Para hallar el área de este polígono tan extraño, necesito aprender mil fórmulas o solo contar puntos, conjeturar y refutar? [1]

YUBER HERNANY TAPIAS ARBOLEDA

25 de marzo de 2009

[1] *Investigación construida por estudiante del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y asesorado por el docente: John Henry Durango Urrego, integrante del Grupo de Educación Matemática e Historia UdeA-Eafit-Colciencias, categoría: A*

Índice general

Capítulo 1

Problema de investigación

1.1. Antecedentes del problema

La motivación inicial para crear una pregunta de investigación, han sido, entre otras las apreciaciones encontradas por ejemplo en [4] *Sin duda, todos los avances matemáticos tienen sus raíces psicológicas en requerimientos más o menos prácticos; pero una vez que un avance a comenzado bajo la presión de aplicaciones necesarias, inevitablemente gana impulso por si mismo y trasciende los confines de la utilidad inmediata. Esta tendencia de ir de la ciencia aplicada a la teórica aprece tanto en la historia antigua como en muchas contribuciones de ingenieros y físicos a las matemáticas modernas,* dado que de lo anterior surge la pregunta: En la escuela prima el análisis de los problemas prácticos o de los problemas teóricos o de ambos?

Una pregunta un poco prácica es la siguiente: Cómo se calcula el área de un polígono convexo con vértices en el Geoplano?, siguiendo algununa posturas críticas encontramos por ejemplo en [2] aludiendo a la escuela formalista: *El formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas de la historia de las matemáticas, puesto que de acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas, éstas no tienen propiamente historia.*

1.2. Objetivos

Objetivo general

Crear un marco conceptual que sirva para la formulación de conjeturas, refutaciones y pruebas de proposiciones matemáticas emergentes del geoplano.

Objetivos específicos

1. Construir un cuestionario para plantear conjeturas con el geoplano,

basado en las estrategias expuestas por el docente John Henry Durango Urrego [1].

2. Hacer una lectura del texto de Imre Lakatos titulado Pruebas y refutaciones, la lógica del descubrimiento matemático para analizar la intervención hecha a dos estudiantes de grado noveno , ala luz de este texto.

1.3. Problema de Investigación

Problema de Investigación

Para crear un marco conceptual para el Geoplano, es necesario conjeturar en primer lugar, razonar inductivamente ciertos problemas, razonar deductivamente ciertas afirmaciones, entre otras cosas, todas las anteriores se desarrollan después de formularse preguntas, pero no se formulan preguntas sin tener estrategias para formularlas y más aún sin caracterizar el tipo de pregintas que posibilitan la construcción de teoría.

Es así, como se hace necesario que el Problema de Investigación se funda sobre esta necesidad primaria.

- Cuáles son las características que debe poseer una pregunta de tal manera que posibilite a los estudiantes y al profesor el conjeturar, refutar y demostrar proposiones matemáticas relativas al Geoplano y así poder construir una propuesta de marco conceptual para el Geoplano?

1.4. Justificación

Qué debe hacer un educador matemático?, Qué postura debe sostener?, Qué actividades debe realizar con los estudiantes?, Qué lineamientos curriculares debe seguir? y Qué ley debe respetar?...Estas y muchas otras preguntas se podrían responder en un trabajo académico en educación matemática, pero como dejar de lado las preguntas orientadas a la investigación que priorice no tanto en el carácter curricular basado en contenidos del aprendizaje de las Matemáticas, también, en la lógica del descubrimiento matemático y en la historia de las Matemáticas (independientemente de un estricto lineamiento regional, que procura designar como enseñar Matemáticas), los lineamientos proponen algo más que contenidos. Por otro lado,

[1] *En su tesis de Maestría: Comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y abductivos: el contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas.*

vivimos un momento histórico que nos pide con agonía, educadores que generen en sus estudiantes pensamientos de incertidumbre, inventiva, creatividad e imaginación, al mismo tiempo, un pensamiento argumentativo, riguroso y ordenado .

Ante esta demanda científica (y por tanto educativa) los educadores matemáticos tenemos que proponer una forma de comunicación con los estudiantes, que transforme la reproducción de contenidos temáticos en la producción de conocimiento matemático. La forma de razonar del estudiante y el docente de matemáticas es tan ordenada que de una u otra forma choca con el pensamiento corriente, tanto así, que tenemos que emplear un lenguaje lógico para este fin y es así como una necesidad absoluta e evidentemente que los estudiantes tengan un conocimiento claro de las reglas de inferencia lógicas, en general, de la semántica y la sintaxis del lenguaje lógico-matemático. Un estudiante tiene derecho a comprender la gran diferencia entre un axioma y un teorema (es decir, tiene derecho a no recibir todo como verdades terminadas e irrefutables de entrada), debe recibir por lo menos un acompañamiento del docente en la formulación de conjeturas, en la construcción de refutaciones y contraejemplos y en la argumentación de dichas conjeturas .

Por todo lo anterior, éste trabajo tiene un foco importante en el desarrollo de un cuestionario, porque evidencia que el docente acorde a unas estrategias propone preguntas fomentadoras de conjeturar.

Capítulo 2

Rastreo Histórico

2.1. Rastreo Histórico del Geoplano

El Geoplano

Antes que nada, hablemos de algo tan sencillo como quién inventó el geoplano?, se le atribuye a Caleb Gattegno (1911-1988), aunque se puede ahondar en la obra académica de Gattegno no precisaremos más que en el crédito por la introducción del geoplano.

De acuerdo con Gattegno, el geoplano es un material multivalente (puede servir para diversos propósitos) que *permite tomar conciencia de las relaciones geométricas*. Con los geoplanos se pueden enseñar teoremas de la geometría plana (aunque no todos), con algunas ventajas sobre el pizarrón, pues las figuras obtenidas son claras y no dependen de la habilidad del maestro (que no se quiere poner en duda); como los geoplanos son pequeños, es fácil girarlos para mostrar que las propiedades en cuestión no dependen del tipo de desplazamiento que realicemos y se puede establecer una diferencia sustancial entre movimientos del plano que no alteran la magnitud de los objetos geométricos (Isometrías).

Gattegno presentó el geoplano en la primera publicación conjunta de la Comisión Internacional para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en 1961 [1] .

El geoplano original diseñado por Caleb Gattegno consistía en una plancha de madera con pivotes o clavos formando una trama ortométrica, es decir, formando cuadrados adyacentes y congruentes entre si. Con gomas elásticas o cualquier otro material que se note pertinente se representan di-

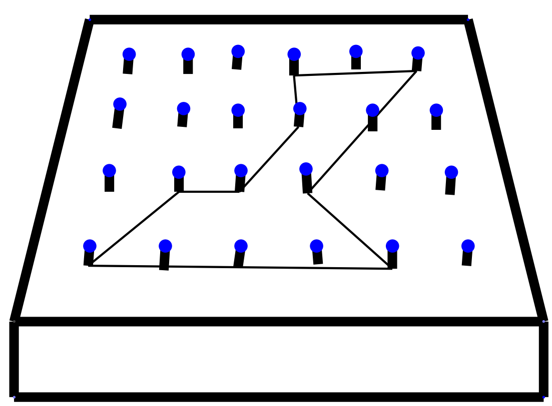
[1] *Comisión que surge fundamentalmente debido a la inquietud de los matemáticos por la enseñanza de esta ciencia en las escuelas y universidades; se estableció en 1908, durante el Congreso Internacional de Matemáticas. El presidente es H. Bass (EE.UU.); el secretario, B. Hodgson (Canadá).*

ferentes figuras geométricas, con la característica de ser acotadas por lineas poligonales o más precisamente por lo que pudiera verse como segmentos de recta.

Actualmente en el mercado están disponibles en materiales diversos. Posteriormente se empezaron a utilizar geoplanos circulares (con número de pivotes variable) y geoplanos isómetricos que permiten la representación de polígonos regulares, claramente los otros dos tipos de polígono regular que sin ser el cuadrado, permiten teselar el plano convenientemente (el triángulo equilátero y el hexágono regular).

En conclusión podemos clasificarlos así el geoplano Ortométrico; de trama cuadriculada, el geoplano circular; es una colección de puntos de una circunferencia igualmente espaciados y sirve también para estudiar propiedades de los elementos de la circunferencia y de las figuras inscritas, finalmente el geoplano Isométrico, de trama triangular, con los pivotes situados en vértices de triángulos equiláteros, la distancia entre cada punto y todos los puntos contiguos a él es la misma.

£Cómo definir en general el geoplano? Podríamos decir que es una tabla con puntillas distribuidas formando cuadrados (respectivamente triángulos equiláteros, polígonos regulares, geoplano polar, paralelogramos).



2.2. Conjeturas y refutaciones con el Geoplano

Conjeturas y refutaciones con el Geoplano

Por otro lado, quién ha hecho un trabajo relativo a la construcción de pruebas y refutaciones con el geoplano? Julieta Verdugo, Luis Briseño, Rita Vázquez, Oscar Palmas. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM [2]. Trabajo titulado *Área de figuras en el geoplano*, en este dan respuesta a la búsqueda de materiales con los cuales desarrollar la enseñanza de las matemáticas de una manera amena, no sólo entre los estudiantes, sino entre los propios docentes con los que ellos han trabajado desde hace mucho tiempo.

2.3. Origen de los conceptos topológicos

Ahora, cómo nacen los conceptos que se quieren construir en este trabajo conjuntamente con los estudiantes? Podríamos dar una definición más analítica de lo que llamamos geoplano, por ejemplo: *Conjunto de pares ordenados de coordenadas enteras*, es más, podemos definirlo como un lattice [3] particular que surge como conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $a(1,0)$ y $b(0,1)$ tomando escalares en los enteros.

Esto último obedece a la interpretación geométrica de uno de los objetos de estudio de lo que hoy se conoce como Geometría de números. En teoría de números, la geometría de los números es un tema que se deriva del trabajo de Hermann Minkowski, sobre la relación entre los conjuntos convexos y lattices en el espacio n-dimensional. Para un estudio riguroso de la teoría geométrica de números el lector puede remitirse a la bibliografía adjunta [3].

Lo que más interesa ahora es rastrear la relación que tiene la teoría geométrica de números con lo que hoy llamamos la topología. Iniciemos anotando que a mediados del siglo XIX empezó un desarrollo completamente nuevo en geometría que pronto se convertiría en una de las grandes fuerzas de las matemáticas modernas.

La nueva rama, llamada análisis situs o topología, tiene como objeto de estudio las propiedades de las figuras geométricas que persisten incluso cuando las figuras son sometidas a deformaciones tan drásticas que hacen que se pierdan todas las propiedades métricas y proyectivas. Muchos de los

[2] *Universidad Nacional Autónoma de México.*

[3] *Remitirse a la Teoría geométrica de números en la bibliografía, más precisamente en [3] para saber qué es un lattice con precisión, pero en una primera lectura se puede obviar la consulta y no influye significativamente en la comprensión del presente texto.*

conceptos desarrollados en la topología han sido estructurados fundamentándolos en nociones e ideas conjuntistas, protagonistas de estos desarrollos son las nociones de conjunto abierto, conjunto cerrado, entre otros. Y para la buena definición de este tipo de conjuntos, se hace necesaria la inclusión de las nociones de punto interior, punto exterior, punto frontera, que serán las nociones más frecuentadas en este trabajo.

