LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA Y LA CONSTRUCCIÓN DEL ESPACIO EN LOS ALUMNOS DE SEGUNDO GRADO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JAVIERA LONDOÑO

CRUZ AMPARO RESTREPO RESTREPO

Trabajo de Grado

ASESORES:

YOLANDA BELTRÁN DE C.

GULLERMO SILVA RESTREPO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS Y ARTES

2007

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

Pág.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo estuvo enfocado a la construcción de las nociones espaciales de los alumnos de grado segundo de la Institución Educativa Javiera Londoño del Barrio Sevilla del Municipio de Medellín, por medio de la Resolución y el Planteamiento de Problemas.

Los conocimientos referidos al Pensamiento Espacial ocupan un lugar importante dentro de los aprendizajes que debe adquirir un alumno para el desenvolvimiento dentro de su entorno, ya que la realidad que le rodea comprende objetos con forma y dimensiones diferentes, entre las que es posible establecer relaciones que hacen parte de la vida cotidiana.

Además de lo anterior, las propiedades geométricas de los objetos, las transformaciones a que pueden ser sometidos y las representaciones de los mismos hacen parte del conocimiento que contribuye al desarrollo lógico-matemático de los alumnos de este grado de escolaridad.

Para contribuir al desarrollo del Pensamiento Espacial de los alumnos, durante el desarrollo del proyecto primeramente se realizó un diagnóstico acerca de la aprehensión de los conceptos geométricos (desde los niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele) que poseían, y la forma como formulaban problemas en esta área de la matemática; posteriormente se hizo intervención en el aula de clase en pro de conseguir en los estudiantes la construcción de las nociones espaciales mencionadas por Piaget: Topológicas, Proyectivas y Euclideas, las cuales le facilitaron al niño una mejor adaptación u utilización del espacio, y por último, se evaluó los conocimientos referidos a este pensamiento desde la formulación de problemas por parte de los alumnos.

Para el trabajo de Formulación de Problemas, se partió desde la misma resolución, tratando que los alumnos se interesaran por ello y manifestaran curiosidad antes sus descubrimientos, para que posteriormente estuvieran en capacidad de crear sus propios problemas referidos a una situación dada. Los problemas formulados fueron analizados desde lo disciplinar y la producción de textos debido a la correlación existente entre éstos.

Por último, con base en los datos obtenidos se sacaron conclusiones y se presentaron anexos que muestran evidencias del trabajo con los estudiantes.

LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA Y LA CONSTRUCCIÓN DEL ESPACIO EN LOS ALUMNOS DE SEGUNDO GRADO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JAVIERA LONDOÑO.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En la Institución Educativa Javiera Londoño de barrio Sevilla, tanto en el plan del área de matemáticas para el grado segundo, como en la ejecución del mismo, no se evidenció la correlación del pensamiento espacial y los sistemas geométricos con los otros pensamientos matemáticos y sus respectivos sistemas.

En cuanto a la didáctica de la geometría, no se trabajaba con base en la resolución de problemas y la formulación de los mismos por parte de los estudiantes, predominando en la presentación de contenidos simples definiciones, aspecto que no ayudaba al desarrollo del pensamiento espacial y a la determinación de la forma o nivel de razonamiento de los estudiantes.

1.1. JUSTIFICACIÓN

Este proyecto partió de la necesidad de desarrollar en los estudiantes de segundo grado, de la Institución Educativa Javiera Londoño del barrio Sevilla, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, así como analizar la forma en que dichos estudiantes formulaban problemas relacionados con la geometría.

Actualmente, en esta Institución Educativa, como en las demás, en el currículo de matemáticas se le da mayor énfasis a la aritmética, dejando de este modo un poco relegada la enseñanza de la geometría, siendo sus contenidos presentados en forma fragmentada y aislados de los otros pensamientos matemáticos.

Además de lo anterior, la formulación de problemas no estaba contemplada dentro del plan de área de matemáticas de esta Institución, situación casi parecida era la de resolución (que debe anteceder a la formulación), ya que no recibía la atención requerida dentro del mismo plan.

Acorde con lo expuesto, se hizo necesario implementar actividades en el aula de clase encaminadas a desarrollar o potenciar el aprendizaje significativo de los conceptos relacionados con el pensamiento espacial y su correspondiente sistema geométrico, en concordancia con los otros pensamientos matemáticos, además de buscar estrategias para que los estudiantes formularan problemas relacionados con dicho pensamiento y así tener la posibilidad de analizar sus concepciones y plantear o diseñar estrategias didáctico-pedagógicas encaminadas a lograr mayor efectividad en los aprendizajes relacionados con la geometría.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

¿Cómo potenciar el desarrollo del Pensamiento Espacial y la formulación de problemas en los estudiantes de segundo grado de enseñanza básica de la Institución Educativa Javiera Londoño del barrio Sevilla?

1.3. PREGUNTAS ORIENTADORAS.

1. ¿Como desarrollar el pensamiento espacial en interacción con otros pensamientos matemáticos, con miras a la comprensión de nociones y conceptos geométricos?

2. ¿Cómo incentivar a los estudiantes de grado segundo a la formulación y resolución de problemas del pensamiento espacial?

3. ¿Que estrategias utilizan los estudiantes de grado segundo para formular y resolver problemas?

4. ¿Cómo se pueden clasificar o categorizar los problemas que formulan los estudiantes?

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. GENERALES

- Desarrollar el Pensamiento Espacial en los alumnos de grado segundo de primaria por medio de la resolución y formulación de problemas de tipo geométrico.

1.4.2. ESPECIFICOS

- Desarrollar situaciones de aprendizaje acerca del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, en concordancia con los otros pensamientos matemáticos y sus respectivos sistemas, para favorecer la formulación de problemas en los estudiantes de grado segundo de enseñanza básica.

- Categorizar los problemas formulados desde el saber disciplinar y la producción de textos.

- Analizar las representaciones y relaciones que establecen los estudiantes en cuanto a conceptos de geometría, así como también la forma en que formulan problemas de esta área de la matemática.

2. MARCO REFERENCIAL.

2.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

Dentro del contexto nacional, los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas del MEN, en su propuesta de Estructura Curricular enumera tres dimensiones a ser tenidas en cuenta en el proceso enseñanza-aprendizaje: procesos generales (tienen que ver con el aprendizaje), conocimientos básicos (procesos que desarrollan el pensamiento matemático) y contexto, incluyendo en los primeros la resolución y el planteamiento de problemas.

En los mismos lineamientos, Miguel de Guzmán al considerar las situaciones problema como contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela, afirma que “la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces”, ya que estas situaciones tienen la bondad de permitir en el alumno la activación de la capacidad mental y razonar sobre sus propios procesos, entre otros, y además al referirse al tema agrega “es lo mejor que podemos proporcionar a los jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas”, situación que muestra la importancia de la formulación de problemas por parte de los alumnos.

En el contexto internacional, Brousseau, en su teoría de las Situaciones Didácticas se refiere a la “noción de sanción”, que es la capacidad que debe tener el alumno de juzgar por sí mismo los resultados de su acción e intentar nuevas resoluciones.

En el mismo contexto, pero a nivel de América Latina, están los Cubanos Yulamis Leyva y Reinaldo Sampedro, quienes escriben respectivamente acerca de las “estrategias para estimular el proceso de formulación de problemas geométricos en la secundaria básica” y “propuesta metodológica para la formulación de problemas en la secundaria básica cubana”, propuestas que son adaptables a nuestra educación, concretamente a la básica primaria como veremos más adelante en el ítem de planteamiento y resolución de problemas.

2.2. MARCO TEÓRICO.

En el aula de clases los profesores toman o aceptan una posición teórica al admitir un determinado punto de vista o al tomar una postura respecto a una situación específica, es así como se adopta una metodología, con la convicción de que ésta funcionará para la consecución en los alumnos de un aprendizaje matemático significativo y valioso.

Para la adopción de una metodología, el docente debe estar documentado acerca de la forma como aprenden matemáticas sus estudiantes, y para ello es necesario que conozca los modelos teóricos que explican los fenómenos del aprendizaje, los cuales a su vez han sido la base para los diferentes enfoques cognitivos como el empirismo y el constructivismo, relacionados con la enseñanza-aprendizaje; siendo entonces tanto los modelos como los enfoques puntos de apoyo o herramientas de análisis para explicar fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje.

El enfoque empirista, antes mencionado, se refiere que el alumno solo aprende aquellos conocimientos matemáticos que el profesor enseña en su clase, no aprendiendo nada de lo que no se explica, por lo tanto el alumno se limita a recibir contenidos, siendo incapaz de crear conocimientos; dándose por parte del docente la presentación directa u ostensiva sin elementos constitutivos o relacionados con otros, lo cual impide la generalización y la abstracción, un ejemplo de ello puede ser la simple presentación de figuras geométricas en forma pictórica con sus respectivos nombres.

Por otro lado, está la concepción que el quehacer matemático implica una actividad propia del sujeto, aprendizaje constructivista, donde aprender matemáticas significa construir matemáticas. Esto último tiene su origen en la psicología genética, la cual tiene como hipótesis:

1. El aprendizaje se apoya en la acción: según Piaget “es de la acción de la que procede el pensamiento en su mecanismo esencial, constituido por el sistema de operaciones lógicas y matemáticas”[1], donde se entiende la acción como anticipación no tratándose necesariamente de manipulación de objetos reales, ya que la solución matemática se opone a la solución práctica y es así como la acción sobre los objetos reales conduce a contrastaciones, mientras que la acción propiamente matemática es más bien una anticipación en donde se tiene la oportunidad de elegir procedimientos más largos o cortos.

2. “La adquisición, organización e integración de los conocimientos del alumno pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, en el curso de los cuales los conocimientos anteriores se ponen en duda. Si este desequilibrio es superado, esto implica que hay una reorganización de los conocimientos: los nuevos conocimientos se van integrando con los anteriores, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación”[2]. En lo anterior se trata de aplicar la teoría de Piaget, donde el aprender supone el extrañarse, comenzar haciendo comprendiendo el por qué; de ahí que bajo esta hipótesis aprender matemáticas es un proceso de reconstrucción de un equilibrio entre el sujeto y el medio suscitado por situaciones problemas, donde éstas provocan perturbaciones de forma intencional con miras a la consecución de nuevos aprendizajes.

[1] CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas, p. 40.

[2] Ibid., p. 43

3. “Se conoce en contra de los conocimientos anteriores”[3]. Esta hipótesis proviene de la tesis epistemológica de Bachelard, retomada por Brousseau para tratar de explicar mediante ésta la formación de obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas en el sentido que para aprender se hace necesario retomar o tener en cuenta los conocimientos previos pero que éstos a su vez, en el acto de aprender, deben desaparecer al ser modificados por saberes nuevos, estando así los saberes viejos sometidos a rupturas (a veces totales), adaptaciones y reestructuraciones.

   En lo anterior Brousseau explica que el aprendizaje no se produce a partir de la nada, y es por ello que los conocimientos previos del alumno deben ser el punto de partida para la enseñanza de la matemática, siendo un ejemplo típico el que cuando un niño al iniciar la etapa escolar ya tiene algunos saberes en el campo del pensamiento espacial como es la concepción de espacio cercano y lejano, siendo este el punto de partida para la enseñanza de la geometría.

4. “Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos”[4] esta hipótesis es tomada de la psicología social de Vigotsky, quien hace aportes importantes al constructivismo, y sostiene que un individuo (niño) aprende en la interacción con el otro (lo social) mediada por el lenguaje, ya sea en una relación de tipo horizontal (otro niño) o vertical (con la intervención de un adulto).

   De lo anterior se ve la importancia que para que se produzca un verdadero aprendizaje matemático en el aula de clase, el profesor debe hacer puestas en común o abrir espacios de discusión entre los alumnos, donde él es un mediador de los conflictos que puedan surgir allí a raíz del resultado de procedimientos variados para llegar a concertaciones. Estas puestas en

[3]CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas, p. 44.

[4] Ibid, p. 45

común, mediadas por el lenguaje, son las que permiten al alumno reestructurar la acción y apropiarse de significaciones nuevas al tratar de responder interrogantes como el ¿por qué? y ¿cómo?, entre otros, surgidos tanto de otros compañeros, como de su profesor, defendiendo así sus procesos de razonamiento (capacidad de reflexión sobre sus propias acciones), teniendo así la oportunidad de defender o argumentar sus procedimientos si es necesario y tomar conciencia sobre su validez o no. Así mismo tiene la oportunidad de analizar los aportes de sus compañeros para conocer un nuevo procedimiento midiendo así el grado de los conocimientos adquiridos y la capacidad de logro a nivel individual.

El constructivismo, desde la mirada de Vigotsky, permite ver la forma como se relaciona el alumno, el profesor y el saber específico, pero es necesario estudiar el aprendizaje ya no desde una teoría psicológica sino desde la didáctica, y para ello tenemos el didacta francés Brousseau, quien habla de aprendizaje por adaptación definiéndolo como *"el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba de aprendizaje"*[5] , definición semejante a la de Piaget cuando afirma que el alumno construye sus conocimientos al actuar en un medio que le producía desequilibrios.

2.2.1. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.

Los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas del MEN expresan que se debe aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de una evolución histórica; y así mismo se refieren a la importancia de considerarlo como una herramienta para desarrollar habilidades de pensamiento, reconocer la

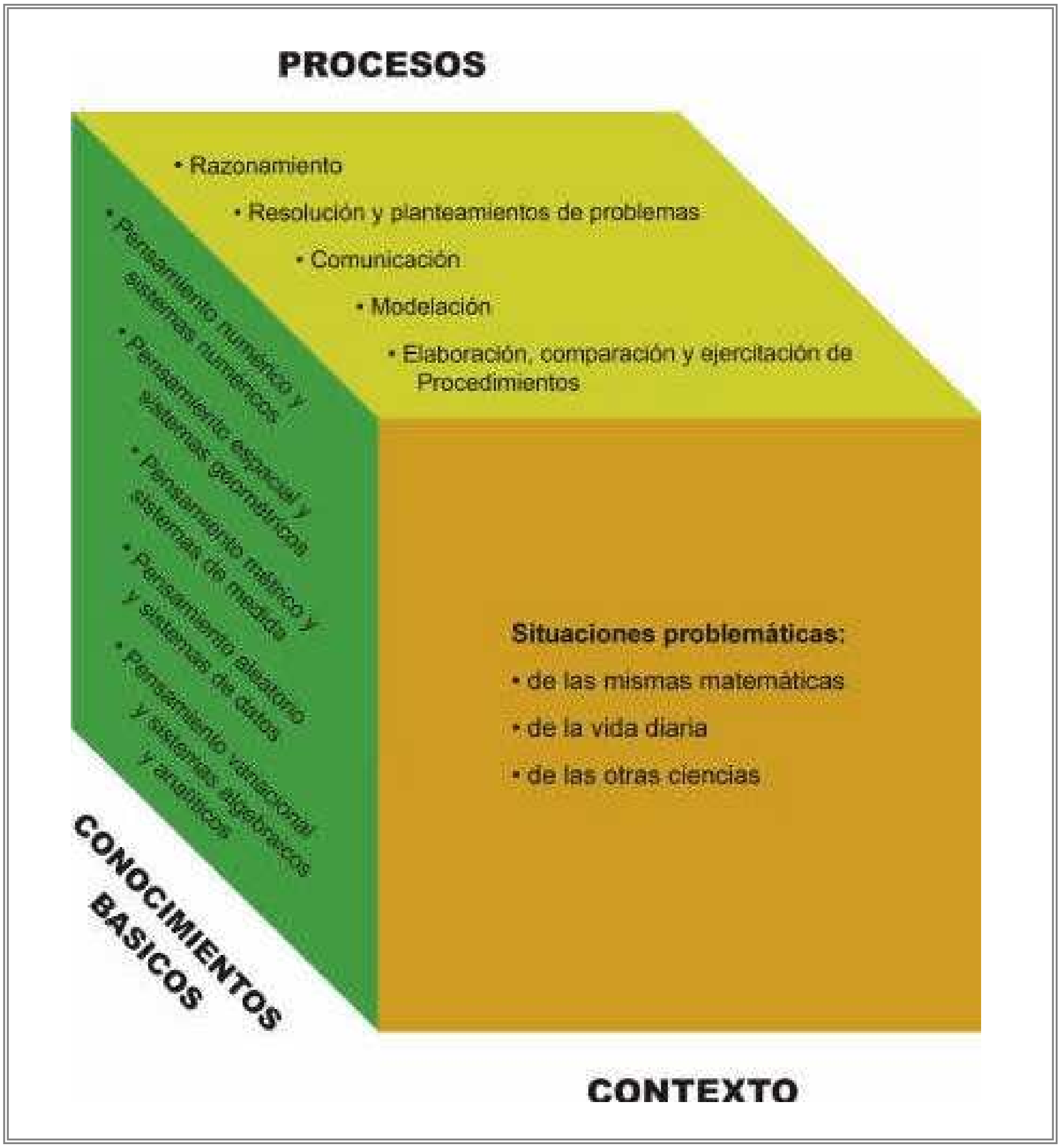
[5] CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas, p. 47.

existencia de un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar el ciudadano de hoy, valorar la importancia de procesos constructivos y de interacción social y privilegiar como contexto del hacer matemático en la escuela la resolución de problemas.

Los Lineamientos proponen organizar el currículo de matemáticas bajo tres ejes: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto. Los procesos están relacionados con el aprendizaje, y son el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; el eje de los conocimientos básicos está relacionado el de procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático (espacial, numérico, métrico, variacional y aleatorio) y con sus propios sistemas. Por último, el contexto "tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las matemáticas que aprende"[6].

Los ejes propuestos para organizar el currículo de matemáticas, a su vez también se relacionan entre sí tal como lo muestra gráficamente el texto de los lineamientos Curriculares, veamos:

[6] Lineamientos Curriculares del MEN, p. 36.



2.2.2. PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS.

Dentro de los conocimientos básicos, para ser tenidos en cuenta al momento de elaborar la estructura curricular del área de matemáticas, propuestos por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del MEN, está el desarrollo del Pensamiento Espacial con sus Sistemas Geométricos, considerando el primero como “el conjunto de los procesos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales”[7], y los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio, los cuales son construidos a partir de la exploración activa (interacción) del espacio por medio de desplazamientos, medidas y cálculos espaciales, entre otros, para llegar a modelaciones (representaciones) y abstracciones de las propiedades hasta llegar a predecir resultados.

Para conseguir el dominio del espacio, los Lineamientos Curriculares sugieren propender por un enfoque didáctico donde predomine la construcción de los conceptos y el establecimiento de relaciones a partir de la actividad del alumno en la confrontación con los objetos del entorno ya que éstos tienen formas tridimensionales y no planas.

2.2.3. DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Según Chamorro[8], la didáctica específica de la geometría, está basada en ciertas teorías de tipo psicológico expresadas por diferentes autores, la cual tiene como premisas fundamentales:

1. “Una geometría *dinámica* frente a la geometría estática tradicional” (Castelnuovo, D´Amore).

2. “Una geometría *interfigural e intrafigural* frente a la geometría exfigural propia de la enseñanza tradicional” (Piaget y García, Vecino).

[7] Lineamientos Curriculares del MEN, p. 56.

[8] CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas, p.305.

3. “Una geometría que tenga en cuenta el *carácter deductivo* intrínseco al razonamiento geométrico pero también el *carácter inductivo* que pueden generar los diversos procesos o materiales propuestos para el desarrollo de la misma” (Alsina et al).

4. “Una geometría caracterizada por los *grupos de invariantes* (topológicos, proyectivos o métricos) considerados de antemano, sin establecimiento de prelación alguna en las secuencias didácticas organizadas al efecto” (Vecino, D´Amore).

5. “Una geometría fundada basada en procesos de *percepción*, de *representación*, de *construcción*, de *reproducción* y de *designación* de los entes geométricos considerados en cada caso” (Alsina et al., Castelnuovo).

La propuesta didáctica efectuada implica el uso de diversos materiales tales como: poliminos, geoplano, tangram, tiras de mecano, policubos, o de otros como pueden ser la tortuga de suelo, Logo o el ordenador con los diferentes entornos (Cabri); con los cuales se pretende una aproximación a los diversos conceptos geométricos a partir de la iconización que permiten los materiales antes citados.

Se pretende dinamizar la geometría, en contra de la usanza tradicional deL tablero. Se debe buscar una geometría dinámica, no estática, que logre ver movimientos de las figuras en el plano, que permita habilidades y conocimientos más amplios, por ejemplo, la identificación de la base de un rectángulo en diversas posiciones o la altura de triángulos en varias formas y ubicaciones espaciales o la construcción de cuadrados de diferentes tamaños.

Acorde con lo ya expresado, se debe propender por una geometría intrafigural que permita establecer relaciones entre figuras. Ella permite establecer relaciones entre las diversas figuras a partir de criterios como: igualdad de lados, igualdad de ángulos, paralelismo de los lados y perpendicularidad de las diagonales, entre otros, donde para ello es recomendable el uso de las tiras de mecano. Al establecer relaciones entre figuras se puede jugar con su composición o descomposición.

