LAS SITUACIONES DE VARIACIÓN Y CAMBIO COMO HERRAMIENTA PARA POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DESDE LOS PRIMEROS GRADOS DE ESCOLARIDAD

LUZ FARIDE CASTAÑO NOREÑA
JUAN CARLOS GARCÍA MARÍN
MARY LUZ LUJÁN CARVAJAL
CLAUDIA PATRICIA MEDINA MEDINA
JONIER RUIZ HOYOS
ERIKA PAOLA TREJOS GÓMEZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
MEDELLÍN
2008

LAS SITUACIONES DE VARIACIÓN Y CAMBIO COMO HERRAMIENTA PARA POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DESDE LOS PRIMEROS GRADOS DE ESCOLARIDAD

LUZ FARIDE CASTAÑO NOREÑA

JUAN CARLOS GARCÍA MARÍN

MARY LUZ LUJÁN CARVAJAL

CLAUDIA PATRICIA MEDINA MEDINA

JONIER RUIZ HOYOS

ERIKA PAOLA TREJOS GÓMEZ

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciado(a) en Educación Básica, énfasis en Matemáticas

Asesor (a)

LUZ MARINA DÍAZ GAVIRIA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

MEDELLÍN

2008

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestros agradecimientos a:

Directivas, docentes Cooperadores y estudiantes del Colegio Mano Amiga y de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, por hacer parte de nuestro proceso formativo.

Luz Marina Díaz Gaviria, docente asesora de esta investigación, por su apoyo, acompañamiento y por la entrega de sus valiosos conocimientos para desarrollar con éxito todo el trabajo.

Coordinadora y docentes de la Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Matemáticas por permitir que nuestro proceso de formación culminara con éxito.

Nuestras familias por su apoyo y comprensión incondicional.

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN

Un análisis reflexivo a las pruebas de Estado (ICFES y SABER), deja leer que gran parte de éstas, requieren de una comprensión de *situaciones de variación y cambio* y del uso de los sistemas de representación (verbal, icónicos, gráficos, simbólicos), propios del Pensamiento Variacional, que les permita reconocer patrones y regularidades a través de acciones como el ver, decir y registrar, Mason et al. (1999; p 17), y por tanto desarrollar procesos algebraicos Kaput (2002, p 5), que conlleven a procesos de generalización, haciendo evidente el momento en el que el estudiante valida y argumenta los procedimientos utilizados para dar cuenta de las estrategias que aplica en la solución de las situaciones planteadas. Sin embargo, en las investigaciones consultadas se encuentra poco en cuanto al desarrollo de este pensamiento en los primeros años de escolaridad; sus aportes son concernientes a los grados intermedios y superiores de la educación básica y media.

En contraste con lo anterior, hay propuestas de investigadores como Kaput (2000) quien afirma que si se incluye el pensamiento algebraico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde los primeros años escolares, se cumplirá el potencial del "*álgebra para todos*" y se eliminará "*el elemento curricular más pernicioso de las matemáticas escolares de la actualidad: los cursos de álgebra de enseñanza media tardíos, repentinos, aislados y superficiales*" Kaput (2000); y como él, otros investigadores y educadores han promovido la articulación del Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos en el plan de estudios de matemáticas, entre ellos se encuentran Carreher, Schlimann y Brizuela (2001), en sus estudios plantean que se ha retrasado la introducción escolar al álgebra por concepciones erróneas acerca de la naturaleza de la aritmética, del álgebra y de la capacidad de los niños para tratar con ella, afirman que la aritmética es algebraica, porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones.

Otros investigadores que reiteran lo anteriormente dicho, son Linda Levi, Thomas Carpenter y Megan Loef Franke, los cuales hacen parte del *Proyecto de Álgebra Temprana,* quienes desde 1999 han trabajado en él. Ellos consideran que los docentes deben inducir al estudiante a aprender los principios generales de las matemáticas conforme aprenden aritmética, por medio de la articulación de los conceptos aritméticos con los algebraicos, permitiendo el desarrollo del Pensamiento Matemático, y por ende, el aprendizaje del álgebra de forma progresiva, donde el estudiante al enfrentarse a ella en la enseñanza media dejará la no comprensión de los procedimientos que se deben utilizar para resolver ecuaciones o simplificar expresiones como algo basado en las mismas propiedades que ya usaron en los cálculos aritméticos. Carpenter, Franke y Levi, (2003).

En concordancia con las ideas anteriores y como producto de una serie de reflexiones realizadas, teniendo como referentes los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y una buena revisión de literatura sobre la didáctica de las matemáticas en los contextos de *variación y cambio*, y con la premisa de la necesidad de la interrelación de éstos con los otros pensamientos, surge una propuesta de Intervención Didáctica apoyada en el Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos, que pretende aportar elementos que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático y genere aprendizajes significativos en dichos procesos, mediante la articulación de saberes (disciplinar, pedagógico y didáctico) en los estudiantes de las comunidades académicas donde se realizo la práctica profesional.

Todo el trabajo conlleva al diseño y aplicación de una propuesta de aprendizaje donde estén inmersos los ejes temáticos del Pensamiento Variacional, articulándolo con otros pensamientos matemáticos y utilizando estrategias didácticas como el taller y las situaciones problema que permitan la apropiación de conocimientos matemáticos. Siendo estas estrategias didácticas, insumos para realizar un análisis reflexivo y crítico del proceso de aprendizaje de los estudiantes, el cual se apoyó en unas categorías científicas abordadas por algunos investigadores como Kaput, Castro E, Duval, entre otros.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se propone el desarrollo del Pensamiento Variacional desde los primeros años de escolaridad, la finalidad de esta idea es "*superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual que involucre conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados*" que le permitan a los estudiantes analizar, organizar y modelar situaciones cotidianas, de las ciencias y las matemáticas. Pero, ¿Cómo se puede alcanzar éste propósito? Godino (2003), afirma que éste se alcanzaría a través del desarrollo del razonamiento algebraico que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se vaya desarrollando éste, el estudiante progresará en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar sus pensamientos. "*Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de ellas en la que formalizar y generalizar no sea un objetivo central*" Godino (2003; p. 8).

A la vez, Carlos Eduardo Vasco (2002), presenta el Pensamiento Variacional como "*aquel que puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidad de la misma o de distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la relación"*

A partir de las anteriores afirmaciones, y teniendo en cuenta algunas dificultades que presentaban los estudiantes de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga para resolver problemas, en donde el manejo de las estructuras aditivas y multiplicativas era esencial, y además, el poco tratamiento que se le ha dado al razonamiento algebraico en el aula, se inició este proyecto para desarrollar dicho pensamiento, retomando los ejes temáticos: Patrones y Regularidades, Procesos algebraicos y Análisis de funciones, propuestos en el texto *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*, pero respetando el discurso que se sustenta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en relación al Pensamiento Variacional.

Para llevarlo a cabo se propone actividades que potencian su desarrollo, a través de una línea de continuidad, cuyo punto de partida fueron los Patrones y las Regularidades, luego el trabajo de las estructuras multiplicativas y finalizando con la proporcionalidad directa. Para lograr esto, se implementaron herramientas y estrategias metodológicas, estructuradas en una propuesta de Intervención Didáctica que utilizó *situaciones de variación y cambio* para potenciar el desarrollo del Pensamiento Matemático en los estudiantes de 4º a 8º grado de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, y de 4° grado del Colegio Mano Amiga, posibilitando en ellos "*la habilidad para comunicarse matemáticamente, expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, utilizar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas"* MEN (1998), esto con el fin, de que *"den cuenta del cómo y el por qué de los procesos que se siguen para llegar a las conclusiones, de que justifiquen las estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas, de que formulen hipótesis, hagan conjeturas y predicciones y que utilicen argumentos propios para exponer sus ideas"* MEN (1998).

Luego de conocer los antecedentes, se reflexiona en torno al problema de investigación que direccione el camino a seguir en la intervención.

Se plantea como **problema**:

¿Cómo se pueden desarrollar procesos de generalización en el contexto del Pensamiento Variacional que posibiliten la construcción de modelos matemáticos y generen aprendizajes significativos en los estudiantes de 4° a 8° grado de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y de 4° grado del Colegio Mano Amiga?

Este conlleva a plantear unos objetivos que pretenden desarrollarse a corto y largo plazo. Siendo las metas de la propuesta de Intervención Didáctica que posibilita la continuidad de un "*proceso extenso*" que se puede dar en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, haciendo énfasis en el desarrollo del Pensamiento Variacional en interrelación con los demás pensamientos matemáticos, y así llegar a las posibles respuestas del problema de investigación planteado.

Objetivo General

Aportar elementos que contribuyan al desarrollo del Pensamiento Matemático y generen aprendizajes significativos en los procesos de variación y cambio, mediante la articulación de saberes (disciplinar, pedagógico y didáctico) en los estudiantes de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga.

Objetivos Específicos

- Diseñar y aplicar una propuesta de aprendizaje, donde estén inmersos los ejes temáticos del Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, articulándolos con los otros pensamientos matemáticos.
- Usar como Estrategia Metodológica, el Taller en el contexto de las Situaciones Problema, para la apropiación de conocimientos y desarrollo del Pensamiento Matemático.

- Realizar un análisis entre las actividades aplicadas a los estudiantes, a la luz de los referentes teóricos, evidenciando su proceso de aprendizaje.
- Generar situaciones de enseñanza y aprendizaje, que motiven y posibiliten en la comunidad educativa aprendizajes significativos y colaborativos, que fomenten el interés por esta área de conocimiento***.***

2. REFERENTES TEÓRICOS

El enfoque teórico está estructurado a partir de cuatro aspectos, el ***primero*** tiene que ver con las teorías cognoscitivas. Dentro de éstas encontramos los Procesos Mentales trabajados principalmente por Jean Piaget y la Interacción Social retomada por Vigotsky.

El ***segundo*** aspecto tiene que ver con las Teorías del Aprendizaje, aquí se toman autores como: Ausbel, Pozo, Novak y Vergnaud

El ***tercero*** hace referencia a las Didácticas de las Matemáticas, enmarcadas en los *Procesos de Variación y Cambio* del Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, retomando autores como: Mason, Kaput, Duval, Vasco, Obando, Posada B, entre otros.

Ahora, el ***cuarto*** aspecto, está relacionado con los documento rectores donde básicamente se toman los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. A la vez, que se retoman algunos indicadores de calidad, como las Pruebas Saber y las Pruebas ICFES, que sirven de insumos para conocer el nivel de desempeño de los estudiantes en el Pensamiento que nos ocupa.

2.1 Teoría Cognoscitiva

La corriente cognoscitiva pone énfasis en el estudio de los procesos internos que conducen al aprendizaje, se interesa por los fenómenos y procesos internos que ocurren en el individuo cuando aprende, cómo ingresa la información a aprender, cómo se transforma en el individuo y cómo la información se encuentra lista para hacerse manifiesta, así mismo, considera al aprendizaje como un proceso en el cual cambian las estructuras cognoscitivas (organización de esquemas, conocimientos y experiencias que posee un individuo) debido a su interacción con los factores del medio ambiente.

El teórico del aprendizaje cognoscitivo Ausubel (1983), describe dos tipos de aprendizaje:

- **Aprendizaje Repetitivo.** Implica la sola memorización de la información a aprender, por lo que la relación de ésta con aquélla presente en la estructura cognoscitiva, se lleva a cabo de manera arbitraria. Por lo tanto, la aprehensión de los objetos de conocimientos no son significativos para los estudiantes y no se estaría desarrollando un pensamiento "*autónomo*" que permita desplegar y ampliar entre otras, la abstracción, argumentación e interpretación.

- **Aprendizaje Significativo**. La Teoría del Aprendizaje Significativo tiene importantes implicaciones psicológicas y pedagógicas. Considera que el aprendizaje se construye de manera evolutiva. Porque se ocupa de lo que ocurre en el aula, postula los principios programáticos para organizar la docencia y, en este sentido, adquiere un valor especial la necesidad de realizar un análisis conceptual del contenido que escape de planteamientos simplistas.

  El Aprendizaje significativo es una interacción tríadica entre docente, estudiantes y saber, mediada por los materiales educativos del currículum en la que se delimitan las responsabilidades correspondientes a cada uno de los protagonistas del evento educativo. Es una idea subyacente a diferentes teorías y planteamientos psicológicos y pedagógicos que a resultado ser más integradora y eficaz en su aplicación a contextos naturales de aula, favoreciendo pautas concretas que lo facilitan.

Es, también, la forma de encarar la velocidad vertiginosa con la que se desarrolla la sociedad de la información, posibilitando elementos y referentes claros que permitan el cuestionamiento y la toma de decisiones necesarios para hacerle frente a la misma de una manera crítica. Pero, son muchos los aspectos y matices que merecen una reflexión que pueda ayudar a aprender significativa y críticamente de los errores en su uso o aplicación.

Las dos formas de aprendizaje son:

- Por *recepción*. La información es proporcionada en su forma final y el estudiante es un receptor de ella.
- Por *descubrimiento*. En este aprendizaje, el estudiante descubre el conocimiento y sólo se le proporcionan elementos para que llegue a él.

Existen diversos teóricos cognoscitivos[1] que se han interesado en resaltar que la educación debiera orientarse a lograr el desarrollo de habilidades de aprendizaje (y no sólo el enseñar conocimientos). El estudiante debe además desarrollar una serie de habilidades intelectuales, estrategias para conducirse en forma eficaz ante cualquier tipo de situaciones de aprendizaje, así como aplicar los conocimientos adquiridos frente a situaciones nuevas de cualquier índole.

"*El estudiante es entendido como un sujeto activo procesador de información, quien posee una serie de esquemas, planes y estrategias para aprender a solucionar problemas, los cuales a su vez deben ser desarrollados. Siempre en cualquier contexto escolar, existe un cierto nivel de actividad cognitiva, por lo cual se considera que el estudiante nunca es un ente pasivo a merced de las contingencias ambientales o instruccionales"* Ausubel (1983)

En esta propuesta, el docente como primera condición, debe partir de la idea de un estudiante activo que aprende de manera significativa, que aprende a aprender

[1] BRUNER, J., AUSBEL, D., DEWEY, GLASER.

y a pensar. Su papel en este sentido, se centra sobre todo en diseñar y organizar experiencias didácticas que logren esos fines. Desde esa perspectiva, Hernández (1993) propone que el docente debe estar profundamente interesado en promover en sus estudiantes el aprendizaje significativo de los contenidos escolares. Para ello, es necesario que procure en las estrategias metodológicas empleadas para exponer los contenidos, lecturas y experiencias de aprendizaje que exista siempre un grado necesario de significatividad lógica, para aspirar a que los estudiantes logren un aprendizaje en verdad significativo.

En síntesis, la teoría cognoscitiva ha hecho enormes aportes al campo de la educación: los estudios de memoria a corto plazo y largo plazo; los de formación de conceptos y, en general todo lo referente al procesamiento de información, así como las distinciones entre tipos y formas de aprendizaje. El docente con base en el discurso de la teoría cognoscitiva presenta a sus estudiantes la información observando sus características particulares, los incita a encontrar y hacer explícita la relación entre la información nueva y la previa. También intenta que contextualice el conocimiento en función de sus experiencias previas, de forma tal que sea más significativo y por lo tanto menos susceptible al olvido. Hernández R. G. (1983).

2.2 Teorías del Aprendizaje

Como se dijo anteriormente, se tuvieron en cuenta referentes teóricos, autores como: Ausubel, Pozo, Novak y Vergnaud. A continuación se describirán algunos aspectos de estas teorías que fueron objeto de reflexión.

Ausubel (1983) da a conocer tres tipos de aprendizaje significativo: de representaciones, conceptos y de proposiciones.
El *aprendizaje de representaciones* es el más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a

determinados símbolos, al respecto Ausubel (1983) dice: *Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y tienen para el estudiante cualquier significado al que sus referentes representen.*

Los *conceptos* se definen como "*objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos*", partiendo de ello, se puede afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje de representaciones. Ellos son adquiridos a través de dos procesos que fueron tomados mediante una forma implícita, estas son: *Formación y asimilación*. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis, de lo dicho anteriormente se puede señalar que el niño adquiere el significado genérico de una palabra y ese símbolo ya incorporado en su lenguaje sirve también como significante para el concepto cultural, en este caso se establece una equivalencia entre el símbolo y sus atributos de criterios comunes. De allí, que los niños aprendan conceptos a través experiencias llevadas a cabo con cierto tipo de actividades que les proporciona esta información utilizando el aprendizaje colaborativo con sus demás compañeros. El aprendizaje de conceptos por asimilación se produce a medida que el niño amplía su vocabulario, pues los atributos de criterio de los conceptos se pueden definir usando las combinaciones disponibles en la estructura cognitiva por ello el niño podrá distinguir distintos colores, tamaños y afirmar que se trata de "*patrones geométricos*", cuando vea otros en cualquier momento.

Por último, el *aprendizaje de proposiciones* va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones**.** Éste implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego éstas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e idiosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición.

2.2.1 La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud.

La construcción teórica de Vergnaud es una teoría psicológica que atiende a la complejidad cognitiva; se ocupa de los mecanismos que conducen a la conceptualización de lo real. El objeto que persigue Vergnaud (1996) es entender cuáles son los problemas de desarrollo específicos de un campo de conocimiento. Ese conocimiento lo aprehende el sujeto formando parte de sus estructuras cognitivas por un proceso de integración adaptativa con las situaciones que vive, proceso que se desarrolla a lo largo del tiempo.

Se trata de una teoría psicológica cognitiva que se ocupa del estudio del desarrollo y del aprendizaje de conceptos y competencias complejas, lo que permite explicar el modo en el que se genera el conocimiento, entendiendo como tal tanto los saberes que se expresan como los procedimientos, o sea, "*el saber decir y el saber hacer*" Vergnaud (1990-1996).

Los campos conceptuales entendidos desde Vergnaud (1983). Son conjuntos de situaciones en las que el manejo, el análisis y el tratamiento que realiza el estudiante requieren una variedad de conceptos, procedimientos y representaciones interconectadas en estrecha relación.

La Teoría de los Campos Conceptuales aporta un nuevo modo de “ver” el aprendizaje significativo, sobre todo en lo que se refiere a los conceptos. Efectivamente, complementa su concepción, revalorizándolo en el sentido de que lo que resulta significativo y, por tanto, perdurable, es el esquema de asimilación que determina la conducta. Los principios y presupuestos vergnaudnianos, como fundamentos psicológicos de la cognición que son, ayudan a entender cómo es y cómo se produce el aprendizaje significativo, ampliando, por tanto, las posibilidades ausubelianas, tanto para la investigación en educación como para la docencia.

Según Caballero (2003), la Teoría del Aprendizaje Significativo y la Teoría de los Campos Conceptuales son coincidentes al considerar que la significatividad del aprendizaje es un proceso progresivo que requiere tiempo. En ambas, se hace necesario llevar a cabo el análisis conceptual del contenido objeto de estudio.

El referente de los campos conceptuales propuesto por Vergnaud (1983) permite comprender, explicar e investigar procesos de aprendizaje significativo. Se trata de teorías psicológicas (una del aprendizaje y otra de la conceptualización de lo real) cuyos objetos de análisis, conceptos-clave, procedimientos de validación y ampliación son distintos, pero que tienen muchos aspectos en común.

