El concepto de raíz par de un número real negativo: condiciones de posibilidad para su surgimiento

Lina María Hungría

Laura Toro Medina

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Tutor

Diana Victoria Jaramillo Quiceno, Doctora en Educación

Diego Alejandro Pérez Galeano, Doctor en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Medellín, Antioquia, Colombia

2022

Cita	(Hungría & Toro Medina, 2022)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Hungría, L. & Toro Medina, L (2022). *El concepto de raíz par de un número real negativo: condiciones de posibilidad para su surgimiento* [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Vicerrectoría de Docencia
Sistema de Bibliotecas

Centro de Documentación Educación

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: Jhon Jairo Arboleda Céspedes.

Decano: Wilson Bolívar Buriticá.

Jefe departamento: Cártul Vargas Torres.

Dedicatoria

A mi familia, Ana, Martha y Darío por ser un motivo de aliento, por su apoyo y acompañamiento en los procesos de mi vida.
Laura

A Dios, a la Universidad de Antioquia, y a la niñez de Colombia por ser mi fuente de inspiración y haberme permitido soñar alto cuando quería desfallecer.
Lina

Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad de Antioquía, en particular la Facultad de Educación por habernos dado la oportunidad de coincidir con los asesores de este trabajo de grado, Diana Victoria Jaramillo Quiceno y Diego Alejandro Pérez Galeano quienes con su humanismo, entrega y amor nos convencieron de que las matemáticas sí merecen ser humanizadas. También, agradecemos a nuestros compañeros de Práctica Pedagógica quienes, gracias a sus cuestionamientos, nos impulsaron a ser cada día mejores. Gracias a la profesora Diana Patricia Vergara Marín porque, en conjunto con sus estudiantes en la institución educativa, sus enseñanzas nos posibilitaron reflexionar acerca del ser maestro.
Laura y Lina

A Dios.
A mi hermana Ana, por sus palabras de aliento y apoyo en todo mi proceso académico, cuando más lo necesité. A mis padres Martha y Darío por todo su apoyo. A mi compañera Lina, quien me acompañó en todo mi recorrido académico.
A todos, infinitas gracias.
Laura

Gracias infinitas a mis compañeros de lucha Laura, Yurany y Stevens quienes con su presencia iluminaron mi proceso. A mi familia por su existencia en la lejanía.
Lina

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

Esta investigación problematiza el desconocimiento de la historia de las matemáticas, particularmente del surgimiento de los objetos matemáticos. Para ello nos preguntamos ¿Cuáles fueron las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo*? En coherencia con ello, nos trazamos el objetivo de identificar las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo.*

La metodología utilizada para reescribir la historia fue el método historiográfico, bajo un paradigma cualitativo, así como un enfoque hermenéutico-interpretativo. La información documentada se consolidó en una matriz de sistematización, de la cual se desprendió el archivo para la construcción e interpretación de los datos. Los conceptos clave fueron las condiciones de posibilidad, el objeto matemático comprendido como número imaginario y el conjunto más extenso de los números complejos.

Las tres categorías emergentes de este trabajo fueron tituladas: "*Las transformaciones en las ciencias en el cambio de época para concebir la raíz par de número real negativo"*; "*La solución de ecuaciones que se derivaron de las competencias entre matemáticos";* y, *"Las demostraciones: relaciones entre geometría y álgebra".* En los hallazgos, rastreamos tres de las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo:* la influencia del cambio de época que se refleja en las formas de construcción y difusión del conocimiento, los apuros por el reconocimiento académico y la influencia de la prosa escrita en las demostraciones matemáticas para validar el conocimiento matemático.

Palabras clave: números imaginarios; números complejos; método historiográfico; espiritualidad; ecuaciones; demostraciones.

Abstract

This research problematizes the lack of knowledge of the history of mathematics, particularly the emergence of mathematical objects. To this end, we ask ourselves: What were the conditions of possibility for the emergence of the concept of the even root of a negative real number? In coherence with this, we set ourselves the objective of identifying the conditions of possibility for the emergence of the concept of the even root of a negative real number.

The methodology used to rewrite history was the historiographic method, under a qualitative paradigm, as well as a hermeneutic-interpretative approach. The documented information was consolidated in a systematization matrix, from which the file was derived for the construction and interpretation of the data. The key concepts were the conditions of possibility, the mathematical object understood as imaginary number and the larger set of complex numbers.

The three emerging categories of this work were entitled: "The transformations in the sciences at the epochal change to conceive the even root of negative real number"; "The solution of equations derived from the competitions among mathematicians"; and, "Demonstrations: relations between geometry and algebra". In the findings, we trace three of the conditions of possibility for the emergence of the concept of the even root of a negative real number: the influence of epochal change reflected in the forms of construction and diffusion of knowledge, the rush for academic recognition, and the influence of written prose in mathematical demonstrations to validate mathematical knowledge.

*Keywords***:** imaginary numbers; complex numbers; historiographic method; spirituality; equations; demonstrations.

Presentación

En la Educación Matemática la preocupación por el sujeto que enseña y el sujeto que aprende cada día está más latente, superándose la mirada puesta apenas en el conocimiento matemático. Por eso, este trabajo convoca a buscar en la historia otras formas de asumir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta investigación tiene como objetivo identificar las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo.* El término *raíz par de un número real negativo* es hoy denominado “número imaginario”. Queremos responder a la pregunta ¿Cuáles fueron las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo*? Esta pregunta y este objetivo surgen de un problema que observamos relacionado con el desconocimiento de las condiciones de posibilidad para el surgimiento de ese concepto.

Tenemos que decir que este trabajo se realizó por el interés nuestro de saber por qué trabajar en la comprensión de las *raíces pares de números reales negativos* con estudiantes de secundaria; también por el interés de entender un poco las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del dicho concepto, y las dificultades para realizar operaciones con radicales.

Este estudio atiende a un método historiográfico. Las consideraciones teóricas de la presente investigación están enmarcadas en dos pilares fundamentales: uno, el objeto de estudio *raíz par de un número real negativo* y, dos, sus *condiciones de posibilidad*; para ello se investigó el surgimiento de este concepto matemático desde una mirada arqueológica del saber. Autores como Díaz (2005), Foucault (2013) y Quiroz (2018) contribuyeron a nuestra comprensión sobre las condiciones de posibilidad desde la arqueología del saber abordada por Michael Foucault.

Así es como presentamos un trabajo de investigación conformado por cuatro capítulos. En el primer capítulo mostramos el planteamiento del problema y los antecedentes; allí se describen algunas dificultades que los estudiantes manifiestan en el desarrollo de las raíces cuadradas, con base en lo encontrado en la revisión de literatura y en lo observado en el centro de práctica (institución educativa donde desarrollamos nuestra Práctica Pedagógica). A partir de este problema, exponemos la pregunta de investigación y, posteriormente, los objetivos que fundamentan la ruta de trabajo de este estudio.

En el segundo capítulo, presentamos algunas claridades necesarias frente a lo que estamos entendiendo por *raíz par de un número real negativo*; para ello se lleva a cabo un rastreo histórico de los diferentes conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos; rastreo que fue clave para localizar el objeto matemático. Seguidamente, presentamos lo que entendemos por condiciones de posibilidad.

En el tercer capítulo, señalamos el camino metodológico, establecemos la historiografía como método de investigación cualitativa; este método se dedica al estudio y narración de los acontecimientos desde los diferentes lugares de los hechos, posibilitando las reflexiones sobre las interrelaciones entre sujetos y objeto de estudio, que en este caso es el estudio de la *raíz par de un número real negativo.* Luego presentamos una matriz sistematizada de los documentos utilizados en la investigación.

En el cuarto y último capítulo, mostramos tres condiciones de posibilidad que se constituyeron como categorías para revelar parte del surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo.* Las categorías emergieron a partir de datos históricos y hallazgos en diferentes épocas según personajes y acontecimientos; ahí intentamos traer el pasado al presente para hacer una interpretación de lo encontrado con relación al concepto matemático en cuestión.[1] Por último, presentamos algunas conclusiones y reflexiones.

[1] Aclaramos al lector que todas las traducciones del inglés al español fueron realizadas por las investigadoras, y por tanto no comprometen de ninguna manera a los autores de los textos originales.

CAPÍTULO 1. Acercamiento al camino de inicio

El presente trabajo de investigación surgió de la observación y convivencia en la institución escolar en el que se desarrolló la Práctica Pedagógica. Una Práctica realizada en el marco de lo estipulado en el reglamento y las disposiciones de la organización curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En tres semestres de Práctica Pedagógica en "circunstancias de pandemia" (derivadas de la emergencia sanitaria por el virus COVID-19), realizamos esta investigación en una institución educativa ubicada en el centro de la ciudad de Medellín, en la comuna 10, que atiende a estudiantes mujeres. Estuvimos en esta institución durante dos semestres (2020-2 y 2021-1)

La Práctica Pedagógica la realizamos con el grupo 6°1 con un total de 39 estudiantes, como respuesta a una propuesta educativa de la institución en su plan de ajuste frente a la pandemia, buscando favorecer la interacción en los espacios académicos mediados por las tecnologías de la información y comunicación (TIC), entre la docente, las estudiantes, las familias y los entes administrativos. Con la pandemia, la institución se vio obligada a (re)visar o (re)pensar su forma de enseñanza, y con ello las TIC dieron origen a una nueva comunicación en el acto educativo. Esa (re)visión exigió la implementación de nuevos horarios, nuevos recursos tecnológicos y nuevas dinámicas educativas y familiares.

Atendiendo a este cambio de escenario para la enseñanza, la institución solicitó encuentros frecuentes con algunas estudiantes, de manera sincrónica o asincrónica, donde nosotras, como practicantes, brindábamos espacios de asesorías en horarios diferentes a los de la clase. En esos espacios pudimos observar el cómo las estudiantes abordaban algunos temas matemáticos.

Con relación a las asesorías que tuvimos con las estudiantes, ellas fueron realizadas por medios de comunicación electrónicos como: Correo, WhatsApp, Meet, Zoom y el tablero digital Jamboard, y una plataforma de la institución.

1.1. Planteamiento del problema

El camino que comenzamos a tejer en esta práctica y que nos posibilitó pensar en esta investigación fue algo incierto y cambiante, todo esto debido a las circunstancias que surgieron en la pandemia que comenzó iniciando el año 2020. Los espacios educativos se trasladaron a otros escenarios desconocidos para nosotras; el primer y único acercamiento que tuvimos al salón de clases en las Prácticas Pedagógicas fue a través de las TIC; así, las pantallas, documentos de Word y pizarras digitales fueron algunas de las herramientas que posibilitaron la interacción entre las estudiantes de la institución y nosotras. Esta Práctica que vivimos fue "una nueva realidad del aula"; la presencia de los sujetos en el aula se notó a través de las voces escuchadas. Voces que, traducidas en opiniones, preguntas y anotaciones, fueron las que nos posibilitaron hacer unas lecturas y análisis de lo sucedido en las clases relacionado a los procesos de enseñanza y aprendizaje a la hora de la clase de matemáticas.

Así, comenzamos a trazar este camino a partir de las voces de las estudiantes en una clase con asistencia virtual, centrándonos en el tema matemático "potenciación y sus operaciones inversas: la radicación y logaritmación"; tema así denominado por la profesora cooperadora[2], siendo esta la encargada de dirigir la clase. Las explicaciones de la docente se orientaron en la transformación de esas operaciones matemáticas; es decir, partiendo de la operación potenciación y "realizando algunos cambios" para llegar a la operación radicación y a la operación logaritmación.

Otro hallazgo en el camino de observación que fue evidente para nosotras fue el hecho de que no encontramos una articulación entre la historia de un objeto matemático, sobre todo su origen, con la enseñanza del concepto asociado a él, con la enseñanza de algoritmos asociados a él y con sus respectivas aplicaciones. Encontramos que no hay un reconocimiento de las coyunturas históricas por las que pasa el conocimiento matemático para consolidarse como tal. Probablemente eso haga que muchas veces el conocimiento matemático sea llevado al aula como un conocimiento terminado, ahistórico, dejando de lado que él es producto de una *construcción humana*.

Fue a partir de algunas reuniones sincrónicas con los profesores asesores[3] y la elaboración de un diario reflexivo (ver figura 1 y 2) que surgió la identificación del tema de interés para ser investigado. En el diario, a partir de narraciones e imágenes íbamos plasmando nuestras reflexiones; así, poco a poco, un problema se hizo visible entre la escritura. Aprovechamos esa asistencia virtual en los diferentes encuentros para hacer capturas de pantalla del tema que se estaba discutiendo en clase con las estudiantes. Entre esas imágenes tenemos las que posibilitaron diversas

[2] La profesora cooperadora fue la docente quien acompañó la clase de matemáticas de los grupos asistidos en la práctica.
[3] Las reuniones sincrónicas con los asesores orientadores de este trabajo consistieron en conversar y reflexionar sobre lo escrito en el diario reflexivo; diario escrito a partir de lo observado en el aula de práctica del grado 6°1.

preguntas, identificar un problema sobre la forma en que se enseña un concepto a las alumnas y observar formas de enseñar y aprender matemáticas.

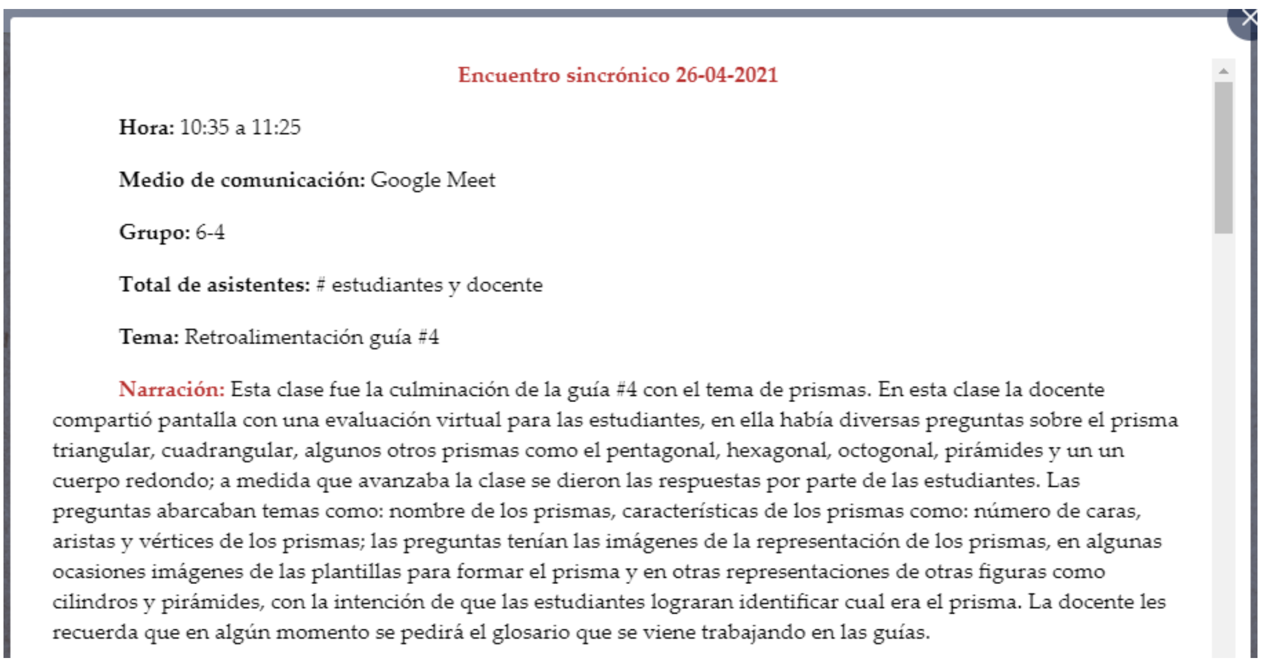
Figura 1

Diario reflexivo

Fuente: Elaboración propia (2022)

Figura 2

Un apartado de algunas de las narraciones que hace parte del diario reflexivo



Encuentro sincrónico 26-04-2021

Hora: 10:35 a 11:25

Medio de comunicación: Google Meet

Grupo: 6-4

Total de asistentes: # estudiantes y docente

Tema: Retroalimentación guía #4

Narración: Esta clase fue la culminación de la guía #4 con el tema de prismas. En esta clase la docente compartió pantalla con una evaluación virtual para las estudiantes, en ella había diversas preguntas sobre el prisma triangular, cuadrangular, algunos otros prismas como el pentagonal, hexagonal, octogonal, pirámides y un un cuerpo redondo; a medida que avanzaba la clase se dieron las respuestas por parte de las estudiantes. Las preguntas abarcaban temas como: nombre de los prismas, características de los prismas como: número de caras, aristas y vértices de los prismas; las preguntas tenían las imágenes de la representación de los prismas, en algunas ocasiones imágenes de las plantillas para formar el prisma y en otras representaciones de otras figuras como cilindros y pirámides, con la intención de que las estudiantes lograran identificar cual era el prisma. La docente les recuerda que en algún momento se pedirá el glosario que se viene trabajando en las guías.