En topología se puede trabajar con regiones respecto a un elemento de referencia como: continuidad, orden, conexión, compacidad; se puede trabajar con materiales específicos donde se reflejen tales conceptos como: bingos, dominós, triminos, tetraminos, juegos de cartas, juegos de tablero. Es importante trabajar igualmente con conceptos proyectivos como delante-atrás, encima-debajo, sobre-bajo, derecha-izquierda, entre. Los materiales didácticos podrían ser los mismos mencionados anteriormente. En estos últimos casos se estaría trabajando con geometría proyectiva. Finalmente, se puede trabajar con isometrías del plano (traslaciones, giros y simetrías) y con las transformaciones de semejanza en el plano (homotecias o semejanzas).

Ahora, si bien en geometría se ha trabajado con el método deductivo, sin discutir las ventajas o desventajas de dicho método, Alsina, Bugués, Fortuna proponen la búsqueda inductiva a través del uso de materiales diversos. Entre los materiales propuestos están los poliminos, sobre todo los construidos a partir de cuadrados y de triángulos equiláteros.

2.2.3.1. MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE.

El modelo de los Van Hiele analiza la comprensión de los conceptos y las formas de raciocinio de los estudiantes, para ello plantean unos niveles de razonamiento geométrico, que van desde lo formal (mostraciones) hasta lo lógico-formal (demostraciones), a la vez que ofrecen unas fases o sugerencias a los maestros con el fin de ayudar a mejorar la calidad de reflexión matemática de los alumnos, las cuales van desde lo puramente informativo hasta la integración o comprensión de los conocimientos nuevos.

Los esposos Van Hiele no hacen alusión directa en cuanto a los métodos inductivos y deductivos, para ellos el asunto es determinar que niveles pueden ser considerados para el desarrollo de los conceptos geométricos en general y de las transformaciones geométricas en particular, de forma que se respete el desarrollo cognitivo de los alumnos.

Los niveles planteados en el modelo son jerárquicos y cada uno tiene un tipo de lenguaje específico, en ellos se puede observar que los conceptos implícitos en un nivel se explicitan en el siguiente (como se muestra en la siguiente tabla y en el gráfico I), permitiendo que cada nivel se apoye en el anterior con lo cual el paso a un nivel superior no se da en forma automática (ver gráfico II), ni por edades como en los estadios planteados por Piaget.

ELEMENTOS / **NIVELES**	**EXPLICITOS**	**IMPLICITOS**
1	Objetos Geométricos	Propiedades de los Objetos.
2	Propiedades de los Objetos Geométricos.	Relaciones entre Propiedades y/o Objetos.
3	Relaciones entre Propiedades y Objetos	Demostraciones Formales de Relaciones.
4	Demostración Formal de Relaciones.	

Gráfico I.

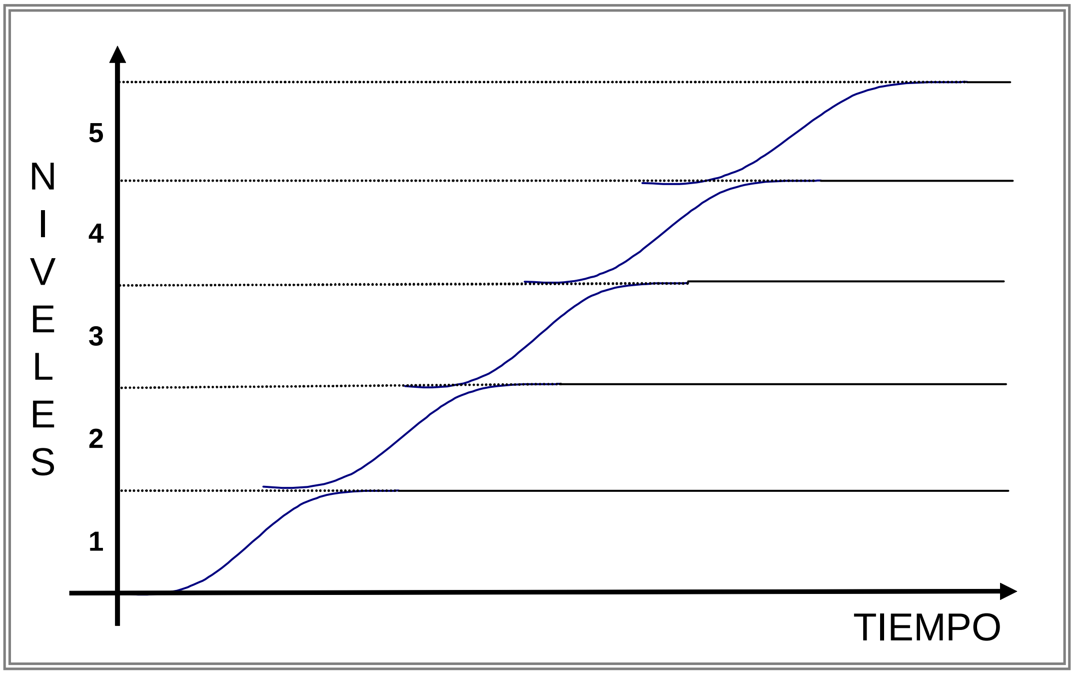
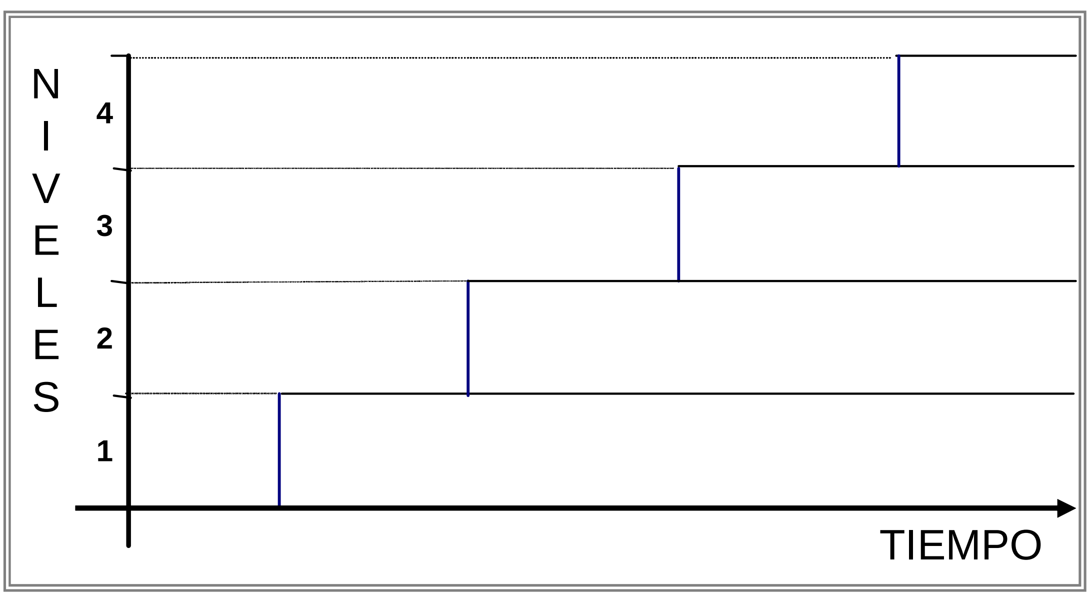


Gráfico II.



Cada uno de los niveles tiene características específicas, así:

<u>Nivel 1</u>: Las figuras se distinguen por sus formas individuales, como un todo, sin detectar relaciones entre las formas o entre sus partes.

<u>Nivel 2</u>: Se comienza a desarrollar conciencia de que las figuras constan de partes. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo y construcción de modelos.

<u>Nivel 3</u>: Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero solo con ayuda y guía.

<u>Niveles 4 y 5</u>: Se ocupan del desarrollo del razonamiento deductivo y de la construcción de teorías, culminando en la abstracción completa.

La forma como fueron planteados los niveles anteriormente descritos, además de permitir ver el progreso de la capacidad de razonamiento geométrico de los alumnos, aporta pautas para la organización del currículo matemático (en particular de la geometría) en los diferentes grados educativos, al tiempo éstos permiten diferenciar entre demostraciones basadas en verificación de ejemplos (nivel 2), informales (nivel 3), y formales (nivel 4).

En pro que se de en los alumnos el desarrollo de los conceptos geométricos y el desarrollo de los procesos de demostración, cada uno de niveles debe establecer diferentes tipos de relaciones, así: el nivel 1 (visual) guarda relación con la percepción de figuras geométricas y con la integración de atributos en ellas. El nivel 2 (descriptivo-analítico) también podría ser integrado al estar relacionado, de forma irremediable, con la representación interna y externa de las figuras consideradas y, por tanto, con la intrafiguralidad. El nivel 3 (relacional) contempla las relaciones entre figuras diversas, entrando directamente en el campo de lo interfigural, campo preferente del desarrollo geométrico en primaria.

Acorde con lo anterior, hay que buscar ejercicios que fomenten la relación entre geometría y medida como por ejemplo la comparación de tamaños de figuras y sus correspondientes áreas y perímetros o relaciones entre áreas y volúmenes de cuerpos.

En el modelo se proponen las fases de enseñanza, que ayudan a la capacidad de razonamiento matemático de los alumnos, tienen la característica de ser secuenciadas y de estar todas presentes en cada uno de los niveles de aprendizaje, así:

Fase 1 (Información): es básicamente de toma de contacto, donde el docente comunica a los estudiantes los conceptos a trabajar, la forma de hacerlo y los materiales a utilizar durante el trabajo. De otro lado, también sirve para averiguar los conceptos previos y el nivel de razonamiento de un tema especifico.

Fase 2 (Orientación Dirigida): teniendo como recurso los materiales, los estudiantes resuelven problemas de los cuales aprenden los principales conceptos y propiedades de la geometría.

Fase 3 (Explicitación): los estudiantes comunican las observaciones hechas y las experiencias vividas durante la realización de actividades. Se presenta un cambio en el lenguaje.

Fase 4 (Orientación Libre): los estudiantes deben aplicar los conocimientos obtenidos hasta el momento en la realización de nuevas actividades propuestas. El profesor es un observador que a la vez da indicios o pistas para la resolución de problemas.

Fase 5 (Integración): los estudiantes deben adquirir una visión más global de los contenidos y métodos, que al relacionarlos con conocimientos anteriores debe darse como resultado un conocimiento nuevo. La tarea del docente en este caso es ayudar a proporcionar dichas comprensiones.

2.2.3.2. PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA DE ORLANDO MESA BETANCUR.

Orlando Mesa, en su propuesta argumenta que en ésta se pueden utilizar métodos como el inductivo, deductivo, analítico o el comparativo, los cuales deben ir en pro de la consecución de un aprendizaje significativo, y para ello deben estar en función de las necesidades e intereses que surjan en el aula, de las distintas tareas y situaciones problema y de la diversidad de los alumnos. La utilización de varios métodos tiene la bondad de evitar la monotonía, permitiendo la implementación de estrategias tratando que sean lo más creativas posibles.

Así mismo, este autor afirma que el saber geométrico matemático está vinculado a la axiomática, llegando a ésta por medio de la deducción lógica de la comprensión de términos y proposiciones; sin embargo la axiomática no puede ser el punto de partida en la enseñanza elemental, y es por ello que plantea que es el mundo de las percepciones, de los movimientos, y de las trasformaciones de los cuerpos el que permite en un momento dado la construcción del significado de la geometría. Es así como la geometría euclidiana nace de una serie de representaciones perceptivas vinculadas con los cuerpos, sus formas constitutivas y las relaciones entre ellas, y posteriormente el razonamiento lógico será la base y fundamento de sus proposiciones hasta llegar a la axiomática en los niveles más avanzados.

Teniendo en cuenta lo anterior, los conceptos geométricos a nivel escolar deben cumplir dos propósitos esenciales: “servir de mediadores para la cualificación y ejercitación de razonamiento y aportar conocimientos y métodos indispensables para el logro de otros aprendizajes"[9]

Para implementar la propuesta pedagógica en la enseñanza de la geometría, el autor propone tres fases, a saber:

1. **Fase de Indagación**: permite la utilización de experiencias previas de los estudiantes para indagar por las concepciones y procedimientos que utilizan éstos en las situaciones propuestas sobre una temática determinada.

2. **Fase de Intervención**: durante ésta se proponen nuevas actividades para cualificar y ejercitar los esquemas cognitivos iniciales, a la vez que el alumno debe justificar el por qué de sus acciones o procedimientos, llevándolo (con la asistencia del profesor) a unos niveles de conceptualización más altos.

3. **Fase de Socialización:** es la puesta en común de las experiencias realizadas para hacer concientes los aprendizajes adquiridos y los errores cometidos.

Durante cada una de estas fases se proponen actividades de tipo libre, orientadas y creativas, las cuales van desde representaciones espontáneas propuestas por el maestro, hasta las modificaciones o situaciones nuevas planteadas por los estudiantes. Así mismo, durante las diferentes actividades, el autor propone evaluar continuamente al alumno en aspectos como el interés, capacidad para aplicar conocimientos, habilidad para comprender instrucciones, informaciones y procedimientos, participación, capacidad crítica, creatividad para buscar nuevos métodos, actitud, perseverancia, formas de representación que utiliza, capacidad para comunicarse y la forma como analiza, crea y resuelve problemas.

[9] MESA Orlando. Iniciación a la Geometría, p 2.

Para la evaluación, Mesa tiene en cuenta las orientaciones dadas por el MEN en cuanto a las competencias o capacidades que deben tener los estudiantes, ellas son: interpretativa, argumentativa y propositiva. La primera está relacionada con la construcción de significados, análisis, síntesis, generalización y abstracción; la segunda con la "capacidad para sustentar, explicar o demostrar conceptos o proposiciones y procedimientos que surgen en una situación de aprendizaje", y la tercera, con el uso y aplicación de los conocimientos en otros contextos.

Además de las fases propuestas para la enseñanza de la geometría y de los diferentes tipos de actividades que se pueden llevar a cabo dentro de éstas, y de la evaluación, el autor también propone algunos criterios (desde una visión constructivista) que orientan su propuesta de intervención, ellos son: aceptar como punto de partida las concepciones que los niños han construido de sus entornos particulares, facilitar el aprendizaje autónomo y lograr que los niños se sientan protagonistas del mismo, utilizar diversas formas de representación que incluyan varias posibilidades de acción y comunicación como pueden ser la expresión gestual y corporal, favorecer las actividades donde se tome conciencia respecto a un objeto, una persona y una información cualquiera; valorar el papel de la motivación, posibilitar la información que valore permanentemente los procesos de enseñanza con los procesos de aprendizaje, promoción de varias formas de interacción, buscar la funcionalidad de los aprendizajes para la aplicación práctica del conocimiento adquirido y diseñar situaciones problema en donde se promueva el pensamiento creativo y se desarrollen competencias lógico-matemáticas como anticipar sucesos, plantear hipótesis y considerar diferentes posibilidades para resolver actividades.

2.2.3.3. PARALELO ENTRE EL MODELO DE VAN HIELE Y ORLANDO MESA.

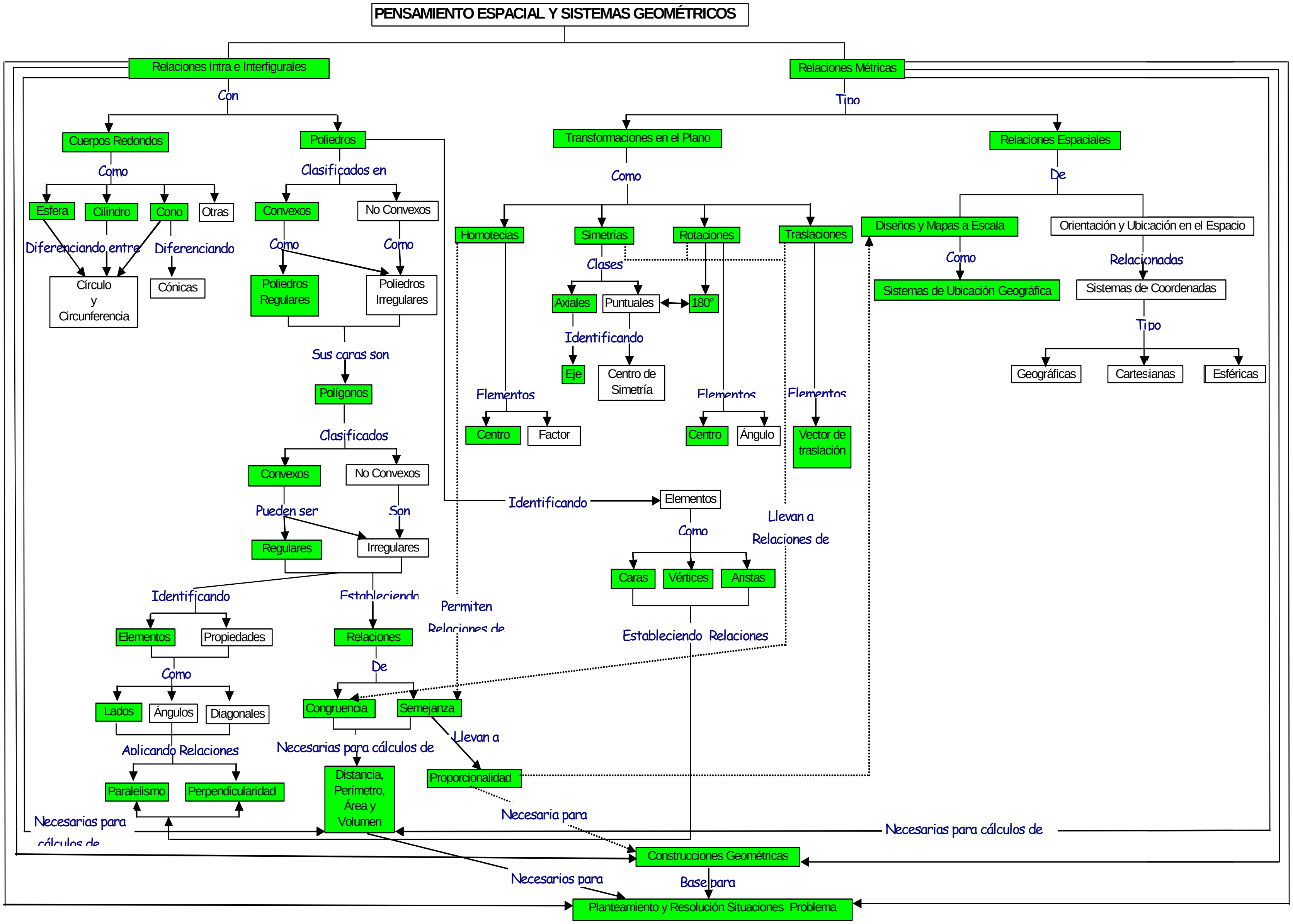
SIMILITUDES.
• Los dos modelos propenden por un razonamiento lógico-matemático, donde el alumno aprenda los procesos de mostración (en la básica primaria) hasta llegar a la demostración formal. • Están de acuerdo que el estudiante descubra las propiedades de las figuras y establezca relaciones entre ellas y sus propiedades. • Ambos le dan importancia al lenguaje, aspecto que es importante al momento de hacer representaciones, las cuales son fundamentales en matemáticas. • En cuanto a la organización o presentación de los modelos, los Van Hiele presentan fases de enseñanza donde cada una recoge todos los niveles propuestos por ellos, y Orlando Mesa hace prácticamente lo mismo al presentar diferentes actividades dentro de cada una de las fases o etapas para la enseñanza de la geometría. • Orlando Mesa habla de la fase de indagación de los sáberes previos como punto de partida de la enseñanza de la geometría, pero los trata dentro del proceso evaluativo (evaluación inicial), mientras que para los Van Hiele es la primera fase dentro de la enseñanza de la geometría, llamándola “fase de Información”, en esencia los dos se refieren a lo mismo. • Orlando Mesa hace explicito su modelo basado en el constructivismo, mientras los van Hiele no hacen alusión a ello, pero en la forma como desarrollan su modelo, la forma de trabajarlo y las pretensiones que se tienen hace ver que su modelo también es de orientación constructivista.

DIFERENCIAS.	
MODELO DE VAN HIELE.	**MODELO DE ORLANDO MESA.**
No hace referencia a métodos.	Hace referencia a la aplicación de métodos Inductivos y Deductivos en la enseñanza de la Geometría.
Los Van Hiele no se refieren a procesos de evaluación dentro de cada uno de los niveles, solo se remiten a la evaluación inicial (fase 1).	Hace referencia a la evaluación durante las diferentes etapas de la intervención, lo hace soportándose en documentos rectores.

2.2.4. ASPECTO DISCIPLINAR DE LA GEOMETRÍA.

El conocimiento matemático trabajado en el aula de clases, está referido a todos los pensamientos matemáticos, haciendo énfasis en el geométrico, retomando los ejes temáticos propuestos por los Estándares Curriculares para el área de Matemáticas a saber: las Relaciones Inter e Intrafigurales y las Transformaciones y Relaciones Espaciales, como lo muestra la siguiente red.