Existe una relación entre la geometría de números y la topología conocida como la relación de Pick. George Alexander Pick fué un matemático austriaco nacido en Viena (1859) que murió en un campo de concentración nazi durante la II Guerra Mundial (se cree que en 1943).

George Alexander Pick estableció la relación que existe entre los nudos de una malla (puntos de un geoplano) y el área de un polígono dibujado sobre ella.

Pueden construirse, evidentemente, mallas (geoplanos) de muy diversas maneras. Un cuadrado de dicha malla (geoplano) será la unidad de superficie.

Capítulo 3

Marco Teórico

El marco teórico es tomado de [2] dado que crear un marco conceptual para el Geoplano es una tarea que requiere de investigar sobre el descubrir matemático y el analizar si hay una lógica en este proceso.

No se tiene la pretensión de exponer la teoría de Imre Lakatos, ocultando con palabras inapropiadas, una construcción tan descomunal e inigualable, cuando se puede, por el sólo deseo de respetar, citarlo y fascinarse de su escritura, se aclara que todo lo mencionado en este marco teórico es una citación completa de las palabras de Lakatos y en ese sentido se efatizará incluso con la presentación del texto.

> El método de conjeturas y refutaciones constituyen un patrón heurístico muy general del descubrimiento matemático. Con todo, al parecer sólo fue descubierto en los años 1840, e incluso hoy día les parece paradójico a muchas personas. Realmente, en ningún sitio se reconoce plenamente.

3.1. Estadios de descubrimiento matemático

Estadios de descubrimiento matemático

Hay un patrón simple de descubrimiento matemático o del desarrollo de las teorías matemáticas informales. Consta de los siguientes estadios:

- Conjetura primitiva
- Prueba (un experimento mental o argumento aproximado, que descompone la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas).

- Surgen contraejemplos "globales"(contraejemplos de la conjetura primitiva).
- Se reexamina la prueba: el "lema culpable", respeto al que el contraejemplo global es un contraejemplo "local", queda identificado. Puede que este lema culpable halla permanecido .ºculto.ªnteriormente o puede que no halla sido correctamente identificado. Ahora se explicita y se incorpora como condición a la conjetura primitiva. El teorema (la conjetura mejorada) supera a la conjetura primitiva con el nuevo concepto generado por la prueba como su aspecto nuevo supremo.

  Estos cuatro estudios constituyen el meollo esencial del análisis de la prueba, aunque existen algunos otros estadios normales que aparecen con frecuencia:
- Se examinan pruebas de otros teoremas por si el lema recientemente descubierto o el nuevo generado por la prueba apareciese en ellos. Puede que se descubra que este concepto se encuentra en las encrucijadas de diversas pruebas, emergiendo así su importancia básica.
- Se comprueban las consecuencias aceptadas hasta el momento de la conjetura original ya refutada.
- Los contraejemplos se convierten en ejemplos nuevos, se abren nuevos campos de investigación.

3.2. Enfoque deductivista frente al heurístico

Enfoque deductivista frente al heurístico

La metodología euclidea ha desarrollado un cierto estilo necesario de presentación. Me referiré a él como al .^{es}tilo deductivista". Este estilo comienza con la enunciación de una penosa lista de axiomas, lemas y/o definiciones. Los axiomas y definiciones parecen con frecuencia artificiales y mistificadoramente complicados.

Nunca se nos dice como surgieron esas complicaciones. La lista de axiomas y definiciones ya seguidas por teoremas cuidadosamente expresados. Estos están cargados de pesadas condiciones; parece imposible que alguien los hubiese barruntado alguna vez. El teorema va seguido por la prueba.

De acuerdo con el ritual euclideo, el estudiante se ve obligado a asistir a esta conjetura sin hacer preguntas ni sobre el transfondo ni sobre cómo se realiza el juego de manos. Si el estudianate descubre por azar que algunas de las definiciones inconvenientes están generadas por la prueba, si se pregunta sencillamente cómo es que esas definiciones, esos lemas y el teorema pueden preceder a la prueba, el autor del conjuro lo relegará al ostracismo por una muestra de una muestra de inmadurez matemática.

En el estilo deductivista, todas las proposiciones son verdaderas y todas las inferencias son válidas. Las matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario, al comenzar con una exclusión de monstruos disfrazada, con definiciones generadas por la prueba y con el teorema totalmente desarrollado, así como al suprimir la conjetura original, las refutaciones y la crítica de la prueba. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.

Algunos de los defensores el estilo deductivista pretenden que la deducción es el patrón heurístico de las matemáticas y que la lógica del descubrimiento es la deducción. Otros constatan que tal cosa no es cierta, pero de ello sacan como consecuencia que el descubrimiento matemático es una cuestión completamente no racional. Así, pretenderán que, aunque el descubrimiento matemático no proceda deductivamente, si queremos que nuestra presentación de los descubrimientos matemáticos se realice racionalmente, habrá de proceder al estilo deductivista.

Así pues, hoy en día, disponemos de dos argumentos a favor del estilo deductivista. Uno de ellos se basa en la idea de que la heurística es racional y deductivista. El segundo argumento se basa en la idea de que la heurística no es deductivista, aunque tampoco racional. Hay también un tercero argumento. Algunos matemáticos profesionales a los que no les gusta los lógicos, filósofos y otros seres extravagantes que interfieren en su trabajo dicen frecuentemente que la introducción del estilo heurístico exigiría escribir de nuevo los libros de texto y los haría tan largos que nunca se podrían leer hasta el final. También los artículos se alargarían mucho. La respuesta a este argumento pedestre es: intentémoslo. Como ya hemos mencionado, el estilo deductivista desgaja las definiciones generadas por la prueba de sus "pruebas-antepasadasz las presenta aisladamente de un modo artificial y autoritario. Oculta los contraejemplos globales que han llevado a su descubrimiento. Por el contrario el estilo heurístico pone en el candelero esos factores y hace hincapié en la situación problemática: hace hincapié "lógica"que ha dado a luz al nuevo concepto.

La actividad matemática es una actividad humana. Ciertos aspectos de dicha actividad, como los de cualquier actividad humana, se pueden estudiar con la psicología, y otros con la historia. La heurística no se interesa primeramente por esos aspectos; pero la actividad matemática produce matemáticas. Las matemáticas, este producto de la actividad humana, se .enajena"de la actividad humana que la está produciendo. Se convierte en un organismo viviente y en desarrollo que adquiere una cierta autonomía respecto a la actividad que la ha producido; desarrolla sus propias leyes autónomas de crecimiento, su propia dialéctica. El matemático genuinamente creativo no es más que una personificación, una encarnación de esas leyes que sólo se pueden realizar en la acción humana. Su encarnación, con todo, rara vez es perfecta. Tal como aparece en la historia, la actividad de los matemáticos humanos no es más que una chapucera realización de la maravillosa dialéctica de las ideas matemáticas. Pero, cualquier matemático que tenga talento, chispa y genio, está en comunión con, siente la absorción de y obedece esta dialéctica de ideas. A continuación se presenta una red conceptual que surge del estudio de los enfoques bajo los cuales se da la creación o construcción.

Capítulo 4

Marco conceptual para el Geoplano

El interés común que presentan los docentes a la hora de utilizar el geoplano, es el de enfatizar en conceptos como área y perímetro, esto, empleando generalmente las fórmulas ya conocidas en geometría euclidiana, es así como enfatizamos en conceptos como base, altura, diagonales, etc, como elementos que nos permiten hallar el área. Pero cómo dar un enfoque distinto?, un enfoque que tenga como punto de partida nociones topológicas intuitivas sobre el punto como: punto interior, punto frontera y punto aislado, sería realmente interesante, es justamente esto lo que se pretende con las siguientes reflexiones.

4.1. Conjunto G_α

Definición 1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ se define el conjunto G_α como*

$$G_\alpha = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a = m\alpha, b = n\alpha, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

De hecho se puede conceptualizar sobre un conjunto más general como los siguientes:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\beta \neq 0$

$$G_{\alpha\beta} = \{(a,b) \in \mathbb{R} / a = m\alpha, b = m\beta, n, m \in Z\}$$

O también, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ forman un conjunto linealmente independiente, sea:

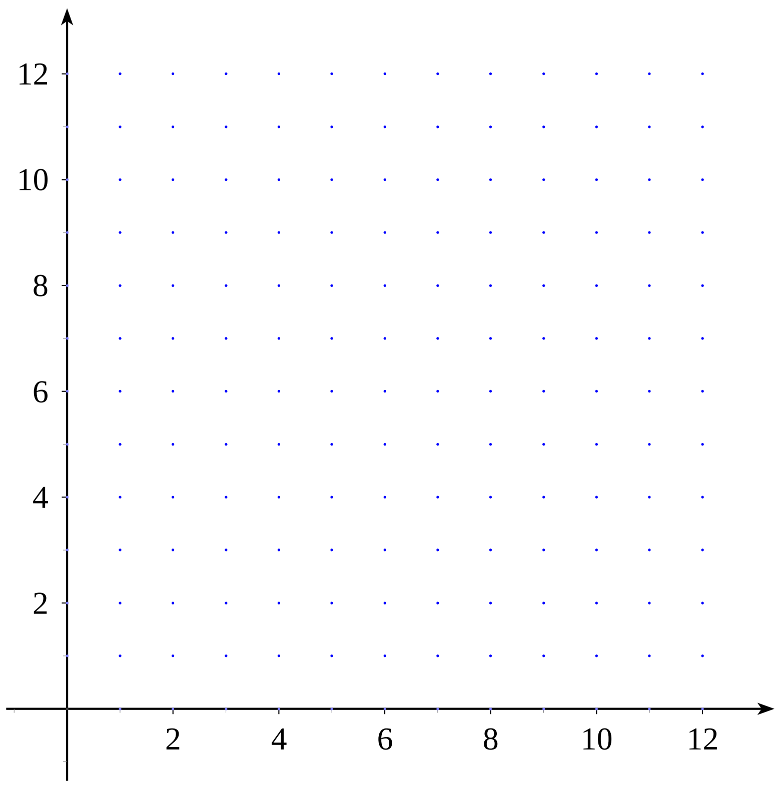
$$G_{\alpha\beta} = \{a \in \mathbb{R}^2 / a = n\alpha + m\beta, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Se aclara que el objetivo de este texto es el estudio de G_α

4.1.1. Definiciones

Geoplano

A continuación analizaremos el caso en que $\alpha = 1$, las definiciones teoremas y demostraciones hechas para G_1 son análogas para G_α, con las restricciones pertinentes. La siguiente ilustración representa un subconjunto de G_1, en el que los números y descritos en la definición, satisfacen $m > 0$ y $n > 0$. Sin pérdida de generalidad, los gráficos y razonamientos se harán siempre sobre éste subconjunto.



Distancia

A partir de la definición de G_1 es claro que éste está incluido en $\mathbb{R}^2$.Es así como adoptamos la "métrica.º función distancia usual para nuestro conjunto G_1.

