UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Trabajo investigativo para optar el título de

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemática

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

SITUACIONES PROBLEMA: DINAMIZADORAS DE PROCESOS DE COMUNICACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS ESCOLARES

Sabastian Cano Rojas

Angela María Giraldo Muñoz

Jhon Jairo Múnera Córdoba

Asesor

Medellín, Colombia

2011

AGRADECIMIENTOS

A Valentina Muñoz, Víctor Ospina y Kennedy Dede, por participar de este trabajo de investigación.

A nuestro asesor el profesor Jhon Jairo Múnera por su entrega, perseverancia y paciencia para sacar este proyecto adelante.

A las directivas de la Institución Educativa Republica de Honduras, por abrirnos sus puertas.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN 4

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 6

2. MARCO TEÓRICO 11

2.1 Situaciones problema 11

2.2 Comunicación, interacciones entre personas y significados 16

2.2.1 Lenguaje escrito 20

2.2.2 Lenguaje oral 23

2.2.3 Sistemas de representación 27

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 30

4. ANÁLISIS DE DATOS 41

4.1 Las representaciones icónicas: medios para la construcción de significados 42

4.2 El lenguaje oral: alternativa comunicativa para exteriorizar y expresar razonamientos matemáticos 56

5. CONSIDERACIONES FINALES 72

6. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS 75

7. ANEXOS 79

INTRODUCCIÓN

En el ámbito escolar y especialmente en la enseñanza-aprendizaje de la matemática, existe la fuerte tendencia de la utilización de problemas que requieren simplemente aplicación de algoritmos y, ejercicios rutinarios que no adquieren sentido para los estudiantes, lo que limita en gran medida las posibilidades de expresión y motivación hacia el área.

Enfocarnos en otras formas de aplicar las matemáticas con los estudiantes, requiere propiciar espacios donde interactúen, den opiniones, expongan sus argumentos y compartan significados. Para ello el objetivo de esta investigación es "identificar elementos característicos de una situación problema, desencadenadores de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares."

Para llevar a cabo esta investigación , realizamos la práctica en la Institución Educativa Republica de Honduras, de la ciudad de Medellín, con estudiantes del grado 6º los días sábado, donde la asistencia era voluntaria.

Dado que la investigación es de corte cualitativo, para efectos de análisis optamos por el estudio de casos donde seleccionamos especialmente tres estudiantes a saber: Valentina Muñóz, Kennedy Dedé y Víctor García.

El siguiente trabajo, se encuentra conformado por 5 capítulos, en su orden tratan lo siguiente:

En el capítulo número uno, se encuentra el planteamiento del problema, en el cual se expone el objetivo de la investigación, y la pertinencia y justificación de la pregunta planteada.

En el segundo capítulo, se encuentra el marco teórico, en el cual se hace mención a los referentes teóricos que avalan nuestra investigación, donde se tuvieron en cuenta autores que han realizado estudios sobre situaciones problema, comunicación y lenguaje y, sistemas de representación.

En el capítulo número tres, se hace referencia a la metodología de la investigación, en donde se caracteriza a cada uno de los participantes y los diferentes instrumentos utilizados para la recolección de la información.

En el capítulo número cuatro, se ponen de manifiesto los resultados del análisis de la información recolectada, a través de las categorías que emergieron del estudio, así como sus respectivas consideraciones finales en el capítulo 5, las cuales de alguna manera, abren puertas a futuras investigaciones en el mismo campo y, a que maestros del área retomen lo que consideren para replantear sus prácticas de enseñanza.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, están mediadas por un sin número de procesos y elementos que determinan o no la comprensión de los diferentes conceptos. Normalmente en la escuela, el trabajo de este campo del saber se limita a resolver ejercicios repetitivos y sin una intencionalidad clara.

La comunicación como uno de los procesos que determinan el nivel de comprensión y asimilación que una persona demuestra frente a una determinada situación, es conceptualizada en nuestro país (como un proceso general en la matemática escolar) en la década de los 90 con la aparición de los lineamientos curriculares de matemáticas y unos años más tarde con los Estándares Básicos en Competencias. Gracias a la comunicación, los seres humanos podemos expresar de diversas maneras nuestra forma de pensar y de razonar en el mundo, y por esta razón las matemáticas no son ajenas a este fenómeno; y es que por medio de dibujos, de símbolos propios de la matemática y de la misma palabra, damos cuenta del impacto que ha tenido esta desde los espacios de reflexión, las explicaciones, los propios pensamientos.

En esta línea, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p.74), enuncian que se debe ser capaz de:

Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas:

- *comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.*

- *Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.*

- *Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.*

- *Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.*

Respecto a esto, nos hemos encontrado con que las formas de comunicar en el aula son limitadas y poco motivadas por el docente, ya que es preferible para él que los estudiantes se limiten a solucionar ejercicios rutinarios, así mismo, no se observó la intensión de que los alumnos comentaran su manera de razonar, de pensar y de sentirse en dichas actividades, lo cual desvanece en grandes proporciones una de las fuentes de análisis más importantes que se puedan tener, puesto que cuando un grupo determinado se enfrenta a un problema, pueden surgir diferentes puntos de vista frente a la interpretación del mismo.

Los Principios y Estándares para la Educación Matemática del año 2000, presentan la comunicación como una parte importante de la educación matemática, ya que mediante ésta las ideas llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento en la medida que entra en juego el lenguaje matemático, discusión al compartir significados y rectificación al dar validez con argumentos convincentes. Se hace énfasis en que la comunicación apoya el aprendizaje de los conceptos matemáticos, porque cuando el alumno reflexiona, escribe, pregunta, diagrama y comparte sus conclusiones, genera todo tipo de conexiones y relaciones entre lo que sabe y lo que está a punto de aprender.

También se proyecta el lenguaje como una herramienta muy poderosa, mediante la cual, la comunicación de las ideas matemáticas permiten la articulación, aclaración, organización y consolidación de las diferentes maneras de pensar.

Además de los dos trabajos presentados anteriormente de corte didáctico, presentamos a continuación, dos trabajos de corte investigativo, uno correspondiente al nivel de pregrado y otro al nivel de maestría, que se relacionan de alguna manera con los procesos comunicativos en las clases de matemáticas escolares.

En un primer lugar, el trabajo de investigación presentado por Múnera, Ríos, Álzate & Jaramillo (2009) llamado, *"Variable: Dialéctica entre lenguaje natural y lenguaje simbólico*", en el cual, se plantean aspectos relacionados con la construcción del concepto de variable, haciendo énfasis en las relaciones entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, caracterizando el primero como las expresiones cotidianas que son empleadas por los estudiantes para referirse a diferentes situaciones, y el segundo tomado como todas las representaciones que pueden hacerse de un objeto, sin acudir al lenguaje natural.

En un segundo lugar, el trabajo de maestría titulado, "*La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria",* por Ramírez (2009), se enfoca en el debate actual que hay acerca de las diferentes concepciones de competencia y, en forma específica como los maestros de secundaria potencian la competencia comunicativa en el desarrollo de las competencias matemáticas.

Con respecto a las situaciones problema nos centramos en los aportes realizados por el profesor Jhon Jairo Múnera Córdoba, en varios de los artículos publicados por él, y entre otros, en los aportes del profesor Orlando Mesa y María del Carmen Chamorro.

Ya que para hablar de comunicación matemática es necesario hacer referencia al lenguaje, los textos fundamentales que apoyaron esta investigación fueron:

- "El lenguaje matemático en el aula" (Pimm, 1990): Donde expone algunos aspectos sobre las formas de comunicar y exponer las matemáticas.

- “Pensamiento y lenguaje” (Vygotsky, 1987): donde se hace referencia a las relaciones existentes entre el pensamiento y el lenguaje y los diferentes enfoques que se le han dado hasta la época. Además, se hace un estudio de los procesos sicológicos superiores y de su relación con el aprendizaje.

- “La comunicación en clase de matemáticas” (Ordoñez, 2009)[1]: toma como elemento fundamental la comunicación y el diálogo, donde juega un papel importante la expresión oral y escrita.

Con respecto a los sistemas de representación que hacen parte importante de las formas de comunicar, centramos la mirada en

- “*Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas* (Rico, Castro & Romero, 2000), donde mencionan la importancia de representar las ideas matemáticas para hacerlas comunicables.

- “Jerome seymour bruner:de la percepción al lenguaje” (Aramburu Oyarbide) el cual hace referencia a la transformación de la información por medio de tres sistemas de representación.

A partir de este rastreo bibliográfico, pudimos estructurar el presente trabajo de investigación en pro de aclarar aspectos importantes de las formas de comunicación de los estudiantes.

Mientras realizábamos las observaciones en el centro de práctica, la Institución Educativa República de Honduras, conversábamos y nos impregnábamos del ambiente del aula generado por los estudiantes y el maestro cooperador Carlos Andres, nos encontramos con que son muy pocos los espacios que genera el profesor, para que sus estudiantes comuniquen sus razonamientos, es claro que las clases de matemáticas son poco reflexivas, mostrándoles a los estudiantes una matemática de constructos acabados

[1] Artículo tomado de la Revista nodos y nudos.

y fríos, olvidando que esta disciplina desde su génesis combina principios de indagación, de análisis y reflexión. Nos ha llamado la atención que cuando los estudiantes intentan describir o expresar la manera como se afrontaron a determinada situación problema, algunos de estos se niegan a hablar o a escribir, y cuando alguno se atreve, lo hace con temor y con dificultad para nombrar algunos símbolos y conceptos propios de la matemática; además los que están escuchando o leyendo, no entienden lo que el otro quiere exponer.

En la institución encontramos niños que sobresalen por su desempeño académico, pero también los que no, ya que algunos de ellos no pertenecen a una familia nuclear como ideal institucional, sino a familias fragmentadas por el abandono y por la violencia de la zona donde habitan. Esto nos lleva a concluir que los niños carecen de afecto y atención en algunos casos, por esto no podemos pasar por alto la forma cómo interactúan los estudiantes con sus pares, maestros y con el conocimiento

Queriendo generar espacios para analizar las maneras de comunicar de los estudiantes, aplicamos algunas situaciones problema que nos permitieran evidenciar, como ellos dan a conocer sus razonamientos por medio del sistema de símbolos propios de la matemática, de tal manera que nuestro trabajo de investigación, se enfocará en la siguiente pregunta: *"¿Qué contribuciones hacen las Situaciones Problema a las formas de comunicar de los estudiantes, en los procesos de aprendizaje de matemáticas escolares?"*

Con el ánimo de encontrar elementos que nos permitieran dar respuesta a la pregunta planteada, formulamos el siguiente objetivo***:*** *Identificar elementos característicos de una situación problema, desencadenadores de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares.*

2. MARCO TEÓRICO

Como ya lo hemos expuesto, nuestro trabajo de investigación, lleva por título, "**Situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares",** bajo el interés de "**identificar elementos característicos de una situación problema, desencadenadores de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares".** Precisamente, el insumo para la construcción del marco teórico lo fundamenta la indagación resultante del registro, revisión y consulta de diferentes fuentes documentales e investigativas sobre temas como: situaciones problema, lenguaje, comunicación oral, comunicación escrita y sistemas de representación.

Respecto a las situaciones problema, expondremos las concepciones y perspectivas que sustentan nuestro trabajo de análisis, se hará una distinción entre la comunicación y el lenguaje y, sus relaciones o vínculos, además de una caracterización de la comunicación oral y escrita.

2.1 Situaciones problema

Hablar de situaciones problema, resulta confuso debido a las diferentes concepciones que se tienen acerca de estas, ya que, diversos autores, desde sus elaboraciones y apreciaciones al respecto, han tratado de conceptualizar, de diferentes maneras este enfoque de enseñanza de las matemáticas escolares; no obstante, en adelante expondremos aquellas posturas bajo las cuales fundamentamos las situaciones problema, para efectos de este trabajo:

Desde el trabajo en el aula, el contacto que tiene el estudiante con las situaciones problema, viene influenciado por las experiencias y conocimientos previos que este tenga, desde esta perspectiva:

> *Una situación problema es un espacio para la actividad matemática, en donde los estudiantes, al participar con sus acciones exploratorias en la búsqueda de soluciones a las problemáticas planteadas por el docente, interactúan con los conocimientos matemáticos y a partir de ellos exteriorizan diversas ideas asociadas a los conceptos en cuestión*
> *(Múnera, 2011, p. 181)*

Las situaciones problema, hacen que el sujeto, manifieste de muchas maneras, las comprensiones y significaciones que surgen durante su trabajo o elaboración, pero para ello, es indispensable, además de esto, plantearse diferentes alternativas de acción, estrategias y procedimientos que den cuenta de las interpretaciones y argumentos elaborados.

A propósito de lo anterior D'Amore (2006) describe las situaciones problema como "una situación de aprendizaje, en donde no es posible, por parte de los estudiantes, resolverla por simple repetición o utilización de conocimientos o competencias adquiridas, sino que por el contrario se precisa de la formulación de nuevas hipótesis" (p. 294)

D'Amore, propone este trabajo, como el lugar donde no entran en lugar, las situaciones que requieran la aplicación inmediata y directa de algoritmos, ya que es necesario establecer relaciones directas y no directas, entre las ideas matemáticas y los conceptos, para poner en consonancia lo qué se buscaba con la situación y lo que realmente se alcanzó con esta.

La participación activa de los estudiantes implica aquí, por parte del maestro, propiciar los espacios donde se hagan palpables las relaciones entre el conocimiento matemático y el conocimiento previo, o con el que cuentan los estudiantes, mediados por las situaciones problema.

También, las situaciones problema, son "asumidas como un enfoque que desplaza a un segundo plano la linealidad que ha direccionado la presentación de los contenidos matemáticos, al tiempo que les involucra en espacios de interrelación para procurar a los estudiantes una construcción significativa de tales conceptos" (Múnera, 2007).

Estas concepciones, ponen en manifiesto, las relaciones entre conceptos que las situaciones problema entretejen, ya que lo que se busca es la correspondencia o el vínculo que hay entre las ideas matemáticas que se exploran y su conexión con el saber matemático. Es importante que los conceptos matemáticos, tengan relevancia para el estudiante, a propósito de estos es pertinente recordar lo que plantea Vergnaud, 1998 (citado en Ordóñez, 2009) al respecto:

> *(…) un concepto no se reduce a su definición al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de situaciones y problemas por resolver es como el concepto adquiere sentido para el niño. Son las situaciones las que le dan sentido a los conceptos matemáticos; pero ese sentido no se encuentra en las situaciones mismas. Tampoco está en las palabras y los símbolos matemáticos…*

el sentido es la relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por una situación o por un significante en el sujeto individual, los que constituyen el sentido de esta situación o de ese significante para el individuo. (p. 60)

Para que los conceptos se doten de sentido, es esencial que, las situaciones problema, se encuentren caracterizadas por cuatro aspectos importantes, que detonan su trascendencia, en las clases de matemáticas:

Las situaciones problema cuentan siempre con un contexto que las referencia.