2.3 Didáctica de las Matemáticas

Es necesario resaltar algunos aportes teóricos que se han construido en torno a la matemática escolar, y luego, presentar los referentes que se tienen en cuenta en esta propuesta de Intervención Didáctica, ya que fueron fundamentales para soportar el análisis de las actividades realizadas con los estudiantes de las instituciones educativas donde se intervino.

2.3.1 Pensamiento Matemático

Desde la psicología, el pensamiento es definido como la acción de formar, relacionar ideas y conceptos, y el pensamiento humano es conocido como una de las funciones mentales superiores, donde el razonamiento, la memoria, la abstracción y los demás procesos mentales son asumidos y estudiados por esta misma ciencia. Los matemáticos definen el pensamiento matemático como el proceso de construcción de los conceptos y los procesos mentales, éste se desarrolla para mostrar la acción matemática como una forma "*especial*" de la actividad humana, el interés por desarrollarlo es caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos matemáticos.

A mediados del Siglo XX, Jean Piaget en sus estudios previos sobre la lógica y la epistemología dio a conocer que el pensamiento lógico actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y que el Pensamiento Matemático se distingue del lógico porque versa sobre el número y sobre el espacio[2], dando lugar a la aritmética y a la geometría. Tanto el pensamiento lógico como el matemático se distinguirían del pensamiento físico, que utiliza los dos anteriores, pero tiene una relación diferente con la realidad y la experiencia.

El Pensamiento Matemático opera como una red compleja de elementos y conceptos que actúan como construcciones sucesivas, estas garantizan el éxito en una actuación ante una situación. El desarrollo del Pensamiento Matemático rompe el esquema "*el maestro enseña y el estudiante aprende*", garantizando formas naturales y espontáneas para razonar las matemáticas Piaget (1978). Se desarrolla Pensamiento Matemático cuando las razones, los procedimientos, las explicaciones, la escritura o formulaciones verbales responden a una tarea matemática, al existir dicha correspondencia los estudiantes suelen cometer

---

[2] PIAGET, J. (1978). Introducción a la Epistemología Genética. I. El Pensamiento Matemático (2a. ed.). Paidós. Buenos Aires.

errores como: *la solución de la potencia 2° = 0, por lo que 2 veces el cero da cero*. Estos errores los comenten por los argumentos que se proporcionan en el aula de clase y el mal empleo del lenguaje matemático, en ciertas ocasiones. Estas faltas se explican desde los modelos mentales didácticos y a partir de éstos, se entiende qué es desarrollar Pensamiento Matemático. Se dice además, que estos errores no obedecen a la falta de atención, ellos se apoyan en el uso del conocimiento que han utilizado con éxito en otras situaciones.

La motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación y aspectos de representación para la conformación de las ideas matemáticas, son factores importantes para que se de el Pensamiento Matemático. Además, académicos, como Hadamard, Poincare, Polya, Freudenthal y Piaget realizaron estudios sobre el razonamiento matemático y afirmaron que el currículo de las matemáticas y los métodos de enseñanza se han apoyado en procedimientos muy tradicionales, donde la mecanización y memorización son procesos importantes dentro de las matemáticas. Si el estudiante sólo desarrolla estos procesos quedará imposibilitado de percibir los vínculos que tienen las aplicaciones y procedimientos matemáticos más cercanos a su vida cotidiana. Esto se da porque no hay una adecuada articulación de los conceptos previos con los nuevos, aspectos que conllevan a una generalización sin sentido, desconociéndose la conceptualización y significados de los modelos matemáticos.

2.3.1.1 Subdivisión del Pensamiento Matemático

En los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas no está ausente la división entre pensamiento lógico y Pensamiento Matemático, pero estos documentos proponen estudiar los conceptos matemáticos articulados en cinco pensamientos.

En la aritmética, se pensó durante siglos únicamente en *los números* para contar y luego asociarlos con las operaciones de adición y sustracción, multiplicación y división, y en la geometría se pensó únicamente en *la geometría euclidiana*, sistematizada en el Siglo IV a. c. Estas dos maneras de hacer matemáticas sugieren una primera subdivisión del Pensamiento Matemático, al menos en dos tipos: el pensamiento numérico y el espacial**.**

Ahora, al desarrollarse desde el Siglo XVII la teoría de la probabilidad y el cálculo diferencial e integral, se empezó a notar también que entre los estudiantes de matemáticas había algunos que sobresalían en los aspectos aritméticos y geométricos, pero que tenían dificultad en pensar en los conceptos de la probabilidad o en las variaciones continuas de los procesos físicos. Por lo que fue conveniente distinguir también el pensamiento *probabilístico o aleatorio* y el pensamiento *analítico o variacional* como tipos de Pensamiento Matemático diferentes del *numérico,* el *espacial* y el *métrico*, aunque muy relacionados con ellos.

Miguel de Guzmán[3], una de las figuras más influyentes en la educación matemática en España y en Latinoamérica, señala al respecto que, más allá de las ramas tradicionales de las matemáticas: la aritmética y la geometría, en su devenir histórico "*el espíritu matemático habría de enfrentarse con:*

- *La complejidad del símbolo (álgebra).*
- *La complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo).*
- *La complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística).*
- *La complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática)*".

[3] GUZMÁN, M. de (1995) "*Tendencias e Innovaciones en Educación Matemática*". Conferencia en el Seminario de Educación Matemática. (Documento inédito disponible en La OEI). OEI. Bogotá.

Desde esta mirada histórica, se da a conocer la relación con los cinco tipos de Pensamiento Matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en ***la aritmética***, el pensamiento numérico; en ***la geometría***, el pensamiento espacial y el métrico; en ***el álgebra y el cálculo***, el pensamiento métrico y el variacional, y en ***la probabilidad y estadística***, el pensamiento aleatorio. Finalmente, puede verse la alusión al pensamiento lógico, llamado también hipotético-deductivo o pensamiento formal. En los cinco tipos de pensamiento es necesario atender al uso y al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes y, a su vez, el progreso en éste pensamiento los potencia y moldea.

2.3.2 El Pensamiento Variacional

Al ser enseñadas las matemáticas en la escuela, se tiene presente una serie de factores que influyen significativamente en el aprendizaje de éstas por parte de los estudiantes. Factores que dan las pautas para afirmar cuándo un estudiante ha aprendido matemáticas o no. Para lograr ésto se hace necesario acercarlos a la matemática a través de situaciones problemas procedentes de la vida diaria, en las que se pueda aplicar conceptos relacionados con las matemáticas y otras ciencias, que deben ser trabajados de manera interdisciplinaria para que el estudiante pueda lograr un adecuado desarrollo en su conocimiento, tanto específico como general.

Al reflexionar, acerca de la forma de cómo los estudiantes aprenden las matemáticas, se llega a conclusiones que dejan al descubierto la falta de contextualización de los problemas y ejercicios que ellos realizan: No hay un análisis de los procedimientos que aplican, se llega a una mecanización continua de fórmulas que no permiten valorar las capacidades que pueda tener el estudiante para llegar a la solución adecuada del problema o ejercicio.

Para valorar el aprendizaje del estudiante en las matemáticas es importante conocer los pensamientos matemáticos, ya referenciados, que se han establecido y que crean las pautas esenciales para la adquisición de los conceptos matemáticos. Cada uno es eje transversal en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, desde primero de primaria hasta el grado once de educación media, en los que el estudiante aplica sus conocimientos previos y los complementa con la enseñanza que el docente le da. En éste caso, es el Pensamiento Variacional el que "*le da sentido a las funciones numéricas para manejarlas en forma flexible y creativa, y poder así entender y modelar situaciones de cambio con el propósito de analizarlas y transformarlas*". Este pensamiento en interrelación con los otros pensamientos, no sólo le permite al estudiante una adquisición de habilidades sino la posibilidad de plasmar sus propias reflexiones acerca de las situaciones problemas en las que debe aplicar elementos que ha adquirido en cada Pensamiento Matemático, y le pueden permitir una adecuada contextualización del aprendizaje.

Al trabajar el Pensamiento Variacional es necesario aplicarlo al contexto del estudiante, donde él pueda utilizar los elementos que éste le ofrece (*procesos de cambio, conceptos de variable, el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio, relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas, modelos matemáticos*) en otras áreas del conocimiento, y lograr así, una interdisciplinariedad en su proceso de aprendizaje. Se hace necesario también trabajar este pensamiento en combinación con los otros, de tal forma que de pautas al estudiante para enfrentar situaciones de la vida diaria que pueden ser explicadas con *situaciones de variación y cambio*, donde es primordial "*identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo*", características que el Pensamiento Variacional pretende desarrollar en el estudiante en compañía, apoyo y seguimiento del docente.

2.3.2.1 Categorías Científicas[4] seleccionadas para sustentar la Intervención Didáctica.

Estos fueron los ejes temáticos propuestos en el pensamiento variacional desde el texto implementación e interpretación de los estándares básicos de matemáticas, los cuales se asumieron como categorías científicas para realizar el análisis:

2.3.2.1.1 Patrones y Regularidades

Uno de los ejes temáticos inmersos en el Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos implementados en la propuesta de Intervención Didáctica, fue *Patrones y Regularidades*. Éste busca favorecer el proceso de aprendizaje de las matemáticas, induciendo al estudiante a tener un razonamiento matemático, lo que implica un pensamiento lógico que incluya al razonamiento intuitivo e inductivo, para llegar a dar solución a las situaciones problema propuestas. Las preguntas que se realizan a partir de éste proceso, conducen a la transferencia de conocimientos y destrezas en nuevas situaciones.

Pero, ¿Qué es un **Patrón**? "*Un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición, etc*."[5] Dentro de un ámbito matemático. Los patrones permiten al estudiante observar y analizar detalladamente una situación de variación, por ende el estudiante evidencia que

---

[4] "El aparato categorial de una ciencia existe en relación dialéctica con el proceso de investigación porque si bien las categorías son resultado de la aplicación de determinados métodos de búsqueda al objeto de estudio en cuestión, sin ellas sería imposible aplicar la indagación empírica y organizar las reflexiones teórico-metodológicas. Sin categorías científicas no hay ciencia. Gracias a ellas se pueden comunicar los resultados y ser aplicados por el usuario situado en la práctica social, dirigir los procesos sociales y aplicar la ciencia a la solución de los problemas profesionales, piénsese, por ejemplo, en el trabajo metodológico de la escuela; las categorías facilitan, además, organizar la valoración de la eficacia del proceso". GARCÍA G, A. et al.

[5] POSADA, M. E. (2005) Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia. p. 51.

cambia y que permanece invariante. "*El análisis cuidadoso de patrones y regularidades permite establecer generalizaciones*" [6]

2.3.2.1.2 Sistemas de Representación

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación Resnick y Ford (1981). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los estudiantes Paivio (1978); De Vega (1984).

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra *representación* en relación al aprendizaje, a la enseñanza y al desarrollo de las Matemáticas. Para Kaput (1987) "*cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Habiendo, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado*". En términos de Duval (1999), "*un sistema de representación semiótico es un conjunto de símbolos con reglas de tratamiento que permiten la transformación de una representación en otra equivalente, y con reglas de transformación que permiten poner en correspondencia unidades significantes de una representación en un sistema, con otra representación perteneciente a otro sistema*".

La construcción de los conceptos matemáticos está mediada por el uso e interacción de diferentes sistemas de representación. Así por ejemplo, una misma situación puede ser presentada a través del lenguaje natural, un gráfico cartesiano, una ecuación, una tabla de valores, un programa de computador, entre otros. La comprensión completa de un concepto matemático o de alguna situación

[6] Ibíd., p. 51.

implica la articulación de los distintos registros de representación. Este proceso de construcción implica coordinar situaciones en diferentes contextos en una misma situación y articular distintos sistemas de representación, a través de los procesos fundamentales: *el tratamiento y la traducción*[7].

Dentro de los Sistemas de Representación mencionados en el texto Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas, se encuentran los siguientes sistemas:

- **Representación Escrita**: para poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación se debe disponer de sistemas de representación que sean familiares para el grupo de estudiantes. Uno de estos sistemas es el lenguaje escrito. El estudiante debe ser capaz de escribir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones.

- **Representación Pictórica:** los dibujos y gráficos son medios de representación en las situaciones de variación ya que muestran de otra forma lo que el estudiante entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos en un comienzo pueden ser muy concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio.

- **Representación Tabular:** aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes del desarrollo del Pensamiento Variacional por cuanto la solución

[7] Se entiende por ***tratamiento*** de un registro al proceso de transformación en otra forma equivalente, pero entre el mismo sistema de representación. Por ejemplo, cuando una ecuación es transformada en otra equivalente a través de las reglas del álgebra. Por su parte ***la traducción***, se entiende como el proceso de transformación de un registro en otro registro de un sistema de representación diferente. Por ejemplo es el caso en el que un problema enunciado en lenguaje natural es expresado a través de una ecuación o de un conjunto ecuaciones.

de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. La tabla también se constituye en una herramientas necesarias para la comprensión de la variable, pues el uso filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo. La tabla sirve como herramienta para mostrar los datos gráficamente, lo que permite descubrir patrones, hacer predicciones y sistematizar información.

- **Representación Algebraica:** De acuerdo a los patrones de regularidad encontrados en una tabla o gráfica, se pueden establecer expresiones algebraicas que condensen toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio.

2.3.2.1.3 Procesos Algebraicos

Los Procesos Algebraicos entendidos desde Mason (1999), son los resultados que los estudiantes adquieren en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, mediado por las *situaciones de variación y cambio*, donde las categorías científicas (Patrones y Regularidades y Sistemas de Representación) cobran sentido cuando ellos desarrollan procesos de generalización, evidenciándose en la forma de razonar, comunicar, analizar, proceder a la solución de las situaciones propuestas y abstraer los conceptos matemáticos. Y esto se hace evidente con la matematización, definida como la realización de actividades, donde el estudiante debe enfrentarse a “pensar” como simbolizar, formular, cuantificar, validar, esquematizar, representar, y por ende generalizar; es encontrar la esencia de los significados de los conceptos matemáticos, donde asume responsabilidades de describir, explicar y construir el concepto matemático Posada (2005: 53).

2.3.2.1.4 Proporcionalidad

La proporcionalidad se constituye en una herramienta fundamental para resolver problemas del mundo real, permite establecer una relación entre éste y el lenguaje matemático. Además, los mismos problemas ayudan a crear modelos para resolver otros. Posibilita también, la relación de la matemática con otras áreas del conocimiento, como la *física*: ayudando a la comprensión de conceptos claves como *la velocidad y la aceleración*, en la *química*: conceptos relativos a las *concentraciones* o al *balanceo de ecuaciones*, la *biología*, la *geografía* etc.

Esta importante noción, considerada como la "*síntesis de la aritmética*" es en general mal entendida, a pesar de la frecuencia con que es utilizada, y considerada un tema complicado, la limitan simplemente a la forma mecánica de la regla de tres. Es por esto, que debe ser asumida como un concepto altamente estructurante, que a partir del estudio de los *procesos de variación y cambio* se pueden conceptuar aspectos relativos a lo numérico y lo variacional, dado que a través del estudio de situaciones que impliquen la proporcionalidad se ponen en correlación dos o más variables. Entonces se conceptualiza la proporcionalidad tanto en relación con la aritmética, como en relación con el concepto de función.

"*Desde el punto de vista del estudio de las matemáticas, la noción de proporcionalidad involucra muchos de los conceptos que se han trabajado a lo largo de los primeros grados de escolaridad, sobre todo del campo conceptual multiplicativo (multiplicación, división, fracción, decimales, etcétera). Así mismo constituye la base para otras nociones importantes como: semejanza, escalas, homotecia, porcentajes, probabilidad, razones trigonométricas, el número π (como razón), función lineal, etcétera"* García y Amador (2004; p. 3)

Continuando con el desarrollo de este importante concepto, se toma como línea de trabajo los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas que Gerard Vergnaud aborda en su teoría del aprendizaje de las matemáticas. Cada uno de estos campos está constituido por el conjunto de situaciones en el sentido de tareas que demandan una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones, en el primer caso; y una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones, en el segundo.

Vergnaud (1982, p.40) toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Campo conceptual es, para él, *un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición*.

El dominio de un campo conceptual para Vergnaud no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años, al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si se quisiera que los estudiantes progresivamente los dominen.

Lo interesante de pensar didácticamente desde esta teoría es que permite visualizar el aprendizaje de las operaciones como un proceso largo y lento en el cual el sujeto construye los conceptos a partir de las diferentes facetas analizadas en cada situación presentada, reconociendo así que la intervención docente no se agota en sí misma, ni en un nivel, sino que contribuye a complejizar este proceso.

A continuación se abordara cada una de las estructuras (aditiva y multiplicativa) que Gerard Vergnaud propone al analizar la enseñanza de las operaciones aritméticas, y las cuales apoyan el desarrollo del trabajo propuesto en la Intervención Didáctica:

- **Estructuras Aditivas**

Vergnaud (1988), expresa que la estructura aditiva es "*el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas*". Además dice que "*las relaciones aditivas son relaciones ternarias, que se encadenan de diversas maneras ofreciendo gran variedad de estructuras aditivas",* para efectos de este trabajo, se retomó la clasificación sobre los problemas aditivos simples[8] realizada por Encarnación Castro, la cual se centra en el lugar de la incógnita en los problemas simbólicos:

Tipos de sentencias abiertas	
Para la suma	**Para la resta**
a + b = ?	a - b = ?
a + ? = c	a - ? = c
? + b = c	? - b = c
? = a + b	? = a - b
c = ? + b	c = ? – b
c = a + ?	c = a - ?

Y la realizada por Nesher quien se enfocó en el aspecto semántico de los mismos:

TIPO DE PROBLEMA	DESCRIPCIÓN
COMBINACIÓN	Relación entre una colección y dos colecciones disyuntas (parte - todo).
CAMBIO	Incremento o disminución de una cantidad inicial para crear una final.
COMPARACIÓN	Se establece entre dos colecciones utilizando términos como "más que" y "menos que".
IGUALACIÓN	Se produce alguna acción relacionada con la comparación entre dos colecciones disyuntas.

Según el tipo de relación entre los elementos se pueden reconocer diferentes tipos de problemas aditivos:

[8] CASTRO, E et al. (1995). Estructuras Aritméticas Elementales y su Modelación. España: Editorial Síntesis.

- Composición de dos medidas: son problemas de reunión o fraccionamiento de colecciones o magnitudes medibles.
- Relación de transformación de estados: se puede identificar un estado inicial y una transformación (positiva o negativa) que opera sobre este estado para llegar a un estado final.
- Relación de comparación aditiva: dos estados relativos a dos magnitudes localizables se comparan de manera aditiva, donde una de las magnitudes desempeña el papel de referente de la otra.
- Las composiciones de transformaciones: dos transformaciones o más se aplican sucesivamente a estados desconocidos. Que no aparece en el currículo escolar, al igual que las siguientes: Las composiciones de relaciones y las composiciones de transformaciones

- **Estructura Multiplicativa**

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. Varios tipos de conceptos matemáticos están involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en el pensamiento necesario para dominar tales situaciones. Entre tales conceptos están el de función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división.

Al hablar de estructura multiplicativa, es necesario pensar en una serie de procesos, a nivel cognitivo y didáctico, que se deben dar en una persona para construir y aplicar los procesos que conllevan el tener dicha estructura. En ella se presenta la construcción de modelos matemáticos que ayudan a darle sentido al conocimiento que la persona esta asimilando, desde la niñez.

