 4)

Así la teoría de la actividad se puede centrar en un objeto en específico, objeto que ha de ser desarrollado por los investigadores, estudio que entiende el objeto como una construcción histórico-cultural, ya que la actividad del hombre se va desarrollando en sus



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

prácticas sociales, lugar donde se crea un sinfín de interacciones entre el objeto y el sujeto, donde hay unas interacciones humanas arraigadas también desde una mirada o enfoque en específico.

La teoría de la actividad es la continuación de un estudio realizado por uno de los discípulos de Vygotsky, Leontiev, quien toma las conceptualizaciones de las funciones psicológicas y la conciencia humana hacia otro abordaje entendiendo cómo la actividad que es desarrollada bajo las interrelaciones de la conciencia y la actividad externa e interna dan origen a la conciencia. Entendemos la actividad externa como una actividad humana que está apoyada por unas herramientas y/o instrumentos, al igual que de un tipo de lenguaje o comunicación, es por esto que hay un proceso específicamente humano y social ya que a partir de las relaciones establecidas de las prácticas sociales se va generando una transformación en la parte de la psiquis del hombre. La actividad se formula en dos sentidos, uno interno; ya que los procesos psíquicos se desarrollan como actividad y el cual desarrolla el mismo sujeto y otro externo; interacción con los demás sujetos y objetos que le rodean.

Patiño (2007, p.56) menciona que Vygotsky (1968) para plantear que

El desarrollo de la cultura humana, transcurre a través de la... “actividad, como proceso que mediatiza la relación entre el hombre y su realidad objetiva, por medio de ella, el hombre modifica la realidad y se forma y transforma a sí misma”, además El punto nodal del desarrollo social y humano, lo constituye el concepto de actividad”, el cual es constituido a través de las mediaciones que establece en la vida cotidiana con otros sujetos, con los objetos y con él mismo.

Los instrumentos dan pie a crear una actividad humana en colectivo y es ahí donde se genera la reflexión interior de la experiencia humana. (Hernández, s.f., p.6) en este sentido expone que “la actividad externa va formándose en la actividad interna. Es



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

importante distinguir, que la actividad externa, tiene un matiz práctica, por la interrelación a que se refiere y el carácter inherentemente social que porta” Es decir, la actividad externa se va desarrollando en conjunto con la actividad interna, en donde la externa se va generando por las prácticas sociales que hay en su entorno o en determinados momentos pero al mismo tiempo va afectando su actividad interna y creando así una conciencia en el sujeto, es decir la psicología interna.

La Teoría de la Actividad va a estar siempre ligada al contexto sociocultural como menciona Obando (2011) ya que a partir de las prácticas que desarrollan los sujetos con otros sujetos y con un objeto de conocimientos es que se legitima el conocimiento o se construye el conocimiento, pero esto se da en un contexto dotado de una información histórica y cultural; es por eso que el contexto históricocultural es tan importante a la hora de influenciar en la formación del conocimiento de cada sujeto establecido en unas prácticas sociales.

De acuerdo a Radford (2014),

Nuestro punto de partida es que, cuando nacemos, cada uno de nosotros se encuentra frente a un mundo poblado no solamente de objetos materiales, sino también a un mundo poblado de sistemas de ideas (científicas, legales, artísticas, médicas, etc.). De súbito nos encontramos en un mundo que nos objeta, que no es el resultado de nuestras acciones. Es un mundo que ha sido ya transformado por la labor de las generaciones que nos han precedido y que está ya impregnado de significados. (p.141)

En este sentido podemos decir que cuando nosotros nacemos nos encontramos rodeados de unos objetos determinados histórica y culturalmente que influyen en las prácticas sociales que se encuentran circundantes a cada uno de nosotros; además la labor es aquello que implica que pertenezcamos al mundo, pero a la vez modifica al mundo, dentro de una dialéctica-materialista como son los procesos de enseñanza y de aprendizaje,



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

viendo así la labor desde una dimensión en la producción de la existencia humana de cada sujeto, haciendo emerger a sujetos con un conocimiento matemático pero a la vez, con una conciencia ética, ya que es importante reconocer estos aspectos dentro de la educación matemática. Como dice Radford, (2014, p.135) “la educación matemática es un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente”.

En nuestro caso particular es el conocimiento matemático el que está dotado de un pasado históricocultural ya que este conocimiento es el producto de muchas necesidades surgidas en el pasado y en una cultura establecida que siguen siendo de utilidad para la humanidad y de valiosos aportes para esta misma. Desde la teoría de la actividad como mencionan Agreda, Fonnegra & Franco, (2012, p.17) evocando a Obando (2011) “El conocimiento matemático está ligado al contexto cultural y a los procesos de construcción de sentidos y significados propios del intercambio sociocultural en que están inmersos los sujetos”. Presentando esto es que podemos decir que la actividad humana es base de muchos procesos que no solo son determinados por el individuo, sino además por la cultura en la que están inmersos. Esto da pie a nuevas pautas y a nuevas interpretaciones, siendo así que el sujeto construye nuevos conocimientos con ayuda de la cultura, de saberes previos o a vivencias ya experimentadas que fueron dadas por la cultura en la que se encontraban.

La objetivación

Dentro de la perspectiva históricocultural se concibe un objetivo esencial, el cual es el desarrollo de la personalidad del sujeto. A éste se le concibe desde esta perspectiva,



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

como “un ser social con acciones más complejas, producto de las interacciones y de la capacidad de pensar sobre la acción.” (Patiño, 2007, p 54). De acuerdo a

lo anterior podemos decir que el desarrollo de la personalidad solo es posible mediante la relación con los otros, dado que como menciona Patiño (2007) “El ser social se constituye a partir de las experiencias sociales particulares, que le permiten aprender a negociar significados en forma congruente a la cultura en la cual está inmerso”.

Al considerar al sujeto, se le considera en todos sus ámbitos ya que todo tipo de experiencia y relaciones, lo constituyen como tal, así que también hay que considerar el aspecto genético, por esta razón esta corriente sobrepasa la consideración socio-cultural.

Para Vygotsky (1968), el aprendizaje es una actividad social, “Este concepto del aprendizaje sitúa en el centro de atención al sujeto activo en u interacción con otros sujetos, con sus creencias y con el objeto, elementos que a su vez, permiten las transformaciones dentro de él, es decir, sus modificaciones psíquicas y físicas” (p.15). La objetivación es un proceso social que se encuentra basada en investigaciones de carácter socioculturales e histórico culturales desarrolladas por Vygotsky y otros investigadores, en el cual el sujeto modifica la cultura pero al mismo tiempo la cultura modifica al sujeto, generando un tipo de relación bidireccional.

El objeto matemático es inherente al ser humano ya que los objetos matemáticos son toda una construcción a través del tiempo desarrollados por el hombre en un proceso históricocultural, objetos que se encuentran en un mundo cambiante, movilizados para un uso del hombre y es el sujeto quien le da un sentido a estos objetos, pero no es el sólo quien lo hace.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

En esta perspectiva de la objetivación se ve el aula como un lugar para dimensionar el conocimiento; parafraseando a Radford (2010) la objetivación en el aula y sus fenómenos de enseñanza y de aprendizaje aparecen enmarcados desde una ética inevitable, siendo el aula el lugar donde se da el espacio del crecimiento de formas culturales de pensamiento y de ser.

La objetivación logra llevar a cabo su finalidad en el instante que el sujeto logra dar sentido al objeto en su contexto, a través de una reflexión grupal, dotando de sentido el objeto cultural, pero cuando esto pasa no sólo se genera una objetivación, también hay una reflexión por parte del sujeto, de su persona, de su ser; entonces por ende el sujeto también se modifica y se transforma evocando una subjetivación cultural, transformación que logra ser realizada mediante la relación con el otro; “Yo-otro”, porque a la objetivación le compete que se dé el saber cultural, si es presentado sólo por medio de artefactos o si la producción del conocimiento cultural está siendo validada también por la reflexión con el otro.

La objetivación es el proceso en el cual el sujeto le da sentido y significado a los objetos que se encuentran en la cultura y así se genera una reflexión, para lograr un saber cultural que es obtenido con ayuda de los artefactos y el diálogo con los otros sujetos, creando una reflexión de manera que éste sea consciente de sus deseos, pensamientos y acciones. Por esta razón es que en el sujeto se da también una subjetivación, dado que lo que estaba en el sujeto inicialmente, se modifica. Citando a Radford (2010), este menciona que para poder teorizar el conocimiento entre el ser y las formas culturales de pensamiento es necesario hacer unas interrelaciones entre dos constructos teóricos:



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

El primero se expresa en términos de los procesos sociales a través de los cuales el alumno alcanza una comprensión crítica, a través de dotación de significados, de los objetos culturales matemáticos y de la lógica cultural de estos. El segundo se expresa en términos de los procesos intersubjetivos a través de los cuales el alumno se posiciona en las configuraciones de las prácticas sociales a las que participa y a través de las cuales se reconoce y es reconocido miembro de una comunidad sociocultural. (p. 45)

Es por esto que desde esta teoría no se pretende desarrollar la objetivación y la subjetivación de forma natural, dado que son procesos culturales e históricos que se llevarán a cabo por la relación del sujeto en su medio social, es decir, la objetivación y la subjetivación son procesos que se encuentran constantemente mediados por diferentes aspectos, como artefactos, signos, relaciones sociales y así generar en el sujeto una conciencia humana. Siendo éste un desafío fundamental enunciado por Radford, Miranda & Guzmán, (2007, p. 9) “Uno de los desafíos de las corrientes socioculturales es precisamente crear comunidades crítico-reflexivas en las que la adquisición de formas culturales de reflexión se traduce en el desarrollo y enriquecimiento de la conciencia y subjetividad del alumno”.

Desde la objetivación podremos llegar a conceptualizar un saber, dotando de sentido el objeto matemático pero al mismo tiempo darle un valor agregado a lo que era el sujeto anteriormente, como ya hemos mencionado, hacer una subjetivación y que ésta sea pertinente al contexto actual y a una necesidad cultural vigente.

Las estructuras multiplicativas en Vergnaud

Según Vergnaud, un campo conceptual es un conjunto de situaciones donde están involucrados varios tipos de conceptos; por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, es el conjunto de situaciones que requieren de una multiplicación. En este sentido también aclara que el concepto de situación no está relacionada con situación



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

didáctica, sino más bien con el concepto de tarea, entendiendo entonces que una situación compleja, es un conjunto de tareas. También menciona que la dificultad de una tarea no es el producto de una subtarea, pero el fracaso en alguna de ellas, implica el fracaso global.

Ahora bien, la estructura multiplicativa de acuerdo a Alzate, Pérez, Ramírez & Restrepo (2013) se encuentra definida en términos generales citando a Vergnaud (1990) de la siguiente manera: “La estructura multiplicativa se basa en la aditiva, pero hay aspectos intrínsecos de la estructura multiplicativa no reductibles a aspectos aditivos y estos son los propios de la estructura multiplicativa”. (p, 12).

En coherencia con lo anterior, Vergnaud (1990), menciona que el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar las situaciones que están dentro de la estructura multiplicativa, son: la proporción simple (igualdad de dos razones) y la proporción múltiple (igualdad de dos o más razones), función lineal (función cuyo dominio son todos los reales) y n-lineal (función multilineal), cociente y producto de dimensiones (producto cartesiano), fracción (cociente de dos números a y b), razón (comparación de dos cantidades dadas), número racional (el cual se expresa como cociente de dos números enteros en forma de fracción), múltiplo (producto de dos números enteros) y divisor (factor en el que se puede descomponer un número), entre otros.

La elaboración de estos elementos dentro de este campo conceptual, se da a través de diferentes momentos, donde el estudiante emerge su conocimiento en relación a la estructura multiplicativa. En este sentido, Jaramillo (2011) define conocimiento de la siguiente manera:



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

En una perspectiva sociocultural de la educación, el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser apropiado por los individuos, trasgrediendo el paradigma de la modernidad, pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo, en una dialéctica continúa con su entorno social, cultural, histórico y político. Es decir, el conocimiento es producido desde el sujeto en sus interrelaciones con el mundo. (p. 19)

Dentro de la estructura multiplicativa se hayan dos categorías básicas; producto de medidas e isomorfismo de medidas. Tomando como base fundamental para nuestra investigación el isomorfismo de medidas.

Hablando ya dentro de esta estructura se tiene en cuenta su carácter no conmutativo, contrario al producto de medidas que si lo es, es decir, se reconoce que la multiplicación es de carácter conmutativo, pero a la hora de hablar de isomorfismo de medidas en un enfoque semántico no es conmutativo como lo mencionan Puig & Cerdán (1989, p.4)

Por supuesto que la multiplicación como ley de composición binaria definida en uno cualquiera de los conjuntos numéricos N , Z , Q , R es conmutativa. Lo que aquí señalamos es que la estructura lógica subyacente a los problemas multiplicativos enunciados verbalmente muestra una asimetría entre las proposiciones en que aparecen el multiplicando y el multiplicador, que se corresponde con su no conmutatividad semántica

Autores como Nesher, denominan a esta categoría como regla de correspondencia y otros autores tales como Brown o Bell como problemas de razón, en los que hay problemas de proporción simple directa entre dos espacios de medida, como dicen Puig & Cerdán (1989, p.9) El isomorfismo de medidas “en su enunciado más típico aparecen una proposición que es una descripción existencial y otra que expresa la regla de correspondencia entre los espacios de medida.”

Dentro de esta forma no semántica salen a colación tres posibilidades del isomorfismo de medidas una en la que hay una multiplicación directa, otra en la que



implica una partición y otra que apunta a la cuotición, como apuntan Hernández & Vásquez, (2008. p.3)

Los enunciados de problemas de estructura multiplicativa simple contienen dos cantidades conocidas, los datos y la cantidad por hallar. Pero lo fundamental es la distinción entre cantidades extensivas (E) y cantidades intensivas (I). A partir de esto se establecen tres tipos de relación, que corresponden a problemas de distintas categorías.