2.2.4.1. RED DE C0NCEPTOS Y RELACIONES ESPACIALES:



2.2.4.2. RELACIONES ESPACIALES Y MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

Las diferentes relaciones espaciales toman sus nombres de los diferentes espacios como son el Topológico, Euclídeo y Proyectivo, las cuales son entendidas como las distintas conexiones que se pueden hacer entre dos o más elementos (representaciones) presentados dentro su respectivo espacio cuando éstos sufren transformaciones, definidas éstas como la o las operaciones geométricas que permiten crear una nueva figura a partir de una previamente dada. La nueva figura se llama "homólogo" de la original, siendo una transformación directa si el homólogo conserva el sentido del original en el plano cartesiano, e inversa si su sentido es contrario.

Cada uno de los espacios permite hacer o efectuar diferentes tipos de representaciones, y es así como en el Topológico se pueden presentar gráficas de acercamientos, separación, orden, entorno y continuidad, donde las transformaciones sufridas por una figura hace que se presenten alteraciones en los ángulos, las longitudes, las rectas, las áreas, los volúmenes, los puntos y las proporciones; en el Euclídeo se pueden ver representaciones de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes como propiedades que permanecen constantes, cuando las figuras representadas son sometidas a transformaciones “rígidas”; es decir, a movimientos en el plano horizontal o vertical o giros sobre alguno de sus ejes; y por último, el plano Proyectivo, comprende la representación de transformaciones en las cuales las longitudes y los ángulos experimentan cambios que dependen de la posición relativa entre el objeto representado.

De lo anterior, se definen las diferentes relaciones espaciales, las cuales según Piaget son adquiridas por el niño en el orden que aquí se presentan:

2.2.4.2.1. RELACIONES ESPACIALES

- **Topológicas**: son aquellas relaciones que no varían por una deformación bicontinua (dos veces continua, que no varía ni por estirar ni por girar), pueden ser acordes al número de lados, abierto, cerrado y orden, entre otras.

- **Proyectivas**: son las relaciones que varían al cambiar el punto de proyección (el punto de vista desde donde los miro), como por ejemplo: arriba, abajo, derecha, izquierda, detrás y delante.

- **Métricas**: son todas las relaciones que dependen de medidas, como por ejemplo: paralelo, perpendicular y ángulo recto, entre otras.

Ahora, las transformaciones que sufren las figuras en el plano son causadas por algunos movimientos o aplicaciones como las Isometrías, las cuales tienen la bondad de mover una figura entre dos espacios métricos conservando las mismas (iso) distancias (metría) entre sus puntos, no permitiendo que la figura quede deformada.

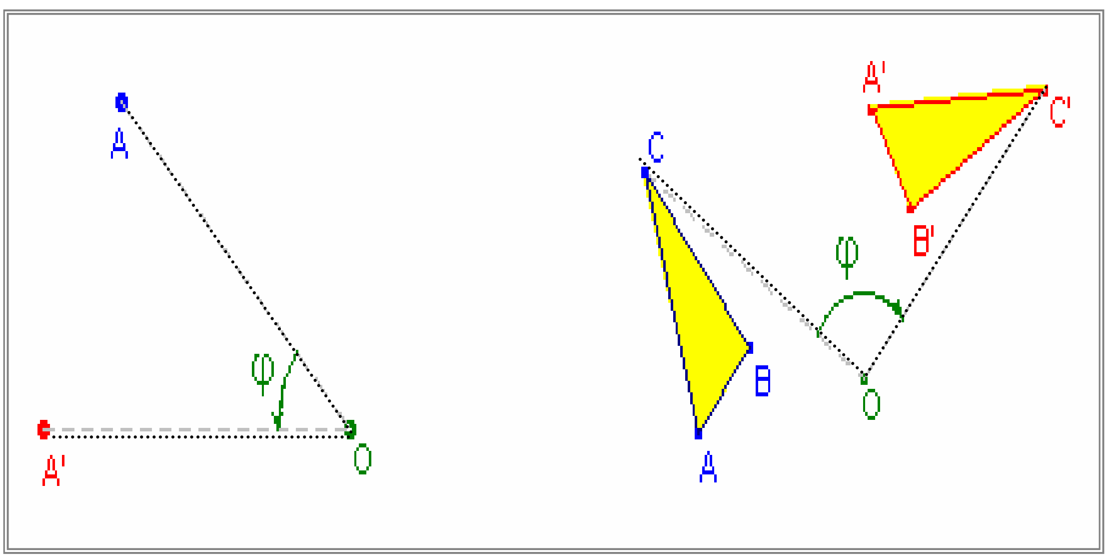
2.2.4.2.2. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

- **ISOMETRÍAS BÁSICAS.**

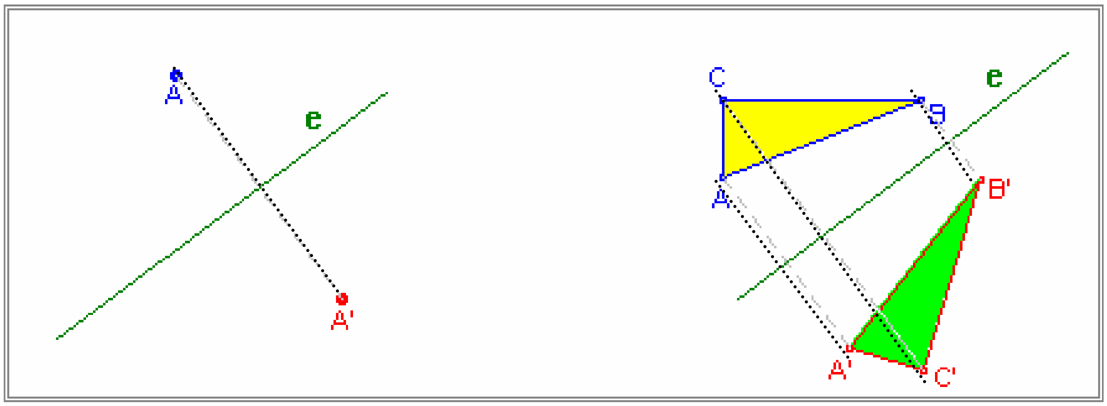
Son los giros, las simetrías y las traslaciones, pero es factible crear nuevos movimientos de figuras en el plano a partir de composiciones entre dichas isometrías, siendo entonces posibles composiciones como las de un giro con una traslación, de una traslación con un giro, de una simetría con una traslación y de una traslación con una simetría.

Definiciones de algunas isometrías.

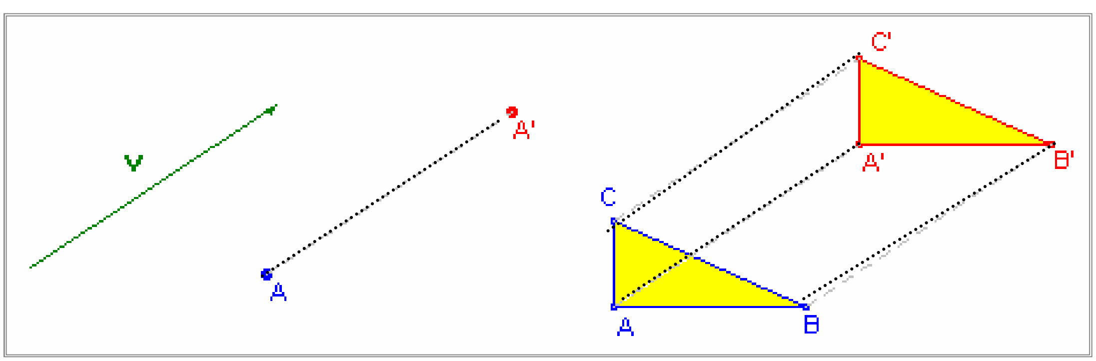
- **Giro**: es la rotación de un objeto alrededor de un punto **o** centro **O**; es una transformación de los puntos de la figura en el plano, de modo que los puntos transformados forman una segunda figura (transformada) congruente con la original, tal que los correspondientes segmentos formados entre cada uno de los puntos de las figuras y el centro de rotación son congruentes, como también lo son los ángulos (cuyo origen es el centro de rotación) formados entre dichos segmentos. Dicho en otros términos, se denomina giro de centro un punto **O** del plano y ángulo orientado **φ** (positivo si se describe en sentido contrario al giro de las agujas del reloj y negativo en caso contrario) al movimiento que hace corresponder a cada punto **A** otro punto **A'** tal que la distancia entre **OA** es igual a la distancia **OA'** (OA = OA') y ángulo **AOA'**, con vértice en **O** es igual en amplitud y sentido al ángulo **φ**. Veamos la representación gráfica:



- **Simetría axial**: "se denomina simetría axial de eje una recta dada ***e*** a una transformación que hace corresponder a cada punto **A** del plano otro punto **A'** de forma que la recta ***e*** sea mediatriz del segmento **AA'**"[10].



- **Traslación**: es una transformación de los puntos de la figura en el plano, de modo que los puntos transformados forman una figura congruente con la original, siendo las longitudes entre los extremos de los segmentos que unen los correspondientes puntos de las figuras congruentes y paralelos. En términos más precisos, la traslación es o está "definida por un vector dado ***v*** al movimiento que hace corresponder a cada punto **A** del plano otro punto **A'** tal que el vector definido por **A** y **A'** tiene los mismos módulo, dirección y sentido que el vector dado ***v***. De la definición se deduce que los únicos elementos dobles que existen en una traslación son las rectas paralelas al vector ***v*** si bien sus puntos no son dobles pues ninguno se transforma en sí mismo."[11]. Veámoslo gráficamente:



2.2.5. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

Antes de empezar a desarrollar propiamente el tema relacionado con el planteamiento y resolución de problemas, es necesario aclarar lo que realmente significan los términos “ejercicios y problemas”, ya que en la escuela estos son utilizados frecuentemente sin hacer ninguna diferenciación al respecto. Algunos autores proponen tomar como ejercicios todas aquellas tareas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo, donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución, mientras que el problema difiere de un ejercicio en cuanto a que en el problema no aparecen o se dan todos los datos completos y, por lo tanto el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conduzca con certeza a la solución, definiéndose desde este punto de vista un problema matemático como una meta que supone ser alcanzada, donde existen obstáculos para lograr el objetivo, que a la vez requiere de deliberación y se parte del conocimiento del algoritmo útil para resolver el problema.

Labarrere (1996, citado por Yulaimis Leyva), Afirma que “un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar”[12].

Otros autores no definen directamente lo que es un problema, pero si dan a conocer las condiciones necesarias que para éste cumpla con la condición de serlo, siendo ellas el que exista una persona que desee resolverlo, un estado inicial y un estado final, y algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro. Caso parecido es el planteado por Luz Manuel Santos Trigo, quien afirma que para que se cumpla la condición de problema, se hace necesario que se caracterice por la existencia de un interés (ya sea de una persona o un grupo de individuos que quieren o necesitan resolverlo), la no existencia de una solución

[12] LEYVA GONZÁLEZ Yulamis. Estrategia para estimular el proceso de formulación de problemas geométricos en la secundaria básica, p. 7.

inmediata, la presencia de diversos caminos o métodos de solución, la intención por parte de quien está comprometido a resolverlo de llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa situación.

Otras definiciones de problemas presentadas por Reinaldo Sampedro, tomadas de otros autores, pero que de una u otra forma tienen que ver con los requerimientos y definiciones anteriores, son: “Un problema es toda tarea que requiere de un esfuerzo por parte del alumno para ser resuelto” (Antibi, A. 1990), “Contradicción entre una situación actual del objeto y una situación deseable. Revela un segmento de la realidad donde el conocimiento es insuficiente, parcial, o en el cual prevalecen modos de actuación insatisfactorios, expresando al mismo tiempo, que la respuesta o solución no está contenida en la región de lo conocido. Ello conduce al despliegue de una actividad para resolver la contradicción y llegar a la situación deseable” (Centro de Estudios Educacionales, 1999); “Se refiere a aquellas cosas que son verdaderamente problémicas para las personas que trabajan en ellas, se asume que estas personas no tienen a mano un procedimiento de rutina para la solución” (Schoenfield, A. 1993), “Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a transformación” (Campistrous, L. 1996), y “Un ejercicio es un problema si y solo si la vía de solución es desconocida por la persona” (Llivina, M. 1999).

Por otra parte, además de las simples definiciones de problema y los requisitos que deben cumplir para poder serlo, éstos también se pueden clasificar como cerrados y abiertos, siendo los primeros caracterizados porque la solución se deduce en forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema, la cual es suficiente (completa) para su resolución, siendo necesario solo la aplicación lógica de los datos; mientras que en los problemas abiertos, el resolutor necesita ir más allá de la información recibida teniendo que modificar los significados atribuidos a los elementos del ejercicio, donde los recursos lógicos son insuficientes precisando entonces de la creatividad. Este tipo de problemas son más cercanos a la vida real, se hace necesario hacer consideraciones para la respuesta al no disponerse de toda la información necesaria.

El planteamiento y resolución de problemas actualmente es uno de los centros de atención de aquellos que tienen la tarea de educar, especialmente en el campo de las matemáticas, ya que la resolución de los problemas planteados en el aula hacen parte de los procesos básicos en la enseñanza de esta área del conocimiento, ya que permiten potenciar el aprendizaje de las matemáticas y desarrollar a su vez en los estudiantes el pensamiento lógico.

Para potenciar el aprendizaje de las matemáticas, éstas deben ser enseñadas, en lo posible por medio de situaciones problema, provenientes tanto de la vida diaria, de las matemáticas y de otras ciencias, donde al momento de ser diseñadas por parte del docente, este debe tener en cuenta elementos como el contexto o realidad social que rodea al alumno, que comprometan la afectividad y que vayan encaminadas al desarrollo del pensamiento y a la adquisición de concepto(s).

Al respecto, Miguel de Guzmán, afirma que la enseñanza de las matemáticas a partir de situaciones problémicas pone énfasis en los procesos de pensamiento y en los procesos de aprendizaje, con el objetivo de propiciar aprendizajes más eficaces. Para ello, plantea que las situaciones deben favorecer aspectos como la metacognición, el enlace con otros conceptos matemáticos, la lúdica y el resolver problemas de otras áreas; la forma como plantea lo anteriormente expuesto es que “el alumno manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente; que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental; que adquiera confianza en si mismo, se divierta con su propia actividad mental; que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana y, que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia."[13]

Polya, complementa a Miguel de Guzmán al explicitar los pasos o fases que se deben seguir para resolver problemas, las cuales son Comprensión del problema, Concepción de un plan, Ejecución del plan y Visión retrospectiva.

Ahora, Reinaldo Sampedro y otros autores, no expresan directamente lo que debe propiciar las situaciones problemas planteadas al estudiante, como tampoco plantean los pasos a seguir durante la solución de las mismas, pero a cambio plantean algunos métodos y procedimientos para ser implementados en el aula de clase, que de un modo u otro complementan los dos aportes anteriores. El derrotero a seguir sería:

- Tanto la presentación como el desarrollo de los contenidos nuevos, deben ser presentados a partir del planteamiento y solución de problemas provenientes del entorno del estudiante, siendo enmarcados dentro de la matemática.

- Durante el desarrollo de los contenidos, se debe tener en cuenta la relación de éstos con otras áreas de la matemática, ya que esto ayuda al alumno a la comprensión de los conceptos, al establecimiento de relaciones y al establecimiento de estrategias o procedimientos en el trabajo a realizar.

- Se deben incorporar habilidades matemáticas (acerca del procesamiento de la información, la estimación y el esbozo de figuras y modelos geométricos sencillos) que amplíen los procedimientos lógicos para el planteamiento y solución de problemas prácticos.

Por otra parte, Orlando Mesa, propone iniciar la enseñanza de la geometría en la escuela desde las concepciones que los niños han construido en sus entornos

[13] Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas del MEN, p. 41.

particulares, desarrollando pensamiento a partir de situaciones problema ya que, según el autor, éstas son "espacios de actividades significativas que permiten cualificar los aprendizajes y promover el pensamiento reflexivo y creativo". Dichas situaciones deben ayudar a los niños a anticipar sucesos, organizar datos, ordenar acciones, considerar diferentes posibilidades para resolver las actividades, hacer conjeturas, plantear hipótesis, asociar conceptos, expresar y justificar sus acciones.

Mesa, plantea que las situaciones problema deben ser diseñadas siguiendo una guía teórica de modo que las preguntas y las actividades allí propuestas permitan desencadenar procesos de matematización. Para el diseño de dichas situaciones propone seguir un derrotero que contenga una red conceptual del saber formal acorde con las condiciones individuales de los alumnos y su contexto sociocultural, un motivo que facilite las actividades y el planteamiento de interrogantes, el establecimiento de varios niveles de complejidad conceptual tanto en las actividades como en las preguntas, la estrategia de intervención didáctica en la cual se diferencien los momentos de la enseñanza y los aprendizajes creativos, la elección de ejercicios y problemas prototipo que estén al alcance de los estudiantes, así como también especificar las posibilidades para la ampliación, cualificación y desarrollo de los conceptos tratados.

Hasta el momento solo se ha hablado de la resolución de problemas, pero no se ha tenido en cuenta la formulación de éstos por parte del estudiante, lo cual puede ser enfocado como un caso especial del primero; pero lo cierto es que esta última podría llegar a ser un procedimiento valioso en cuanto a los aportes que pueden hacer al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en este caso concreto de la geometría.

El proceso de formulación de problemas matemáticos por parte de los estudiantes puede desarrollarse desde los primeros grados, a partir de la resolución de problemas.

Varios autores coinciden en afirmar que la formulación de problemas ayuda a mejorar los niveles de percepción, la memoria, la creatividad, el establecimiento de relaciones, la solidez de los conocimientos, a desarrollar la expresión oral y escrita, al análisis y a la síntesis, a la abstracción y a la generalización, como operaciones mentales que contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico.

El proceso de formulación de problemas está muy ligado al proceso de resolución de los mismos, es así como Polya, citado por Sampedro, no solo se refirió a la solución sino también al planteamiento, afirmando que "la experiencia de un alumno en matemática será incompleta mientras no tenga ocasión de resolver un problema que él mismo haya inventado"[14].

La afirmación de Polya corresponde a la concepción de que cuando el estudiante formula un problema debe utilizar como recurso todos los conocimientos matemáticos que posee, además trabajar hacia atrás (devolverse) para poder formarse un juicio crítico en cuanto a lo correcto o no del problema formulado, de la pertinencia del mismo y la viabilidad de la solución.

Alberto Labarrere, citado por Sampedro Ruiz, afirma que "Es mas importante descubrir problemas que resolverlos; una psiquis que problematiza su realidad se anticipa a las futuras experiencias, y por lo tanto puede dar mejores respuestas a los problemas de la vida cotidiana que se presentan"[15], lo que muestra que el proceso de formulación y resolución son procesos complementarios, y por ello el estudiante, al enfrentarse a uno de los dos procesos anteriores debe conocer o manejar aspectos como son el conocer el concepto de problema, reconocer los componentes de un problema, platear y buscar relaciones entre los componentes, desarrollar habilidades en la traducción del lenguaje común al matemático y viceversa (caso que también plantea Raymond Duval al hablar de las diferentes

[14] SAMPEDRO RUIZ Reinaldo y otros. Propuesta metodológica para la formulación de problemas en la secundaria básica cubana, p. 2.

[15] Ibid, p. 6.

representaciones matemáticas y del paso de unas otras para la comprensión de los conceptos), reconocer modelos matemáticos para solucionar y plantear tipos de problemas, y saber determinar problemas auxiliares.

J. Kilpatrick, citado por Yulamis Leyva, también hace énfasis en la importancia de formular problemas matemáticos, no solo como medio sino también como meta de la enseñanza, señalando que “la experiencia de descubrir y crear por sí mismos problemas matemáticos siempre debería ser parte de la educación de los estudiantes"[16] .

Hasta ahora, puede verse como la formulación de problemas en la enseñanza de las matemáticas es tan importante como su solución, de donde se deduce que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, uno de los objetivos centrales (aparte de la resolución de problemas) debería ser que el alumno aprenda a formular y resolver sus propios problemas, ya que esto hace parte de su formación matemática.

La anterior perspectiva muestra que los maestros están obligados a implementar recursos, métodos, procedimientos y estrategias en su actividad pedagógica para lograr que los alumnos planteen y resuelvan sus propios problemas, así como el idearse la forma de evaluarlos, de variar el planteamiento sin alterar las condiciones iniciales, de modificar los datos y las preguntas de modo que el resto del problema se mantenga constante, de determinar si el problema debe considerar otros aspectos fuera de los que contiene, de establecer relaciones con otros problemas y si es posible hacer una representación pictórica del mismo, entre otras.

[16] LEYVA GONZÁLEZ Yulamis. Estrategia para estimular el proceso de formulación de problemas geométricos en la secundaria básica, p. 2.

El proceso de formulación de problemas a nivel geométrico puede ser desarrollado tratando de buscar un método generalizado, no dejando este procedimiento a la espontaneidad de los estudiantes. Según Cruz (2002, citado por Yulamis Leyva), un buen método requiere de las siguientes etapas de forma secuencial:

1. Selección de un objeto conocido como base para la formulación del problema, permitiendo que el estudiante parta de una situación inicial.

2. Hacer que el estudiante haga uso de sus habilidades mentales para que logre descomponer el objeto geométrico (conformado por triángulos, circunferencias, cuadrados, rectángulos, segmento y ángulo, entre otros) en las partes que lo constituyen, pudiendo así hacer una clasificación de sus componentes. Esta etapa tiene un carácter de toma de conciencia.