Webb (1992) señala el campo conceptual multiplicativo de Vergnaud como un ejemplo de método conceptual que reflejan a las matemáticas como un cuerpo estructurado de conocimientos, donde puede describirse lo que los estudiantes saben a cerca de un dominio de conocimiento al mismo tiempo que indaga sobre la maduración de los conceptos dentro del dominio.

En el campo conceptual multiplicativo se analiza cómo en muchos de los razonamientos de los estudiantes al tratar con situaciones de tipo multiplicativo subyacen las propiedades de la linealidad como estructura matemática que modela tales actuaciones, lo que Vergnaud ha llamado teoremas en acto en su teoría de los campos conceptuales. Se pone de manifiesto así, que la función lineal en el campo conceptual multiplicativo, permite reconocer el avance en el aprendizaje y desarrollo de competencias multiplicativas, lo que inicia en educación básica con las clases de situaciones de multiplicación de estructura mas simple, complejizándose cada vez más no sólo por la estructura de tales situaciones, sino por los valores numéricos que intervienen, así como por la ampliación de diferentes dominios de experiencia

Así, el análisis de los diferentes razonamientos de los estudiantes al abordar una misma situación de tipo multiplicativo Vergnaud (1985) permite definir la competencia de ellos con criterios diferentes, según las distintas maneras para abordar el problema, observándose por ejemplo; cómo el uso del operador funcional se convierte en una manera conceptualmente más elaborada que otras para tratar la situación, por lo que implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente, la de cociente de dimensiones. Por lo tanto, podría decirse que lo que define el avance en el desarrollo de la competencia multiplicativa del estudiante al finalizar la educación básica es el hecho de que éste reconozca la función lineal y sus propiedades como una herramienta más potente en el tratamiento de situaciones de tipo multiplicativo.

De esta forma para que el docente reconozca los conocimientos de la estructura multiplicativa que usa el estudiante, es necesario que comprenda el desarrollo de las nociones que intervienen en el isomorfismo de medidas y las dificultades que se derivan de esta estructura, a su vez, como la relación con otros conceptos matemáticos como: división, razón, fracción, proporción, proporcionalidad y función lineal, lo cual hace pensar que dichos conceptos no pueden estar desligados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y los cuales se deben empezar a potenciar desde los primeros años de escolaridad y a lo largo de toda la educación básica y media. De la misma manera como propone Vergnaud, es importante que el docente identifique los conceptos en acto y teoremas en acto que se encuentran implícitos en la acción del estudiante y le ayude a hacerlos explícitos, al menos parcialmente, y a través de formas adaptadas.

2.3.3 Procesos De Modelación

Para hablar de procesos de modelación es importante conocer como se define un ***proceso*** y un ***modelo*** dentro del contexto matemático, y por ende, retomar algunas aproximaciones conceptuales que se han hecho referentes a lo *qué es* y *no es* la modelación.

Se hace referencia al concepto de ***modelo*** como una herramienta fundamental que permite pasar de una situación problema, expresada por ejemplo; el lenguaje ordinario, al modelo y de éste a la expresión algebraica correspondiente; en este sentido, al modelo como una forma de lenguaje. De esta manera, en las ecuaciones los modelos permitirán pasar de una forma simple de la situación problema a la ecuación correspondiente. Así, se inician a los estudiantes en la resolución de y el conocimiento de reglas de manipulación de expresiones algebraicas sencillas. MEN (1998)

La utilización de los modelos juega un papel fundamental en la creación de conceptos y procesos de razonamiento, pues permiten hacer accesible y manipulables conceptos intelectualmente más difíciles, y para que esto ocurra es necesario que el modelo cumpla la con:

- La descripción o la solución obtenida en el modelo sea igualmente válida en las situaciones que representa.
- El modelo debe tener en sí mismo una autonomía con respecto a lo representado.

Castañeda e Higuita (2005), en su trabajo "*Modelación matemática: en un entorno de la visualización para el aprendizaje significativo*" presentan algunos modelos en los que se enmarcan diferencias que se deben tienen en cuenta al momento de realizarse un proceso de modelación matemática. Entre ellos están:

- **Modelos intuitivos:** "las resoluciones matemáticas son modelos abstractos de realidades concretas", muchas veces en la elaboración de modelos abstractos utilizamos concretamente o inconscientemente representaciones físicas ó graficas para las nociones que estamos trabajando. Estas representaciones son modelos intuitivos, modelos de naturaleza sensorial que algunas veces no reflejan directamente una realidad. En matemáticas uno de los modelos intuitivos más conocidos son los diagramas.

- **Modelos explícitos:** los modelos se plantean gráficamente con el uso de diferentes tipos de recursos gráficos: gráficos de todo tipo, diagramas "máquinas", "ordinogramas", operadores, histogramas, etc.

- **Modelos analógicos:** los modelos son analógicos cuando pertenecen a una clase distinta de la realidad que representan. Por ejemplo los bloques aritméticos, para conocer los sistemas de numeración y las operaciones.

En relación a los ***procesos***, son aquellos que deben estar presente en toda actividad matemática, tienen que ver con el aprendizaje, tales como: *El razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración, la comparación y la ejercitación de procedimientos*, tal como se propone desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Al tener una aproximación a la conceptualización de los qué son los modelos y los procesos, es necesario resaltar *lo qué es y no es* la modelación, de acuerdo a reflexiones hechas desde los Lineamientos Curriculares y por algunos autores.

La ***modelación*** es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica, de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Se habla de una interrelación del mundo real y las matemáticas. Se reconocen como "*una práctica científica que ha sido incorporada a la enseñanza de las matemáticas por la diversidad y significados que aporta*" Blum et al. (1989). Es una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas. **"***Son una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas*" MEN (1998; p. 98). Ahora**,** Es importante precisar aspectos que no son considerados modelos, como: formulas de modelos ya inventados y probados por otros, la utilización de algoritmos para resolver problemas matemáticos y tampoco es trabajar situaciones problemas para afianzar un concepto matemático determinado.

"*Los procesos de modelación tienen que ver con el lenguaje de los estudiantes, a veces el lenguaje facilita o retarda la comprensión de la realidad, lo cual hace parte de la construcción de modelos. Sin embargo, la variedad de estudiantes en la clase puede hacer que se produzcan diferentes modelos que están al alcance de ellos según su desarrollo"* MEN (1998; p. 102).

En este proceso aparecen en forma significativa el concepto de representación, y algunas veces la modelación es expresada como la representación del objeto en cuestión, en consecuencia el desarrollo de la modelación en la enseñanza de las matemáticas es considerada como una herramienta didáctica que ayudara a los estudiantes a hacer representaciones adecuadas y eficientes del objeto matemático.

Conociendo de qué se tratan los modelos y los procesos, se puede decir que "*la modelación es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad*"[9]. Retomando los procesos, es importante resaltar el que tiene que ver con la generalización, considerada como el centro del Pensamiento Matemático y una raíz del álgebra. Los procesos de generalización, y sobre todo aquellos que tienen relación con el álgebra, permiten una división en fases que convienen también desde el punto de vista didáctico Mason et al. (1999; p. 17), que son:

- **Ver**: Hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación. Se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo, y lo que es común a todos ellos; lo que no varía, se trata de encontrar lo que se mantiene en cada caso, los factores claves y conseguir mediante una combinación adecuada, una regla, una expresión que resuma todas las situaciones que permita "contar en forma general" sin referencia los casos concretos.

- **Decir:** Ya sea uno mismo o alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido, esta descripción en el lenguaje natural es

[9] Este texto hace parte de la segunda publicación del escrito que se halla divulgado en las Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, evento organizado por El Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia (Bogotá, D.C., 8 al 10 de mayo de 2002), (pp. 68-77).

un paso que da habitualmente al generalizar, con la expresión oral se trata de comunicar lo que se ha visto, la regularidad o modelo detectado.

- **Registrar:** El estudio de la generalización dentro del aprendizaje del álgebra tiene como objetivo la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan, cuando se registra se hace visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (allí se incluyen los dibujos), esta puede considerarse la fase más difícil de la generalización pues esta recoge en si las dos fases anteriores “Ver” y “Decir”, el registrar es una fase avanzada del proceso de generalización, ya que expresar una regla por escrito, simbólicamente suele ser mas difícil, esta fase lleva a la generalización del aprendizaje.

En el aprendizaje de la matemática escolar, se pretende desarrollar el proceso de generalización, éste entendido como “*un proceso determinado por la observación o visualización de invariantes en medio de lo que varía […], además, no tiene formas predeterminadas de acceder a la sistematización de conclusiones, pues hay diferentes maneras de abordar un problema relacionado con la culminación de un modelo que recoja casos particulares*”[10]. En este proceso es importante reflexionar sobre la actividad matemática del estudiante, haciéndose indispensable “hacer que alcance esquemas generales de pensamiento, es decir, que pueda, ante una determinada situación reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través de clases generales de problemas. Pero dado que la construcción del conocimiento es contextualizado por naturaleza[11], entonces, el paso a la generalización no es ni fácil ni inmediato”[12] .

[10] POSADA B, Fabián A. et al. (2006). Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Módulo 2. Gobernación de Antioquia. Ed. Artes y Letras. p. 23.
[11] Según POSADA B. et al. (2006) La naturaleza contextual del conocimiento hace referencia a que el aprendizaje no es un acto individual, sino del individuo en contexto, y que el contexto no solo influye en el aprendizaje, sino que determina la naturaleza del mismo.
[12] Ídem. 10. p. 20.

El proceso de generalización entendido desde Mason (1999), necesita de la aplicación de los patrones y las regularidades en propuestas didácticas llevadas al aula de clase desde los primeros años de escolaridad. Por lo tanto, deben ser continuas y a largo plazo, debido a que este proceso es complejo y necesita que los estudiantes afiancen sus procesos de generalización verbal, donde el lenguaje verbal y las expresiones orales conlleven a que ellos confronten su pensamiento inductivo, y más adelante, en su proceso de aprendizaje a través de estrategias metodológicas propuestas por el docente, puedan utilizar, relacionar y operar expresiones aritméticas y algebraicas, mediadas por los patrones y regularidades que le permitirán crear modelos matemáticos.

2.3.4 Aprendizaje del Algebra

Cuando se habla del cómo los niños aprenden el álgebra, es necesario tener en cuenta una serie de dificultades que pueden intervenir directa o indirectamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra.
Entre ellas se destacan las siguientes:

- Dificultades debidas a la naturaleza del tema algebraico dentro del contexto de las matemáticas.
- Dificultades que surgen de los procesos del desarrollo cognitivo de los estudiantes y de la estructura y organización de sus experiencias.
- Dificultades atribuidas a la naturaleza del currículo, a la organización de las lecciones y a los métodos de enseñanza usados.
- Dificultades debidas a actitudes afectivas y no racionales hacia el álgebra.

Cada una, hace parte del complejo trabajo que conlleva el aprender el álgebra, en este caso, desde los primeros años de escolaridad (aproximadamente desde los 7 años), donde el niño hace parte de un mundo en el que la palabra "álgebra" no tiene para él un significado real, más que todo, hace parte de aquellos términos matemáticos que están en los libros, pero no logran trascender las barreras del conocimiento del niño hasta que éste no se encuentre en grados de escolaridad superiores (octavo o noveno de bachillerato).

Al tener presente la anterior situación, es importante que si "*el álgebra se caracteriza por sus métodos, que conllevan el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones*", está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico. Siendo esta una de las razones para saber el cómo los niños aprenden el álgebra, es importante conocer algunos aportes teóricos que varios autores presentan, enmarcados en algunas teorías cognitivas que le dan el significado epistemológico al aprendizaje y enseñanza del álgebra.

Piaget (1978) con los estadios de desarrollo, presenta "*un álgebra de los números y de las estructuras, entendiendo por ello todo lo concerniente al desarrollo de las habilidades y manipulación de las letras y otros símbolos que pueden representarse por objetos, incógnitas, números generalizados o variables, y también a los estadios de las operaciones, expresiones o entidades abstractas construidas por las relaciones bien definidas*", haciéndose útil reconocer qué tipos de interpretaciones y operaciones tienen dificultades en las tareas algebraicas. Ahora, "*comprender los caminos en los que los estudiantes interpretan o malinterpretan los símbolos en los diferentes estadios del desarrollo, identificando formas particulares de interpretación y procedimientos, constituye la base del diagnóstico y tratamiento del álgebra en la escuela*".

Kaput (2002), habla de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de educación básica, desde que ocurra una transformación en las prácticas pedagógicas de los docentes, haciéndose necesario algunos cambios enmarcados en tres aspectos:

- Algebrizar las situaciones diseñadas para la enseñanza, "*generando actividades que promuevan oportunidades para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones, lo que lleva a la construcción de actividades algebraicas*".
- Identificar y apoyar los actos y contextos que promueven el razonamiento algebraico de los estudiantes. "*Implica reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir argumentos sobre estructuras generales, así sus argumentaciones se apoyen en situaciones particulares o situaciones concretas*".
- Consolidar una cultura de clase que promueva el razonamiento algebraico. "*Implica incorporar a la cotidianidad de la clase, desde la organización de las situaciones para el aprendizaje, el desarrollo de habilidades relacionadas con la elaboración, validación y sistematización formalizada de conjeturas*".

"*Cuando los tres aspectos descritos anteriormente han sido incorporados a los procesos de enseñanza en el aula de clase, las prácticas de los docentes son fácilmente identificadas por características, tales como:*

- *Una habilidad para extender una actividad aritmética (o geométrica) hacia una actividad algebraica, bien sea sobre la base de un proceso planificado o de una acción espontánea.*
- *El uso de conversaciones algebraicas en el aula de clase.*
- *El regreso sobre los temas algebraicos después de periodos de tiempo significativos.*
- *La interpretación de múltiples procesos algebraicos en una actividad matemática simple.*

- *La contribución activa en la consolidación de una cultura escolar hacia el aprendizaje de las matemáticas*”.[13]

Carreher, Schlimann y Brizuela (2001), en sus estudios comentan que se ha retrasado la introducción escolar al álgebra por concepciones erróneas acerca de la naturaleza de la aritmética, del álgebra y de la capacidad de los niños para tratar con ella. Afirman que la aritmética es algebraica, porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones (*aritmética generalizada*). “A partir de esa afirmación desarrollan con niños de 9 años un estudio de iniciación temprana al pensamiento algebraico en la escuela primaria, centrado en la idea de lo desconocido y utilizando la notación algebraica para representar las relaciones con problemas aditivos. Los niños operan con lo desconocido, y son capaces de entender que las relaciones funcionales que involucran lo desconocido permanecen invariables para todos los valores posibles que una entidad pueda tomar. Estos autores hacen referencia a estudios realizados por Filloy y Rojano, Kieran, y Linchevski acerca del aprendizaje del álgebra con adolescentes y la separación entre la aritmética y el álgebra. Algunos de ellos afirman que el razonamiento algebraico está muy relacionado con el desarrollo cognitivo de los estudiantes: dicho razonamiento y los conceptos requieren un grado de abstracción y una madurez cognitiva que la mayoría de los estudiantes de primaria no tienen”. Sus trabajos proporcionan pruebas de que es posible algún tipo de iniciación en el álgebra antes de enfrentar a los niños a los obstáculos clásicos del aprendizaje de ella en la escuela secundaria. Un estudio que no deja de causar controversia en didáctica del álgebra.

Blanton y Kaput (2003) realizan sus aportes enfocando el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, a través de la preparación que los docentes deben tener, creando una cultura en las clases, en la que se valore “*el*

[13] KAPUT (2002, p.6) Referenciado en: POSADA B, Fabián et al. (2006) *“Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*”. Modulo 2. Ed. Artes y Libros. Gobernación de Antioquia. P. 13

que los estudiantes modelen, exploren, comenten, predigan, supongan y pongan a prueba sus ideas, además de practicar sus habilidades de cálculo". Sugieren que los docentes introduzcan el álgebra en el material existente usando las actividades aritméticas actuales, los problemas redactados transformándolos de problemas con una sola respuesta numérica a oportunidades de descubrimiento de patrones que permitan realizar y justificar conjeturas y generalizaciones sobre hechos y relaciones matemáticas.

Linda Levi (1999), recalca en su Proyecto de Álgebra Temprana, el "*no decir que deba enseñarse álgebra de enseñanza media a estudiantes del ciclo elementa*l". Más bien, ella y sus colegas del Proyecto (Thomas Carpenter y Megan Loef Franke) consideran que los docentes deben propiciar la participación de los estudiantes en el aprendizaje de los principios generales de las matemáticas conforme aprenden aritmética, y no separarla de otras ideas matemáticas afines, que aísla a los estudiantes con respecto a eficaces maneras de pensar en las matemáticas y les puede dificultar el aprendizaje del álgebra más adelante. "*Muchos estudiantes que estudian el álgebra en la enseñanza media no ven los procedimientos que se utilizan para resolver ecuaciones o simplificar expresiones como algo basado en las mismas propiedades que ya usaron en los casos aritméticos*" Carpenter, Franke y Levi (2003).

A partir de las posiciones y argumentos que distintos autores tienen en torno al aprendizaje del álgebra en los estudiantes desde los primeros grados de escolaridad, se logra observar cómo cada aporte hecho por ellos, va enfocado a que se inicie en la educación básica la enseñanza del álgebra, de tal manera que los conceptos matemáticos que ella tiene, no se conviertan en obstáculos a nivel cognitivo en los procesos de aprendizajes de los estudiantes, mas bien sean la herramienta de trabajo de los docentes para ayudar a afianzar los conocimientos previos que los estudiantes tienen sin olvidar el nivel cognoscitivo que ellos puede desarrollar.

Se debe mirar “el pensamiento algebraico” o llamado también Pensamiento Variacional (según el contexto colombiano) como aquel pensamiento que ayuda a darle mayor sentido a distintas situaciones de la vida, que son necesarias justificar desde la matemática, o como afirma Robert Moses en el proyecto “Álgebra para todos”, quien dice: gracias a la sociedad tecnológica actual, el álgebra se convirtió en el umbral de la ciudadanía y del acceso económico. Así, conforme el mundo se torna más tecnológico el razonamiento y solución de problemas que exige el álgebra son requeridos en diversos ámbitos de trabajo.

2.4 Documentos Rectores

Cuando se habla de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, no se debe olvidar la importancia que tienen determinados documentos, establecidos desde el Ministerio de Educación Nacional, quien es el encargado de proponer, diseñar y poner en marcha las principales directrices que todo proceso educativo en el país debe seguir. En este caso, se retoman los Documentos Rectores como: Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Pero, el trabajo de ellos no debe desligarse de los Indicadores de Calidad (Pruebas Saber y Pruebas ICFES) que permiten encontrar algunas debilidades en cuanto al aprendizaje de las matemáticas escolares, específicamente en el Pensamiento Variacional.