Isomorfismo de medidas

	descripción existencial	regla de correspondencia		
	M_1 : estantes	→	M_2 : libros	
IM 1	5	x8	?	multiplicación
IM 2	5	?	40	partición
IM 3	?	x8	40	cuotición
	estantes × libros/estante = libros			
	E × I = E			

Ilustración 2. Problemas de una etapa: multiplicación y división

Además Vergnaud (1983), toma dentro del isomorfismo de medidas los problemas de regla de tres que, aunque tiene problemas en los que implica multiplicar y dividir, conserva la misma estructura como se puede ver en la siguiente imagen:



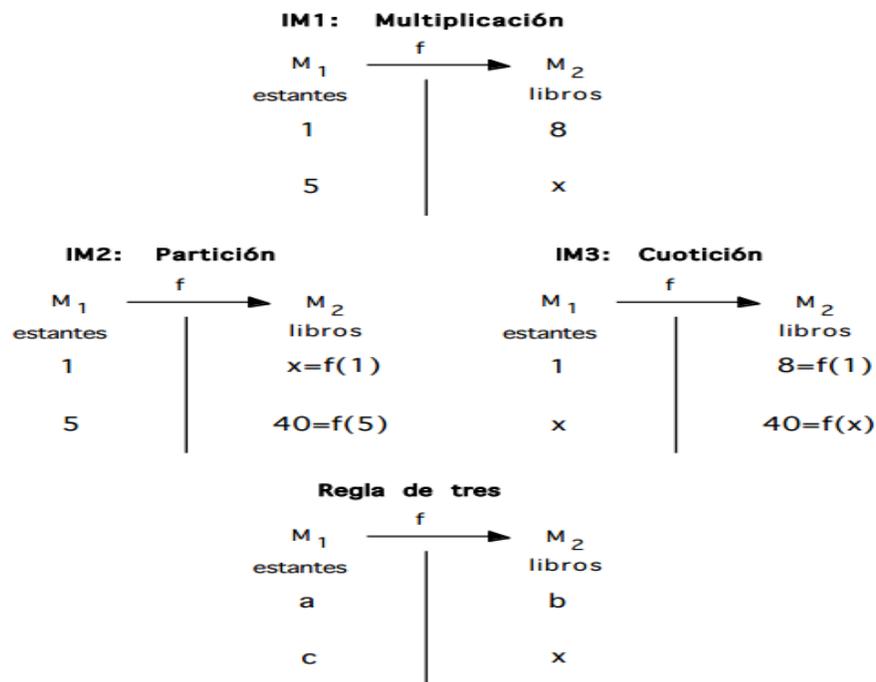


Ilustración 3. Problemas de una etapa: multiplicación y división. Diferentes incógnitas en las medidas

La actividad (en este caso la asociada a un contexto matemático) cobra significado entonces cuando hay una conexión entre la teoría y los algoritmos con la realidad y la práctica. Nuestra labor como docentes en formación, va encaminada hacia el análisis del proceso de la objetivación de las estructuras isomorfismo de medidas, en los estudiantes del grado 5°, ya que el propósito a nivel general en cada institución educativa es que sean sujetos que dentro de su contexto social, formulen, validen, reflexionen y se apropien de los conceptos que a lo largo de su formación inicial han adquirido.

Las Investigaciones Matemáticas en el Aula

Las investigaciones permiten dar cuenta del estado de algo o algún tema de interés. Los resultados que se desean obtener de esas investigaciones, no se dan de manera inmediata, sino que toman tiempo y además se hace necesario la implementación de



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

registros. Parfraseando a Pérez & Gómez (2009), investigar consiste en realizar búsquedas que dan lugar a conjeturas o hipótesis acerca de un concepto, a partir de una problemática que demanda una investigación exhaustiva por parte de los participantes. En este sentido las Investigaciones Matemáticas en el Aula consisten en realizar búsquedas en torno a un objeto o concepto matemático, que para nuestro caso se trata de la estructura isomorfismo de medidas.

De acuerdo a Ponte, Brocardo y Oliveira (2003, p. 10) la investigación matemática toma:

Características muy propias, conduciendo rápidamente a la formulación de conjeturas que se pretenden probar si fuera el caso. Las investigaciones matemáticas envuelven, naturalmente, conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas, pero lo que más las caracteriza fuertemente es el estilo conjetura- prueba-demostración.

Lo que da lugar a una investigación, es el interés por probar una hipótesis que se genera a partir de una situación dada. Este interés permanece durante todo el proceso y finaliza cuando luego de una intensa búsqueda, se logra dar una conclusión a partir de la hipótesis inicial. Dentro del campo docente existe una constante preocupación por hacer que sus actividades sean productivas, por lo tanto podemos decir que éste es un campo donde permanece constante búsqueda e investigación con el fin de lograr este cometido.

Dentro de una actividad se dan varios tipos de tareas que poseen distintos componentes. Una buena estrategia para posibilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje, es el uso de diversos tipos de tareas dentro de cada situación o actividad, pero se debe tener en cuenta que la combinación de tareas sea adecuada para el estudiante y esto nos permita dar paso a nuevos horizontes. Este tipo de situaciones nos llevan a repensar la Educación Matemática como un campo de conocimientos didáctico donde se ponen en



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

juego principalmente el contexto de cada estudiante, permitiendo así que cada actividad realizada, cobre sentido y sea de mayor comprensión.

Una actividad tiene dos procesos, el momento en que se realiza y en el que se reflexiona en torno a ella. Las tareas que hay dentro de las actividades, se convierten entonces en los objetivos de la actividad, por lo tanto, son las que dotan de sentido a las actividades.

En este sentido, Ponte (2007, p 30) afirma que:

No todas las tareas comportan un grado de dificultad elevado. Así, entre las tareas de exploración y de investigación, la diferencia está en el grado de dificultad. Si el alumno pudiera empezar a trabajar desde entonces, sin mucha planificación, estaríamos ante una tarea de exploración. En caso contrario, sería mejor hablar de una tarea de investigación.

La adecuada realización de tareas por parte de los estudiantes, no depende sólo de la instrucción del maestro, es decir, en caso de no presentar una inducción inicial, momento previo a la realización de la tarea, no quiere decir que ésta fracasará, dado que los estudiantes no sólo aprenden en la escuela, sino también fuera de ella, por ejemplo en la relación constante con los sujetos y objetos de su entorno (padres, vecinos, escenarios deportivos, grupos culturales, medios de transporte, entre otros).

Las Investigaciones Matemáticas en el Aula, es una metodología que se ha venido desarrollando en países como Brasil y Portugal desde hace algún tiempo con el objetivo de desarrollar los procesos de aprendizaje y enseñanza. Para nosotros es importante, ya que parafraseando a Pérez & Gómez (2009), los estudiantes pueden llegar a estar inmersos desde una temprana edad en dichas investigaciones y así ir potencializando los procesos de aprendizaje para que emerja el conocimiento en los estudiantes. En este sentido, vemos en



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

los estudiantes la posibilidad de comprometerse con determinadas situaciones que para ellos son importantes y sobre las cuales pueden manifestar preocupación e interés con el fin de desarrollarlas haciendo un seguimiento que permita encontrar resultados, además, como menciona Pérez & Gómez (2009, p 36), citando a Ponte, Brocardo & Oliveira (2003), “La formulación de preguntas, elaboración de conjeturas, cuestionarios, refinamiento de las preguntas y conjeturas anteriores, demostraciones, refinamiento de las demostraciones y comunicación de los resultados, son posibles procesos que los estudiantes pueden realizar en el salón de clases”, aunque consideramos que son procesos que no sólo se dan dentro de un salón de clases, sino que pueden trascender esa barrera y ser un proceso que se lleve a cabo en dos sentidos; escolar y extraescolar, dado que de las investigaciones se conoce su punto de origen, pero no el de llegada.

Las Investigaciones Matemáticas en el Aula, se desarrollan habitualmente en 3 fases, la primera es la introducción de las tareas en el cual se especifica el propósito del tema, ya sea de forma escrita u oral, además, hay una comprensión de la situación propuesta, se da una organización de la información o de los datos y se formulan conjeturas o hipótesis a partir de esa información. De acuerdo a Pérez & Gómez (2009, p 42), esta fase

Se caracteriza por ser el momento en el cual el maestro decide, en compañía de los estudiantes, el camino a recorrer durante las clases. El maestro tiene, junto con los estudiantes, la responsabilidad de escoger una actividad que muestre características de la búsqueda que realiza un matemático.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Esto implica que el maestro asuma un papel colaborativo y facilitador de

los elementos que posibiliten una investigación en conjunto con sus estudiantes,

además debe propiciar un buen ambiente de trabajo con sus estudiantes para que esta labor tenga éxito.

La segunda fase consiste en realizar o desarrollar las actividades acordadas colectivamente por el maestro y todo el grupo, ya sea de forma individual, subgrupos o con todo el grupo. Dentro de esta fase se requiere que los alumnos asuman un papel de investigadores frente a un tema y que sobre éste se interroguen constantemente. El papel del profesor será el de orientador de la actividad, quien se encargará de dar algunas indicaciones que permitan encaminar la labor investigativa de los estudiantes con una actitud abierta y propositiva. En este sentido, Pérez & Gómez (2009, p 48), mencionan que, “Luego de realizar la introducción de las tareas, los estudiantes comienzan a formular sus primeras búsquedas en el tema específico que ya fue socializado en compañía del maestro”. Cabe resaltar que la actividad investigativa se hace a la par con el maestro y si es el caso, con el resto del grupo.

De acuerdo a lo anterior, se caracteriza la actividad investigativa de la siguiente manera:

El desarrollo de esta actividad parece indicar que dos características son necesarias para trabajar con éxito en la investigación matemática: intuición y flexibilidad. La perspicacia es vital para la formulación de objetivos, de modo que coincidan con las principales características de la situación y sean capaces de tratar de términos matemáticos. La flexibilidad es importante para la selección y evaluación de estrategias, es decir, la capacidad de establecer y modificar los enfoques que no parecen conducir a nuestros objetivos. Pérez & Gómez (2009, p 49), citando a Ponte y Matos (1992, p. 17)



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Se recomienda tener precaución con respecto a las ideas que de los estudiantes surgen durante esta actividad investigativa dado que son clave en este proceso, además, debe ser de forma natural donde pese a la orientación del profesor, no debe haber una imposición por parte de él, de tal manera que se conserve originalidad y se trabaje con un objetivo en común; profesor y estudiantes.

En la tercera fase se da una discusión, debate, negociación o socialización de los resultados en los que los alumnos relatan el trabajo realizado y lo significativo de ello, además, se debe dejar en claro que la investigación que se expone, el proceso y las conclusiones finales, deben quedar lo suficientemente claros para el lector. Esta fase busca crear una mirada crítica y un pensamiento reflexivo por parte de los participantes, que conlleve a razonar en torno a la investigación realizada. En coherencia con lo anterior, Ponte, Brocardo y Oliveira, (2003, p. 41), mencionan de esta fase lo siguiente:

Al terminar la fase del desarrollo del trabajo, el camino investigativo termina con el proceso de socialización final de los resultados de la investigación ya que al final de la investigación, el balance del trabajo realizado constituye un momento importante de compartir conocimientos.

De esta manera, el profesor debe estar vigilante con respecto a los resultados que se comparten, con el fin de que se seleccionen los más significativos, dados durante y después del proceso, además debe atender a la necesidad de sintetizar toda la investigación realizada donde se describa de forma detallada todos los avances de sus estudiantes y posteriormente debe continuar en la estimulación de los mismos para que permanezcan inquietos frente a determinados temas. Esto posibilita que los estudiantes confronten sus conclusiones con las preguntas que inicialmente fueron formuladas.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

A la hora de realizar investigaciones es importante tener claro nuestro enfoque, parafraseando a Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) nos mencionan

que las Investigaciones Matemáticas están enfocadas a uno o más problemas, y así podemos afirmar incluso que el primer gran paso del investigador es identificar de forma clara el problema a resolver. Por esto es que la matemática está relacionada con problemas e investigación. Es aquí donde las matemáticas a partir de “problemas” logran dar paso a nuevos horizontes, a nuevos pensamientos, ya que poco sentido tendría realizar una Investigación en Matemática a través de un problema sin dar pie a nuevas visiones.

La institución educativa Ramón Múnera Lopera

Nuestro trabajo de grado se realizó dentro de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemática, en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, además, nuestro proyecto de investigación se desarrolló en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera.

La IERML, se encuentra ubicada en la comuna 3, Barrio Manrique oriental. Esta institución cuenta con 25 aulas aproximadamente, distribuidas en los dos niveles que posee. El segundo nivel tiene dos accesos; por otro lado, esta institución posee una cancha, restaurante escolar, biblioteca, laboratorio, baños, salón de profesores, rectoría, coordinación, sala de sistemas y cafetería.

En este momento la Institución es el resultado de los esfuerzos de toda una comunidad teniendo reconocimientos a nivel comunal y municipal, todo lo que antes eran sólo unos pequeños ranchos hoy en día es una gran institución formadora de sujetos íntegros, llenos de valores y que sean de aporte para la sociedad.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

La institución hace énfasis en el respeto por la diferencia, reconociendo el sujeto como un ser determinado por su situación económica, social, étnica, de credo y limitaciones físicas y/o cognitivas de acuerdo a la Constitución Política de Colombia. Considera que el ser humano debe seguir un proceso constante de desarrollo, alcanzando el mayor nivel de sus capacidades, promoviendo valores éticos, religiosos, morales y cívicos, cultivando un ambiente armonioso dentro y fuera de la institución.

MISIÓN

“La IE RML es una entidad de educación formal y oficial que contribuye a la formación académica y en valores desde una concepción integral del ser humano, permitiendo el desarrollo del pensamiento y la acción creativa, con proyección a la comunidad, acorde a las exigencias del entorno y favoreciendo la convivencia armónica y el ejercicio de la ciudadanía”.

La IE RML tiene como meta ser el espacio de encuentro escolar y comunitario para la formación humana, con un excelente nivel académico, ambientes educativos favorables, áreas de gestión en permanente actualización y un talento humano en constante proceso de desarrollo, que se proyecta individual y colectivamente en el ámbito social, cultural y científico”.

En lo concerniente al plan del área de matemáticas, las temáticas a desarrollar durante el año escolar, son los cinco pensamientos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional: aleatorio, métrico, numérico, espacial y variacional.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

La estrategia metodológica o ayuda didáctica que utiliza nuestra profesora cooperadora Astrid Cano, parte de las investigaciones matemáticas realizadas en el aula. La estrategia de evaluación consiste en la implementación del trabajo en equipo, evaluaciones escritas y orales, talleres de aplicación, ejercicios, trabajo individual, aplicación de encuestas, entre otras.

Consideramos que el salón de clase debe ser un lugar tranquilo, cómodo, amplio para que así todos los estudiantes puedan recibir dentro de lo posible una clase significativa. Ya que éste es el lugar de aprendizaje y enseñanza, es de alguna manera un templo del saber para formar seres humanos, y en muchos lugares del país no se cuenta con salones bien adecuados.