3. Asociación de componentes, es decir, identificar en cada uno de los elementos clasificados una o más propiedades, tales como área perímetro, entre otros. Dichas clasificaciones dependen del nivel cognitivo del estudiante.

4. Búsqueda de relaciones entre los elementos ya clasificados, las cuales se establecen a través de sus propiedades. En algunos casos no surgen de inmediato, pues a pesar de haber logrado una clasificación de los elementos constituyentes del objeto, por ejemplo triángulo y segmento, y la asociación de los conceptos (longitud y área), no se establecen sus relaciones.

5. Para mejorar el establecimiento de relaciones, se hace necesario que el alumno haga clasificaciones de diversos objetos, asociándoles a su vez el mayor número de propiedades posibles. El profesor debe orientar al alumno en la consecución del objetivo por medio de preguntas que generen confianza.

6. Planteo del problema: se trata de que el estudiante comunique el problema planteado de la forma más coherente posible.

Todas las acciones descritas en los puntos anteriores ayudan a la formulación del problema teniendo como referente un objeto inicial dado. Además se debe hacer la resolución del problema formulado y el perfeccionamiento del mismo.

El seguimiento de estas etapas en el aula de clase, se debe hacer en forma secuencial, ello es:

1. Diagnóstico inicial, que dé cuenta al maestro de los conocimientos previos y habilidades (gráfica y resolutora de problemas) que poseen sus estudiantes para la formulación de problemas de geometría.

2. Análisis de las dificultades de los estudiantes y ayudarlas a superar.

3. Enseñanza-aprendizaje de la propia estrategia: esta tarea no debe ser explicita, ya que no se trata de elaborar una estrategia en particular, sino de obtener problemas. Para su consecución, el maestro expone ejemplos donde muestra con su accionar las diferentes etapas para proponer problemas; así mismo, también debe formular problemas sin sentido para ser puestos a escrutinio o críticas de los estudiantes para tratar de reformularlos o perfeccionarlos de modo que se conviertan en verdaderos problemas.

   Con lo anterior, se trata de hacer matemáticas en vivo, donde los alumnos tengan una participación activa y directa, hasta lograr que éstos formulen sus propios problemas.

4. Sistematización y aplicación de lo aprendido: se trata de hacer que la formulación de problemas entre a formar parte de la propia actividad matemática escolar.

Además de las bondades de tipo cognitivo, la formulación de problemas es vista como una forma de potenciar el interés de los estudiantes por la matemática, así como su sentido crítico hacia ella; pero además de ello, para el caso del presente proyecto, las formulaciones hechas por los estudiantes también tienen la bondad de permitir analizar la aprehensión de los conceptos geométricos y las relaciones que establecen entre ellos.

3. DISEÑO METODOLÓGICO.

3.1. POBLACIÓN Y MUESTRA.

La población está conformada por tres grupos de grado segundo (ciento veintiocho (128) alumnos) de la Institución Educativa Javiera Londoño del barrio Sevilla del municipio de Medellín, la cual es de carácter oficial y cubre los niveles de preescolar, básica y media.

Los alumnos que acuden a esta Institución provienen de los barrios Sevilla, el Bosque y Campo Valdés, entre otros. En su gran mayoría pertenecen a los estratos socioeconómicos 1 y 2. El aspecto disciplinar de los niños se caracteriza por el desacato de la norma, la falta de escucha y poca disponibilidad para la realización de actividades académicas.

La muestra está compuesta por el grupo 2C, con un total de 43 alumnos. La selección se hizo teniendo en cuenta que la intervención en este grupo fue más regular y se obtuvo mayor número de evidencias del trabajo realizado durante la práctica pedagógica, aspectos que dan mayor fiabilidad al estudio de las características de la población y a los resultados obtenidos, permitiendo que sean lo más precisos y objetivos posibles.

3.2. DESCRIPCIÓN DEL ENFOQUE INVESTIGATIVO.

El método elegido para el presente proyecto es el de la investigación Etnográfica, ya que ésta permite la aproximación a los protagonistas, en este caso los alumnos de segundo grado de la Institución Educativa Javiera Londoño, dentro de un escenario (aula de clase) mediante la realización de actividades o acciones que conlleven a la construcción y deconstrucción de significados. Los anteriores elementos al ser interrelacionados se ubican en un determinado contexto, el cual va más allá de un simple escenario ya que incluye historia, costumbres y lenguaje en un ambiente interactivo natural.

La investigación Etnográfica a nivel educativo permite descubrir y describir las acciones de los participantes dentro de un contexto, pero su alcance puede ir incluso más allá de la descripción, incluyendo también la comprensión e interpretación (fruto de una reflexión constante y aportes teóricos) de las actividades realizadas como de los productos obtenidos, hasta llegar a teorizaciones o modelizaciones, en este caso de problemas formulados por los estudiantes.

3.3. FASES DEL PROYECTO.

Durante la realización de este proyecto se siguieron las siguientes fases:

<table>
<tr><th colspan="5">Fases o Etapas seguidas durante el Proyecto</th></tr>
<tr><th>Fase</th><th>Periodo</th><th colspan="2">Actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">2004-2</td><td rowspan="2">Observación</td><td>Institucional</td><td>• Análisis de documentos rectores de la Institución.
• Redacción de Informe final.</td></tr>
<tr><td>Aula</td><td>• Observaciones de situaciones en cuanto a los componentes disciplinar (geométrico), didáctico y pedagógico.
• Redacción de informe final.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>• Exploración del manejo de conceptos en los alumnos mediante actividades o</td></tr>
</table>

Fases o Etapas seguidas durante el Proyecto				
Fase	**Periodo**	**Actividad**		**Descripción**
2 y 3	2005-1 y 2	Intervención	Diagnóstico	formulación de problemas. • Elaboración de guías para la intervención en el aula-elaboración del diario planeador. • Recogida de evidencias como preguntas formuladas por los alumnos.
			Intervención	• Diseño de propuesta de intervención en el aula para la enseñanza de la Geometría. • Construcción y deconstrucción de significados matemáticos a nivel individual y grupal. • Implementación de actividades de aprendizaje. • Talleres de repaso con énfasis en la resolución de problemas. • Formulación de problemas por parte de los estudiantes. • Anotaciones en el diario pedagógico.
			Evaluación	• Formulación de problemas por parte de los estudiantes. • Socialización de problemas formulados. • Análisis de los problemas formulados y de las situaciones suscitadas durante las sesiones.
4	2006-1	Sistematización		• Categorización, Análisis e Interpretación de los problemas formulados por los estudiantes.

3.4. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.

Se utilizó como técnica de recolección de datos la observación directa durante las sesiones de clase. Para ello se tuvo en cuenta los pasos sugeridos por Miguel Martínez durante la realización del trabajo de campo y, precisamente éstos son los que los distinguen la investigación cualitativa de otro tipo de investigaciones, ellos son:

1. Lugar donde se busca la información o los datos que se necesitan: se debe tener preestablecido el lugar exacto, el qué datos recoger y con quién hablar,

entre otros, de modo que las hipótesis iniciales vayan siendo más válidas con la recolección de nuevas informaciones de modo que se vayan perfilando posibles estructuras y conclusiones teóricas.

2. La observación debe ser fiel a la realidad del fenómeno que se estudia, procurando recoger la información en la forma más completa posible, tratando de evitar variables preconcebidas y que sea potencialmente significativa.

3. Sugiere que los procedimientos utilizados permitan realizar repetidamente las observaciones. Para ello recomienda grabar entrevistas, filmar las escenas, tomar fotografías y hacer anotaciones, entre otras.

4. Aunque la investigación cualitativa maneja muchos tipos de información, se debe buscar aquella que ayude a descubrir las estructuras del objeto de estudio. Algunos tipos de información que ayudan a ello son: “el contenido y la forma de la interacción verbal de los sujetos, el contenido y la forma de interacción verbal con el investigador en diferentes situaciones y en diferentes tiempos, la conducta no verbal: gestos, posturas, mímica, etcétera; los patrones de acción y no acción: valores, costumbres y rutinas que generan su comportamiento o pasividad, y los registros, archivos, documentos, artefactos y todo tipo de rastros y huellas”[17]

5. La investigación Etnográfica debe estar a cargo de una sola persona, y que sea ella misma la que realice las entrevistas y la observación, así como sea la que analice el material y escriba el informe final.

---

[17] MARTÍNEZ M. Miguel. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Editorial Trillas. México. 2004, p. 50.

6. El investigador debe analizar o documentarse acerca del cómo otros investigadores obtienen datos o qué instrumentos utilizan para la investigación de un tema en particular.

7. Tener en cuenta que las tareas de recabar datos, categorizarlos e interpretarlos no tienen una secuencia temporal.

8. El investigador etnográfico debe hacer parte de la situación que estudia sin pensar que puede contaminar la información, ya que es imposible recoger datos incontaminados.

Teniendo en cuenta las anteriores sugerencias y el tipo de información que pudo ser valiosa para la consecución de los objetivos del presente proyecto, se presenta a continuación algunas técnicas e instrumentos que fueron utilizados para la recolección y el procesamiento de la información durante la práctica pedagógica:

3.4.1. TÉCNICAS:

3.4.1.1 OBSERVACIÓN PARTICIPATIVA:

Se considera que esta técnica es adecuada para la valoración de trabajos a nivel escolar, en este caso en la práctica pedagógica, ya que según Miguel Martínez[18] ésta permite al investigador participar en las actividades del grupo objeto de investigación, al tiempo que puede ir recolectando información (de fuentes primarias dentro del contexto) que trate de responder a preguntas o interrogantes planteados en cuanto a comportamientos y actitudes de los participantes (en este

[18]MARTÍNEZ M. Miguel. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Editorial Trillas. México. 2004, p. 63-64

caso haciendo énfasis en la formulación de problemas y la construcción de conceptos), así como favorecer que al hacer análisis e interpretaciones de ésta detecte estructuras o patrones.

3.4.1.2. TRABAJO DE CAMPO.

Para la realización del trabajo de campo dentro de un tipo de investigación Etnográfica, según Miguel Martínez, se deben seguir algunos pasos o criterios preestablecidos tales como acudir al sitio exacto donde está la información, saber que tipo de datos recoger y con quien interactuar; que la observación no deforme o distorsione la realidad del fenómeno que se estudia, que los procedimientos utilizados para la recolección dicha información permita observaciones repetidas, que la tarea de recabar, categorizar e interpretar los datos sea continua durante todo el proceso de observación y, por último, que aunque el observador interactúe con el medio observado debe ser objetivo para no contaminar los datos recolectados.

Además de las sugerencias anteriores, es importante establecer una muestra representativa de la población, tener claras las variables a observar y el tipo de instrumentos a utilizar.

Para la recolección de datos del presente proyecto se utilizaron instrumentos como el diario pedagógico, talleres para ser trabajados dentro del aula de clase, los problemas formulados por los alumnos y fotografías. Ver anexos.

3.4.2. INSTRUMENTOS.

- **DIARIO PEDAGÓGICO.**

Definido como el cuaderno o instrumento de registro del investigador, en él se anotan las observaciones hechas en forma completa, precisa y detallada, así como los respectivos análisis o valoraciones acerca de lo observado.

El diario pedagógico de este proyecto estuvo dividido en dos partes, en la primera, Diario Planeador, se consignó la "planeación" de las actividades a llevar a cabo durante las sesiones de clase, y en la segunda se plasmaron la fecha, el tema, los objetivos de la sesión, la descripción y análisis de la misma, la evaluación del docente y del estudiante en cuanto a las formulaciones hechas por ellos, los logros, dificultades a nivel cognitivo y actitudinal y las conclusiones de la sesión de clase.

Así mismo, al interior del diario, también se plasmaron apartados referidos exclusivamente a interrogantes, dudas y aseveraciones planteados por los alumnos, transcripciones de problemas de geometría formulados por los estudiantes, así como sus respectivos análisis y categorizaciones, fotografías, y aportes de los estudiantes durante las socializaciones de clase, entre otras.

4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN.

4.1. ENFOQUE TEÓRICO.

Para el desarrollo de la propuesta de intervención se tuvo en cuenta la concepción de aprendizaje constructivista, la cual sienta las bases en las tesis de la Psicología Genética, las cuales son tomadas de teóricos como Piaget y Vigotsky.

En cuanto a la secuencia de aprendizaje de la Geometría, se trabajó con base en la propuesta de los esposos Van Hiele y Orlando Mesa, del cual se tomó su planteamiento en cuanto a la resolución de situaciones problema, ya que ésta es tomada como punto de partida para la formulación.

Teniendo en cuenta que la formulación de problemas es tomada como un proceso complementario a la resolución de problemas, se partió de los pasos o secuencias planteadas por Polya en cuanto a ésta, además de tener en cuenta los pasos sugeridos por Cruz para incentivar la formulación de problemas de geometría, en los estudiantes.

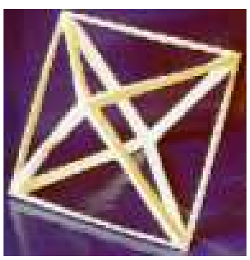
El componente didáctico, los aportes de Chamorro y las sugerencias presentadas en los lineamientos curriculares del MEN, por cuanto propenden por una enseñanza de la geometría de forma activa en pro de conseguir un buen razonamiento lógico-matemático y el establecimiento de relaciones intra e interfigurales.

4.2. ESTRUCTURA.

Durante el desarrollo del proyecto se trabajaron tanto aspectos teóricos como prácticos; donde los primeros fundamentaron el marco conceptual, como la base para la interpretación del trabajo realizado por los alumnos en el aula de clase. Algunos de los aspectos a analizados fueron las actitudes frente a las actividades propuestas, el razonamiento secuencial y lógico frente al desarrollo de las tareas, las respuestas dadas por los alumnos frente a una situación planteada y la formulación de problemas por parte de éstos, entre otros.

Por su parte los aspectos prácticos fueron aplicados por medio del trabajo experimental de acuerdo a las situaciones didácticas propuestas en el aula (ver anexo). Para ello se tuvo en cuenta la observación permanente con el fin de detectar en los estudiantes aspectos como dificultades y cambios a nivel cognitivo y procedimental tanto en la resolución de problemas como en la formulación de los mismos.

Para enmarcar lo anterior dentro de una propuesta concreta como es la formulación de problemas de geometría por parte de los estudiantes de segundo grado, se aplicó el siguiente esquema o tabla para ser trabajada secuenciadamente ya que una columna conlleva o es la base para la siguiente. Veamos:

Situación Inicial	**Yo pienso que:**	**Problema que formulo:**
		

Descripción y/o funciones de las columnas:

- **Situación inicial**: fue básicamente gráfica debido al carácter preponderante de lo pictórico dentro de la rama de la geometría.

- **Yo pienso que**: en ella el alumno debía expresar las deducciones o relaciones que estuviera en la capacidad de establecer acerca de la figura de la primera columna, siendo éstas fruto de las observaciones y aplicaciones de conocimientos previos a nivel geométrico. Dichas deducciones o relaciones establecidas, redacción de datos para el problema, eran la base o punto de referencia para formular el problema.

- **Problema que formulo**: es el resultado directo de la columna anterior, puesto que allí ya debía haber recolectado toda la información necesaria para la formulación, bastándole solo determinar los datos relevantes o no y el orden de los mismos para que cumplieran con las condiciones de un problema.

Dentro de la propuesta presentada para ser trabajada en el aula de clase, se dio el caso de que el alumno no formuló problema alguno debiéndose entonces analizar la capacidad de razonamiento o relaciones establecidas en la segunda columna “Yo pienso que”.

La propuesta por si sola no arrojó los resultados esperados, siendo necesario apoyarla con las respectivas socializaciones (guiadas por el docente) inmediatamente después de realizada cada actividad, ya que es por medio de la construcción del aprendizaje colectivo donde el alumno se hace conciente de sus fortalezas y debilidades, al tiempo que estas institucionalizaciones o puestas en común ayudan al alumno a establecer relaciones entre los componentes del objeto dado y del orden de las mismas para efectos de la formulación de un problema, mejorando cada vez más a cada actividad de este tipo.

Ahora, el diseño presentado para incentivar la formulación de problemas matemáticos permitió el desarrollo de aspectos teóricos vistos con anterioridad, tales como: el desarrollo de los pasos para incentivar la formulación de problemas propuesto por Cruz, el permitir que el alumno solucione su propio problema formulado y confrontarlo con la situación inicialmente dada, el desarrollar pensamiento matemático desde las diferentes representaciones para las matemáticas (icónica, lenguaje natural y representaciones algebraicas), determinar si las relaciones establecidas entre los elementos constituyentes del objeto eran realmente válidas y de reformular el problema utilizando las mismas relaciones establecidas, entre otras.

Además de lo anterior, el modelo fue basado en las teorías cognitivas de Piaget en cuanto a la percepción de formas y las relaciones que se establezcan entre las mismas, la de Ausubel en cuanto a la relación de los conocimientos previos con los de las formulaciones presentadas por los alumnos, y a la de Vigotsky por cuanto el alumno aprende también de las socializaciones y de sus pares.

Por último, el modelo presentado permitió hacer un análisis acerca del (los) nivel (es) de razonamiento geométrico de los alumnos, en determinados momentos de la practica pedagógica, propuestos por los esposos Van Hiele, sirviendo esto de base o punto de partida para la elaboración de guías didácticas para posteriores intervenciones en el aula de clase.

5. ANÁLISIS.

Según Miguel Martínez[19], “la palabra análisis, en su origen etimológico, quiere decir, “separar” o “dividir” las partes de un todo con el fin de entender los principios y elementos que lo componen.

El autor plantea que la etapa analítica de una investigación está caracterizada por el establecimiento de relaciones, categorizaciones, interpretaciones y teorización de la información obtenida durante el trabajo de campo, además afirma que la etapa de categorización-análisis-interpretación es un proceso inminentemente creativo, por lo que da algunas pautas o recomendaciones a tener en cuenta durante éste; ellas son:

[19] MARTÍNEZ M. Miguel. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Editorial Trillas. México. 2004, p. 79.

- No precipitarse. El procesamiento y análisis requiere de tiempo para la relación y construcción de nuevas ideas.

- No dirigir ni presionar el pensamiento en una sola dirección, ya que a veces no es posible determinar fácilmente donde está la solución.

- Utilizar figuras lingüísticas como analogías, metáforas, comparaciones y símiles para llegar más fácilmente al establecimiento de modelos.

- Tener confianza en si mismo para no entrar en conflictos o contradicciones.

- No asustarse ante situaciones que rompan con los esquemas, ya que en éstas se puede encontrar situaciones valiosas.
- El riesgo hacia lo desconocido debe ser valorado, no conformarse con lo que conoce.

5.1. CATEGORIZACIÓN.

Los principales instrumentos utilizados para esta etapa del proceso fueron el diario pedagógico y las evidencias de los problemas formulados por los alumnos durante la intervención pedagógica en la Institución Educativa, los cuales se cree fueron suficientes para realizar un estudio completo y detallado de las situaciones vividas como para la obtención de resultados fiables y pertinentes.

Para la categorización de la información, Miguel Martínez[20], plantea unos pasos a seguir cuando no se dispone de nuevos contactos con las fuentes (como es el caso de este proyecto), ellos son:

---

[20] MARTÍNEZ M. Miguel. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Editorial Trillas. México. 2004, p. 75-79.

1. Transcribir detalladamente los contenidos (información), los cuales deben ser revisados antes de abandonar el campo de trabajo.

2. Dividir los párrafos o grupos de párrafos por unidades temáticas.

3. Categorizar o clasificar mediante códigos claros (preestablecidos) que den rápidamente una idea inequívoca del tema.

4. Para categorías con nombres parecidos pero con atributos diferentes se deben crear subcategorías que las definan mejor.

5. Tratar de albergar en una categoría amplia aquellas que son pequeñas pero que se relacionan.

6. Asociar las categorías de acuerdo a su naturaleza y contenido.

7. Enumerar las categorías resultantes en una matriz para analizar las relaciones o nexos resultantes entre ellas.
8. Inicio de la teorización por medio de la aplicación de métodos formales, el cual inicia con la contrastación, comparación, agregación y reordenamiento de categorías o grupos de ellas y sus propiedades.

Acorde con lo anterior, la estructura de la categorización del presente proyecto estuvo conformada por dos criterios, desde la matemática y la producción de textos (analizados al interior de la matemática misma), estableciendo del primero, a su vez, categorías, resultantes de los problemas formulados por los alumnos, las cuales permitieron hacer un análisis de dichas formulaciones.

En el criterio del saber disciplinar (matemática) se analizaron básicamente los relacionados con el Pensamiento Espacial y el Pensamiento Numérico. En el Pensamiento Espacial se determinaron las categorías que enmarcaron los problemas formulados en las Relaciones Topológicas, las Euclídeas y las Proyectivas, definidas las primeras como aquellas que no varían por una deformación bicontinua, las segundas como aquellas propiedades que permanecen constantes cuando las figuras representadas son sometidas a transformaciones “rígidas” (a movimientos en el plano horizontal o vertical o giros sobre alguno de sus ejes) y, las terceras como aquellas que permanecen invariantes al cambiar el punto de proyección. El Pensamiento Numérico estuvo relacionado con problemas formulados con relación al conteo y las operaciones básicas.