Fuente: Elaboración propia (2022)

Una de las imágenes plasmada en el diario reflexivo es la tabla que se observa en la figura 3. A partir de esta tabla analizamos, por ejemplo, la pertinencia o no de repetir, tal vez de forma mecánica, la reescritura de las potencias conforme fue propuesto en la actividad por la profesora cooperadora.

Figura 3

La potenciación y sus operaciones inversas

1. Reescribe en forma de logaritmos las potencias dadas en la primera columna.

POTENCIACIÓN	RADICACIÓN	LOGARITMACIÓN
$2^{10}= 2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = \mathbf{1024}$	$\sqrt[10]{1024}=2$	$\log_2 1024 = 10$
$2^{9}= 512$	$\sqrt[9]{512}=2$	$\log_2 512 = 9$
$2^{8}= 256$	$\sqrt[8]{256}=2$	$\log_2 256 = 8$
$2^{7}=2x2x2x2x2x2x2=128$	$\sqrt[7]{128}=2$	$\log_2 128 = 7$
$2^{6}= 2x2x2x2x2x2=\mathbf{64}$	$\sqrt[6]{64}=2$	$\log_2 64 = 6$
$2^{5}=2x2x2x2x2=32$	$\sqrt[5]{32}=2$	$\log_2 32 = 5$
$2^{4}= 2x2x2x2=16$	$\sqrt[4]{16}=2$	$\log_2 16 = 4$
$2^{3}= 2x2x2 = \mathbf{8}$	$\sqrt[3]{8}=2$	$\log_2 8 = 3$
$2^{2}= 2x2=4$	$\sqrt{4}=2$	$\log_2 4 = 2$
$2^{1}=2$	No definido	$\log_2 2 = 1$
$2^{0} = \frac{2}{2} = 1$	No definido	$\log_2 1 = 0$
$2^{-1}= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	No definido	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$
$2^{-2}= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$
$2^{-3}= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{8} = -3$
$2^{-4}= \frac{2^{-4}}{1} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$
$2^{-5}= \frac{2^{-5}}{1} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$		$\log_2 \frac{1}{32} = -5$

Fuente: Guía 10 del estudiante, realizada por la docente cooperadora (2022)

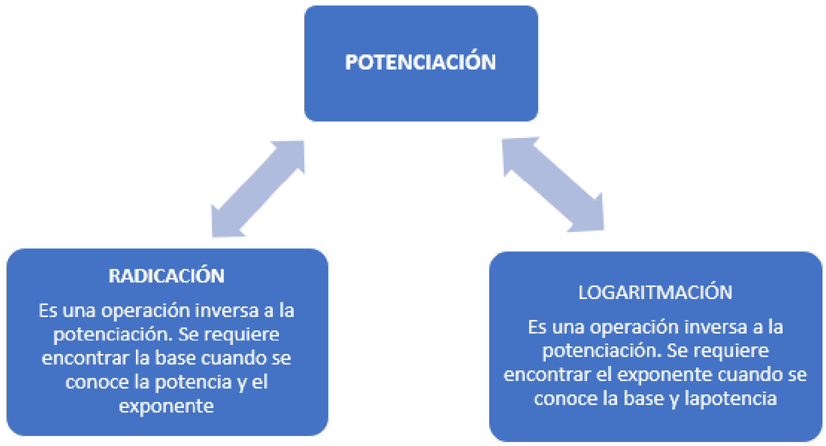
Derivado de esta situación, la reflexión de nuestro diario giró en torno a lo que expresa Freire[4] (2004) sobre la enseñanza, ya que apunta a que "enseñar no se agota en el tratamiento del objeto o del contenido" (p.13). Comprendemos con las palabras de este autor que, enseñar sugiere también la formación integral del sujeto que aprende y no apenas la mecanización de un saber determinado. En nuestra labor como docentes proyectamos estar en constante movimiento, puesto que, el conocimiento debe ir más allá del lápiz, el papel, la memorización y la repetición; posibilitando responder a preguntas como ¿por qué? y ¿para qué? de los contenidos y no solo centrarnos específicamente en el ¿cómo?, es decir, el procedimiento.

Hubo otras imágenes que nos ayudaron a continuar reflexionando, entre ellas la figura 4 y la figura 5:

[4] Paulo Reglus Neves Freire (1921 - 1997). Profesor, pedagogo y filósofo de nacionalidad brasileña. Reconocido por ser defensor de la pedagogía crítica y autor del libro Pedagogía del oprimido de esta misma línea.

Figura 4

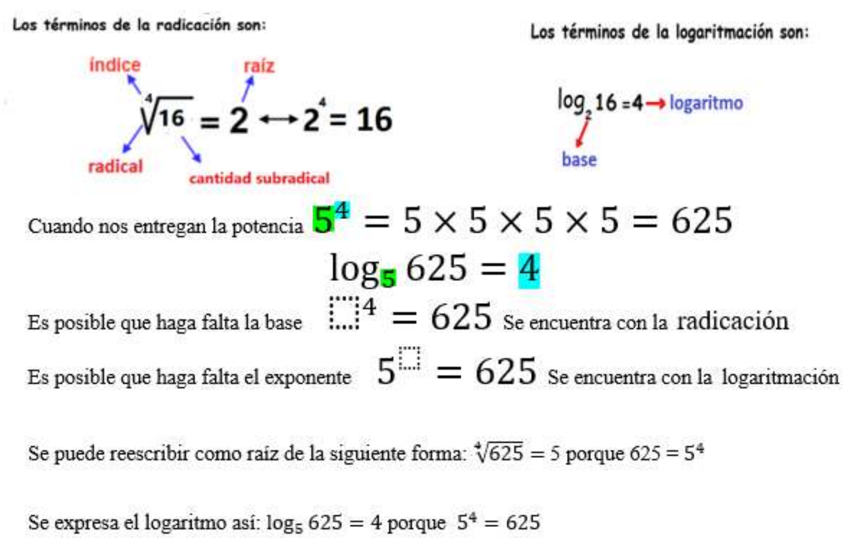
Explicación, de la profesora a sus estudiantes, de potenciación y sus operaciones inversas



Fuente: Guía 10 del estudiante, realizada por la docente cooperadora (2022)

Figura 5

Explicación de algoritmo

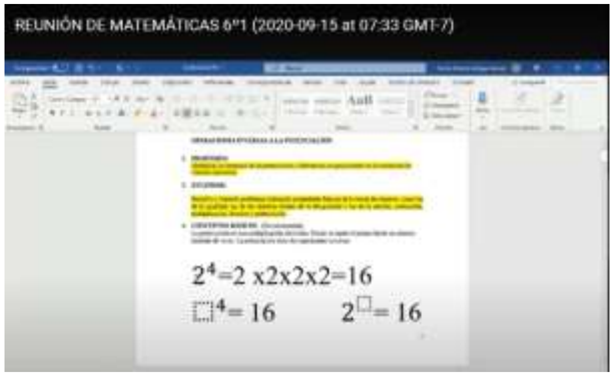


Fuente: Guía 10 del estudiante, realizada por la docente cooperadora (2022)

A partir de la explicación de la profesora cooperadora sobre la relación entre las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación (ver figura 6), en voz de la docente cooperadora: “si se necesita la base, la encuentro con la operación de radicación; y si se necesita el exponente, lo encuentro con la operación de logaritmación”, nos hicimos varios cuestionamientos. Tal vez nuestra mayor inquietud se refirió a la fundamentación, al sentido y al significado que, como futuras maestras, le podríamos a atribuir al conocimiento matemático que vamos a enseñar.

Figura 6

Desarrollo de guía en clase



Fuente: Clase virtual de matemáticas con estudiantes de 6° (2022)

Lo anterior nos hizo pensar que, tal vez, algunos profesores que enseñan matemáticas atienden, apenas, al qué enseñar, dejando de lado otras preguntas que también son importantes en el acto educativo, por ejemplo: ¿por qué?, ¿para qué?, ¿a quién?, ¿cómo? En este sentido, Freire (2004) señala que “enseñar no es transferir conocimiento” (p. 16). Pensamos que, para responder a esas preguntas, un maestro debe conoces algunos aspectos históricos del concepto en cuestión.

Como practicantes, observando a través de pantallas, pudimos identificar algunas dificultades en la enseñanza (y tal vez en el aprendizaje) de algunas operaciones matemáticas, en nuestro caso, como la radicación, la logaritmación y la potenciación. Empezamos a revisar literatura al respecto de la enseñanza y del aprendizaje de estas operaciones, y empezamos a inferir que en la escuela básica secundaria abordar asuntos como radicación y cantidades negativas ha sido difícil para algunos profesores y algunos estudiantes. Así, como futuras maestras nos hicimos un cuestionamiento inicial, ¿qué sentido tiene en la educación básica secundaria enseñar el concepto de *raíz par de un número real negativo*? Sabíamos que una de las formas en que se trata este tipo de números es en la resolución de algunas ecuaciones, sin una solución que pertenezca al conjunto de los números reales. Por ejemplo, una posible solución se conoce como “número imaginario” o también llamado *raíz par de un número real negativo*[5]. Además, pensábamos que necesitábamos saber más sobre qué hizo posible, en la historia, abordar este tipo de números, para llegar a la comprensión que hoy tenemos de “números imaginario”. Creíamos que entender el surgimiento de número imaginario daría más sentido y significado tanto al profesor como al estudiante a la hora de su enseñanza o aprendizaje.

Con base en lo anterior, contemplamos que el desconocimiento del surgimiento de los conceptos matemáticos por parte del profesor podría dificultar su proceso de enseñanza y, consecuentemente, el proceso de aprendizaje en los estudiantes; por lo tanto, empezamos a ver una necesidad de enlazar la enseñanza de los contenidos matemáticos con la historia, en una articulación que supere el mero tratamiento algorítmico. Según Arboleda (citado por Anacona[6], 2003):

> Un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un concepto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento del concepto matemático que transciende los meros procesos algorítmicos. Este aspecto es de gran importancia para la Educación Matemática pues el estudiante y el futuro docente deben tener una visión más profunda de las matemáticas y de su actividad, de tal manera que le permita entender la composición, finalidad, utilidad y sus relaciones con el entorno. (p.42)

Arboleda sugiere que también es necesario comprender el entorno social, político, cultural, y económico en el que el concepto matemático surgió y en el que se aplicó y se aplica.

Al simplificar los procesos de enseñanza y de aprendizaje apenas a lo algorítmico, observamos que las matemáticas se desligan de su proceso de construcción (un proceso eminentemente humano). Como señala Anacona (2003) “(…) las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural” (p. 32).

[5] El concepto *raíz par de un número real negativo,* conocido como número imaginario será expuesto en segundo capítulo.

[6] Maribel Patricia Anacona (s.f). Profesora y Doctora en ciencias, de nacionalidad colombiana. Las principales líneas de investigación a las que pertenece son: Historia social de las Matemáticas.

Al respecto, Arboleda[7] (2011) expresa que "[…] la reflexión sobre las relaciones entre historia y educación matemática es que una vez constituidas las matemáticas parecen obedecer a una lógica interna independiente de sus orígenes" (p. 3). Por lo que, consideramos que indagar sobre la historia de los conceptos matemáticos desde sus condiciones de posibilidad[8], podría ser un camino para identificar los orígenes de los conceptos y así favorecer los procesos para la enseñanza. En este proceso, el docente se apropia de la historia de dichos objetos bajo una mirada del objeto socialmente construido.

Con base en las anteriores consideraciones, surgió la pregunta de investigación ¿Cuáles fueron las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo*?

1.2. Algunos Antecedentes

Algunas investigaciones en Educación Matemática sirvieron de referencia para este trabajo; algunas de ellas son Bagni[9] (2001), Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006), Pardo[10] y Gómez[11] (2007), Anacona (2003) y Pineda[12] (2020). Entre las consideraciones pertinentes para este trabajo rescatamos, en estos autores, la articulación que proponen entre la historia y los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de *raíz par de un número real negativo*.

Bagni (2001) realizó un trabajo denominado "La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos: una investigación experimental desempeñada en la educación media superior", cuyo propósito fue examinar la efectividad de la introducción de los números imaginarios, mediante un ejemplo histórico, al aplicar una prueba a estudiantes de preparatoria con edades entre 16 y 18 años. El autor llegó a la conclusión de que en la resolución de una ecuación de libros antiguos no es suficiente argumento para determinar el

---

[7] Luis Carlos Arboleda Aparicio (1947 – actual). Licenciado en Matemáticas con especialización en Historia y Epistemología de las Ciencias, de nacionalidad colombiana. Las principales líneas de investigación a las que pertenece son: Matemáticas Cultura y Sociedad en Colombia e Historia y Educación Matemática.

[8] El concepto de condiciones de posibilidad será entendido desde una perspectiva foucaultiana, el cual será expuesto en el segundo capítulo.

[9] Giorgio Tomaso Bagni (1958 – 2009). Matemático de nacionalidad italiana. Profesor de Historia de las Matemáticas para Didáctica de las Matemáticas.

[10] Tomás Pardo Salcedo (s.f). Profesor de nacionalidad española.

[11] Bernardo Gómez Alfonso (s.f). Doctor en Didáctica de las Matemáticas de nacionalidad española.

[12] José Fabrizio Pineda Ramos (s.f). Grado en Matemáticas pura y aplicada, Máster en Formación del Profesorado, de nacionalidad española.

aprendizaje de un estudiante. El reto para el docente desde la didáctica de las matemáticas en el aprendizaje en los estudiantes, será examinar y revisar el efecto en el momento de implementar actividades que involucren la solución de ese tipo ecuaciones y su argumentación.

En 2006, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) publicó el documento sobre los "Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas". En este se identificó algunos relacionados con la radicación, más no con números complejos ni números imaginarios. Entre líneas, los Estándares Básicos sugieren una construcción de los sistemas numéricos y simbólicos, no como una restricción a grados específicos en la educación básica y media, sino como un acompañamiento pedagógico paciente y progresivo.

La idea en los estándares es que los estudiantes logren, año tras año, hasta culminar su educación básica secundaria, el reconocimiento de la construcción de cada conjunto numérico, de acuerdo con la necesidad de su creación. La expectativa, basada en la invitación que hace dicho documento, radica en que aquellos estudiantes, en el momento de su educación superior, sean capaces de identificar y comprender la aparición de los conjuntos numéricos a través de su paso por la escuela primaria y secundaria, logrando responder al por qué y para qué operar con los números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, o complejos. A modo de ejemplo, sobre la inserción de algunos sistemas de numeración en la sociedad, este documento afirma que "históricamente las operaciones usuales de la aritmética eran muy difíciles de ejecutar con los sistemas de numeración griegos o con el romano, y sólo en el Siglo XIII se empezó a adoptar en Europa el sistema de numeración indo-arábigo" (MEN, 2006, p. 59).