En algunos momentos de los primeros semestres de acompañamiento, observamos estudiantes que hacían caso omiso a los llamados de atención; sin embargo, para nosotros es muy gratificante saber que hemos aportado unos pequeños granos de arena para que la actitud de los muchachos fuera la adecuada. La profesora Astrid nos contó que desde que estuvimos en el salón, la actitud de varios estudiantes cambió de modo positivo, y esto fue reconfortante para nosotros ya que acercándonos a ellos establecimos una relación horizontal como menciona Freire, de modo que llegamos a los estudiantes y tuvimos por respuesta un trato muy positivo y de interés por aprender cada día más.

Esto para nosotros como docentes en formación fue una experiencia simplemente extraordinaria, que va a ser de gran utilidad el día que llegemos a ejercer nuestra profesión. Astrid nos ha dado ejemplo y motivación, ya que fue una profesora que siempre estuvo pendiente de los niños, se preocupaba por la metodología a usar y mostraba una



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

matemática divertida y aplicable a su realidad. Es una suerte haber contado con su presencia en este proceso.

Nuestra maestra cooperadora: Astrid Elena Cano Zapata

Durante nuestro proyecto de investigación, contamos con la presencia y colaboración de la maestra Astrid. Ella fue quien estuvo dirigiendo a nuestro grupo en el grado 4° y al año siguiente continuamos con ella en el grado 5°, es decir, estuvo al frente de este grupo desde el inicio y hasta el final de nuestra investigación y quien además, estuvo orientando las actividades y clases de matemáticas. La profesora Astrid siempre manifestó un fuerte interés por promover la sana convivencia y demás valores dentro y fuera del salón de clases.



Ilustración 4. La profesora trabajos de clase

Astrid en uno de los

Astrid es licenciada en Administración educativa de la Universidad Cooperativa de Colombia, magister en Sociología de la Educación de la Universidad de Antioquia, tiene una Especialización en Cultura política: Pedagogía en Derechos Humanos y lleva trabajando en esta institución alrededor de 15 años. Fue enriquecedor para nosotros ver que a pesar de que no está formada principalmente en Educación Matemática, tiene conciencia de la metodología empleada dentro del aula de clase, siendo coherente con muchas de las necesidades y situaciones reales de los



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

estudiantes, dejando claro que para llegar al estudiante hay que conocer de su contexto y movernos en éste.

Astrid manejó una relación de mucha confianza con sus estudiantes, siempre se mostró dispuesta a cualquier necesidad o cualquier duda que ellos presentaron, sin embargo a pesar de esa confianza se mantuvo un gran respeto por la profesora, de modo que ella no tuvo la necesidad de tener un trato autoritario para mantener el orden en el salón, al contrario, se mostró amable para cada uno de los cincuenta y cinco estudiantes que conformaron el grado 5°. Siempre resaltó y estimuló el hecho de que un estudiante se esforzara, que tuviera perseverancia, más allá de llegar a un resultado, valoró ese esfuerzo individual por querer aprender. La forma en la que Astrid desarrollaba sus clases fue para nosotros gran influencia, ya que con esa forma de enseñar, nos mostró el lado amable de las matemáticas en contextos complejos.

Astrid nos mencionó sobre algunas de las muchas problemáticas que había de trasfondo en el colegio ya que está ubicado en una zona que fue permeada por la violencia, el desempleo, las drogas y el narcotráfico. Durante ese momento, nos señaló también que había estudiantes que no podían acceder a una buena alimentación y a sus útiles escolares. A pesar de todas las dificultades que se presentaron en el día a día, la profesora siempre manejó una actitud muy positiva. Es un ejemplo a seguir, ya que en cada acción que realizaba se evidenciaba que la hacía con amor, entrega y dedicación. Nos mostró cómo ser docente implica estar lleno de grandes problemáticas, pero que también es una labor demasiado gratificante ya que estamos formando personas para el mundo, y estamos creando sujetos íntegros. Ella constantemente mostró preocupación por el contexto que permeaba a la Institución Educativa, compartiéndonos todas y cada una de las dificultades



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

por las que pasaba la institución y sus estudiantes, ya fuera dentro del aula como fuera de ella. Los estudiantes expresaban constantemente gran aprecio por Astrid y por la forma en que ella impartía las clases de matemáticas, ya que dentro de su metodología, se evidenciaba carisma y el amor por la docencia.

Una de las problemáticas más grandes que tenemos los profesores de matemáticas hoy en día, es ¿Cómo trabajar las matemáticas de tal manera que éstas tengan una aplicación en la vida diaria? Así el estudiante podrá usar la matemática y aplicarla en su cotidianidad, en los problemas que afronta cada día para que no la vean únicamente como fórmulas sin ningún tipo de uso. Astrid nos mostró que sí es posible trabajar muchas temáticas y darle aplicación dentro de la vida del estudiante, evidencia de ello fue su metodología con la cual nos mostró una matemática aplicada al contexto de los alumnos.

Astrid también ha escrito varios textos, como *"Daniela en el país de los números"*. En este, Astrid menciona a Daniela, una niña con muchas dificultades dentro de su vida familiar. Se trata de una niña que vendía chicles hasta altas horas de la noche en el barrio Aranjuez para poder contribuir con los gastos de la casa y gracias a esta labor, ha adquirido gran agilidad mental para hacer cálculos matemáticos, pues ella ha manifestado que debe ser ágil mentalmente, ya que el semáforo cambia rápidamente y si cuenta con los dedos, arriesga a perder dinero. Este es un ejemplo que nos demuestra que Astrid mantuvo una preocupación por conocer primero el contexto de los niños y así entender las dificultades que manifestaron dentro del salón.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación



4. EL CAMINO RECORRIDO

Fundamentos metodológicos

Para efectos de nuestra investigación, esta metodología estuvo enmarcada en un paradigma cualitativo. En este sentido Bogdan (1992, p. 19) habla de la metodología cualitativa refiriéndose a “la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable”. Además se tiene en cuenta al sujeto desde su contexto social, familiar y académico. Cabe mencionar también que



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

hay un interés por comprender los intereses de los participantes desde sus entornos y nosotros como investigadores, consideramos necesario para nuestra investigación, dirigimos hasta los escenarios donde ellos se desenvuelven a diario.

Santana & Gutiérrez (2002, p. 15) define la investigación cualitativa como interpretativa, y además “es la alternativa más expedita de los investigadores para interpretar y comprender la realidad social circundante” en este sentido y para nuestro caso en particular, una investigación cualitativa permite vislumbrar detalles de la vida cotidiana dentro de una institución educativa y a partir de esta pudimos realizar interpretaciones y explicaciones sobre nuestro objeto de estudio a través del uso de instrumentos que permitiesen la recolección y el análisis de los datos. La investigación cualitativa posibilita obtener los datos en un contexto natural, además puede brindar los siguientes tipos de información:

- a. El contenido y la forma de la interacción verbal entre los sujetos.
- b. El contenido y la forma de la interacción con el investigador en diferentes situaciones y ocasiones.
- c. La conducta no verbal: gestos, posturas mímicas.
- d. Los registros de archivos, documentos, artefactos u otro tipo de evidencia.

Además el investigador recurre a “procedimientos tales como la observación participante, la entrevista u otras vías que se constituyan en fuentes de información”. Santana & Gutiérrez (2002, p 224).

En coherencia a lo anterior y considerando que todas las concepciones, perspectivas y escenarios donde los participantes se desarrollaron fueron determinantes en este



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

estudio, hicimos uso de algunos elementos que posibilitaron un posterior análisis y para ello, estuvimos convencidos que las entrevistas, grabaciones, videos, encuentros, debates y demás, fueron por decirlo de alguna manera, las herramientas que nos permitieron realizar una observación a fondo con relación a la objetivación de la estructura isomorfismo de medidas.

Es por esto que nuestro objeto de estudio es la objetivación de la estructura isomorfismo de medidas como un proceso donde el estudiante le da sentido y significado al objeto, además es el proceso donde hay una apropiación y un reconocimiento de la estructura isomorfismo de medidas, es decir, de cómo están compuestas, de cómo se constituyen, de sus dimensiones y de su aplicabilidad.

Por otro lado, al interior de este paradigma, este proyecto está enmarcado en un abordaje crítico – dialéctico. En este sentido Sánchez (1998) menciona que un abordaje crítico – dialéctico:

Presenta entre sus presupuestos filosóficos diversas concepciones de hombre que pueden ser resumidas así: el hombre es considerado en la mayoría de las investigaciones como un ser social, es decir, individuo inserto en el conjunto de las relaciones sociales. A pesar de ser histórica y socialmente determinado también es capaz de tomar conciencia de su papel histórico. (p. 85)

Este tipo de abordaje contribuyó a analizar los datos obtenidos durante nuestra investigación, además, fue un elemento relevante dado que es posible relacionarlo desde una mirada histórico- cultural, dado que favorece una transformación en las prácticas de los protagonistas de la investigación, así como de los objetos matemáticos que estuvieron involucrados.

Fases de la investigación

Facultad de Educación

El propósito fue realizar nuestro acompañamiento y por ende nuestra investigación, en un plazo de tres semestres. Las fases de esta investigación son las siguientes:

Revisión bibliográfica

Desde el inicio de nuestro proyecto, hicimos un rastreo bibliográfico en torno al objeto de estudio para poder consolidar nuestro trabajo de investigación. Esto permitió una recopilación que denominamos estado del arte, el cual nos dio la oportunidad de poder definir hacia donde queríamos encaminar nuestros objetivos. Esta revisión la realizamos a lo largo de todo el proyecto.

Planteamiento del problema

La consolidación del planteamiento del problema se desarrolló durante el primer, segundo y tercer semestre. Esta consolidación se dio gracias a la observación, las actividades realizadas, la implementación de técnicas de registros y la revisión bibliográfica.

Trabajo de campo

La realización de esta investigación inició en el primer semestre de nuestro proyecto en el cual realizamos constantes observaciones durante las clases de matemáticas. A partir del segundo semestre iniciamos un acompañamiento donde realizamos algunas actividades



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación
mencionada.

en colaboración con la maestra cooperadora Astrid Cano. Las visitas se realizaron una vez cada semana durante una jornada en la Institución ya

Mediante las Investigaciones Matemáticas en el Aula como metodología, buscamos que luego de realizar las actividades, se hicieran socializaciones que dieran cuenta de los objetivos propuestos y de esta manera, también pudiéramos obtener conclusiones con base en los datos recogidos.

Realizamos 12 visitas durante el tercer semestre y desarrollamos las siguientes actividades de las cuales, las que tienen * (asterisco), son las que para efectos de nuestra investigación seleccionamos para nuestro análisis.

Tabla 1. Actividades realizadas durante el trabajo de campo

Visita	Actividad	Objetivo
4 de Agosto	La escalera	Implementar el juego como un factor motivador para la solución de problemas de carácter multiplicativo.
11 de Agosto	Actividad tomada de Alzate, Pérez, Ramírez & Restrepo (2013)*	Incluir el juego para indagar más a fondo sobre las concepciones y/o problemáticas de las estructuras multiplicativas



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

		por parte de los estudiantes del grado 5º2.
25 de Agosto	Actividad tomada de Alzate, Pérez, Ramírez & Restrepo (2013)*	Incluir el juego para indagar más a fondo sobre las concepciones y/o problemáticas de las estructuras multiplicativas por parte de los estudiantes del grado 5º2.
1 de Septiembre	Batalla naval	Reconocer características propias de la multiplicación.
8 de Septiembre	Multiplicación de fracciones	Aprender con mi grupo, como se multiplican las fracciones.
15 de Septiembre	La coquetona multiplicación*	Introducir la lectura como apoyo didáctico para fomentar la investigación.
22 de Septiembre	Actividad tomada de la tesis	Resolver y crear situaciones de la vida diaria relacionadas



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

	de Torres (2013)*	con la multiplicación.
29 de Septiembre	La tienda de arroz*	Identificar en situaciones cotidianas, el uso de la multiplicación.
6 de Octubre	La tienda de arroz*	Identificar en situaciones cotidianas, el uso de la multiplicación.
20 de Octubre	La historia de la multiplicación*	Reconocer la importancia de las matemáticas para dar solución a necesidades del hombre.
27 de Octubre	Entrevistas, fotos, audios y gestión del primer encuentro	
10 de Noviembre	Primer encuentro de investigadores matemáticos en el aula*	Fomentar la investigación y la autonomía en la búsqueda y fortalecimiento del conocimiento.



Análisis

En el segundo semestre de nuestro proyecto de investigación iniciamos con los diarios de campo, con el fin de obtener una lectura del contexto de cada estudiante y para el tercer semestre, proyectamos continuar con entrevistas y demás tipos de herramientas, los cuales consideramos, dieron cuenta de cómo fue el proceso de objetivación de las estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes de 5° grado. Seleccionamos ocho estudiantes para realizar un seguimiento y una investigación más profunda. Para este análisis contamos también con la colaboración de nuestro asesor Diego Alejandro Pérez y la maestra cooperadora Astrid Elena Cano.

Para un posterior análisis, realizamos una triangulación de la información, la cual en palabras de Santana y Gutiérrez, “permite reinterpretar la situación en estudio a la luz de las evidencias provenientes de todas las fuentes empleadas en la investigación”. (2002, p 225). Además la triangulación puede realizarse a través del análisis de la información a partir de la aplicación de métodos cualitativos. De forma simultánea realizamos una categorización que fue emergiendo durante el análisis dentro de la cual clasificamos la información.

Parafraseando a Santana y Gutiérrez (2002), el paso de la categorización o clasificación exige la revisión, una y otra vez, de la información recopilada, con el propósito de ir descubriendo el significado de cada evento o situación, considerando el todo y sus partes. Además coincidimos al hablar de interpretación como la fase que es entendida como el logro de la coherencia entre una categorización particular y su ubicación en el contexto estructural de la situación que se estudia. En este sentido entendemos la necesidad



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

de estructurar la información obtenida en categorías emergentes, que dieron de una u otra manera la respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Protagonistas de la investigación

La investigación tuvo lugar en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, Barrio Manrique. Contamos con la colaboración de la maestra de Matemáticas Astrid Cano y es con ella con quien acordamos las fechas en las que se realizaron las visitas y los temas que tratamos en ellas. Nuestro acompañamiento se dio en el grupo 5º2, el cual fue un grupo mixto que contó con 55 estudiantes, en un rango de edad de 9 a 11 años.