2.4.1 Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Es un documento que da pautas y direcciona la labor de todo docente de matemáticas, en el saber didáctico, pedagógico y disciplinar. Él establece algunos papeles que permiten la reflexión respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.
Entre ellos se resaltan:

- "*Pretenden atender la necesidad de orientaciones y criterios nacionales sobre los currículos, sobre la función de las áreas y sobre nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarlas*"[14].
- *"Fundamentan la acción pedagógica y didáctica y permiten caracterizar filosófica, psicológica, epistemológica, sociológica y pedagógicamente los procesos de enseñanza y aprendizaje en el interior de las disciplinas y en las instituciones"*[15].
- *"Buscan fomentar el estudio de la fundamentación pedagógica de las disciplinas, el intercambio de experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales"*[16].
- *"Propiciar la creatividad, el trabajo solidario en los grupos de estudio, el incremento de la autonomía".*
- *"Fomentar en la escuela la investigación, la innovación y la mejor formación de los colombianos".*

Cada uno de estos, y otros más, presentan un panorama general de la "misión" que los lineamientos curriculares tiene, No solo ellos, han ayudado a que la educación en Colombia cambie de sentido, sino que han sido esas "pautas" teóricas y organizativas que le dan validez al currículo. Los lineamientos curriculares pasaron por un proceso de construcción y aceptación, es por esta razón que la historia muestra sus cicatrices y a la vez establece los antecedentes para la construcción de nuevas metas e ideales, aquellos dirigidos a mejorar significativamente la estructura del currículo de matemáticas, en el que éste se trabaje a través de "*una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no solo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender*", en los que el

[14] MEN (1998) Lineamientos Curriculares de Matemáticas. p. 11.
[15] LANFRANCESCO V, Giovanni M. (2003) "*Estructuración de estándares curriculares en la educación básica colombiana*." En: Revista educación y educadores. Vol. No. 6. p. 236.
[16] Ídem 14. p. 12.

estudiante, en compañía del docente, encuentre la aplicabilidad a su vida diaria, y pueda tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas que lo llevan a exponer sus opiniones y ser perceptible a los demás. Por lo tanto, para alcanzar este ideal del aprendizaje de la matemática, es esencial no olvidar tres aspectos que ayudan a "organizar el currículo en un todo armonioso", como lo son; procesos generales, conocimientos básicos, y el contexto. Cada uno de ellos debe actuar de forma directa, en la estructuración y desarrollo del currículo de matemáticas, dichos aspectos están compuestos por unos elementos que hacen que el currículo no sea estático, por el contrario la interrelación de participación y complementariedad entre las partes de cada aspecto sea su dinámica.

La interacción de los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto deben generar una dinámica dentro del currículo de matemáticas, para actuar en forma directa en los procesos de enseñanza y aprendizaje. los Lineamientos Curriculares buscan darle un sentido de orientación al trabajo con cada uno de los pensamientos dentro de la educación matemática, iniciando desde la educación básica, donde los contenidos matemáticos no se enseñen de forma "fragmentada y compartimentalizada" y el pensamiento variacional pretende "*ubicarse en el dominio de un campo conceptual e involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas*"[17].

El concepto de variación que incide en el desarrollo del Pensamiento Variacional, ayuda a que los contenidos matemáticos se apoyen para desarrollar sus principales conceptos a nivel concreto, simbólico y abstracto, sin olvidar que el aprendizaje del Pensamiento Variacional "*es un proceso que se madura progresivamente, para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones*

[17] Ídem 14. p. 72

problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas"[18].

2.4.2 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Colombia ha estado trabajando para mejorar la calidad de su educación, lo que significa que todos, independientemente de sus condiciones socioeconómicas, ingresen, permanezcan y aprendan en la escuela lo que tienen que aprender en el momento que tienen que hacerlo. Para ello, se han adelantado reformas que se consignan en la Ley General de Educación y en varios decretos posteriores.

El estándar es una meta y una medida; es una descripción de lo que el estudiante debe lograr en una determinada área, grado o nivel; expresa lo que debe hacerse y lo bien que debe hacerse. MEN (2006). Son el punto de partida para que las instituciones educativas, los municipios, las localidades y regiones definan su propio marco de trabajo curricular. Estos aseguran que todas las escuelas ofrezcan educación similar y de alta calidad, lo que permite la igualdad de oportunidades educativas para todos los estudiantes. Además, permiten especificar requisitos para la promoción a grados y niveles siguientes, así como para la graduación a la finalización de la educación básica o media, contribuyendo al diseño de pruebas de logros académicos estandarizadas y comparables. En conclusión, *son la base para diseñar estrategias y programas de formación y capacitación de docentes, a partir de criterios y expectativas compartidas.*

2.4.3 Indicadores de Calidad: Pruebas Saber y Pruebas ICFES

La forma de enseñar en la educación básica y media está cambiando aceleradamente y este cambio se debe, en buena parte, a la influencia de los avances tecnológicos en la sociedad contemporánea. El aula escolar está

[18] Ídem 14. p. 72

pasando de la enseñanza centrada en el docente, al aprendizaje activo en el estudiante.

En el nuevo panorama educativo es fundamental que la evaluación sea parte integral en el proceso de aprendizaje, aporte información útil para los estudiantes, docentes e instituciones, se aplique continuamente y propicie la discusión sobre las falencias detectadas en el aprendizaje, a fin de poner en marcha acciones correctivas.

La evaluación se entiende cada vez más, como parte fundamental de la formación de calidad, puesto que genera información útil y permanente para el docente, el estudiante, la institución y la comunidad educativa. En Colombia, el ICFES ha enfocado las pruebas internas hacia la evaluación de competencias, lo que implica un dominio significativo del saber, pues apunta a la comprensión profunda, a la construcción de inferencias y deducciones, al análisis crítico y a la utilización oportuna y pertinente de los conceptos. Se trata ahora, de desarrollar capacidades para interpretar, argumentar y proponer mundos posibles, de llenar de significado un contexto y de darle sentido a nuestras acciones y sobretodo de estar en capacidad de resolver problemas nuevos.

El Examen de Estado que aplica el ICFES a los estudiantes colombianos de undécimo de la educación media tiene como propósitos entre otros evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se llevan a cabo en las comunidades educativas, por medio de esta evaluación, se informa a los estudiantes sobre sus competencias en cada una de las áreas básicas, con el animo de aportar elementos para la orientación de su opción profesional e igualmente apoyar los procesos de autoevaluación y mejoramiento permanente de las instituciones educativas.

Las pruebas SABER (elaboradas por el ICFES) por su parte, se aplica a los estudiantes de los grados: 3º, 5º, 7º y 9º, de Educación Básica, en las áreas de lenguaje y matemáticas, estas pruebas tienen entre otros propósitos Obtener, procesar, interpretar y divulgar información confiable y análisis pertinentes sobre el estado de la educación en el país que satisfagan la demanda social. Servir de base para tomar decisiones en las diferentes instancias del Servicio Educativo y para definir o reorientar políticas que fortalezcan la reforma educativa en marcha y orienten la gestión del sector.

Ambas pruebas centran su atención y sus esfuerzos fundamentalmente en conocer el logro cognitivo de los estudiantes, bien sea en términos de conocimientos, competencias, habilidades de pensamiento, saberes, actitudes, etc. Aunque no todas las evaluaciones están orientadas a medir estrictamente lo mismo, la mayoría de países coinciden en evaluar las áreas centrales del currículo: lenguaje, matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales principalmente. La elaboración y desarrollo de estas pruebas proponen la interdisciplinariedad de las ciencias que les exigen a las comunidades educativas reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que se realizan actualmente.

Ahora, siendo consecuentes con el tipo de evaluación que se ha venido reclamando en el desarrollo de los procesos escolares (evaluación por procesos, autoevaluación y reconocimiento de los diferentes ritmos de aprendizaje, etc.), se asume la evaluación como un proceso continuo y permanente que busca dar cuenta del estado de los procesos educativos en pro del mejoramiento de los mismos. Por tal motivo, los resultados que arrojan estas pruebas son un diagnostico importante en el proceso de autoevaluación escolar, a nivel institucional, a la hora de revisar o construir planes y proyectos educativos. Se espera que los resultados tengan implicaciones no sólo en el aula, sino también en la transformación y desarrollo del sistema educativo en general.

3 DISEÑO METODOLÓGICO

La Intervención Didáctica realizada en la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga, estuvo constituida por cuatro fases (observación-intervención, diagnóstico, intervención y análisis), donde se reflexionó sobre las relaciones de la triada docente – saber - estudiante, con base en la articulación de los saberes disciplinar, didáctico y pedagógico, a luz de una intervención e interacción con una comunidad educativa; permitiendo así, proponer, crear y desarrollar una propuesta de aprendizaje que favorezca el desarrollo de Pensamiento Matemático.

3.1 Marco Contextual

La propuesta de intervención se desarrollo con los estudiantes de los grados 4º a 8º de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez (grupos mixtos) y el grado 4º (grupo femenino) del Colegio Mano Amiga.
De la población nombrada, la cual equivalía a 762 estudiantes, se tomó una muestra de 210 estudiantes para realizar la propuesta de intervención. El siguiente cuadro da cuenta del contexto socio cultural y socio económico de las instituciones educativas Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga.

Instituciones Educativas	**Héctor Abad Gómez**	**Mano Amiga**
Naturaleza	Oficial	Privado
Ubicación Geográfica	Medellín (zona centro)	Bello (barrio Trapiche)
Nivel socio-económico y socio-cultural	Estudiantes de Estratos 1 y 2	Estudiantes de Estratos 1 y 2
Plan de área	Parcial	Completo
Planta Física	Reconstrucción total	Buena planta física
Grados	Grados de 4º, 5º, 6º, 7º y 8º	Grado 4º
Total de estudiantes para la intervención	722	40
Muestra de estudiantes.	170	40

3.1.1 Institución Educativa Héctor Abad Gómez

Es una institución educativa pública, ubicada en la parte centro oriental de la ciudad de Medellín, en la dirección carrera 40 Nº 50-13, entre La Placita de Flores y el edificio Coomeva. El sector donde se encuentra, está compuesto por instituciones de educación formal (El CEFA y La Universidad Cooperativa de Colombia) y no formal (ESCOLME entre otras). Además, es un sector que presenta poca seguridad vial y gran afluencia vehicular por encontrarse en el centro de la ciudad.

Esta institución, también cuenta con una sede alterna en el barrio Boston (calle 50 Nº 38-11), donde funcionaba la escuela Antonio Santos, en cuyo lugar atienden algunos grupos de la básica primaria y secundaria en horario igual al de la primera y segunda jornada, debido al proceso de construcción que tiene la sede principal.
En el año 2006, se inició un proceso de transformación en el que la institución ingresa al Proyecto "Los 10 *Colegios de Calidad para Medellín*", el cual cambia las condiciones en las que se venía desarrollando las actividades escolares de la institución; se demuele (por etapas) las instalaciones de la sede principal, de tal forma que la nueva institución sea un punto de referencia en el centro de la ciudad, a la vez que amplié la cobertura en cupos escolares y contribuya al mejoramiento de la educación pública.

En la sede principal de esta Institución Educativa, se prestaba el servicio a las tres jornadas con las que actualmente cuenta la institución, de la siguiente forma:

- Primera jornada, compuesta por 22 grupos correspondientes a la primaria, en un horario de 6:45 a.m. a 11:45 a.m.
- Segunda jornada, compuesta por 20 grupos correspondientes a los grados de Preescolar, algunos de básica primaria y toda la secundaria, en un horario de 11:45 a.m. a 6:00 p.m.

- Tercera jornada, compuesta por 22 grupos en los “*ciclos lectivos integrados*”, en educación primaria, básica secundaria y educación media, dirigida a estudiantes adultos. Dicha jornada se presta de 6:00 p.m. a 10:00 p.m.

La población estudiantil de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez son (niños, niñas, jóvenes y adultos) de estrato socioeconómico 1 y 2 caracterizada por diferentes problemáticas sociales y económicas, que intervienen directa o indirectamente en su proceso formativo. Entre la problemáticas se destaca: las familias disfuncionales donde su historia es determinada por la violencia intrafamiliar; estudiantes que viven en internados con la posibilidad de ver a sus padres u otros familiares los fines de semana; Algunos estudiantes (sin importar) deben trabajar y aportar económicamente al hogar, los lugares de trabajo son las calles en compañía de sus padres o solos. Estas características de la población hacen que recurran a la institución, la mayoría de familias que tienen un lugar de trabajo o intentan conseguirlo entre los distintos espacios físicos (calles, tiendas, bares, andenes, etc.) que ofrece el centro de la ciudad.

3.1.2 Colegio Mano Amiga

Es una institución educativa de carácter privado sin ánimo de lucro. Ubicado en el municipio de Bello (Antioquia), en el barrio: El Trapiche (carrera 66 Nº 63-11), cuyo propietario es La Fundación Mano Amiga de “Los Legionarios de Cristo”.
Este colegio presenta el calendario académico A para todos los niveles educativos que ofrece: preescolar, básica primaria, básica secundaria y educación media.

Esta última implementada en el 2007. Con una jornada académica de:

- La primaria, de 6:30 a.m. a 1:00 p.m.
- La secundaria, 6:30 a.m. a 2:00 p.m.

El colegio lleva sólo 10 años de funcionamiento, su planta física es nueva y se encuentra en excelente estado, y con posibilidades de ampliación debido al aumento progresivo en la cobertura escolar.

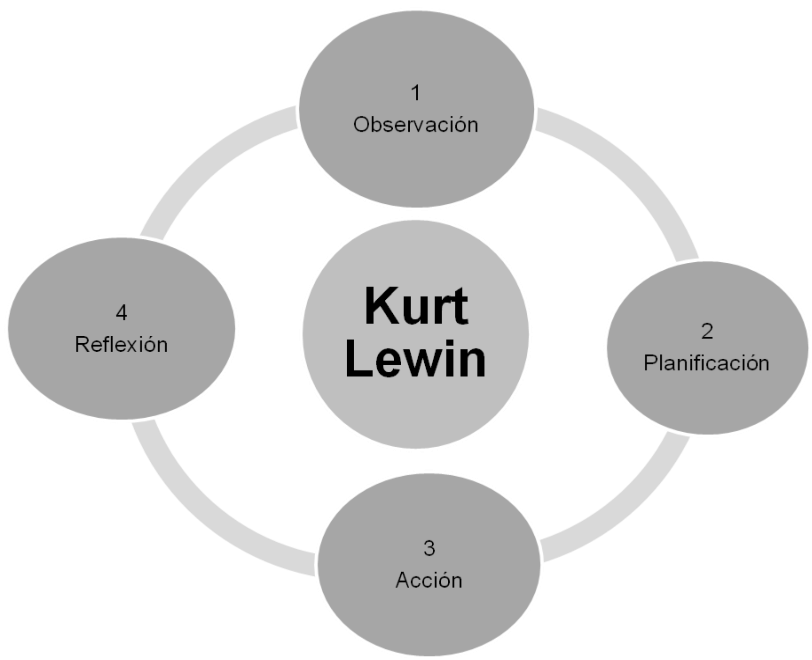
La población estudiantil (niños, niñas y jóvenes) que atiende se caracteriza por estar compuesta con familias de estrato socioeconómico de nivel 1 y 2, y son vulnerables a distintas problemáticas sociales. La mayoría de los estudiantes tienen la posibilidad de ser respaldados en su educación, por el proyecto Plan Padrino; es una corporación (Corporación Mano Amiga) que trabaja y busca personas (patrocinadores o padrinos) que quieran ser parte de este proyecto educativo a través de donaciones y becas brindadas por ellos. El proyecto busca que los estudiantes beneficiados tengan un desarrollo integral que se verá reflejado dentro y fuera del colegio.

Es importante resaltar que dentro de los principios filosóficos de dicho colegio se plantea la separación de hombres y mujeres; las aulas no son las mismas, hay una división determinada por grados (dos niveles de cada grado); un grado para los hombres y otro para las mujeres.

4 PROPUESTA METODOLÓGICA

La propuesta metodológica utilizada en la Intervención Didáctica, es la *investigación-acción,* Lewis (1944), la cual permitió planificar, describir, explorar y profundizar en el problema, igualmente, sirvió para conocer el contexto en el cual se desenvuelve la población que se intervino, además, posibilitó la aplicabilidad de categorías científicas para la comprensión y desarrollo del Pensamiento Matemático a través de talleres enmarcados en el Pensamiento Variacional, que facilitó interpretar unos resultados a la luz de referentes teóricos que soportan el discurso de este conocimiento básico.

A continuación se presenta un diagrama que visualiza la propuesta de Kurt Lewin para realizar una investigación cualitativa. En este caso, se realizó una *observación* de dos comunidades académicas en su proceso de aprendizaje de las matemáticas, identificándose la ausencia de la enseñanza del Pensamiento Variacional desde los primeros grados de escolaridad; conllevando ésto a desarrollar un plan de acción, donde se estudiaron las prioridades para establecer posibles alternativas que permitieran cualificar el proceso de aprendizaje de las matemáticas escolares en los estudiantes de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga, haciéndose necesario una reflexión crítica y constructiva en toda la propuesta.



Cada una de las etapas sirvió como insumo para explicar y comprender una realidad, al relacionar una comunidad educativa con el contexto en el cual se desenvuelven. Para ello fue necesario instrumentos como: La observación directa, los cuadernos de los estudiantes, las encuestas realizadas a estudiantes y docentes, el diario de campo, la Actividad diagnóstico Inicial, los talleres enmarcados en situaciones problema (escritos o dirigidos), y la actividad final.

Las fases que son los pilares del proyecto de Intervención Didáctica, se ampliarán a continuación:

4.1 Fase de Observación-Intervención

Esta primera fase fue realizada entre los meses de septiembre a noviembre de 2005, durante ella se hizo una recolección pertinente de información de las Instituciones Educativas, referente al contexto escolar y social. Esta se logro a través del diálogo con directivos (rector y coordinadores académicos) y docentes del área de matemáticas en los grados donde se llevaría a cabo la Intervención.

El análisis del PEI de cada una de las instituciones nos permitió conocer aspectos relevantes del currículo institucional, obteniendo insumos suficientes para iniciar el diseño de una propuesta con miras al mejoramiento del proceso de aprendizaje de las matemáticas a través del Pensamiento Variacional.

En el colegio Mano Amiga fue posible un proceso de enseñanza y aprendizaje continuo con los estudiantes del grado cuarto dado que la maestra en formación se desempeñaba como profesora de matemáticas allá. Ella dedicaba un día a la semana, donde identificaba las fortalezas y debilidades en dicho proceso. Por el contrario, en la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, se presentaron algunas dificultades, resaltando entre ellas:

- La reconstrucción de la planta física de la sede principal, ocasionó des escolarización y reducción de los horarios.
- La ausencia del docente para el área de matemáticas en el grado séptimo, desde el mes de marzo de 2005, llevaron a las directivas de la institución a solicitar cubrir esta vacante con tres de los maestros en formación, para acompañarlos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Por lo tanto, en esta primera etapa no hubo un proceso adecuado de observación que permitiera caracterizar las prácticas pedagógicas en el aula,

Similarmente, en los grados de cuarto, quinto y sexto, los maestros en formación apoyaron el trabajo de los docentes cooperadores, con intervenciones directas dentro del aula de clase a la vez que realizaban las observaciones de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Durante esta fase, en ambas instituciones, se observó un plan de estudios enfocado en el desarrollo del pensamiento numérico desligado de los otros pensamientos, por lo cual se realizaron talleres basados en el Pensamiento Variacional que les permitieran a los estudiantes articular los conocimientos previos con los nuevos. Los talleres se hacían de forma dirigida y acompañados por actividades que permitían desarrollar el Pensamiento Matemático.