Las situaciones problema develan un interesante campo que se orienta a la consulta por la constatación de la comprensión de los conceptos matemáticos.

Las situaciones problema se ofrecen como un elemento de carácter didáctico.

Las situaciones problema se constituyen en un elemento determinante de la actividad matemática (Chamorro, 2005)

Un aspecto importante que hace parte de lo anterior es señalado por D'Amore (2006) cuando expresa:

Crear situaciones problema requiere tiempo y energía: ¡es necesario estar plenamente convencidos! Se necesita tener un objetivo bien preciso por lograr, al interior de un proyecto bien delineado y claro. Además, el maestro debe conocer bien a sus estudiantes; no sólo en cuanto a las capacidades reales de cada uno de ellos, sino también en cuanto a sus posibilidades creativas, cómo motivarlos, cuáles son sus reales exigencias. (p. 295)

En los lineamientos, ha quedado muy oculto, por quedarse en un contexto de resolución de problemas, la problematización de ideas matemáticas, sin embargo, desde su descripción, o punto de vista curricular, se resaltan las mismas bondades de una situación problema, aunque no hayan hecho alusión directa a estas, así, se expresan dos perspectivas o miradas: "…una es la de solución de problemas como una interacción con situaciones problemáticas con fines pedagógicos, o sea como estrategia didáctica…" y la otra perspectiva como "…la capacidad de resolución de problemas como objetivo general del área…" (p.53)

Estas son dos perspectivas tienen aportaciones directas a las formas de proceder que utilizan tanto maestros como, los estudiantes dentro del aula de clase. En la segunda de las posturas, se observa que planteada como un fin en las clases de matemática, se convierte en objetivo principal, el que los niños sepan resolver problemas; lo que obliga a que los estudiantes sepan expresar con claridad y naturalidad los hallazgos obtenidos al solucionar una situación, bien sea de manera oral o escrita.

Es tarea del maestro, posibilitar los espacios y momentos, para que los estudiantes expresen sus ideas lo mejor posible; ello viene dado por las situaciones problema que plantea, en el sentido de que estas exigen, que el estudiante sea claro y puntual en lo que comparte de sus pensamientos y, en lo que ha encontrado.

Otra de las grandes bondades del trabajo con las situaciones problema, independientemente de las concepciones que se tengan al respecto, radica en el desarrollo de amplios niveles participación. El profesor Ordoñez (2009) sostiene, bajo los resultados de su investigación[2], que procurar por que los niños diseñen, solucionen y

[2] Véase: "La comunicación en clase de matemáticas". Luis Alberto Ordoñez. Nodos y nudos, v 3 N° 26, enero junio de 2009.

compartan, tanto las soluciones como los problemas, posibilita que los chicos participen y se interesen por los temas que se están tratando.

Y no solo se trata del interés de los temas, se habla de la comprensión de los conceptos y significados, y es que una de las perspectivas expuestas desde los Lineamientos curriculares de matemáticas, con respecto a lo que ellos llaman situaciones problema, asume esta estrategia de enseñanza y aprendizaje, como medio para la enseñanza de conceptos.

Las situaciones problema, se presentan como una alternativa para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta ofrece la posibilidad de que los estudiantes desarrollen amplios niveles de participación al poner en juego sus saberes en una red de relaciones que se establecen acompañados de sus compañeros y de su maestro (Múnera, 2007).

2.2 Comunicación, interacciones entre personas y significados

La importancia de la comunicación radica en la inmensidad de posibilidades que oferta a la vida de las personas, la amplia gama de relaciones que propicia, desde el lenguaje, para el intercambio social. Por esta razón, es muy importante diferenciar aquello que se concibe como comunicación y aquello que entiende por lenguaje.

En un primer lugar, se entiende la comunicación como “una negociación y un intercambio de sentido, en donde existe una clara interacción entre las personas ante una realidad cualquiera sobre la que se intenta producir sentido y entendimiento”
(O’ Sullivan, Hartley, Saunders, Montgomery & Fiske, (1995, p.75).

La comunicación, tiene que ver entonces con las maneras de negociar y producir sentido, en tanto las ideas expuestas a consideración, entran en consensos, interpretaciones y refutaciones.

De aquí que sea necesario este aspecto, para la vida en sociedad, para la vida en intercambio y específicamente como lo expresa Vigotsky (1987) “la comunicación sólo es posible concebirla en la interacción que tiene un sujeto con los demás, es decir, cuando ésta está socialmente expuesta a los diversos intercambios que la cultura ofrezca” (p.110)

Así, la comunicación se comporta como el mecanismo, que gracias a los intercambios culturales, permite las relaciones con el otro y desde el otro. Sin embargo, es el lenguaje el que otorga estructura a los significados. De esta manera, el lenguaje como principal mediador de este proceso, también es concebido como la herramienta sicológica más importante, que inicialmente se emplea como un medio comunicativo, pero que más adelante se convierte en una habilidad intrapsicológica y por consecuencia, en un instrumento con el que pensamos y controlamos nuestro propio comportamiento.

El lenguaje es una herramienta que facilita los procesos de comunicación, puesto que conlleva a hacerse representaciones simbólicas del mundo, es una forma de comunicar el pensamiento, de ahí la importancia de propiciar los espacios para la comunicación en la escuela.

En referencia a la comunicación en el aula, Forero-Sáenz (2008), parafraseando a Vigotsky, expresa sobre el lenguaje que “es la herramienta o sistema simbólico que promueve el pensamiento y con la cual se comunican, se intercambian, se construyen conjuntamente significados en el aula” (p.787)

Es necesario reconocer las bondades que en general, nos brinda esta herramienta, y para ello, Godino (2003a), expresa que:

El lenguaje es esencial para:

> *Comunicar las interpretaciones y soluciones de los problemas a los compañeros o el profesor;*
> *Reconocer las conexiones entre conceptos relacionados;*
> *Aplicar las matemáticas a problemas de la vida real mediante la modelización.*
> *Para utilizar los nuevos recursos tecnológicos que se pueden usar en el trabajo matemático. (p. 37)*

El lenguaje es indispensable en la educación matemática, ya que es esencial en la mediación que hace en la formación de los conceptos que se problematizan y en el análisis de los mismos, además permite amplias construcciones en la actividad matemática. Por eso, el lenguaje permite, recrear o representar de diferentes maneras los objetos matemáticos, Godino (2003b) expresa que,

> *La manera de expresar nuestras ideas influye en cómo las personas pueden comprender y usar dichas ideas. Por ejemplo, es diferente la comprensión que tenemos de los números naturales cuando los representamos mediante dígitos o mediante la recta numérica. Algunos autores como Wittgenstein piensan incluso, que sin el lenguaje no hay tales ideas, ya que éstas no son otra cosa que reglas gramaticales de los lenguajes que usamos para describir nuestro mundo (p. 36)*

Las propuestas curriculares de nuestro país y los NCTM a nivel internacional, resaltan también la importancia de la comunicación y el lenguaje en la educación matemática, exponiendo la forma como el profesor debe generar espacios para que esta se dé, y lo que se espera de los estudiantes logren.

Al respecto el MEN (1998) en los lineamientos curriculares de matemáticas mencionan cinco importantes elementos, sobre los cuales, los estudiantes debe justificar y ratificar sus propias ideas y las de los demás:

- *Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.*
- *Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.*
- *Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.*

- *Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.*
- *Producir y representar argumentos persuasivos y convincentes. (p.67)*

En relación con lo que expresan los Lineamientos curriculares, sobre las capacidades de cada alumno frente a los procesos de comunicación, en tanto a las formas de hablar (verbalizar), como a la manera de registros escrito, los NCTM (2000), manifiestan que: "la comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática, y es que a través de esta, los alumnos pueden reflexionar, explicar y argumentar lo que hicieron". (p.64)

También encontramos, de acuerdo a autores como Múnera (2011), los NCTM (2000), MEN (2004) con los estándares en competencias, que cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar con otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes.

Para lograr que los alumnos puedan establecer con claridad los vínculos entre lo que piensan y lo que hacen, es muy importante que la comunicación se dé por varias vías, no simplemente por el camino de la oralidad y de la escritura; según O 'Sullivan. S & otros. (1995), el conocimiento se puede expresar por diferentes medios de comunicación como son la comunicación oral, escrita, corpórea, multimedia, interpersonal, comunicación no verbal.

El lenguaje escrito y el lenguaje oral, por ser los medios de expresión del conocimiento más habituales en la vida cotidiana y en el contexto escolar, serán objeto de análisis y documentación, desde diferentes autores y posiciones teóricas.

Veamos a continuación, de que trata cada una, ya que siguiendo la idea de Vygotsky (1987:137), estas formas de comunicar tienen grandes distinciones, puesto "ni si quiera las dificultades del dominio de los mecanismos de la escritura explican la tremenda diferencia entre el lenguaje oral y el escrito"

2.2.1 Lenguaje escrito

Una forma de comunicar importante en matemáticas está dada por el lenguaje escrito que cumple una función social, al utilizarse códigos y símbolos que se transforman según la experiencia de cada uno, pero que cuando los estudiantes se van apropiando de este, en el caso específico de la matemática tienen un mejor entendimiento de lo que les planteamos.

Con base en lo anterior, en el prólogo realizado por Michael Estubbs, del libro de Pimm (1990) encontramos que:

> *Entre las matemáticas y el lenguaje escrito hay una relación especial: el razonamiento matemático depende de abreviaturas y símbolos y, para su desarrollo, hace falta utilizar la notación escrita, sin que pueda transferirse con facilidad al lenguaje hablado… El aprendizaje de las matemáticas depende, en parte, de aprender a utilizar tales símbolos y el significado de los términos especializados" (p.13)*

No obstante resulta en ocasiones que, para expresar las ideas matemáticas por escrito, es necesario tomar distancia de las apreciaciaciones dadas verbalmente, es decir, no podemos escribir como hablamos ya que este ejercicio requiere de conexiones estructuradas entre las ideas, y es que en palabras de Vygotsky (1987) "En el lenguaje escrito estamos obligados a crear la situación, a representárnosla. Esto requiere una separación de la situación real." (p.138)

En muchas ocasiones el profesor pretende que sus estudiantes escriban con un lenguaje matemático acerca de una situación planteada, sin tener en cuenta que ellos no poseen los símbolos y palabras propias de la disciplina. Por ende no tienen la posibilidad de interpretar más allá, cuáles fueron sus razonamientos, qué relaciones construyeron, cuáles dudas les surgieron y, es de esperarse esto dado que el niño: “al escribir, debe comprender la estructura del sonido de cada palabra, analizarlo, y reproducirlo en símbolos alfabéticos, que debe haber estudiado y memorizado con anterioridad.” (Vygotsky, 1987, p.138)

La dificultad principal radica entonces en los símbolos utilizados en matemáticas y la construcción de sus significados, para procurar que el lenguaje escrito sea claro y comprensible para quien lo lee y para el mismo que lo escribe.

Los niños construyen textos muy espontáneos, desde sus posibilidades pues no conocen con propiedad los códigos, por ello la investigación esclarece esos escritos armándolos de sentido.

Al respecto Pimm (1990) enuncia:

> *La escritura exterioriza el pensamiento, aún más que el habla, al exigir una expresión más exacta de las ideas. Al escribir algo, se convierte en externo a uno mismo, pudiendo ser examinado con mayor facilidad, de modo que la reflexión sobre ello sea también más sencilla, con todas las ventajas de un registro visible, “permanente”. Sin embargo, ese escrito puede consistir en algo que nadie más sea capaz de entender – tal vez no este descontextualizado - . (p.167)*

Al hacer referencia a la permanencia del lenguaje escrito, entendemos que es interesante el volver sobre las ideas y reorganizar lo que quisimos expresar en su momento, de tal manera que al tener unos códigos matemáticos más estructurados, podamos usarlos con mayor precisión haciéndonos entender de los demás más fácilmente. Si bien esto es cierto, también lo es el hecho de que: “cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes. (NCTM, 2000, p.64)

Es importante presentar a los estudiantes la matemática de manera útil, de tal forma que genere en ellos motivación y gusto al escribir al respecto, donde puedan establecer reflexiones y relaciones entre lo que ya sabían y los conceptos nuevos, los NCTM (2000) expresan que cuando los estudiantes dibujan, escriben y utilizan símbolos matemáticos, el aprendizaje de conceptos nuevos está siendo apoyado por la comunicación.

Con base a lo anterior Pimm (1990) clasifica los símbolos utilizados en matemáticas en 4 clases:

Logogramas (signos inventados en especial para referirse a conceptos totales)
Pictogramas (iconos estilizados en los que el símbolo está muy relacionado con el significado)
Símbolos de puntuación y símbolos alfabéticos. (p.199)

Según la clasificación presentada, notamos que en la escuela los símbolos son muy utilizados, lo que proporciona a los estudiantes más oportunidades para comprender e ir mejorando su lenguaje escrito siendo cada vez más complejo.

En las matemáticas escolares, el uso o empleo de los símbolos por parte de los estudiantes, es un asunto complicado, ya que la gran mayoría de estos, son nuevos y abstractos, en ocasiones incomprensibles. Los vínculos entre la experiencia y lo que está a punto de aprenderse o de reorganizarse, son el pilar fundamental para la adquisición de los códigos matemáticos.

Ordoñez (2009) plantea:

> *El manejo de los símbolos y de los signos, lo mismo que la destreza en los algoritmos, no se adquieren de forma inmediata, o después de dos o tres secuencias didácticas. ¡Qué decir de la apropiación de los*

> *conceptos! Es un proceso que involucra al estudiante, su punto de vista derivado de su experiencia, sus vivencias en los contextos donde ha interactuado e interactúa, la práctica constante y la reflexión que haga de ella, y las relaciones que establezca con otros conceptos. (p.60)*

De aquí que reflexionar sobre el trabajo escrito de cada estudiante, puede permitir ver con más claridad las estrategias y razonamientos que aplican, aunque ello no implica que el lenguaje oral quede en un segundo plano, por el contrario es la relación de ambos la que pone de manifiesto todo el proceso de construcción de nociones matemáticas nuevas.