Los niños que seleccionamos para evidenciar a grandes rasgos el proceso investigativo fueron en total ocho estudiantes que oscilaban entre los 9 y 11 años de edad. El criterio que tuvimos para dicha selección, fue la actitud propositiva, participativa y comunicativa que manifestaron durante el desarrollo de las actividades. Las voces y apreciaciones de cada uno de estos niños al igual que de la maestra cooperadora Astrid fueron fundamentales para dar cuenta de dicho proceso. Las principales características que resaltaban los niños durante nuestra investigación, fueron el respeto, el compromiso, la perseverancia, el trabajo en equipo, la consistencia y constantemente estaban dispuestos a afrontar los errores, además, se pudo ver durante la investigación como los estudiantes manifestaban interés por las matemáticas y una relación con ellas dentro de su contexto para responder a situaciones en su día a día. Visto así desde Dubinsky,

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones percibidas de problemas matemáticas por medio de la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y por medio de la construcción o reconstrucción de acciones matemáticas, procesos y objetos...”, (1996, p. 32).



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Es decir, un conocimiento matemático que estuviera relacionado con su realidad, conocimiento que se fue evidenciando por parte de los pequeños investigadores en Las Investigaciones Matemáticas en el Aula y que con el tiempo fueron encontrando un sentido a las matemáticas y una mayor apropiación de ellas. La maestra Astrid ya venía trabajando esta metodología con sus estudiantes desde hace ya algunos años, por lo cual se facilitó el trabajo de dicha metodología durante esta etapa.

A continuación daremos a conocer una descripción de manera general de los estudiantes que fueron protagonistas durante nuestra Investigación, dicha descripción es basada en los escritos de los estudiantes, su participación en clase, trabajo en equipo y nuestras observaciones en la investigación.



JULIANA

Siempre se mostró como una niña que estaba dispuesta a escuchar al otro, con 11 años de edad estaba muy interesada en las matemáticas y constantemente exigía más de lo que se le daba en el aula de clase. En varias ocasiones nos pedía talleres, actividades o alguna clase de material para estar aprendiendo cada día más.



MANUELA

Con 10 años de edad, Manuela es una estudiante que se caracterizaba por ser expresiva, constantemente estaba haciendo preguntas frente a lo que se planteaba, siempre mostraba una inquietud frente a un tema, pedía ayuda cuando no entendía algo, porque no le gustaba quedarse sin saber lo que estaban trabajando en clase. También en ocasiones decía que las matemáticas eran muy duras.



DENIS

Esta estudiante de 10 años de edad al inicio de la investigación y en repetidas ocasiones manifestó que no le gustan las matemáticas porque eran muy difíciles, pero a medida que avanzó la investigación, mostraba interés por las matemáticas y dijo que estas son de gran utilidad para todos nosotros.



DAIVER

A sus 9 años era un estudiante que no le gustaba mucho hablar en clase, pocas veces preguntaba por algún tema, le agradaba mucho trabajar en equipo y siempre era muy atento a la hora de una explicación.



HELLEN

Con 10 años de edad una de las características de Hellen fue la puntualidad con las tareas de la investigación, siempre nos llevaba avances y nos pedía que le revisáramos los trabajos que ella había adelantado, no le gustaba participar mucho en público,



SHIRLY

Con 11 años de edad era una estudiante que apuntaba todo en su cuaderno, le gustaba el trabajo colaborativo y siempre se mostraba con mucha disposición durante las investigaciones, le gustaba estarse cuestionando y ella misma buscaba como responder las preguntas que le surgían en el aula de clase.



OSCAR

Con 11 años de edad, Oscar era alguien muy participativo, también decía que le gustaban las matemáticas y lo mucho que se entretenía haciendo ejercicios del área ya mencionada.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación



ANGÉLICA

A sus 10 años de edad Angélica se caracterizaba por estar siempre atenta a clase, su compañerismo, por participar en clase y también en los tiempos libres repasaba los temas de clase, era de su agrado el trabajo en grupo, ya que decía que todos podían aportar siempre y cuando fueran juiciosos.

A todos los padres de familia o acudientes de los estudiantes presentados acá les pedimos permiso de manera formal, a través de una carta en la cual solicitábamos la autorización del uso de las fotografías, audios, videos, trabajos en clase, entre otros materiales que son los publicados en este trabajo. A continuación presentamos el formato que fue utilizado para dicha autorización.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

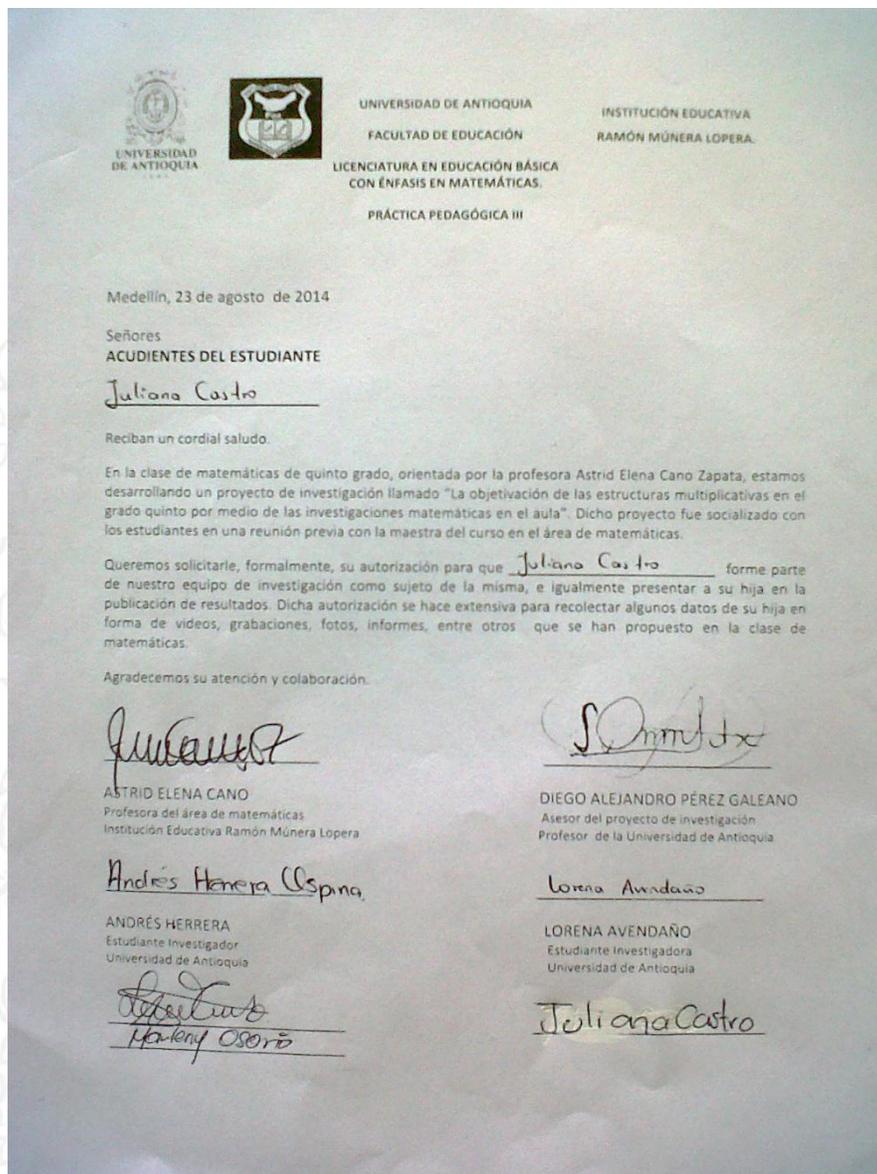


Ilustración 5. Carta de autorización para la publicación de registros y datos

Instrumentos de producción de registros y datos

Los registros y datos que produjeron los protagonistas para su posterior análisis, fueron los siguientes:



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

- Grabaciones, las cuales fueron obtenidas para su futura reproducción con el fin de no perder ninguna expresión por parte de los estudiantes y que sirviera de soporte para el análisis.
- Entrevistas, dentro de las cuales se posibilitaron encuentros para establecer diálogos que dieran cuenta del punto de vista de los estudiantes acerca del tema, además como mencionan Hernández, Fernández & Baptista (2006, p 597), la entrevista y en este caso “la entrevista cualitativa es más íntima, flexible y abierta”, en coherencia con lo anterior, podemos decir que ésta posibilita el intercambio de información entre dos o más personas, logrando dotar de significado el dialogo en cuestión.
- Fotografías, las cuales nos permitieron captar momentos relevantes dentro de las actividades de investigación desarrolladas por los estudiantes.
- Diarios de campo, con el fin de obtener información acerca de lo significativo que fue para los estudiantes este tipo de tareas, además de sus apreciaciones.

Los datos obtenidos fueron registrados en categorías las cuales se fueron estructurando a medida que se hizo la investigación y su posterior análisis.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

5. LAS INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN EL AULA: EXPECTATIVAS Y PUNTO DE PARTIDA.

Esta categoría consiste en presentar como surgió nuestro objeto de estudio a partir de actividades, observaciones y demás trabajos en clase, que dieron cuenta de problemáticas relacionadas con errores conceptuales y procedimentales en el momento de constituir un determinado conocimiento matemático; objeto de estudio que está enmarcado dentro de las Investigaciones Matemáticas en el Aula.

Esta metodología de investigación al contar con tres fases, no pretende dar una respuesta inmediata a algún tipo de pregunta planteado dentro del aula de clase, dichas fases son; Introducción de tareas, desarrollo de tareas y socialización de las tareas.

En este sentido, todo se fue estableciendo en el transcurso de la investigación dando a conocer en cada fase un sentido de las matemáticas con su entorno, con su contexto y la relevancia para la cultura e historia. También cabe resaltar que por medio de esta metodología pretendimos romper un paradigma sobre las clases comúnmente desarrolladas y así reafirmar nuevos ideales, además de pensar que puede haber otras formas de desarrollar los procesos de aprendizaje dentro del aula de clase.

En el primer semestre de nuestra investigación, observamos en una de las visitas realizadas, una actividad desarrollada por la maestra cooperadora, relacionada con los números primos. Durante el desarrollo de la misma logramos observar que los estudiantes tenían dificultades para trabajar los números primos, dado que en esta actividad, se presentaba inicialmente un cuento llamado *La criba de Eratóstenes* donde durante la lectura



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

de la misma, se explica cómo seleccionar los números primos desde el 1 hasta el 100. Esta técnica consistía en descartar paso a paso los números que no eran primos y esto se daba gracias a elegir los múltiplos del 2, luego los del 3 y así de forma sucesiva y al hallar estos múltiplos, los fueron tachando con una x. Al final, los números que no estuvieran tachados, eran los denominados *números primos*. Finalmente, dichos números se encerraban en círculo. La situación consistió en que los estudiantes por medio del cuento fueran reconociendo las características de los números primos, el problema fue que por medio del cuento se pedía tachar como ya mencionamos los múltiplos y una de las situaciones presentadas fue la siguiente:

Denis: Profe, ¿Acá que hago?

Profesor: ¿Cuáles son los números que nos piden tachar primero en el cuento?

Denis: los múltiplos de cada número pero ¿Cómo así?

Profesor: Si, empezamos a tachar los múltiplos del 2

Denis: Pero ¿Cuáles son los múltiplos del 2?

Profesor: Son todos los números que van de dos en dos, como mencionan en el cuento

Denis: ¡Ah! tan fácil

Profesor: Si y así continuas con los demás múltiplos

Denis: ¡Aaa de dos en dos!, ¿Pero con el 3 que? ¿Y los otros números?

Profesor: Pues, los del 3 serían los múltiplos del 3 o los que son divisibles por él.

Denis: y ¿Cuáles son esos?

Profesor: ¿No te sabes las tablas?

Denis: mmm si, pues unos, es que se me olvidaron. (*Denis, socialización 26 de Agosto de 2013*).

En la siguiente imagen se puede observar el trabajo realizado por la estudiante Denis

La criba de Eratóstenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ilustración 6. Tabla de la Criba de Eratóstenes realizada por Denis Lorena

Vemos que la estudiante por medio de esta conversación no fueron conscientes de nociones de divisibilidad, producto o múltiplo y los que lo sabían, lo hicieron de forma memorística, pero no había una apropiación de dicho concepto, ni un trasfondo mayor de él, como se enuncia en los estándares y los lineamientos curriculares, donde hace referencia al uso de estrategias de cálculo en la resolución de problemas de carácter multiplicativo y que dichos problemas estén en relación en su contexto.

En un primer momento y de acuerdo a situaciones similares desarrolladas en el aula, nuestra preocupación estuvo encaminada hacia los errores conceptuales y procedimentales en torno a los números primos dado que, como menciona Furio & Ortiz (1983, p. 15)



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Si admitimos como hipótesis de trabajo que estos errores son como los icebergs que afloran de una sólida y coherente estructura cognoscitiva del alumnado, comprenderemos que el origen de aquellos habrá que buscarlos en el cuerpo de conocimientos –preconceptos, conceptos e ideas- que el alumnado ha asimilado, intercambiado o captado a lo largo de su sus vivencias académicas y/o extracadémicas.

En coherencia con lo anterior y gracias a las actividades desarrolladas y a rastreos bibliográficos, pudimos ver que el trasfondo mayor estaba dado en las estructuras multiplicativas y por ello decidimos enfocarnos en ellas, retomando una metodología de investigación ya trabajada por la maestra Astrid, ya que esta metodología está dada para darle un papel protagonista a los estudiantes en la investigación, pero donde todo el trabajo puede ser de forma colectiva o individual.