4.2 Fase de Diagnóstico

Ahora bien, pasada la fase de observación-intervención, la fase diagnóstico se desarrolla entre febrero y junio de 2006, en la que se establecen criterios para aplicar una propuesta de Intervención Didáctica en el contexto del Pensamiento Variacional; para ello, se diseñó una actividad diagnóstico inicial por niveles[19], basada en: situaciones problema, los ejes temáticos[20] del Pensamiento Variacional (patrones y regularidades, procesos algebraicos y funciones), y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Con ésta se pretendía, entre otros, identificar los conocimientos previos, el nivel de razonamiento, análisis, interpretación, argumentación, comunicación y abstracción de los conceptos matemáticos adquiridos por los estudiantes de acuerdo al grado. Motivándolos a participar y tomar iniciativa en la resolución de las situaciones

[19] Se elaboró una actividad común para los grados de 4º, 5º, 6º y 8°, cuyo pensamiento directo fue el pensamiento numérico, para el grado 7º se elaboró una actividad que giraba en torno al pensamiento espacial. Aunque se aclara que las tres actividades se adaptaron a una sola situación problema enmarcada en el pensamiento variacional y a las necesidades de cada grado.
[20] Los ejes temáticos son retomados del texto “Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas”, propuestos por la Mesa de Trabajo de Matemáticas en Antioquia en el año 2005, para desarrollar el Pensamiento Variacional.

problema propuestas, y así afianzar valores, actitudes, aptitudes y procedimientos de trabajo colaborativo, que potenciaran capacidades para el desarrollo del Pensamiento Matemático. En esta fase se tomaron decisiones como: la elaboración de talleres con base en situaciones problema significativas para el estudiante, conservándose las relaciones de docente, saber y estudiante. Se elaboraron talleres enfocados en situaciones problema, algunas en el contexto disciplinar y otras donde estaban articulados los contextos sociales y disciplinares. Ellas fueron de gran interés para los estudiantes.

4.3 Fase de Intervención

Esta fase se realizó entre el segundo semestre, incluyendo en ella las fases anteriores. El periodo de tiempo que se presenta en esta fase no se realizó de forma continua, debido a dificultades como: la reconstrucción de la planta física de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez causando una alta desescolarización y reducción de los horarios de clase a 35 minutos. En cuanto a la intervención en el Colegio Mano Amiga, no existieron dificultades relevantes, pero el horario de intervención que autorizó las directivas al maestro en formación fue de 2 horas a la semana, por lo que debía cumplir con sus deberes de docente de matemáticas de este colegio.

Teniendo como referente los resultados de la actividad diagnóstico inicial; no sólo se llevaron propuestas al aula, sino a la comunidad educativa en general, entre ellas se destacan el taller "*situación problema*", dirigido a todos los docentes de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, y el Carrusel Matemático[21] el cual

[21] El **Carrusel Matemático** es una estrategia pedagógica que permite indagar el nivel de conceptualización de los estudiantes o profesores sobre diversos contenidos de la matemática escolar. Su intención fundamental es la evaluación de competencias adquiridas, una vez se haya propiciado un espacio de intervención pedagógica para movilizar aprendizajes matemáticos. Definición tomada del documento para docentes: "*Acerca de la Metodología" (2007) Proyecto Recontextualización Planes de Área. Elaborado por el equipo asesor del área de Matemáticas. Universidad de Antioquia. Medellín. p. 4*

permitió realizar vínculos institucionales entre la Universidad de Antioquia, el CEFA y la Institución Educativa Héctor Abad Gómez.

Durante el proceso de intervención se tuvieron en cuenta tanto las dificultades como los conocimientos previos de los estudiantes, dichos aspectos permitieron tener una visión general del nivel conceptual de éstos al momento de dar solución, no sólo a la actividad diagnóstico inicial sino a los talleres propuestos. Es así, como se toma la decisión de diseñar y aplicar una serie de talleres enmarcados en su mayoría, en situaciones problema que fortalecieran aquellos aspectos en los que presentaba mayor dificultad. Estos talleres, no sólo debían hacer alusión al contexto sino también a una fundamentación teórica, por lo tanto se asumió la siguiente estructura: *Justificación, objetivo general, objetivos específicos, estándares, recursos utilizados, conocimientos básicos inmersos en dicha situación, metodología, red conceptual y bibliografía.*

Con el diagnóstico y los talleres que sustentaron la fase de intervención, se tuvo como objetivos, entre otros, afianzar en los estudiantes habilidades como: ver, decir y registrar que conllevan a iniciar procesos de generalización. A la vez, se pretendía aplicar nuevas estrategias metodológicas donde ellos; manipularan y exploraran material didáctico (dentro de un contexto), participaran y propusieran soluciones desde su nivel de comprensión, compartieran y socializaran respuestas, dudas, estrategias y procedimientos con sus compañeros, enriqueciendo y mejorando la construcción de los conceptos que estuvieran inmersos en la situación propuesta. Es por esto que los talleres se realizaban, tanto de forma individual y grupal, dirigidos por el maestro en formación. Estas propuestas permitieron conocer los avances en la forma como los estudiantes se acercaban a los procesos de generalización, donde se indagaba de forma rigurosa sobre los aspectos ya nombrados.

4.4 Fase de Análisis

Esta fase se realizó entre marzo y septiembre de 2007. En el desarrollo de la propuesta de Intervención Didáctica los maestros en formación, pretendieron fortalecer en los estudiantes habilidades comunicativas (explicando los procesos utilizados, justificando las estrategias y procedimientos, empleando sus propios argumentos a la hora de exponer sus ideas), provocando procesos de Pensamiento Matemático, entre otros: la manipulación, la estructuración de argumentos y la generalización, que los llevara a "*la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida cotidiana, integrado en unidades complejas que le brinden autonomía*" MEN (1998).

Los elementos que se tuvieron en cuenta para realizar el análisis fueron: la población intervenida, el proceso cognitivo en que se encontraban los estudiantes, las actividades realizadas por ellos, los apuntes que los maestros en formación tenían en sus diarios de campo y los referentes teóricos[22]

Algunas de las características que definen la naturaleza de este análisis cualitativo son las siguientes:

- Darle estructura a los datos, apoyados en los referentes teóricos que se retomaron para la sustentación de esta propuesta de Intervención Didáctica. Inicialmente, los maestros en formación elaboran un análisis de la actividad diagnóstico inicial, con base en las actividades realizadas por los estudiantes seleccionados en la muestra[23], a partir de una sistematización individual y con base en un cuadro dispuesto de la siguiente manera: *preguntas, categorías y*

[22] Como: Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Castro E., Kaput, Mason, Levi,

[23] Se seleccionó una muestra de 210 estudiantes (aproximadamente 35 por cada grupo) para realizar el análisis. Esta selección se hace en la última fase. Sin embargo la intervención didáctica de los maestros en formación se realizó en todos los grupos, de los grados 4°, 5°, 6°, 7° y 8°. Teniendo una población de 740 estudiantes aproximadamente.

*descripción de las actividades, logros, dificultades y estrategias utilizadas por los estudiant*es. Luego, en un equipo de trabajo compuesto por los maestros en formación que realizaron su práctica pedagógica en los grados 4°, 5° y 6° encuentran puntos en común para realizar un sólo análisis, mientras los maestros en formación de los grados 7° y 8°, no conforman equipo de trabajo debido a las diferencias en los talleres que se diseñaron y aplicaron en ambos grados, pero revisan individualmente el análisis de la Actividad Diagnóstico Inicial. Ambos casos, tienen en cuenta las observaciones y sugerencias del docente asesor, que permiten describir y reflexionar sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes que conforman los grupos seleccionados en la muestra, dicho proceso, alusivo a las *situaciones de variación y cambio*. De otro lado, los maestros en formación realizaron un análisis en el que se describe objetivamente el proceso de aprendizaje de los estudiantes, de acuerdo a las categorías que se establecieron en la propuesta de Intervención Didáctica, donde se seleccionaron algunos talleres que sirvieron como insumos para conocer, interpretar y argumentar los procedimientos utilizados por ellos, para solucionar las situaciones problema propuestas.

Este análisis por categorías permite conocer algunos aspectos que hacen alusión a la forma como los estudiantes conciben parte de los conceptos matemáticos inmersos en el Pensamiento Variacional, y permitió reflexionar sobre la necesidad de incluir este pensamiento en interrelación con los demás pensamientos matemáticos desde los primeros años de escolaridad, lo que conlleva a la construcción de los procesos de modelación y generalización, los cuales deben darse de una forma progresiva. Por último, se realizó una sistematización general del análisis que dio cuenta de los puntos en común del proceso de aprendizaje de los estudiantes y así establecer unas conclusiones que se darán a conocer más adelante en este trabajo.

- Comprender en profundidad el contexto que rodea a los estudiantes.
- Interpretar y comprender las actitudes de los estudiantes.

- Explicar los ambientes, situaciones, hechos, fenómenos.
- Encontrarle sentido a los datos en marco del planteamiento del problema y por último relacionar los datos encontrados con la teoría trabajada.

El análisis del proceso de aprendizaje de los estudiantes se realizó a través de cuatro categorías (patrones y regularidades, procesos algebraicos, sistemas de representación y proporcionalidad), que dieran cuenta de la metodología utilizada por el maestro en formación, logros, niveles de comprensión y estrategias aplicadas por los estudiantes para dar solución a las situaciones propuestas. Se toma como referencia para este análisis la actividad diagnóstico inicial, los talleres diseñados[24] para toda la fase de intervención didáctica y una actividad final que fue común para todos los grados. Tanto la inicial como la final se realizaron de forma individual. Esta última tenía como objetivo, mostrar los avances de los estudiantes con respecto al proceso que se había iniciado meses antes, y se diseñó similarmente a los talleres realizados durante todo el proceso.

No sólo se evaluó el trabajo realizado por los estudiantes. Ellos, también evaluaron el proceso que el maestro en formación desarrolló, a través de una forma oral y escrita, teniendo como punto de partida algunas preguntas formuladas por el maestro en formación, conociéndose así la percepción y las apreciaciones que ellos tenían a cerca del proceso que se llevó a cabo en dichas comunidades educativas.

4.5 Metodología utilizada en el Aula de Clase

Para la propuesta en mención, se diseñó con frecuencia talleres situaciones problema enfocadas en el Pensamiento Variacional y sistemas analíticos y

[24] Los talleres se enmarcan en situaciones problema y se sustentan en: Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (de acuerdo al grado), las competencias matemáticas y en las cuatro categorías seleccionadas para el desarrollo de la intervención didáctica.

algebraicos que dieran cuenta del proceso de aprendizaje de los estudiantes, ellos eran soportados a través de un discurso didáctico que diera cuenta de los objetivos, la metodología a utilizar, los recursos, los estándares y la descripción de las actividades a realizar.

En ocasiones se les entregaba los talleres a los estudiantes para que ellos se "enfrentaran" a las situaciones propuestas y luego de un tiempo determinado, se pasaba por los puestos para observar y dialogar el procedimiento que estaban utilizando para resolver las situaciones. Se procuraba en lo posible, que los conceptos matemáticos inmersos en los talleres de aprendizaje estuvieran articulados con los conocimientos previos que los estudiantes tuvieran y que fueran adecuados al nivel cognitivo de ellos, igualmente, se esperaba una "mínima" aplicación por parte de los estudiantes en relacionar los conceptos matemáticos con el contexto al que ellos pertenecen.

También, en varias ocasiones fue utilizado material didáctico y lecturas que dieran cuenta de los conceptos que se querían desarrollar en las situaciones propuestas; estos mediadores permitían la comprensión de los conceptos matemáticos dado de una manera más "grata" y diferente para los estudiantes, igualmente, durante la clase se hacían preguntas a los estudiantes que los invitaba a expresar los procedimientos que estaban utilizando para solucionar los ejercicios propuestos.

Con frecuencia se utilizó la socialización de los talleres propuesto, permitiéndole al estudiante la comunicación tanto oral como escrita y despertarles a "muchos" de ellos, el interés de tomar la iniciativa de participar, afianzando en ellos la cooperación, la solidaridad y el respeto a las diferencias y a las normas colectivas, además estos talleres situación problema o "talleres de aprendizaje", permitieron a los estudiantes aprender en la práctica para la práctica, se formaron grupos de trabajo donde hubo una interrelación, donde el docente en formación y los estudiantes adoptaron nuevos roles, donde el docente en formación no sólo era el docente sino moderador y el estudiante participó activamente en su proceso de aprendizaje.

Es de anotar, que el registro detallado de la intervención quedó consignado en el diario de campo, instrumento que describe el día a día de las vivencias tanto académicas como personales de la comunidad educativa.

4.6 Instrumentos utilizados

- **Diario de Campo.**

  Es un instrumento de reflexión y registro documental propio, el cual permite capturar los procesos de vida, ya sean invisibles, intangibles o efímeros. La utilización del diario de campo permite entrar en un proceso de observación, registro, análisis, asociación y recontextualización de aquellos eventos que nos interesan de la vida en el aula.

- **El Taller.**

  Se puede concebir como el canal en el cual se unen la teoría y la práctica como fuerza motriz del proceso pedagógico orientado a una comunicación constante con la realidad social y como un equipo de trabajo que permite la comunicación entre los docentes y estudiantes, en el cual cada uno es un miembro más del equipo y hace sus aportes específicos. Durante la Intervención Didáctica se diseñaron una serie de talleres[25], que tuvieron como eje transversal el Pensamiento Variacional, y éstos a su vez, estuvieran articulados con los demás pensamientos matemáticos enmarcados en situaciones problema. Éstas concebidas como espacios de interrogantes, que posibilitan la

[25] Se aplicaron ocho talleres en cada grado, para un total de 48. éstos se pueden encontrar en una cartilla dirigida a los docentes de la institución educativa Héctor Abad Gómez, editada por el Proyecto Colegios de Calidad: una escuela posible.

conceptualización; donde se dan interacciones entre estudiante, objeto a conocer y docente. *"Una situación problema es una espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático"* Mesa, (1993).

- **Cuadernos de los Estudiantes.**
  Instrumento utilizado por los estudiantes donde consignan "las memorias" de lo que acontece día a día en el aula de clase y donde registran los procedimientos que ellos utilizan al dar solución a los talleres propuestos.

- **Actividades.**
  Estas fueron diseñadas con la intención de conocer, no sólo los conocimientos previos que tenían los estudiantes sino también para observar y diagnosticar el proceso de aprendizaje de ellos, haciéndose énfasis en el desarrollo de los procesos de generalización a través de *situaciones de variación y cambio*.

- **Encuestas.**
  Estos instrumentos[26] fueron diseñados para evaluar la propuesta de Intervención Didáctica, donde una de ellas fue dirigida a los estudiantes y dos a los docentes. La encuesta dirigida a los estudiantes de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez buscaba conocer sus opiniones con respecto a la actividad denominada "*Carrusel Matemático*", que sólo se llevó a cabo en esta comunidad educativa. Una de las encuestas dirigida a los docentes de matemáticas de la misma institución, tenía como fin conocer sus apreciaciones

[26] Ver anexos: *Instrumento evaluativo dirigido a los docentes, y a los estudiantes*

con respecto al taller “Situación Problema”[27]; la otra encuesta buscaba conocer la opinión del docente cooperador con respecto a la Intervención Didáctica de los maestros en formación.

- **Actividad Diagnóstico Inicial.**

  Se elaboró una Actividad Diagnóstico Inicial[28] para los grados de 4º a 6º, y se realizaron adaptaciones para los grados, 7º y 8º. Se diseñó teniendo en cuenta los siguientes criterios:

  - El nivel de complejidad en el que deberían estar los estudiantes de las instituciones educativas a intervenir.
  - Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los ejes conceptuales[29] que hacen parte del Pensamiento Variacional (patrones y regularidades, procesos algebraicos y funciones). Estos fueron punto de referencia para conocer el nivel de aprehensión de los estudiantes en el saber disciplinar. Se aclara que cada pregunta fue pensada en un eje conceptual del Pensamiento Variacional, pero al realizar el análisis de ésta se evidenció en algunas respuestas de los estudiantes, las relaciones entre varias de las categorías establecidas para el análisis, como se muestra más adelante en las características generales del análisis de la actividad diagnóstico inicial.
  - Las situaciones problemas que como dice **Vigostky,** son una “vía fundamental para la conceptualización, donde a través de la formación de conceptos son un proceso creativo, no mecánico ni pasivo, que propicia niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático, elementos básicos en la construcción de conceptos matemáticos”, le permiten al

[27] El taller “***Situaciones Problema***”, se diseñó para trabajar con los docentes del la básica primaria y los del área de matemáticas de la secundaria de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, aspectos teóricos y prácticos relacionados con las situaciones problema para que les brindaran aportes significativos a su labor como docentes de matemáticas.
[28] Ver anexo: *Actividad Diagnóstico Inicial para los grados de 4º a 6º, y para el grado 7º*.
[29] Son los ejes conceptuales propuestos en el texto: “Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos en Matemáticas”. Gobernación de Antioquia. 2005.

estudiante conocer, argumentar, interpretar, analizar, abstraer y darle significado a los contenidos matemáticos.

- **Actividad Final.**

  Este instrumento[30] fue diseñado por todo el equipo de trabajo con el mismo nivel de complejidad para todos los grados. Constaba de 5 preguntas y estuvo fundamentada, de igual manera que la inicial, en situaciones problema, Estándares y Ejes Conceptuales del Pensamiento Variacional, donde el contexto disciplinar se hizo presente en cada una de las preguntas, articulándose las respuestas de una pregunta con otra. Así mismo, se pretendía que el estudiante mostrará sus capacidades y habilidades en la aprehensión de los conceptos matemáticos, a través de las estrategias que ellos presentaran en la solución de esta actividad, poniendo en práctica todo lo construido durante la fase de intervención.

4.7 Estrategia Metodológica

La Estrategia Metodológica planteada, pretende integrar la teoría y la práctica en un mismo momento (tiempo) y en un mismo lugar (espacio) contribuyendo al proceso de aprendizaje en los estudiantes. Se apoya en la metodología de "Taller", entendido como: "*una nueva forma pedagógica que pretende lograr la integración de teoría y práctica a través de una instancia que llegue al estudiante con su futuro campo de acción y lo haga empezar a conocer su realidad objetiva.*
Es un proceso pedagógico en el cual los estudiantes y docentes desafían un conjunto de problemas específicos"[31].

Cada uno de los talleres realizados se enmarcan en el contexto de Situaciones Problemas, presentado por Múnera y Obando como: *"El contexto de participación*

[30] Ver anexos: *Actividad Final*
[31] DE BARROS, Nidia A. y GISSI B, Jorge. (1997)

colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos"[32], conlleva a la puesta en común de experiencias, aprendizajes de situaciones reales y solución de problemas. Algunos de los talleres elaborados, son producción original y otros hacen parte de adaptaciones, de propuestas didácticas para enseñar y aprender la matemática escolar.

De otro lado, no se puede olvidar que todo trabajo de la matemática escolar debe sustentarse en las directrices que se establecen desde en documentos rectores, donde se presentan unos puntos de partida que orientan y dan las pautas necesarias para que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática no se fragmente, por el contrario, es pensar en dinámicas de trabajo que contribuyan a mejorarlos.