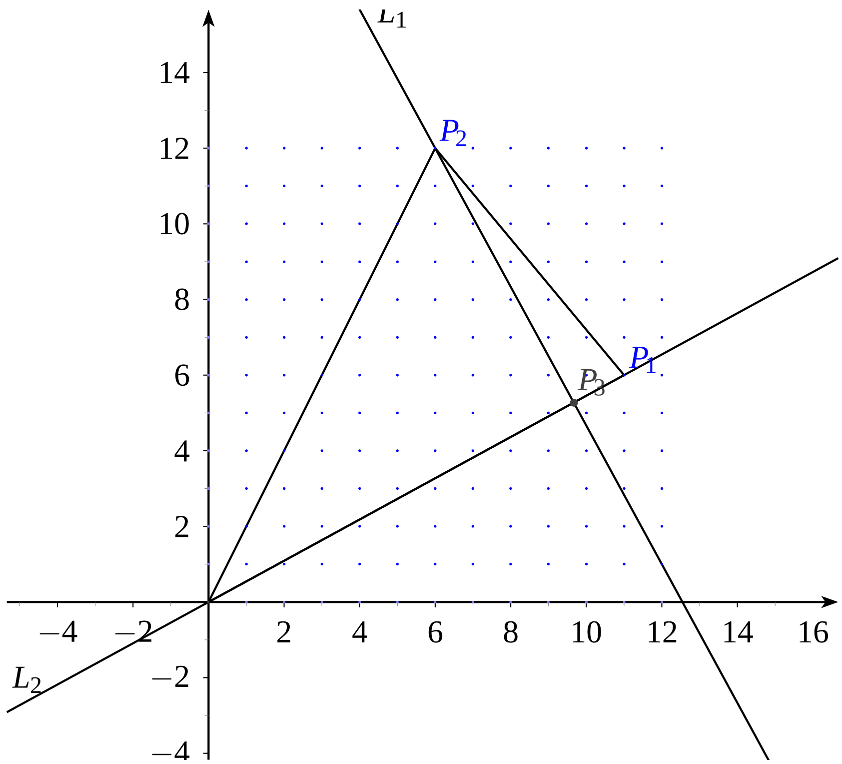
Definición 2. *La distancia entre los puntos $P_1(a_1,b_1), p_2(a_2,b_2)$ es la función definida como:*

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

Recuérdese que esta función es adoptada como métrica por satisfacer las condicines:

- $d(P_1,P_2) \geq 0$
- $d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1)$
- $d(P_1,P_2) \leq d(P_1,P_3) + d(P_3,P_2)$

Se da inicio a la construcción del marco conceptual para el geoplano. Cómo hallarías el área de un triángulo en G_1?



Seguramente hallarías la longitud de un lado y también la altura relativa al mismo. Pero para esto último, no basta con emplear una sola vez la función distancia, tendrías que hallar la ecuación de las rectas L_1 y L_2 para luego determinar el punto P_3, punto de intersección de las rectas y a la vez pie de la altura relativa a $\overline{OP_1}$. Luego calcular las distancias $d(O,P_1)$ y $d(P_2,P_3)$, longitudes de altura y base respectivamente.

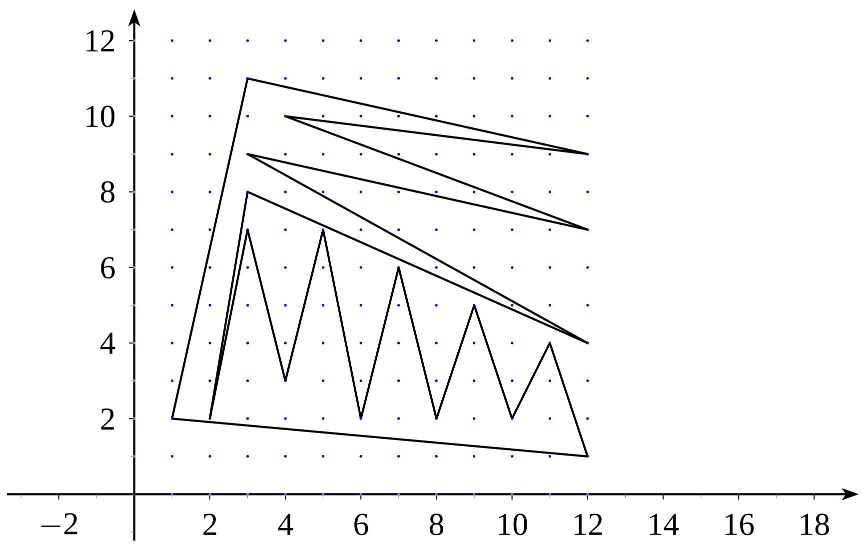
Otra estrategia para el último paso es emplear el siguiente resultado, el cual lo dejamos para que el lector lo pruebe: sea la recta L con la ecuación cartesiana $Ax+By+C=0$ con A,B y C en los reales y A y B n o ambos cero:

Sea $P_0(x_0,y_0) \in R^2$, se afirma que la distancia de P_0 a la recta L está dada por

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

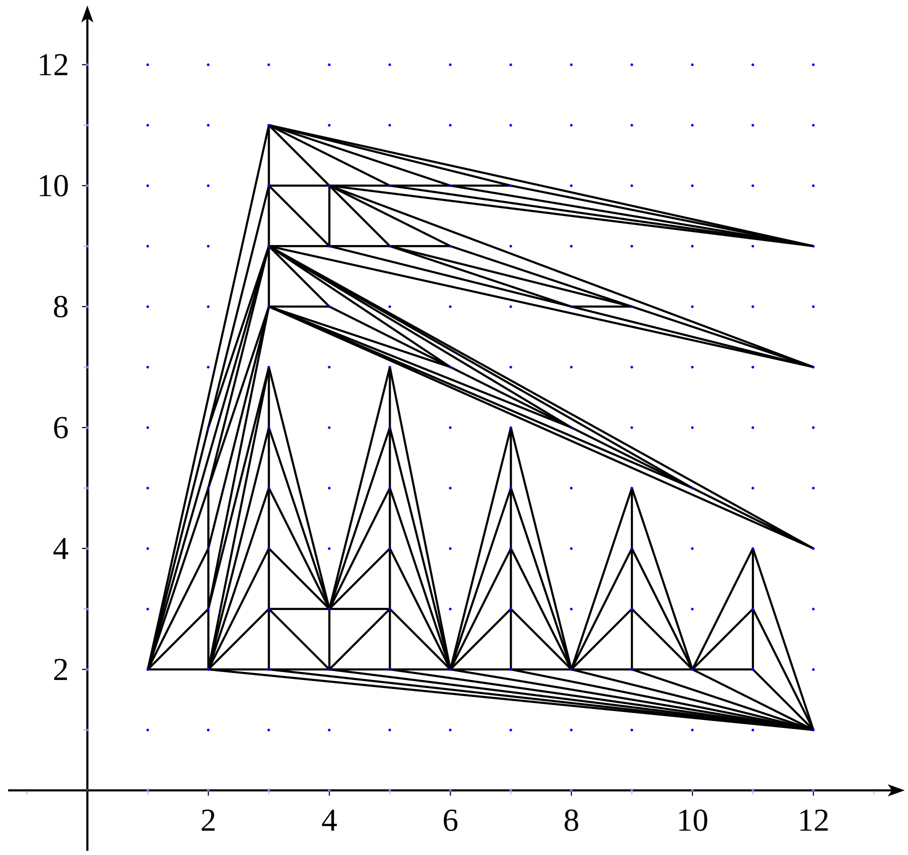
Al utilizar esta estrategia, lo que se gana es reducir el número de cálculo necesarios para hallar el área, pero esta reducción no se hace notable cuando se trata de responder una pregunta como la siguiente.

cómo hallarías el área de un polígono como el de la figura siguiente?



La idea sería descomponerlo en triángulos y aplicar la estrategia anterior. Pero sería muy engorroso tratar de hallar el área, más aún, si fuese otro polígono mas complicado. Ahora, que tal si dividimos este polígono, en triángulos bien especiales, [1] no cualquier clase de triángulos; algo así como los triángulos más pequeños posibles, así:

[1] inicialmente hablaremos en términos intuitivos y luego se dará un formalismo relativo a los conceptos que así emerjan



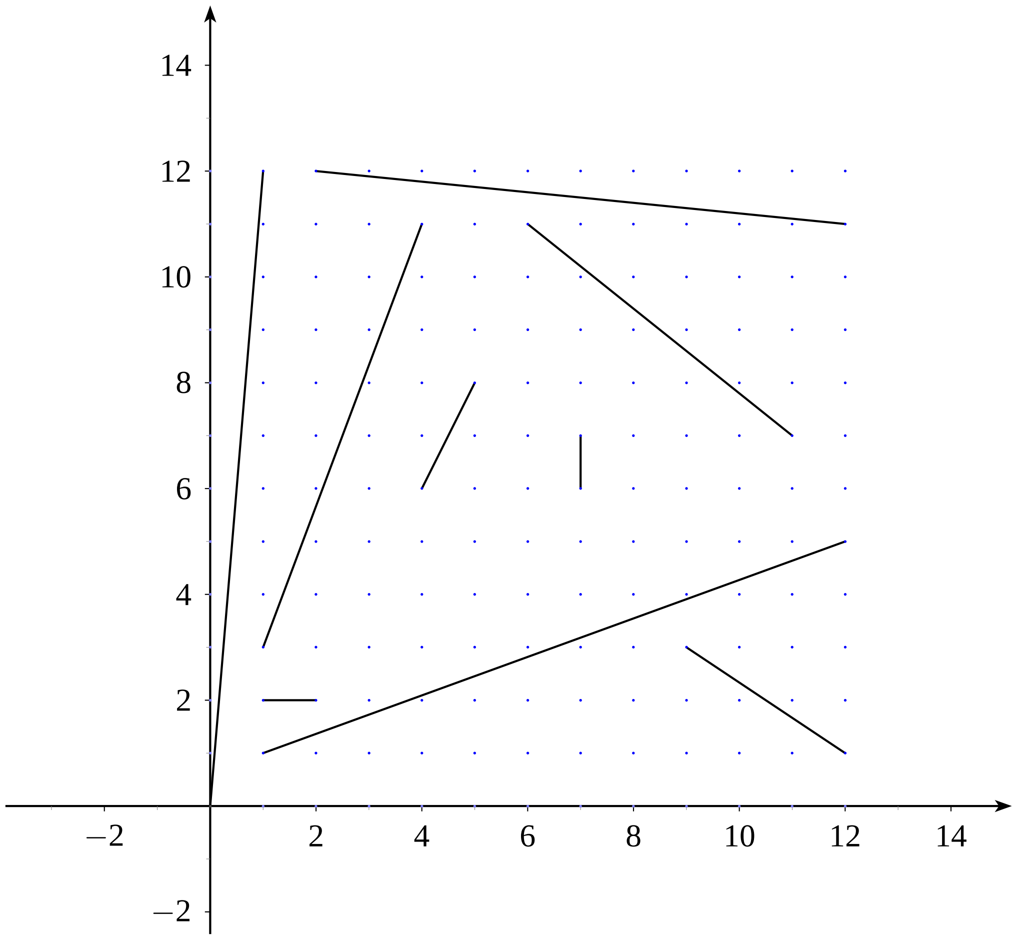
La pregunta ahora es: qué tienen en común estos triángulos? Primero, preguntémonos por los lados y notemos que se pueden definir así:

Segmegén

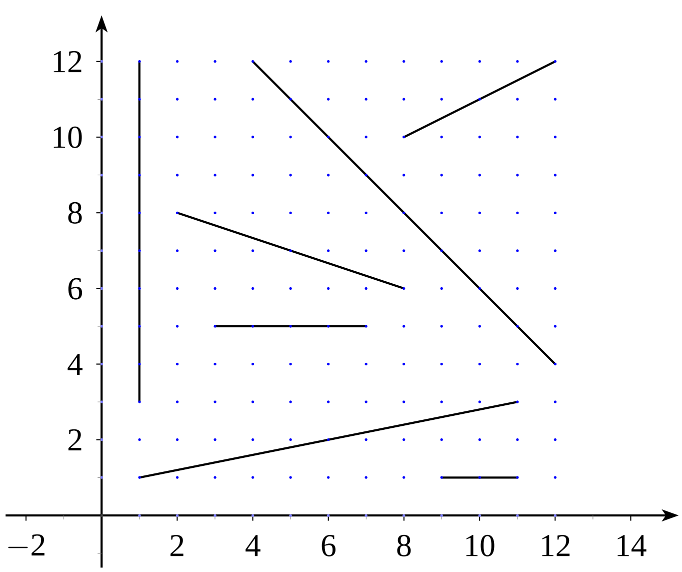
Definición 3. *Sean $P,Q \in G_1$ al segmento $\overline{PQ}$ le llamaremos segmegén si se cumple que:*

- $P \neq Q$
- $\forall R \in G_1 - \{P,Q\},\ d(P,Q) < d(P,R) + d(R,Q)$

En el gráfico siguiente se presentan algunos segmegén.