Pardo y Gómez (2007) realizaron una investigación que tuvo por nombre "La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario". Este trabajo estuvo enfocado en recabar información para sustentar sugerencias de intervención en las pautas educativas con relación a los números complejos. Los autores señalan en la investigación, que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que presentan los estudiantes en su proceso de aprendizaje sobre objetos matemático podrían ser análogas a las dificultades que se presentaron a nivel histórico desde el surgimiento de estos objetos

Anacona (2003), en su artículo "La historia de las matemáticas en la Educación Matemática", sugiere algunos aspectos que deben tenerse en cuenta a la hora de enseñar e intervenir en la comprensión de los conceptos matemáticos. El objetivo del artículo estuvo orientado a señalar algunos aportes de la historia de las Matemáticas en la educación, mostrando así, que las matemáticas son una construcción humana y están ligadas a diferentes dinámicas sociales. Además, el estudio coincide con los realizados por Pardo y Gómez (2007), al señalar las dificultades arraigadas a la historia para trabajar con conceptos matemáticos.

Pineda (2020) realizó un trabajo que denominó "Enseñanza y aprendizaje de los números complejos a través de la historia y la geometría dinámica". En este estudio se presenta una propuesta para abordar los números complejos desde dos perspectivas: la primera, epistemológica, encargada de mostrar dificultades históricas para la comprensión de estos números; y, la segunda, desde un enfoque geométrico y dinámico a través del uso de las TIC, por ejemplo, el software GeoGebra. El autor buscó crear interés en la manipulación de objetos matemáticos con el fin de lograr la comprensión del concepto; es decir, buscó que los estudiantes construyeran los conceptos a través de la manipulación de objetos matemáticos y resaltar las implicaciones del uso de números complejos en la matemática.

Concluimos de este trabajo de Maestría que el autor planteó una problemática en la enseñanza y aprendizaje de los números complejos, desenfoques y deficiencia en el currículo actual. Así mismo presentó la solución obtenida por estudiantes de la x desconocida y de las propiedades relacionadas con la fórmula cuadrática, considerando el discriminante que representa una solución no real – una solución que involucra la *raíz par de un número real negativo*-.

CAPÍTULO 2. Acercamiento a los conceptos

El marco conceptual de este trabajo de grado se fundamenta en dos pilares temáticos: primero, el rastreo del objeto matemático *raíz par de un número real negativo* a partir de las orientaciones estipuladas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y en los conjuntos numéricos. El segundo pilar son las condiciones de posibilidad para la emergencia de ese objeto matemático.

2.1 Rastreo de la *raíz par de un número real negativo* a partir de los documentos rectores

Partiendo de lo que actualmente tenemos estipulado como documentos orientadores para la enseñanza, se rastreó el concepto de *raíz par de un número real negativo* en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), lo que implicó identificar la relación entre el concepto y su desarrollo al interior del currículo. Los estándares que se acercan al concepto se encuentran en la siguiente tabla. (ver tabla 1)

Tabla 1

Lista de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Grado	Pensamiento o sistema	Estándar
Sexto a séptimo	Numérico	"Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o la radicación" (MEN, 2006, p. 82).
	Variacional	"Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones" (MEN, 2006, p. 85).
Octavo a noveno	Numérico	"Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos" (MEN, 2006, p. 86) "Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas" (MEN, 2006, p. 86).
	Variacional	"Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas" (MEN, 2006, p. 87).
Décimo a undécimo	Numérico	"Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos" (MEN, 2006, p. 88).

Nota: Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006)

Con este rastreo inicial podemos observar que, si bien los contenidos se relacionan con el objeto matemático *raíz par de un número real negativo*, este no aparece de manera explícita en la enunciación, lo que quiere decir que en la enseñanza de primaria y secundaria generalmente el concepto no es profundizado ni se enseña su aplicabilidad. A corto plazo esto trae dificultades para los estudiantes de educación superior en carreras como matemáticas, física, ingenierías, químicas, entre otras áreas que las requieren para su aplicación.

2.2 Identificación de la *raíz par de un número real negativo*

Para la identificación de la *raíz par de un número real negativo* consideramos pertinente realizar un reconocimiento de los conjuntos numéricos naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos. La emergencia de cada conjunto numérico se da a partir de alguna necesidad identificada que veremos someramente a continuación.

2.2.1 Conjunto de los números reales

Acercándonos al primer conjunto numérico, Penrose[13] (1996) comienza recordando que los números naturales son las cantidades enteras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$, vistas como elementales o básicas. Estas cantidades posibilitan cuantificar objetos discretos. Entre ellos, poder contar conversaciones, palabras, personas, animales, ideas, ausentes, cambios de dirección, errores, ausencias, relámpagos, noches, etc. Además, este tipo de números posibilitan realizar operaciones como la suma y la multiplicación dando como resultado otro número natural.

Sin embargo, existen operaciones como la resta que conducen a la necesidad de utilizar otro tipo de números, dado que con los números naturales no es posible representar cantidades negativas. En este caso, emergen las cantidades negativas, las cuales, en conjunto con los números naturales, conforman el conjunto los números enteros $\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$ (Penrose, 1996)

En sus inicios los números enteros negativos fueron números de difícil aceptación, ya que las cantidades negativas apenas se atribuían a prácticas cotidianas, o al menos al conocimiento más tangible (Quiroz[14], 2018). En la conformación de este nuevo conjunto numérico hacen parte las cantidades naturales positivas, las cuales se pueden relacionar con los activos que generan las personas en su vida cotidiana e igualmente las cantidades negativas que pueden ser representadas por los pasivos. De modo que, podemos evidenciar cómo los números naturales ligados a los números enteros negativos han sido aplicados principalmente al comercio y cómo las mismas condiciones hicieron necesario ampliar el conocimiento de este nuevo conjunto numérico.

[13] Roger Penrose (1931 - actual). Físico matemático, Doctor en Filosofía, honoris causa y doctor en ciencias, de nacionalidad británica. Es reconocido por su trabajo en física matemática, en particular por sus contribuciones a la teoría de la relatividad general y a la cosmología.

[14] Lorena María Quiroz Betancur (s.f – actual). Licenciada en matemáticas y física, Magister en educación, de nacionalidad colombiana.

Posteriormente, surge otra preocupación o necesidad por parte de los matemáticos, la división de un número entre otro sin dejar residuo, ya que el conjunto numérico conocido se agotaba en los enteros. “En consecuencia, necesitaremos las *fracciones o números racionales* como son llamados $\ldots 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3} \ldots$” (Penrose, 2014, p. 79). La dificultad de operar la división entre dos números enteros se evidencia además en la acción de medir y comparar magnitudes. En esta comparación se encontraban con la dificultad de medir más que magnitudes enteras, es decir, que una magnitud este contenida en otra una cantidad inexacta de veces. “Para solucionar esta dificultad, surgieron los números racionales, los cuales posibilitaron medir casi todas las magnitudes y compararlas con un patrón establecido” (Pérez[15], 2014, p. 16).

Debido a la operación división entre dos números emergieron otras cantidades decimales infinitas, que necesitaron ser vistas como un nuevo sistema ampliado, por ejemplo, cantidades irracionales como: $583.702644391210095\ldots$, la expresión para n: $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$; además de estos números, las raíces cuadradas, cúbicas o cuartas etc. también se pueden denominar de esta manera en el sistema de los números "reales" (Penrose, 1996).

Previamente a exponer como dificultad el calcular las *raíces pares de números reales negativos*, es necesario identificar la definición de la raíz cuadrada en el conjunto de los números reales. La operación raíz cuadrada se define como:

$$\sqrt{a} = b, si\ b^2 = a \quad \text{Siendo a y b números reales positivos}$$

2.2.2 Raíz par de un número real negativo

Para hablar de los números complejos e imaginarios, fue necesario hablar de aquellos conjuntos numéricos que antecedieron a estos hasta el conjunto de los números reales. Este camino nos posibilitó visibilizar la dificultad que presentaremos a continuación, la de calcular las *raíces pares de números reales negativos*, partiendo de la definición de raíz cuadrada en los números reales. Resaltamos en esta dificultad el trabajo de algunos estudiantes de secundaria al solucionar ecuaciones de segundo y tercer grado en adelante.

---

[15] Diego Alejandro Pérez Galeano (s.f - actual). Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Doctor en Educación, de nacionalidad colombiana. Las principales líneas de investigación a las que pertenece son: educación Matemática, Diversidad y Cultura; Currículo, Matemática y Escuela; Formación de profesores.

Al respecto de las ecuaciones que se les presentan a los estudiantes, y las cuales al desarrollarlas arrojan como resultado la *raíz par de número real negativo*, Pineda (2020) expresa que:

> Analizando los conocimientos previos de los que deben partir los estudiantes a la hora de abordar este tema, observamos que, durante la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, los estudiantes se enfrentan repetidas veces a las ecuaciones cuadráticas
>
> $$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \quad (1.1)$$
>
> Resolviendo dicha ecuación, se llega a la fórmula que despeja la x,
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
>
> Luego se estudia el signo de la discriminante $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$.
>
> Si $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} > 0$, entonces (1.1) tiene 2 soluciones [en el conjunto de los números reales]
>
> Si $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 0$, entonces (1.1) tiene 1 solución […] doble. [en el conjunto de los números reales]
>
> Si $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} < 0$, entonces (1.1) [1.2] no tiene solución [en el conjunto de los números reales]. (Pineda, 2020, p. 2)

A partir de las tres posibles soluciones de la ecuación inicial (1.1), el estudiante encuentra que hay un discriminante en el que su resultado no es una solución que pertenece al conjunto de los números reales para la ecuación (1.2). Esto mencionado lo podemos ejemplificar de la siguiente manera:

Dada la ecuación $1x^2 + 3x + 5 = 0$ (1.3) y resolviéndola tenemos que:

La ecuación (1.3) está ordenada (de mayor a menor potencia) e igualada a cero, posteriormente, despejando la x de la siguiente forma obtenemos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (1.4) se identifica los valores y lugares correspondientes a las letras a, b y c, a partir de la ecuación general (1.1). Teniendo presente la correspondencia entre los valores numéricos y letras tenesmos que: $a = 1 ; b = 3 ; c = 5$. Seguidamente reemplazamos los valores de $a, b\ y\ c$ en la ecuación (1.4), se realizan las operaciones requeridas y se concluye los valores obtenidos para x así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - - - \ Utilización\ de\ (1.4)$$

$$a = 1;\ \ b = 3;\ \ c = 5 - - - \mathit{Asignación\ de\ valores}$$

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} - - - \mathit{Reemplazando\ valores}$$

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} - - - \mathit{Operación\ entre\ números\ reales}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} - - - \mathit{Operación\ entre\ números\ reales}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} - - - \mathit{Operación\ entre\ números\ reales}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} - - - \mathit{Operación\ entre\ números\ reales}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{-11}}{2} - - - \mathit{Operación\ entre\ números\ reales}$$

Discriminante

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{-11}}{2} - - - \mathit{Operación\ entre\ números\ reales}$$

En ese sentido, al solucionar ecuaciones como las del ejemplo (1.3), el estudiante al despejar la x y hacer uso de la ecuación (1.4), comúnmente conocida como cuadrática, se enfrenta a un discriminante menor a cero (1.2) cuyo valor es $\sqrt{-11}$. Es decir, el estudiante encuentra en el resultado un número negativo al interior de una raíz cuadrada y, atendiendo a la definición de “raíz cuadrada” es una operación imposible de solucionar en el conjunto de los números reales.

Al respecto de la dificultad que se enfrentan los estudiantes en la solución de algunas ecuaciones, Pérez (2014) señala que uno de los apuros al operar con los números reales:

> […] consiste en la imposibilidad de extraer la raíz cuadrada (o en general par) de un número negativo. Por ejemplo, en el conjunto de los [números] reales, es imposible solucionar las ecuaciones:
>
> $x^2 + 1 = 0$ [1.5] $x^2 + x + 1 = 0$ $x^4 + 4 = 0$
>
> Si intentamos resolver la primera ecuación [1.5] llegaríamos a que $x = \sqrt{-1}$, el cual no es un número real. De manera que [emergió ...] otro tipo de número llamado imaginario el cual se representa con la letra i y que equivale, como vemos, al número $\sqrt{-1}$. Este conjunto de números se representa generalmente con la letra $\mathbb{I}$. (p. 17)

A partir de la solución de ecuaciones como las anteriores, encontramos que el objeto matemático *raíz par de un número real negativo* se encuentra en lo que se ha denominados números imaginarios. Al respecto de estos números, Mazur[16] (2008) señala que con la "aritmética de los números imaginarios", es decir, al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, es posible denominar los números imaginarios como "cantidades imaginarias".

De allí, resaltamos que, al operar la *raíz par de un número real negativo* es posible hacer uso de las propiedades del producto de los radicales en números reales, para reescribir la expresión como un producto de raíces, indicando así la raíz cuadrada de un número real multiplicado por la unidad imaginaria i así:

> Si – a es un número real negativo, entonces interpretamos una expresión de la forma (una cantidad a la cual Bombelli[17] se habría referido como *pui di meno* [más menos]) como:
>
> $$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{-1} * \sqrt{-a} = i * \sqrt{-a} = \sqrt{-a} * i$$
>
> donde $\sqrt{a}$ significa la raíz cuadrada positiva del número a. (Mazur, 2008, p. 129)

Es decir, un número imaginario está conformado por el producto de un número real ($\sqrt{a}$) por la unidad imaginaria i ($\sqrt{(-1)}$). Tras la emergencia de la *raíz par de un número real negativo*, es necesario la ampliación del conjunto de los números reales para aceptar a dicha raíz como número imaginario. En relación con esta idea, Mazur (2008) expresa que:

> Utilizamos el término *número imaginario* para referirnos sólo a un múltiplo de i por un número real (o, equivalentemente para referirnos a la raíz cuadrada de un número real negativo), y el término *número complejo*, para referirnos a la expresión más general $a + bi$ [1.5] donde a y b son números reales. Todo número complejo como el que se muestra arriba [1.5] se expresa de una única forma como la suma de un número real a (llamado su *parte real*) y un número imaginario $bi = b\sqrt{-1}$ (llamado su *parte imaginaria*). (p. 129-130)

De modo que, de la ampliación del conjunto de los números reales emerge el conjunto de números complejos, para posibilitar el cálculo de raíces cuadradas, y en general *raíces pares de números reales negativos*. Por tal razón, cuando nos referimos a los "números imaginarios" o "números reales" a su vez hablamos de números complejos; por ejemplo, 3e; 3ei; $1 + 4\text{i}$; -3.

---

[16] Barry Mazur (1937 - actual). Matemático y doctor en matemáticas, de nacionalidad norteamericana. Reconocido por sus contribuciones a la topología geométrica, la topología diferencial y la geometría algebraica.

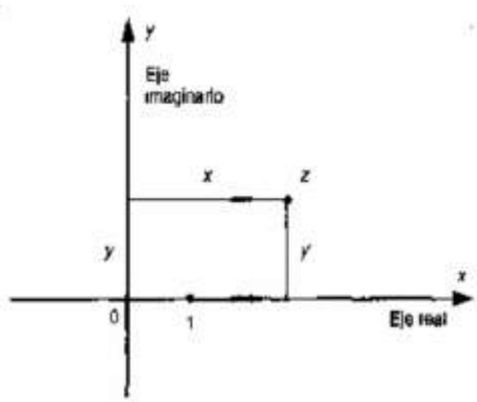
[17] Rafael Bombelli (1526-1572). Matemático e ingeniero hidráulico de nacionalidad italiana. Reconocido por ser el autor del libro *Álgebra*, el cual fue uno de los textos matemáticos con reconocimiento en Europa.