Posteriormente, para verificar el motivo de nuestra preocupación, decidimos realizar una serie de actividades previas de acompañamiento para poder evidenciar las dificultades que a grandes rasgos presentaron los estudiantes en la resolución de problemas relacionados con la estructura multiplicativa. Para efectos de nuestra investigación realizamos actividades que denominamos como *actividades introductorias* y estos ejercicios se presentaron en la primera fase de las investigaciones. Algunos de los ejercicios fueron los siguientes:

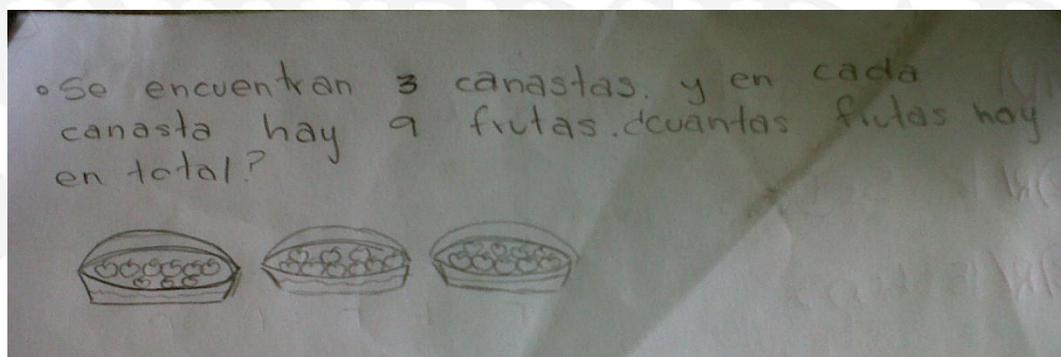


Ilustración 7. Actividad 1. Ejercicio 1.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 27 \end{array} +$$

Ilustración 8. Respuesta al ejercicio 1

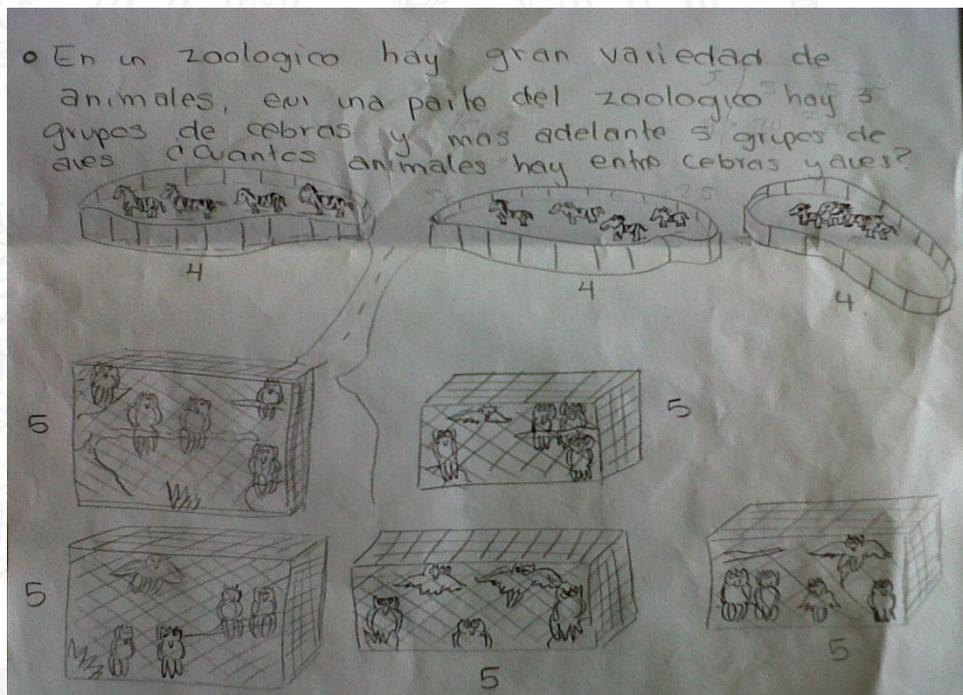


Ilustración 9. Ejercicio 2

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1803

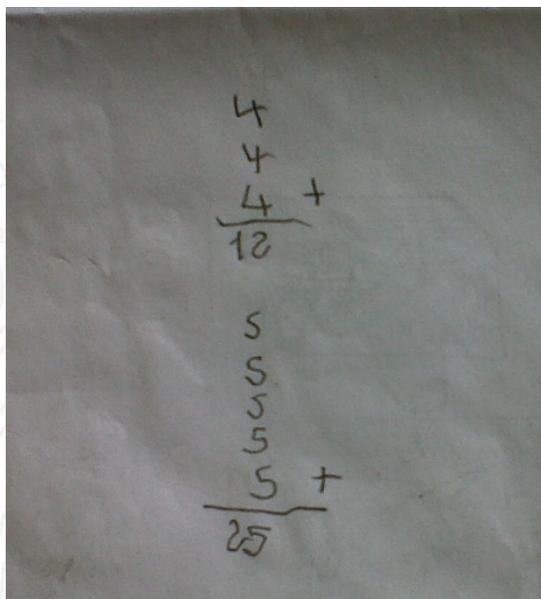


Ilustración 10. Respuesta al ejercicio 2.

Como podemos ver en las imágenes, los estudiantes en la resolución de estos ejercicios, plantearon sumas reiteradas, descritas éstas en palabras de Valencia & Gómez (2010) citados por Torres (2013, p 18) como cuando “el estudiante encuentra el sumando que se está repitiendo y lo suma la cantidad de veces como el problema lo pide o según la tabla que se deba llenar, teniendo en cuenta las variables y sus cantidades”.

De esta manera pudimos ver que no se estableció una relación entre la estructura de los ejercicios con la multiplicación, sino que los estudiantes resolvieron este tipo de situaciones mediante un concepto adquirido en grados anteriores y aún no habían establecido o estructurado un concepto más complejo como es el de la multiplicación.

Posteriormente realizamos otra actividad tomada de Torres (2013) y es la siguiente:



KAREN LOPEZ DUVAU

Actividad 1

Resuelve

- Mariana le gusta coleccionar monedas, ella tiene 196 monedas. ¿Cuántas monedas le hacen falta para completar 300?
 R/ a maria le falta 104 monedas para completar 300

$$\begin{array}{r} 196 \\ + 104 \\ \hline 300 \end{array}$$
- En una bolsa hay algunas pelotas. Si hay 52 pelotas verdes y 93 pelotas azules, ¿cuántas pelotas hay?
 R/ en total en la bolsa hay 145 pelotas.

$$\begin{array}{r} 52 \\ + 93 \\ \hline 145 \end{array}$$
- Si un corredor ya lleva recorrido 18.950 metros, de 56.800 metros que debe recorrer, ¿cuánta longitud le queda por recorrer?
 R/ al corredor le falta correr 37.850

$$\begin{array}{r} 56.800 \\ - 18.950 \\ \hline 37.850 \end{array}$$
- Andrés le debe 58 canicas a José, José le debe 39 canicas a Andrés, ¿cuántas canicas le queda debiendo Andrés a José?
 R/ andre le debe a juan 19 canicas

$$\begin{array}{r} 58 \\ - 39 \\ \hline 19 \end{array}$$
- María tiene 23 años, si Juan es 8 años mayor que ella, ¿cuántos años tiene?
 R/ juan tiene entonces 31 años.

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 8 \\ \hline 31 \end{array}$$
- En un colegio hay 1.980 mujeres y 987 hombres. ¿Cuántos hombres hace falta para ser igual a la cantidad de mujeres?
 R/ faltan 993 hombres para alcanzar a las mujeres.

$$\begin{array}{r} 1980 \\ - 987 \\ \hline 993 \end{array}$$
- Si en una fiesta hay 87 regalos y son 127 invitados, ¿cuántos regalos hace falta?
 R/ hace falta 40 regalos.

$$\begin{array}{r} 127 \\ - 87 \\ \hline 40 \end{array}$$
- Hay varias cajas de colores con 8 colores cada caja. Si en total hay 48 colores, ¿cuántas cajas hay?
 R/ en total hay 6 cajas de colores.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \div 8 \\ \hline 6 \end{array}$$

129

Ilustración 11. Taller adaptado de Torres (2013)

Karen en la resolución de estos ejercicios, pudo comprender lo que la situación requería y por ello pudo resolver esta actividad con las operaciones que se muestran en la imagen (suma, resta y división).

Sin embargo logramos evidenciar en los estudiantes como fue surgiendo una preocupación por los temas que íbamos trabajando y sus intereses se fueron enfocando cada vez más en aprender matemáticas; así fue el caso de Manuela, quien nos comentó que quería aprender a multiplicar, que quería saber más de las matemáticas y nos pedía ayuda



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

durante el descanso. También Juliana constantemente nos mencionó que quería aprender más y nos solicitó ayuda de talleres, actividades, o algún tipo de material para trabajar mucho más en relación con las matemáticas.

Es así como desde las Investigaciones Matemáticas en el Aula observamos la forma en que las temáticas y las formas a investigar se van direccionando a las necesidades, que los mismos sujetos iban encontrando dentro del aula de clase y así el interés particular fue emergiendo, llegando a generar una mirada más amplia sobre temas matemáticos por parte de los estudiantes, así como mencionan Pérez y Gómez, (2009, p.40) evocando a Ponte y Matos (1992, p. 17) que:

Las investigaciones matemáticas pueden ser importantes actividades educativas. Son muy útiles en el desarrollo y la consolidación de determinados conceptos y las ideas matemáticas. Se refieren a procesos importantes de razonamiento. Pueden permitir una visión más amplia de las matemáticas, mucho más cerca de la verdadera práctica del matemático.

Y fue así que realizamos estas investigaciones, mostrando un sentido de las matemáticas más “amable”, un enfoque que permitió a los estudiantes, relacionar su entorno y contexto con las matemáticas problematizando dichas situaciones, como se evidencia en la siguiente imagen donde una estudiante nos agradece por tener en cuenta sus ideas y donde además, se vio motivada por la metodología implementada dentro del aula de clase.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

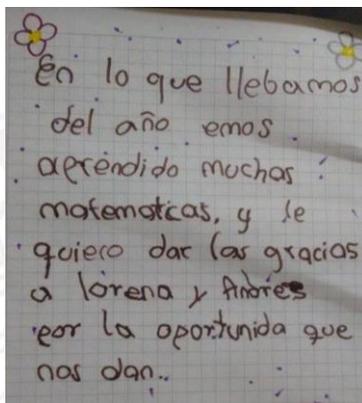


Ilustración 12. Imagen tomada del diario de campo de Hellen

Dado que nuestra preocupación e interés se centró en las estructuras multiplicativas, pusimos en escena una actividad llamada La ruleta de Vergnaud, tomada de Alzate, Pérez, Ramírez & Restrepo (2013), la cual tuvo como objetivo Incluir el juego para indagar más a fondo sobre las concepciones y/o problemáticas de las estructuras multiplicativas por parte de los estudiantes del grado 5. Dicha actividad fue modificada para efectos de nuestra investigación y fue usada en varias sesiones continuas.

Las reglas de juego fueron las siguientes, las cuales hicieron parte de la guía del estudiante:

1. Selecciona una tarjeta y lee detenidamente la situación que allí aparece.
2. Después de leer la tarjeta lanza la ruleta y el número que obtengas al lanzar la ruleta, lo reemplazas en el problema. (Lanza la ruleta que más te convenga según tu problema, ya sea la ruleta de números o de pesos)
3. A continuación con el número ya reemplazado se completa el problema o la situación y se resuelve.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

4. Gana quien haya respondido más preguntas de forma correcta

En dos de los ejercicios de esta actividad presentamos la siguiente situación:

Dayana pagó _____ por 2 horas en internet y Daniel estuvo 4 horas en internet,
¿Cuánto pago Daniel?

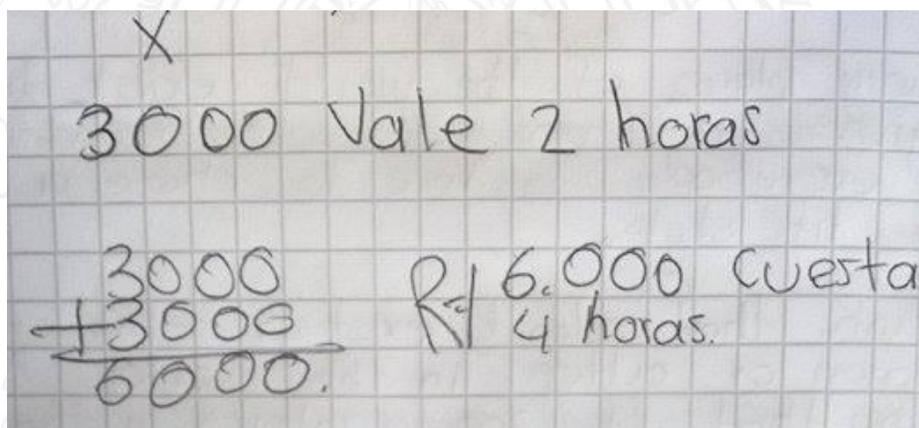


Ilustración 13. Solución de la situación de la ruleta de Vergnaud

Acá los estudiantes dieron solución del ejercicio realizando suma reiterada, en dicho proceso se ve implícitamente como los estudiantes dieron respuesta al problema de forma adecuada, pero en ocasiones ver la multiplicación solamente como suma reiterada puede generar que los estudiantes no siempre sean conscientes del problema a resolver y que hay otras formas de resolverlo, limitándose a una sola forma de ver el problema como menciona Sánchez (2008, p.4)

¿Es la multiplicación una suma reiterada? Claramente se ve que no. El hecho de que muchas de las situaciones multiplicativas se puedan resolver mediante una estrategia de este tipo ha llevado a definirla de esa manera. Este error produce en los enseñantes una cierta desazón cuando su alumnado no sabe enfrentarse a situaciones como la última descrita en los problemas del tipo Conversión. El hecho es que quizás no se sea consciente de que este tipo de problemas es diferente y hay que trabajarlo de otra forma, mediante otras estrategias

resolutivas y en etapas posteriores a aquellos que se pueden resolver mediante estrategias de suma reiterada.

Es por esto que la multiplicación no se debe dejar a un aprendizaje solo de suma reiterada o a un aprendizaje memorístico del algoritmo, ya que puede llevar a limitar al estudiante a la hora de resolver un problema y dejarlo solamente como una operación mecánica y sin sentido como menciona Torres (2013, p. 10), quien retomando los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) establece que

La escuela debe apuntar al aprendizaje de la multiplicación no sólo desde su definición, sino también desde su aplicación en diferentes tipos de problemas en relación con el contexto, ya que éste posibilita dar otros sentidos y significado a la multiplicación.

Es por esto que el desarrollo de la ruleta de Vergnaud, siempre apuntó a problematizar situaciones que pueden ser cotidianas para los niños y que al resolver estos problemas se generara un trasfondo mayor, dejando de lado la parte mecánica que muchas veces se tiene de las multiplicaciones y pasando a hacer uso de razón para resolver estos problemas, pero para lograr esto fue necesario que se generara un debate alrededor de un problema en específico por parte de los estudiantes como se evidencia a continuación.

Hay _____ cajas de colores con 22 colores en cada una. ¿Cuántos colores hay en total?

Inicialmente dos estudiantes; Juliana y Angélica, realizaron sumas reiteradas para resolver dichas situaciones como se ve en la imagen.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

A photograph of a piece of grid paper with handwritten mathematical work. At the top, a multiplication problem is shown: 22 multiplied by 8, with a horizontal line under the 8 and the result 176 written below. Below this, the text 'R= | 176 colores en total' is written in cursive.