En este caso, se elaboran talleres cuya sustentación está compuesta por:

- ***Justificación*:** En ella se determina el cómo, el porqué y el para qué del taller, resaltando la importancia y la pertinencia que éste tiene en las intervenciones dentro y fuera del aula de clase. Se enmarca el proceso que se pretende llevar a cabo, sustentado en las bases conceptuales que se determinan para trabajar los distintos pensamientos matemáticos de acuerdo a los documentos rectores de la educación matemática.

- ***Objetivos*:** Se propone un objetivo general en el que se plantean las principales pautas a seguir, luego se presentan los objetivos específicos, que en conjunto

[32] MÚNERA, J y OBANDO, G. Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. En: Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia. 15 (35) p. 1.

deben dar cuenta del cumplimiento de lo dicho en el objetivo general. Los objetivos deben estar en concordancia con la sustentación de los talleres.

- ***Estándares*: Es necesario que el trabajo a realizar con los talleres esté conectado con los propósitos que los Estándares Básicos de Matemáticas pretenden. Son en sí "criterios claros y públicos que permiten conocer qué es lo que deben aprender los estudiantes. Así mismo son el punto de referencia de lo que un estudiante puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel. En este caso, se seleccionan estándares acordes al nivel de complejidad que presentan los talleres, un nivel enmarcado en un grado escolar y en la interrelación de los pensamientos matemáticos, donde el Pensamiento Variacional es el eje transversal.

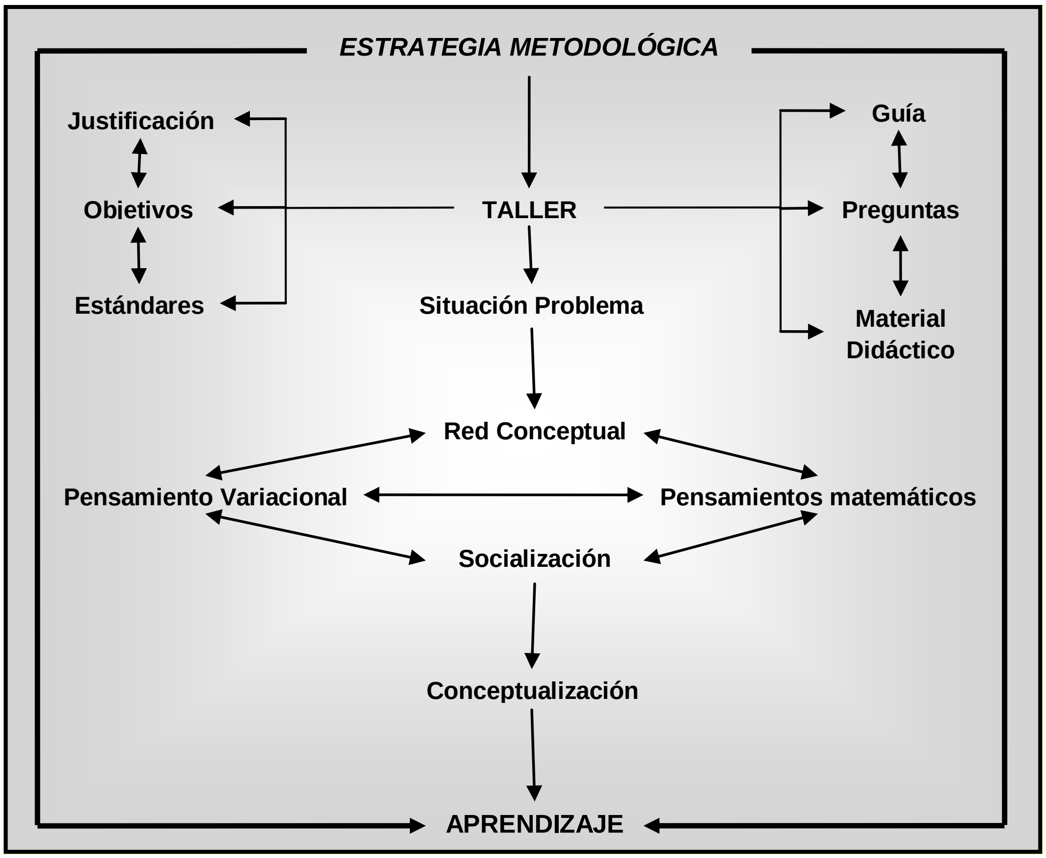
- ***Red Conceptua**l*: "*Entendida como una especie de malla donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar*"[33] En la red se establecen las relaciones entre los distintos pensamientos matemáticos, donde el nivel conceptual que se pretende alcanzar esta direccionado a afianzar los conceptos matemáticos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Desde ésta se proponen los conceptos matemáticos a trabajar.

- ***Metodología:*** Establece la forma cómo se desarrolla y aplica el taller, ya sea con una guía de trabajo para el estudiante donde el docente este orientando y realizando las aclaraciones necesarias, o una guía que direccione el trabajo del docente y le permita relacionar determinada temática con el contenido del taller. Es en la metodología donde se hace importante el trabajo colaborativo, y éste permite los espacios de socialización grupales que llevan a enriquecer los procesos de conceptualización. La metodología a utilizar determina el uso del

[33] Ibíd. p.184.

material didáctico, las preguntas que estructuran el taller y las que el docente realiza durante el desarrollo del mismo.

Red que sistematiza la Estrategia Metodológica



Para el desarrollo de toda la estrategia metodológica, fue necesario un acercamiento conceptual y una reflexión, sobre el Aprendizaje Colaborativo, el Taller y las Situaciones Problema, de tal manera que le dieran un soporte metodológico a la Intervención Didáctica. A continuación se ampliaran cada uno de estos referentes.

4.7.1 El Aprendizaje Colaborativo

"*Conjunto de métodos de instrucción para la aplicación en grupos pequeños, de entrenamiento y desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo" Johnson, D. y Johnson, R (1987).* De esta definición se desprenden tres ideas centrales, a saber:

- Es un método de instrucción para aplicación en grupos pequeños, es decir tiene como propósito la modificación del conjunto de relaciones que se establecen entre el docente y el estudiante.
- El entrenamiento y desarrollo de habilidades mixta. Su aplicación grupal se orienta hacia el desarrollo de una organización al interior de la clase y fuera de ella, más intencionada y planificada para el desarrollo de actividades de aprendizaje en los estudiantes.
- Cada miembro es responsable de su aprendizaje y de los restantes miembros. Se trata de que los estudiantes trabajen en grupo, pero no sólo para que desarrollen la tarea encomendada sino que además aprendan del proceso de aprender.

El aprendizaje colaborativo es una herramienta fundamental en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Si el docente conoce y aprovecha los beneficios que éste puede ofrecerle y sabe utilizarlo de manera adecuada dentro del aula de clases, podrá propiciar ambientes de aprendizaje, donde la comunicación, la discusión productiva y la interacción entre estudiantes y docentes serán la base para generar aprendizajes más significativos.

El objetivo del aprendizaje colaborativo es promover la interacción, el intercambio de ideas entre todos los miembros de cada grupo, la responsabilidad con los roles asignados y sobre todo la colaboración y comunicación de cada uno de los argumentos que cada estudiante presenta para defender sus ideas o puntos de vista y de esta manera el trabajo en clase resultará más productivo y significativo, donde el docente como el estudiante aportan para la construcción colectiva de conocimiento. Cuando se retoma el aprendizaje colaborativo en las actividades realizadas en el aula se conoce el gran interés y motivación por parte de los estudiantes para aprender en grupo, la forma cómo interactúan con sus pares y el docente que conllevan a desarrollar competencias comunicativas.

El aprendizaje colaborativo es "...*un sistema de interacciones cuidadosamente diseñado que organiza e induce la influencia recíproca entre los integrantes de un equipo*." Johnson y Johnson (1998). Se desarrolla a través de un proceso gradual en el que cada miembro y todos se sienten mutuamente comprometidos con el aprendizaje de los demás generando una interdependencia positiva que no implique competencia. "*Lo que debe ser aprendido sólo puede conseguirse si el trabajo del grupo es realizado en colaboración. Es el grupo el que decide cómo realizar la tarea, qué procedimientos adoptar, cómo dividir el trabajo, las tareas a realizar"*. Gros (2000). El docente, en cambio, tiene que diseñar cuidadosamente la propuesta, definir los objetivos, los materiales de trabajo, dividir el tópico a tratar en subtareas, oficiar de mediador cognitivo en cuanto a proponer preguntas esenciales que realmente apunten a la construcción del conocimiento y no a la repetición de información obtenida y, finalmente, monitorear el trabajo resolviendo cuestiones puntuales individuales o grupales según sea necesario.

Sobre el tema, Crook (1998) expresa que el aprendizaje se genera a partir de la combinación de una serie de principios como: la articulación, el conflicto y la co-construcción. El principio de la articulación, que nos interpela en relación a que el valor educativo y cognitivo de esta estrategia de aprendizaje se deriva de la necesidad que tiene el participante de organizar, justificar y declarar sus propias ideas al resto de compañeros, y de la necesidad de su interpretación, es decir traducción cognitiva, para que sea comprendida por sus iguales.

El principio del conflicto, por el que se asume que los beneficios se producen en el contexto de los desacuerdos y de sus refuerzos para resolverlos, desacuerdos que serán de extraordinaria importancia para estimular los movimientos discursivos de justificación y negociación. El principio de co-construcción, que hace referencia a la significación que tiene el hecho de compartir objetivos cognitivos comunes y que el resultado alcanzado no sea la simple yuxtaposición de información sino su elaboración, reformulación y construcción conjunta entre los participantes. Crook (1998).

Un buen proceso requiere que, en primer lugar, haya un espacio para que todos los miembros del grupo colaborativo lleguen a compartir, el mismo piso de conocimientos antes de desarrollarla y que tenga una experiencia individual que se conseguirá por medio de la perspectiva que el rol específico de cada uno exija después. Los estudiantes asumen roles desde múltiples perspectivas que representan diferentes puntos de vista de un mismo problema. Esos roles los convierten en especialistas desde la mirada del conocimiento situado (las habilidades y el conocimiento se aprenden en contextos reales y específicos donde ese conocimiento es aplicado en situaciones cotidianas). A partir de eso, el trabajo final del grupo colaborativo tendrá lugar cuando se llegue a la transformación de esa nueva información adquirida en algún producto que requiera de la aplicación efectiva de habilidades de pensamiento superior.

En conclusión el Aprendizaje Colaborativo se adquiere a través del empleo de métodos de trabajo grupal caracterizado por la interacción y el aporte de todos en la construcción del conocimiento.

4.7.2 El Taller

"*El taller es una nueva forma pedagógica que pretende lograr la integración de teoría y práctica a través de una instancia que llegue al estudiante con su futuro* *campo de acción y lo haga empezar a conocer su realidad objetiva. Es un proceso pedagógico en el cual estudiantes y docentes desafían en conjunto problemas específicos.*" Andder-Egg (1991; p. 8)

Ahora, como una aproximación para definir el taller desde el punto de vista pedagógico, se debe partir del cómo se ha utilizado su significado en el lenguaje corriente. "Taller es una palabra que sirve para indicar ***un lugar donde se trabaja, se elabora y se transforma algo para ser utilizado*****.** Aplicado a la pedagogía, el alcance es el mismo: se trata de una forma de enseñar y sobre todo de aprender, mediante la realización de esa acción que se lleva a cabo conjuntamente. Es un aprender haciendo en grupo, el aspecto sustancial del taller. Pero es un modo de hacer que tiene ciertas características que le son propias y se apoyan en determinados supuestos y principios" Andder-Egg (1991; p. 10).

En relación a los supuestos y principios pedagógicos del taller, se destacan ocho aspectos que son fundamentales para caracterizarlo en cuanto a modelo de enseñanza y aprendizaje[34].

a) ***Es un aprender haciendo***

Implica la integración entre la formación teórica y práctica a través de un proyecto de trabajo, que otorga prioridad a los objetivos mediante la utilización de una metodología de apropiación del saber. Donde los conocimientos teóricos, métodos, técnicas y habilidades se adquieren en un proceso de trabajo (haciendo algo) y no mediante la entrega de contenidos, que supere la clase magistral y del protagonismo del docente, a través de la acción/reflexión acerca de un trabajo realizado, en el que predomina el aprendizaje sobre la enseñanza, donde se deben asumir una actitud frente a las ciencias, los métodos y el conocimiento, que nunca se presentan como un conjunto de respuestas

[34] ANDER-EGG, Ezequiel (1991). El Taller, una alternativa de renovación pedagógica. Río de la Plata. Argentina: Ed. Magisterio. pp.11-14

definitivas, ni como algo acabado, intocable e incuestionable, sino como algo que se está haciendo, no ajeno al estudiante. El taller *es una herramienta productiva en la que se aprende haciendo, y todos deben aportar para resolver problemas concretos y para llevar a cabo determinadas tareas.*

b) ***Es una pedagogía de la pregunta contrapuesta a la pedagogía de la respuesta propia de la educación tradicional***

Al producirse conocimiento con el taller, se permite desarrollar una actitud científica, que lleva a detenerse frente a las cosas para tratar de desentrañarlas, problematizando, interrogando, buscando respuestas, sin instalarse nunca en certezas absolutas. Luego, que se ha aprendido a hacer preguntas (relevantes, sustanciales y apropiadas) y se ha aprendido a aprender, o lo que es lo mismo, a apropiarse del saber, resaltándose el *"reflejo investigador"*, el cual permite un aprender constante que lleva al desarrollo de una de las actividades intelectuales más importantes: *el arte de hacer preguntas.*

c) ***Es una metodología participativa***

Permite que el proceso de socialización-educación no se limite solo al ser competitivos sino que tenga elementos importantes para ser cooperativos, haciéndose necesaria la reeducación en el aprendizaje para la participación activa, en la que se deba aprender a desarrollar conductas, actitudes y comportamientos participativos. Es aprender participando, no en la teoría, pero si con una práctica que implica dos dimensiones principales: Desarrollar actitudes y comportamientos participativos y Formarse para saber participar.

d) ***Es un entrenamiento que tiene el trabajo interdisciplinario[35] y el enfoque sistémico***

---

[35] La noción de interdisciplinariedad, en general, es ampliamente utilizada en el sistema de taller. Con mucha frecuencia lo que se hace es un trabajo multidisciplinario o interprofesional. Si se utiliza el término con bastante elasticidad como lo hace Roy Walke, puede usarse sin dificultad esta noción para designar una de las características de esta modalidad pedagógica:

"*El taller tiende a la interdisciplinariedad, en cuanto es un esfuerzo por conocer y operar, asumiendo el carácter multifacético y complejo de toda realidad. Su abordaje tiene que ser necesariamente globalizante: la realidad nunca se presenta fragmentada de acuerdo a la clasificación de las ciencias o la división de las disciplinas académicas, sino que todo está interrelacionado"*, haciéndose necesario desarrollar un pensamiento sistémico.

e) ***La relación docente-estudiante queda establecida en la relación de una tarea común***

"*El taller exige definir los roles tanto del docente como del estudiante, donde el docente tiene una tarea de animación, estímulo, orientación, asesoría y asistencia técnica y el estudiante, se inserta en el proceso pedagógico como sujeto de su propio aprendizaje, con el apoyo teórico y metodológico de los docentes y de la bibliografía y documentación de consulta que las exigencias del taller vayan demandando".* De este modo se crean las condiciones pedagógicas y de organización para que los protagonistas del proceso educativo (docentes y estudiantes), puedan decidir acerca de la marcha de dicho proceso por el trabajo autónomo y el desarrollo de la responsabilidad, a través del contacto directo y sistemático con situaciones y problemas relacionados con el proyecto del taller.

f) ***Carácter globalizante e integrador de su práctica pedagógica***

La modalidad operativa del taller, crea un ámbito y las condiciones necesarias para desarrollar, no sólo la unidad del enseñar y el aprender, sino también para superar las disociaciones y dicotomías que suelen darse entre: la teoría y la práctica, el conocer y el hacer, la educación y la vida, y por último los procesos intelectuales y los procesos afectivos.

"Interdisciplinariedad es la interacción y cooperación entre dos o más disciplinas. Esta interacción y esta cooperación puede ir desde la simple comunicación de ideas hasta la integración mutua en un terreno estudiado".

g) **Implica *y exige de un trabajo grupal, y el uso de técnicas adecuadas***

Como se trata de un trabajo que se desarrolla en común, supone un trabajo grupal. El taller es un grupo social organizado para el aprendizaje y como todo grupo alcanza una mayor productividad y gratificación grupal si usa técnicas adecuadas. Si no se consigue constituir el grupo de aprendizaje, la tarea educativa puede llegar a frustrarse o sufrir deterioro. Pero este trabajo grupal exige por una parte aprender a pensar y a hacer en grupo.

h) ***Permite integrar en un solo proceso tres instancias como son la docencia, la investigación y la práctica***

En el taller estos tres aspectos se integran como parte del proceso global. Desde la experiencia y como exigencia de la práctica, se hace la reflexión teórica; desde la teoría se ilumina y orienta la práctica.

El taller es una situación natural de aprendizaje, del cual, las operaciones mentales y las relaciones interpersonales forman una parte constitutiva para incitar a la motivación, la curiosidad, el análisis, la síntesis, la comparación, la formulación de hipótesis y otras operaciones mentales son importantes en el proceso de aprendizaje.

Es importante conocer que el taller en el aula de clase permite:

- Integrar la teoría con la práctica en un mismo momento (tiempo) y en un mismo lugar (espacio) cuando se da el proceso de aprendizaje.
- Contribuir a una formación integral de los sujetos que participan en el taller: aprender a aprender, a hacer y ser.
- El aprendizaje se enriquece no solo por la presencia de los conocimientos científicos y técnicos que dan cita de acuerdo con el tema o problema, sino por la puesta en común de experiencias de todos los participantes.
- Vincula los aprendizajes a situaciones reales ya la solución de problemas y necesidades vigentes de los que participan en el taller.

- Fomenta la creatividad, iniciativa y originalidad de los participantes, generando también el espíritu investigativo, tan necesario en una concepción de educación permanente.

Cuando los estudiantes son enfrentados a desarrollar un taller se ven estimulados a dar su aporte personal, crítico y creativo, partiendo de su propia realidad y transformándose en sujetos creadores de su propia experiencia y superando así la posición o rol tradicional de simples receptores de la educación. Mediante el taller los estudiantes, se aproximan a la realidad descubriendo los problemas que en ellos se encuentran, a través de la reflexión inmediata o acción diferida. El taller es pues otro estilo posible de relación entre el docente y el estudiante, es un valioso instrumento de aprendizaje y de desarrollo.

4.7.3 Situaciones Problema

La implementación de las situaciones problema en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es una de las propuestas de la educación matemática, porque le permite al estudiante conocer, abstraer, argumentar, interpretar, analizar y darle sentido y significado a los conceptos matemáticos. Como dice Moreno y Waldegg "*La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva*", donde el estudiante interactúa con el conocimiento, pues le permite interactuar tanto con los conocimientos previos que tiene y con los conocimientos que le son nuevos para él. Igualmente, debe permitirle llegar a la interdisciplinariedad, pues la matemática está inmersa en todas las ciencias porque soporta la validez de fenómenos y situaciones que se presentan en ellas y en el diario vivir.