2.2.2 Lenguaje oral

Es conocido que hablar o verbalizar las matemáticas no es muy común ni natural por parte de los estudiantes, sin embargo es imperioso que estos lo hagan con claridad y coherencia ya que esto atiende a cómo es el crecimiento en las formas de justificar los procedimientos y resultados; al respecto los NCTM (2000, p. 64) enfatizan en que los estudiantes deben estar en la capacidad de "comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas."

En la comunicación por medio del lenguaje oral, es necesaria la presencia de un oyente o emisor, mientras que en el lenguaje escrito se da sin un interlocutor que, en este caso sería ausente o imaginario, en este proceso que va desde lo escrito a lo oral, el niño "arranca de una palabra, luego conecta dos o tres, un poco más tarde pasa de frases simples a otras más complicadas, y finalmente a un lenguaje coherente formado por una serie de oraciones; en otras palabras, va de una fracción al todo" (Vigotsky, 1987, p. 166)

De este modo las conexiones generadas, gracias a la comunicación y el lenguaje oral, están mediadas por la estructuración de las formas de razonar y de pensar que los estudiantes presentan ante los demás, la manera de solucionar los problemas y la justificación coherente de los mismos; para esto es muy importante tener en cuenta la manera como escenifican la situación mediante diagramas, símbolos matemáticos, entre otros registros.

Al hablar en estos términos tendremos en cuenta tres ejes fundamentales, que a continuación trataremos, al hacer referencia a este tipo de comunicación, las relaciones: a) estudiante-conocimiento matemático, b) estudiante-estudiante, y c) estudiante-maestro. Aclaramos, que para esta última relación se supone un proceso de comunicación biyectivo, por ello no se considera de manera independiente la relación maestro-estudiante.

La primera de las relaciones mencionadas, se posibilita cuando el estudiante intenta hacer suyos, los diferentes conceptos y objetos; siendo este proceso mediado por la traducción de un conjunto de signos específicos utilizados de manera convencional para traducir ideas matemáticas a un lenguaje de uso común que muchos han coincidido en llamar lenguaje natural. O lo que en términos de los lineamientos curriculares (MEN, 1998, p.95) se manifiesta como el papel que juega la comunicación en la construcción de vínculos entre nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

Ahora, la segunda de las relaciones (estudiante-estudiante), constituye el primer espacio de evaluación personal al que se expone cada estudiante, pues al intentar comunicar a otros –en este caso sus compañeros- lo que ha comprendido, implica que haya claridad tanto en lo conceptual como en el aspecto de la aplicación de los conceptos matemáticos; "cuando un sujeto educando logra expresar una idea de modo que los otros puedan comprenderla, es cuando él mismo la comprende y la aprehende verdaderamente" (Pimm, citado por Ordoñez. 2008, p. 60)

En la tercera relación referenciada (estudiante-maestro), se construye un espacio propicio para que el estudiante organice y aclare sus propios pensamientos, a través de conversaciones. De esta relación se destacan la importancia de la presencia del maestro, que con su intervención ayuda a que el estudiante refuerce esa conexión que le permite moverse entre el lenguaje natural y el simbolismo propio de las matemáticas; los NCTM (2000) plantean que:

> *Los profesores pueden usar la comunicación oral y escrita en matemáticas para dar oportunidades a los alumnos para: pensar a través de los problemas; formular explicaciones; probar un vocabulario o una notación nuevos; experimentar formas de argumentación; justificar conjeturas, criticar justificaciones; reflexionar sobre su propia comprensión y sobre las ideas de otros. (p. 276)*

Para ello los procesos de socialización se basan en la interacción entre estudiantes y sus pares, con su respectivo maestro; tales procesos son espacios que posibilitan la comunicación dando un matiz de dinamismo a las clases.

El efecto de los procesos de socialización se halla contenido potencialmente en las maneras escrita y oral como se comunican los estudiantes, así pues es la socialización la que convierte a la comunicación en la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.[3]

Es en esencia la creación de un ambiente que permita a los estudiantes, de acuerdo a los lineamientos curriculares:

- Adquirir seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas.
- Se motiven a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreven a exteriorizar.
- Lean interpreten y conduzcan investigaciones matemáticas en clase; discutan, escuchen y negocien frecuentemente sus ideas matemáticas con otros estudiantes y en forma individual y con la clase completa.
- Escriban sobre los hallazgos matemáticos y lleven un diario personal en el que apunten sus conjeturas.
- Hagan informes orales en clase en los que comuniquen a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones gráficas.

[3]lineamientos curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, 1998.

Notemos la importancia de todo lo anterior, que permite la organización de discusiones y el establecimiento de diálogos que son mediados por la comunicación matemática, tendientes a facilitar la comprensión de los conceptos. Por ello el profesor a de motivar a los estudiantes abriendo espacios de participación activa, donde el estudiante ponga en evidencia sus razonamientos y despierte ese interés por ir mas allá de lo que ha encontrado.

> *"En la conversación cada frase está impulsada por un motivo; el deseo o la necesidad conducen a efectuar pedidos, las preguntas a solicitar respuestas, y la perplejidad a pedir una explicación" (Vigotsky, 1987, p. 137)*

Es imprescindible el papel que desempeña el profesor para crear vínculos entre lo que los niños escriben y lo que expresan oralmente cuando vuelven sobre sus hallazgos y sobre sus notas tratando de explicar cómo proceden para hallar las soluciones a ciertas situaciones problema. Al respecto y parafraseando a Chamorro (2003) dice que las investigaciones han demostrado el éxito que tienen los estudiantes al resolver un problema, cuando se les pide que expliquen y verbalicen lo que hicieron, o cuando tratan de representarse el problema mediante imágenes mentales.

Consideramos aquí la necesidad de la socialización para hacer visible el éxito de los estudiantes que menciona Chamorro, por ello reconocemos tres momentos importantes de este proceso. El primero se da al momento en que el profesor hace la presentación de la situación y da las orientaciones correspondientes a sus estudiantes. El segundo momento está dado en las estrategias y diálogos que establecen los estudiantes para acercarse al planteamiento de un primera estrategia que posibilite una solución a la situación problema.

El tercer y último momento, se cree el más importante, acontece cuando todos los estudiantes de la clase junto con el profesor exponen sus ideas, hallazgos, y las estrategias que les permitieron llegar a tales soluciones.

Observará el lector que estos tres espacios descritos en cuanto a la socialización tienen una estrecha conexión con las tres relaciones descritas anteriormente en donde se habló de las maneras de comunicación; esto entra en consonancia con las palabras de Chamorro (2005), sobre el fomento de las capacidades para comunicar:

> *[...] el desarrollo de las capacidades de comunicar y explicar matemáticamente es un aspecto clave de la capacitación matemática de los alumnos ya que:*
>
> - *Apoya y ayuda a desarrollar la comprensión conceptual al ser un contexto en el que se establecen relaciones entre conceptos y procesos.*
> - *Desarrolla las destrezas procedimentales por ser un contexto que favorece la clarificación y justificación de los procedimientos empleados.* (p.18)

La comunicación en la clase de matemáticas, fortalece las conexiones entre diferentes ideas matemáticas, entrelazando lo que cada sujeto hace y los conceptos que se trabajan; es una manera de dar razones y justificaciones de las acciones y actividades realizadas.

2.2.3 Sistemas de representación

Un objeto matemático puede tomar diferentes y variadas representaciones, éstas dan a entender la manera como los estudiantes, están interiorizando o están dando sentido al concepto en cuestión; así, se toma este como un recurso propio de las elaboraciones personales.

En este sentido, se habla de la interacción que generan los estudiantes entre su lenguaje natural y el lenguaje simbólico propio de las matemáticas; lo que en términos de Duval citado por Ordoñez L (2008) se conocería como los diferentes registros semióticos de representación: lenguaje natural, tablas, gráficos, ecuaciones. La interacción entre estos registros hacen posible la comunicación en tanto algunos de estos registros hacen parte también de la naturaleza de las matemáticas, y se supone que el trabajo con ellos de manera adecuada implica saber su significación y con ello su adecuada utilización en el contexto de la situación particular que les demande.

Respecto a esto, y a los diferentes sistemas de representación, Godino & Recio (2005) exponen algunas ideas fundamentales:

> *En cuanto a las entidades notacionales pueden ser cadenas de letras o números, pero también gráficos, diagramas, o incluso objetos físicos. Estos sistemas notacionales desempeñan frecuentemente el papel de "sistemas de representación", esto es de estar en lugar de otra cosa o aspecto de otra entidad. Pero en nuestra modelización, este papel de representación no queda asumido en exclusividad por esta clase de objetos (las ideas matemáticas y las situaciones también pueden ser signos de otras entidades). Asimismo, los sistemas notacionales no tienen solo una valencia semiótica sino que también son instrumentos ostensivos para la actividad matemática. (p.3)*

Estos autores, resaltan la importancia de emplear diferentes sistemas de representación, para la expresión de las justificaciones, así como el empleo de diversos sistemas para extender la comprensión de los objetos matemáticos, mediante sus correlaciones; así estos mismos autores, Godino & Recio (2005), expresan al respecto que:

Habitualmente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado. Hay palabras, símbolos u otros objetos ostensivos que significan o expresan algo, *representan o simbolizan algo que está más allá de ellos mismos, y lo hacen de un modo que es públicamente comprensible (Searle, 1997, p. 76-4)*

Pero, para que los estudiantes, lleven a cabo este tipo de tratamiento, es necesario crear e idear espacios propicios para tal construcción, Santos Trigo (1997) citado por Múnera, (2001) expresa:

> *el promover un ambiente instruccional que motive a los estudiantes a participar activamente en actividades donde el resolver un problema o entender una idea matemática involucre la utilización y exploración de conjeturas, el uso de diversas representaciones, y la comunicación de resultados tanto en forma oral y escrita es un paso inicial para alcanzar tal discusión matemática"*

Los sistemas de representación, que son objeto de empleo por parte de los estudiantes, están íntimamente ligados, a los motivos que el profesor busque e insinúe con las situaciones que platee, aunque no necesariamente estos aparezcan por insinuación, muchos de ellos, aparecen como medio de expresión y divulgación de pensamientos y experiencias.

Cada persona, transforma la información que recibe de acuerdo a sus esquemas previos, en el caso de los estudiantes quienes aun están desarrollando su imaginación, realizan construcciones que en términos de Bruner serian representaciones icónicas, las cuales "Echan mano de la imaginación. Se vale de imágenes y esquemas espaciales más o menos complejos para representar el entorno.(…) es necesario haber adquirido un nivel determinado de destreza y práctica motrices, para que se desarrolle la imagen correspondiente."

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestro trabajo de investigación, fue llevado a cabo a través de la metodología de la investigación cualitativa, que desde Strauss& Corbin (2002), se concibe como "*cualquier tipo de investigación que produce hallazgos a los que no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación"*. (p. 11) Con este tipo de enfoques, se pretende hacer pesquisas sobre la vida de las personas, sus experiencias y emociones, así como las diferentes interacciones que se presentan entre ellos, esta nos permitió ahondar en los diferentes procesos de pensamiento de los sujetos participantes del proceso.

La investigación cualitativa, al querer desentrañar las realidades inmersas en la existencia de los sujetos, en torno a las dinámicas de su vida en sociedad, tal y como lo expresa Martínez (2006):

> *no se trata, por consiguiente, del estudio de cualidades separadas o separables; se trata, pues, del estudio de un todo integrado que forma o constituye primordialmente una unidad de análisis y que hace que algo sea lo que es: una persona, una entidad étnica, social…(p. 66)*

A propósito, Taylor (1987), menciona que desde la investigación cualitativa, se trata de comprender a las personas dentro de su propio marco de referencia, separando por parte del investigador, creencias, perspectivas y predisposiciones; todo en la investigación cualitativa se ve como si pasaran por primera vez, por ello se busca una comprensión detallada de las perspectivas de otras personas.

En la institución educativa Republica de Honduras, encontramos que los días sabados eran realizados unos semilleros desde el grado quinto a once, con la intensión especifica de nivelar los estudiantes; al participar como observantes de estas prácticas, pudimos notar que las actividades realizadas se enfocaban a la aplicación de algoritmos en ejercicios repetitivos donde no había una participación activa de los estudiantes. Por lo tanto y con el interés de propiciar a los estudiantes un espacio diferente, nos propusimos diseñar algunas situaciones problema para los estudiantes del grado sexto y, los días sábados ponerlas en práctica con ellos.

En vista de que en los diferentes encuentros, requeríamos analizar especialmente las formas de comunicar de los estudiantes sobre determinadas situaciones, y teniendo presente que cada uno de ellos, hacía elaboraciones diferentes, nuestro enfoque de investigación fue de carácter fenomenológico-interpretativo[4], el cual tiene como objetivo desde Zichi & Omery (2003), *"descubrir el significado que no se manifiesta de inmediato a nuestra intuición, analizándolo y describiéndolo. Los intérpretes tienen que ir más allá de lo que se da de manera directa"* (p.171)

Desde esta concepción, es imprescindible para este enfoque de investigación, destacar dentro de sus estudios todos aquellos fenómenos, como son precisamente vividos, percibidos y comprobados por el hombre. Con la fenomenología-interpretativa, respetamos, por la ausencia de presiones externas, todas aquellas relaciones que hace el sujeto de lo que vive, porque se trata de las construcciones sociales que ha elaborado y forman parte de él.

---

[4] También conocido, como fenomenología-hermenéutica

Para efectos del análisis de la información, optamos por el método de estudio de casos, el cual desde Yin (1989) citado por Martínez (2006), *"es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado"*. (p.167)

De acuerdo a lo anterior, Stake (1998) propone que *"de un estudio de casos se espera que abarque la complejidad de un caso particular…el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes"* (p.11)

Con el ánimo de poner en práctica todo este enfoque e investigación, nuestra práctica pedagógica fue llevada a cabo en la Institución educativa República de Honduras, ubicada en la zona nororiental de la ciudad de Medellín, en el barrio Santa Cruz la Rosa.