En el siguiente gráfico se muestran segmentos que no son segmegén.



Ahora, será que podemos definir a estos triángulos también? ellos tienen una cualidad común? alguno tiene puntos interiores de G_1? Analice la siguiente definición.

Triagén

Definición 4. *Sean $P, Q, R \in G_1$, al triángulo $\triangle PQR$ le llamaremos triagén si se satisface:*

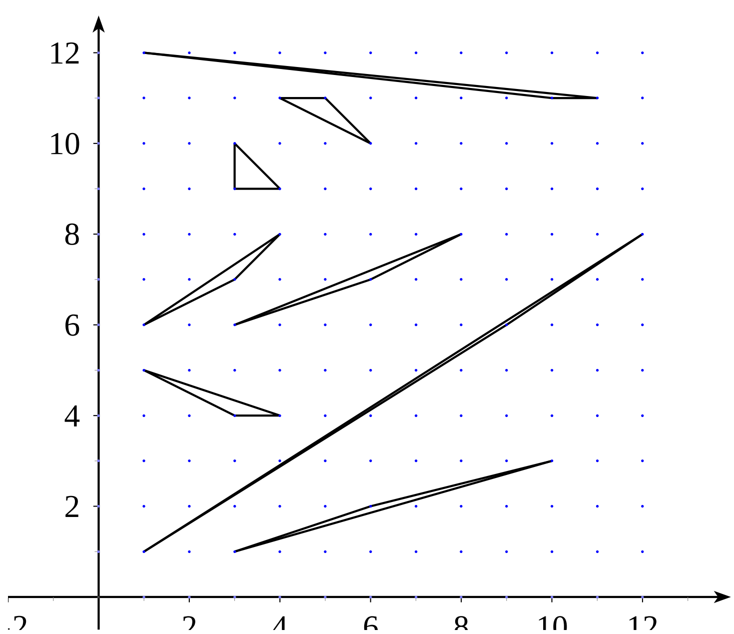
1. *$\overline{PQ}$, $\overline{RQ}$ y $\overline{PR}$ son todos segmegén.*
2. *Si $\overline{PQ}$ es el segmegén de mayor longitud, entonces*

$$\forall S \in G_1 - L_{PQ}, d(R,P) + d(R,Q) \leq d(S,P) + d(S,Q)$$

Comentarios

1. En la condición 2 de la definición anterior, el símbolo L_{PQ} denota a la recta que determinan los puntos P y Q.
2. La primera condición impuesta para el triagén se traduce en palabras como que ningún punto de G_1 está en el interior de sus lados.
3. La segunda condición impuesta para el triagén se traduce eb palabras como que ningún punto de G_1 está en su interior.

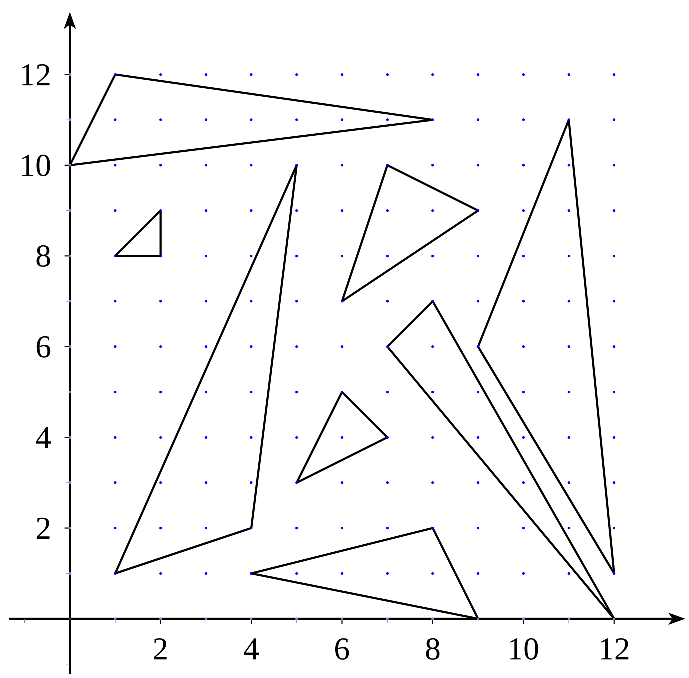
A continuación se muestra el gráfico de algunos triagén, se invita al lector a verificar los comentarios que se acaban de hacer.



Seudotriagén

Definición 5. *Si sólo se impone la condición 1 de la definición de triagén entonces al triángulo $\triangle PQR$ le llamaremos* **Seudotriagn**

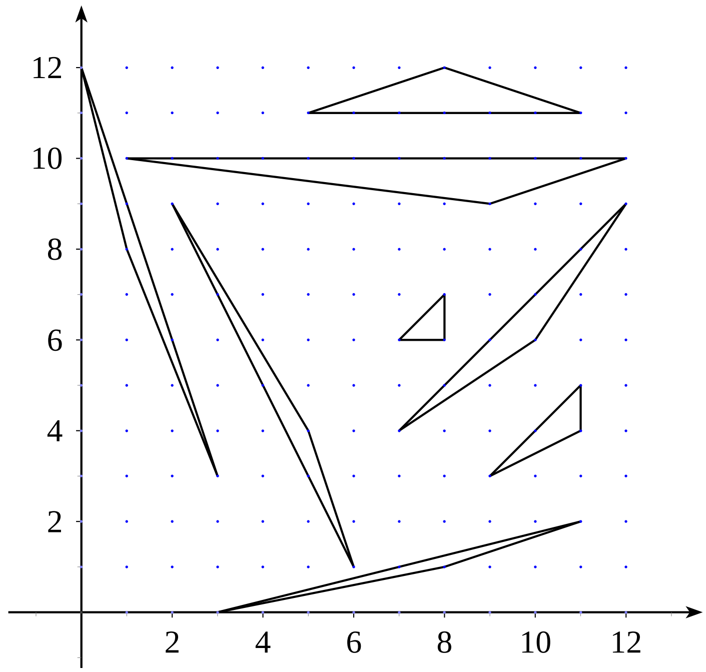
A continuación se muestra el gráfico de algunos seudotriagén, se invita al lector a verificar los comentarios que se acaban de hacer.



Triabásico

Definición 6. *Si sólo se impone la condición 2 de la definición de triagén entonces al triángulo $\triangle PQR$ le llamaremos* **Triabsico**

A continuación se muestra el gráfico de algunos triabásicos, se invita al lector a verificar los comentarios que se acaban de hacer.



Sigamos con las preguntas. Nuestra pregunta más exótica es la siguiente: todos los triagen tienen la misma área?. Para dar una respuesta afirmativa tenemos que hallar la prueba y para dar una respuesta negativa tenemos que presentar un contraejemplo. Antes que nada, preocupémonos por la siguiente pregunta: será que dado un segmegen, podemos hallar siempre la mínima distancia de un punto de $P \in G_1$ a este segmegen? Es decir, cómo se garantiza la existencia de un número que representa la mínima distancia de un punto a un segmento o recta (segmegén)? Para que analicemos esta cuestión considere la siguiente definición que nos posibilitará estructuras y afinar más esta idea.

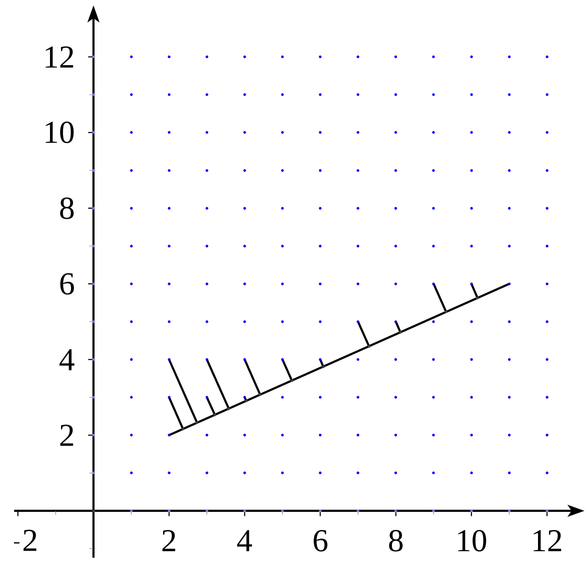
Conjunto D_{PQ}

Definición 7. *Sean $P,Q \in G_1$ tales que $\overline{PQ}$ es segmegén, entonces definimos el conjunto de distancias D_{ij} de la forma:*

$$D_{PQ} = \{d(R, L_{PQ}) > 0\}$$

para cualquier punto $R \in G_1$

A continuación se presenta el gráfico de algunos segmentos, a los cuales se les calcula la longitud para poder construir el conjunto D_{PQ}.



Teorema de acotamiento

Teorema 1. *Sean $P, Q \in G_1$ con $\overline{PQ}$ segmegén, se afirma que el conjunto D_{PQ} está acotado inferiormente por un real positivo.*

Demostración. No perdemos generalidad si consideramos a $P = (0,0)$ y $Q = (a,b)$ con $mcd(a,b) = 1$ [2]

La ecuación de la recta determinada por los puntos P y Q es $y = \frac{b}{a}x$, claramente la distanca de un punto $R = (x,y) \in G_1$ a la recta L_{PQ} está dada por:

$$d(R, L_{PQ}) = \frac{|y - \frac{b}{a}x|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}$$

Se propone como candidato a ser cota inferior al número $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, razonando por reducción al absurdo, supongamos que hay un número

$$d((x_0, y_0), L_{PQ}) \in D_{PQ}$$

tal que

$$d((x_0, y_0), L_{PQ}) < \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

es decir, tal que

$$\frac{|y - \frac{b}{a}x|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} < \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[2] Se deja al lector la prueba de que bajo las condiciones descritas, $\overline{PQ}$ es segmegén

Si se analiza tal desigualdad se obtiene que esta desemboca en:

$$|ay_0 - bx_0| < 1$$

Pero recordemos que $(ay_0 - bx_0) \in \mathbb{Z}$ y esto implica que $ay_0 - bx_0 = 0$ o de otra forma

$$y_0 = \frac{b}{a}x_0$$

La última ecuación afirma que $(x_0, y_0) \in L_{PQ}$ lo que implica que

$$d((x_0, y_0), L_{PQ}) = 0$$

pero esto es contradictorio con el hecho de que $d((x_0, y_0), L_{PQ}) \in D_{PQ}$, con lo que queda probado que D_{PQ} está acotado por el real positivo $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ □

Comentario

D_{PQ} tiene como elemento mínimo al número $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. la razón es la siguiente:

$$d((x,y), L_{PQ}) = \frac{|y - \frac{b}{a}x|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Siempre y cuando existan enteros x_0 y y_0 tales que

$$|ay_0 - bx_0| = 1$$

Pero sabemos que la hipótesis de que $mcd(a,b) = 1$ garantiza la existencia de tales enteros.