Ilustración 14. Estrategia de Juliana y Angélica para resolver el problema

Luego de constantes diálogos y debates entre ellas, realizaron una multiplicación para poder dar respuesta a estas situaciones, dado que las sumas reiteradas como ellas lo manifestaron, les resultaron bastante largas y difíciles. A continuación se encuentra el diálogo entre Juliana y Angélica:

Angélica: ¡Pille! Salió 8, o sea que tenemos 8 cajas de colores

Juliana: ¿Qué hacemos?, hagamos 22, 22... 8 veces, pues sumemos

Angélica: Nooo Juli, eso es muy largo, yo creo que multiplicamos y podemos coger 8 por 22

Juliana: Aaaa, si, si, si es más fácil, eso sumando es muy largo (*Angélica y Juliana, socialización 11 de Agosto de 2014*).

El diálogo, el aprendizaje colaborativo, el interactuar con el otro, da lugar a una socialización de la que emana una construcción en conjunto y significado a determinadas situaciones. En este sentido, “La sociabilidad significa aquí el proceso de formación de la conciencia, que Leontiev caracterizaba como co-sapiencia, es decir, saber en común o saber-con-otros”. (Radford 2006, p.116). Los estudiantes durante la realización de varias



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

actividades recurrieron al debate para poder hallar las soluciones; esto fue algo que nos movió de algún modo a pensar en actividades que permitieran la participación e interés del otro, donde a lo largo de la socialización, reconocieran elementos relevantes que quizá de forma individual, sería una tarea más compleja. Este proceso, en el cual los estudiantes pasan por dificultades es importante, ya que desde Ponte y Matos (1992) citados por Pérez y Gómez (2009, p. 65) mencionan que:

Estas dificultades tienen un aspecto positivo. Proporcionan buenas oportunidades para el debate y la reflexión, muestran algunos errores y promueven el conocimiento de cuestiones más generales que pueden llegar a ser importantes para el adelanto de la investigación”. Y es que estas dificultades como mencionamos son valiosas para el proceso de aprendizaje de los estudiantes, porque así van legitimando y construyendo conceptos más sólidos, conceptos que inicialmente los estudiantes no manejaban bien, es decir, presentaban errores conceptuales. De ahí la importancia de tener en cuenta también estos errores conceptuales y no desecharlos debido a que pueden ser punto de partida para generar debate entre ellos mismos y secuencialmente dar flote a un rozamiento válido.

También pudimos observar que el juego al interior de la metodología se convirtió en un medio para potenciar el interés y la participación de los estudiantes, ya que para ellos se convirtió en una forma didáctica de interactuar y aprender.

Por esta razón y teniendo en cuenta nuestra metodología, realizamos un encuentro que denominamos *El primer encuentro de investigadores matemáticos en el aula*, y durante la realización de éste, se presentaron hallazgos realizados por algunos estudiantes que en la primera fase de esta metodología, se propusieron encontrar. Asumimos la socialización como fase crucial dentro de este proyecto de investigación, dado que como mencionan Ponte, Brocardo y Oliveira (2003), citado por Pérez & Gómez (2009, p 60), “Al final de la investigación, el balance del trabajo realizado constituye un momento importante de compartir conocimientos”.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Uno de los elementos que dio pie a las investigaciones por parte de algunos estudiantes, fue la lectura *La coquetona multiplicación*, la cual tuvo como propósito poder construir una pregunta de investigación a la cual se le hizo un seguimiento donde al final de esta fase, se presentó algunos de los más destacados trabajos en el encuentro.

Dentro de la lectura hubo aspectos como la multiplicación entre dos números siendo uno de ellos el 1 o el 0, anticipando el resultado de la multiplicación realizada. Al ser una historia, los estudiantes mostraron interés, más de lo habitual. Esto indica que el uso de diversos métodos de enseñanza, promueve el interés de todo un grupo de estudiantes, logrando promover y desarrollar diferentes habilidades en ellos.

Con base en las lecturas y en determinadas actividades, los estudiantes estructuraron sus preguntas de investigación en torno a temas como el origen de las matemáticas, la contribución de la multiplicación al hombre, entre otras. Este ejercicio despertó en ellos fuerte interés y compromiso, dado que fue el estudiante quien tomó el protagonismo, orientado éste por la profesora Astrid y nosotros.

Durante la realización del encuentro, hubo presentaciones como la de Manuela, quien dijo lo siguiente:

¿Qué es la multiplicación? La multiplicación es un procedimiento matemático que consiste en sumar un número varias veces, por ejemplo $4 \times 2 = 8$ también se puede representar de la siguiente manera $2+2+2+2=8$. (Manuela, socialización 10 de Noviembre).

Otra de las expresiones fue la siguiente:



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

A partir de estas lecturas y trabajos de clase es que nos surge una de las siguientes preguntas ¿Cómo facilito la multiplicación a los cálculos del hombre? ¿Cuántas veces se puede multiplicar un número? Y ¿Qué tiene que ver esta operación con la suma? En este momento nosotros empezamos a investigar, a hacer búsquedas en libros, revistas, internet sobre la multiplicación. Nosotras íbamos avanzando en la investigación y estos avances iban dirigidos por Andrés y Lorena quien nos orienta también en compañía de la profesora Astrid, ellos también nos traían otras actividades con actividades relacionadas con las estructuras multiplicativas y otras actividades. (Juliana, socialización 10 de Noviembre).

También en el transcurso de la investigación los estudiantes nos preguntaban sobre el origen de las matemáticas, ¿Quién las inventó?, ¿Donde surgieron?, ¿Quién invento las multiplicaciones?, a continuación se ve como se dan los diálogos que dan cuenta de dichas inquietudes:

Kevin: ¿Profe y las matemáticas existen desde hace muchos años?

Astrid: Sí, surgieron desde hace muchos años, desde la antigüedad

Kevin: Aaa pero pues entonces ¿Quién las inventó? O ¿qué?

Astrid: A partir de diferentes necesidades en cada cultura, los griegos hicieron aportes, los babilonios también.

Kevin: ay no profe, pero muy teso, hay que buscar más de eso. (Kevin, socialización, Octubre 20, 2014).

Aquí vemos como los niños se cuestionan también por situaciones culturales e históricas, dentro su contexto, es decir no es ajeno a su entorno y en coherencia con lo anterior, desde los Lineamientos curriculares de Matemáticas (1998, p.28), se menciona que:

En los últimos años, los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática, y los estudios sobre sociología del conocimiento entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares.

Este tipo de situaciones las consideramos importantes ya que el interés por una concepción matemática dada desde sus orígenes hace posible una relación con las



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

experiencias que los estudiantes han adquirido en su vida escolar. El enfoque en un tema determinado hizo posible que los estudiantes establecieran relaciones entre los conocimientos ya adquiridos y los nuevos conceptos; además, fue posible que a través de situaciones de carácter multiplicativo, crearan otras miradas donde se interrogaron por situaciones que no solo incluía a la multiplicación, sino que además, incluía situaciones generales donde primó la relación con sus contextos.

En esta categoría fue posible observar varios elementos que generaron gran participación por parte de los estudiantes, uno de ellos fue el juego, el cual a través del uso de las investigaciones matemáticas en el aula, hizo posible la apreciación de diferentes miradas frente a la resolución de problemas de carácter multiplicativo.

Otro elemento fue el de las investigaciones, pero siendo éstas desarrolladas por los estudiantes, dado que al ser ellos quienes se comprometieron en estas actividades, fueron autónomos en la construcción de su propio conocimiento.

Ahora para concluir esta categoría, plasmamos la reflexión de Juliana, durante la realización del *Primer encuentro de investigadores matemáticos en el aula*.

Ya a modo de reflexión después de haber realizado esta investigación llegamos a concluir la importancia de la multiplicación en diferentes momentos de la humanidad pero más que eso leímos que es importante para nosotros como estudiantes saber multiplicar ya que la multiplicación nos ayuda a realizar diferentes operaciones que sirven como punto de partida para trabajar nuevos conceptos que veremos el próximo año. (*Juliana, Encuentro de Investigadores Matemáticos en el aula, 10 de Noviembre 2014*).

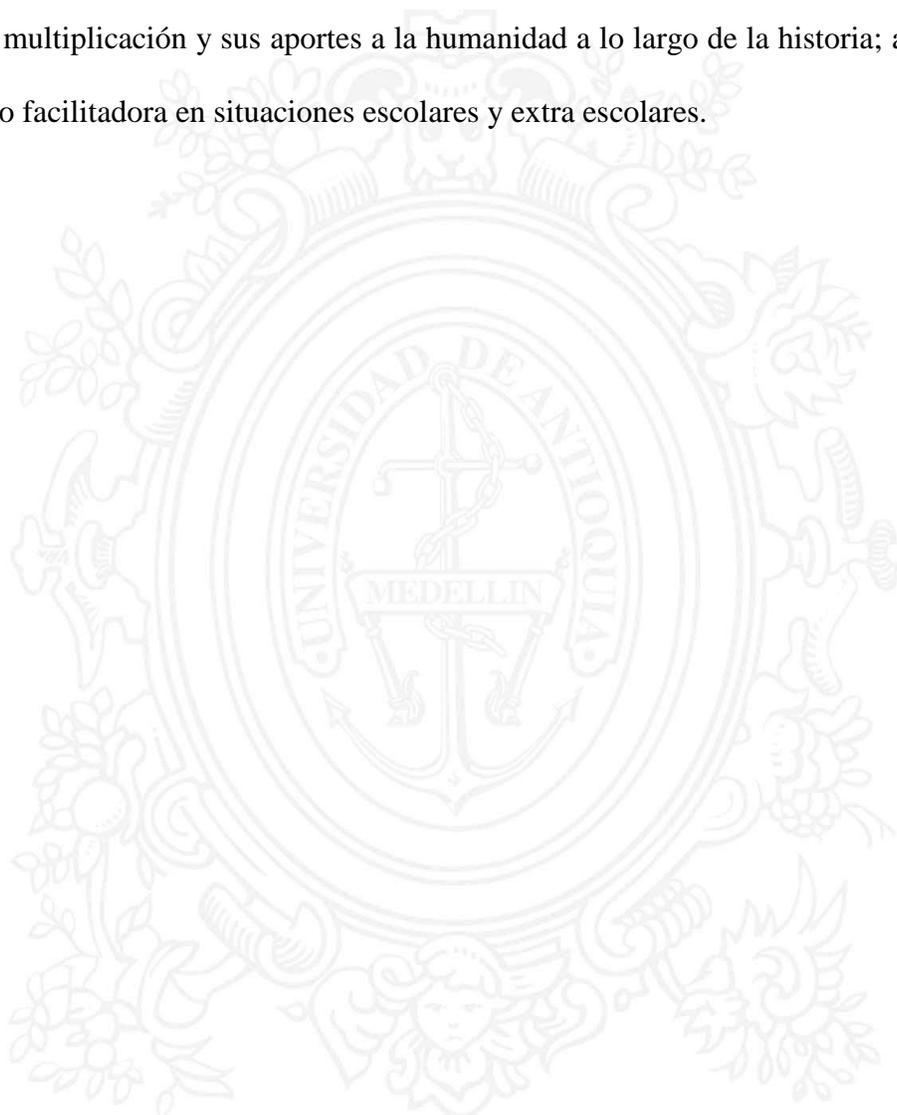
De acuerdo a la reflexión expuesta por Juliana, fue posible evidenciar que los estudiantes gracias a las investigaciones matemáticas en el aula, encontraron durante el



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

proceso realizado, la importancia de la matemática, pero específicamente de la multiplicación y sus aportes a la humanidad a lo largo de la historia; además, la vieron como facilitadora en situaciones escolares y extra escolares.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

6. CONCIENCIA Y RECONOCIMIENTO DE PROCESOS Y CONCEPTOS

Esta categoría pretende presentar la toma de conciencia, apropiación y reconocimiento por parte de los estudiantes con respecto a la estructura isomorfismo de medidas, basada en la teoría de la objetivación, en el cual se puede ver el proceso donde le permite al estudiante comprender qué elementos se ponen en juego frente a escenarios de carácter multiplicativo y que además están en relación con su contexto, intentando dejar de lado las prácticas habituales y comúnmente conocidas donde se aprende a través de la mecanización y la memoria. Cabe resaltar que durante dicho proceso también se deja ver planteamientos en algunas actividades, que tenían situaciones en las que estaban implicadas el uso de la multiplicación como el mero algoritmo o la suma reiterada, pero dichas actividades siempre fueron encaminadas hacia la apropiación y toma de conciencia del isomorfismo de medidas.

A partir de lo que plantea Radford (2000), se puede generar una toma de conciencia, que es como él lo llamaría, objetivación. La toma de conciencia, es ese momento en el que los sujetos dotan de sentido algún objeto matemático, esto por medio de unas mediaciones. Pero además de esto se produce un cambio en lo que también constituía al sujeto llegando a una subjetivación, por medio de una relaciones y prácticas que se van enmarcando dentro de una actividades.

Se presentan entonces en este capítulo, las actividades que evidencian el proceso que llevaron a cabo los estudiantes para poder constituir el conocimiento frente a situaciones de la vida diaria que implicaron la multiplicación. Mostrando así, cómo fue la



objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en el grado quinto por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula.

Al retomar nuestra metodología, las Investigaciones Matemáticas en el Aula, tuvimos que dirigirnos hacia su primera fase, la introducción de las tareas y en ella, ubicamos la siguiente actividad llamada *La Batalla de Multiplicar*. Actividad que fue tomada por nosotros en base al juego “Batalla Naval”, donde cada estudiante tenía 2 tableros y un total de 10 fichas.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	PUNTAJE JUGADOR 1	PUNTAJE JUGADOR 2
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												

Ilustración 15. Tablero de la Batalla de Multiplicar

Como podemos ver, aquí se origina la introducción de actividades de carácter multiplicativo, donde los estudiantes, por parejas, ubicaron pequeñas fichas en las diferentes casillas; posterior a esto, cada estudiante acumulaba puntos de acuerdo al producto, es decir, cada estudiante ubicaba las 10 fichas donde él deseara; luego de tener todas las fichas ubicadas, el contrincante mencionaba “ataco la posición vertical (n) y la horizontal (m)” y si dicha operación correspondía a la ubicación de un barco esa puntuación



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

era para el estudiante que la adivinó, esto se daba hasta que uno de los estudiantes quedara sin fichas en su tablero, luego se procedía a contar el total de puntos obtenidos y quien hubiera obtenido más puntos era el ganador.