De manera similar a los números reales y su representación en la recta numérica real, los números complejos se representan geométricamente como un punto (x, y) en el plano llamado el "Plano de Argand", el cual Penrose (1996) lo define como:

> […] un plano euclídeo ordinario con coordenadas cartesianas estándar x e y, donde x indica la distancia horizontal (positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda) [llamado eje real] y donde y indica la distancia vertical (positiva hacia arriba y negativa hacia abajo) [eje imaginario]. El número complejo $z = x + iy$ viene representado entonces por el punto del plano de Argand cuyas coordenadas son (x, y). (p. 87)

Figura 7

Representación geométrica de número complejo $z = x + iy$ en el plano de Argand



Fuente: Penrose (1996, p. 87)

2.3 Condiciones de posibilidad

Para indagar por el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo*, autores como Díaz[18] (2005), Foucault[19] (2013) y Quiroz (2018) serán fundamentales para comprender el concepto de condiciones de posibilidad desde una perspectiva foucaultiana. A

[18] Esther Díaz (1939- actual) Filosofa, epistemóloga, doctora en Filosofía de nacionalidad argentina. Entre sus aportes al campo de la epistemología, sobresale la elaboración del concepto de "epistemología ampliada".

[19] Paul-Michel Foucault (1926 - 1984). Filósofo, historiador, sociólogo y psicólogo, de nacionalidad francesa. Reconocido por sus estudios críticos de la psiquiatría, la medicina, las ciencias humanas, el sistema de prisiones, y la historia de la sexualidad humana.

continuación, presentaremos algunas aproximaciones al objeto de estudio ya mencionado; de igual forma, presentaremos un ideograma referido al tema tratado.

Quiroz (2018) es una autora que se acerca a la historia de las matemáticas del concepto de número entero negativo y su inclusión en el currículo escolar colombiano desde una aproximación a sus condiciones de posibilidad. Así mismo, a partir de los planteamientos de la autora, se pudo identificar una ruta para la construcción de conceptos desde su devenir histórico, teniendo en cuenta las relaciones entre sujetos, entornos y conocimientos en la consolidación de un objeto matemático.

En cuanto a las condiciones de posibilidad, Quiroz (2018) expone que son:

> […] los discursos y las acciones sociales que se dan en lugares y tiempos particulares en una búsqueda de la verdad. Por tal razón, deduzco que las condiciones de posibilidad permiten la intersección de los contextos y los acontecimientos sociales, educativos, políticos, económicos, culturales y religiosos de una comunidad, que se expresa en y a través de códigos, discursos y otras prácticas que surgen de la interacción entre los sujetos y su entorno. (p. 30)

Desde esta interpretación de las condiciones de posibilidad, comprendemos que, en la mirada de la historia, se realiza una lectura de diferentes aconteceres en un contexto determinado que permite identificar cómo emergieron los conceptos. En este sentido, las concepciones y construcciones de los objetos se dan a partir de los cambios de perspectivas, creencias, que pueden tejer a la luz de un mismo objeto. Así mismo, la emergencia de los conceptos no se centra en único momento, fecha, periodo histórico; por el contrario, al indagar por el surgimiento del objeto, se contemplan las diferentes circunstancias del contexto.

Por otra parte, según Foucault (2013) la arqueología del saber es un análisis que busca comprender las formaciones discursivas, no desde el código lingüístico, sino desde sus condiciones de existencia. Pues en este caso, el discurso, más que palabras, es también un lugar de acción y un punto de emergencia de acontecimientos, que tiene un "[...] juego de reglas que hacen posible durante un período la aparición de objetos" (p. 70). En consonancia con esta idea, el juego de reglas puede traducirse en las prácticas sociales que hacen posible la emergencia de un objeto.

Ampliando nuestra conceptualización de las condiciones de posibilidad, Díaz (2005) presenta un panorama de la vida y obra de Foucault en tres tópicos: genealogía, arqueología y ética y da cuenta de cómo el autor rastrea lo que posibilita la emergencia de los objetos desde los diferentes acontecimientos según su lugar histórico; cómo reescribe la historia de los objetos a indagar de una manera no lineal, es decir, el autor no se limita a indagar de manera cronológica la historia del objeto de estudio. Por el contrario, la autora expresa que, Foucault centra su preocupación en lo que ocurre alrededor del objeto y las condiciones en las que fue posible su emergencia.

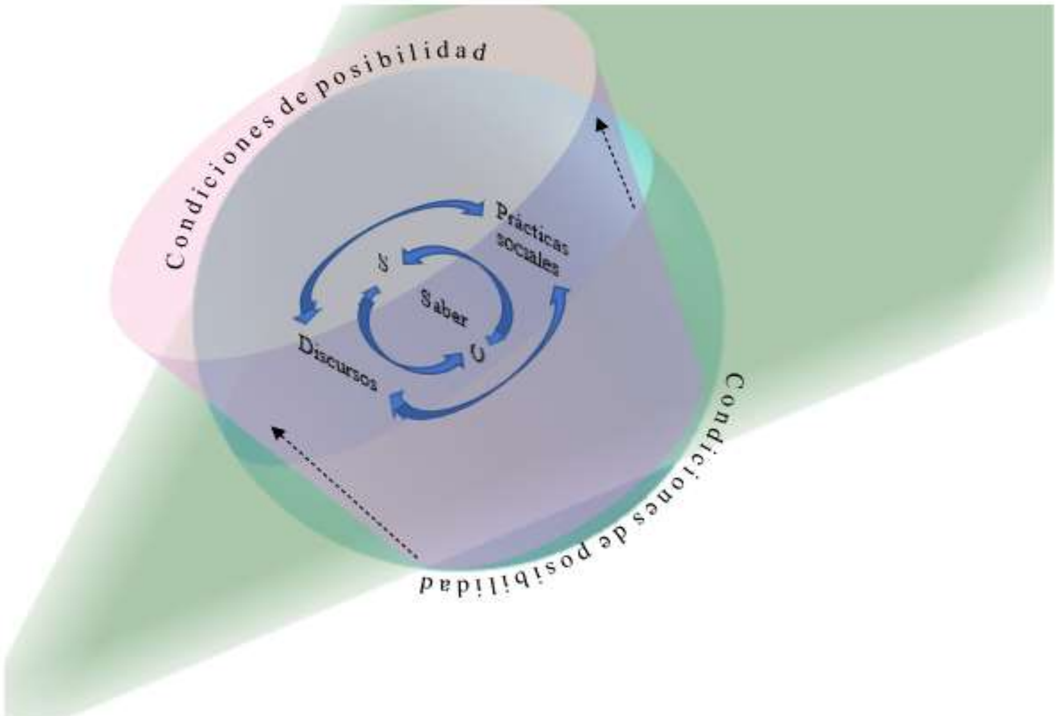
En este sentido, para Díaz (2005) la búsqueda de las condiciones de posibilidad "[…] permiten circunscribir el "lugar" del acontecimiento, los márgenes de aleatoriedad, las prácticas que lo constituyeron, en qué condiciones históricas se producen ciertos discursos y cómo ellos, a su vez, modifican dichas condiciones" (p. 83). En concordancia con esta idea, las condiciones de posibilidad nos trasladan al lugar de los hechos para comprender sus dinámicas y los acontecimientos que allí ocurren para la emergencia del objeto.

Luego de este recorrido de las comprensiones a partir de los autores, comprendemos las condiciones de posibilidad, desde una mirada arqueológica, como aquellos acontecimientos, cambios históricos, políticos, sociales, económicos, religiosos (Quiroz, 2018) que permean el pensamiento de sujetos por medio de lo que le acontece en un contexto determinado. A su vez, dichos cambios y acontecimientos influyen en la construcción, consolidación, comprensión o interpretación de objetos concretos. Es decir, acontecimientos y sujetos aportan a la emergencia de las condiciones de posibilidad a través de una dialéctica sobre un objeto concreto. Las condiciones de posibilidad, como concepto y como herramienta de análisis puede ser aplicada en la emergencia de un objeto matemático, en este caso de la *raíz par de un número real negativo*.

Para ilustrar nuestras comprensiones sobre las condiciones de posibilidad presentamos al lector la figura 8.

Figura 8

Ideograma: condiciones de posibilidad



Fuente: elaboración propia (2022)

Este ideograma está conformado por una bola azul que representa las condiciones de posibilidad; en el plano verde que corta el centro de la bola azul confluyen las dialécticas de algunas palabras clave resaltadas de nuestras aproximaciones teóricas hasta aquí expuestas: prácticas sociales, discursos, sujeto (s) y objeto (o). En el centro de dichas dialécticas se encuentra el saber; además, el cono representa la doble lectura que puede realizarse de dicho ideograma, la primera de ellas desde las condiciones de posibilidad hacia el centro de la bola y la segunda desde el centro hacia las condiciones de posibilidad.

La primera lectura a partir del cono, puede realizarse desde el exterior hacia el plano del centro de la bola llamada “condiciones de posibilidad,” como lo indica la flecha de lado izquierda. De esto, se comprende que desde las condiciones de posibilidad emergen aquellas dialécticas que se constituyen internamente en el plano. En la segunda lectura, puede hacerse desde el plano del centro de la bola hacia el exterior como lo indica la fecha a la derecha, puesto que las condiciones de posibilidad, a su vez, se constituyen partir de la dialéctica entre las prácticas sociales y el discurso y la dialéctica entre el sujeto y el objeto; dialécticas estas que posibilitan la construcción del saber.

Allí, en el interior de la bola confluyen en un mismo plano los discursos, las prácticas sociales, el sujeto matemático (S), el objeto *raíz par de un número real negativo* (O) y el saber. Las flechas en un doble sentido representan la dialéctica entre las prácticas sociales y los discursos, y, dentro de esta dialéctica se constituye un saber. A su vez, entre el sujeto y el objeto también comprendemos una dialéctica interna que se da entre las prácticas sociales y el discurso puesto que son acciones propias del sujeto para la transformación del objeto, pero al tiempo, el objeto en su dialéctica con el sujeto también es transformado.

CAPÍTULO 3. Acercamiento metodológico

Para la consolidación del marco metodológico se tuvo en cuenta elementos relacionados con la investigación cualitativa, el enfoque hermenéutico-interpretativo y el método historiográfico. Además, presentaremos la herramienta denominada "matriz de sistematización" que nos permitió ordenar los documentos rastreados para la construcción de un archivo de fuentes. A partir de este archivo, implementamos la historiografía como método cualitativo para la identificación de algunas condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de la *raíz par de un número real negativo*.

3.1 Tipo de investigación

La investigación cualitativa busca "el estudio de la vida de los grupos humanos" (Denzin[20] y Lincoln[21], 2012, p. 44). Esto nos direcciona a comprender los sujetos a partir de la realidad en la que están inmersos, lo que hace posible identificar y comprender las condiciones de posibilidad que están circunscritas a un lugar permeado por prácticas sociales en las que intervienen grupos, personas, comportamientos y costumbres. En concordancia con lo anterior, Denzin y Lincoln (2012) expresan que la investigación cualitativa:

> Consiste en una serie de prácticas materiales e interpretativas que hacen visible el mundo y lo transforman, lo convierten en una serie de representaciones […] implica un enfoque interpretativo y naturalista del mundo, lo cual significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en sus escenarios naturales, tratando de entender o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas les dan. (p. 48-49)

En cuanto a la investigación cualitativa, teniendo presente que nos preguntamos por la historia del concepto de *raíz par de un número real negativo* desde lo cultural, social, político y económico, identificamos que es un camino viable que nos permite relacionar lo histórico con la

[20] Norman Kent Denzin (1941 - actual). Profesor en sociología de nacionalidad americana. Entre sus intereses académicos se resalta la metodología de investigación cualitativa y el estudio de los medios, la cultura y la sociedad.
[21] Yvonna Sesiones Lincoln (1944 - actual). Metodóloga y académica de educación superior, de nacionalidad norteamericana. Reconocida en la investigación de las ciencias sociales por su contribución a la metodología cualitativa.

preocupación por el sujeto; lo que es importante para nuestra investigación, pues el objeto matemático de nuestro interés ha tenido una larga trayectoria en el tiempo.

Ahora bien, comprendiendo que la investigación cualitativa nos posibilita explorar, describir y generar perspectivas teóricas, esto a su vez lo relacionamos con el enfoque hermenéutico basado en el paradigma interpretativo, como un apoyo en la identificación e interpretación de las condiciones de posibilidad. La hermenéutica, según Denzin y Lincoln (2012), "es una aproximación al análisis de los textos, que subraya el modo en que la comprensión previa y los prejuicios dan forma a los procesos interpretativos" (p. 48). Para el análisis de los textos, partimos de la sistematización de la información histórica, conceptual y epistemológica, denominada documentos y catalogada como registros: tesis, libros, conferencias, artículos, entre otros. Este enfoque nos posibilitó reconstruir acontecimientos alrededor del objeto matemático *raíz par de un número real negativo* de acuerdo con el material recolectado como construcción del archivo[22] para contar la historia desde sus condiciones de posibilidad.

Según Pérez (citado en Ruedas[23] et al[24]., 2009) "la hermenéutica constituye una disciplina de interpretación de textos o material literario o el significado de la acción humana" (p. 188). El material que recolectamos en la investigación reflejó las condiciones de posibilidad de nuestro objeto de investigación, por lo que se pudo interpretar la información a partir de la identificación de emociones, intenciones, propósitos, descubrimientos, aceptación de la verdad, pensamientos, motivaciones, deseos, comportamientos, valores y aprendizajes de los sujetos más relevantes en el estudio del concepto *raíz par de número real negativo* en cada época. Planella (citado en Ruedas et al., 2009), desde la interpretación de los acontecimientos en cada momento histórico, señala la hermenéutica como:

> una forma de estar en el mundo y de cómo a través de nuestra experiencia leemos (interpretamos) lo que nos pasa, lo que nos rodea, nuestras interacciones con los otros sujetos y si se quiere, los discursos que a través del diálogo estos otros sujetos comparten con nosotros. (p. 85)

---

[22] La construcción del archivo de la investigación fue el camino para delimitar los documentos que nos aportarían a la identificación de las condiciones de posibilidad. Este será explicado más adelante en este mismo capítulo.

[23] Martha Janeth Ruedas Marrero (s.f). Profesora en la especialidad de Química de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

[24] María Magdalena Ríos Cabrera (s.f). Profesora en la especialidad de Ciencias de la Tierra y Ciencias Generales. Freddy Enrique Nieves Sequera (s.f). Docente en Pregrado y Postgrado; ambos pertenecen a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Para realizar las respectivas interpretaciones en este trabajo de grado, tuvimos en cuenta el contexto, las situaciones donde surgen algunas expresiones, la interpretación del lenguaje, el sistema sociocultural de los datos, enunciados o declaraciones, para poder entender cada acontecimiento en su contexto histórico. Algo a resaltar en el tipo de interpretación que realizamos desde el enfoque hermenéutico-interpretativo fue ubicarnos, reconocer, entender y aceptar la historia tal y como se encontraba en su momento. Así, el enfoque hermenéutico-interpretativo nos posibilitó identificar y reconocer los diversos discursos sobre la *raíz par de un número real negativo* que acontecieron durante los siglos XV-XVIII.

3.2. Método historiográfico

Profundizando en el estudio, el método utilizado fue el historiográfico complementado con el análisis de contenido. La historiografía nos posibilitó identificar, ordenar, conectar, comparar e interpretar y orientar un camino para contar la historia desde sus condiciones de posibilidad. El análisis de contenido, por su parte, es una técnica que nos sirvió para "analizar los documentos, no desde su forma o estilo en particular, sino desde el significado de las palabras, temas, frases e ideas", como afirma López (citado en Quiroz, 2018, p. 32). En este sentido, la historiografía se nos presenta como un método cualitativo que permite adentrarnos a la cultura y ver cosas que otros no ven, también es aquello que le da forma a parte de la historia. Para Serna[25] y Pons[26] (2013), por ejemplo:

> La historiografía trata de la historia, de la investigación y de la escritura de la historia; trata de la profesión y de las normas que siguen quienes se dedican a este menester; trata del pasado, de lo que hicieron los seres humanos en otro tiempo, del significado que dieron a sus acciones y del significado que ahora damos aquellos actos. (párr. 3)

En esta línea de sentido, concebimos la historia como una posibilidad de dialogar con el pasado y el presente, entender sus motivaciones, procesos y contextos en clave temporal y no desde juicios de valor. Para comprender otros aspectos acerca de la historiografía y conformar nuestra propia definición, autores como Quiroz (2018) la plantean como:

[25] Justo Serna Alonso (1959 - actual). Catedrático de Historia. La principal línea de investigación a las que pertenece es: historia social y cultural.
[26] Anaclet Pons (1959 - actual). Historiador especializado en historia cultural, historia social e historia digital, de nacionalidad española.