Es de resaltar que en la institución funcionaban semilleros de matemáticas los días sábados, considerados estos como espacios de nivelación, donde se realizaban ejercicios repetitivos de los temas vistos en clase. Al realizar estas observaciones y queriendo fomentar un espacio diferente, llevamos a cabo las prácticas en este mismo día pero con la idea de generar otra concepción de la matemática por medio de situaciones problema, una donde no se viera esta como una disciplina inalcanzable, sino por el contrario, accesible y divertida, de tal forma que hubiera más participación de los estudiantes quienes fueran los protagonistas de su propio aprendizaje.

La población participante de la investigación, estuvo conformada por 20 estudiantes del grado sexto, de los cuales seleccionamos 3, dado que como lo expresamos anteriormente hicimos los análisis por medio del estudio de casos.

Para la selección de estos estudiantes, tuvimos en cuenta las observaciones realizadas durante la lectura institucional, en la cual nos encontramos con estudiantes tanto motivados por el aprendizaje de la matemática como, los que no la entienden y por lo tanto no les gusta, dado que están impregnados de los mitos de la sociedad, que es difícil y que no se entiende y, en los semilleros programados por el colegio, encontramos que respecto a las actitudes y aptitudes hacía el trabajo en el área, las formas de participar y de proceder po parte de los estudiantes ante cada actividad propuesta, además de modos de ver y sentir la matemática desde las situaciones problema plateadas por nosotros.

VALENTINA MUÑOZ, pertenece a un núcleo familiar conformado por papá y mamá, se caracteriza por ser una estudiante que tuvo un rendimiento académico excelente en toda su educación básica primaria, en el área de matemáticas; sin embargo ahora en el grado sexto no muestra motivación por el área, realiza los trabajos y actividades por cumplir y evidentemente a la espera de una valoración cuantitativa por parte del profesor, no obstante, durante las practicas realizadas pudimos apreciar que Valentina, participaba de manera activa durante la realización de las actividades propuestas en cada situación problema, lo que nos llamó especialmente la atención al manifestar aptitudes y actitudes diferentes a las de sus clases de matemáticas en el horario habitual de la institución.

VICTOR OSPINA SEPÚLVEDA, perteneciente a una familia conformada por papá, mamá y una hermana menor, es un estudiante que manifiesta un gusto por realizar las actividades propuestas en cada una de las situaciones, a pesar de ello, notamos como su trabajo está condicionado por lo que hagan los demás, sin mostrar iniciativa alguna, pues siempre espera a que otro de sus compañeros le de luces del camino a seguir en cada actividad. Además confía poco en lo que hace y, ello lo evidenciamos cuando al dar algún aporte busca que nosotros como profesores le demos una calificación, esto último nos remite a que lo que hacen los estudiantes en la escuela siempre está condicionado por una nota, no por el interés de ellos.

KENEDY DEDE LONDOÑO, perteneciente a una familia conformada por mamá y hermanos, es muy ágil e independiente en el desarrollo de las actividades propuestas, es muy concreto y puntual con lo que se pide, ya que se limita a dar respuesta a las preguntas que orientan las situaciones problema, sin presentar mayores análisis e interpretaciones, lo que no permite ver en sus actividades escritas lo que desea expresar y todo ese proceso de razonamiento que lleva a cabo mientras trabaja. Es un líder dentro del grupo, ya que en muchas ocasiones es quien moviliza el trabajo de los demás, emocionándose al encontrar algo que pueda ayudar a solucionar las actividades y, compartiéndolo en voz alta con sus compañeros.

Para obtener la información que nos sirviera para realizar los análisis de nuestro trabajo, y con base en los criterios de la investigación cualitativa, empleamos los siguientes instrumentos para la toma de datos descriptivos:

- Situaciones problema
- Observación participante
- Entrevistas semi-estructuradas y grabaciones sonoras
- Diarios de campo

- **Situaciones problema**

Con estas quisimos propiciar un espacio de reflexión, participación, discusión y de apropiación diferente de los conceptos, ya que permite abrir caminos a la construcción de las ideas matemáticas.

A continuación, se describe las situaciones que nos aportaron en gran medida al surgimiento de las categorías, que hicieron parte del análisis en todo el proceso de la investigación, gracias a las elaboraciones de los estudiantes al respecto

Situación número 1

Un niño queriendo compartir algunos dulces con sus compañeros de grado sexto decide repartirlos en los casilleros de ellos así: dejó una chocolatina cada 9 casilleros, dejó una galleta cada 12 casilleros y una colombina cada 6 casilleros. Es de aclarar que se respeta el orden en que están los casilleros, empezando desde el número uno.

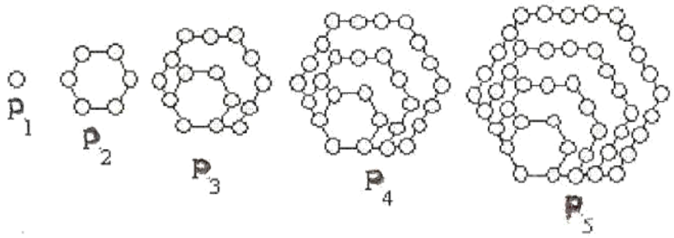
Con esta información resuelva las siguientes actividades:

1. Si en grado sexto hay 120 estudiantes y cada uno tiene un casillero. ¿Cuántos estudiantes encontraron los 3 dulces en su casillero?
2. ¿Los números de los casilleros donde quedaron 3 dulces, qué tienen en común para que en ellos quedaran de todos los dulces?
3. ¿Cuál es el número del primer casillero que queda con los 3 dulces

Esperábamos con esta situación, que los estudiantes identificaran relaciones entre múltiplos y divisores de números naturales.

Situación número 2

Observa detenidamente las siguientes figuras y completa la tabla



[5]

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Cantidad de puntos									

1. Según lo anterior, ¿Qué cantidad de puntos tendría la figura $P_{15?}$
2. ¿Es correcto afirmar que en la figura P_{20} hay un total de 132 puntos? Explica tu respuesta
3. ¿Es posible que si una figura tiene un total de 765 puntos, pertenezca a alguno de los arreglos?

Esta situación fue planteada, con el propósito de analizar las formas de proceder de los estudiantes en la construcción de regularidades a partir de arreglos y secuencias,

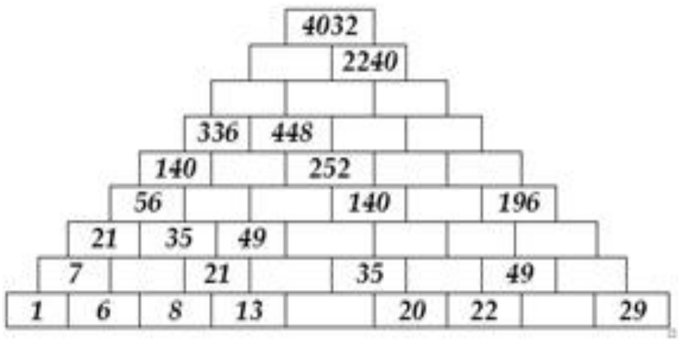
[5] Imagen tomada de http://www.matemangus.com/paginas/pagina_nueva_9c0.htm con modificaciones.

esperando que estos pudieran llegar a una generalización de las relaciones que encontradas, a partir de los datos proporcionados.

Situación número 3

Hemos encontrado una pirámide que tiene dibujados en cada uno de sus ladrillos unos números, creemos que estos números encierran un secreto y que ese secreto está relacionado con otro número. Unos viejos manuscritos dicen que estos números pertenecen a una familia de números bastante especial y que posiblemente este número lleve al mapa que se necesita para encontrar la última de las maravillas de la naturaleza, preservada por los arquitectos de la pirámide.

No ha sido posible encontrar este número porque el paso de los años ha borrado una gran cantidad de estos números. La única pista es que se deben comparar los números de la base de la pirámide con los demás números.



¿Qué caracteriza a los números de la base de la pirámide?

¿Cómo encontraste los números de la base de la pirámide?

¿Qué estrategia empleaste para completar la pirámide?

Esta situación, se planteó con el propósito de que los estudiantes utilizaran relaciones aditivas y multiplicativas entre números, para encontrar un modelo de formación para una secuencia de estos.

Situación número 4

Completa la tabla con base en las figuras:

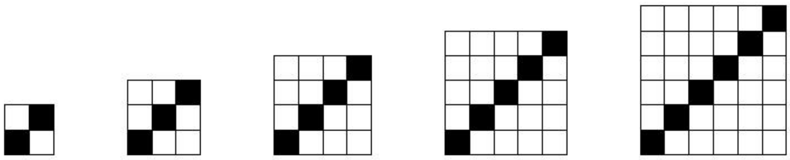


Figura 1 (P1) *Figura 2 (P2)* *Figura 3 (P3)* *Figura 4 (P4)* *Figura 5 (P5)*

Posición de la figura	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P8**	**P10**
Cantidad de cuadrados negros								
Cantidad de cuadrados blancos								

1. Explique una manera de obtener el total de los cuadrados para cualquiera de las figuras.
2. ¿Qué cantidad de cuadrados negros debe tener la figura de la posición 12? ¿Cuántos blancos? Explique el por qué.
3. Si alguien afirma que la figura de la posición 16 tiene 32 cuadrados blancos, ¿es cierto? Explique el por qué.
4. Si una de las figuras tiene 20 cuadrados negros, ¿Cuántos cuadrados blancos tiene que tener?

Con el propósito de observar regularidades y a partir de ello, encontrar una ley de formación para el mosaico de cualquier posición, a través del establecimiento de relaciones, se propuso esta situación. Queríamos prestar atención como los estudiantes hacen uso de los datos que la situación proporciona, para completar la información faltante, y qué métodos siguen según sus razonamientos y estrategias.

- **Observación participante**

Esta nos permitió compartir con los estudiantes, y vivenciar cada una de las realidades sin trastornarlas; familiarizándonos con el lenguaje de ellos, ubicando los datos más significativos que después nos sirvieran para la interpretación de la información, dando testimonio de los hechos observados. La observación participante, nos facultó para entrar en el contexto de los estudiantes sin alguna hipótesis preestablecida o asumiendo, como hecho, algún preconcepto. Según Bunge (1989) la observación en cuanto es un procedimiento se caracteriza por ser:

- Intencionada: porque coloca las metas y los objetivos que los seres humanos se proponen en relación con los hechos, para someterlos a una perspectiva teleológica.
- Ilustrada: porque cualquier observación para ser tal está dentro de un cuerpo de conocimientos que le permite ser tal; solo se observa desde una perspectiva teórica.
- Selectiva: porque necesitamos a cada paso discriminar aquello que nos interesa conocer y separarlo del cúmulo de sensaciones que nos invade a cada momento.
- Interpretativa: en la medida en que tratamos de describir y de explicar aquello que estamos observando. Al final de una observación científica nos dotamos de algún tipo de explicación acerca de lo que hemos captado, al colocarlo en relación con otros datos y con otros conocimientos previos. (p.312)

- **Entrevistas semi-estructuradas y grabaciones sonoras**

Las entrevistas semi-estructuradas, se emplearon con la intensión de aclarar términos, procedimientos y obtener descripciones de lo realizado en cada situación. Las grabaciones sonoras, además de ser un testimonio serio de lo que hablaron los niños, permite que la información no se distorsione. Los relatos verbales, nos brindaron la posibilidad de ahondar todo aquello que no fue lo suficientemente claro, a la hora de ser observable o leído; al respecto, Taylor & Bogdan (1996), expresan que *"las entrevistas cualitativas son flexibles y dinámicas…es un reiterado encuentro cara a cara, dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen los informantes respecto de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como lo expresan con sus propias palabras"* (pág. 101)

- **Diarios de campo**

El diario de campo, permitió hacer un registro detallado y consciente de las experiencias observadas y vividas en cada uno de los encuentros; además nos posibilitó hacer un análisis del ambiente que se respiraba en la realización de las situaciones problema, del lenguaje de los 20 participantes, priorizando los 3 niños del estudio de casos (verbales y no verbales), de los hallazgos, y ponerlo en correlación con nuestras interpretaciones personales, y los aportes de algunos autores.

4. ANÁLISIS DE DATOS

Después de un largo período de indagación , de sentarnos a observar y reflexionar alrededor de los datos construidos desde las producciones, voces y acciones de los estudiantes participantes de la investigación, nos hemos encontrado que en las situaciones planteadas, ellos expresan sus elaboraciones y razonamientos frente a las mismas, sirviéndose de formas propias de representarse las ideas y, de esta manera tratan de comunicar sus formas de explorar y construir soluciones a las actividades planteadas. Es así como emergen dos categorías que en términos de Elliot (1990) reciben el nombre de "conceptos sensibilizadores".

La primera categoría la llamamos **"Las representaciones icónicas: medios para la construcción de significados"**

También, nos dimos cuenta como a nuestros participantes se les dificultaba expresar por escrito, las ideas matemáticas que tienen alrededor de una situación planteada, mientras en las interacciones a través de conversaciones y diálogos, individuales y grupales, es evidente una mejor apropiación de alternativas para argumentar y comunicar sus producciones, las ideas que en esta línea emergieron las hemos aglutinado en otra categoría, que hemos denominado como, **"El lenguaje oral: alternativa comunicativa para exteriorizar y expresar razonamientos matemáticos"**

4.1 Las representaciones icónicas: medios para la construcción de significados

Presentamos a continuación el análisis de dos situaciones que dan cuenta de cómo los participantes, recurren y se valen de la utilización de representaciones icónicas, para expresar la manera como están pensando y reflexionando alrededor de ideas matemáticas implícitas en las actividades planteadas.

Situación número 1

Con el propósito de identificar relaciones entre múltiplos y divisores de números naturales, se planteó a los estudiantes participantes de la investigación, la siguiente actividad:

Un niño queriendo compartir algunos dulces con sus compañeros de grado sexto decide repartirlos en los casilleros de ellos así: dejó una chocolatina cada 9 casilleros, dejó una galleta cada 12 casilleros y una colombina cada 6 casilleros. Es de aclarar que se respeta el orden en que están los casilleros, empezando desde el número uno.