Todos los triagén tienen la misma área

Una consecuencia importantísima de todo lo anterior es que *todos los triagén tienen igual área*.

No se pierde generalidad si calculamos el área del triagén que tiene como uno de sus lados al semento $\overline{PQ}$ con $P = (0,0)$ y $Q = (a,b)$ siendo $mcd(a,b) = 1$.

En este caso el área de dicho triagén se puede calcular así:

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} d(P,Q) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \frac{1}{2}$$

Es decir que todo triagén en G_1 tiene área igual a $\frac{1}{2}$.

Entonces para hallar el área de un polígono con vértices en G_1, lo único que se debe hacer es contar el número de triagéns que lo cubren exactamente?, esto sería suficiente pues luego se multiplicaría tal número por $\frac{1}{2}$ y se obtiene el área del polígono.

Nótese que el polígono del que estamos hablando es bien general, en el sentido de que no le ponemos la restricción de ser convexo, claro está, pero con la restricción ineludible de que la línea poligonal que determine al polígono, no puede ser en general cruzada, dado que el punto de cruce, no necesariamente está en G_1.

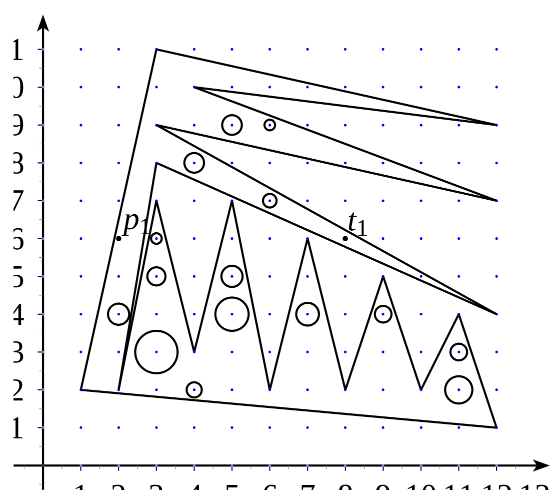
Caracterización de los puntos

Ahora, siguiendo con nuestro razonamiento anterior cómo contar el número de triagéns que cubren exactamente al polígono?, es absolutamente necesario ponerse en el trabajo de dividir al polígono en triagéns para posteriormente iniciar el conteo?, qué relación tiene el número de triagéns con el número de puntos de polígono?, los puntos del polígono se pueden clasificar según su ubicación?.

Aquí es donde ingresa la topología en nuestra ayuda, y responde algunas de las preguntas del párrafo anterior con las siguientes definiciones.

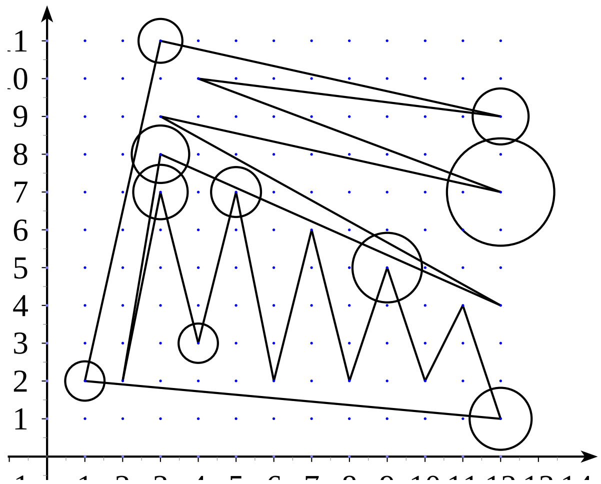
Definición 8. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ decimos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es punto interior de A si existe un real positivo ε tal que el círculo con centro en P y radio ε se contiene enteramente en A.*

A continuación se muestra el gráfico de algunos puntos de G_1 que son interiores del conjunto de todos los puntos que forman un polígono de vértices en G_1.



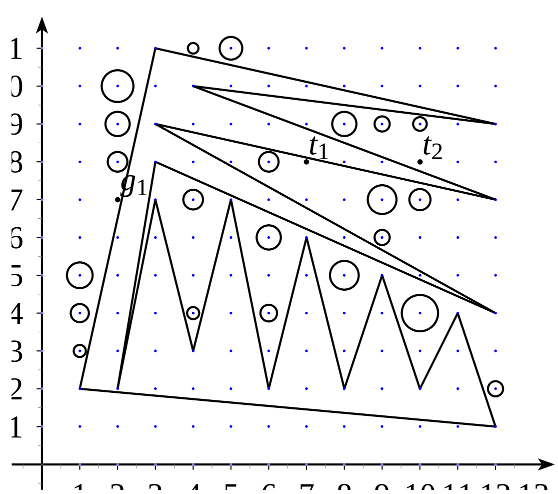
Definición 9. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ decimos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es punto frontera de A si para todo real positivo ε, el círculo con centro en P y radio ε se intercepta tanto a A como al complemento de A.*

A continuación se muestra el gráfico de algunos puntos de G_1 que son puntos frontera del conjunto de todos los puntos que forman un polígono de vértices en G_1.



Definición 10. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ decimos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es punto exterior de A si existe un real positivo ε tal que el círculo con centro en P y radio ε se contiene enteramente en el complemento de A.*

A continuación se muestra el gráfico de algunos puntos de G_1 que son exteriores del conjunto de todos los puntos que forman un polígono de vértices en G_1.



Teorema de filo o lado

Volvamos a nuestra tarea, cuál era?, establecer una relación entre el número de puntos (de alguna clase de las ya definidas) y el número de triagéns de un polígono.

Se da por hecho que el lector conoce la *relación de Euler* para poliedros simples a saber $V - E + F = 2$ (con V, E, F denotando número de vértices, aristas y caras respectivamente).

Aunque parezca poco natural, a partir de la fórmula de Euler vamos a deducir *la fórmula de Pick*, fórmula que explicita la relación que estamos buscando.

Teorema 2. *Dado un polígono simple con una completa triangulación (para nuestro caso, división en número exacto de triagéns), el número de lados o bordes está dado por:*

$$E = 3I + 2B - 3 \qquad (1)$$

(Donde B e I representan número de puntos frontera e interiores respectivamente).

Nota: El teorema ha sido enunciado entendiendo como polígono simple al que tiene vértices en un conjunto discreto y finito de puntos (por ejemplo polígono en el geoplano de línea poligonal no cruzada). Por otro lado, completa triangulación es entendida como conjunto de triángulos adyacentes disjuntos (salvo se intercepten en la frontera) que cubren y forman al polígono (por ejemplo triagéns).

Demostración.

1. Si $B = 3$, $I = 0$, entonces la fórmula (1) es válida y $E = 3$ (note que en este caso el polígono es un triángulo).

2. Si un nuevo punto interior es considerado, E es incrementado en 3, claramente dado que el nuevo punto interior determina 3 lados a los 3 vértices respectivos. Naturalmente la fórmula (1) es válida en este caso.

3. Si un nuevo punto frontera es añadido en un borde (o lado) interior y tenemos x puntos en la frontera, formando bordes (o lados) que llegan a viejos puntos interiores, E es incrementado en $2 + x$, dado que tendríamos:

$$E + 2 + x = 3(I + x) + 2(B + 1 - x) - 3$$

, nuevamente la fórmula (1) es válida.

Todos los casos posibles son tratados y el teorema ha sido establecido.

□

Derivación de la fórmula de Pick

Derivación de la fórmula de Pick: sea un polígono como en el teorema anterior. Tenemos:

$$V = I + B$$

Si denotamos el área del polígono por a también podemos decir

$$E = 3I + 2B - 3$$

$$(F-1)/2 = a$$

Todo lo anterior al sustituir en la fórmula de Euler se obtiene la fórmula de Pick dado que

$$F = 2 + E - V$$

entonces

$$(2 + E - V - 1)/2 = a$$

$$(2 + 3I + 2B - 3 - V - 1)/2 = a$$

$$(3I + 2B - I - B - 2)/2 = a$$

Se ha llegado a resultados realmente sorprendentes, no se necesita que los estudiantes que deseen trabajar con el geoplano memoricen una cantidad alarmante de fórmulas para hallar el área de un polígono.

Sabemos que podemos hacer una triangulación de cualquier polígono con vértices en G_1 en triagéns, pués el conjunto de puntos de G_1 involucrados en nuestro proceso es finito y al saber que todos los triagén tienen la misma área, sólo es necesario contar el número de triagen del polígono, más aún, contabilizar el número de triángulos se puede hacer sólo contando el número de triángulos interiores y frontera como ya hemos visto.

4.2. Proposiciones de conceptualización

Las siguientes proposiciones son para conceptualizar y/o reconceptualizar los objetos geométricos que hemos llamado *segmegén, triagén, seudotriagén y triabásico*. Todas estas proposiciones son sometidas a razonamientos de validación por parte del lector, además de someterse a reformulación o reescritura formal.

1. Segmegén

    a) Segmento determinado por dos puntos del geoplano, donde todo punto interior de dicho segmento no pertenece al geoplano.

    b) Tres segmegén (con las respectivas restricciones en cuanto a desigualdad triangular) pueden formar un segmegén o un seudotriagen.

c) Si O y P son los puntos inicial $O(0,0)$ y final $P(a,b)$ de un segmegén $\overline{OP}$ entonces $mcd(a,b) = 1$,es decir , a y b son primos relativos.

d) Si dos segmegén se cortan, no necesariamente su punto de intersección es un punto del geoplano.

e) Un segmegén no puede estar contenido en el interior de un Triabásico pero si en su frontera.

f) Un segmegén puede estar contenido en el interior de un Seudotriagen o en su frontera o también puede estar contenido en el interior del seudotriagen, excepto por sus puntos extremos.

g) Un segmegén solo puede estar contenido en la frontera de un Triagen.

h) Un Seudotriagen puede estar estrictamente contenido en un Triabásico (siendo necesario que el Triabásico sea Triagen).

2. Triagén

a) Triángulo tal que sus tres lados son segmegen y tal que todos sus puntos interiores no son puntos del geoplano.

b) Un Triagen siempre tiene la misma área.

c) Solo existe un Triagen rectángulo.

d) Solo existe un Triagen isósceles.

e) Solo existe un Triagen isósceles rectángulo.

f) Todo polígono se descompone en triagens.

g) Un Triagen puede estar estrictamente contenido en un seudotriagen o en un Triabásico.

h) Si un Seudotriagen (respectivamente Triabásico) está contenido en un Triagen, entonces son el mismo triángulo.