> […] aquella dialéctica que se traza entre el pasado y el presente, entre la historia de las historias, particularmente en las condiciones de posibilidad, para conocer aspectos sociales, culturales, políticos e incluso religiosos que influyeron en un periodo determinado para crear la historia que puede ser narrada y vivenciada desde el presente. (p. 30)

De ahí que para este trabajo entenderíamos la historiografía como el método que nos posibilita reconocer, leer y describir el objeto de investigación (condiciones de posibilidad) matemático (*raíz par de un número real negativo*) a lo largo de la historia, como una forma de reescribir los hechos o acontecimientos importantes que han surgido de la cultura a partir de una lectura crítica.

3.3 Matriz de sistematización

La matriz de sistematización elaborada contiene la siguiente información de cada uno de los documentos consultados para la escritura de la investigación: fecha de elaboración, tipo de fuente (artículo, tesis, libro, entre otros), registro (primaria/secundaria), autor, base de datos utilizada, portada, título, palabras-clave, resumen, mis primeros comentarios, palabras-clave inferidas, qué aporta para la investigación, foto del autor, bibliografía del autor y referencia bibliográfica[27]. La figura 9 representa una parte de la matriz de sistematización.

Figura 9

Parte de la matriz de sistematización

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA Facultad de Educación Seminario de Práctica III	
Preguntas 1. ¿Qué función ha cumplido o cumple el concepto de radicación en la vida cotidiana? 2. ¿Cuál es el sentido que se le otorga al significado del concepto de radicación? 3. ¿Cómo identificar si un estudinate realmente ha comprendido el concepto de radicación? 4. ¿A partir de la historia el concepto de radicación unicamente se puede contemblar bajo el cálculo operativo? 5. ¿Qué sentido tiene para la educación secundaria enseñar el concepto de raíz par de número negativo?	Convenciones Texto mencionado histórico -

Autor	Base de datos utilizada	Portada	Título
Maribel Anacona	Repositorio Universidad de los Andes		LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

[27] En el siguiente enlace dejamos al lector la matriz de sistematización completa construida para esta investigación https://n9.cl/bay6f

Fuente: Elaboración propia (2022)

En la matriz se registraron los documentos que posteriormente nos proporcionaron elementos teóricos, conceptuales, históricos y metodológicos para la escritura de la investigación. En la matriz hicimos uso de algunas convenciones de colores (ver tabla 2) para resaltar y tomar información de utilidad sobre el objeto matemático.

Tabla 2

Convenciones en la matriz de sistematización

Nombre de la convención	**Color señalado**
Texto histórico mencionado: Hace referencia al título de algún texto histórico.	**Color azul**
Autor (I matemático histórico)	Color rosa
Autor (II autor secundario que apoya)	Color rosa
Época	Color rojo
Objeto matemático	Color verde
Práctica social	Color naranja
Didáctica	Color amarillo

Nota: Elaboración propia (2022)

Además, señalamos en amarillo las filas de documentos descartados para la investigación. En ella, además se consignaron algunas preguntas realizadas en el camino de la práctica y que finalmente nos posibilitó consolidar la pregunta final de investigación.

3.3.1 Construcción del archivo de investigación

Para la construcción del archivo de investigación fue necesario iniciar con la elaboración de la matriz presentada en el apartado anterior, así como llevar a cabo un rastreo minucioso de fuentes documentales que aportaran información relevante para la comprensión de nuestro objeto de estudio a nivel histórico, conceptual y epistemológico. Como lo expresa Quiroz (2018), “los hechos y fenómenos estudiados de una investigación se encuentran en las fuentes documentales que se consignan en registros” (p. 23), es decir, de las fuentes documentales se deriva el archivo.

El archivo, según Rodríguez[28] (2011), es "(...) el conjunto de documentos que se transforman en el material de trabajo para la investigación histórica." (p. 26).

Nuestro trabajo se centró en una modalidad de sistematización de la información y la construcción de un archivo al entenderlo como un "(...) sistema de las condiciones históricas de posibilidad de los enunciados" (Castro[29], 2004, p. 30). Los enunciados no se limitan únicamente a una emisión de palabras, por el contrario, el enunciado, comprendido en una perspectiva foucultiana, quiere decir que la palabra no se circunscribe a una mera emisión de sonidos, sino que ella hace parte de un conjunto de enunciaciones a partir de lo que acontece alrededor del objeto en cuestión. En este sentido, el enunciado comprende aquellos acontecimientos que posibilitan la aparición del objeto desde las prácticas sociales, en dichas prácticas emergen los supuestos que le dan significación y validación al objeto (Díaz, 2005). En otras palabras, el archivo será comprendido como aquellos documentos en los cuales se encuentran los datos que enuncian las condiciones de posibilidad para el análisis de la historia.

Por otra parte, las fuentes de información, como parte del archivo, pueden ser de dos tipos: primarias y secundarias. Las fuentes primarias son entendidas como aquellas que proporcionan información de primera mano, en ese sentido, estas fuentes caracterizan la información producida, pueden encontrarse en diversos tipos de documentos tales como artículos, libros, tesis, entre otras. Las fuentes secundarias, por su parte, proveen información producida generalmente a partir de la información de primera mano, es decir, la información que tiene un análisis, interpretación o reflexión desde una fuente primaria (Hernández[30], et al[31], 2006).

En el presente estudio historiográfico fueron tomadas las fuentes documentales para la constitución del archivo de acuerdo con la información que brindaban en relación con el objeto matemático (raíz para de un número negativo) y las condiciones para su surgimiento. Como fuente primaria contamos con dos (2) libros de matemáticas y un (1) libro autobiográfico de un

---

[28] Lorena María Rodríguez Rave (s.f - actual) Licenciatura en Educación Básica énfasis en Matemática, Doctora en Educación. La principal línea de investigación a las que pertenece es: Historia de conceptos.
[29] Edgardo Castro (1962 - actual). Doctor en Filosofía. A cargo de la edición de los textos de Michel Foucault.
[30] Roberto Hernández Sampieri (1965 - actual). Licenciado en Ciencias de la Comunicación, de nacionalidad mexicana. Ha recibido varios doctorados honoris causa de parte de prestigiadas universidades. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores de CONACYT.
[31] Carlos Fernández Collado (1953 - actual). Científico, Investigador, Profesor y Escritor de nacionalidad mexicana. Reconocido por sus aportes en metodología de investigación.
María del Pilar Baptista Lucio (s.f). Licenciada en Comunicación y Doctora en Sociología. Reconocida por sus investigaciones en el impacto y potencial de las tecnologías de comunicación.

matemático. Como fuentes secundarias contamos con tres (3) libros de historia de las matemáticas, seis (6) artículos, una (1) planaria y una (1) conferencias que apoyaron la historia de las matemáticas; las fuentes secundarias nos posibilitaron complementar la información obtenida de las fuentes primarias desde el contexto de los acontecimientos y sus condiciones de posibilidad. (ver tabla 3)

Tabla 3

Constitución del archivo

Título de fuente	Autor	Tipo de fuente	Primaria/secundaria
Artis magnae. Sive de regulis algebraicis	Gerolamo Cardano	Libro	Primaria
Ars Magna	Gerolamo Cardano	Libro	Primaria
Mi vida	Gerolamo Cardano	Libro	Primaria
El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días	Morris Kline	Libro	Secundaria
Números imaginados (en especial la raíz cuadrada de -15)	Barry Mazur	Libro	Secundaria
La mente nueva del emperador. En torno a la cibernética, la mente y las leyes de la física	Roger Penrose	Libro	Secundaria
El pensamiento sobre la naturaleza en el Renacimiento	Teodoro Bustamante	Artículo	Secundaria
Gauss: La revolución de las matemáticas del siglo XIX	Santiago Gutiérrez	Artículo	Secundaria
Tolerancia religiosa en el renacimiento: Carlos v en Augsburgo en 1530	Luis Rojas Donat	Artículo	Secundaria
De la tortura mental a los fractales	Antonio Rosales	Artículo	Secundaria
El teorema fundamental del álgebra	Ferran Mir Sabaté	Artículo	Secundaria
Las matemáticas en el Renacimiento	Alfredo Vera Botí	Artículo	Secundaria
Demostraciones matemáticas: Un recorrido a través de la historia desde una visión socioepistemológica	Cecilia Crespo Crespo	Conferencia	Secundaria
The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism	Luis Radford	Plenaria	Secundaria

Nota: Elaboración propia (2022)

3.3.2 Construcción de los datos de investigación

Los datos de la investigación, según Schettini y Cortazzo (como se citó en Quiroz, 2018), "son aquellos que hablan particularmente del objeto de investigación y se destacan como el resultado de una interpretación de la realidad" (p. 24). Es decir, los datos construidos para la investigación poseen información para el análisis del objeto matemático *raíz par de un número real negativo* desde las condiciones de posibilidad para su surgimiento. Para Rodríguez[32] et al.[33] (1999), los datos

> […] son frecuentemente entendidos como interacciones, situaciones, fenómenos u objetos de la realidad estudiada, que el investigador recoge a lo largo de su proceso de investigación [o en nuestro caso, se construyen] y que poseen un contenido informativo útil para los objetivos perseguidos por la misma. (p. 198)

Resaltando que el objetivo de este trabajo de grado es identificar las condiciones de posibilidad del objeto matemático, comprendemos los datos como aquellos enunciados que nos permiten construir, mostrar y comprender las condiciones de posibilidad del objeto de investigación en su surgimiento. Es decir, los enunciados identificados en los datos nos proporcionaron información relevante para continuar la indagación del contexto en el cual ocurrieron y así comprender lo que sería una condición de posibilidad.

Un ejemplo de lo anterior es el siguiente fragmento del documento *Ars Magna* de Cardano[34]:

---

[32] Gregorio Rodríguez Gómez (s.f). Profesor de Métodos de Investigación en Educación. La principal línea de investigación a la que pertenece es: evaluación del aprendizaje, institucional y de programas.

[33] Javier Gil Flores (s.f). Catedrático de Universidad de diseños de Investigación y Análisis de Datos en Educación. Eduardo García Jiménez (s.f). Las principales líneas de investigación a las que pertenece son: Alfabetización, Multilingüismo, Diversidad, Orientación Profesional y Justicia Social

[34] Gerolamo Cardano (1501 - 1576). Médico, matemático y astrólogo, de nacionalidad italiana. Reconocido por ser el primero en publicar una solución general completa de la ecuación de tercer grado y de la ecuación de cuarto grado.

Figura 10

Parte de la dedicatoria del Ars Magna

THE GREAT ART[1]

or

The Rules of Algebra

by

GIROLAMO CARDANO

Outstanding Mathematician, Philosopher and Physician
In One Book, Being the Tenth in Order of the Whole
Work on Arithmetic Which is called the Perfect Work

In this book, learned reader, you have the rules of algebra (in Italian, the rules of the coss[2]). It is so replete with new discoveries and demonstrations by the author — more than seventy of them — that its forerunners [are] of little account or, in the vernacular, are washed out. It unties the knot not only where one term is equal to another or two to one but also where two are equal to two or three to one. [3]It is a pleasure, therefore, to publish this book separately so that, this most abstruse and unsurpassed treasury of the entire [subject of] arithmetic being brought to light and, as in a theater, exposed[4] to the sight of all, its readers may be encouraged and will all the more readily embrace and with the less aversion study thoroughly the remaining books of the Perfect Work which will be published volume by volume.[5]

Fuente: Libro Ars Magna (Cardano, 1968, p. 25)

Una parte de este dato puede traducirse como: “Es un placer, por lo tanto, publicar este libro para que, este tesoro abstruso e insuperable de todo [el tema de] la aritmética, sea sacado a la luz” (Cardano, 1968, p. 25). Por medio de este dato es posible rastrear lo que enuncia el autor Cardano al publicar su trabajo sobre la aritmética, y a su vez, nos encamina a continuar indagando por el contexto en el cual ese autor escribe este libro. Indagar el contexto en el que acontece este escrito es clave para identificar las condiciones, y así comprender los alcances de la aritmética de la época en la cual fue escrito el *Ars Magna*, analizando lo que se refiere Cardano al exaltar “la aritmética como tesoro”.

CAPÍTULO 4. Acercamiento a tres condiciones de posibilidad para el surgimiento y aceptación del concepto de raíz par de un número real negativo

Después de realizar una lectura crítica de los documentos recolectados en la matriz de sistematización, reconocimos tres categorías emergentes para identificar algunas de las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo*, categorías nombradas de la siguiente forma: "Las transformaciones en las ciencias en el cambio de época para concebir la raíz par de número real negativo", "La solución de ecuaciones que se derivaron de las competencias entre matemáticos" y "Las demostraciones: relaciones entre la geometría y el álgebra"

4.1 Las transformaciones en las ciencias en el cambio de época para concebir la raíz par de número real negativo

En el Renacimiento, el espíritu religioso comenzó a tomar unos matices diferentes que llevaron al quiebre de varias creencias de la religión católica, esto se verá reflejado en los planteamientos de matemáticos y pensadores de la época. Autores como Lutero[35] y Cardano serán algunos ejemplos de lo anterior, y lo presentaremos más adelante.

4.1.1 Las transformaciones en Europa

Durante el Renacimiento, el espíritu de la fe católica comenzó a verse comprometido por autores como Martín Lutero y sus preocupaciones por obtener paz interior al cuestionarse sobre los castigos divinos impuestos por la iglesia. Lutero reflexionó sobre los actos impuros religiosos más que sobre la propia fe. Tales actos cometidos por los representantes de la iglesia fueron la corrupción y el deseo de lucro económico.

Como consecuencia de lo anterior, comenzaron a gestarse acciones rebeldes en contra de la potestad de los representantes de la iglesia católica. Lutero escribió en el año 1517 sus 95 tesis, en

[35] Martín Lutero (1483-1546). Teólogo, filósofo y fraile católico agustino de nacionalidad alemana. Reconocido por impulsar la Reforma protestante en Alemania e inspirar la rama de la religión denominada luteranismo.

las cuales expuso muchos de estos graves problemas de su tiempo (Rojas[36], 2002). Debido a estas tesis de Lutero, se llevó a cabo lo que hoy conocemos como reforma católica, donde se dividió a los fieles en dos: religiosos y protestantes. Concordando con Rojas (2002), de esta división pudieron derivarse otras formas de estar y comprender el mundo, diferentes a las visiones de la iglesia católica; visiones resultadas de las acciones de manifestación y de las voces de oposición. Así, el acto de pensar y de producir conocimiento ya no fue exclusivo de la iglesia.

En cuanto al conocimiento matemático, en la época del Renacimiento en Europa comenzaban a difundirse, por medio de las traducciones, algunos documentos sobre matemáticas; entre ellos, *Los Elementos* de Euclides y *Secciones Cónicas* de Apolonio (Vera, 2021). Resaltamos en dichos libros la rigurosidad y el tratamiento dado a la geometría de dos dimensiones; se muestra en ellos un mayor avance de la geometría que de la aritmética.

Podemos decir que en el Renacimiento las formas de pensamiento y la difusión del conocimiento se encontraban en un momento de cambio. Las formas de racionalizar y pensar el mundo ya no estaban regidas por el miedo generado por el castigo divino, sino que empezaron a posibilitarse nuevos caminos para el avance de la ciencia. En ese sentido afirma Bustamante[37] (2010), en el Renacimiento hubo "[…] un proceso por el cual, el pensamiento básicamente teológico de la edad media cede terreno ante una crítica racional y científica que progresivamente logra descalificarlo y derrotarlo a través de las acusaciones de autoritarismo y superstición" (p. 62).