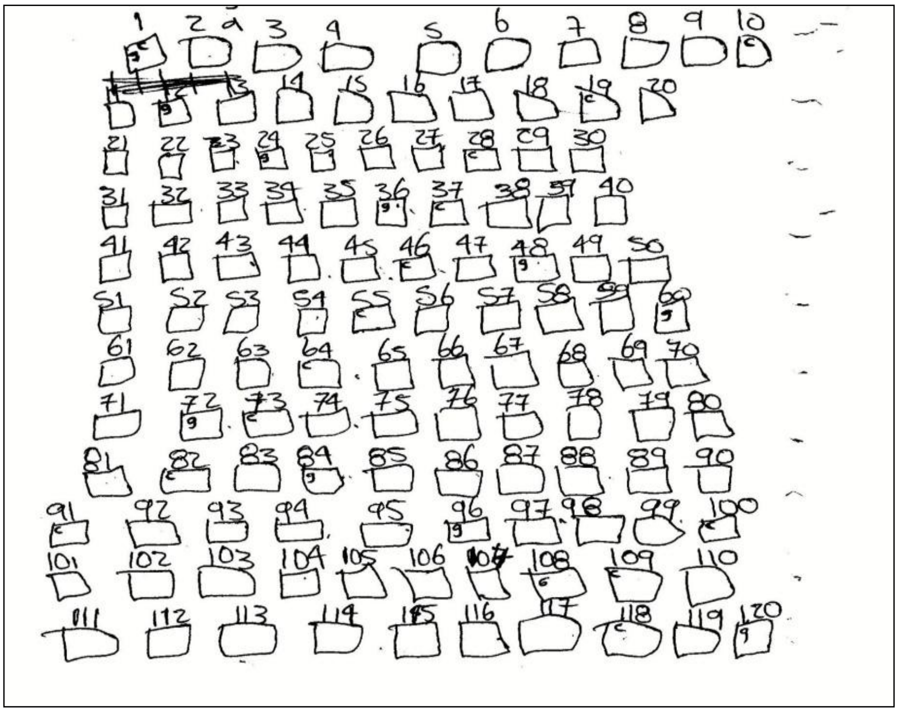
Con esta información resuelva las siguientes actividades:

4. Si en grado sexto hay 120 estudiantes y cada uno tiene un casillero. ¿Cuántos estudiantes encontraron los 3 dulces en su casillero?

5. ¿Los números de los casilleros donde quedaron 3 dulces, qué tienen en común para que en ellos quedaran de todos los dulces?
6. ¿Cuál es el número del primer casillero que queda con los 3 dulces?

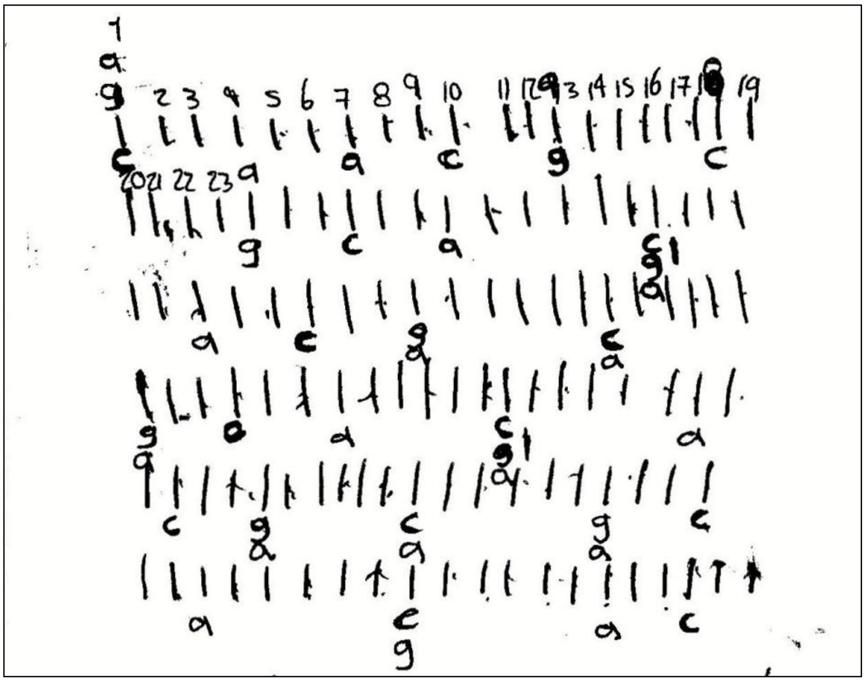
Veamos como procedió cada uno de los participantes, en relación de cada una de las actividades planteadas:

Frente a la primera actividad, Valentina Muñoz, representa la situación de la siguiente manera:



Valentina, solo logro hacerse una imagen de los 120 casilleros, representándolos al parecer por rectángulos, sin embargo, no llega a la solución esperada, ya que desde un principio lleva a cabo un conteo confuso de las reparticiones que se deben hacer, vemos como ella inicia el conteo desde el casillero número 2, esto puede deberse a la interpretación que había hecho del enunciado sin tener en cuenta la parte donde este expresaba que: Es de aclarar que se respeta el orden en que están los casilleros, empezando desde el número uno, parece que entiende que en el casillero número 1 están los 3 dulces y luego empieza a contar desde el casillero número 2. La imagen presentada no deja dilucidar por sí sola la forma como ella procedió frente a esta actividad, sin embargo, hay un primer intento de mostrar lo que pasaba por su mente, ya que fue más fácil hacer una representación de los casilleros, desde sus propias configuraciones.

Para describir que tenían en común los números de los casilleros donde quedaban los tres dulces (segunda actividad), Valentina procede a dibujar los casilleros como líneas, abandonando la representación anterior, pero esta vez ubica los dulces en cada casillero escribiendo la letra inicial del nombre de cada uno de ellos:



Analizando lo que Valentina quería expresar con esta representación, era difícil para nosotros establecer alguna conclusión al respecto, así que con su ayuda tratamos de desentrañar lo que nos quería comunicar, y procedimos de la siguiente manera:

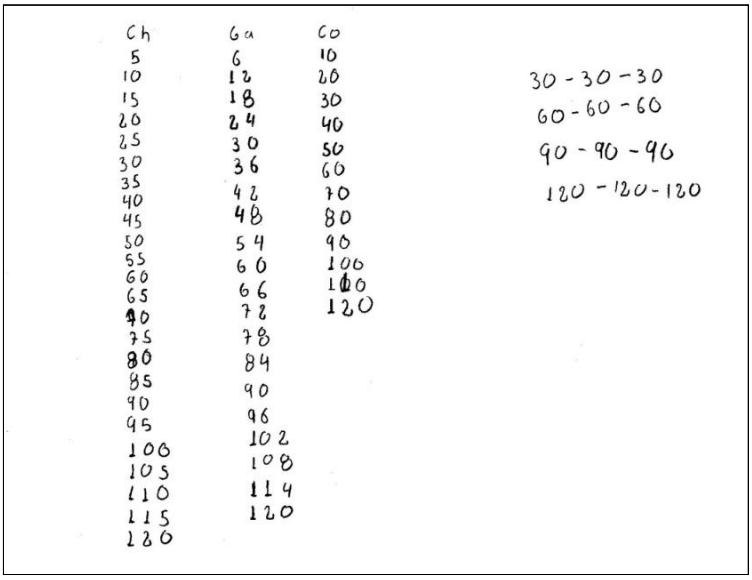
Profesora Ángela: ¿Qué significan las rayitas?
Valentina: Cada rayita es un casillero
Profesora Ángela: Y como ubicamos los dulces en cada casillero
Valentina: En el primer casillero, están los 3 dulces, después cada 9 casilleros está una chocolatina, cada 12 casilleros una galleta y cada 6 casilleros una colombina. Eso dice la actividad!
(Notemos como aquí nos aclara lo que no era comprensible en la imagen de los rectángulos)
Profesora Ángela: Entonces como encontramos en cuantos casilleros tienen los estudiantes los 3 dulces

Valentina: Profe pues miramos en cual rayita aparecen los tres.

Desde esta conversación dilucidamos como Valentina interpretó que inicialmente, los tres dulces se encontraban en el primer casillero, y de acuerdo a esto, empieza a contar desde el segundo de ellos, hallando una ubicación diferente a la que le correspondía a cada dulce, observemos por ejemplo, que la niña ubicó la chocolatina en el casillero número diez, esto se debe a que empezó a contar en el casillero número dos, no obstante, a pesar de lo que representó, Valentina estaba pensando en múltiplos y múltiplos comunes de los números 9, 12 y 6, ya que a través de su representación para expresar la ubicación de los dulces , nos refleja su cercanía con relaciones de multiplicidad.

Respecto a la tercera actividad, "¿Cuál es el número del primer casillero que queda con los 3 dulces?", Valentina manifiesta que el primer casillero en el cual quedan los tres dulces juntos, es en el casillero número 36. Sin embargo, nos quedó la duda de la forma en que encontró este dato, ya que sobre este aspecto no se profundizó en la conversación, es de reconocer que fue un error de nosotros, pues posiblemente hubieran surgido muchas explicaciones que aclararan las formas de establecer relaciones numéricas por parte de Valentina.

Kennedy Dede, nos muestra una manera diferente de dar solución a la situación, él hace una representación numérica de la situación, tal y como lo muestra la siguiente imagen. Puede verse como ubica los dulces chocolatina, galleta y colombina, con variaciones, respectivamente cada 5, cada 6 y cada 10 casilleros.



Vemos como Kennedy opta por hallar los múltiplos del 5, del 6 y del 10 respectivamente, que corresponden a la ubicación de los dulces en los casilleros, no obstante, no es consciente de ello, puesto que al preguntarle qué proceso había empleado dijo: “*en las chocolatinas sumé muchas veces el 5 hasta llegar a 120, y así con los otros dulces.”*

En su trabajo no se evidencia argumento alguno que dé cuenta de lo que significan cada uno de los números encontrados, por lo tanto, la siguiente conversación nos deja ver más claramente lo que él quería expresarnos.

Profesora Ángela: ¿Qué significan las columnas de números de cada dulce?
Kennedy: Cada número es un casillero
Profesora Ángela: ¿Entonces, quiere decir que en la columna de las chocolatinas hay sólo 24 casilleros, en las galletas 20 casilleros y en las colombinas 12 casilleros? (dado que el niño expresa que cada número es un casillero, haciendo el conteo, habrían 24 casilleros en las chocolatinas y así en los demás dulces,…)

Kennedy: Hay no profe! Son 120 casilleros, pero en el casillero 5, en el 10, en el 15 y en todos los otros hay una chocolatina y así pasa con los otros dulces.

Profesora Ángela: ¿qué son el 5, 10, 15, 20, 25,…, los números de la columna de las chocolatinas con respecto al 5?

Kennedy: (Hay un silencio prolongado) son los números de la tabla del 5, los de las galletas son los números de la tabla del 6, y los números de las colombinas son de la tabla del 10, sólo que se pasa hasta el 120.

Profesora Ángela: Muy bien, y ¿Cómo podríamos llamar estos números?

Kennedy: No se profe, ¡son los números de las tablas!

Profesora Ángela: ¿Qué significan los números 30, 60, 90 y 120? (señalándole los números de la derecha de la representación realizada por Kennedy)

Kennedy: En el casillero 30 están los 3 dulces la primera vez, entonces los 3 dulces están juntos 4 veces.

Profesora Ángela: ¿Cómo encontraste esos números?

Kennedy: Son los números que se repiten, el 30 está en las chocolatinas, en las galletas y en las colombinas y eso pasa con los otros números.

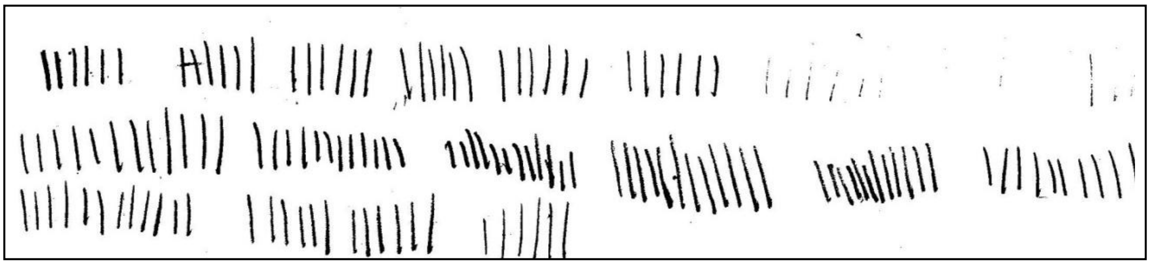
A pesar de que sus representaciones eran columnas de números donde había dulces, también tenía en sus esquemas ideas y relaciones asociadas a múltiplos de un número, ya que para él es más natural hacer listas bajo la idea de "número de las tablas".

Por otra parte, también evidenciamos un acercamiento a la noción de múltiplo común, cuando hace alusión a "los números que se repiten" en las diferentes reparticiones de dulces. Encontramos entonces, como los niños desde sus propios lenguajes, hacen alusión a los conceptos matemáticos involucrados en las situaciones problema planteadas.

Notamos que a pesar de lo anterior, aún no hay una apropiación del lenguaje propio de la matemática, pero, es claro ver que para referirse a múltiplos de un número, el niño utiliza la palabra "tablas de multiplicar" y para múltiplos comunes "números repetidos"; de donde interpretamos, que los significados de las ideas matemáticas que nos quería comunicar están estrechamente relacionados con las formas como se ha representado las situaciones.

Queda claro como en Kennedy, a pesar de mostrar dificultades para comunicarse con los códigos propios del saber matemático, interactúa con el conocimiento desde sus propias formas de representar situaciones que le demandan actividad matemática.

Víctor Ospina, elaboró una representación similar a la de Valentina Muñoz, pero en su intento no se aprecia la ubicación de cada uno de los dulces, pues las rayitas dan cuenta solo de una forma de imaginarse los casilleros, pero que no tiene en cuenta que el total de estos es 120.



Si observamos el dibujo no entendemos por qué separa las rayitas en paquetes o conjuntos, para ello le preguntamos, qué quería decir con esas representaciones de rayitas por grupos y Víctor nos explicó: "*las rayitas de arriba son las colombinas y las de abajo son las galletas*". En efecto, si prestamos atención, podemos ver que en la primera parte hay conjuntos de 6 rayitas, lo que indica que ahí estaría expresando la ubicación de las colombinas, en la segunda fila son de 12 rayitas aquí encontraríamos las colombinas. Pero si miramos la tercera fila notamos que suspendió la realización de sus dibujos, aunque si hacemos el conteo habría más de 120 casilleros.