3. Seudotriagén

a) Triángulo tal que sus tres lados son Segmegén.

b) Si un Seudotriagen tienen al menos un punto interior entonces existe un Triabásico (respectivamente un Triagen) estrictamente contenido en él

c) Un Seudotriagen que no tiene puntos interiores tiene área fija

d) Un Seudotriagen puede estar estrictamente contenido en un Triabásico (siendo necesario que el seudotriagen sea Triagen) *e*) Un Seudotriagen no necesariamente tiene descomposición única en unión finita de Triagen(s)

4. Triabásico

   a) Triángulo con vértices en el geoplano y tal que todos sus puntos interiores no son puntos del geoplano.

   b) Todos los puntos del geoplano que hacen parte de un Triabásico son puntos de su frontera.

   c) No todo Triabásico es Triagen

   d) Existen Triabásico que son Seudotriagen (los Triagen) y También que no lo son.

   e) Un Triabásico no tiene puntos interiores y no tiene área fija.

   f) Un Triabásico puede estar estrictamente contenido en un Seudotriagen (sin ser necesario que el Seudotriagen sea Triagen)

   g) Un Triabásico tiene descomposición única en unión finita de Triagen(s)

Capítulo 5

Estrategias para formular preguntas

Es crucial que se note que se ha iniciado con el título estrategias para formular preguntas siendo el título original: Estrategias para Conjeturar en el aula de clase en Matemáticas, y no en inoficiosamente ya que éstas estrategias son parte importantísima en el proceso para alcanzar los objetivos de este trabajo, es decir, las estrategias no solo son para el estudiante, son en realidad un tesoro para el docente deseo de crear matemáticas con sus estudiantes.

5.1. Estrategias para formular preguntas

Estrategias para formular preguntas [1]

Los siguientes enunciados no necesariamente están todos evidenciados en este trabajo, se ha considerado conveniente incluirlas todas por ser sumamente importantes para trabajos futuros propios o de lectores.

1. Proponer a los estudiantes causas en búsqueda de posibles consecuencias.

2. Proponer a los estudiantes causas en búsqueda de posibles consecuencias.

[1] Todos los enunciados a continuación han tenido en cuenta las siguientes estrategias que hacen parte de los avances de la tesis de maestría en educación matemática: los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales en el aula de clase: El contexto de las conjeturas y el contexto de las pruebas matemáticas, Grupo de investigación, Colciencias A: Educación Matemática e Historia, UdeA-EAFIT. Tesis asesorada por el Dr. Carlos Mario Jaramillo López. (Doctor en Ciencias Matemáticas Universidad Politécnica de Valencia España)

3. Enunciar en forma consciente, por parte del docente, algunos enunciados con sus respectivas cuantificaciones y debatir su cuantificación.

4. Establecer regularidades en las figuras geométricas.

5. Construir un campo semántico que nombre hechos que aún no han sido nombrados en la matemática, y que emerjan en los estudiantes.

6. Describir las personalidades e historia de vida de los objetos matemáticos: Nacimiento, Familia, Genética, Posibles relaciones con otros objetos.

7. Definir las inclusiones de familias de los objetos matemáticos a partir de las extensiones de sus conceptos.

8. Dar enunciados que relacionen objetos matemáticos y establecer excepciones al enunciado.

9. Realizar constantes refutaciones a los enunciados para mejorarlos.

10. Realizar conscientemente pruebas de validación y procesos de justificación de los enunciados.

11. Qué implica que... escribir una serie de enunciados condicionales.

12. Actividades de falso y verdadero con mejoría a verdadero de los falsos, realizando pequeñas modificaciones estructurales al enunciado.

13. Establecer en forma precisa el tipo de razonamiento a emplear.

14. Detallar en forma precisa las definiciones que hacen parte de los enunciados de las situaciones en cuestión.

15. Suponer los problemas resueltos y aplicar el método Regresivo-Progresivo.

16. Enunciados emergentes: conjeturas de la visualización de la información complicada en un cuadro de doble entrada.

17. Trabajo de los mapas conceptuales para detectar la red de relaciones entre objetos, concepto y relaciones matemáticas y construcciones de enunciados a partir de éste.

18. Generación de hipótesis ante un hecho ocurrido y construcción de enunciados.

19. Justificación y pruebas de los enunciados conjeturados por los estudiantes. El contexto de la justificación en el aula de clase.

20. La comprensión conceptual mejora el entendimiento y trabajo de resolución de problemas.

21. Cambios de registro y representaciones permiten comprender mejor lo que se conjetura. Por lo general se pasa de lo aritmético a lo geométrico y viceversa.

22. Supuestos de casos hipotéticos.

23. Dado un conjunto de premisas donde ya se ha conjeturado, agregar o quitar otra premisa y establecer razonamientos sobre ellas.

24. Comprender la semántica de los enunciados: las definiciones.

25. Comprender la sintaxis de los enunciados. La lógica, conectivos lógicos y cuantificadores de los enunciados.

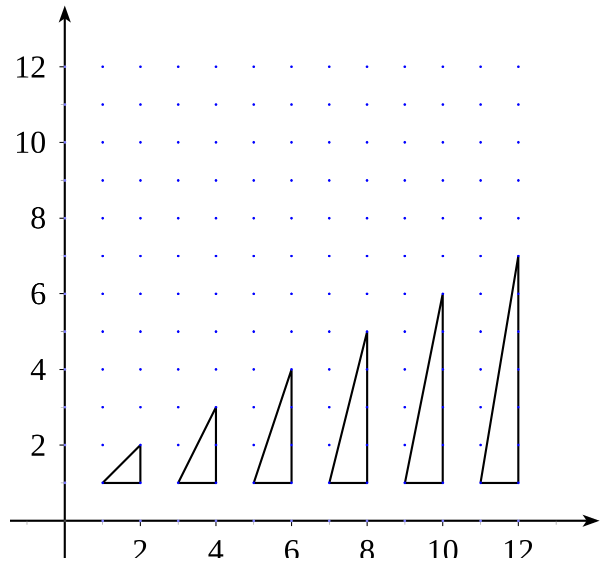
5.2. Cuestionario

Cuestionario

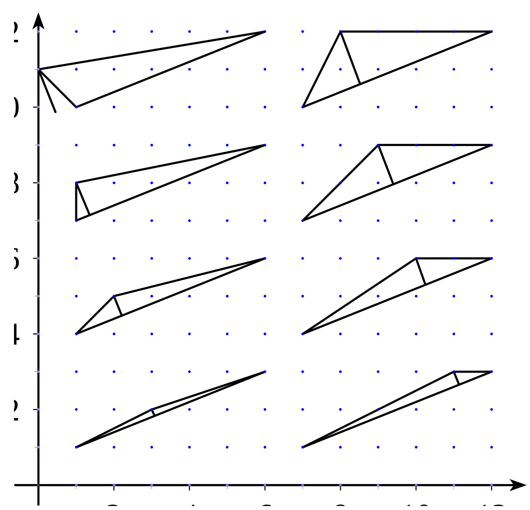
Todos los enunciados a continuación fueron construidos uno a uno pensando en ser un poco pretencioso en algunos casos y en otros, pensando en promover en el estudiante una gran capacidad de abstracción, imaginación y creatividad.

- Si un triángulo tiene como base un segmegén de mínima longitud, una altura de longitud n, con n un número natural, cómo es el triángulo?, qué puedes decir del número de puntos interiores, si es que existen?, qué puedes decir del número de puntos frontera, si es que existen?.

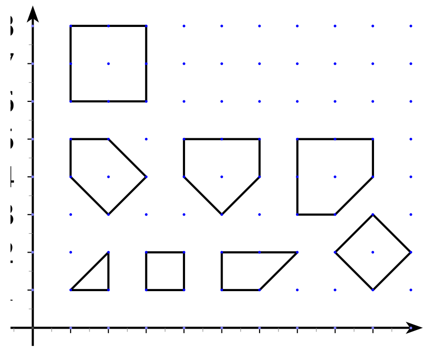
  Se busca con este enunciado que el estudiante establezca regularidades en las figuras geométricas y para este tiene que tener una estrategia de razonamiento inductivo.



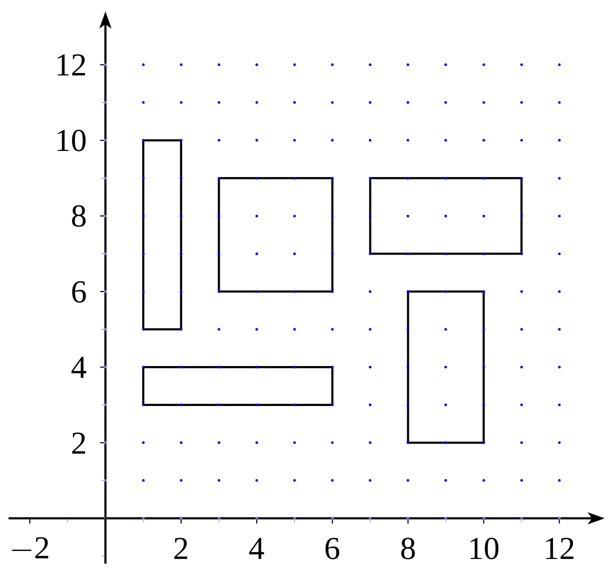
- Si un triángulo tiene como base un segmegén de longitud $\sqrt{a^2+b^2}$, con $mcd(a,b) = 1$ y altura $\frac{n}{\sqrt{a^2+b^2}}$ con n un natural, responde las preguntas del punto anterior.



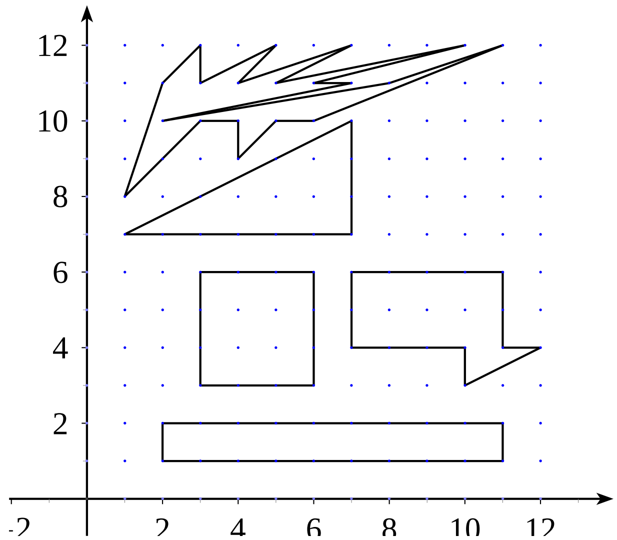
- Considere la sucesión de polígonos siguiente: p_1 es triagén isósceles y es polígono de mínimo perímetro en el geoplano, p_2 polígono de mínimo perímetro en el geoplano después de p_1, en general, p_n es polígono de mínimo perímetro en el geoplano después de p_{n-1}. Es realmente ésta una sucesión en el sentido estricto, es decir, será que para todo par de polígonos p_k y p'_k tales que son distintos y satisfacen la condición de ser el polígono de mínimo perímetro en el geoplano después de p_{k-1}?



- Si un polígono en el geoplano tiene perímetro $4n$ con n natural es posible establecer cuál será el área máxima o mínima de este? Vemos que aquí el estudiante está enfrentado a aceptar causas en búsqueda de posibles consecuencias, Cuáles?, las que se puedan derivar de tener como hipótesis, un polígono que tiene perímetro $4n$.