Retomando varios autores que han estudiado éste concepto, se tiene que para Orlando Mesa (1998) la situación problema es "*un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación* *comprensiva de algoritmos*" para Vigotsky una situación problema es la vía fundamental para la conceptualización, a través de la formación de conceptos, es un proceso creativo, no mecánico ni pasivo que propicia niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático, elementos básicos en la construcción de conceptos matemáticos", para Moreno y Waldegg la situación problema "*es el detonador de la actividad cognitiva*" y para Múnera y Obando (1998) es "*el contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos*".

Como se puede observar la situación problema es definida de diversas formas, pero persiguen el mismo fin, el cual es posibilitar la conceptualización y la comprensión del lenguaje matemático, esta posibilita el desarrollo del Pensamiento Matemático, eje primordial de la enseñanza y didáctica de la matemática. Las situaciones problema pueden ser retomadas como espacios donde es posible aplicar los procesos de matematización, deben diseñarse con alguna guía teórica que permita un tratamiento estructurado de las preguntas y las actividades.

En las situaciones problema se encuentran inmersos dos procesos: la exploración y la sistematización. El primero es definido como un proceso generado con base a las situaciones problema que contribuye a la construcción de nuevos conocimientos, ya que el estudiante debe acercarse a este proceso a través de la formulación de hipótesis, su validación y se es el caso, su formulación. La sistematización es un proceso que depende de la exploración, pues permite la organización y el registro de las características generales que estructuran el concepto que se estudia, independientemente de la forma como éste sea presentado. Es decir, los procesos de exploración y sistematización van articulados, porque como dicen Obando y Múnera, *"estos procesos generan cada* *vez más significados entre los conceptos que permiten que las relaciones entre estos no se agoten de inmediato*".

El documento "*las situaciones como estrategia para la conceptualización matemática"* Múnera y Obando, sugiere que en toda situación problema debe existir la actividad matemática del estudiante, su objetivo primordial será (…) "*hacer que alcance esquemas generales de pensamiento, es decir, que pueda ante determinada actividad, reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través de clases generales de problemas*".

Los espacios, los contextos y los ambientes no solo deben ser retomados como espacios físicos o tangibles, sino también considerándolos como interacciones que se producen en el medio en que está inmersa la comunidad educativa.

Por otro lado, Orlando Mesa, propone algunos componentes para el diseño de situaciones problema: los estados de complejidad conceptual, el cual estará conformado por varios elementos, entre los cuales están:
El espacio de validación: acepta o rechaza proposiciones y teorías.
El espacio heurístico: proceso de búsqueda y verificación de relaciones matemáticas. Se apoya en la comprensión de las preguntas que se originan en los problemas y los conocimientos que se posean frente al tema en cuestión.
El espacio de estructuración: se analizan las propiedades generales comunes a varios sistemas.
El espacio Explicativo: es donde se analizarán los significados que tienen las estructuras desde una o varias teorías más generales, en él, el trabajo con los estudiantes consiste en motivarlos y orientarlos para que analicen más allá de los datos inmediatos y busquen otras relaciones o confronten las respuestas obtenidas.

Leer el contexto en las situaciones problema es muy importante y significativo. El docente debe saber leer el lugar en el que se encuentra, pues debe conocer la población estudiantil con la que cuenta (su historia familiar, su historia de barrio, su lenguaje, su comportamiento). Realiza diagnósticos que le permitan saber los conocimientos previos que el estudiante tiene sobre los conceptos matemáticos, y con base a ellos tomar decisiones acertadas sobre cómo debe dar su clase, donde al elaborar situaciones problema, éstas le sean significativas al estudiante, donde la triada (profesor-saber-estudiante), no se interrumpa.

La generalización es un proceso demasiado complejo, la propuesta de los autores (Múnera y Obando), es que el docente debe proponer múltiples situaciones en variados contextos, con el fin de lograr que el estudiante pueda identificar las invariantes comunes a todas las situaciones, que son los elementos constitutivos estructurales del conocimiento que se desea enseñar, y entonces, pueda entrar a diferenciarlos de los elementos particulares de cada situación. La identificación de estas invariantes permite la constitución de esquemas generales de pensamiento.

5 ANÁLISIS

Presentación

La intención que se tenía con la aplicación de los diversos talleres realizados para los estudiantes de los grados 4º a 8º de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el grado cuarto del Colegio Mano Amiga, era desarrollar Pensamiento Matemático a través de actividades y estrategias metodológicas que facilitaran al estudiante desarrollar habilidades como: la comunicación (explicando los procesos utilizados, justificando las estrategias y procedimientos usados empleando sus propios argumentos para exponer sus ideas). De igual modo, se pretendía provocar procesos de Pensamiento Matemático, que permitieran evidenciar la utilización que los estudiantes tenían de los procesos generales propuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (resolución y planteamiento de problemas, razonamiento, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), para dar solución a las actividades que se proponían en los talleres; reflejándose de igual modo los recursos matemáticos con los que contaban los estudiantes (intuición, capacidad de observación, percepción, definiciones, conocimiento informal de los conceptos, procedimientos y concepciones sobre las reglas a aplicar).

Al realizar el análisis se pudo evidenciar que los estudiantes utilizaron diversas estrategias cognoscitivas como dibujar, utilizar material manipulable, el ensayo y el error, el uso de tablas y la búsqueda de patrones para dar solución a los talleres propuestos. Igualmente, se procuró que el estudiante tuviera la responsabilidad de supervisar y ejercer el control en la situación utilizando diversas estrategias para dar solución a las situaciones problemáticas que se le presentaron.

La propuesta de los diversos talleres elaborados y aplicados, giraron en torno a actividades que involucraron situaciones de variación y cambio en las que estuvieron inmersas las siguientes categorías: Patrones y Regularidades, Sistemas de Representación, Estructuras Aditivas y Multiplicativas que están inmersas en la categoría procesos algebraicos y proporcionalidad. Igualmente, se pretendió afianzar en los estudiantes habilidades como: Ver, decir y registrar que conllevaran a iniciar procesos de generalización.

Con relación al contexto se elaboraron situaciones problemas algunas desligadas de la vida cotidiana de la población estudiantil, pero de gran interés para los estudiantes.

Con respecto a los conocimientos básicos involucrados en los diversos talleres se dió prioridad a los pensamientos numérico y espacial mediados por el Pensamiento Variacional.

Las primeras secciones mostraron que los estudiantes no estaban acostumbrados a ser independientes en el desarrollo de actividades que no involucraran la participación del docente y su proceso de lecto-escritura era deficiente, y se escuchaban afirmaciones como las siguientes: "*No nos han ensañado eso*", ¿Qué hay qué hacer?, "*eso es muy difícil*". "*esto es nuevo para mí*". A consecuencia de ello, con frecuencia las actividades se tornaron guiadas, pues los estudiantes de las instituciones educativas estaban sujetos sólo a lo que el docente les transmita y para que en ellos se produjera un pensamiento autónomo, donde la actitud que tomen sea activa, independiente, investigativa, argumentativa, que abstraigan los conceptos y tengan un Pensamiento Matemático significativo es y debe ser un proceso continuo en donde se articule el saber matemático con las otras áreas del conocimiento.

5.1 Actividad Diagnóstico Inicial[36] dirigida a los grados: cuarto, quinto y sexto.

La situación problema que se presenta a continuación se basa en un "conjunto de torres". El estudiante a partir de la observación de las mismas, tiene que responder una serie de preguntas que les exige utilizar procedimientos y competencias matemáticas

La Actividad Diagnóstico Inicial aplicada a los estudiantes de los grados 4 a 6, fue una actividad basada en una situación problema enfocada en los ejes temáticos del Pensamiento Variacional y Sistemas Analíticos y Algebraicos, propuestos en el texto "Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas" (*patrones y regularidades, procesos algebraicos y funciones*). El propósito era el de reconocer los conocimientos que los estudiantes tenían sobre éste pensamiento.

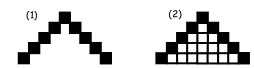
[36] Ver anexo: *Actividad Diagnóstico Inicial para los grados cuarto, quinto y sexto*

Para el análisis del mismo, se tuvieron en cuenta los referentes teóricos como ya se había dicho. De los Lineamientos, los conocimientos básicos para explicar, en más detalle los pensamientos directos e indirectos que intervinieron dentro de la propuesta. Así mismo se tomaron los procesos generales, para explicar detalladamente los procedimientos que tuvieron en cuenta los niños para dar solución a la situación problemática planteada, esta selección también nos permitió hablar de las dificultades o logros alcanzados al realizar la actividad, las estrategias utilizadas por los niños y darle carácter formal a la descripción de la actividad.

Los textos *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos en Matemáticas y Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico (Modulo 2)* dieron pie para la estructuración y clasificación de las categorías para el análisis que irían inscritas de la siguiente forma:

5.1.1 Sistematización del análisis de la Actividad Diagnóstico Inicial realizada en los grados 4º, 5º y 6º

Después de haber reflexionado con base en la información registrada en los diarios de campo y las actividades realizadas por los estudiantes, se llegan a conclusiones que dan cuenta de parte del desarrollo del pensamiento matemático de ellos. Éstas se presentan en el siguiente cuadro:

PREGUNTA	CATEGORIA	DESCRIPCIÓN	ANÁLISIS (LOGROS Y DIFICULTADES)	ESTRATEGÍAS
1. Dibuja la figura nº 9 y responde, ¿cuántos cuadros hay en esta figura?	Patrones y regularidades. Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Construir figuras a través de la observación y el conteo siguiendo una secuencia general para conocer la cantidad de cuadros necesarios en la figura pedida. Relacionar la posición de la figura con el número de cuadrados de la base en cada una de ellas, teniendo en cuenta las características de las figuras pares e impares.	LOGROS • A partir de la construcción de la figura N° 8 y siguiendo las características del arreglo de cuadritos, los estudiantes elaboraron la figura N° 9, hallando la cantidad de cuadros a través del conteo. • Realizaron con facilidad las adiciones para conocer el total de cuadros. • Establecen relaciones entre las características (posición, forma y color) de las figuras para continuar con la secuencia. DIFICULTADES • A los estudiantes se les dificultó comunicar sus ideas, lo que llevó a dar continuamente explicaciones sobre la actividad; estaban acostumbrados a las indicaciones del docente. • No tenían clara una estrategia para llegar a la construcción de la figura No. 9. • No se tenía presente toda la secuencia de los arreglos, solo se limitaban a la observación de la figura anterior para dibujar una torre. • Tuvieron problemas para contar el total d cuadritos que conformaban la figura. Sus respuestas eran incorrectas, debido al desorden en la elaboración de sus dibujos. • Confusión en la elaboración de las figuras por las estrategias utilizadas. • La mayor dificultad fue de orden geométrico, ya que no tenían en	• Realizan la construcción, iniciando por los cuadrados externos (ver 1) y luego hacen la división de los internos (ver 2).  Fig.9. Fig.9. • Construyen las figuras de tal manera que conserven el orden, de una a otra. Visualizan que sobre un cuadro debe ir solo otro, y así formar una torre. • Los niños afirman lo siguiente "Es necesario aumentarle un cuadrito más a cada fila de la figura anterior para que de la siguiente". "Las figuras 1, 3, 5 terminan en un cuadrito negro y las figuras 2, 4, 6 terminan en dos cuadritos negros", "las figuras van aumentando". • Empezaban desde el cuadrito de arriba, muchos otros estaban intentando construirla desde la base (de abajo hacia arriba) pero se notaba que no tenían la claridad suficiente de lo que estaban realizando. • La mayoría de los estudiantes coincidieron en que para construir "el otro piso" se debía tener presente que a los costados siempre sobraba un cuadrito. • Otro de los estudiantes con una mayor capacidad (lo pude

			cuenta que la figura era simétrica, y la realizaban sin tener presente este aspecto.	notar cuando resolvía la actividad) dijo que simplemente fue construyendo las otras filas restándole a la anterior dos cuadritos. • A la hora de que vieran cuales eran los cuadritos que iban de color negro, todos respondieron haber pintado lo de los extremos de la figura,
2. ¿Cuáles son los números que representan los cuadritos que están en la primera fila de cada figura (iniciando desde la primera)?	Procesos algebraicos. Sistemas de representación.	Interpretar y comprender la noción del número natural a partir de la observación de cada figura del arreglo, e identificar y diferenciar los conceptos de fila y de columna	LOGROS • Observaron la secuencia numérica que representa la 1ª fila de cada figura y afirmaron que los elementos de ella son números consecutivos. DIFICULTADES • No hay claridad acerca del conjunto al cual pertenecen los elementos de la secuencia numérica (números naturales). • Hubo confusión de parte de algunos estudiantes con los conceptos de fila y de columna.	• Hay un conteo de los cuadros en las figuras: • Cuentan los de la base en cada figura y resaltan que están aumentando en forma consecutiva (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...). Esta es una regularidad, pero ellos no mencionan este término. En esta parte, aplican el conocimiento que tienen a cerca de los números naturales (son consecutivos iniciando desde el 1). • Utilizan el método de ensayo y error para llegar a la solución. “son los números pares”, “son los números impares”: solamente un niño dijo con completa seguridad, “los números pertenecen al conjunto de los naturales”.
3. ¿Qué estrategias puedes utilizar para encontrar la cantidad de cuadritos negros y	Patrones y regularidades. Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Acercarse a una ley de formación a partir de la visualización, comunicación y registro de datos a partir de la secuencia dada. Es necesario que los estudiantes mencionen	LOGROS • Explican desde su propio lenguaje, las distintas estrategias que se pueden utilizar. por ejemplo:(contando, observando, mirando la posición de la figura, etc.) • Se observó en los estudiantes	• Utilizan el conteo y la observación, en unos caso todos los cuadros y en otros, primeros los negros y luego los blancos. Lo hacen figura por figura. • Los estudiantes afirmaban lo

blancos a partir de la Fig nº 3?		posibles formas que les permitieran saber el total de cuadros (negros y blancos) de las distintas figuras, y en lo posible explicarlas.	reconocimiento y utilización de los algoritmos de la suma y la resta. DIFICULTADES • No hubo comprensión del término estrategia. • No se acercaron a una estrategia es llevarla a la construcción de una ley de formación. • No observaron o interpretaron más allá del dibujo. Están acostumbrados a que las respuestas estén inmersas en el texto del taller o examen. • Cambian el sentido de la pregunta, sólo responden cuántos cuadros negros o blancos tiene cada figura.	siguiente: “Tuvimos que contar” “Restar dos cuadritos negros para que den los blancos” “Sumarle a cada fila un cuadrito más”.
4. ¿Cuántos cuadros negros y blancos hay en total en la Fig. nº 9?	Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Aplicación de las estructuras aditivas para hallar el total de cuadros negros y blancos de cierta figura.	LOGROS • Aplicaron adecuadamente el algoritmo de la adición. • Hubo un reconocimiento entre las partes y el todo. DIFICULTADES • Algunos estudiantes sólo hallaron el total de cuadros de la figura pedida. • Por dar una respuesta apresurada y la mala construcción de la figura nº 9, algunos niños presentaron cantidades de cuadros (negros y blancos) que no concuerdan con dicha figura. • Dejan de lado la relación entre la figura y los datos numéricos necesarios para responder la pregunta. • Esta pregunta la confundieron con la número 1. Los estudiantes se apresuraban por responder que en total hay 25 cuadros, pero no	• Los estudiantes separan los datos para los cuadros negros, para los blancos y para el total de cuadros de la figura, así: Negros: 9. Blancos: 16. Total: 25. • Usaron el conteo para llegar a la respuesta de la actividad, sus respuestas por lo general van enfocadas desde lo aritmético y el conteo.

			comprendían que era el total de cuadros negros y el total de los blancos, solo algunos se percataron de eso.	
5. completa la tabla	Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Registrar y observar la información obtenida a partir del arreglo de las figuras de la pregunta 1, utilizando las estructuras aditivas para dicho propósito.	LOGROS • Aplican nociones básicas de la estructura aditiva cuando es necesario que registre una parte o el total de cuadros de cada una de las figuras. • En la totalidad de los grupos coincidían en que la pregunta que mas dificultad les dio fue elaborar la tabla. Pero cuando empezamos a solucionarla, las opiniones cambiaron, ya las palabras de los estudiantes eran las siguientes: "profesor eso era así de fácil" "eso era lo que había que hacer" y no tuvieron ningún inconveniente en acabar de completar la tabla. DIFICULTADES • En las columnas tres, cuatro, cinco y seis hubo errores en la sistematización de la información debido a los procedimientos utilizados para completar la tabla, cuya causa es la falta de una observación permanente entre las figuras y la tabla, realizaron una lectura vertical de la información en cada columna y no logran establecer relaciones que puedan establecerse entre ellos. • No se relacionan los datos de la columna 4 y 5 para llenar la columna 6, o sea el total de cuadros de cada figura. • A los estudiantes les da mucha	• La mayoría de estudiantes, como veían que en algunas columnas los datos a registrar estaban presentando una secuencia, se arriesgaban a continuar con dicha secuencia, sin tener presente algún cambio que se presentara en el camino. • La tabla se completo en el tablero, con la participación de todos los estudiantes. Trabajo Cooperativo. • La estrategia utilizada para el registro de los datos fue observar la figura pedida y utilizar el algoritmo de la suma de acuerdo a los cuadros pedidos.

			dificultad interpretar una tabla y relacionar su contenido con cada una de las preguntas que la conforman. • En la tabla los estudiantes confundieron el número de cuadrados en la primera fila con la figura número uno, y el número de cuadrados de la segunda fila con la figura número dos.	
6. ¿Qué puedes decir de los datos obtenidos en las columnas 2-3 y de los obtenidos en las columnas 4-6?	Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Observación e interpretación de la información registrada para resolver similitudes o diferencias.	LOGROS • Algunos de los niños observaron la repetición de los datos en las columnas a comparar, a la vez que encontraron un orden en los datos registrados en las columnas, por lo que eran números conocidos por ellos. DIFICULTADES • No logran explicar lo que pasa con los datos las columnas a comparar por falta de interpretación de la información. • No se hace visible el lenguaje matemático que ayude a establecer relaciones aditivas.	• Cada uno de los niños observa y luego escribe en sus propias palabras lo observado.
7. ¿Con cuáles figuras puedes formar cuadrados, moviendo uno o varios cuadritos? Y ¿Cuántos cuadritos hay en cada figura?	Patrones y regularidades. Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Trasladar una o varias piezas, para construir una nueva figura y a partir de dicha transformación geométrica, reconocer que la cantidad de cuadrados se conservan. Reconocer el manejo que tiene el estudiante de la noción de potencia en el momento de construir el cuadrado.	LOGRO • Reconocen las características de un cuadrado. • La mayoría de los niños logran descubrir que las figuras que forman un cuadrado son la 1ª, 3ª, 5ª y 7ª. • La gran mayoría de los estudiantes formaban otra serie de figuras diferentes; entre ellas estaban los rombos. DIFICULTADES • Varios de los estudiantes no tienen	• Realizan figura por figura para descubrir cuáles forman cuadrados u otras figuras, en este caso rectángulos. • Usaron material concreto para realizar la construcción de las figuras geométricas. • La mayoría de los grupos las dibujaban de nuevo en otras hojas con el fin de buscarle la forma y lograr formar los cuadrados

			claridad suficiente con respecto a los conceptos matemáticos de rectángulo y cuadrado, por lo mismo, no establecen las diferencias entre las figuras que forman o no cuadrados (decir que las figuras pares forman rectángulos y los impares cuadrados). • No hay una relación entre la noción de potencia y el cuadrado.	
8. Un cuadrito representa una unidad de área, ¿cuántas unidades de área contiene la figura nº 10?	Patrones y regularidades. Sistemas de representación. Procesos algebraicos.	Construir una figura conservando una secuencia dada y por medio del conteo o la proporcionalidad simple llegar a la cantidad de unidades de área que ella contiene. Los estudiantes deben manejar el concepto matemático de área, para de esta manera encontrar las unidades de área que contiene la figura 10.	LOGROS • Realizan la figura para aplicar el conteo y llegar al total de cuadros de ella. DIFICULTAD • La no comprensión del concepto de unidad de área, los lleva a recurrir al conteo para decir cuántos cuadritos hay en la figura. No dicen que dicha figura tiene determinada cantidad de unidades de área.	• Recurrir al conteo. • Explicación del término unidad de área y formulación de una nueva pregunta. ¿Cuántos cuadritos tiene en total la figura N° 10?, los estudiantes dijeron que para dar respuesta a esa pregunta era necesario elaborar dicha figura y luego, utilizar el conteo para saber cuántos cuadritos tenia la figura en mención. Después de responder a la misma, se les indico que cada uno de esos cuadrados correspondía a una unidad y que la totalidad, es decir, 30 cuadrados hacían referencia al área de dicha figura, porque un cuadradito cabe exactamente 30 veces en la figura N° 10
9. ¿Qué fracción representa los cuadritos negros de la figura nº 7?	Patrones y regularidades. Sistemas de representación.	Reconoce la fracción como una relación parte todo en una representación icónica.	LOGRO • Facilidad para identificar la fracción pedida. • Reconocimiento de la fracción como partidor, describiendo cual parte es el numerador y cual el denominador. • Observación directa entre la gráfica	La estrategia utilizada por los estudiantes es identificar gráficamente una parte del todo de la figura y luego representarlo numéricamente en una fracción, identificando en la figura nº 7 lo que hace parte del numerador y el denominador.