Al momento de explicar el juego, muchos niños nos mencionaron lo contentos que estaban porque iban a jugar y uno de los estudiantes que no presentaba la mayor disposición a la hora de realizar otras actividades nos mencionó:

Oscar: Ah yo sé de ese juego, si quiere le explico a los compañeros que no saben para ayudarle profe. (Oscar, Batalla de multiplicar, septiembre 1, 2014)

Acá podemos observar como el juego puede tener un impacto positivo a la hora de trabajar diferentes conceptos matemáticos, ya que se convierte en objeto/motivo para los mismos estudiantes, dependiendo de la articulación que tenga el docente con dicho artefacto y como mencionan Roth y Radford (2011, p.57)

Se usa la expresión objeto/motivo, y no simplemente objeto, para referir el objeto de la actividad como una construcción cultural que orienta, que canaliza la acción del individuo sobre los objetos del mundo, y de esta manera, la palabra objeto se usa en el sentido usual: aquello que en la dualidad sujeto-objeto, denota la realidad objetiva, lo que se antepone al sujeto, si se quiere, las cosas existentes.

Además traemos a colación a Alzate, Pérez, Ramírez & Restrepo (2013, p.8) parafraseando a Caillois (1994), quienes presentan un uso adecuado que se le puede dar al juego dentro del aula de clase y mencionan que

La conceptualización de las estructuras multiplicativas utilizando como mediador el juego en la escuela es importante, donde el estudiante ya ha pasado por un proceso previo del aprendizaje desde la multiplicación, teniendo en cuenta que el juego es cultural e histórico en los seres humanos y los motiva a aprender.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Entendiendo así el juego desde Caillois como una construcción cultural e histórica de los seres humanos, que por ende surgen de su propia interacción y

los lleva a realizar una serie de acciones direccionadas a su interés y/o motivo, buscando diferentes estrategias a la hora de jugar y seleccionando la mejor estrategia según el caso, como pudimos observar en la “La Batalla de Multiplicar”. Algunos estudiantes en el momento de realizar el juego colocaron las fichas en distintos lugares, pero sin ninguna estrategia aparentemente, luego procedieron a anotar las puntuaciones cada vez que derribaban las fichas, después del primer juego algunos estudiantes nos expresaron que eso era “trampa”, dado que dependiendo del lugar que ubican las casillas se obtenía una puntuación, como se ve en el siguiente diálogo, dicho proceso de reconocer la importancia de ubicar las fichas en determinado lugar.

Primera Batalla-Juego 1.

Daiver: Profe entonces ¿Dónde colocamos las fichas?

Andrés: Tienes diez fichas para ubicarlas, colócalas donde quieras

Daiver: Aaa ya, y ¿Puedo colocar varias fichas en el mismo lugar?

Andrés: No, la idea es ubicar cada ficha en un espacio diferente.

Daiver: Mmm bueno, gracias profe. (*Batalla de multiplicar, septiembre 1, 2014*)

Segunda Batalla-juego

Daiver: Profe mire, es que Hellen hizo “trampa”

Hellen: Naa, mentiras profe, es que él no sabe perder

Andrés: ¿Por qué dices que hizo “trampa”?

Daiver: Si, es que mire que ella coloco las fichas en las casillas que menos valen 1x1, 2x1 no que va, eso no se vale.

Hellen: Profe, pero es que ese es el truco, ni boba que fuera

Andrés: Claro, mira Daiver que es la estrategia de ella. (*Batalla de multiplicar, septiembre 1, 2014*)



Ilustración 16. Estudiantes jugando la Batalla de multiplicar

Por medio de este diálogo pudimos observar cómo algunos estudiantes dieron cuenta de la importancia que tenía ubicar las fichas en un lugar específico ya que esta posición daba una determinada puntuación, por esto los estudiantes ubicaron las fichas en lugares estratégicos para que al momento de perder una ficha, su contrincante obtuviera la menor puntuación posible. Ubicando las fichas en lugares como 1×2 , 2×1 , $1 \times n$ y números que tuvieran que ser multiplicados por 1 o 2, entendieron que de esta manera su compañero obtendría la puntuación más alta, ya que las casillas con posibilidad de obtener mejor puntaje, estarían libres.

También algunos estudiantes nos dieron a conocer de la propiedad conmutativa de la multiplicación, no se enunció tal cual por parte de ellos como la propiedad, pero sí se



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

pudo evidenciar que los estudiantes notaron que la multiplicación cumplía con dicha característica, que antes era confusa para ellos, ya que en ocasiones pasadas les preguntamos por operaciones directas como 5×3 y luego por 3×5 y no supieron responder porque pensaban que el resultado era diferente dado el orden de los factores; ya con esta actividad ellos evidenciaron que era lo mismo, tal caso, como la pregunta de Juliana: “¿ 4×2 y 2×4 es lo mismo?”

Ante situaciones como esta, se hizo una reflexión para que fueran ellos quienes obtuvieran la respuesta al pensar por sí solos, pero por medio de una labor conjunta, de una multiplicidad de momentos en los que los estudiantes daban cuenta de una característica de la multiplicación y en ellos emergió una toma de conciencia frente a un saber matemático, constituido histórica y culturalmente pero que no se trataba de imponer sino que ellos mismos dieran cuenta de su utilidad y por medio de esta, llegaran a una reflexión autocrítica donde usaran esta propiedad o plantearan otra forma de responder al problema.

Durante esta actividad, en el tablero realizamos el esquema de la Batalla de multiplicar, al desarrollarla conjuntamente, los estudiantes identificaron algunas propiedades o características propias del juego y de la multiplicación, como la conmutatividad, aunque cabe aclarar que los estudiantes no establecieron una relación inmediata con dicha propiedad, pero reconocieron elementos propios de ella como fue identificar que $1 \times n$ es lo mismo que $n \times 1$.

Teniendo en cuenta esto, nosotros tomamos el juego como un artefacto que estuviera enfocado en dinamizar los procesos de aprendizaje dentro del aula de clase y los estudiantes a partir de ciertas necesidades desarrolladas en el juego fueran dando cuenta de



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

una apropiación de conceptos matemáticos y que además se fueran enfocando al isomorfismo de medidas, es decir, partir de estas situaciones para ir encaminándolos hacia las estructuras multiplicativas con miras hacia el isomorfismo de medidas.

Luego desarrollamos una actividad, llamada *Doña Rosa y la tienda de arroz*, en ella, se reflejó de forma más clara un proceso donde el estudiante desarrolló de manera un poco más reflexiva, la situación planteada. Esta actividad se incluye en el desarrollo de tareas de nuestra metodología donde fue desarrollada en grupos de 4 a 6 estudiantes, generando que cada estudiante planteara diferentes formas de solucionar dichas situaciones, formulando y validando a través de la argumentación y ejemplificación de cada estudiante y en este sentido, Álvarez, Ángel, Carranza, & Soler (2014, p.15) exponen que “Argumentar, es decir, el proceso de generar argumentos, tiene un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha”. Es decir donde los estudiantes parten de un problema y argumentan desde diferentes premisas, que los llevan al mismo resultado, pero en dicho proceso los estudiantes van encontrando como algún proceso puede llegar a ser más eficaz que otro y esto fue lo que presentaron a la hora de pasar de suma reiterada a la multiplicación.

Como mencionaron varios estudiantes a la hora de resolver un problema, muchos se cohibían de multiplicar, ya que pensaban que era más complicado pero como se ve en este Diálogo la ruleta de Vergnaud 25 de agosto, finalmente se ve una intencionalidad por aplicar la multiplicación como posibilidad de resolver un problema. Es decir, ya lo estaban objetivando.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Denis: Profe, acá me piden lo que hay que pagar, pero es que eso es mucho para sumar

Lorena: ¿Y que más puedes hacer?

Manuela: ¿Múltiplo? Ee ¿multiplico? Pues multipliquemos, ahí sí da.

Denis: Aaa no que locha

Manuela: Espere y verá, mire que así es más rápido y nos da (La ruleta de Vergnaud, 25 de agosto de 2014)

Acá vemos como los estudiantes se enfrentan a una multiplicidad de situaciones en los que son invitados a cambiar sus formas de responder a una problemática planteada por el docente y es que a partir del trabajo en equipo van tomando elementos de sus compañeros y van constituyéndose de nuevos saberes, en este caso como el de isomorfismo de medidas, que fue aplicado para responder a dicho problema

Después de finalizar la actividad les realizamos varias preguntas al grupo de Denis,

Lorena ¿Cómo les fue con el juego?

Denis: Bien, profe aunque unos problemas que jmm

Lorena: ¿Y eso?

Denis: ah no, es que eran largos algunos ejercicios que tocaba sumar mucho, pero si como dijo manuela era mejor multiplicar, aunque también tocaba dividir. (La ruleta de Vergnaud, 25 de agosto de 2014)

Acá observamos la importancia del trabajo grupal ya que de esta manera los estudiantes trabajaron con un objetivo común, llegando a fortalecer la cooperación entre los participantes como menciona Glinz, (2005. p.3)

La educación en la actualidad requiere del trabajo de grupo. En las actividades de enseñanza aprendizaje, el trabajo colaborativo o cooperativo (términos utilizados indistintamente) conforma uno de los principales elementos. Los proyectos innovadores que usan técnicas de enseñanza aprendizaje involucran esta modalidad de trabajo en la que el ser que aprende se forma como persona.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Siendo así, fue como se desarrollaron varias de las actividades, planteadas para que el trabajo en equipo fuera una forma de motivar a cada estudiante dentro del grupo y formando en ellos una conciencia más sólida a la hora de explicar un problema, argumentando desde bases matemáticas coherentes y defendiendo sus puntos de vista para llegar a dicha solución; esto también llevó a que los estudiantes que no tenían respuesta acertada del problema entraran en razón de la respuesta correcta y lo enlazaran con su punto de vista, pero llegando también a resolver el problema desde su propia postura.

Como menciona Radford, (2006 p.124) “Los conceptos anteriores permiten reformular, en términos generales, el aprendizaje de las matemáticas como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.” Vemos cómo el proceso de la objetivación toma el conocimiento no como un poder individual y capitalista, con el cual solo unos pueden contar, sino que debe surgir por medio de problemáticas entabladas en grupos sociales, que irán emergiendo de la interacciones de sujetos y objetos, llegando a validar un conocimiento como un bien colectivo para su propia cultura, como lo fue en este caso dentro del aula de clase, ya que plasmaban un reflejo de pequeños grupos sociales, que apoyados unos a otros, daban respuesta y constituían un saber propio, generando en ellos una toma de conciencia, y por ende sujetos con una ética, ya que ellos llegan y explican a sus otros compañeros las diferentes formas de responder a un problema, dejando de lado la idea de un conocimiento mercantil.

En esta actividad había un problema que pretendía saber cuánto vale 25 libras de arroz en cada una de las tiendas que a continuación se presenta:



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Tienda 1: (Andelico la rebaja)

5 libras de arroz	8000
20 libras de arroz	32000

Tienda 2: (Ruperto)

9 libras de arroz	13500
15 libras de arroz	22500

Tienda 3: (Doris)

8 libras de arroz	9600
12 libras de arroz	14400



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Tienda 4: (La Salazar)

6 libras de arroz	8700
16 libras de arroz	22400

¿Cuánto valdrían las 25 libras de arroz en cada tienda?

En la imagen que vemos a continuación, se puede observar cual fue el proceso llevado a cabo por Oscar.

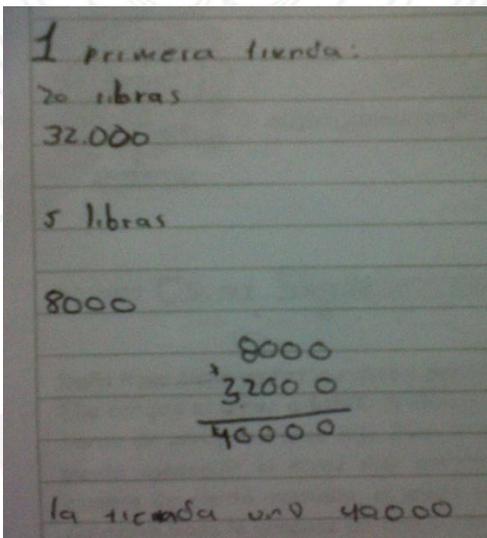
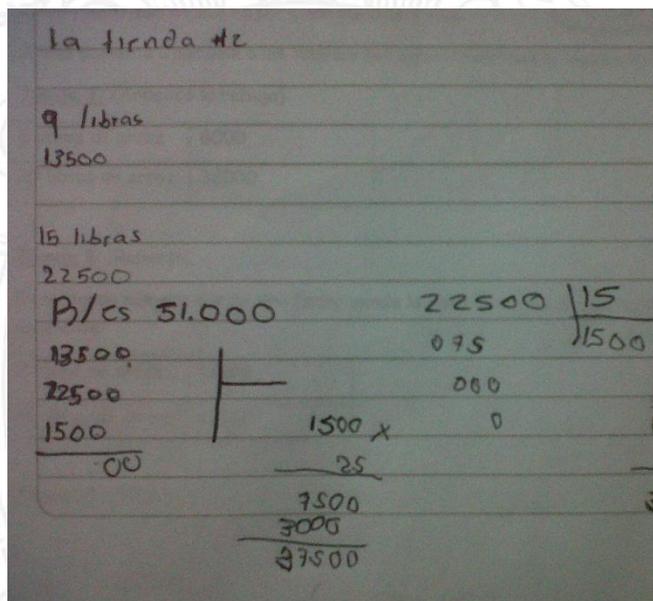


Ilustración 17. Solución de Óscar para el problema de la tienda 1 de arroz

1 8 0 3

De acuerdo a lo anterior vemos como Óscar encuentra que la suma es la mejor operación para resolver esta situación, pero para hallar el valor de las 25 libras de arroz en la segunda tienda, hace el siguiente procedimiento:



la tienda #2

9 libras
13500

15 libras
22500

P/cs 31.000

13500

22500

1500

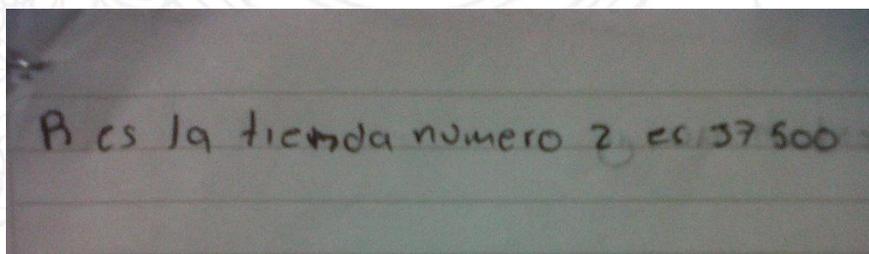
00

22500 | 15
075
000
0

1500 x

25

7500
3000
37500



A cs la tienda numero 2, es 37500

Ilustración 18. Solución de Óscar para el problema de la tienda 2 de arroz

En esta situación Óscar ya no realiza sumas reiteradas, sino que inicialmente realiza la división de 22500 entre 15 y el resultado obtenido que para él es el valor de la unidad, lo multiplica por las 25 libras de las cuales requiere el precio. Además se puede ver que el ejercicio fue resuelto, puesto que no sólo operó sino que también dio una respuesta al problema, es decir no solamente realizó una operación con sentido para él sino que interpretó dicha problemática hasta llegar a el valor de la tienda número dos.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

A partir de estas situaciones de trabajo en equipo se generaron una gran cantidad de debates en los que los estudiantes iban argumentando de manera

lógica, enunciando cómo ellos podían dar respuesta al problema, lo que influyó también fue a la hora de socializar el trabajo que hacían en los grupos, ya que después de hacer el trabajo en clase los estudiantes seleccionaban un representante para explicar al resto de la clase el trabajo realizado, viendo así la importancia de apoyarse en otros grupos. Según Radford (2006, p.118)

En cada pequeño grupo, los alumnos se apoyan mutuamente para alcanzar la solución de los problemas que se les ha dado. Los alumnos y el profesor están conscientes de que hay diferencias individuales que llevan a formas diferentes de participación. Incluso participaciones que parecen “menos profundas” (como las participaciones periféricas, en el sentido de Lave y Wenger, 1991) son bienvenidas, a condición de que el alumno en cuestión esté-con-su-grupo, esto es, que el alumno por ejemplo esté atento a lo que el grupo está discutiendo, solicite explicaciones que le permitan seguir la discusión y las acciones, colabore con su grupo, etc. Un grupo puede intercambiar sus soluciones con otro grupo con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios.