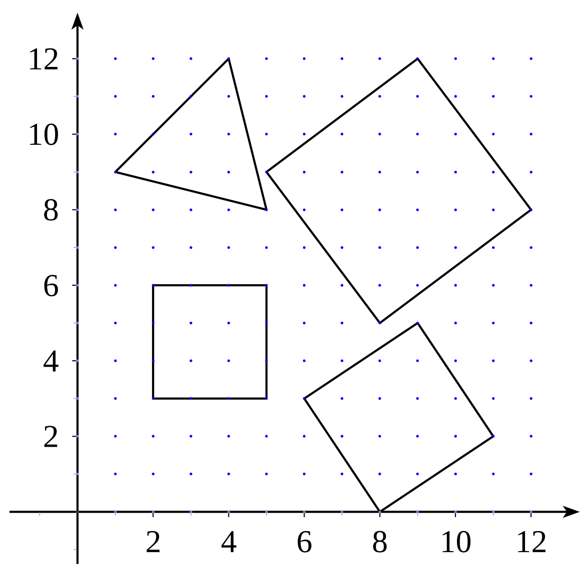


- Si un polígono en el geoplano tiene área fija n^2 con n natural, es posible establecer cuál será el perímetro máximo o mínimo de este? Nuevamente, se proponen causas en búsqueda de posibles consecuencias en este caso fijando el área de un polígono que es considerado variable.



- Cuál o cuáles son los polígonos regulares en el geoplano?

  Esta pregunta puede o mejor, es un muy buen problema de investigación, genera demasiada incertidumbre para cualquier académico de la educación matemática, dar una respuesta argumentada y esto es lo que se busca, que las preguntas en determinado momento sean altamente intrigantes y poco domesticadas.



- Si un triángulo en el geoplano es isósceles y tiene área fija, es único?

  En esta pregunta y otras que vienen, está presente no sólo una inquietud, sino que tiene un trasfondo inimaginable, dado que, la investigación en matemáticas a lo largo de la historia se ha preguntado por la existencia y por la unicidad de los objetos matemáticos que en el camino de la teorización se han ido encontrando. Sorprende por ejemplo que los números reales como estructura de campo ordenado completo sea única, éste y muchísimos objetos de las matemáticas tienen esta connotación y es por esto que se hace importante que los estudiantes en su formación académica básica vayan enfrentándose a cuestiones que la lógica nos propone. Sin ellas no se daría una estructura rigurosa a las matemáticas.

- Si un triabásico isósceles tiene área fija es único?

- Si un seudotriagén isósceles tiene área fija es único?

  Se tiene que estar obligado a disfrutar de los últimos enunciados o preguntas Si un triángulo en el geoplano es isósceles y tiene área fija, es único?, Si un triabásico isósceles tiene área fija es único?, £Si un seudotriagén isósceles tiene área fija es único? Es una secuencia de preguntas que dan a conocer que la construcción de objetos y relaciones matemáticas, se enriquecen cuando se pasa continuamente de generalidades a restricciones y viceversa. Increíble no!

- Sea Q un polígono convexo en el geoplano, £siempre se puede descomponer en la unión de paralelogramos?

  Un hecho que representa un triunfo para el docente, es que un estudiante tenga una argumentación de la falsedad de un enunciado con la simple presentación de un contraejemplo, esto significaría que se ha internalizado la idea de que para destruir una proposición matemática que incluye un cuantificador universal, basta con la exposición de la existencia de un solo caso para así poder decidir valores de verdad.

- Considere la sucesión de polígonos definida así: p_1 es cusdrado de lado $\sqrt{2}$ (polígono de mayor área inscribible en un círculo de radio 1), p_2 es polígono de mayor área inscribible en un círculo de radio 2, en general, p_n es polígono de mayor área inscribible en un circulo de radio n. puedo obtener alguna generalización?

  Las proposiciones con altísimo grado de fiabilidad en matemáticas son aquellas en las que encontramos en realidad, dos proposiciones condicionales que la integran, más precisamente, un doble condicional, dado que en muchas ocasiones es bien complicado encontrar de proposiciones de tal tipo, se invita al lector a deleitarse con la siguientes tres preguntas.

- En el geoplano, ser triagén isósceles implica ser triagén rectángulo?

- En el geoplano ser triagén rectángulo implica ser triagén isósceles?

  Que interesante! estamos en un contexto de las matemáticas en el que se es rectángulo si y solamente si se es isósceles. Cabe preguntarse Sin ser triagén, es posible ser rectángulo e isósceles al mismo tiempo? Es decir, es único un tal triángulo? Si no es único, el conjunto de tales triángulos es finito o infinito? Al lector que no sorprenda lo anterior, ha perdido la incertidumbre y está familiarizado con los conocimientos domesticados y con las preguntas cerradas.

  El objetivo con las preguntas siguientes es que el lector se haga valer de la siguiente y no trivial estrategia: Si hay un conjunto de objetos matemáticos que satisfacen una restricción cualquiera, entonces el conjunto de los objetos matemáticos que no solo satisfacen la -estricción anterior", sino por lo menos una restricción más, es un subconjunto del conjunto inicial.

  Lo importante aquí es que el estudiante en el proceso de conjeturar y proponer definiciones tenga claro que cuando pone restricción a conjuntos de objetos, estos conjuntos empiecen a tener un juego hermoso de inclusiones. En este sentido se está preparando al estudiante a enfrentar conceptualizaciones tan elaboradas que hoy tenemos, por ejemplo los números reales [2].

- Todo triagén es triabásico
- Todo triabásico es triagén.
- Todo seudotriagén es triabásico.
- Todo triabásico es seudotriagén.
- Todo triabásico y seudotriagén es triagén.
- Todo triagén es triabásio y seudotriagén.

[2] Recuerde que si se pone a un número real la restricción de serĚ digamos decimal periódico, entonces engendramos dos nuevos subconjuntos a citar racionales e irracionales. Y si a estos conjuntos se ponen nuevas restricciones, engendraríamos nuevos subconjuntos, por ejemplo: la restricción de ser inductivo, más aún la de ser la intersección de todos los conjuntos inductivos, la restricción de satisfacer una ecuación algebraica de coeficientes enteros, más aún la restricción de ser cero de un polinomio de grado 2^n, entre muchas otras. Nos llevarían a engendrar subconjuntos como: El conjunto de los números enteros, de los naturales, de los algebraicos, de los construibles y muchos otros.

Es por esto que familiarizar al estudiante con formas de razonar así, es decir, siendo consiente de Cómo se genera una inclusión? Y con esto el poder para validar proposiciones que son implicaciones que surgen en las contenciones

- Existe un triagén que no sea triabásico ni seudotriagén.
- Existe un triabásico que no es triagén.
- Existe un triabásico y seudotriagén que no sea triagén.
- Todo triángulo isósceles que no sea triagén, es triabásico.
- Todo triángulo isósceles que no sea triabásico, es triagén.
- Todo triángulo isósceles que no sea seudotriagén, es triagén.
- Todo triángulo isósceles que no sea triagén, es seudotriagén.
- Todo triángulo isósceles que no sea seudotriagén, es triabásico.
- Todo triángulo isósceles que no sea triabásico, es seudotriagén.
- Todo paralelogramo es la unión de dos triabásicos.
- Todo paralelogramo es la unión de dos seudotriagén.
- Existe un paralelogramo que no se pueda descomponer en la unión de dos triagén.
- Existe un paralelogramo que no se pueda descomponer en la unión de dos seudotriagén.
- Existe un paralelogramo que no se pueda descomponer en la unión de dos triabásico.
- Todo cuadrado en el geoplano tiene un número cuadrado entero de puntos interiores.
- Todo triángulo en el geoplano es diferente del triángulo equilátero.
- Todo paralelogramo en el geoplano tiene un número par de puntos interiores.
- Todo paralelogramo en el geoplano tiene un número par de puntos frontera.
- Todo par de segmegén paralelos son congruentes.
- Todo par de segmegén congruentes son paralelos.
- Todo trapecio isósceles en el geoplano tiene puntos frontera distintos de los vértices.

- Existe un trapecio isósceles en el geoplano con un número par de puntos frontera.
- Existe un trapecio isósceles en el geoplano con un número par de puntos interiores.
- Todo cuadrado en el geoplano, tiene un número cuadrado entero de puntos frontera distintos de los vértices.
- Todo cuadrado con un número par de puntos en la frontera, tiene un número cuadrado impar de puntos interiores.
- Todo cuadrado con un número impar de puntos en la frontera, tiene un número cuadrado par de puntos interiores.
- Todo trapecio isósceles en el geoplano, tiene la propiedad de que la magnitud de una cualquiera de sus bases es un múltiplo entero de 21/2.
- Existe un rombo en el geoplano que tiene un número par de puntos interiores.
- Existe un rombo en el geoplano sin ser este cuadrado que tiene un número par de puntos interiores.
- Existe un rombo en el geoplano con cuatro puntos frontera que tiene un número par de puntos interiores.
- Todo rectángulo en el geoplano tiene perímetro que se puede expresar como un múltiplo par de $sqrta^2 + b^2$ con a y b primos relativos.
- Todo rectángulo en el geoplano tiene un número de puntos interiores que se deja descomponer en la suma de a lo sumo dos cuadrados.
- Todo rectángulo en el geoplano tiene un número de puntos interiores que se deja descomponer en la suma de a lo sumo tres cuadrados.
- Todo rectángulo en el geoplano con perímetro un múltiplo entero de 21/2 tiene un número de puntos interiores que se deja descomponer en la suma de a lo sumo dos cuadrados.
- Todo rectángulo en el geoplano con perímetro un múltiplo entero de (a2+b2)1/2 con a y b primos relativos tiene un número de puntos interiores que se deja descomponer en la suma de a lo sumo dos cuadrados.

- Para todo rectángulo en el geoplano, con las condiciones enunciadas en el punto anterior, el múltiplo escalar del que se habla, es igual al número de puntos frontera menos cuatro.
- Ningún trapecio en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos triabásicos.
- Ningún trapecio isósceles en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos triabásicos.
- Ningún trapecio en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos seudotriagén.
- Ningún trapecio isósceles en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos triabásicos.
- Algunos trapecios en el geoplano pueden descomponerse en la unión de un triabásico y un seudotriagén.
- Algunos trapecios isósceles en el geoplano pueden descomponerse en la unión de un triabásico y un seudotriagén.
- Existe un trapecio isósceles en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos triabásicos.
- Existe un trapecio isósceles en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos seudotriagén.
- Existe un trapecio isósceles en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos triabásicos.
- Existe un trapecio isósceles en el geoplano puede descomponerse en la unión de dos triagén.
- Todo polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que por lo menos dos de éstos son congruentes.
- Todo polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que por lo menos uno de éstos es isósceles.
- Todo polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que por lo menos uno de éstos es triángulo rectángulo.
- Todo polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que todos éstos son congruentes.