En la producción de textos se consideraron las tres tipologías textuales, la narrativa, la argumentativa y la expositiva, dentro de la cual se considera la formulación de problemas. En esta categorización se analizaron elementos (desde la matemática misma) tales como coherencia, cohesión, concisión y precisión en el lenguaje, además de la superestructura.

Los lineamientos Curriculares del MEN para el Área de Lengua Castellana, definen los anteriores elementos como:

Coherencia y cohesión local: referida al nivel interno de la proposición, es entendida como la realización adecuada de enunciados. Se tiene en cuenta la producción de proposiciones delimitadas semánticamente y la coherencia interna de las mismas.

En esta categoría se evidencia la competencia para establecer las concordancias pertinentes entre sujeto/verbo, género/número y la competencia del estudiante para delimitar proposiciones desde el punto de vista del significado: segmentación (signos de puntuación).

Coherencia global: entendida como una propiedad semántica global del texto, referida al seguimiento de un núcleo temático a lo largo de la producción.

Se considera que un texto responde a la subcategoría Progresión temática cuando produce más de una proposición de manera coherente (se puede tener un texto conformado por una sola proposición ya que la propiedad de la coherencia global no se refiere a la longitud del texto) y sigue un hilo temático a lo largo del texto.

Concisión: es la posibilidad de responder a un requerimiento, en el caso del presente proyecto, se refiere a la capacidad de describir a través de algún tipo de texto una representación geométrica dada en forma precisa.

Superestructura: referida a la posibilidad de seleccionar un tipo de texto y seguir un principio lógico de organización del mismo. Por ejemplo, si se selecciona el texto narrativo, la superestructura consistirá en presentar al menos tres grandes componentes: una apertura, un conflicto y un cierre, en el caso del presente proyecto son los elementos del problema: datos, condición y pregunta.

5.1.1. CRITERIOS Y CATEGORÍAS IDENTIFICADOS EN LOS PROBLEMAS FORMULADOS.

CRITERIOS Y CATEGORÍAS PARA PROBLEMAS FORMULADOS POR ALUMNOS DE SEGUNDO GRADO

- Saber Específico
  - Pensamiento Espacial.
    - Relaciones Topológicas
      - Vecindades
      - Separación
      - Orden
      - Cerramiento
    - Relaciones Euclídeas.
      - Medida y Estimación.
      - Formas de Figuras y Cuerpos.
    - Relaciones Proyectivas.
      - Puntos de Referencia
  - Pensamiento Numérico.
    - Conteo
    - Operaciones
- Producción de Textos
  - Coherencia
    - Local
    - Global
  - Cohesión
  - Concisión y Precisión.
  - Superestructura

5.1.2. INDICADORES PARA CRITERIOS Y CATEGORÍAS.

La tabla muestra los indicadores para los criterios y categorías del esquema inmediatamente anterior, dichos indicadores sirvieron de base para el análisis de los problemas formulados por los alumnos de segundo grado:

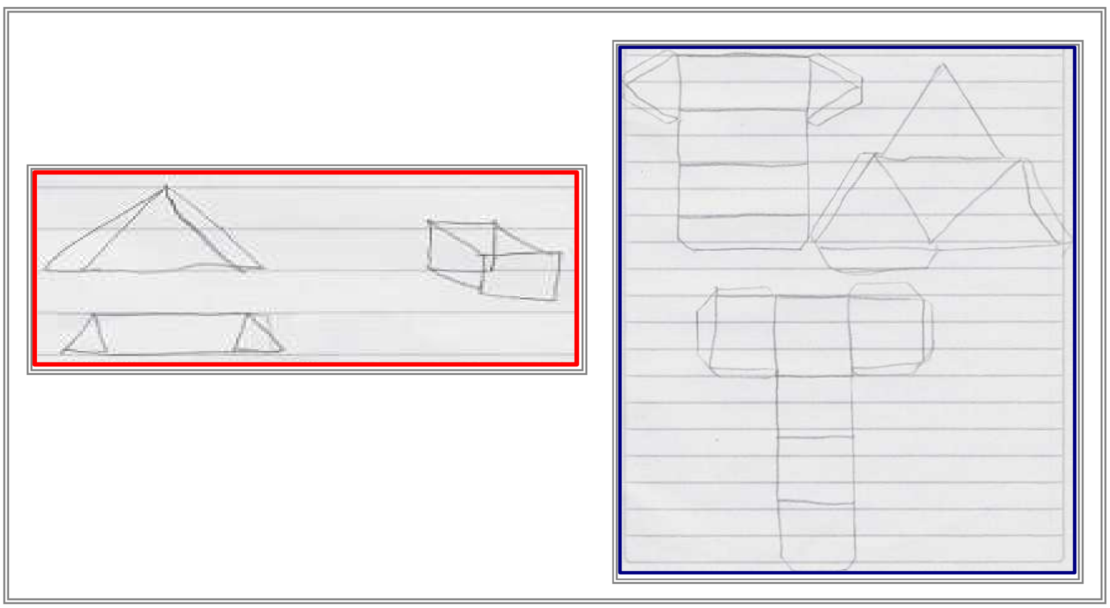
<table>
<tr><th colspan="8">INDICADORES PARA ANALIZAR LOS CRITERIOS Y CATEGORÍAS DE LOS PROBLEMAS FORMULADOS.</th></tr>
<tr><th colspan="3" rowspan="3">PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th colspan="3">ESPACIAL</th><th colspan="2">NUMÉRICO</th></tr>
<tr><th>RELACIONES TOPOLÓGICAS</th><th>RELACIONES EUCLIDEAS</th><th>RELACIONES PROYECTIVAS</th><th>CONTEO</th><th>OPERACIONES</th></tr>
<tr><td>• Nociones de proximidad.
• Relaciones de orden.
• Relaciones de cerramiento (convexidad).
• Nociones de continuidad.</td><td>• Detección de regularidades.
• Construcción y deconstrucción de figuras.
• Medición o estimación de áreas.</td><td>• Variación perceptiva de figuras de acuerdo a distancias.
• Trabaja con conceptos de lateralidad.</td><td>• Diferentes formas de conteo.</td><td>• Esquema Aditivo.
• Esquema Multiplicativo</td></tr>
<tr><th rowspan="5">PRODUCCIÓN DE TEXTOS</th><th rowspan="2">COHERENCIA</th><th>LOCAL</th><td colspan="5">Produce al menos una proposición en términos matemáticos donde haya concordancia entre sujeto y verbo, no necesariamente sigue el hilo del texto.</td></tr>
<tr><th>GLOBAL</th><td colspan="5">Produce más de una idea en cuanto al saber matemático manteniendo un hilo temático a lo largo del texto, pero no necesariamente enlaza correctamente las proposiciones.</td></tr>
<tr><th colspan="2">COHESIÓN.</th><td colspan="5">Separa las ideas o proposiciones por medio de conectores y signos de puntuación.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONCISIÓN Y PRECISIÓN</th><td colspan="5">Hace correcto nombramiento de los términos matemáticos y evita ideas repetitivas</td></tr>
<tr><th colspan="2">SUPER-ESTRUCTURA</th><td colspan="5">Retoma únicamente los elementos del problema: Datos, Condición y Pregunta.</td></tr>
</table>

5.1.3. INTERPRETACIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS FORMULADOS

Algunas transcripciones de problemas formulados por los alumnos de segundo grado, interpretados de acuerdo a los indicadores para los criterios y categorías:

Criterio: Pensamiento Espacial.
Categoría: Relaciones Euclídeas, en cuanto a la forma de las figuras y cuerpos.

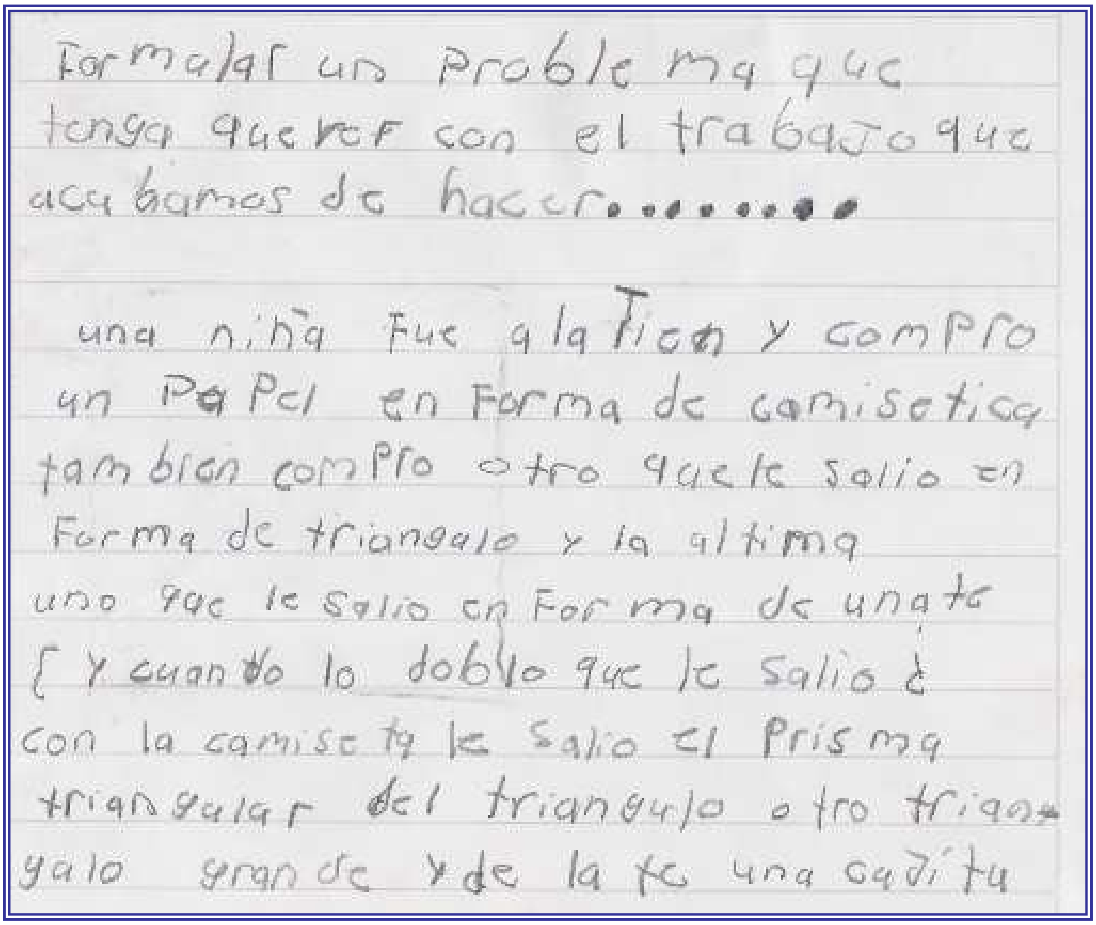
La siguiente evidencia corresponde a una actividad en la que se les dio a los alumnos las plantillas del prisma triangular, el tetraedro y el cubo, para que armaran los respectivos cuerpos geométricos e hicieran las respectivas representaciones icónicas para luego formular el problema: Veamos:



Interpretación:
En la representación pictórica se evidencia precisión para dibujar los objetos presentados en forma plana, más no en la tridimensional; en las representaciones del cubo y el tetraedro el alumno no guarda (como la mayoría de los estudiantes)

las relaciones de las longitudes de los lados, viéndose que esta última corresponde realmente a una pirámide de base cuadrada.

Problema 1:


Formular un problema que tenga que ver con el trabajo que acabamos de hacer.........

una niña fue a la Tien y compro un Papel en Forma de camisetica tambien compro otro que le salio en Forma de triangulo y la ultima uno que le salio en Forma de una te ¿y cuando lo doblo que le salio? con la camiseta le salio el Prisma triangular del triangulo otro triangulo grande y de la te una cajita

Trascripción textual:

“una niña fue a la Tienda y compro un papel en forma de camisetita tambien compro otro que le salio en forma de triangulo y la ultima uno que le salio en forma de una te ¿y cuando lo doblo que le salio? Con la camiseta le salio el prisma triangular del triangulo otro triangulo grande y de la te una cajita”

Interpretación.

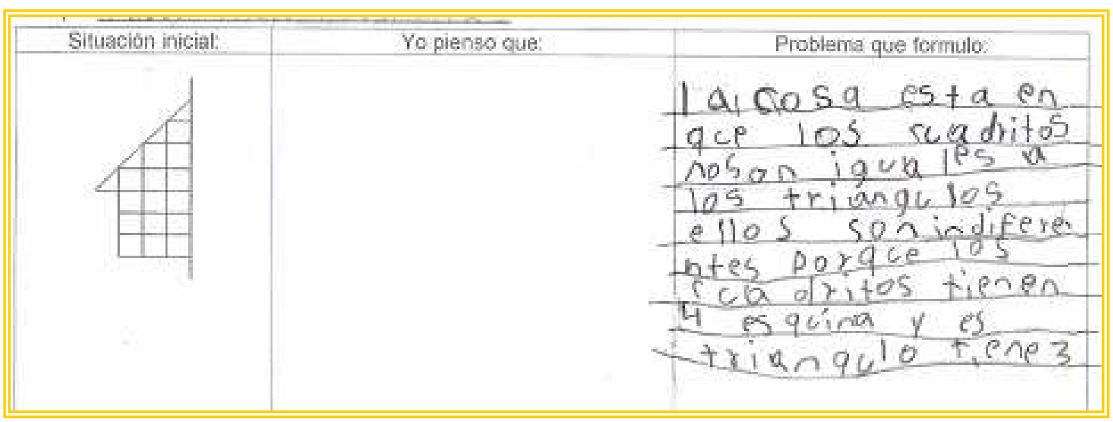
El problema es elaborado desde la situación propuesta inicialmente, plantillas del prisma triangular, el tetraedro y el cubo; tiene coherencia global ya que sigue un núcleo temático a lo largo de la producción, trata de relacionar ordenadamente la parte plana con la tridimensional.

Distingue las figuras por sus formas individuales, como un todo, sin detectar relaciones entre las formas o entre sus partes.

No es totalmente cohesivo ya que no separa mediante comas y puntos las oraciones, a pesar de que no redunda en el discurso, no tiene la capacidad de nombrar los elementos presentados desde la matemática misma.

En cuanto a la superestructura, presenta claramente los datos y la incógnita, no muestra la manera en que se relacionan éstos, o sea la condición.

Problema 2.



Situación inicial:	Yo pienso que:	Problema que formulo:
		la cosa esta en qce los cuadritos no son iguales a los triangulos ellos son indiferentes porqce los cuadritos tienen 4 esquina y es triangulo tiene 3

Trascripción textual.

“la cosa esta en que los cuadritos no son iguales a los triangulos ellos son indiferentes porque los cuadritos tienen 4 esquinas y es triangulo tiene 3”.

Interpretación:

El problema hace alusión a la relación entre el número de vértices o puntas de las figuras geométricas, no lo hace desde éstas con el número de lados de las mismas, lo que hace ver que no establece relaciones entre varios componentes de los objetos presentados.

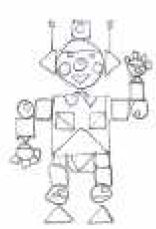
No formula el problema teniendo en cuenta la situación inicialmente dada (simetría axial), lo cual quiere decir que está totalmente descontextualizado.

En la parte textual, podría clasificarse como coherente (local), cohesivo y conciso, ya que desarrolla una idea en términos matemáticos, no repite ideas y hace correcto nombramiento de los componentes de los objetos presentados, pero al no hacer referencia a una situación dada no se le puede dar la anterior clasificación.

Criterio: Pensamiento Espacial.

Categoría: Relaciones proyectivas. Relaciones de cercanía y lejanía.

Problema.

Situación dada	Yo pienso que:	Problema que hice
	el robo tiene cuadritos retangulos sirculos de todas las closes y trimp teon todas las Fams ajusta todo en Todo ajusta 67 y el robo se llama camilo	Julian dice que su robo de cuandose aleja ve su robo pequeño y cuando se aleso mas y mas solo se veve su cabeza pata su sintura y cuando se aleja mucho mucho mas solo se ve sucabeza

Trascripción textual:

“Julian dice que su robo de cuando se aleja ve su robo pequeño y cuando se aleja más y más solo se ve su cabeza azta su sintura y cuando se aleja mucho mucho más solo se ve su cabeza”

Interpretación:

El alumno establece relaciones de lejanía, no logra exponer que el objeto no pierde su totalidad y a cambio se ve más pequeño. No mantiene el objeto dado como un todo.

En la parte narrativa no expone los elementos del problema pero mantiene la idea a lo largo del texto.

Criterio: Pensamiento Numérico.

Categorías: conteo y operaciones aritméticas.

Problema 1.

“esta SuperFisia de cuadritos chiquitos. hay verticales 4 y horizontales 6 y los grande verticales12 y horizontales 2 tanbien y de dos en dos 8 y de tres 12 y tambien se puede aser de cuatro en cuatro son 16 y tanvien de 5 en 5 son 20 y tanvien de 6 en 6 son 24 y tanbien orizontales tanvien son 24. y los cuadritos Grandes de verticales son 4”

Problema 2.

“SI yotengo 35 valdosas

y llo le pongo 8 son 40 valdosa

tengo 20 cuadritos y le pong 10 cuantos cuadrito son 30

tengo 40 caritos y le pongo 28 cuatos ai estatal son 99”

Problema 3.

“38761 +

<u>43920</u>

82681”

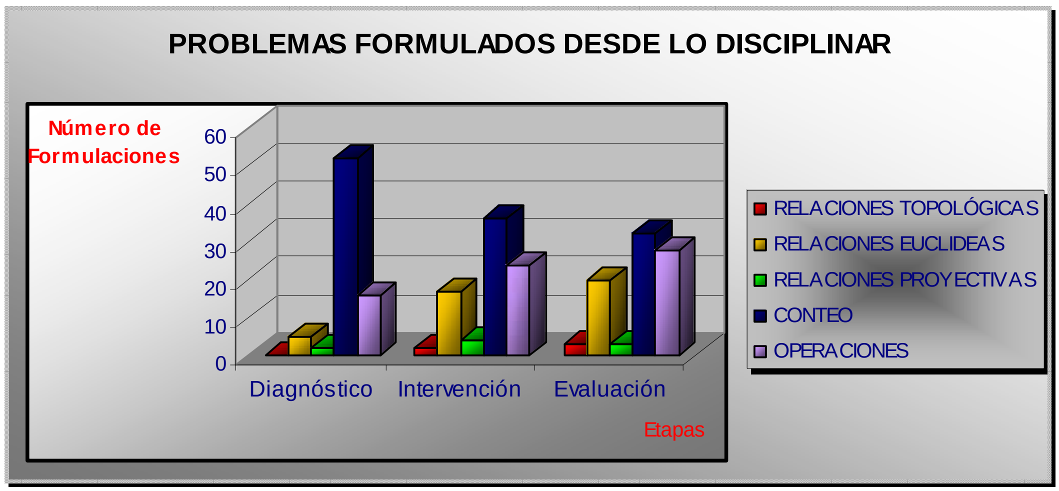
5.1.4. RELACIÓN DEL NÚMERO DE PROBLEMAS FORMULADOS DURANTE LAS DIFERENTES ETAPAS.

Para el análisis cuantitativo como cualitativo de los problemas formulados, se tuvo en cuenta dos conteos de actividades diferentes por cada una de las etapas del proceso: Diagnóstico, Intervención y Evaluación, siendo analizados primeramente desde los disciplinar y, luego desde éste y la producción textual.

5.1.4.1. RELACIÓN DEL NÚMERO DE PROBLEMAS FORMULADOS DESDE LO DISCIPLINAR.

RELACIÓN DEL NÚMERO DE PROBLEMAS FORMULADOS EN LAS DIFERENTES ETAPAS.					
PENSAMIENTO MATEMÁTICO / PRODUCCIÓN DE TEXTOS	ESPACIAL			NUMÉRICO	
	RELACIONES TOPOLÓGICAS	RELACIONES EUCLIDEAS	RELACIONES PROYECTIVAS	CONTEO	OPERACIONES
ETAPA DE DIAGNÓSTICO	0	5	2	52	16
ETAPA DE INTERVENCIÓN	2	17	4	36	24
ETAPA FINAL	3	20	3	32	28

Gráficamente:



El promedio de problemas "no formulados"[21] por los alumnos durante las diferentes etapas fue:

- Diagnóstico: 11
- intervención: 3
- Final: o.

Los anteriores datos muestran como la "no formulación de problemas" fue disminuyendo durante cada una de las etapas del proyecto, lo cual indica a su vez un incremento de formulación de los mismos a medida que los alumnos iban teniendo más comprensión y manejo de los conceptos, lo cual genera también confianza en cuanto al trabajo a realizar.

[21] Se entiende por problemas no formulados el caso en que el alumno no realizó actividad alguna matemáticamente como textualmente.

5.1.4.2. RELACIÓN DEL NÚMERO DE PROBLEMAS FORMULADOS DESDE LO DISCIPLINAR Y LA PRODUCCÓN DE TEXTOS.

La siguiente tabla resume el conteo de cuatro actividades diferentes de problemas formulados durante las diferentes etapas del proceso, clasificados desde el saber disciplinar y la producción de textos, así como de las categorías e índices al interior de éstos.