A la hora de realizar cualquier actividad los estudiantes tenían que hacer un trabajo real que los motivara a solucionar cada situación haciendo uso razonable de la matemática, generando a la vez una toma de conciencia en los estudiantes; esto se dio en muchas ocasiones cuando ellos se encontraban realizando trabajo grupal ya que cada uno de los estudiantes se encontraban en colaboración y tenían la necesidad de presentar una solución matemática.

De esta manera, entendemos que los estudiantes necesitan hacer trabajo real en el cual promueven su éxito como miembros del equipo intercambiando información importante y ayudándose mutuamente de forma eficiente y efectiva; ofreciendo retroalimentación para mejorar su desempeño y analizar las conclusiones y reflexiones de cada uno para lograr resultados de mayor calidad. Los grupos colaborativos son a la vez



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

sistemas académicos de soporte y sistemas de soporte personal. Existen importantes actividades cognitivas y dinámicas interpersonales que solo ocurren cuando los estudiantes promueven el aprendizaje de otros, esto incluye el explicar a otro cómo resolver un problema, discutir la naturaleza de los conceptos que están siendo aprendidos, enseñar a otro el conocimiento propio, entre otros ejemplos. Solo a través de la comunicación es como los estudiantes se vuelven personalmente comprometidos con los otros así como con las metas de trabajo del grupo al que pertenecen.

El proceso de objetivación en los estudiantes del grado quinto estuvo permeada en gran medida por la influencia del trabajo en equipo ya que en este método algunos estudiantes daban respuesta a una variedad de problemas pero sin las bases lógico matemáticas que esperábamos ya estuviesen apropiadas, es decir, evidencias de errores conceptuales y procedimentales; pero estos errores fueron puestos en juego con otros argumentos de sus compañeros y unas situaciones adversas que objetaban la postura de los estudiantes. Gracias a esas confrontaciones que se realizaron por medio de artefactos que se convirtieron en objeto/motivo para ellos, como lo fue el juego, lecturas, cuentos, socializaciones y demás, es decir, las interacciones surgidas y direccionadas por el docente en el aula de clase, ellos lograron plantear un sinnúmero de soluciones, que fueron emergiendo de forma argumentativa y coherente con respecto a las situaciones planteadas.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

7. CONCLUSIONES

Nuestro proyecto de investigación desde su inicio, estuvo acompañado del objetivo *Analizar el proceso de objetivación de la estructura isomorfismo de medidas en los estudiantes del grado 5° de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera por medio de las Investigaciones Matemáticas en el Aula* y el cual logramos alcanzar durante la realización de nuestro análisis, además, se dio en nuestras categorías; “*Las investigaciones matemáticas en el aula; expectativas y punto de partida*” y “*Conciencia y reconocimiento de procesos y conceptos*”. Teniendo en cuenta lo anterior y a modo de conclusión queremos expresar lo siguiente:

Es importante tener en cuenta los errores conceptuales y no desecharlos debido a que son punto de partida para generar debate entre los estudiantes y secuencialmente posibilitar a un razonamiento válido. Los errores conceptuales hay que buscarlos en el cuerpo de conceptos e ideas que se han adquirido durante la vida escolar y extra escolar.

A través de la metodología de las Investigaciones Matemáticas en el Aula se posibilitaron otras formas de aprender. Esto lo evidenciamos durante las actividades planteadas en el aula de clase y mediante las reflexiones tejidas durante los diálogos con los estudiantes. El uso de esta metodología permitió que el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes se dinamizara, entendiendo éste como la posibilidad de añadir importancia y darle carácter práctico a situaciones matemáticas en las que el estudiante estaba inmerso.

Relacionar las actividades con el contexto posibilitó mayor compromiso por parte de los estudiantes al momento de realizarlas ya que los estudiantes se sintieron



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

identificados con las situaciones planteadas pues además se relacionaron estrechamente elementos de su diario vivir.

Gracias a las investigaciones surgió en los estudiantes una preocupación por conocer más acerca de las matemáticas, lo cual hizo que fueran autónomos en la construcción de un nuevo conocimiento. Este tipo de situaciones, las consideramos importantes ya que el interés por una concepción matemática dada desde sus orígenes hace posible una relación con las experiencias que los estudiantes han adquirido en su vida escolar. Por medio de esta metodología se rompió un paradigma sobre las clases comúnmente desarrolladas y así reafirmamos nuevos ideales, que piensan que puede haber otras formas de desarrollar los procesos de aprendizaje dentro del aula de clase.

El diálogo, el aprendizaje colaborativo y el interactuar con el otro, dan lugar a una socialización de la que emana una construcción en conjunto y significado a determinadas situaciones. Desde este punto de vista, se da validez al aprender con el otro, como también el aporte de dos o más estudiantes que trabajan con un objetivo en común, donde el producto resulta ser más enriquecedor que si fuere el resultado de uno solo. Todo esto se da gracias a las interacciones, diálogos y socializaciones que dan lugar al nuevo conocimiento.

Fue posible observar varios elementos que generaron gran participación por parte de los estudiantes, uno de ellos fue el juego, el cual a través del uso de las investigaciones matemáticas en el aula, hizo posible la apreciación de diferentes miradas frente a la resolución de problemas de carácter multiplicativo. Pudimos observar que el juego se convirtió en un medio para potenciar el interés y la participación de los estudiantes, ya que para ellos se convirtió en una forma didáctica de interactuar y aprender.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

El trabajo colectivo permitió el diálogo y el debate. A través de ellos, se construyeron significados con el fin de validar el conocimiento. En el trabajo colectivo, se posibilitó la relación de los sujetos por medio de prácticas que se desarrollaron dentro del aula de clase mediadas por diferentes artefactos, los cuales los estudiantes los fueron dotando de sentido, viendo así como las relaciones entre ellos permitió que se apropiaran de conceptos matemáticos y aplicarlos a su contexto para responder a una necesidad particular.

El uso de diversos métodos de enseñanza, promueve el interés de todo un grupo de estudiantes, logrando desarrollar diferentes habilidades en ellos. La diversidad predominante que tenemos en el aula de clases hace preciso la implementación de diferentes métodos que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje de todo un colectivo de estudiantes.

En medio de las prácticas que se desarrollaron dentro del aula de clase, mediadas por los objeto/motivos, permitió en los estudiantes que se generara una necesidad de trabajar en equipo en diferentes situaciones, ya que fue más adecuado que por medio del trabajo colectivo ellos lograran dar cuenta de manera más clara y de diferente manera cómo podían estar en un error y constituir un conocimiento y validarlos al mismo tiempo por medio del diálogo, debate y trabajo en equipo, lo cual también llevo a que muchos cambiaran percepciones de las matemáticas con respecto al uso que ellas pueden tener y la importancia en su contexto.

Trabajar las matemáticas desde una perspectiva históricocultural generó en los estudiantes una comprensión diferente frente a lo que pensaban del origen de las



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

matemáticas, llegando así a concluir que las matemáticas surgieron a partir de necesidades reales de cada cultura para suplir dichas necesidades y que con el tiempo es el producto de lo que tenemos, que no es una ciencia dogmática ni acabada y que está en constante relación con el devenir del mundo.

Algunos estudiantes reconocieron propiedades de la multiplicación, dentro de actividades enmarcadas en la objetivación, y aunque no se enunció tal cual por parte de ellos como la propiedad, sí se pudo evidenciar que los estudiantes notaron que la multiplicación cumplía con dicha característica, ya que esas particularidades, fueron las que los llevaron a obtener los hallazgos finales.

A partir de las necesidades que surgieron en cada una de las situaciones, dieron cuenta de una apropiación de conceptos matemáticos que además se fueron enfocando hacia el isomorfismo de medidas, es decir, partieron de estas situaciones para ir sumergiéndose en las estructuras multiplicativas con miras hacia esta estructura. Esto se pudo evidenciar cuando dejaron de lado las sumas reiteradas y desarrollaron operaciones como la multiplicación y la división para poder dar respuesta a los planteamientos en cuestión.

La actitud de los estudiantes cambió frente a las situaciones planteadas y el modo como fueron presentadas, ya que como elemento esencial estuvo una metodología de clase que relacionó constantemente las actividades con la vida cotidiana, además, las matemáticas fueron dadas y vistas de una forma más amable, logrando que no manifestaran desdén hacia ellas como al inicio de este proyecto.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

En las actividades enmarcadas dentro de la objetivación, los estudiantes

manifestaron una actitud crítica y argumentativa, con la cual se enfrentaron a las situaciones y les dieron solución de forma coherente, haciendo uso de los elementos requeridos que la situación planteaba. Los estudiantes tuvieron la disposición de validar lo que ellos mismos presentaron entre sus posturas iniciales como en los problemas a resolver y que luego pudieron confrontar con los resultados que ellos mismos hallaron.

El proceso de objetivación en los estudiantes, estuvo ligado en gran parte al trabajo en equipo, ya que en el momento en el que los estudiantes expresaron sus conocimientos previos, frente a los demás compañeros, se generó un debate mediado de diferentes artefactos que permitió en ellos que validaran sus propios saberes creando así una toma de conciencia expresada simbólicamente y corporalmente dentro de esas prácticas sociales.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Facultad de Educación Agreda, O., Fonnegra, S. & Franco, N. (2012). Aproximación a las diferentes formas de constitución del número natural en niños de primer grado. Memorias del 11° encuentro Colombiano de Matemática Educativa.
- Alzate, L. Pérez, L. Ramírez, A. & Restrepo, S. (2013). *El uso del juego como mediador en la conceptualización de las estructuras multiplicativas*. (Tesis de grado no publicado) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. & Soler, M. (2014). *Actividades Matemáticas: Conjeturar Y Argumentar*. Recuperado el 3 de abril de 2015 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_05.pdf
- Bogdan, R (1992). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Buenos Aires: Paidós.
- Caillois, R. (1994). *Los juegos y los hombres: La máscara y el vértigo*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Cubero, M (1994, Junio). Algunas derivaciones de la teoría de la actividad. *Revista Infancia y aprendizaje*. pp. 3-18.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. En: *Educación Matemática*. pp. 24–41.
- Furio, C. & Ortiz, E. (1983). Persistencia de errores conceptuales en el estudio del equilibrio químico. En *Enseñanza de las ciencias*. pp. 15-20
- Glinz, P. (2005) Un acercamiento al trabajo colaborativo. En: *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(2). Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/820Glinz.PDF>
- Hernández G. (s.f.) *La psicología histórico cultural de Vigotsky a Leontiev*. Recuperado de http://www.academia.edu/4069900/La_Psicologia_Historico_Cultural_De_Vygotsk_y_a_Leontiev
- Hernández, L & Vásquez, O. (2008). *Dificultades y errores en algunos problemas de la cantidad intensiva*. Memorias del noveno Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Colombia
- Hernández, R., Fernandez, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. Recuperado el 02 de febrero de 2014)

<http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeypp/article/viewFile/8688/8002>

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Curriculares de competencias en Matemáticas. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-116042_archivo_pdf2.pdf

Obando, G. (2011). *Filosofía, Matemáticas y Educación: por un enfoque Histórico-Cultural en Educación Matemática* (pp. 1-50). Manuscrito sin publicar. Medellín.

Patiño, L. (2007). *Aportes del enfoque históricocultural para la enseñanza*. Recuperado de <http://educacionyeducadores.unisabana.edu.co/index.php/eye/article/download/676/760>

Pérez, D. & Gómez, W. (2009). *Las investigaciones matemáticas en el aula: actividad mediadora en el proceso de apropiación del concepto de polígono* (Tesis de grado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ponte, J. (2007). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En Giménez, J., Santos, L. & Ponte, J. *La actividad matemática en el aula*. (pp.157-167). Barcelona: Graó

Ponte, J. Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Puig, L. & Cerdán, F. (1989). *Problemas de una etapa: multiplicación y división*. Recuperado el 16 de octubre de 2014 de <http://www.uv.es/puigl/lpae4.pdf>

Radford, L. (2000). *Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. Educación Mathematica*. Recuperado el 10 de octubre de 2014 de http://www.luisradford.ca/pub/97_Objeto_sujeto_cultura.pdf

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Relime, Número Especial, pp. 103-129. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. México.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. En: *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150.

Facultad de Educación Radford, L. & Hernández (2010). *La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas*. Recuperado el 09 de abril de 2014 de http://www.luisradford.ca/pub/12_Girona_Radford2011.pdf

Radford, L., Miranda, I. & Guzmán, J. (2007, diciembre). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. En: *Educación Matemática*, 19(3), pp. 5-30.

Sánchez, J. (2008) *La multiplicación y división en la escuela*. Recuperado el 05 de Septiembre de 2014 de http://www.ricardovazquez.es/MATEMATICASarchivos/DIVISION/DOCU/multiplicacion_division.pdf

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa*. Bogota: Cooperativa Editorial Magisterio.

Santana, L. & Gutiérrez, L. (2002). La etnografía en la visión cualitativa de la educación. En: *Revista de la facultad de filosofía de la Universidad Santo Tomás*. 86-87, pp. 212-237. Venezuela.

Torres, M. (2013) *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 133-170.

Vygotsky, L. (1968). *Pensamiento y lenguaje*. La Habana: Editora Revolucionaria