- Todo polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que todos éstos son isósceles.
- Todo polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que todos éstos son triángulos rectángulos.
- Algún polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que por lo menos uno de éstos es isósceles.
- Algún polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que por lo menos uno de éstos es triángulo rectángulo.
- Algún polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que todos éstos son congruentes.
- Algún polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que todos éstos son isósceles.
- Algún polígono se puede cubrir con un conjunto de triagens en el que todos éstos son triángulos rectángulos.
- Existe un único Triabásico rectángulo falso.
- Toda recta del plano cartesiano contiene puntos del geoplano.
- Toda recta del plano cartesiano contiene un solo punto del geoplano.
- Toda recta del plano cartesiano contiene dos puntos del geoplano.
- Existe una recta en el plano cartesiano que no contiene puntos del geoplano.
- Existe una recta en el plano cartesiano que contiene un solo punto del geoplano.
- Existe una recta en el plano cartesiano que contiene dos puntos del geoplano.
- Existe una recta en el plano cartesiano que contiene solo dos puntos del geoplano.
- Qué tipo de segmento es la mediana (relativa a cualquier lado) de un seudotriagén?
- Qué tipo de segmento es la mediana (relativa a cualquier lado) de un Triabásico?

- En el enunciado anterior £qué modificación harías?
- Es necesario darle un nombre al lado no segmegén de un triabásico?
- Qué tipo de segmento es la mediana (relativa a cualquier lado) de un triagén? £le puedes dar un nombre?
- Qué tipo de segmento es la altura (relativa a cualquier lado) de un seudotriagén?
- Si ningún punto interior de dicha altura es punto del geoplano, el pie de dicha altura no es un punto del geoplano?
- Qué tipo de segmento es la altura (relativa a cualquier lado) de un Triabásico?
- Si la altura es la relativa a el lado no segmegén, esta altura tiene magnitud menor a igual a la del segmegén de menor magnitud que pueda existir?
- Qué tipo de segmento es la altura (relativa a cualquier lado) de un triagén? £le puedes dar un nombre?
- Según el enunciado anterior, £el pie de dicha altura nunca es un punto del geoplano?

Capítulo 6

Metodología

6.1. Metodología

La metodología de investigación que más se ajusta a este trabajo es la metodología de investigación del método de casos, dado que solo fue intervenida parte de la unidad didáctica y además siendo consecuentes con los objetivos del trabajo no se pretende sacar conclusiones extraordinarias de una intervención, sino que se pretende dotar de un marco conceptual, algunas de las actividades que se puedan desarrollar con el geoplano y crear unas preguntas para el estudiante a partir de las estrategias ya mencionadas y del marco teórico proporcionado por Imre Lakatos en Pruebas y refutaciones, la lógica del descubrimiento matemático.

La información existente sobre la utilización del método de estudio de caso en investigación científica y sobre la forma como debe realizarse el análisis inductivo de datos cualitativos es bastante escasa. Además, el método de estudio de caso ha sido muy cuestionado por algunos autores (Stoeker, 1991; Venkatraman y Grant 1986, Rouse y Daellenbach, 1999; Bower y Wiersema, 1999), quienes consideran que su prestigio es bajo, que no suele considerarse como una buena estrategia para realizar investigación científica, y que el método de estudio de caso presenta problemas de fiabilidad y validez, debido a lo cual en la investigación empírica se utilizan básicamente métodos cuantitativos.

De esta manera, la mayoría de investigadores que usan el método de estudio de caso lo hacen bajo incertidumbre. Posiblemente, debido a la poca importancia que se le ha dado en algunos textos relacionados con el tema. No obstante, el método de estudio de caso es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado, mientras que los métodos cuantitativos sólo se centran en información verbal obtenida a través de encuestas por cuestionarios (Yin, 1989). Además, en el método de estudio de caso los datos pueden ser obtenidos desde una variedad de fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas; esto es, documentos, registros de archivos, entrevistas directas, observación directa, observación de los participantes e instalaciones u objetos físicos (Chetty, 1996). Por otra parte, Yin (1994, citado en Chetty (1996) argumenta que el método de estudio de caso ha sido una forma esencial de investigación en las ciencias sociales y en la dirección de empresas, así como en las áreas de educación, políticas de la juventud y desarrollo de la niñez, estudios de familias, negocios internacionales, desarrollo tecnológico e investigaciones sobre problemas sociales.

De manera similar, Chetty (1996) indica que tradicionalmente el estudio de caso fue considerado apropiado sólo para las investigaciones exploratorias. Respecto a su propósito, las investigaciones realizadas a través del método de estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si a través de las mismas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio. Yin (1989:23) considera el método de estudio de caso apropiado para temas que se consideran prácticamente nuevos, pues en su opinión, la investigación empírica tiene los siguientes rasgos distintivos:

- Examina o indaga sobre un fenómeno contemporáneo en su entorno real
- Las fronteras entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes
- Se utilizan múltiples fuentes de datos, y
- Puede estudiarse tanto un caso único como múltiples casos.

La intervención fue hecha a dos estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Fe y Alegría Luis Amigó: Yonatan Ferney Duque Giraldo y Brian Steven Echavarría.

A partir de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica se nota que Brian tiene una vaga noción de el sistema de coordenadas cartesianas, identifica línea horizontal y vertical (no como ejes coordenados) por su parte Yonatan no sólo identifica dos líneas sino que es consciente de coordinar incluso con números negativos estas líneas (que no cataloga ni de horizontal, ni de vertical, ni de perpendiculares).

Ambos estudiantes coinciden en que para ubicar un punto en el plano es necesario: çuando es positivo a la derecha y cuando es negativo a la izquierda".

En el momento en que se pide calcular la distancia entre dos puntos ambos estudiantes dicen no saber resolver la tarea y bajo la presentación de una estrategia para resolver el problema no la toman en cuenta.

De otro lado para calcular el área de figuras planas como: rectángulo, cuadrado, triángulo y paralelogramo, hacen un conteo de cuadriculas contenidas en el polígono cuando éste es relativamente sencillo, pero cuando es necesario calcular la distancia entre dos puntos bajo la falencia ya calculada no se puede concluir la tarea.

A partir de todos los aspectos anteriores se puede concluir que los estudiantes intervenidos ni siquiera tienen la competencia que queremos reemplazar (la de memorización de fórmulas), es un punto de partida que presenta una mínima ventaja en el sentido que se quiere construir una herramientas de no memorización de fórmulas.

Durante el trabajo con el geoplano físico se experimentó la necesidad de trabajar con un geoplano en el que no se presentará la gran dificultad de no poder saber si una banda elástica pasa o no por un determinado pivote después de formado un polígono (esto se debe a la mala fabricación del instrumento en cuestión o mas precisamente al grosor de las bandas elásticas en un tamaño muy pequeño del geoplano). Es por esto que se sintió la necesidad, sobre todo para trabajar los conceptos de punto interior, punto frontera y punto exterior, de utilizar el software Geogebra única y exclusivamente para utilizar la herramienta "zoom"(consistente en ampliar el tamaño de la figura) para determinar si un punto era o no punto interior, frontera o exterior.

Inicialmente se calculó el área de triángulos relativamente simples (en cuanto al tamaño), para éste caso se verificó que la relación de Pick era válida, para dar paso a polígonos relativamente mas complejos utilizando la estrategia de dividir en triángulos y verificando que la regla de Pick también se puede emplear para éste tipo de polígonos.

En cuanto a la actividad propuesta que se ha titulado çalculemos el área de nuestro territorio nacional"se ha notado que para dicho cálculo utilizando la teoría fue necesario frecuentemente recordar la noción de punto frontera (en el sentido de que para llevar a cabo el cálculo propuesto, no sólo es necesario saber definir un punto frontera sino más precisamente si un punto del geoplano es o no punto frontera de un polígono). Por todo lo demás, el cálculo del área fue exitoso (recordando que la escala utilizada fue ficticia, puesto que el énfasis real era sobre los contenidos matemáticos, además, no fueron consideradas las islas del territorio nacional de Colombia)

Capítulo 7

Área de nuestro territorio nacional

Se quiere integrar a este trabajo una pequeña intervención a dos estudiantes de grado noveno del colegio Fé y alegría Luis Amigó, pero con una orientación un tanto significativa. Aunque se puede ahondar un en los conceptos propiamente formales del geoplano y no hablar de las aplicaciones, se ha querido que los estudiantes enfrenten un problema bastante significativo y relacionado con las ciencias sociales y este es el de calcular el área del territorio nacional de Colombia utilizando la teoría construida hasta ahora sobre el geoplano.

Este mapa con cuadrículas, permite determinar un polígono que modele de alguna manera la frontera del mapa de Colombia, con la condición de que los vértices de dicho polígono deben ser puntos del geoplano (puntos determinados por los vértices de las cuadrículas). Inicialmente pueden ser polígonos que incluyan incluso territorio extra.

Capítulo 8

Conclusiones

Orientar la construcción de preguntas que potencien la capacidad de conjeturar, desde un conjunto de estrategias bien definidas, permite que los cuestionarios no se conviertan en simples especulaciones y pasen a direccionar las ideas en busca de una consistencia lógica, en la que los enunciados van secuencialmente bien articulados.

La inclusión de un marco conceptual para conjeturar con el geoplano es el inicio de un proceso de formulación de proposiciones altamente atractivas que permite establecer relaciones con enunciados de la geometría euclidiana, más precisamente, enunciados falsos en geometría euclidiana, se convierten en enunciados verdaderos bajo el marco conceptual propuesto para el geoplano (con las modificaciones pertinentes), lo que parece muy lejos de la educación matemática! pero no es así, dado que, en la matemática escolar escasean contrastes de dicho tipo y toda la teoría es presentada a los estudiantes como una estructura acabada e inmodificable que no genera espacios de incertidumbre.

A partir de la lectura hecha del texto Pruebas y Refutaciones. La Lógica del descubrimiento matemático de Imre Lakatos, no sobra de ninguna manera recordar lo expuesto en su teoría: El método de conjeturas y refutaciones constituyen un patrón heurístico muy general del descubrimiento matemático. Con todo, al parecer sólo fue descubierto en los años 1840, e incluso hoy día les parece paradójico a muchas personas. Realmente, en ningún sitio se reconoce plenamente.

Como consecuencia del trabajo realizado se concluye que los problemas que se le presentan a un estudiante no deben ser sólo de índole contextual, también se puede partir de un problema supuesto inicialmente como teórico y mirar luego sus aplicaciones al contexto. Esto último se argumenta porque el problema propuesto al estudiante fue formalizar unas nociones del geoplano, que desembocaron en poder calcular el área de un territorio con relativa aproximación. (Recordemos que la versión más acertada hasta hoy sobre la mecánica del universo la presenta la teoría general de la relatividad, la cual tiene como uno de sus fundamentos a la teoría de las geometrías no euclidianas y en principio éstas surgen desde un contexto puramente formal y muy alejadas de la realidad siendo hoy las que describen con precisión la realidad).

Bibliografía

[1] Funkenbusch W. *From Eulert's Formula to Pickt's Using an Edge Theorem*. The American Mathematical Montly, 1974.

[2] Lakatos I. *Pruebas y Refutaciones. La Lógica del descubrimiento matemático*. Alianza, Madrid, 1976.

[3] Antony A. Gioia. *The theory of numbers an introduction. Geometry of numbers*. Dover publications, 2001.

[4] Courant R. y Robbins H. *Qué son las matemáticas. Conceptos y métodos fundamentales*. Fondo de Cultura Económica, México D.F, 2002.

[5] Verdugo J., Briseño L., Vázquez R y Palmas O. *Área de figuras en el geoplano*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

[6] Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). *Serie lineamientos curriculares Matemáticas*. Santafé de Bogotá, 1998.