La construcción de nociones matemáticas, están mediadas por las escenificaciones que hacen los estudiantes y lo que para ellos significan, estableciendo relaciones entre los saberes previos y lo que van comprendiendo a medida que avanzan en sus procesos de razonamiento, interpretación y argumentación de las situaciones problema, en otras palabras como lo expresan Hiebert & Carpenter (1992), citado en Rico, castro & Romero (2000):

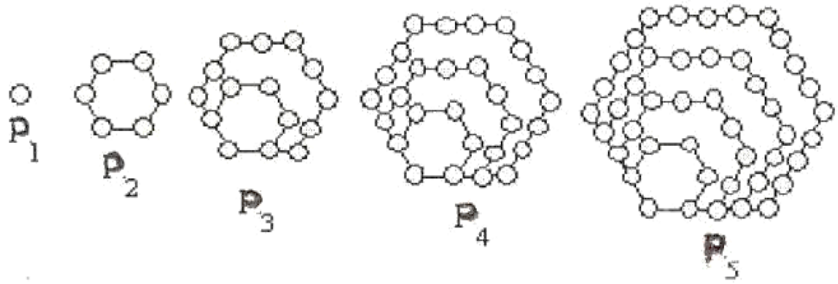
> *Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas. (p. 1)*

Las situaciones documentadas nos dejan ver como las diversas representaciones, realizadas por los niños, hacen posibles las conexiones entre la comprensión de las ideas matemáticas y la construcción de los conceptos y nociones.

Situación número 2

Con el propósito de analizar como los estudiantes hallan relaciones matemáticas para encontrar una ley de formación para la cantidad de puntos de la figura de una determinada posición, se planteó la siguiente situación.

Observa detenidamente las siguientes figuras y completa la tabla

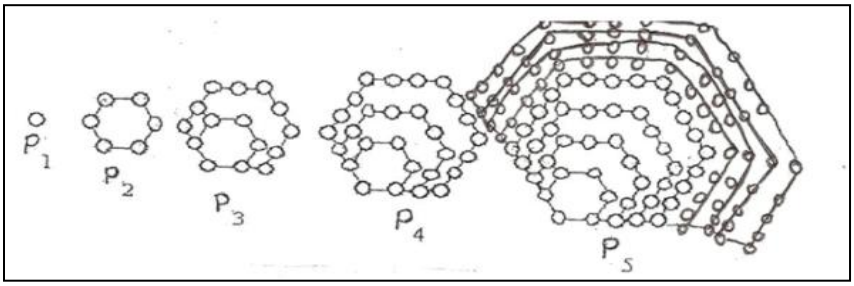


Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Cantidad de puntos									

5. Según lo anterior, ¿Qué cantidad de puntos tendría la figura P_{15}?
6. ¿Es correcto afirmar que en la figura P_{20} hay un total de 132 puntos? Explica tu respuesta
7. ¿Es posible que si una figura tiene un total de 765 puntos, pertenezca a alguno de los arreglos?

Aparecen aquí aspectos importantes en cuanto al surgimiento de las representaciones realizadas por los estudiantes, esta vez, y es muy importante señalar, que el motivo de la situación, daba pie para que los estudiantes llevaran a cabo la representación de los arreglos faltantes y pedidos, sin embargo, veremos como solo uno de los estudiantes, Kennedy Dede, acude a esto, mientras que Valentina y Víctor, trabajan desde arreglos numéricos, veamos cada uno de los trabajos:

Kennedy para completar los datos de la tabla, la cual pide el número total de puntos para las primeras figuras, realiza la siguiente representación, sobre la figura de la posición 5:



Aquí nos muestra como continúa con la ubicación de los puntos para las figuras de las posiciones siguientes y, desde ahí, procedió a completar los datos solicitados en la tabla.

Posición de la figura	P_1 ↓ x1	P_2 ↓ x3	P_3 ↓ x5	P_4 ↓ x7	P_5 ↓ x9	P_6 ↓ x11	P_7 ↓ x13	P_8 ↓ x15	P_9 x17
Cantidad de puntos	1	6	15	28	45	66	91	120	153

Kennedy nos menciona que para hallar la cantidad de puntos totales de cada figura, basta con multiplicar la posición de esta por un número impar; al no ser claro para nosotros, lo que Kennedy quería expresar de sus razonamientos, surge en la propia sesión de clase la siguiente plática:

Profesor Sebastián: *multiplicamos la posición de la figura por un número impar, eso entendemos, entonces podríamos decir que se multiplica por cualquier número impar?*

Kennedy: *no profe, mire es por los números impares en orden! Así, 1-3-5-7…*

Profesor Sebastián: *Muy bien y si nosotros te preguntamos cuántos puntos encontramos en la figura de la posición 67 por ejemplo, por cuál número impar lo multiplicaríamos?*

Kennedy: *Es que si voy a encontrar los puntos de la figura 67 entonces sería, 67+66 y me da 133 y, ese es el número impar por el que vamos a multiplicar.*

***Profesor* Sebastián:** *Entonces explícanos de donde sacaste el número 66 y 67.*

Kennedy: *Profe es que si sumo la posición que me piden con la anterior me da el número impar por el que tengo que multiplicar.*

(Grabación extraída del diario de campo de la sesión del 30 de Abril)

Es importante mencionar que cuando se diseñó la actividad, no conocíamos la forma como Kennedy halló los puntos de los diferentes arreglos, es decir, al encontrar que multiplicar la posición de cada figura con un número impar, obteníamos como resultado la cantidad de puntos que la componen. Esto pone de manifiesto lo valioso de los diálogos con los estudiantes, porque su lenguaje escrito muchas veces no comunica, ni transmite, de la misma manera, como lo puede posibilitar el lenguaje oral mediado por formas propias de representación de ideas matemáticas

Conscientes de la regularidad hallada por Kennedy, al encontrar que los productos, del número de la posición de la figura por un número impar generaban la cantidad de puntos de esta, pone de manifiesto lo valioso de los diálogos con los estudiantes, porque en ocasiones lo que hacen en el papel no da cuenta de todo el proceso realizado que muestran de manera escrita.

Generar espacios de participación donde los estudiantes puedan comunicar sus reflexiones e ideas, es tarea del profesor pues, como lo enuncian los NCTM (2000) estos:

> *Los espacios de participación, ayudan a los alumnos a aprender a utilizar las representaciones de forma flexible y adecuada, cuando los estimulan para que las creen y utilicen al pensar y comunicar. Les ayudan a adquirir habilidad con las representaciones, escuchándoles, preguntándoles y esforzándose por comprender lo que intentan comunicar con sus dibujos o escritos, especialmente cuando se trata de representaciones idiosincráticas, no convencionales*. (p. 288)

Alrededor de esto encontramos que la comunicación, el lenguaje oral y el lenguaje escrito, tienen estrecha relación con los sistemas de representación que emplean los estudiantes y, con los motivos que cada situación problema les insinúa.

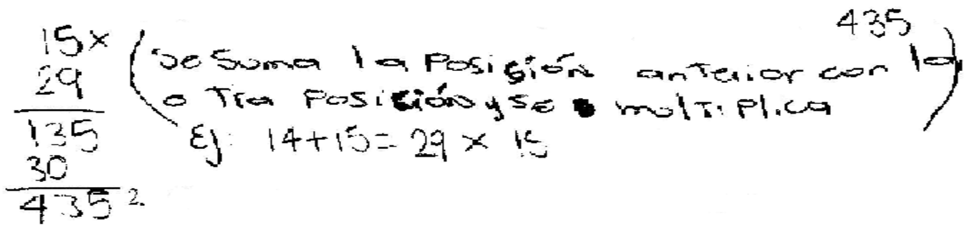
Valentina y Víctor optan por completar la tabla de la siguiente manera:[6]

Posición de la figura	P_1 x1	P_2 x3	P_3 x5	P_4 x7	P_5 x9	P_6 x11	P_7 x13	P_8 x15	P_9 x17
Cantidad de puntos	1	6	15	28	45	66	82	120	153

Ellos encuentran que los números impares juegan un papel importante para encontrar la cantidad de puntos de cada figura, pero si nos fijamos en los datos encontrados, podemos ver que la cantidad de puntos para la figura de la posición número 7, no corresponde, ya que el producto, de 7 **x** 13 **es** 91 y no 82. Sin embargo, esto no indica que no comprendieran lo que habían elaborado, simplemente fue un error cuando hallaron el producto.

[6] Víctor y Valentina, trabajaron juntos esta situación.

Respecto a la actividad número 1 "¿Qué cantidad de puntos tendría la figura $P_{15?,}$ Valentina procede de la siguiente manera:



Lo que hace Valentina en este caso, nos deja ver que tienen la misma idea de Kennedy, mostrando otra forma de construir los números impares, he aquí como las representaciones numéricas permiten a los estudiantes ser más claros y convincentes a la hora de expresar sus pensamientos y compartir sus razonamientos, sobre las ideas y conceptos matemáticos.

Con la intensión de visualizar los razonamientos de Víctor, les pedimos a él y a Valentina que realizaran las actividades cada uno, basándose en la tabla completada por ambos.

Víctor no se atreve a expresar nada con respecto a las actividades de la situación, ni de manera escrita, ni oral, lo que demuestra que aunque haya encontrado una forma de hallar el número total de puntos de las figuras fue en el trabajo con Valentina, y ello no lo aplica en el trabajo individual.

Los estudiantes utilizan sistemas de representación diferentes, pues están mediados por el dominio que tengan de estos y de la matemática como tal, dejando entrever algunas formas de expresión que pasan inicialmente por el pensamiento de ellos, conectándose con una idea que está elaborando alrededor de un significado.

4.2 El lenguaje oral: alternativa comunicativa para exteriorizar y expresar razonamientos matemáticos

Desde las distintas interacciones con los participantes de nuestro trabajo de investigación, notamos que en los registros escritos no era claro lo que los estudiantes querían comunicar del conocimiento matemático, por lo que acudimos a conversaciones, discusiones y entrevistas, que permitieran esclarecer las ideas escritas por ellos, de aquí la primacía de los procesos de comunicación oral.

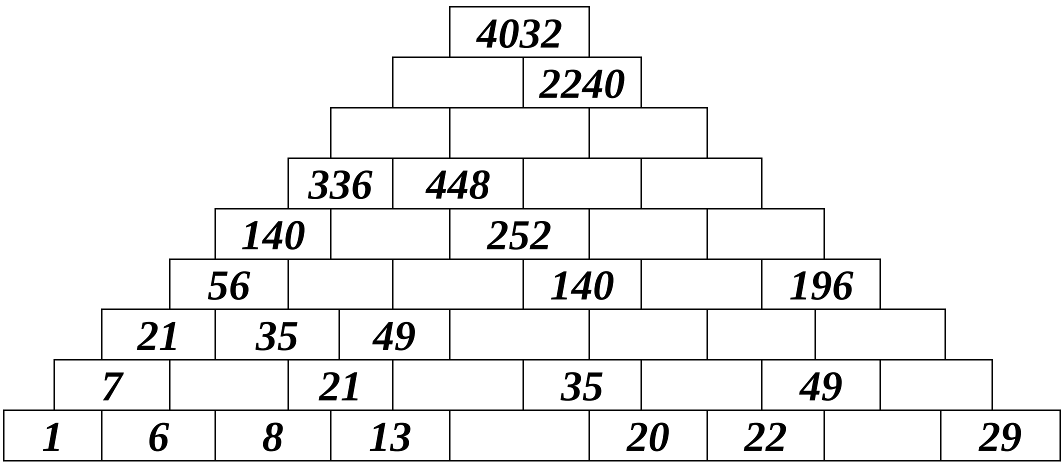
A continuación presentamos 2 situaciones, donde encontramos elementos de análisis que nos permiten mostrar que esto fue una constante en este trabajo:

Situación problema número 3

Con el propósito de que los estudiantes establecieran relaciones de multiplicidad entre diferentes arreglos de números, se les planteó la siguiente situación llamada "*la* *pirámide de los números"*[7], la cual inicia con el siguiente texto:

> Hemos encontrado una pirámide que tiene dibujados en cada uno de sus ladrillos unos números, creemos que estos números encierran un secreto y que ese secreto está relacionado con otro número. Unos viejos manuscritos dicen que estos números pertenecen a una familia de números bastante especial y que posiblemente este número lleve al mapa que se necesita para encontrar la última de las maravillas de la naturaleza, preservada por los arquitectos de la pirámide.
>
> No ha sido posible encontrar este número porque el paso de los años ha borrado una gran cantidad de estos números. La única pista es que se deben comparar los números de la base de la pirámide con los demás números.

A partir de este texto, entregamos una guía con una representación de la pirámide para que la completaran:



Mientras los niños analizaban cómo completar la pirámide, se sintió por un momento un profundo silencio, y al pasar por cada uno de los grupos de trabajo inferimos que los estudiantes no comprendían como proceder, lo que nos llevó a darles elementos a través de una pregunta para orientar la observación de los datos y, generar de alguna manera la

[7] Actividad tomada del proyecto de investigación "Las situaciones problema (Re) significadores de procesos de enseñanza en la clase de matemáticas" cuyos autores son Lina Marulanda y Johnny Cano.

exploración de los números faltantes, pero sólo Valentina toma la vocería:

Profesor Sebastián: *¿Por ejemplo como surge el número 7 en la segunda fila de la pirámide?*
Valentina: *de sumar 6 + 1.*
Profesor Sebastián: *y donde encontramos el número 6 y el 1.*
Valentina: *pues es que el 7 se puede hallar de sumar el 4 + 3, el 5 + 2 y el 6 + 1.*

Grabación sesión del 4 de Junio de 2011

Si bien, lo que expresa Valentina es cierto, no hace referencia a una relación directa entre los números de la base de la pirámide y los números de los otros escalones, ya que describe varias maneras de componer el número 7 a partir de otros números que no se encuentran en la pirámide. Dado esto, realizamos nuevamente la lectura del texto, poniendo especial énfasis en que debían comparar los números de la base de la pirámide con los otros escalones; pero mientras llevábamos a cabo esta lectura, asume la palabra *Jeffrey* y dice en voz alta: "claro *es que el siete sale de sumar el 1 y el 6 que están en la base de la pirámide."* Aprovechando estos aportes de Jeffrey, los invitamos a retomar lo que se veía en la pirámide, es entonces donde se escucha otra voz, con un tono de satisfacción diciendo: *"claro profe es que 8 + 13 es igual a 21"* queriendo mostrar con otro ejemplo, la validez de lo que su compañero ya había dicho.

Estas intervenciones llevaron a reconocer por parte de los demás compañeros del grupo, el tipo de relaciones que se estaban tejiendo y así proceder a completar la información faltante.

Una vez terminada esta primera parte, y sin interesarnos si las soluciones eran las esperadas o no, entregamos las otras actividades, en función de las siguientes preguntas, que debían ser abordadas desde los datos registrados en la pirámide.