El número de problemas formulados, como los indicadores y, los criterios y categorías fueron la base para el análisis de dichos problemas.

CLASIFICACIÓN DEL NÚMERO DE PROBLEMAS FORMULADOS DE ACUERDO AL SABER DISCIPLINAR Y LA PRODUCCIÓN DE TEXTOS.

PRODUCCIÓN DE TEXTOS \ PENSAMIENTO MATEMÁTICO			ESPACIAL			NUMÉRICO	
			RELACIONES TOPOLÓGICAS	RELACIONES EUCLIDEAS	RELACIONES PROYECTIVAS	CONTEO	OPERACIONES
COHE-RENCIA	LOCAL	Etapa Diagnóstico	0	2	1	34	9
		Etapa Intervención	1	13	1	25	11
		Etapa Final	2	17	2	23	18
	GLOBAL	Etapa Diagnóstico	0	0	0	4	2
		Etapa Intervención	0	1	0	9	5
		Etapa Final	0	2	0	4	3
COHESIÓN		Etapa Diagnóstico	0	1	0	24	16
		Etapa Intervención	0	8	0	23	7
		Etapa Final	2	14	2	20	9

CLASIFICACIÓN DEL NÚMERO DE PROBLEMAS FORMULADOS DE ACUERDO AL SABER DISCIPLINAR Y LA PRODUCCIÓN DE TEXTOS.							
PRODUCCIÓN DE TEXTOS / PENSAMIENTO MATEMÁTICO		ESPACIAL			NUMÉRICO	
		RELACIONES TOPOLÓGICAS	RELACIONES EUCLIDEAS	RELACIONES PROYECTIVAS	CONTEO	OPERACIONES
CONSICIÓN Y PRESICIÓN	Etapa Diagnóstico	0	0	0	18	11
	Etapa Intervención	0	9	1	31	19
	Etapa Final	0	11	1	23	19
SUPER-ESTRUCTURA	Etapa Diagnóstico	0	0	0	0	0
	Etapa Intervención	0	0	0	0	0
	Etapa Final	0	0	0	0	0

5.1.5. CAMBIOS OCURRIDOS EN EL NÚMERO DE FORMULACIONES POR CATEGORÍAS EN LAS DIFERENTES ETAPAS DEL PROCESO:

Las dos tablas anteriores mostraron que:

- Durante las diferentes etapas del proceso se evidenció una preponderancia del pensamiento numérico sobre el espacial, viéndose al interior del primero mayor predilección hacia la parte de formulación de problemas relacionados con el conteo, utilizando como unidades para ello las figuras geométricas.

  Lo anterior puede haberse debido a la concepción que los niños tienen acerca de lo que es un problema y la afectividad hacia la formulación de los mismos, veamos algunas trascripciones de ellas:

- “es un espesie que tiene que hacer una suma o una resta depende de lo que se invente y para mi el problema es muy fasil”

- “un problema matematico es que pensemos sobre algo y eso convertirlos en matematicas como cuantos conos tiene en total y aci es la matematicas. Me parece chévere Divertido”

- “matematica es uno ver y pensar sobre las figuras geometricas contar las figuras y compartir con otras personas par que ellos tanbien aprendan”

- “un problema de matematicas es un problema que esta echo con figuras geometricas.

- “un problema es cuando uno empieza a decir en una tienda compro 8 cubos y me Enciman otros 8 cuantos me quedan? 16 eso es un problema. Un problema para mi es muy facil”

- “un problema no necesita suma ni nada de eso porque tanbien se nesesita cudos cuadrado y tanbien se nesesita mucha cosa para sere un poluma y me gusta mucho la clase de matematica”.

- Los problemas referidos al conteo fueron disminuyendo a lo largo del proceso, mientras los de las operaciones fueron incrementando paulatinamente, siendo muy evidente en estos últimos las estructuras aditivas.

- Los problemas formulados con relación al pensamiento espacial fueron aumentando durante las diferentes etapas, a medida que se avanzó en el proyecto, predominaron los problemas de relaciones Euclideas.

- A medida que el proceso avanzaba, se notó una pequeña reducción en los problemas formulados referidos a lo numérico, compensados con un incremento en las formulaciones del pensamiento espacial, concretamente en lo Euclídeo.

- Pese a que el espacio topológico es el primero que construye el niño, según Piaget, y el proyectivo el que más dificultad presenta para la interpretación, se esperaba que formularan más problemas relacionados con el primero, prácticamente se presentó una situación contraria a la teoría.

5.1.6. ALGUNOS ASPECTOS ENCONTRADOS EN LOS PROBLEMAS FORMULADOS AL INTERIOR DE LAS CATEGORÍAS PROPUESTAS:

- En las relaciones Euclídeas se mostraron muy centrados en la medida y las formas de las figuras y los cuerpos.

- En los problemas concernientes a las relaciones proyectivas siempre se preguntaron acerca de cómo se veían los objetos al alejarlos, pero nunca lo contrario.

- En las relaciones topológicas primó las nociones de proximidad y orden.

5.1.7. REGULARIDADES ENCONTRADAS EN LOS PROBLEMAS FORMULADOS Y MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS TRABAJADOS:

- No establecían relaciones entre las propiedades de las figuras, solo enunciaban las formas.

- A pesar de que el vocabulario usado era de tipo geométrico, en su gran mayoría se apoyaban en lo numérico para plantear preguntas y formular respuestas.

- La gran mayoría de los niños se contentaron con nombrar las figuras geométricas sin hacer relación alguna entre sus elementos.

- Al tratarse de cuerpos geométricos, sucedieron dos cosas: buscaban el parecido de éstos con objetos del entorno y/o contaban los elementos que los constituían como caras, vértices y aristas (bordes).

- Al referirse a la proporcionalidad lo hacían desde lo numérico, o sea las veces que cabía una figura en otra, siempre de lo menor a lo mayor (lo pequeño en lo grande).

- La parte introductoria de los problemas que no son de conteo u operaciones se caracterizaron por ser narrativos, como contando una historia, aspecto que es inherente en niños de estas edades (7 a 9 años).

- Los problemas formulados relacionados con las operaciones, se caracterizaron por ser tipo ejercicio, es decir, relacionaban los datos para luego preguntar por un resultado, el cual también daban cuenta. Los elementos utilizados para operar eran las figuras o cuerpos presentados en la situación inicialmente dada.

- En cuanto al nombramiento de los elementos presentados en la situación inicial, lo hacían relativamente mal, debiéndose esto a que los nombres no les son representativos.

- En las representaciones gráficas predominó la parte plana cuando no se contaba con material concreto (cuerpos geométricos), en el caso contrario lo hacían relativamente bien, pues les daba dificultad conservar las dimensiones de sus elementos.

- Reconocieron y expresaron relativamente bien la congruencia y la semejanza entre figuras.

- Se evidenció el buen empleo de unidades de área como medidas de superficies.

- Presentaron buen manejo de las posiciones relativas y absolutas, lo que evidenció un buen desenvolvimiento en cuanto a la lateralidad.

- Alcanzaron un buen manejo de las isometrías, aunque no fueron diestros en la composición de las mismas.

- Los problemas de operaciones fueron básicamente de tipo aditivo.

- En la producción de textos se dio un avance notorio tanto en la coherencia como en la concisión y precisión, sin embargo no se alcanzaron los niveles deseados.

5.1.8. ANÁLISIS DE CONCEPTOS DESDE LOS NIVELES DE VAN HIELE Y LOS EJES CURRICULARES PROPUESTOS EN LOS ESTÁNDARES DE MATEMÁTICAS DEL MEN.

Durante la práctica pedagógica en la Institución Educativa fue necesario realizar actividades de Intervención para que los alumnos adquirieran los conceptos geométricos necesarios para la formulación de problemas.

El cuadro que se presenta a continuación está basado en los ejes curriculares propuestos en los Estándares de matemáticas del MEN, en el modelo de razonamiento de los Van Hiele y en la propuesta para la enseñanza de la geometría de Orlando Mesa. Veamos los resultados obtenidos:

Eje 1: Relaciones Intra e Interfigurales:

ETAPA DE INDAGA-CIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
▪ Reconocían las figuras geométricas (triángulo, rectángulo, cuadrado y círculo) como un todo.	**1**	▪ Reconocían figuras geométricas (triángulo, rectángulo, cuadrado y círculo).	▪ Descomponían las figuras en sus elementos constitutivos (lados y puntas).	▪ La mayoría de los alumnos presentaron dificultades para construir y deconstruir figuras a partir de otras. ▪ No reconocían el cuadrado como un rectángulo. ▪ Nombraban correctamente las figuras geométricas.
	2	▪ Manipulaban y exploraban diferentes figuras geométricas.	▪ Analizaban las propiedades de algunas figuras.	
	3	▪ Establecían clasificaciones de acuerdo al número de lados de las figuras o semejanzas físicas globales. ▪ Hablaban un lenguaje básico para referirse a las figuras.	▪ Construían y Deconstruían de figuras geométricas a partir de otras.	
	4	▪ Construían figuras geométricas que tenían las mismas características.		
	5	▪ Explicitaban regularidades en algunas figuras geométricas.		
▪ No identificaban figuras geométricas presentadas diferentes posiciones.	**1**	▪ observaban figuras iguales en diferentes posiciones.	▪ Identificaban conservación de regularidades de figuras iguales presentadas en diferentes posiciones.	▪ Identificaban figuras iguales en diferentes posiciones. ▪ Representaban el espacio circundante en forma totalmente plana.
	2	▪ Superponían figuras para identificar las idénticas en		

ETAPA DE INDAGACIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
		posiciones diferentes.		
	3	▪ Comunicaban de los hallazgos de exploraciones con el material.		
	4	▪ Hacían construcciones libres con figuras iguales para verlas en posiciones diferentes.		
	5	▪ Reconocían figuras en el entorno y representación pictórica de los mismos.		
▪ No reconocían cuerpos geométricos.	**1**	▪ Presentaban y manipulaban cuerpos geométricos.	▪ Identificaban de los componentes de los cuerpos (caras, vértices y aristas) y llenado de tablas.	▪ Las representaciones pictóricas siempre eran planas cuando no tenían los cuerpos geométricos visibles, si los tenían eran representados aceptablemente, les daba dificultad conservar las dimensiones o proporciones de sus componentes. ▪ La mayoría de los alumnos no nombraba bien los cuerpos geométricos. ▪ Identificaban bien los elementos constitutivos de los cuerpos geométricos.
	2	▪ Representaban pictóricamente cuerpos geométricos		
	3	▪ Hablaban un lenguaje básico para referirse a los cuerpos.		
	4	▪ Armaban cuerpos geométricos y enunciaban sus nombres.		
	5	▪ Hallaban cuerpos geométricos en el entorno.		

Eje 2: Transformaciones en el plano:

ETAPA DE INDAGA-CIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
▪ No reconocían ejes de simetría.	**1**	▪ Los alumnos jugaban con espejos y dibujaban lo reflejado, plasmaban sellos en papel para ser doblado posteriormente. A lo anterior decían quedaban al revés.	▪ Formulaban problemas con conteos de unidades de área de las figuras simétricas. ▪ Al colorear simetrías axiales no hacían correctamente, ya que no conservaban las lateralidades de las figuras.	▪ Reconocían el eje de simetría, pero tenían dificultades en el cálculo de las equidistancias cuando las figuras no estaban unidas al eje de simetría. ▪ Al trabajar en construcción de simetrías conservaban las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad, pero al colorearlas tenían dificultades (cuando se trataba de simetrías en las cuales solo era presentada la mitad de la figura) ya que no conservaban las lateralidades de las mismas.
	2	▪ Reconocían que no cambia la forma y el tamaño de la figura, pero se veían al contrario.		
	3	▪ Intuían la equidistancia a una línea que separa las figuras al eje (lo tocan o no).		
	4	▪ Identificaban el eje de simetría y expresaban que era un espejo.		
	5	▪ Buscaban objetos del entorno para crear simetrías, lo hacían generalmente con casas, el cuerpo humano o animales. ▪ Hacían conteos del número de unidades que tenía una figura simétrica a otra aduciendo que su correspondiente tiene el mismo número de		

ETAPA DE INDAGA-CIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
		unidades.		
▪ No reconocían traslaciones , decían que se trataba de figuras diferentes.	**1**	▪ Al superponer pares de figuras decían que eran iguales, pero al darles ejemplos de esos pares de figuras trasladas y no trasladas decían que se habían puesto separadas, no reconociendo si hacía habido un cambio de posición o no.	▪ Tenían dificultades para trabajar con traslaciones cuyo vector sea oblicuo.	▪ Por superposición de figuras encontraban perfectamente la semejanza de las mismas y sabían que con ellas se podían trabajar las traslaciones. ▪ No se apropiaron del vocabulario exacto para referirse a as traslaciones, sin embargo lo hacían bien desde su hablar ya que decían cosas como que la figura se había corrido y que eran iguales. ▪ No distinguían las traslaciones en un contexto o situación que no contara con material concreto (manipulable).
	2	▪ Al utilizar regla para deslizar una figura a lo largo de ella decían que se había corrido, pero que era igual.	▪ Cuando la dirección del vector iba de derecha a izquierda, perdían la direccionalidad o conservación de posición de la figura y la invertían.	
	3	▪ Se empezó a hablar de un lenguaje básico para referirse a las simetrías, tales como el que la forma y el tamaño se conservaban, y que se corría utilizando una línea recta.	▪ Al presentárseles situaciones en contexto sin mentárseles el término traslación no lo reconocían, necesitan de material concreto para poder determinar si las figuras eran congruentes para poder trasladarlas, lo que indicaba que no establecían relaciones intra e interfigurales.	
	4	▪ Al dárseles un grupo de figuras clasificaban los pares con los cuales se podían hacer traslaciones y los plegaban en el papel para luego representarlos pictóricamente.		

ETAPA DE INDAGA-CIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
	5	▪ Construían traslaciones de figuras sencillas como cuadrados y rectángulos, pero cuando el vector de traslación era oblicuo no eran capaces, sin embargo lo reconocían.		
▪ Reconocían un giro como vueltas pero no desde un eje. ▪ Hacían giros con su propio cuerpo pero confundían un poco las direcciones.	**1**	▪ Se dio y se pidió ejemplos de giros desde el entorno escolar, y se dieron giros corporales para mejorar la direccionalidad y la cuantificación de los mismos. actividad que les fue fácil.	▪ Los giros alrededor de un vértice o lado de la figura no les eran representativos, seguían pensando que los giros se hacían teniendo en cuenta una circunferencia.	▪ Cuantificaban muy bien los giros. ▪ Hacían buenas representaciones pictóricas de giros cuando se éstos habían sucedido desde el centro de una figura pero no desde uno de los vértices o uno de sus lados. ▪ Presentaban dificultades al colorear giros ya que por ejemplo al girar una rueda de Chicago donde debían expresar la cantidad girada, a pesar de hacerlo bien algunos alumnos coloreaban referentes iguales con colores diferentes.
	2	▪ Se pegó una figura sobre un acetato transparente y se giró sobre su centro para luego pegar figuras iguales en cada una de sus paradas de modo que dieran cuenta de la posición final. Ello no les dió dificultad.		
	3	▪ Acercamiento al concepto de giro alrededor de un centro de giro. ▪ Hacían secuencias de giros de ¼, ½, 1 vuelta en ambas direcciones. Llegaron a la conclusión de que al dar la vuelta entera quedan en la misma posición.		

ETAPA DE INDAGA-CIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
	4	▪ Buscaban en diferentes figuras geométricas los centros de giro, las giraraban y posteriormente las representaban pictóricamente. Lo hacían bien.		
	5	▪ Al resolver situaciones en las cuales se ha presentado un giro, cuantificaban con facilidad el giro dado y la direccionalidad del mismo, pero al ponerles a colorear las situaciones iniciales y finales utilizaban colores diferentes para un mismo referente. ▪ Se giraban figuras geométricas desde uno de sus vértices y se representaban pictóricamente.		
▪ Reconocían Homotecias representadas pictóricamente, más no su definición y componentes de la misma.	**1**	▪ Presentación de fotos y fotocopias donde dedujeron que eran iguales pero que una era más grande que la otra.	▪ Reconocen las homotecias en representaciones sencillas y en figuras.	▪ No asimilaban el factor de conversión como tal (hablaban de doble y mitad), pero reconocían homotecias y las características de la misma.
	2	▪ Dados grupos de figuras semejantes, las clasificaban de modo que se cumpliera que unas sean más grandes o pequeñas que otras.		
	3	▪ Se llegó a un acuerdo acerca del concepto de homotecia, donde simplemente se		

ETAPA DE INDAGA-CIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
		referían a la semejanza pero no al factor de conversión.		
	4	▪ Hacían homotecias con cuadrados y rectángulos teniendo en cuenta la cuadricula del cuaderno, donde el factor de conversión fuera el doble o mitad de.		
	5	▪ Se presentó grupos de figuras y otras representaciones pictóricas (iguales y con pequeñas diferencias) para reconocer las que cumplían con la condición de homotecia.		

Eje 3: Relaciones Espaciales.

ETAPA DE INDAGACIÓN	ETAPA DE INTERVENCIÓN			ETAPA DE EVALUACIÓN
NIVEL 1	**FASES**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVELES 1 y 2.**
▪ No reconocían modelos a escala	**1**	▪ Presentaban y manipulaban figuras iguales pero de diferentes tamaños para que las midieran. Decían que eran el doble o la mitad de.		▪ Fueron unidireccionales en el sentido de la medida por cuanto solo estaban en capacidad de medir teniendo como base una unidad de medida más pequeña que la del objeto a medir. ▪ Los modelos a escala no les fueron comprensibles.
	2	▪ Al trabajar con construcción de figuras de modo que una sea tantas veces más grandes que las otras, argumentaban que la pequeña cabía tantas veces en la grande, más no lo contrario.		
	3	▪ Al precisar vocabulario acerca de las relaciones de proporcionalidad que se pueden establecer se refirieron a cuanto mide o cabe una figura en la otra.		
	4	▪ Al dividir una figura en otras más pequeñas pero iguales de modo que se sepa cuantas veces cabe la grande en la pequeña no comprendían.		
	5	▪ Composición y descomposición de figuras para la comprensión de la proporcionalidad en ambos sentidos, pero solo trabajaban desde lo pequeño hacia lo grande.		

De acuerdo a la información anterior, los estudiantes al final del proceso se encontraban en el primer nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele en cuanto a la comprensión de los conceptos, siendo más visible esta situación en el eje temático de relaciones espaciales.

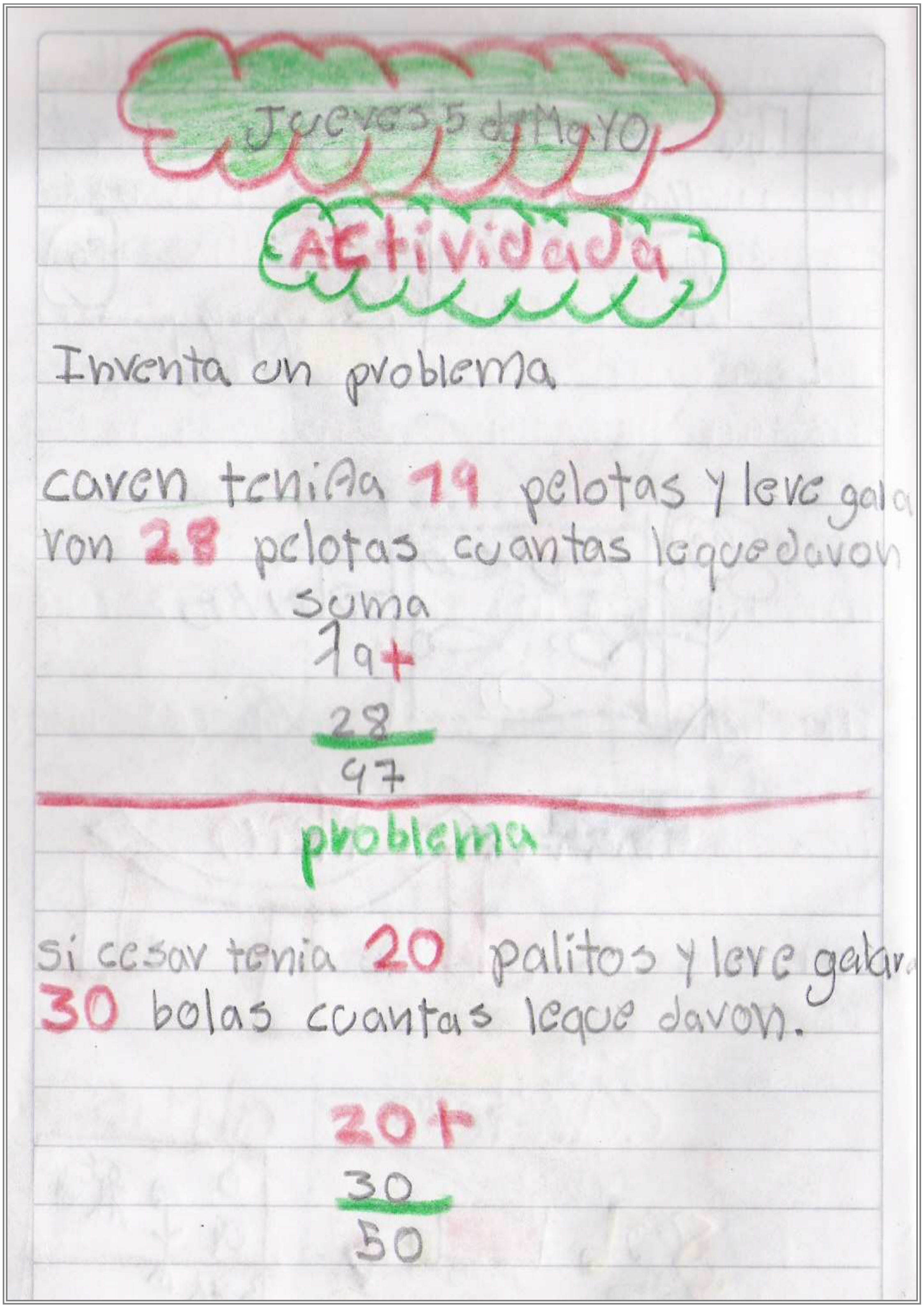
En todos los conceptos al interior de los diferentes ejes temáticos, se detectó la falta de manejo de un lenguaje matemático preciso para referirse a los diferentes conceptos y las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

El avance logrado fruto de las intervenciones de aula, no fue el esperado debido a que los alumnos no estaban acostumbrados a construir conocimientos de forma activa, ya que la metodología empleada por los docentes en los cursos anteriores como por las profesoras cooperadoras de este proyecto no son de tipo constructivista.