4.1.2 El gran arte de Cardano

En este periodo del Renacimiento en Europa se encontraba el matemático, astrólogo y médico Gerolamo Cardano. Cardano demostró a través de sus escritos, especialmente en sus autobiografías, ser una persona fiel a la religión católica, espiritualmente arraigado a sus creencias tanto astrológicas como divinas, sin dicotomizar ni dudar de su fe. En sus autobiografías describió su vida a partir de sus creencias, sus experiencias y sus altibajos emocionales; en ellas también reafirmó su fe y expuso las motivaciones para la escritura de sus trabajos con la idea de inmortalizar su conocimiento (Cardano, s.f).

---

[36] Luis Rojas Donat (1959- actual). Licenciado en historia, Doctor en historia de nacionalidad chilena.
[37] Teodoro Bustamante Ponce (1953 - actual). Licenciado en Antropología, Doctor en el medio ambiente natural y humano y las ciencias sociales.

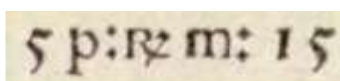
Los conocimientos de Cardano sobre astrología tuvieron peso en las decisiones y movimientos de su vida. Algunas de esas decisiones (acertadas o no) fueron tomadas con base en su propia interpretación de sus sueños; otras basadas en las lecturas que hacía de los astros ligados a su carácter religioso. Para Cardano, ese carácter era un don celestial que lo iluminaba continuamente. Para Cardano, el acto de inmortalizar su estancia en el mundo se dio a través de sus escritos. Para él, inmortalizar su presencia a través de una estatua o pintura se degradaría, pero, por el contrario, la divulgación escrita de su conocimiento seguiría presente en la continuación del trabajo por otros matemáticos (Cardano, s.f).

Uno de sus trabajos matemáticos más reconocidos fue el *Ars Magna*, escrito en 1545. En este libro, el autor planteó la teoría de ecuaciones, junto con los desarrollos de otros matemáticos como del Ferro[38], Ferrari[39] y Tartaglia[40] sobre sus métodos de solución de ecuaciones.

Según Rosales (2010), Cardano "fue el primero en escribir en una obra impresa la raíz cuadrada de un número negativo" (p. 131). Este autor hizo uso de esas raíces y las denominó "torturas mentales". En la figura 11 se observa este uso con la notación matemática propia de la época.

Figura 11

Notación de Raíz cuadrada de un número real negativo


5 p:℞ m: 15

Fuente: *Libro Ars Magna* (Cardano, 1545, p. 66)

[38] Scipione del Ferro (1465-1526). Matemático de nacionalidad italiana. Reconocido por su trabajo en los métodos de solución de ecuaciones de tercer grado.
[39] Lodovico Ferrari (1522-1565). Matemático de nacionalidad italiana. Reconocido por descubrir la solución general de la ecuación de cuarto grado. Colaboró con Cardano en la demostración de la fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado.
[40] Niccoló Fontana, mejor conocido como Tartaglia (1499 - 1557). Matemático e ingeniero de nacionalidad italiana. Inventor de un método, similar a la fórmula para ecuaciones cuadráticas, para resolver ecuaciones de tercer grado.

En esta notación, identificamos que la *p* significa "mas" (*piú* en latín), que el signo ℞ significa raíz (*radix* en latín) y que la *m* significa "menos" (*mino* en latín). De esta manera, la expresión anterior, en la notación matemática actual sería:

$$5 + \sqrt{-15}$$

Sin embargo, a diferencia del trabajo de otros matemáticos antecesores de Cardano, quienes proponían, por ejemplo, teorías para la geometría de dos dimensiones, el trabajo de este autor no incluyó la teorización de la *raíz par de un número negativo*. Por lo anterior, creemos que en el libro *Ars Magna* no se profundiza teóricamente sobre este tipo de raíces.

Ore[41] escribió en el prefacio de la traducción del *Ars Marga* que Cardano "fue conducido hacia soluciones que involucraban la raíz cuadrada de cantidades negativas, hasta cierto punto mostrando cómo manipularlas, a pesar de lo que él llamó su naturaleza "sofisticadas"" (Cardano, 1968, p. xvi). Es así como el matemático, en su *Ars Magna*, usó estas raíces sin comprender la naturaleza de las mismas. En nuestra interpretación, pensamos que el espíritu aventurero del matemático y astrólogo lo hizo atreverse a poner esas "torturas mentales", proponiéndole al lector suponer que eran ciertas. El trabajo para matemáticos, posteriores a Cardano, sería continuar explorando estos números.

En los escritos de Cardano se exaltó el conocimiento que un lector pudiese adquirir al acercarse al *Ars Magna*. Si bien parece una postura pretenciosa por parte del autor, podría interpretarse como el misticismo, propio de él, y del contexto de la época. Así lo expresa, Cardano, según Mazur (2008):

> Como este arte [el Ars Magna] sobrepasa toda sutilidad humana y la lucidez del talento de los mortales, y es un verdadero don y una prueba muy clara de la capacidad de la mente humana, cualquiera que se aplique a él creerá que no hay nada que no pueda entender. (p. 49)

Seguramente, a partir del trabajo de Cardano, quien utilizó la *raíz par de un número real negativo*, aun desconociendo la naturaleza de esta y su fundamentación teórica, es posible que otros

[41] Oystein Ore (1899 - 1968). Matemático de nacionalidad noruega. Reconocido por su trabajo en teoría de anillos, conexiones de Galois, teoría de grafos e historia de las matemáticas. Además, realizó una de las traducciones del libro *Ars Magna*.

matemáticos, en la posteridad, las teorizaran en un campo numérico. A propósito de esto, Rosales (2010) expresa que "como en otras situaciones, un rigor extremo habría bloqueado todo avance, hacer caso omiso se revela productivo" (p. 134). Es decir, Cardano, siendo flexible frente al conocimiento matemático que para la época había adquirido, dejó un insumo para la teorización, a posteriori, de los números imaginarios dentro del campo de los números complejos, aunque esto tardará más de tres siglos. Dado que el *Ars Magna* posibilitó el trabajo operativo con los números imaginarios, "se abren dos vías para los imaginarios, la del cálculo y la de la representación geométrica" (Rosales, 2010, p. 133); vías que, posteriormente, serían de utilidad para el avance de las matemáticas y sus aplicaciones.

4.2. La solución de ecuaciones que se derivaron de las competencias entre matemáticos

Las competencias entre matemáticos eran comunes en la época de Cardano. Ellas aumentaban el respeto y prestigio de estos ante la comunidad. Además, aquel matemático que saliera victorioso en las disputas obtendría un lucro económico y la satisfacción de ganar (dado su conocimiento y astucia). De igual forma, además de la victoria lograda por el ganador, en las competencias se propiciaba avances en las matemáticas.

En el libro *Ars Magna*, Cardano relató una competencia entre los matemáticos Tartaglia y Fiore[42], alumno de del Ferro. Competencia creada para encontrar algún método de solución para ecuaciones de tercer grado.

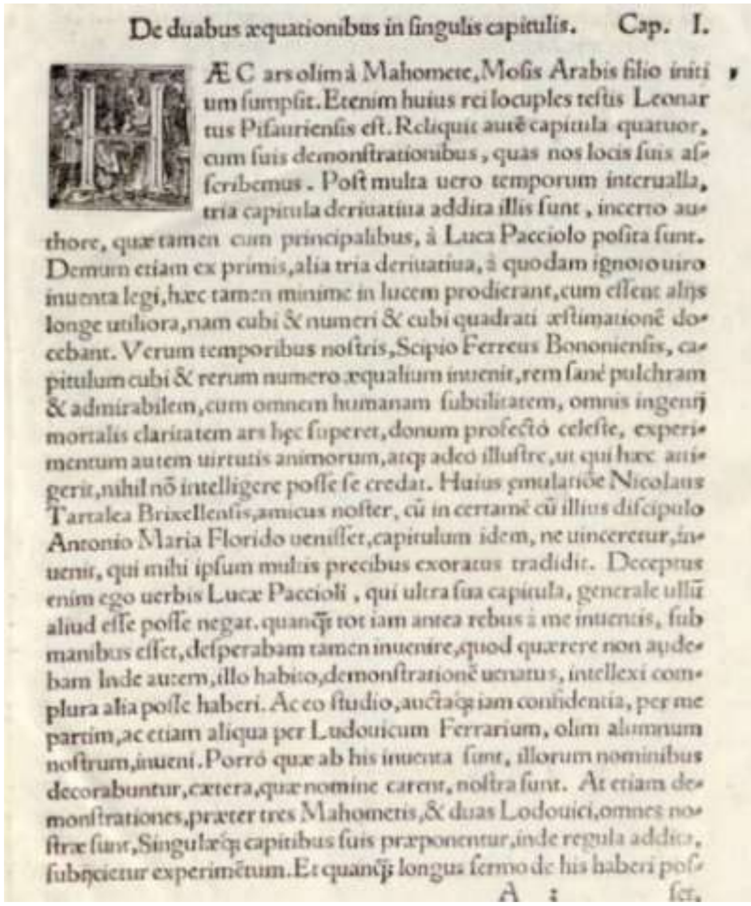
Cardano cuenta en el prefacio del *Ars Magna* (ver figura 12) el momento en el cual Tartaglia le hace entrega del método por él hallado:

> En imitación de él [Scipione del Ferro], mi amigo Niccolo Tartaglia de Brescia, queriendo no quedarse atrás, resolvió el mismo caso [método para solución de ecuación cúbica] cuando estuvo en una competencia con su alumno [de Scipione], Antonio Maria Fior, y, conmovido por mis muchas súplicas, me las dio. (Cardano, 1968, p. 8)

[42] Antonio María Fiore (Siglo XV - XVI). Matemático de la escuela de Bolonia, de nacionalidad italiana. Reconocido por su participación en disputas relacionadas con el desarrollo de resolución de la ecuación de tercer grado.

Figura 12

Parte del capítulo 1, Ars Magna


De duabus æquationibus in singulis capitulis. Cap. I.

HÆC ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim huius rei locuples testis Leonartus Pisauriensis est. Reliquit autẽ capitula quatuor, cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis ascribemus. Post multa uero temporum interualla, tria capitula deriuatiua addita illis sunt, incerto authore, quæ tamen cum principalibus, à Luca Pacciolo posita sunt. Demum etiam ex primis, alia tria deriuatiua, à quodam ignoto uiro inuenta legi, hæc tamen minime in lucem prodierant, cum essent alijs longe utiliora, nam cubi & numeri & cubi quadrati æstimationẽ docebant. Verum temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi & rerum numero æqualium inuenit, rem sané pulchram & admirabilem, cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenij mortalis claritatem ars hęc superet, donum profectò celeste, experimentum autem uirtutis animorum, atq; adeò illustre, ut qui hæc attigerit, nihil nõ intelligere posse se credat. Huius æmulatiõe Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cũ in certamẽ cũ illius discipulo Antonio Maria Florido uenisset, capitulum idem, ne uinceretur, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego uerbis Lucæ Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullũ aliud esse posse negat, quanq; tot iam antea rebus à me inuentis, sub manibus esset, desperabam tamen inuenire, quod quærere non audebam. Inde autem, illo habito, demonstrationẽ uenatus, intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaq; iam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alumnum nostrum, inueni. Porrò quæ ab his inuenta sunt, illorum nominibus decorabuntur, cætera, quæ nomine carent, nostra sunt. At etiam demonstrationes, præter tres Mahometis, & duas Lodouici, omnes nostræ sunt, Singulæq; capitibus suis præponentur, inde regula addita, subijcietur experimẽtum. Et quanq; longus sermo de his haberi posset,

A 2

Fuente: Libro Ars Magna (Cardano, 1545, p. 3)

De igual forma, exponiendo el contexto en el cual Tartaglia encontró el método de solución de la ecuación de tercer grado, en el *Ars Magna*, Cardano reconoce en el primer capítulo el trabajo de otros matemáticos, que también habían aportado a sus desarrollos teóricos sobre los métodos de solución de ecuaciones. Aquellos matemáticos fueron Scipione del Ferro y Ludovico Ferrari.

Ore, en el prefacio del *Ars Magna*, expuso la disputa entre Cardano y Tartaglia, tras la publicación del método de solución de ecuaciones de tercer grado: este texto "[…] además de ser un destacado logro matemático, también es famoso como la causa directa de una de las peleas más violentas en la historia de la ciencia" (Cardano, 1968, p. IX). Disputa que se dio, dado que Tartaglia había dado a Cardano el método, bajo juramento de este último, con la condición de que no fuese publicado.

En otro apartado del prefacio, Ore relata que la situación en la que se encontraba comprometido Cardano, al faltar a su juramento con Tartaglia, podría apaciguarse un poco con el posterior descubrimiento de Cardano y Ferrari:

> En 1543, cuando el Ars Magna se acercaba a su finalización, Cardano y Ferrari habían viajado juntos a Bolonia y desde Annibale Delle Nave recibió permiso para inspeccionar los papeles de del Ferro. Aquí encontraron la solución original, anterior a la de Tartaglia en veinte años, y sostuvieron que este era el descubrimiento reproducido en el Ars Magna. (Cardano, 1968, p. XII)

Este descubrimiento en los apuntes de del Ferro quizá apaciguarían la tensión entre los matemáticos implicados, dejando en evidencia un método de solución de ecuaciones de tercer grado, desarrollado bajo otro contexto. Para Cardano no fue problema publicar lo que ya sería público a través de las competencias, pues el trabajo de los matemáticos en las competencias se abriría ante los ojos de otros académicos.

Mazur (2008) describe el momento de tensión por el que pasó Tartaglia para encontrar su método a la solución de ecuaciones de tercer grado, lo cual lo llevo a derrotar a Fiore:

> En el registro escrito que dejó Tartaglia, describe la agonía por la que pasó antes del concurso: apenas la noche anterior descubrió por su cuenta el precioso método que su rival [Fiore] había aprendido de Dal Ferro y, como resultado, dice Oystein Ore, “Fiore sufrió una humillante derrota”. (p.107)

Para Cardano, el compendio de los métodos para solucionar ecuaciones, desarrollados por él y otros matemáticos, fue un aporte teórico para el álgebra y fue considerado su mayor legado para el desarrollo de las matemáticas. Al solucionar algunos problemas matemáticos que implicaban ecuaciones de diferentes grados, Cardano encontró soluciones que involucraban las enigmáticas *raíces pares de números reales negativos.*

Otro asunto importante que se expone en el *Ars Magna* es la necesidad de hacer problemas cercanos y llamativos para el lector. Esa necesidad se convirtió en una dificultad cuando se debía involucrar las cantidades negativas. Al respecto de esto, Cardano (1968) señala que “Como en las conferencias del Abacista, los problemas a menudo se visten con un atuendo práctico para hacerlos más atractivos para los lectores” (p. ix). Sin embargo, intentar establecer la relación entre la vida práctica y *la raíz par de un número real negativo*, no fue fácil, por el contrario, se vio como “irreal”.

4.3. Las demostraciones: relaciones entre geometría y álgebra

Hemos entendido que según la época donde se produzca el conocimiento matemático el significado de las demostraciones ha de ser diferente. Al respecto, Crespo[43] (2007) expresa que “Las demostraciones han sido la manera de validar los conocimientos matemáticos, son, en consecuencia, también construcciones socioculturales” (p. 548). El uso de la *raíz par de un número real negativo* ha estado relacionado con demostraciones que involucran la solución de ecuaciones.

4.3.1 Demostraciones en el Ars Magna

Existen demostraciones en las matemáticas que se basan en algunos argumentos y conjeturas que no tienen desarrollos teóricos, pero que aceparlos (provisionalmente) posibilita el desarrollo de otros conocimientos matemáticos.

Para el siglo XV, Vera (2021) expresa que “[…] la Geometría alcanzaba ya un gran desarrollo mucho más importante que el de la Aritmética” (p. 24); desarrollo que así se mantuvo en el siglo XVI. En el *Ars Magna*, por ejemplo, podemos ver como la simbología de las operaciones algebraicas aún era limitada (ver figuras 10 y 12). En el Renacimiento, la notación algebraica y algunas demostraciones matemáticas tuvieron apoyo en la geometría y la prosa escrita (Radford[44], 2006).