¿Qué caracteriza a los números de la base de la pirámide?
¿Cómo encontraste los números de la base de la pirámide?
¿Qué estrategia empleaste para completar la pirámide?

Presentamos a continuación, lo que surgió en cada una de las preguntas en el trabajo realizado por nuestros participantes.

Para manifestar cuales eran las características de los números de la serie de la base de la pirámide, los participantes presentaron las siguientes justificaciones:

Valentina	**Víctor**	**Kennedy**
Se suman los 2 primeros despues el segundo con el tercero el tercero con el cuarto asi sucesibamente lo mismo con la segunda ilera la tercera asta la octava [8]	Q'' todos los números no son iguales porQ'' hay unos mas grandes Q'' otros	Todos los números se suma

Podemos ver que Valentina y Kennedy tenían una mayor aproximación a lo que había que observar en la tabla, ya que ambos aluden a que todos los datos se llenan acudiendo a procesos asociados a la suma.

Para ahondar en lo que Valentina y Kennedy nos querían expresar, quisimos centrar la atención en la exploración de la relación que permitía completar la serie de números

[8] "Se suman los 2 primeros después el segundo con el tercero el tercero con el cuarto así sucesivamente lo mismo con la segunda hilera la tercera hasta la octava "

del primer escalón[9].

Después de observar que los datos solicitados correspondían con los esperados y al no ver claridad o registro alguno que permitiera inferir el porqué de esos números, vimos la necesidad de acercarnos a una comprensión del porqué de estos resultados.

Por esta razón, con la intención de que el análisis de los estudiantes fuera más allá de centrarse en los procedimientos como hallaron los números de cada serie, mientras se encontraban trabajando en cada grupo formulamos el siguiente interrogante: *¿Si escribimos los números de la base de la pirámide en una secuencia de la siguiente manera 1-6-8-13-15-20-22-27-29, cómo podríamos encontrar otros números pertenecientes a esta base?*[10]

Seguidamente, al interior de cada grupo de trabajo empezaron a hacer cálculos numéricos acudiendo a la adición, sustracción y multiplicación y de un momento a otro, Valentina expresa: "*primero sumamos 5 y, luego 2 y, luego 5 y otra vez 2 y así sucesivamente*".

Valentina halla una de las características de estos números, que inicialmente no fue posible visualizar y comprender desde la forma de comunicación escrita empleada, haciéndose visible la importancia de la comunicación oral y nuestro papel como profesores, de jalonar estos procesos donde el estudiante amplíe su vocabulario, en este caso matemático y se dé a entender de sus compañeros y maestros con argumentos bien estructurados que le den sentido a lo que hacen en el papel.

---

[9]Esta primera serie de números tenía diferencias respecto a la forma de completarse de las demás series de la pirámide.

[10] Nos referimos a la primera serie que los estudiantes debían completar iniciando de abajo hacia arriba

Respecto a la forma de cómo completaron los números de la base de la pirámide, nos encontramos con los siguientes aportes de los estudiantes.

Valentina	Víctor	Kennedy
sume 1+6 y dio 7 sume 6+8 y dio 14 8+13 y dio 21 13+15 y dio 28, 15+20 y dio 35 20+22 dio 42 22+27 dio 49 27+29 dio 56	los encontre sumando los dos números de la base	Sumando el de la hisquierda el de la derecha

Valentina es muy precisa en lo que nos deja por escrito; al no ver claridad en los registros dejados por Víctor y Kennedy vimos la necesidad de reunirnos con los tres estudiantes en la sala de sistemas de la Institución, a modo de una sesión de profundidad[11]. La idea era obtener elementos de análisis frente a la forma como habían encontrado los números de la primera serie, e indagar a partir de estos como completaban la serie de números del escalón siguiente, para tal efecto, procedimos así:

***Profesor Sebastián**: ¿Cómo hayamos el número que debe ir a la izquierda del número 20 de la base de la pirámide?*

***Víctor:** profe, cogemos el 20 y buscamos otro número que sumado con ese me de 35*

***Kennedy:** yo le quito 20 a 35 y eso me da 15, que es el número que va ahí (señalando el dibujo de la pirámide)*

*(**Valentina:*** al respecto no *dio aporte alguno)*

***Profesor Sebastián:** Víctor, ¿cómo encontramos entonces, el número que sumado con 20 nos de 35?*

***Víctor:** ensayando, si 20 más 10 nos da 30 entonces faltan 5, es el 15 porque 10 más 5, 15*

***Profesor Sebastián:** Muy bien Víctor.*

[11] Sesión de profundidad del día 7 de Junio de 2011.

Y Kennedy, ¿por qué eligió quitarle 20 a 35?

Kennedy: *porque al restar estos dos números el resultado me da lo que hace falta a 20 para ser igual a 35*

Valentina: *Profe! Pues es que lo mismo pasa con el 22 y el 49.*

Profesor Sebastián: *Explícanos Valentina qué pasa con el 22 y el 49?*

Valentina: *Resto el 49 y el 22 y me da 27. Luego sumo ese número con 29 y da 56 que es el que va arriba.*

De esta manera encontramos una vez más que las reflexiones escritas no dan cuenta de los razonamientos hechos por los niños, mientras en la expresión oral dan cuenta de la utilización de la adición y la sustracción para encontrar los datos.

Notamos que Valentina se apoya en las palabras de Kennedy, para poner un nuevo ejemplo dando a entender que esta estrategia era válida, pues tenía otras aplicaciones en la situación.

Con el interés de dilucidar otras relaciones existentes en el dibujo de la pirámide reanudamos las entrevistas con los tres participantes en la sesión de profundidad mencionada.

Para ello centramos la atención en la segunda fila de la pirámide y, con estas palabras tratamos de ubicar a los estudiantes:

Profesor Sebastián: *Si tomamos en su orden los números de la segunda fila de la pirámide: 7-14-21-28-35- 42- 49 y 56. ¿Cuál sería el siguiente número de la serie?*

(Al escuchar esto, los niños discuten entre ellos acerca, de qué tienen en común o en que se diferencian los números de la serie)

Kennedy: *Nosotros vemos que esos números están en la tabla del siete.*

Víctor: *y el número que sigue profe, es el 7 x 9 igual 63.*

Profesor Sebastián: *¿De qué otra forma podríamos llamar esos números, en lugar de decir que están en la tabla del siete?*
Valentina: *(expresa con aire de emoción) Profe, Carlos Andrés en clase nos enseñó que esos números salen de multiplicar los números por siete.*

Después de esperar que los niños exploraran otras formas de referirnos a los números en cuestión, y al notar que era evidente que carecían del vocabulario matemático para hacerlo, intervenimos para explicar que los números de la tabla del siete podrían llamarse, múltiplos de este o también podría decirse que el siete es un divisor de los números de la serie.

Notemos que en todo este proceso de análisis fueron necesarias, algunas intervenciones de nosotros como profesores para generar en los niños esa chispa, esas ganas y esas formas de ver más allá de lo escrito en el papel, de tal manera que encontraran relaciones diferentes que esclarecieran y afianzaran conceptos matemáticos.

Nos resta decir que la comunicación oral y la escrita están íntimamente ligadas, y que el análisis de esta situación nos permitió observar cómo, lo que los estudiantes escriben muchas veces no deja ver las exploraciones que hacen de cada situación planteada y, que ello viene motivado por lo que el profesor suscita en los procesos de comunicación oral. Lo anterior lo encontramos coherente con lo que expresa Vygotsky (1987): *"En la conversación cada frase está impulsada por un motivo; el deseo o la necesidad conducen a efectuar pedidos, las preguntas solicitar respuestas, y la perplejidad a pedir una explicación"* (p. 137) y es aquí donde el papel del profesor cobra sentido como sujeto mediador entre, la comunicación escrita y la comunicación oral.

Situación problema número 4

Con el propósito de determinar el patrón de formación de un mosaico de figuras, a través de la formación de relaciones, propusimos la siguiente situación:

Completa la tabla con base en las figuras:

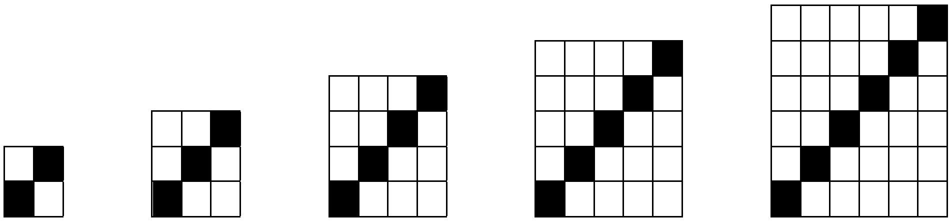


Figura 1 (P1) ***Figura 2 (P2)*** ***Figura 3 (P3)*** ***Figura 4 (P4)*** ***Figura 5 (P5)***

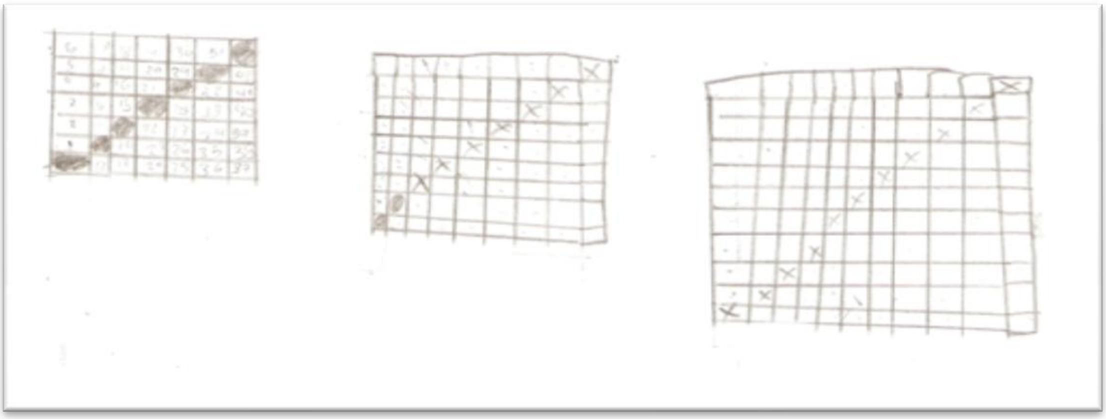
Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros								
Cantidad de cuadrados blancos								

8. Explique una manera de obtener el total de los cuadrados para cualquiera de las figuras.
9. ¿Qué cantidad de cuadrados negros debe tener la figura de la posición 12? ¿Cuántos blancos? Explique el por qué.
10. Si alguien afirma que la figura de la posición 16 tiene 32 cuadrados blancos, ¿es cierto? Explique el por qué.
11. Si una de las figuras tiene 20 cuadrados negros, ¿Cuántos cuadrados blancos tiene que tener?[12]

[12] Actividad tomada del proyecto de investigación “las situaciones problema: dinamizadoras de procesos de razonamiento en el aprendizaje de matemáticas escolares”, cuyas autoras son Lina Ruiz y Catherine Hoyos.

Veamos como procedió cada uno de los participantes de la investigación:

Víctor Ospina, mediante la realización de una representación de mosaicos similares a los presentados, dibuja la figura correspondiente a la posición 7 que no es pedida en la tabla; sin embargo, una vez llevado a cabo este gráfico, realiza las imágenes correspondientes a la posición 8 y 10 respectivamente, que le ayudaran en la búsqueda que la tabla demanda:



Guiándonos por la imagen anterior, y de acuerdo a las observaciones realizadas mientras los estudiantes trabajaban por equipos, Víctor, en un primer lugar realiza el conteo uno a uno de los "cuadros" que componen el mosaico, después, simplemente señala los cuadrados negros que cada representación contiene. Una vez llevada a cabo la representación indicada, Víctor procede a completar la tabla de la siguiente manera:

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros	2	3	4	5	6	7	9	11
Cantidad de cuadrados blancos	2	6	12	20	30	42	81	110

Mientras recorríamos observando el trabajo de los diferentes equipos, notamos que la tabla elaborada por Víctor, contenía un dato no esperado, así que indagamos a través de la siguiente conversación, bajo qué estrategia registró los números contenidos en ella:

Profesora Angela: *Víctor, ¿Puedes explicarnos como encontraste la cantidad de cuadros negros de cada figura?*

Víctor: *Profe yo conté los cuadritos que dibuje de cada posición, ¡como ya nos daban hasta la 5, dibuje las demás y, pinte los negros como en las otras figuras!*

Profesora Angela: *Y ¿cómo encontraste los blancos entonces?*

Víctor: *haber Profe, (señala las imágenes dibujadas por el), como esas figuras son cuadrados se puede multiplicar lado por lado y encontramos el total de cuadritos, como hay que quitar los negros entonces, cuento los negros y los resto.*

Profesora Angela: *¿Restamos los negros de qué?*

Víctor: *de lo que nos da multiplicar los cuadritos de cada lado por el otro lado.*

Profesora Angela: *verifiquemos entonces si se cumple para la posición número 8 lo que estás diciendo.*

Víctor: *la figura 8 tiene 9 cuadritos negros (señala el dibujo y los cuenta). 9 x 9 da 81. (Muestra cara de asombro al darse cuenta de que el número obtenido no corresponde con lo que él pensaba hacer). Profe me equivoque!*

Profesora Angela: *explícanos por qué te equivocaste.*

Víctor: *profe se me olvido restar los cuadritos negros.*

Indudablemente Víctor encuentra una relación entre los datos de la tabla que le hubiera evitado dibujar todos los mosaicos, no obstante en el diálogo que mantuvimos con el demuestra cómo encuentra otra forma de completarla, aunque en ella aparezca un dato no esperado que el mismo se percata de ello por medio de las preguntas del profesor, observamos que este hallazgo se ve condicionado por lo que el profesor despierta en el estudiante al motivarlo a darle argumentación a lo que hace, por ello las preguntas son aquí el detonador principal de los hallazgos de los niños.