6. HALLAZGOS:

RELACIONADOS CON LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS.

- La gran mayoría de los niños, al inicio del proceso, al formular problemas adicionales, lo hacían bajo el mismo esquema textual, no utilizaban términos geométricos como unidades para efectos de operaciones y, en estas últimas, solo se evidenciaba el esquema aditivo. Veamos:



Jueves 5 de Mayo

Actividada

Inventa un problema

caren tenia 19 pelotas y le re gala
ron 28 pelotas cuantas le quedaron

suma

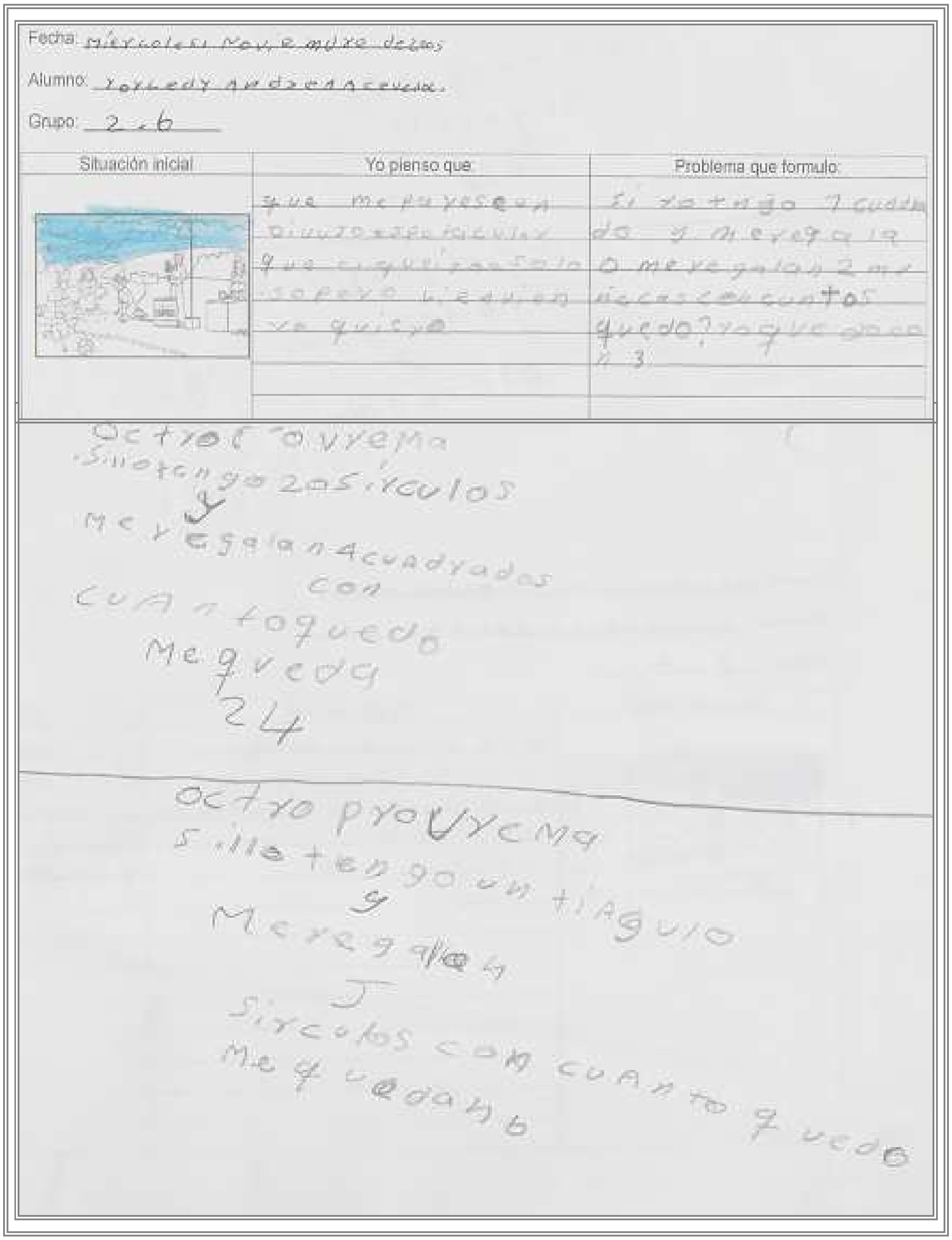
$$\begin{array}{r} 19+ \\ 28 \\ \hline 47 \end{array}$$

problema

si cesar tenia 20 palitos y le re galar
30 bolas cuantas le que davon.

$$\begin{array}{r} 20+ \\ 30 \\ \hline 50 \end{array}$$

- Al final del proceso, seguía presentándose en algunos niños la misma situación anterior, lo que evidenció que el único avance obtenido fue el reconocimiento y nombramiento de las figuras y cuerpos geométricos. Veamos:



Fecha:

Alumno:

Grupo: 2 - 6

Situación inicial	Yo pienso que:	Problema que formulo:

octro problema
Si yo tengo 2 sirculos
y
me regalan 4 cuadrados
con
cuanto quedo
Me queda
24

octro problema
Si yo tengo un triangulo
y
me regala
5
sircolos con cuanto quedo
Me queda 6

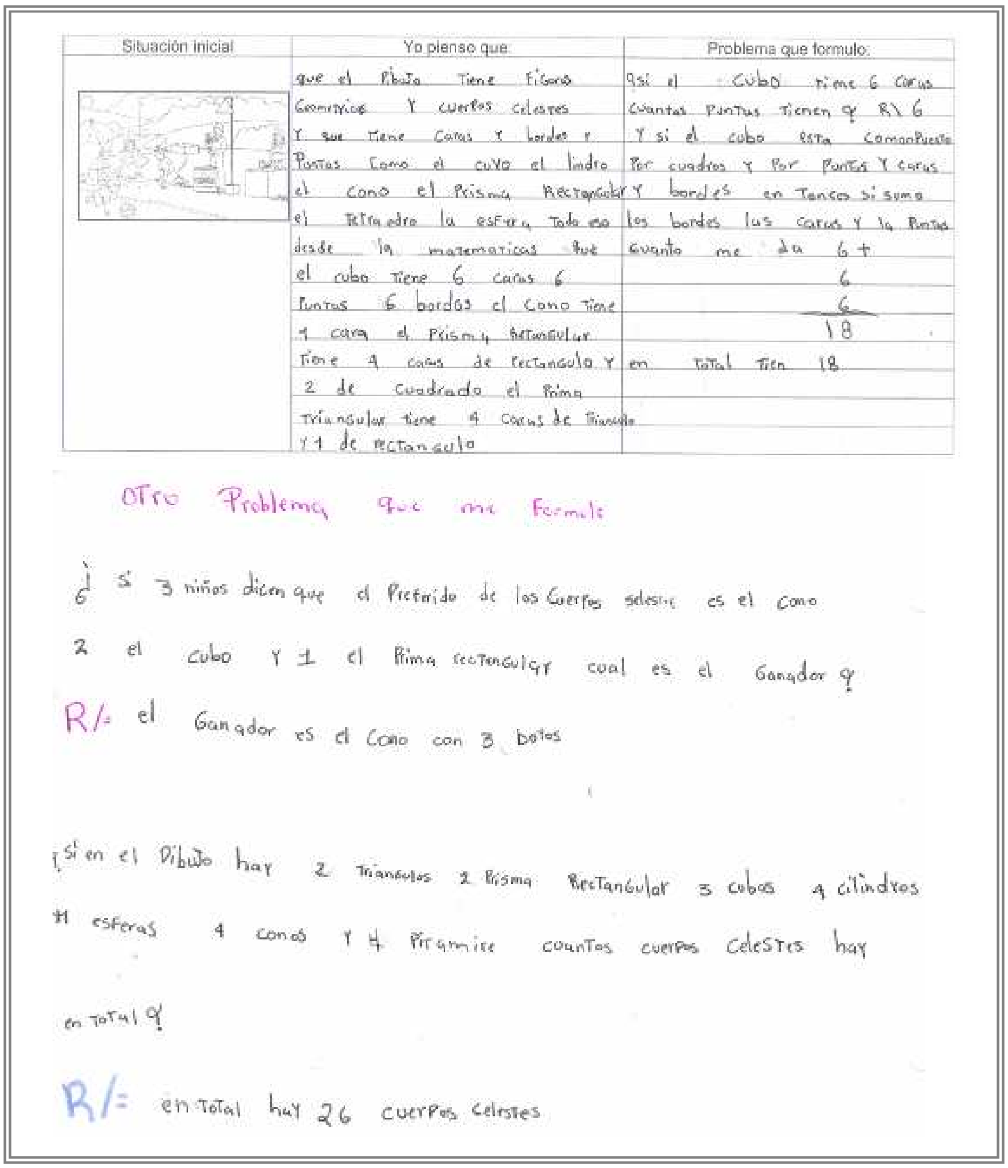
Trascripción textual:

Primer Problema: “si yo tengo 1 cuadrado y me regala la o me regalan 2 muñecas con cuantos quedo? Yo quedo con 3”

Segundo Problema: “Si llo tengo 20 sírculos y me regalan 4 cuadrados con cuanto quedo
Me queda 24”

Tercer Problema: “S illo tengo un triangulo y me regalan 5 Sírculos con cuantos quedo
Me quedan 6”

- Al final del proceso muchos niños estaban en capacidad de formular más de un problema diferente referido a una misma situación dada y, que en la parte de “yo pienso que” obtenían suficientes elementos para formular un problema seguían apoyándose básicamente en las estructuras aditivas. Veamos:



Situación inicial	Yo pienso que:	Problema que formulo:
	que el Dibujo Tiene Figuras Geometricas Y cuerpos celestes Y que Tiene Caras Y bordes Y Puntas Como el cuvo el lindro el cono el Prisma Rectangular el Tetraedro la esfera Todo eso desde la matematicas que el cubo Tiene 6 caras 6 Puntas 6 bordes el cono Tiene 1 cara el Prisma Rectangular Tiene 4 caras de rectangulo Y 2 de cuadrado el Prima Triangular tiene 4 Caras de Triangulo Y 1 de rectangulo	así el cubo tiene 6 caras cuantas puntas tienen ? R\ 6 Y si el cubo esta compuesto por cuadros Y por puntas Y caras Y bordes en Tonces si sumo los bordes las caras Y la puntas cuanto me da 6 + 6 6 = 18 en total tien 18

OTro Problema que me formule

¿Si 3 niños dicen que el Preferido de los Cuerpos celestes es el cono 2 el cubo Y 1 el Prima rectangular cual es el Ganador ?

R/ el Ganador es el Cono con 3 botos

¿Si en el Dibujo hay 2 Triangulos 1 Prisma Rectangular 3 cubos 4 cilindros 11 esferas 4 conos Y 4 Piramice cuantos cuerpos celestes hay en total ?

R/ en total hay 26 cuerpos celestes

Trascripción textual:

Relaciones o deducciones hechas: “que el Dibujo Tiene Figuras Geometricas Y Cuerpos Celestes Y que Tiene Caras y bordes y Puntas Como el cuvo el lindro el cono el prisma RectanGular el Tetraedro la esfera Todo eso desde la matematicas que el cubo tiene 6 caras 6 puntas 6 bordes el cono tiene 1 cara el prisma RetanGular tiene 4 caras de retanGulo Y 2 de cuadradoel prima trianGular tiene 4 caras de Triangulo y 1 de rectanGulo”

Problema que Formulo: “¿si el cubo Tiene 6 Caras Cuantas puntas Tienen? R/6 y si el cubo esta comonpuesto por cuadrados Y por Puntas Y caras Y bordes en Tonces si sumo los bordes las caras y la Puntas Cuanto me da 6+6+6=18 en ToTal Tien 18”

“Otro Problema que me formule
¿si tres niños dicen que el Preferido de los Cuerpos selestes es el cono 2 el cubo Y 1 el Prima rectanGular cual es el ganador?
R/= el ganador es el Cono con 3 botos”

¿si en el DibuJo hay 2 triangulos 2 prisma RectanGular 3 cubos 4 cilindros 11 esferas 4 conos Y 1 piramire cuantos cuerpos celestes hay en total? R/= en Total haY 26 cuerpos celestes.

7. CONCLUSIONES.

- Los alumnos de grado segundo de la Institución Educativa Javiera Londoño del barrio Sevilla se encuentran en el primer nivel de razonamiento del modelo de los Van Hiele, debido a que el énfasis en la formulación de problemas y manejo de los conceptos está soportado en los objetos geométricos y, en ocasiones, a las propiedades de éstos.

- En los alumnos de grado segundo predomina la formulación de problemas pertenecientes al pensamiento numérico sobre el pensamiento espacial, haciendo énfasis para la formulación de los primeros en las operaciones, básicamente en la parte de estructuras aditivas, y en los segundos en las relaciones Euclídeas, basándose para ello en el pensamiento métrico, concretamente en la medida.

- Los estudiantes presentan dificultades para plantear preguntas referidas a un concepto geométrico en particular, así como para argumentar respuestas.

- Al formular un problema, presentan dificultades de comunicación de ideas y conceptos matemáticos en las producciones de textos (Cohesión, al omitir signos de puntuación y presentar errores de ortografía; coherencia, al no conservar la relación de los datos con las preguntas, y falta de concisión y precisión sobre las ideas que se presentan para formular un problema).

- Para ser la primera experiencia en formulación de problemas geométricos para los alumnos de grado segundo de la Institución Educativa Javiera Londoño, se podría afirmar que los objetivos propuestos fueron logrados en un porcentaje relativamente alto.

8. BIBLIOGRAFÍA.

- CABALLERO LASIERRA, Juan Antonio. Transformaciones Geométricas en el Plano. Movimientos en el Plano. Pág. 5. http://www.unizar.es/ttm/2005-06/Moviplano.doc

- (Coord.) CHAMORRO, María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Editorial Pearson. Prentice Hall. Madrid España. 2003. Pág. 354.

- CRUZ, M. y Álvarez, S. La Formulación de Problemas para la Enseñanza de la Matemática. En ÉPSILON, Vol. 52, SAEM "Thales". Sevilla. 2002.

- Estándares Curriculares para el área de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1998.

- LEYVA GONZÁLEZ Yulamis. Estrategia para estimular el proceso de formulación de problemas geométricos en la secundaria básica. http://www.monografias.com/trabajos16/problemas-geometricos/problemas-geometricos.shtml

- Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. MEN. Editorial Nomos Impresores S.A. Santa Fe de Bogotá. 1997. Pág. 131.

- MARTÍNEZ M. Miguel. La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Editorial Trillas. México. 2004. Pág. 175.

- MESA BETANCUR Orlando y Otros. Iniciación a la geometría. Educación Básica Primaria 1°, 2° y 3° Grado. Centro de Investigaciones

Educativas. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. 2000. Pág. 92.

- SAMPEDRO RUIZ Reinaldo y otros. Propuesta metodológica para la formulación de problemas en la secundaria básica cubana. http://www.monografias.com/trabajos20/problemas-secundaria-cuba/problemas-secundaria-cuba.shtml

- VASCO U. Carlos Eduardo. El archipiélago Angular. Revista de matemáticas. Número 132, mayo de 1993.Universidad Nacional de Colombia. Pág. 1-21.

9. ANEXOS.

9.1. FOTOGRAFÍAS. En ellas se muestra algunos aspectos de la cotidianidad de la escuela (en la cual se refleja también la parte social del alumno) y secuencias de trabajos realizados, veamos:

- **Espacios dedicados a las matemáticas**: no se encontraron evidencias relacionadas con el pensamiento espacial, solo del pensamiento numérico, lo que evidencia la preponderancia de este pensamiento sobre los demás así como se ve en el mismo plan de área de matemáticas para el grado segundo y en la misma formulación de problemas por parte de los alumnos.

- **Actitudes de los alumnos y situaciones de clase**: los niños con frecuencia se tornaban retraídos y desmotivados, situación que incidía en el buen desarrollo de la clase.

- **Ambiente de las aulas**: los salones de clase se caracterizaron por estar en mal estado de pintura y decoración, además de permitir la entrada del sol a través de las ventanas durante la mayor parte de la mañana, situación que era imposible de subsanar debido a que no se contaba con espacio suficiente para correr los escritorios a otro sitio dentro del aula.

- **Refrigerio:** para el consumo del mismo no había momento exacto, así que cuando la encargada del restaurante daba la orden había que acatarla de inmediato, teniéndose que interrumpir la sesión de clase o la actividad que se estuviera realizando en el momento.

  Para esta actividad no había sitio fijo ya que si otro grupo estaba ocupando las mesas destinadas para ello, o si estaba lloviendo los niños tenían que consumir sus alimentos dentro del aula.

- **Secuencia de actividad realizada**: la secuencia muestra una actividad de medición de superficies por medio de designación de unidades de área y medidas de longitud.

Para las actividades se utilizó el modelo para la enseñanza de la geometría propuesto por Orlando Mesa, el cual cuenta con actividades libres y orientas, para luego evaluar. Durante la actividad tipo libre, los alumnos se idearon diferentes formas de medir; para las orientadas les insinúo cubrieran el escritorio de la profesora con libros (que debían ser de igual tamaño), y en la actividad evaluativa (taller) se pretendía que los alumnos cubrieran superficies iguales con unidades de área diferentes para cada superficie, veamos:

Actividad libre:

Actividad dirigida o propuesta:

Actividad Evaluativa:

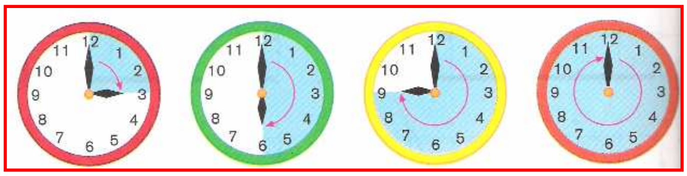
9.2. MUESTRA DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE DESARROLLADA DURANTE LA INTERVENCIÓN: el tema son los giros. Se trata de de que alumno siga actividades guiadas y creativas con el fin de cualificar el concepto de giro y ayudar a la formulación de problemas relacionados con estos.

LOS GIROS.

ALUMNO:

____

1. A nuestro alrededor hay muchos objetos que giran. Observa los giros de cada una de las manecillas del reloj.



Un objeto al girar, lo hace sobre un punto fijo y puede hacerlo hacia la derecha o hacia la izquierda.

2. El siguiente dibujo muestra las diferentes posiciones que debe tener un soldado cuando su jefe le da órdenes.

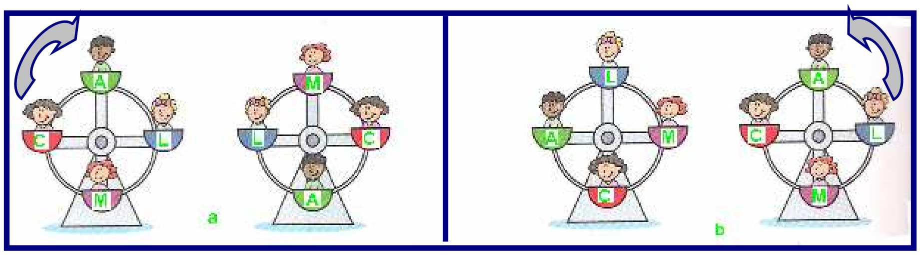
Posición Derecha	Media vuelta a la Izquierda	Media vuelta a la Derecha	Un Cuarto de vuelta a la Izquierda	Un Cuarto de vuelta a la Derecha

3. Párate mirando al tablero y da los siguientes giros:

a) Media vuelta a la derecha
b) Media vuelta a la izquierda
c) Un cuarto de vuelta a la derecha.
d) Una vuelta entera a la izquierda.