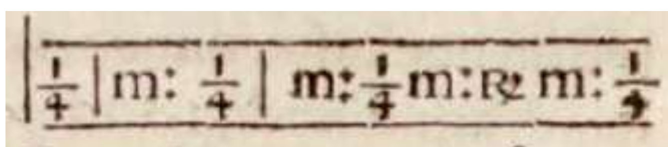
En el siglo XV, años antes de la publicación del *Ars Magna*, no existía la demostración como la comprendemos en la actualidad, como lo menciona Vera (2021), “[…] la ausencia, casi generalizada, del concepto de demostración, entendida ésta en el sentido de exposición rigurosa probatoria de la regla o algoritmo ofrecido para la resolución de determinado problema” (p. 28). De allí que la demostración en matemáticas en la época previa al Renacimiento no estaba estrictamente ligada a la rigurosidad del caso matemático a resolver.

[43] Cecilia Rita Crespo Crespo (s.f). Doctora en ciencias en matemática educativa.
[44] Luis Radford (s.f - actual). Doctor en ciencias de la educación de nacionalidad guatemalteca, radicado en Canadá. Sus investigaciones se basan en la escuela de pensamiento histórico-cultural, abarcando aspectos tanto teóricos como prácticos del pensamiento, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el Renacimiento, a partir de la invención de la imprenta en siglo XV, el simbolismo algebraico comenzaba a expresarse y a esclarecerse con la escritura. Según Radford (2006), el paso del álgebra oral al álgebra escrita (a partir del libro impreso) "condujo a una especialización del simbolismo algebraico. Lo que Confería una *autonomía* a los símbolos que antes ellos no tenían" (p. 517). Siendo así, con los símbolos escritos se podía comprender el significado de cada operación a realizar, de manera tal que el lector al tomar un problema, por ejemplo, como los escritos por Cardano, identificara y comprendiera por sí mismo el conocimiento que el autor trataba de plasmar. En ese sentido, agrega Radford (2006) expresa que "si bien los símbolos mantuvieron las huellas de las formaciones culturales anteriores donde habían desempeñado el papel de abreviaturas, el libro impreso modificó la sensibilidad de la conciencia inquisitiva del Renacimiento" (p. 517). Para la época, aunque se conservaron algunas abreviaturas de palabras para indicar operaciones, el símbolo en sí mismo era más que solo una abreviación. El símbolo, además de indicar una operación a realizarse entre números, hacía pensar sobre el algoritmo y sus posibles propiedades. En las figuras 11 y 13 mostramos la notación de la *raíz par de un número real negativo,* extraída del libro *Ars Magna*.

Figura 13

Notación Algebraica


$\frac{1}{4}$ | m: $\frac{1}{4}$ | m: $\frac{1}{4}$ m: ℞ m: $\frac{1}{4}$

Fuente: Libro Ars Magna (Cardano, 1545, p. 66)

La *m* simboliza "menos", el signo ℞ significa "raíz", que al estar acompañada de la letra *m* significa *raíz cuadrada de una fracción negativa*. De esta manera, la expresión anterior, en la simbología actual sería:

$$\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \; -\frac{1}{4} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$$

En el *Ars Magna,* Cardano realiza las demostraciones indicando al lector lo que él está razonando. En el capítulo 37 del mismo libro, titulado "Sobre reglas para postular un negativo [para el uso de raíces pares negativas]”, Cardano presenta “reglas”, “problemas” y “demostraciones” donde se hace necesario el uso de *raíces pares de números reales negativos*. En la figura 14 se puede ver la” Regla II”

Figura 14

Regla II del Ars Magna

RULE II

The second species of negative assumption involves the square root of a negative. I will give an example: If it should be said, Divide 10 into two parts the product of which is 30 or 40, it is clear that this case is impossible. Nevertheless, we will work thus: We divide 10 into two equal parts, making each 5. These we square, making 25. Subtract 40, if you will, from the 25 thus produced, as I showed you in the chapter on operations in the sixth[3] book, leaving a remainder of -15, the square root of which added to or subtracted from 5 gives parts the product of which is 40. These will be $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$.

Regla II

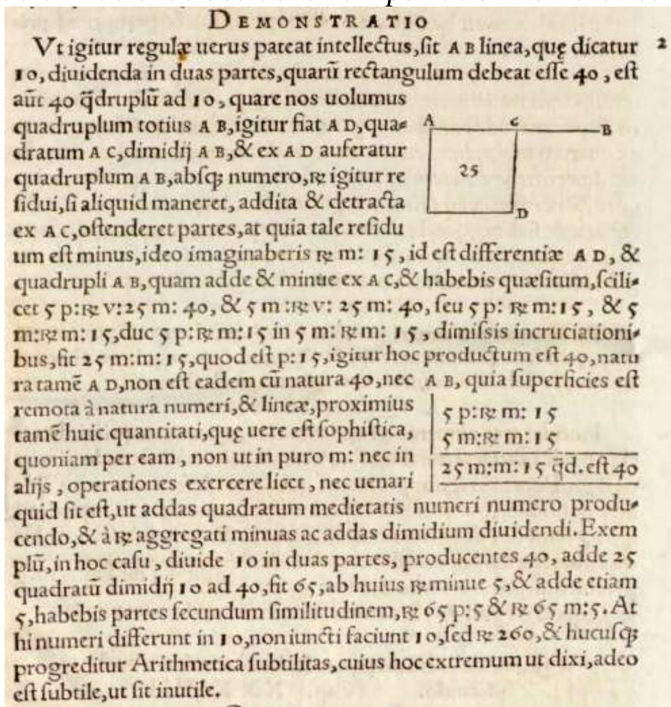
La segunda especie de suposición negativa implica la raíz cuadrada de un negativo. Daré un ejemplo: Si se dijera: Dividir 10 en dos partes cuyo producto es 30 *o* 40, es evidente que este caso es imposible. Sin embargo, trabajaremos así: Dividimos 10 en dos partes iguales, haciendo cada una 5. Estas las elevamos al cuadrado, haciendo 25. Restamos 40, si quieres, de los 25 producidos, como te mostré en el capítulo sobre las operaciones en el sexto libro, dejando un resto de -15, la raíz cuadrada que sumada o restada a 5 partes cuyo producto es 40. Estas serán $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$

Fuente: Libro Ars Magna (Cardano, 1968, p. 219)

En las figuras 15 y 16 puede verse la demostración (en latín e inglés, respectivamente) de la “regla II”.

Figura *15*

Demostración haciendo uso de la raíz par de un número real negativo



DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quæ dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarũ rectangulum debeat esse 40, est autẽ 40 quadruplũ ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, ℞ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, seu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamẽ A D, non est eadem cũ natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamẽ huic quantitati, quæ uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplũ, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratũ dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed ℞ 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.

5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 qd. est 40

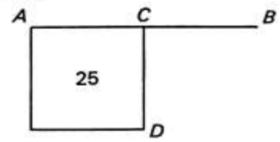
Fuente: Libro Ars Magna (Cardano, 1545, p. 66)

Figura 16

Demostración haciendo uso de la raíz par de un número real negativo

DEMONSTRATION

In order that a true understanding of this rule may appear, let AB be a line which we will say is 10 and which is divided in two parts, the rectangle based on which must be 40. Forty, however, is four times 10; wherefore we wish to quadruple the whole of AB.



Now let AD be the square of AC, one-half of AB, and from AD subtract $4AB$, ignoring the number.[4] The square root of the remainder, then — if anything remains — added to or subtracted from AC shows the parts. But since such a remainder is negative, you will have to imagine $\sqrt{-15}$ — that is, the difference between AD and $4AB$ — which you add to or subtract from AC, and you will have that which you seek, namely $5 + \sqrt{25 - 40}$ and $5 - \sqrt{25 - 40}$, or $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$. Putting aside the mental tortures involved,[5] multiply $5 + \sqrt{-15}$ by $5 - \sqrt{-15}$, making $25 - (-15)$ which is $+15$. Hence this product is 40. Yet the nature of AD is not the same as that of 40 or of AB, since a surface is far from the nature of a number and from that of a line, though somewhat closer to the latter. This truly is sophisticated,[6] since with it one cannot carry out the operations one can in the case of a pure negative and other [numbers]. [Likewise,] one cannot determine what it [the solution] is by adding the square of one-half the [given] number to the number to be produced and to or from the square root of this sum adding and subtracting half that which is to be divided.[7] For example, in this case you could divide 10 into two parts whose product is 40; add 25, the square of one-half of 10, to 40, making 65; from the square root of this subtract 5 and also add 5 to it; you then have parts with the likeness of $\sqrt{65} + 5$ and $\sqrt{65} - 5$. [But] while these numbers differ by 10, their sum is $\sqrt{260}$, not 10. So progresses arithmetic subtlety the end of which, as is said, is as refined as it is useless.

Fuente: Libro Ars Magna (Cardano, 1968, p. 219)

Para esta demostración, Cardano se apoyó en una representación geométrica de la situación. En el camino del desarrollo de la demostración él se vio en la obligación de suponer cierta la *raíz par de un número real negativo*. Igualmente, el matemático le propuso al lector suponer que dicha raíz es cierta. "[…] como tal resto es negativo, tendrás que imaginar $\sqrt{-15}$ (...) dejando a un lado las torturas mentales involucradas [imaginar $\sqrt{-15}$]" (Cardano, 1968, p. 219). De esta forma, Cardano logró dar el resultado en términos de dos números desconocidos en el conjunto de los números reales:

Respuesta: $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$

Aun aceptando este resultado, haciendo uso de "torturas mentales", Cardano reconoció que dicho resultado no era de la misma naturaleza de los números tomados en la regla inicial (10, 30 o

40); ese resultado tampoco estaría relacionado con la representación geométrica que apoyaba la demostración. Esto es, Cardano reconoció que el resultado demostrado estaba por fuera del conjunto de los números reales.

Del ejemplo anterior, donde se obtiene como resultado $\sqrt{-15}$, deducimos que para hacer uso de la *raíz par de un número negativo* es necesario que el lector acepte lo desconocido, sin entrar en discusiones sobre la veracidad de los argumentos ni operaciones allí realizadas.

Sin embargo, tras el trabajo de Cardano exponiendo la *raíz par de un número real negativo* y posibilitando la operatividad de raíces como $\sqrt{-15}$, autores como Euler[45], en 1768 y De Morgan[46], en 1831, negaron la posibilidad de la existencia de la *raíz par de un número negativo* en la solución de ecuaciones de segundo grado. Para Euler todos los números existentes y posibles eran mayores, menores o iguales a cero y denomina la *raíz par de un número negativo* como números imposibles o que solo existen en la imaginación. Además, Euler al realizar operaciones entre raíces cuadradas en su libro *Álgebra*, cometió algunas inconsistencias en dichas operaciones ya que usó propiedades del productor de raíces pares de números reales de igual manera en el producto de *raíces pares de números reales negativos*. Para De Morgan una solución negativa (por ejemplo -3) al igual que la *raíz cuadrada de un número real negativo* era inconsistente o absurda (Kline[47], 1992).

En el camino de evadir la *raíz par de un número real negativo*, emerge en los matemáticos la necesidad de hacer uso de esta al aceptar y estudiar su naturaleza, pues muchas respuestas al solucionar ecuaciones de grado n quedaban inconclusas sino se aceptaba dicha raíz. El uso de este tipo de raíz sirvió para demostrar el llamado "Teorema Fundamental del Álgebra".

4.3.2 El uso de la raíz de un número real negativo en el Teorema Fundamental del Álgebra

[45] Leonhard Euler (1707- 1783). Matemático y físico suizo. Introdujo la letra *i* para hacer referencia a la unidad imaginaria.

[46] Augustus De Morgan (1806-1871). Matemático y lógico británico nacido en India. Reconocido por formular las llamadas leyes de De Morgan.

[47] Morris Kline (1908 - 1992). Profesor de matemáticas, escritor de historia, filosofía y enseñanza de las matemáticas, de nacionalidad norteamericana.

El Teorema Fundamental del Álgebra tiene diferentes formulaciones, una de ellas indica que: *Todo polinomio real puede expresarse como producto de factores*[48] *lineales y cuadrático.* Para su demostración, algunos matemáticos se encontraron en necesidad de contemplar nuevos conocimientos, ya que, al momento de operar con raíces pares, se encontraron con números negativos en su radicando, algo imposible desde el conjunto de los números reales con su definición de raíz par. Algunos matemáticos como Gauss[49] en el siglo XIX acepta soluciones de ecuaciones que no pertenecen al conjunto de los números reales para hacer uso de ellas en su demostración del Teorema Fundamental del Álgebra.

Gauss fue reconocido como un "niño prodigio", pues sus talentos, entre ellos su agilidad para las matemáticas, comenzaron a verse desde su temprana edad. En diferentes momentos de su vida académica Gauss demostró el Teorema Fundamental del Álgebra. La primera demostración fue realizada por el matemático en su tesis doctoral escrita a sus 22 años en 1799. En ella demostró el teorema enunciado de la siguiente manera "todo polinomio con coeficientes reales puede factorizarse como producto de polinomios de primer y segundo grado" (Gutiérrez, 2005, p. 96).

En la primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, el autor hace uso de la *raíz par de un número real negativo* como parte imaginaria de un número complejo. En ese sentido, Gutiérrez (2005) señala que, aunque Gauss "manejaba sin ningún tipo de prejuicios los números complejos, no los utilizaba explícitamente en esta demostración, dado que no eran todavía de uso corriente entre los matemáticos de la época" (p. 97). Así, el trabajo realizado por Gauss comienza a trazar un camino para las matemáticas en la solución de ecuaciones en la cual es posible hacer uso de las *raíces pares de números reales negativos*; camino que comenzaba a hacerse paso dos siglos antes por el matemático Cardano desde le *Ars Magna*, pero sin mayor desarrollo para la época.

En el trascurso de su vida académica, Gauss realizó dos demostraciones más del Teorema Fundamental del Álgebra. Al respecto de estas posteriores demostraciones, Gutiérrez (2005) expresa que "sólo en las dos últimas (1816 y 1849) utiliza expresamente los números complejos" (p. 97). De esta forma, analizamos en el tiempo transcurrido entre la primera demostración

[48] Dichos factores no necesariamente pertenecen al conjunto de los números reales, por tal razón, en el proceso de demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, será necesario la aceptación de *raíces pares de números reales negativos.*
[49] Johan Friedrich Carl Gauss (1777- 1855). Matemático, astrónomo, y físico alemán. En su trabajo doctoral Gauss demostró el Teorema Fundamental del Álgebra haciendo uso de *Raíces pares de números reales negativos* como números complejos.

realizada por Gauss y las dos posteriores la aceptación y el uso en el sentido operativo de la *raíz par de un número real negativo.*

Complementando lo anterior, de acuerdo con Kline (1992) "[…] como [Gauss] dependía esencialmente del reconocimiento de los números complejos, éste fortaleció la posición de estos números" (p. 787). El fortalecimiento de los números complejos, particularmente una parte de ellos que es la *raíz par de un número real negativo* se puede contemplar, por una parte, desde el uso en el contexto matemático para dar completa solución a ecuaciones de n grados; por otra parte, desde su aceptación a través de la validación de demostraciones matemáticas. A partir de esto, empieza a trazarse un camino en las matemáticas que posibilitaría la extensión del conjunto de los números reales hacia el conjunto de los números complejos, donde se comprende la *raíz par de un número real negativo* como su parte imaginaria.

No obstante, pese a su trabajo, el mismo Gauss reconoce que su demostración del Teorema Fundamental del Álgebra no es rigurosa, "Simplemente llama a su demostración de 1799 "nueva"" (Mir[50], 2005, p. 4), tomando como contraste el trabajo demostrativo de anteriores matemáticos a este Teorema. Podría pensarse que la "falta de rigurosidad" en el trabajo de Gauss puede deberse al hacer uso de *números negativos al interior de una raíz par*, números que no fueron bien vistos por otros matemáticos. Así, el autor se encontró para el siglo XIX en la situación de realizar su demostración haciendo uso de lo "desconocido" teóricamente, similar vivencia a la que enfrentó Cardano en el siglo XVI.