El trabajo realizado por Kennedy registra la siguiente información:

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros	2	3	4	5	6	7	9	11
Cantidad de cuadrados blancos	2	6	12	20	30	42	72	110

A diferencia de Víctor, Kennedy no realiza las figuras de los mosaicos correspondientes a las posiciones indicadas en la tabla, pero esto no es inconveniente para que pudiera completarla, sin embargo en los registros que deja escritos, no es claro los procedimiento o procesos que emplea para llevarlos a cabo, así que nuevamente acudimos a un pequeño diálogo:

Profesora Angela: *¿Cómo encontraste los datos que debían completar la tabla?*
Kennedy: *Yo empecé contando los cuadritos negros y los cuadritos blancos de cada figura de las que estaban hechas.*
Profesora Angela: *Y, ¿Cómo hallaste entonces las cantidades de cuadritos en las figuras que no están dibujadas?*
Kennedy: *si cojo la posición que me piden y le sumo 1 me da el número de cuadrados negros, y si multiplico los cuadrados negros por la posición de la figura me dan los cuadrados blancos.*

Vaya sorpresa la que nos llevamos al entablar con cada uno el diálogo y darnos cuenta como la estrategia empleada por Víctor y por Kennedy eran totalmente diferente y que igualmente correspondían a formas de relacionar los datos para completar la tabla, mientras uno se basada en hallar la cantidad total de cuadritos, el otro se fundamentaba en los datos dados por la situación para establecer relaciones.

Una vez completada la tabla procedimos a trabajar 4 actividades que fundamentaban la comprensión de las relaciones formuladas anteriormente.

En la explicación de una manera cómo podríamos obtener el total de cuadrados para cualquiera de las figuras, **Víctor** no escribe su apreciación en la guía facilitada, sin embargo insiste de manera oral, en que hay que multiplicar lado por lado, puesto que tenemos figuras cuadradas.

Kennedy expresa:

> 1. Contando los cuadros negros
> y blancos

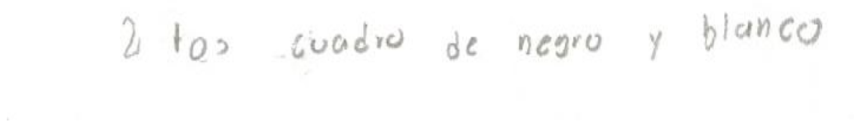
Vemos en esta apreciación como en un primer momento, Kennedy se basa sólo en la observación inmediata de los mosaicos presentados, ya que sugiere inicialmente, una estrategia de conteo, pero pudimos darnos cuenta de las demás relaciones que estructuró por medio de la oralidad, relaciones que implicaban adición y multiplicación.

Respecto a la segunda actividad, *“¿Qué cantidad de cuadrados negros debe tener la figura de la posición 12? ¿Cuántos blancos? Explique el por qué”,* Víctor, hace uso de las relaciones expresadas en el diálogo para plantear lo siguiente:

“La figura 12 tiene 13 cuadros negros porque se le suma 1”, sin embargo no hace alusión a la cantidad de cuadros blancos de la figura.

En este caso Víctor encontró lo que Kennedy había ya mencionado anteriormente, cabe aclarar que estaban en diferentes grupos de trabajo, lo que nos muestra que esta vez Víctor no necesito de la ayuda de nosotros y tomo la iniciativa.

Por su parte Kennedy se queda en una descripción muy puntual:



De esta manera no da cuenta de todo lo que había expresado en la entrevista, abandonando sus primeras apropiaciones, reincidiendo nuevamente en la simplicidad de dar solo una apreciación muy precisa de la pregunta planteada.

Las formas de comunicación a los que los niños están acostumbrados, de alguna manera nos dan pie para entender el por qué se genera tanta dificultad para expresar de manera escrita sus ideas matemáticas, dado que carecen de vocabulario, iniciativa y espontaneidad.

Cuando pedimos justificar si la figura de la posición 16 tenía 32 cuadrados o no, Víctor escribe que “es cierto porque se multiplica”, como podemos ver lo que expresa es cierto en la medida que se haga con los números correctos, al preguntarle que números multiplicaban responde: “16 x 2”. Evidentemente esta operación da como resultado 32, pero si tenemos en cuenta lo que había construido hasta el momento no sería el procedimiento correcto para este caso.

Kennedy por su parte, dice “si porque cuando lo conté había ese resultado”.

Estas dos apreciaciones de los niños, nos generaron un poco de desaliento, ya que a pesar de haber mostrado algo más en las entrevistas no aplicaron ello en las demás actividades de la situación, el tiempo fue corto en esta última parte, ya que llegaba la hora de la salida y se comportaban ansiosos, por esto se limitaban a dejar algo en el papel solamente, dejando de lado loa hallazgos encontrados.

El afán de los estudiantes por realizar actividades extraescolares se ve reflejado muchas veces en los procesos del aula, y es que cambiar ello es un desafío por lo que es necesario generar una motivación y un gusto por el área, tratando de cambiar la idea de la matemática inculcada por la sociedad.

Con respecto a si una de las figuras tiene 20 cuadrados negros, ¿Cuántos cuadrados blancos tiene que tener?, los niños no dieron sus apreciaciones.

En muchas ocasiones la costumbre de trabajar para que el maestro evalúe, y no para aprender, se ve reflejado en las elaboraciones de los niños donde quedan limitadas las formulaciones de sus propios razonamientos; es papel de profesor aquí generar cambios funcionales, a propósito de ello los NCTM (2000) nos dan a entender que es importante la comunicación oral y escrita cuando es usada por los profesores de matemáticas, para propiciar a los estudiantes espacios donde piensen a través de problemas, formulen explicaciones, hagan uso de vocabulario o notaciones nuevas, experimenten formas de argumentación, justifiquen conjeturas y reflexionen sobre su propia comprensión y las ideas de los otros. De aquí que cobraron gran importancia las formas de comunicación en esta categoría.

5. CONSIDERACIONES FINALES

El trabajo aquí documentado estuvo orientado por la pregunta "¿Qué contribuciones hacen las Situaciones Problema a las formas de comunicar de los estudiantes, en los procesos de aprendizaje de matemáticas escolares? El tratamiento de los datos producidos nos posibilitó analizar dos categorías que emergieron, una, relacionada con representaciones, que denominamos "Las representaciones icónicas: medios para la construcción de significados" y otra, tiene que ver con el lenguaje oral, que hemos llamado, "El lenguaje oral: alternativa comunicativa para exteriorizar y expresar razonamientos matemáticos".

Desde estas ideas emergentes, reflexionamos y analizamos procesos de comunicación, de los estudiantes participantes de este estudio, en el marco de situaciones problema como alternativa para movilizar ideas matemáticas. A continuación presentamos las conclusiones construidas como parte de los acercamientos a nuestra pregunta de investigación:

Al analizar las relaciones que se crean entre el interlocutor y el que escucha, entre la persona que escribe y la que lee, pudimos percatarnos de la necesidad que tienen los estudiantes, a la hora de llevar a cabo las diferentes interpretaciones de cada situación problema planteada, de comunicar de manera oral, ya que las argumentaciones dadas, no son lo suficientemente claras en el papel.

Tal fue el caso de las situaciones documentadas, entre otras, donde las entrevistas y conversaciones permitían desentrañar significados de la producción de ideas matemáticas, que los estudiantes realizaban a nivel escrito. Aquí el papel del profesor es vital, para volverse "par" de los estudiantes y a través de preguntas, generar cambios en su construcción de ideas y por consiguiente movilizar cambios de actitud frente a la actividad matemática.

Las situaciones problema, se constituyen en un instrumento para generar espacios de reflexión, análisis y participación, aspectos bastante escasos, desde otros contextos, en el trabajo matemático de los niños.

Una alternativa problematizadora de matemáticas escolares, convoca, a los estudiantes, al uso de formas de representación de conceptos y relaciones matemáticas, facilitando procesos comunicativos, que poco a poco contribuyen al esclarecimiento de los razonamientos, en la medida que cada vez son más claros y persuasivos al entrar en interlocución con sus compañeros y profesores

También, es de vital importancia, ver como en un proceso de enseñanza y aprendizaje de matemáticas escolares mediado por situaciones problema, los sistemas de representación utilizados por los estudiantes surgen de forma espontánea, de acuerdo a sus propias experiencias y acorde a sus realidades contextuales. Situación que podemos interpretar para ayudarlos a armar de sentido las ideas que expresan en esos registros y esto es posible si en asocio con los niños buscamos explicaciones y argumentos que conllevaran a refutar o validar lo que han expresado.

De esta forma de proceder, surgen espacios para construir ejemplos con casos particulares, verificaciones, generalizaciones, validación de ideas y construcción de otras, características todas ellas, propias del quehacer matemático en el aula.

En muchos momentos lo expresado por escrito por los estudiantes alrededor de una actividad no fue lo suficientemente claro, pero, al propiciar un espacio de conversación alrededor de las ideas allí plasmadas, empezaron a surgir nuevas ideas, que contribuían a esclarecerlas y a ofrecer elementos de re-organización de las mismas. Fue así como en estas plenarias, toma importancia, el papel del lenguaje oral como medio de comunicación para ayudar a armar de significado, las ideas conceptuales que se tejen desde la exploración y elaboración de relaciones matemáticas desde una perspectiva problematizadora del conocimiento.

El hacer matemáticas en el aula no es un trabajo individual, las interacciones que se generan en los grupos de trabajo, a través de la dinámica de situaciones problema, contribuyen al desarrollo de habilidades comunicativas, a nivel escrito, como oral,   en la medida que, suscitan la motivación por compartir entre pares (compañeros y profesores) los significados a sus elaboraciones conceptuales y, esto es posible, si aceptamos que cada quien tiene su propio lenguaje y formas particulares de representarse el conocimiento.

6. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

Betancur, O. M. 1998. *Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas (un ejemplo con los números para contar).* Colombia: Grupo impresor Ltda.

Bunge, N. (1989): La investigación científica. Barcelona: Ariel

Chamorro, C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. España: Pearson Education.

Chamorro, C.(2005). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. España: Pearson Education.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática* (primera ed.). (A. B. Puga, Trad.) Bogota: Magisterio.

Forero-Sáenz, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. Pontificia Universidad Javeriana (Bogotá)

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada.

Godino, Juan, D. M., Recio, A. Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática. Universidad de Granada y Córdoba. http://www.sectormatematica.cl/educmatem/semiotico.htm

Martínez, C. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*. (20) 165-193.

Martínez, M. (2006). Ciencia y arte en la metodología cualitativa. 2da. Ed. México.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas,* Bogotá, Magisterio.

Múnera, J. J. (2007). Construcción de Aprendizajes Matemáticos Desde el Enfoque de Situaciones Problema. *Formándonos Maestros* (3), 38-50.

Múnera, J. J. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Educación y Pedagogía, 23* (59), 179-193.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000), *Principios y estándares para la educación Matemática,* traducido por Manuel Fernández, Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

O'Sullivan, T., Hartley, J., Saunders, D., Montgomery, M. & Fiske, J. (1995). *Conceptos clave en comunicación y estudios culturales.* Argentina: Amorrortu Editores.

Ordoñez, L. (2009). La comunicación en clase de matemáticas: *Nodos y nudos, 3, 57-67.*

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Ediciones Morata.

Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (2000).*Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas*. Extraído el 1 de Octubre de 2011 desde http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL00-39.PDF

Stake, R. (1998) Investigación con estudio de casos. Morata Madrid: segunda edición.

Strauss, A.,& Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Taylor, S., Bogdan, R. (1996). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona: Paidos.

Vigotsky, L. S. (1987). *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires: Sud. América.Zichi Cohen, M., y Omery A. (2003) Escuelas de Fenomenología: implicaciones para la investigación. En: Janice Morse (Editora). *Asuntos Críticos en los métodos de investigación cualitativa* (pág. 160-182). Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

ANEXOS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Señores padres de familia

Reciban un cordial saludo

En los encuentros de matemáticas realizados los días sábados, con estudiantes de los grados sextos de la Institución Educativa República de Honduras, en los cuales participa su hijo **VÍCTOR OSPINA SEPÚLVEDA**, hemos venido desarrollando un proyecto de investigación llamado "**situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares**", el objetivo de dicho proyecto es **"identificar elementos característicos de una situación problema, desencadenadores de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"**

Por tal motivo, queremos solicitar de manera formal permiso para que su hijo, haga parte de la investigación, como protagonista de la misma, y en esta medida presentarla en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de su hijo, en forma de grabaciones tanto de audio como video, fotos, trabajos de clase, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Sebastian Cano Rojas.
SEBASTIAN CANO ROJAS
Estudiante investigador

Angela Giraldo
ANGELA MARÍA GIRALDO MUÑOZ
Estudiante investigador

Autorizo la participación de Víctor Ospina Sepúlveda en la investigación, "situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"

Marta Lucia sepúlveda
C.C. 21'549.157

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Señores padres de familia

Reciban un cordial saludo

En los encuentros de matemáticas realizados los días sábados, con estudiantes de los grados sextos de la Institución Educativa República de Honduras, en los cuales participa su hijo **JHON KENNEDY DEDE LONDOÑO**, hemos venido desarrollando un proyecto de investigación llamado "**situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"**, el objetivo de dicho proyecto es **"identificar elementos característicos de una situación problema, desencadenadores de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"**

Por tal motivo, queremos solicitar de manera formal permiso para que su hijo, haga parte de la investigación, como protagonista de la misma, y en esta medida presentarla en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de su hijo, en forma de grabaciones tanto de audio como video, fotos, trabajos de clase, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Sebastian Cano Rojas

SEBASTIAN CANO ROJAS
Estudiante investigador

Angela Giraldo.

ANGELA MARÍA GIRALDO MUÑOZ
Estudiante investigador

Autorizo la participación de Jhon Kennedy Dede Londoño en la investigación, "situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"

Johana Dede Londoño.
C.C. 22.242.632.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Señores padres de familia

Reciban un cordial saludo

En los encuentros de matemáticas realizados los días sábados, con estudiantes de los grados sextos de la Institución Educativa República de Honduras, en los cuales participa su hija **VALENTINA MUÑOZ OROZCO**, hemos venido desarrollando un proyecto de investigación llamado "**situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"**, el objetivo de dicho proyecto es **"identificar elementos característicos de una situación problema, desencadenadores de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"**

Por tal motivo, queremos solicitar de manera formal permiso para que su hija, haga parte de la investigación, como protagonista de la misma, y en esta medida presentarla en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de su hija, en forma de grabaciones tanto de audio como video, fotos, trabajos de clase, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Sebastian Cano Rojas.

SEBASTIAN CANO ROJAS
Estudiante investigador

Angela Giraldo.

ANGELA MARÍA GIRALDO MUÑOZ
Estudiante investigador

Autorizo la participación de Valentina Muñoz Orozco en la investigación, "situaciones problema: dinamizadoras de procesos de comunicación en el aprendizaje de matemáticas escolares"

Maria Elena O.
C.C. 43026556 Med