¿En que posición quedaste después de haber hecho los anteriores giros?
Respuesta: Es como si solo hubiera dado ______________________

4. Andrés, Lina, Manuela y Camila están en la rueda.



a) ¿Hacia que lado están girando las ruedas en cada caso?
Respuesta:
Las dos primeras ruedas están girando hacia la _________________

Las dos últimas ruedas están girando hacia la ___________________

b) Escribe en cada caso cuánto ha girado Andrés:
Respuesta:
En el primer caso: Andrés ha girado _____ de vuelta, y

En el segundo caso: Andrés ha girado _____ de vuelta

c) En el punto anterior, ¿los otros niños han dado los mismos giros que Andrés en cada uno de los casos?. Explica:

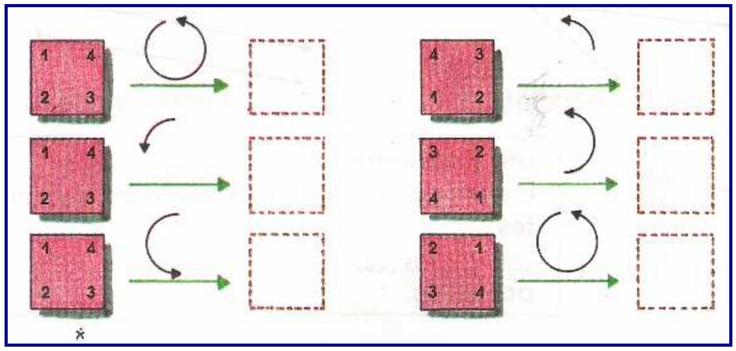
____

d) Indica las posiciones derecha o izquierda en que se encuentran los niños que están en las dos primeras ruedas:
- Camila está al lado______________ de Andrés

- Lina está al lado ______________ de Andrés

- Lina está al lado_______________ de Camila.

5. Ayúdate de los cuadros de papel que se te presentan, los cuales representan cada uno de los cuadrados pintados, para representar los cuadros del dibujo. Gíralos de acuerdo a como está indicando cada una de las flechas y escribe en el recuadro punteado los números como deben quedar.

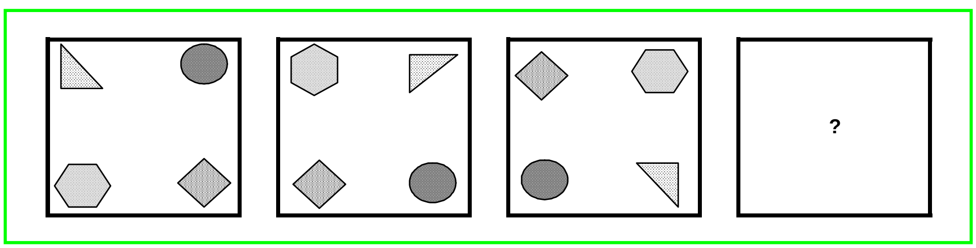


6. Teniendo en cuenta los giros de cada una de las figuras anteriores, escribe hacia que lado han girado cada una de ellas y cuánto giraron. ____

7. Da algunos ejemplos de objetos que giran y cuenta la forma en que lo hacen. Si es posible píntalos.

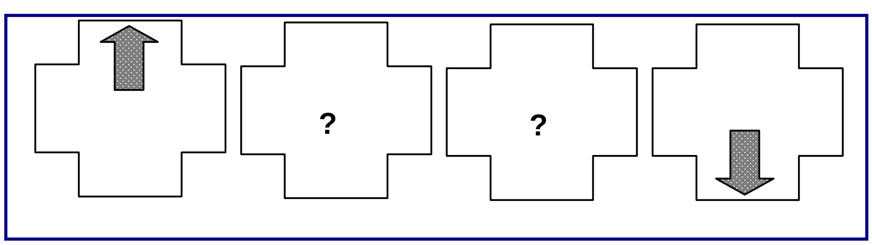
____

8. Las figuras que están dentro de los recuadros están girando.



a) Completa el recuadro en blanco
b) Todas las figuras están girando hacia la ________
c) Los triángulos están dando giros de _________ de vuelta.
d) Los hexágonos están dando giros de ________ de vuelta.
e) Los rombos están dando giros de ______ de vuelta
f) Las circunferencias están dando giros de ____de vuelta.

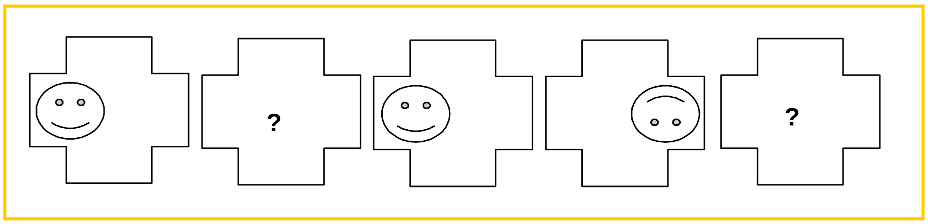
9.



a) Las flechas están girando _____ de vuelta hacia la ________________

b) Dibuja las flechas en los recuadros en blanco.

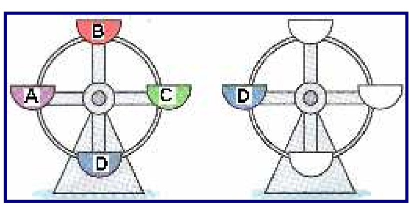
10. Las caritas felices están dando vuelta y media hacia la derecha o hacia la izquierda.



Dibuja en las figuras en blanco las caritas teniendo en cuenta los giros indicados. ¿Te da lo mismo girándolas a la izquierda que a la derecha? SI___, NO____, porque_____________________________________

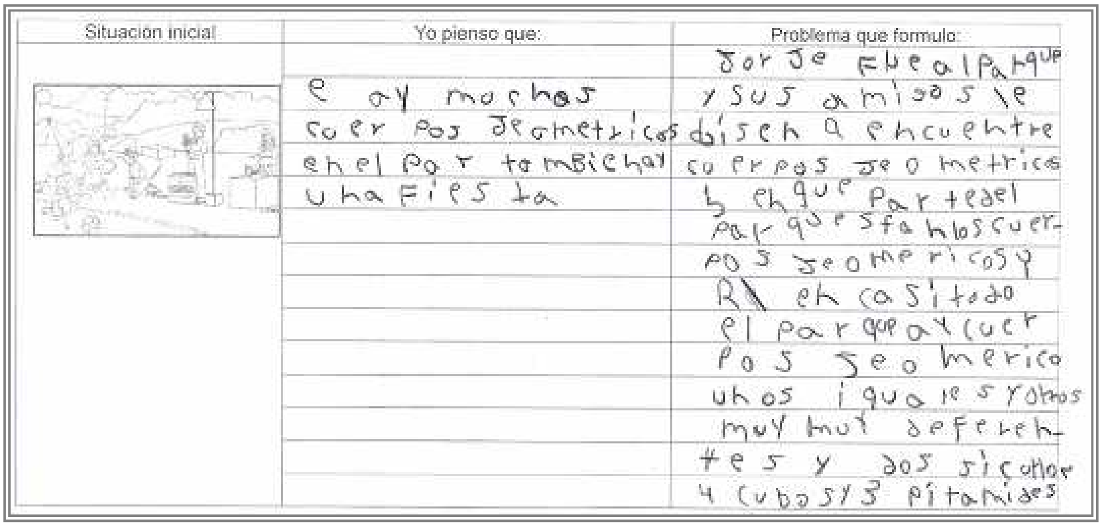
11. Inventa una situación que tenga giros hacia la derecha.

12. Formula un problema que sea acorde con la situación presentada.

Situación Inicial	Yo pienso que:	Problema que formulo:
		

▪

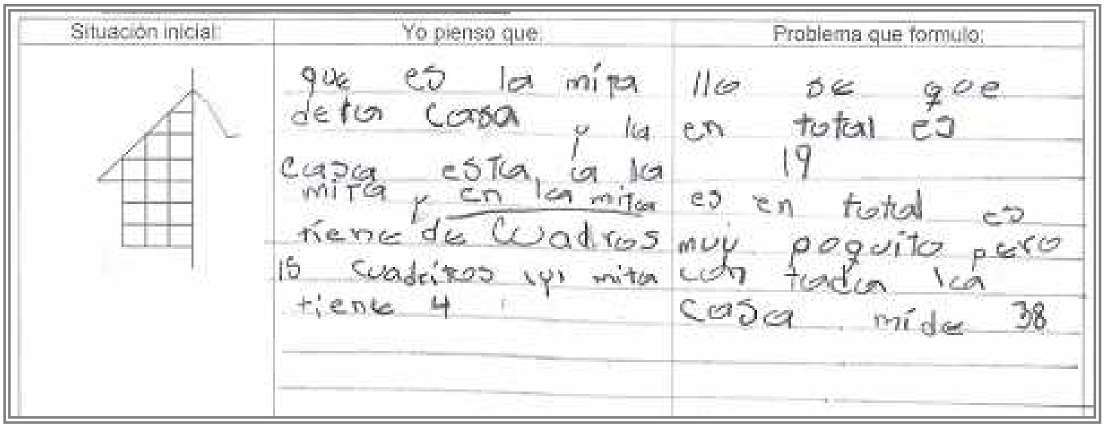
9.3. ALGUNOS PROBLEMAS FORMULADOS POR LOS ALUMNOS BAJO EL ESQUEMA PROPUESTO PARA LAS ETAPAS DE INTERVENCIÓN Y EVALUACIÓN.



Trascripción textual:

Yo pienso que: “e ay muchos cuerpos geométricos en el par tamBien ay una fiesta”

Problema que formulo: “Jorge fue al parque y sus amigos le bisen a encuentre cuerpos geométricos ¿en que parte del parque estan los cuerpos geométricos¿ R\ en casi todo el parque ay cuerpos geométricos unos iguales y otros muy muy deferentes y dos sicular 4 cubos y 3 piramides”

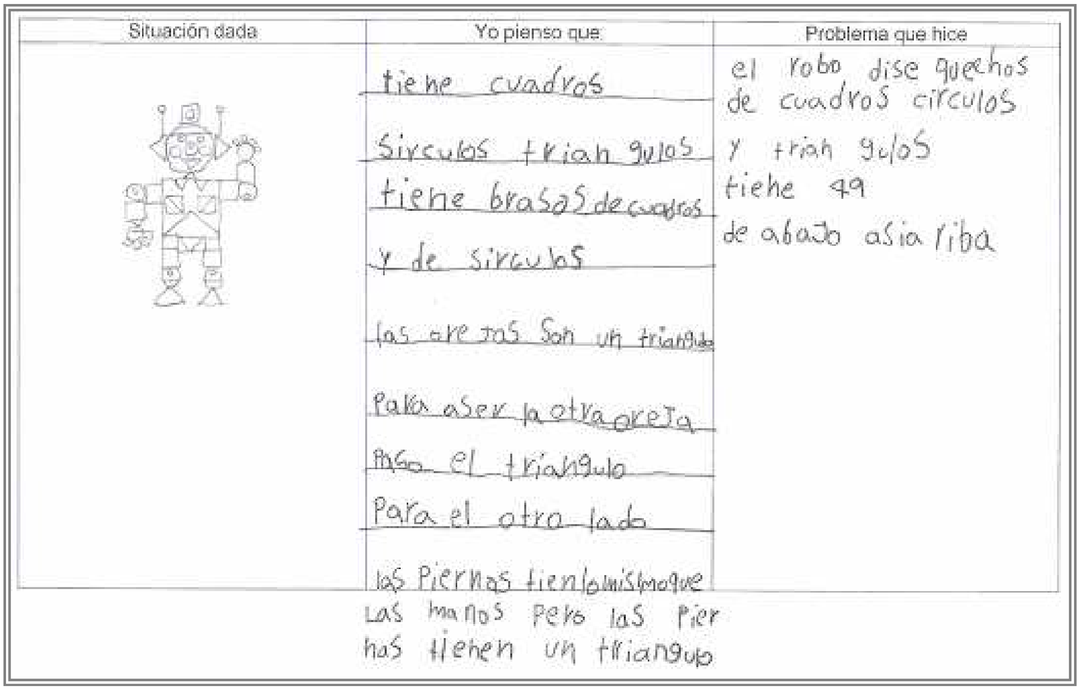


Situación inicial:	Yo pienso que:	Problema que formulo:
	que es la mita de la casa y la casa esta a la mita y en la mita tiene de cuadros 15 cuadritos y mita tiene 4	llo se que en total es 19 es en total es muy poquito pero con toda la casa mide 38

Trascripción textual:

Yo pienso que: “que es la mita de la casa y la casa esta a la mita y en la mitad tiene de cuadros 15 cuadritos y mita tiene 4**”**

Problema que formulo: “llo se que en total es 19 es en total es muy poquito pero con toda la casa mide 38**”**

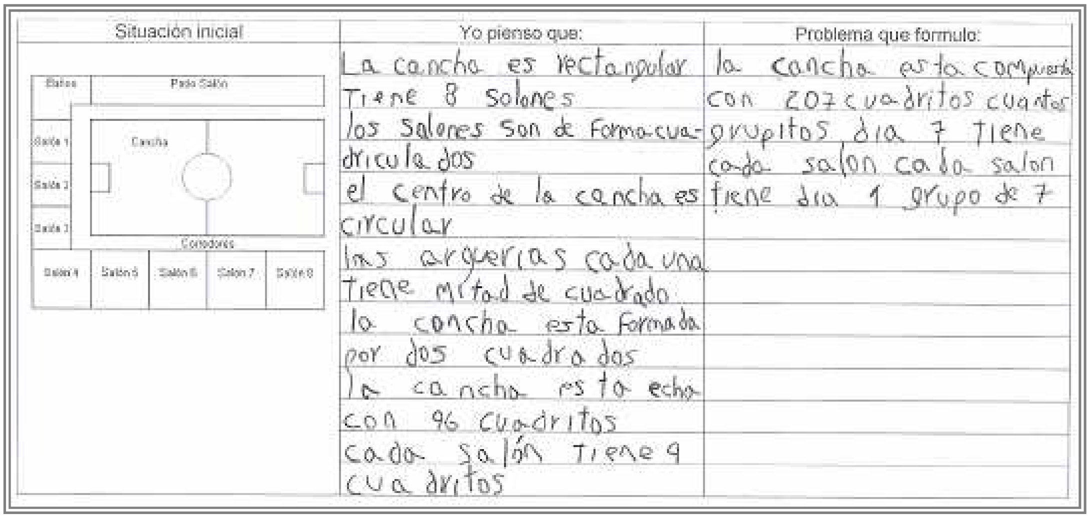


Situación dada	Yo pienso que:	Problema que hice
	tiene cuadros sirculos triangulos tiene brasos de cuadros y de sirculos las orejas son un triangulo para aser la otra oreja paso el triangulo para el otro lado las piernas tien lo mismo que las manos pero las piernas tienen un triangulo	el robo dise quechos de cuadros circulos y triangulos tiene 49 de abajo asia riba

Trascripción textual:

Yo pienso que: "tiene cuadros círculos triangulos tiene brasos de cuadros y de círculos las orejas son un triangulo para hacer la otra oreja paso el triangulo para el otro lado las piernas tienen lo mismo que las manos pero las piernas tienen un triangulo**"**

Problema que formulo: "el robo dice que de cuadros circulos y triangulos tiene 49 de abajo asiariba**"**



Situación inicial	Yo pienso que:	Problema que formulo:
	La cancha es rectangular Tiene 8 salones los salones son de forma cuadriculados el centro de la cancha es circular las arquerias cada una tiene mitad de cuadrado la cancha esta formada por dos cuadrados la cancha esta echa con 96 cuadritos cada salón tiene 9 cuadritos	la cancha esta compuesta con 207 cuadritos cuantos grupitos dia 7 Tiene cada salon cada salon tiene dia 1 grupo de 7

Trascripción textual.

Yo pienso que: “la cancha es rectangular

Tiene 8 salones

los salones son de forma cuadriculados

el centro de la cancha es circular

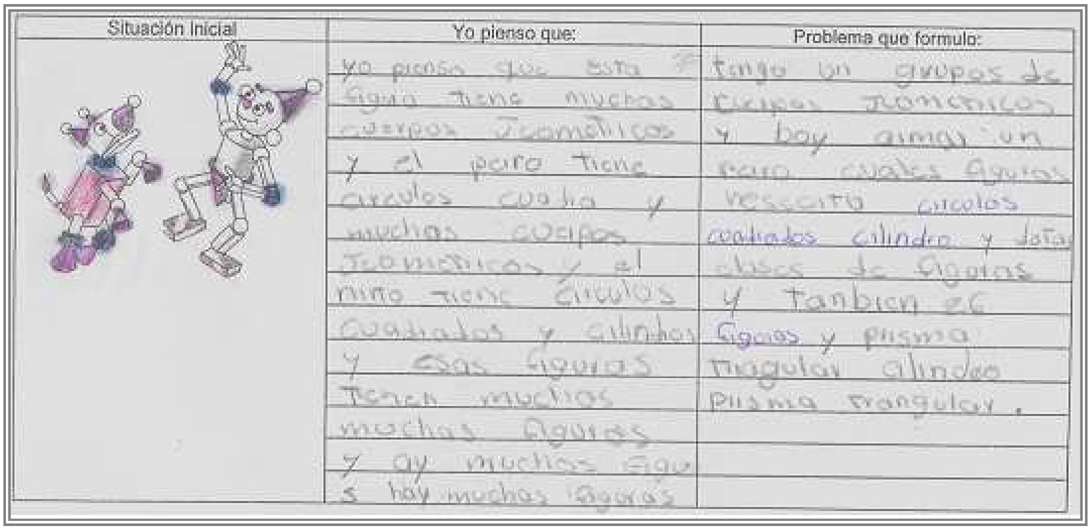
las arquerias cada una tiene mitad de cuadrado

la cancha esta formada por dos cuadrados

la cancha esta echa con 96 cuadritos

cada salón tiene 9 cuadritos”

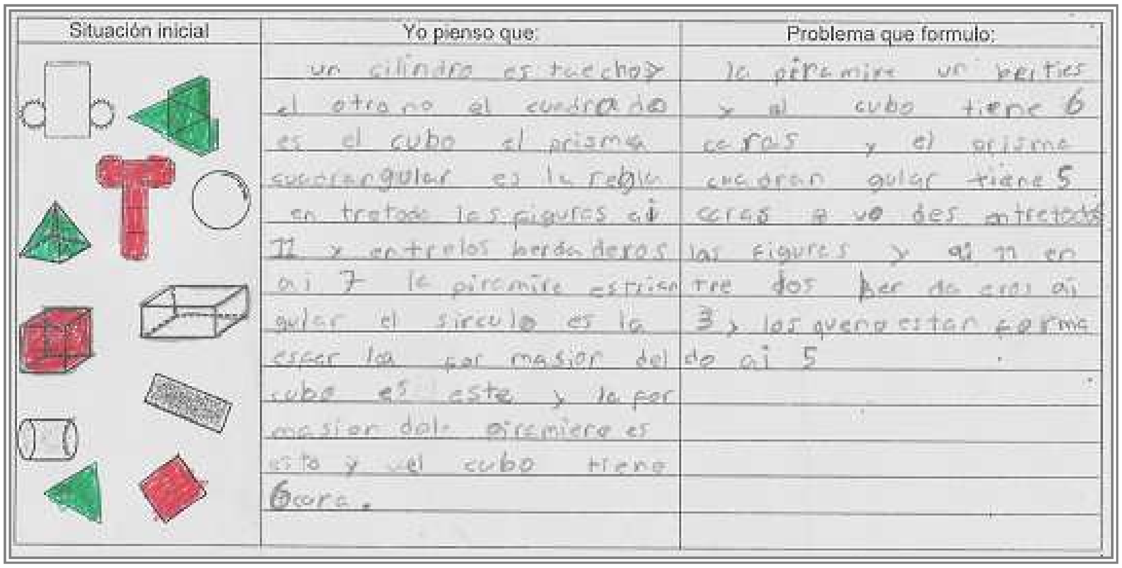
Problema que formulo: “la cancha esta compuesta con 207 cuadritos cuantos grupitos dia 7 Tiene cada salon cada salon tiene dia 1 grupo de 7”



Trascripción textual:

Yo pienso que: “yo pienso que esta figura tiene muchos cuerpos Jeometricos y el perro tiene circulos cuadra y muchos cuerpos jeometricos y el niño tiene circulos Cuadrados y cilindros y esas figuras tienen muchas figuras y ay muchas Figuras hay muchas figuras”.

Problema que formulo: “tengo un grupos de cuerpos jeometricos y boy armar un perro cuales figuras nesecito circulos cuadrados cilindro y dotas clases de figuras y Tanbien 26 figuras y prisma triangular cilindro prisma trangular”.



Trascripción textual:

Yo pienso que: “un cilindro es taecho y el otro no el cuadrado es el cubo el prisma cuadrangular es la regla en tretodo las figuras ai 11 y entrelos berdaderos ai 7 la pirámide estrangular el sirculo es la esfer la for masion del cubo es este y la formación dela pirámide es esto y el cubo tiene 6cara”.

Problema que formulo: “la pirámide un berties y el cubo tiene 6 caras y el prisma cuadran gular tiene 5 caras 8 vo des entretodas las figuras a ai 11 entre dos Ver da eros ai 3 y los queno estan formado ai 5”.