Además, en su demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, Gauss fue uno de los que obtuvo la demostración general que consistió "en representar *geométricamente* los números complejos" (Penrose, 1996, p. 86). Cabe resaltar que Gauss no fue el primero en utilizar una descripción geométrica de los números complejos, Wallis[51] había realizado una representación geométrica de estos números 200 años atrás, aunque no con un efecto de mayor reconocimiento a como lo hizo Gauss a finales del siglo XVIII. Sin embargo, Jean Argand[52] fue el matemático

---

[50] Ferran Mir Sabaté (s.f). Licenciado en Ciencias Económicas y Licenciado en Filosofía. Reconocido por su trabajo en historia de las matemáticas.

[51] John Wallis (1616-1703). Matemático historiador de la matemática, filósofo inglés. Fue quien introdujo el símbolo de infinito (∞) y publicó un trabajo sobre secciones cónicas.

[52] Jean-Robert Argand (1768-1822). Matemático autodidacta francés. Describió en 1806 la representación geométrica de los números complejos.

distinguido por la representación geométrica de los números complejos en el llamado "plano de Argand".

En este camino de aceptación y formalización de la *raíz par de un número real negativo* hasta la representación geométrica de un número complejo, podemos visibilizar los movimientos para el reconocimiento de la mencionada raíz como objeto matemático a través de la historia durante de tres siglos. A partir de lo anterior, comenzamos a ver en la historia la relación de la *raíz par de un número real negativo* desde la parte algébrica en la solución de ecuaciones, con una representación geométrica de un número imaginario como parte de número complejo.

Conclusiones y reflexiones

Un indicio para la problemática identificada en este trabajo de grado fue el desconocimiento de la historia de las matemáticas por parte del profesor en el aula de clase de matemáticas que fue observado en la práctica pedagógica, este desconocimiento pudo verse reflejado en los procedimientos algorítmicos, los cuales no respondían necesariamente a la naturaleza de las *raíces pares de números reales negativos*. De allí pretendimos, desde las condiciones de posibilidad, hacer un reconocimiento del surgimiento del concepto matemático desde diferentes momentos y contextos de la historia, posibilitando diversas miradas hacia el mismo objeto.

Al rastrear las condiciones de posibilidad para la emergencia de un objeto matemático, analizamos que no se trata solo de focalizar al objeto matemático como inacabado, sino desde su construcción y lo que ocurre a su alrededor para que este sea construido o producido. En este sentido, la identificación de las condiciones de posibilidad nos adentró a reconocer las dificultades que se presentaron en la historia para comprender los números imaginarios, números que no eran tan “tangibles” como sí podían serlo otros conjuntos numéricos (por ejemplo, los números naturales).

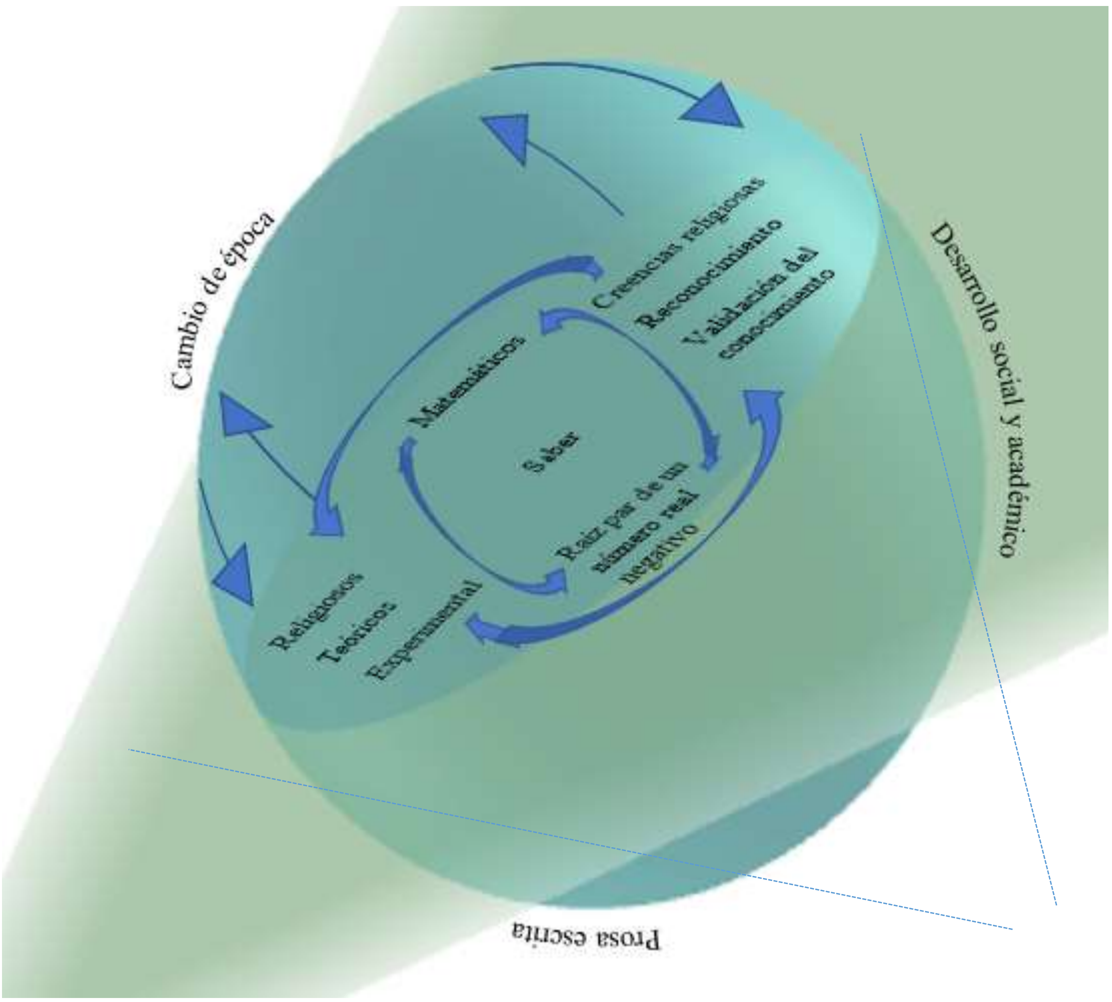
La investigación cualitativa, la historiografía como metodología en complemento con un enfoque hermenéutico-interpretativo, nos posibilitó la escritura de la historia desde el análisis de las prácticas y discursos sociales que permean a los sujetos en la construcción de un conocimiento (en este caso matemático). A través de la historiografía fue posible rastrear y escribir sobre la historia a la luz de los acontecimientos, comprendiendo la *raíz par de un número real negativo* desde diferentes momentos de la historia.

El archivo construido en esta investigación por 14 documentos entre fuentes primarias y secundarias nos posibilitó el rastreo de información para construcción y análisis de los datos. En las fuentes primarias encontramos e interpretamos la forma de hacer matemáticas, así mismo el contexto en el cual estuvieron inmersos sujetos en los diferentes momentos de la historia. Las fuentes secundarias apoyaron la interpretación de la información de las fuentes primarias y así la investigación se tornó hacia la identificación de un conjunto de acontecimientos y vivencias para el surgimiento del concepto *raíz par de un número real negativo*.

Para dar respuesta a la pregunta que surgió a raíz de la problemática de investigación**,** la cual fue ¿Cuáles fueron las condiciones de posibilidad para el surgimiento del concepto de *raíz par* *de un número real negativo*? y en concordancia con el objetivo de esta investigación, se identificaron algunas condiciones las cuales se reflejaron en tres categorías: *Las transformaciones en las ciencias en el cambio de época para concebir la raíz par de número real negativo*; *La solución de ecuaciones que se derivaron con las competencias entre matemáticos;* y, *Las demostraciones: relaciones entre geometría y álgebra*. En la figura 17 ilustramos la identificación de las 3 categorías emergentes de la investigación.

Figura 17

Ideograma de las 3 categorías emergentes



Fuente: Elaboración propia (2022)

En el ideograma pueden verse la representación de la bola a partir de tres condiciones de posibilidad rastreadas en esta investigación para el surgimiento del concepto de *raíz par de un número real negativo*. Al interior de la bola, en el plano que corta a esta por su centro, ubicamos algunos de los discursos (religiosos, teóricos y experimentales, ubicados en la izquierda) y algunas prácticas sociales (creencias religiosas, reconocimiento y validación del conocimiento, ubicadas en la derecha). Más al interior de la bola se encuentran el sujeto que busca conocer (matemático) y el objeto a ser conocido (*raíz par de un número real negativo*). Todo lo anterior está rodeando al saber. Las flechas en doble sentido representan la dialéctica entre los discursos y las prácticas, y, entre el sujeto y el objeto.

Una de las condiciones de posibilidad fue el cambio de época de la Edad Media hacia el Renacimiento en el contexto europeo. En el ámbito religioso, se vivió en el Renacimiento una "rebelión" en contra de la corrupción de los religiosos católicos, quienes infundían el miedo a los creyentes bajo el castigo divino por tener pensamientos impuros o que estuviesen en contra de lo que estipula la iglesia. La rebelión en contra del miedo impuesto pudo verse reflejada en pensadores de la época en la liberación de culpas, pecados y en las formas diversas de estar y comprender el mundo.

A partir de esa "rebelión" en contra de la iglesia católica, en el Renacimiento hubo una liberación en términos de quiénes eran los detentores del conocimiento. Esto, dado que el conocimiento se liberó de las "jaulas" de la iglesia católica y pasó a ser producido por pensadores y difusores del conocimiento, externos a dicha iglesia. Esa liberación posibilitó el avance de las ciencias y, particularmente, el avance de las matemáticas.

De lo anterior, se refleja en algunos matemáticos como Cardano cambios en las formas de ver e interpretar el mundo, conduciendo a otras formas de hacer matemáticas. A su vez, visualizamos cambios en las formas de hacer ciencia y difundir el conocimiento; esto, dado que comenzaban a ser públicos los desarrollos científicos.

Una segunda condición de posibilidad encontrada fue el desarrollo académico que se producía gracias a las competencias entre matemáticos en Europa; donde matemáticos se enfrentaban para resolver problemas particulares y debían poner en juego su intuición y sus conocimientos para el desarrollo de nuevas teorías. En esas competencias identificamos los apuros de los matemáticos por el triunfo, lo que posibilitó que se desarrollara nuevas teorías matemáticas como los métodos de solución de ecuaciones, en las cuales, fue necesario hacer uso de la *raíz par* *de un número real* negativo. Las competencias entre matemáticos les generaban a los participantes diferentes reconocimientos ante la comunidad académica, lo que, a posteriori, también representaba posibilidades laborales en las universidades y lucro económico.

Una tercera condición de posibilidad relaciona la prosa escrita, usada en las demostraciones que involucraban el álgebra, entendiéndola como la enunciación de palabras para la argumentación en procesos demostrativos algebraicos, con la geometría. Una prosa escrita que tuvo validez según el sujeto que la enunciara. A partir de las demostraciones los matemáticos enunciaron argumentos que, aun con poco fundamento teórico para la época, posibilitaron el uso de la *raíz par de un número real negativo*.

Referencias

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista Ema. Investigación e innovación en educación matemática, 8* (1), 30-46. http://funes.uniandes.edu.co/1516/

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En L. C. Recalde y G. I. Arbeláez (Eds.), *Los Números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico-epistemológica.* (pp. 19-38). Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/20176

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), 4* (001), 45-61. http://funes.uniandes.edu.co/9616/

Bustamante, T. (2010). El pensamiento sobre la naturaleza en el Renacimiento. *Antropología. Cuadernos de Investigación. 10,* 61-73. Pontificia Universidad Católica del Ecuador. https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/558285

Cardano, G. (s.f). *Mi vida.* (F, Socas, Trad.). Titivillus (Trabajo original publicado en 1576)

Cardano, G. (1545). *Artis magnae. Sive de regulis algebraicis.* Petreius. https://n9.cl/hxtc9

Cardano, G. (1968). *Ars magna. Or the rules of algebra.* (R. Witmer., Trad.) Dover. (Trabajo original publicado en 1545). https://es.b-ok.lat/book/574826/7bd374

Castro, E. (2004). *El vocabulario de Michel Foucault. Un recorrido alfabético por sus temas, conceptos y autores.* Universidad Nacional de Quilmes.

Crespo, C. (2007). Demostraciones matemáticas: un recorrido a través de la historia desde una visión socioepistemológica [Conferencia]. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Venezuela.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (2012). *Manual SAGE de la investigación cualitativa* (C. Pavónvol, Trad., Vol. 1). Editorial Gersida, S.A. (Trabajo original publicado en 2011)

Díaz, E. (2005). *La filosofía de Michel Foucault* (3ra. ed.). Biblos.

Freire, P (2004). *Pedagogía de la Autonomía. Saberes necesarios para la práctica educativa.* (G. Palacios, Trad). Paz e Terra SA. (Trabajo original publicado en 1996)

Foucault, M. (2013). *La arqueología del saber*. (A. Garzón, Trad). Siglo XXI Editores México (Trabajo original publica en 1969)

Gutiérrez, S. (2005). Gauss: La revolución de las matemáticas del siglo XIX. *Suma. 48*, 95-98. https://n9.cl/ya3482

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, M. P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). McGraw-Hill. https://n9.cl/1a0cc

Kline, M. (1992). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días* (C. Fernández y A. Garcielago., Trads., vol II). Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1972)

Mazur, B. (2008). *Números imaginados (en especial la raíz cuadrada de -15)* (J, P. Pinasco. Trad.). Libraria. (Trabajo original publicado en 2003)

Ministerio de Educación Nacional, MEN (2006). Estándares básicos de competencias en Matemáticas. https://n9.cl/c1bl

Mir, F. (2005). El teorema fundamental del álgebra. *Universitat de Barcelona*. https://n9.cl/ss2y0

Pardo, T., y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA, 2* (1), 3-15. https://n9.cl/9n9c7

Penrose, R. (1996). *La mente nueva del emperador. En torno a la cibernética, la mente y las leyes de la física* (J. J. García, Trad.). Fondo de cultura económica. (Trabajo original publicado en 1989)

Pérez, D. A. (2014). *Notas de matemáticas.* CEIPA.

Pineda, J. (2020). *Enseñanza y Aprendizaje de los Números Complejos a través de la Historia y la Geometría Dinámica* [Tesis de maestría, Universidad de La Laguna]. RILL. https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/22923

Quiroz, L. (2018). *Números enteros negativos: condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión en el currículo escolar colombiano* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio institucional. https://n9.cl/76khl

Radford, L (2006). The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism [Plenaria]. *Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4.* Suecia. https://n9.cl/avz38

Rodríguez, G., Gil, J. y García; E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa* (2da Ed). Ediciones Aljibe S.L

Rodríguez, L. (2011). *Las matemáticas en la escuela primaria colombiana: Contribuciones a una historia sobre su enseñanza* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio institucional. https://n9.cl/mfty5

Rojas, L. (2002). Tolerancia religiosa en el renacimiento: Carlos v en Augsburgo en 1530. *Theoria. 11*(1), 103-112. https://www.redalyc.org/pdf/299/29901114.pdf

Rosales, A. (2010). De la tortura mental a los fractales. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (23), 129-143. http://funes.uniandes.edu.co/15211/

Ruedas, M., Ríos, M. y Nieves, F. (2009) Hermenéutica: La Roca que Rompe el Espejo. *Investigación y posgrados,* 24(2), 181-201. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3620425

Serna, J. y Pons, A. (2013). *La historia cultural* (2da Edición). Akal.

Vera, A. (2021). Las matemáticas en el Renacimiento. *MVrgetana 72* (144). https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7637450