			y la fracción pedida, debido al trabajo previo que habrían realizado con el docente. DIFICULTAD • Los estudiantes del colegio Mano Amiga no hablan de fracción, por lo que no establecen una relación entre la parte y el todo, por falta de trabajo del contenido en la clase. • Los estudiantes del grado 5º de la institución Educativa Héctor Abad Gómez no comprendían a que hacía referencia la palabra fracción, pues dentro de sus conceptos previos no era familiar el término. • Hubo confusión con los partes de una fracción: numerador y denominador. Al preguntarles en un fraccionario cual era el denominador muchos respondieron tratando de adivinar: "el de abajo no mentiras el de arriba", por esta razón en algunas respuestas el fraccionario lo escribieron al revés. • No tienen en cuenta los datos obtenidos en la tabla como un apoyo para resolver la pregunta.	Otros por el contrario pedían explicación acerca de lo que era una fracción y la manera del cómo se podría representar, ya que el término no les era familiar.
10. ¿Cuántos triángulos son necesarios en la Fig.1 para equilibrar la balanza? Explica por escrito cómo hiciste para hallar la respuesta a la pregunta	Patrones y regularidades. Sistemas de representación. Análisis de funciones.	A partir de la representación icónica, observación e interpretación de una figura los estudiantes deberán aplicar el conteo y la proporcionalidad simple para llegar a la solución a la pregunta. hallar equivalencias entre los triángulos y los cuadrados	LOGRO ▪ Interpretan la igualdad de la figura nº 2, utilizando la descomposición del cuadrado. ▪ Establecen una comparación directa entre las dos figuras reconociendo la importancia de la información que tiene la figura nº 2. DIFICULTAD • A pesar que hay una buena aplicación del algoritmo de la	▪ Algunos niños realizan la división de todos los cuadros del arreglo de cuadritos en la figura nº 1, para contarlos y responder la pregunta. ▪ La mayoría de niños realiza la multiplicación entre 12 y 2, dándose cuenta que la respuesta es 24 triángulos. ▪ Dibujaron la cantidad de triángulos que correspondían a 12 cuadrados, hacían

anterior.			multiplicación, se presenta dificultad cuando deben explicar el por qué ese producto y no otro.	inferencias según la figura suministrada, establecían comparaciones.

5.1.2 Puntos en común de los análisis realizados a la Actividad Diagnostica Inicial de los grados cuarto, quinto y sexto.

Como consecuencia a la lectura realizada a la sistematización anterior, se resaltan los siguientes puntos en común relacionados con las habilidades de ver, decir y registrar, que conllevan a evidenciar el proceso de generalización que tienen los estudiantes.

PREGUNTA	PUNTOS EN COMÚN
1	• Hubo buena comprensión y análisis de parte de los estudiantes para observar que las figuras impares (1, 3, 5) terminan en un cuadrado en su cúspide, y las pares con dos cuadrados. • Se evidencia el orden, la organización para la construcción de las figuras (para formar la torre cuadro por cuadro). • En el grado cuarto y quinto los estudiantes realizaban la construcción a partir de los cuadros externos, para luego hacer la división de los internos; mientras que en el grado sexto la figura la construyeron iniciando desde su base. • La construcción de la Fig. 9, presenta dificultades porque los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de preguntas • Al inicio de la actividad no se tenía presente toda la secuencia de los arreglos, solo se limitaban a la observación de la figura anterior para dibujar la torre. • Realizan adecuadamente el conteo de los cuadros para dar el total de la Fig. 9.
2	• Se desconoce el conjunto al cual pertenecen los elementos de la secuencia numérica (números naturales) • Hay confusión con los conceptos de fila y de columna, tienden a confundirlos. • Utilizan el método de ensayo y error para tratar de llegar a la solución, es decir al preguntarles por el nombre que recibe el conjunto numérico, la respuesta de los estudiantes fueron: “números primos, números pares, números impares” solo uno acertó tanto en los grados 4 y 5 como en el grado sexto respondiendo “son números naturales”.

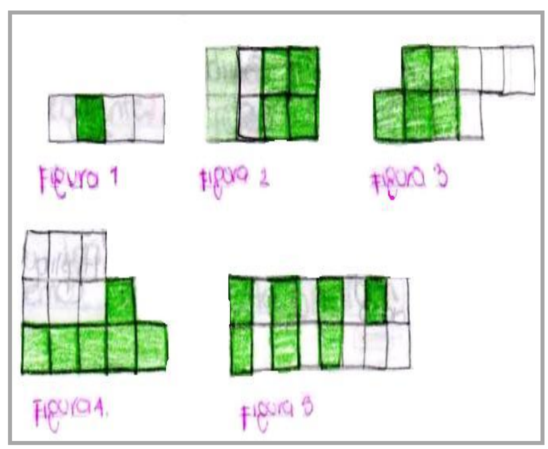
	• Hay similitud en las respuestas de algunos estudiantes de los tres grados para afirmar que esos números son “1, 2, 3, 4, 5…” pero no son capaces de identificar el conjunto.
3	• Hubo confusión y poca comprensión con el término estrategia. • La estrategia utilizada para encontrar la cantidad pedida de cuadros fue la del conteo. • Se observo en los estudiantes el reconocimiento y utilización de los algoritmos de la suma y la resta. • Respuestas de los estudiantes al preguntar por sus estrategias: “tuvimos que contar” “restar” “sumar”.
4	• Utilizan adecuadamente el algoritmo de la suma. • Los estudiantes se apresuraban por responder que en total hay 25 cuadros, no comprendían que era el total de cuadros negros y el total de cuadros blancos. • Utilizan el conteo para llegar a la respuesta de la actividad.
5	• La tabla se realizo en el tablero con la participación de los estudiantes, con el fin de motivar la participación la interacción y el trabajo cooperativo. • Una de las estrategias utilizadas para el registro de los datos fue la observación de la figura pedida y utilización del algoritmo de la suma.
7	• En los grados cuarto y quinto reconocen las características de un cuadrado, mientras que en el grado sexto no hay claridad con los conceptos matemáticos de rectángulo y cuadrado. • Hay interacción de parte de los estudiantes con cada figura para ver cuál de ellas forman cuadrados 8hacen la figura para dar la respuesta).
8	• No hay claridad con el concepto UNIDAD DE ÁREA. • Realizan la figura pedida para aplicar el conteo y llegar al total de cuadros de ella. • La estrategia utilizada es la del conteo.
9	• Presentan dificultades en la comprensión del concepto de fracción. • No tiene en cuenta los datos obtenidos en la tabla del punto número 5 como apoyo para resolver la pregunta. • Luego de las aclaraciones pertinentes hubo facilidad para identificar la fracción pedida.
10	• Una de las estrategias utilizadas por los estudiantes fue multiplicar 12 y 2 dando cuenta de la respuesta 24. • Contar cada uno de los cuadros de dos en dos.

5.2 Actividad Diagnóstico Inicial dirigida al grado séptimo

Los conocimientos básicos presentes en esta actividad fueron: el pensamiento numérico y espacial mediados por el Pensamiento Variacional, este taller diagnóstico tuvo un nivel de complejidad y de exigencia más alto, debido a que era dirigido a un grado superior y además estuvo basado en los estándares básicos de calidad propuestos para el grado 7º.

5.2.1 Análisis de la Actividad Diagnóstico Inicial.

En este primer taller, se pudo evidenciar que los estudiantes no tenían una concepción clara acerca de términos muy "familiares" para ellos, porque confunden posición y forma (punto número dos, actividad grado séptimo), como podemos observar; en esta actividad, la concepción de posición que tiene la estudiante no es clara para ello, cree que es cambiar de forma la figura propuesta en el numeral número 1, como se evidencia en los siguientes ejemplos:

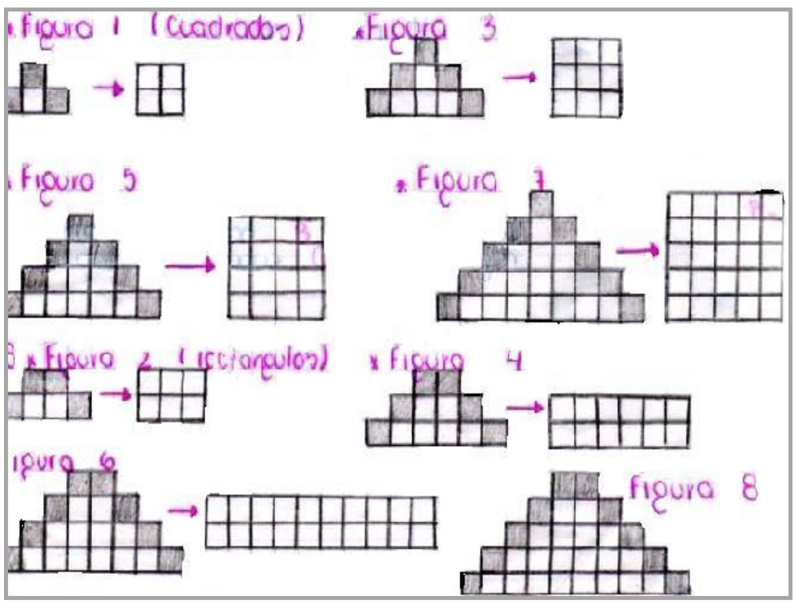


En los primeros años escolares de la básica secundaria se debe realizar un "*análisis cualitativo de las gráficas*"[37], en la actividad diagnóstico se propuso

[37] MEN (2004) Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. p. 12.

situaciones que involucraran esta clase de propuestas, en la construcción de figuras los estudiantes utilizaron la observación y el conteo para dar cuenta de las características físicas de las figuras, escuchando afirmaciones como: “Es necesario aumentarle un cuadrito más a la figura anterior”. “Las figuras 1, 3, 5 terminan en un cuadrito negro y las figuras 2, 4, 6 terminan en dos cuadritos negros”; “las figuras impares se construyen con cuadritos impares y los pares con cuadritos pares”

En relación con la pregunta número 8, que propone realizar transformaciones con las figuras iniciales para formar cuadrados o rectángulos, una de las estudiantes plantea la siguiente solución. (La siguiente evidencia ejemplifica el trabajo de la estudiante Sirley, del grado 7° en la Actividad Diagnóstico Inicial)



“En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades y patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, en una primera instancia, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la

transformación…"[38]*.* Los estudiantes con esta clase de situaciones "descubren" que permanece invariante en la figura y que varía, esta pregunta fue realizada al grupo de estudiantes; uno de ellos respondió "lo que no cambia en la figura es la forma aunque se hace más grande a medida que cambia la posición y lo que cambia es la cantidad de cuadros que deben construir tanto blancos como negros para conformar la figura", se invita a los estudiantes a que utilicen sistemas de representación como el icónico y el verbal para que argumenten e interpreten su trabajo.

Nuestra propuesta de intervención propuso a los estudiantes "la organización de la variación en tablas" MEN (1998). Pues, "puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del Pensamiento Variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas". MEN (1998), el ejercicio 5 que consistía en completar una tabla de acuerdo a una información dada, permitió evidenciar la poca aprehensión que los estudiantes del grado 7º tienen sobre los conceptos de perímetro y área, pues preguntaban *"¿qué es perímetro", "qué es área?"*, "nosotros no sabemos eso", estas preguntas que ellos se hicieron conllevan a reflexionar sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes y se infiere que éstos no utilizan, ni relacionan todos aquellos conocimientos previos con los nuevos; que su proceso de aprendizaje ha sido memorístico y desarticulado; causando poca apropiación de los conceptos matemáticos; lo cual no les permite analizar, organizar, resolver, elaborar procedimientos y modelar matemáticamente situaciones problemas.

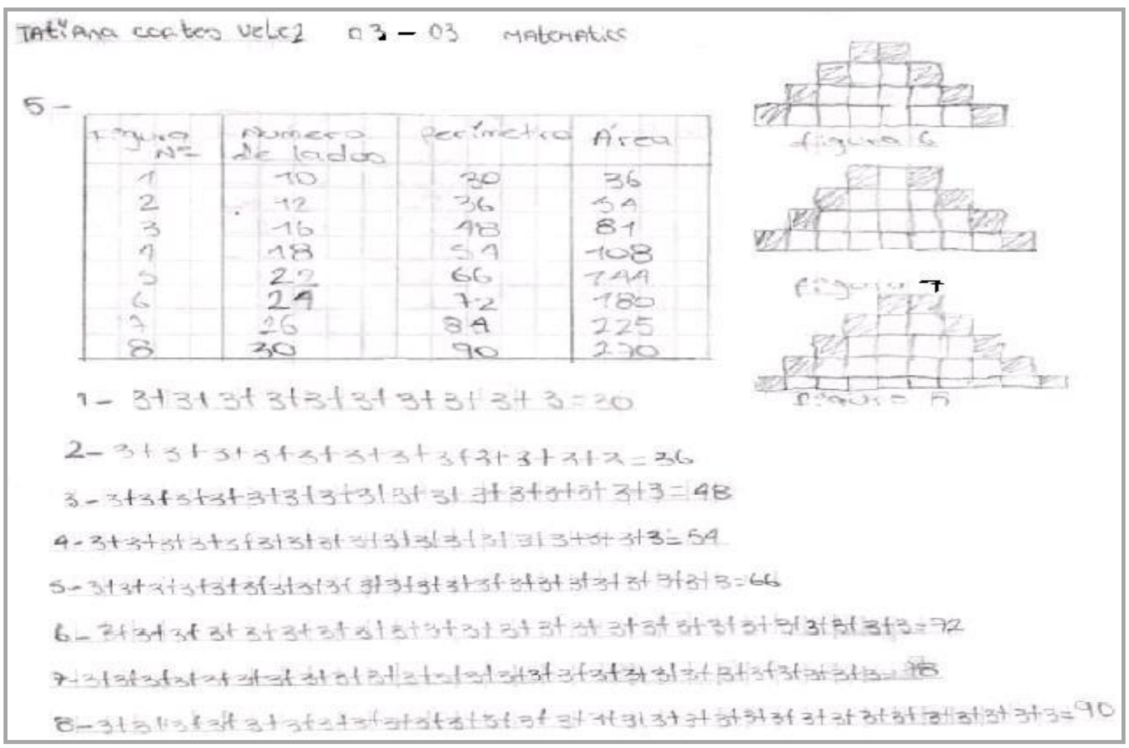
Después de recordar los conceptos de perímetro y área con base a ejemplos, los estudiantes completaron la tabla, utilizando el conteo para saber cuántos lados tenía la figura, luego para hallar el perímetro de cada figura, sumaron la cantidad de magnitud las veces que indicara el número de lados de cada figura, y para

---

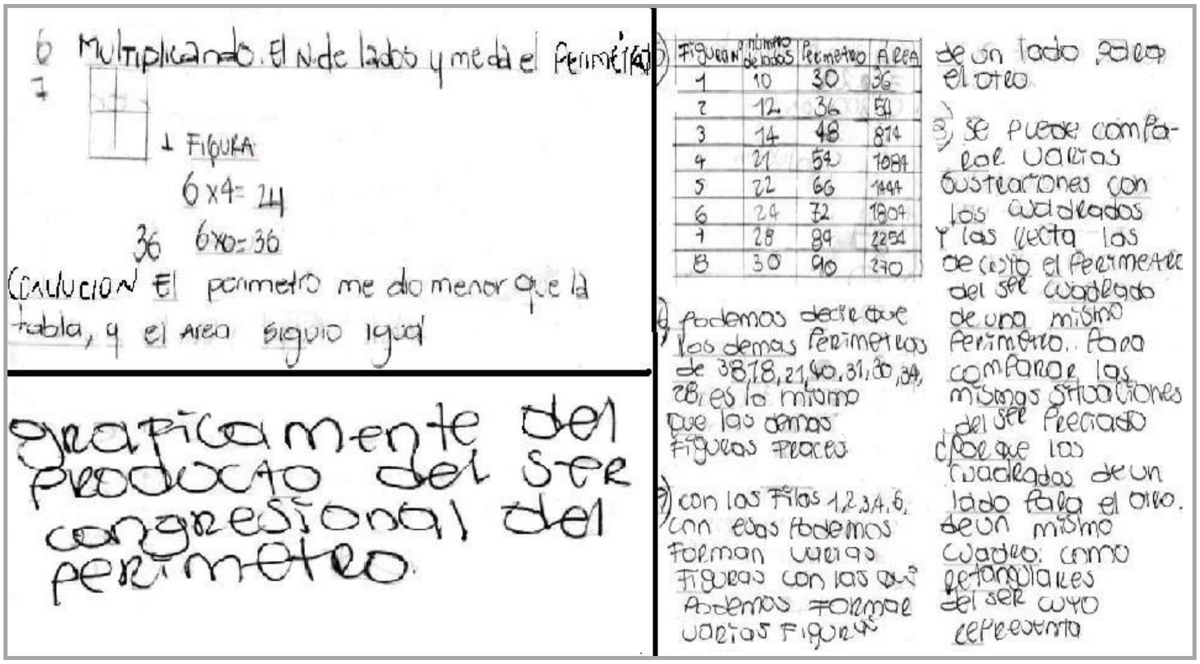
[38] Ibíd., p. 15.

hallar el área de cada figura, primero hallaron el área de uno de los cuadritos y luego contaron cuantos cuadritos conformaba la figura y por último la mayoría de los estudiantes sumaron el área de uno de los cuadritos las veces que indicara el total de cuadritos que conformara la figura.

La siguiente evidencia muestra algunas estrategias utilizadas por la estudiante Tatiana Cortes V, del grado 7°.



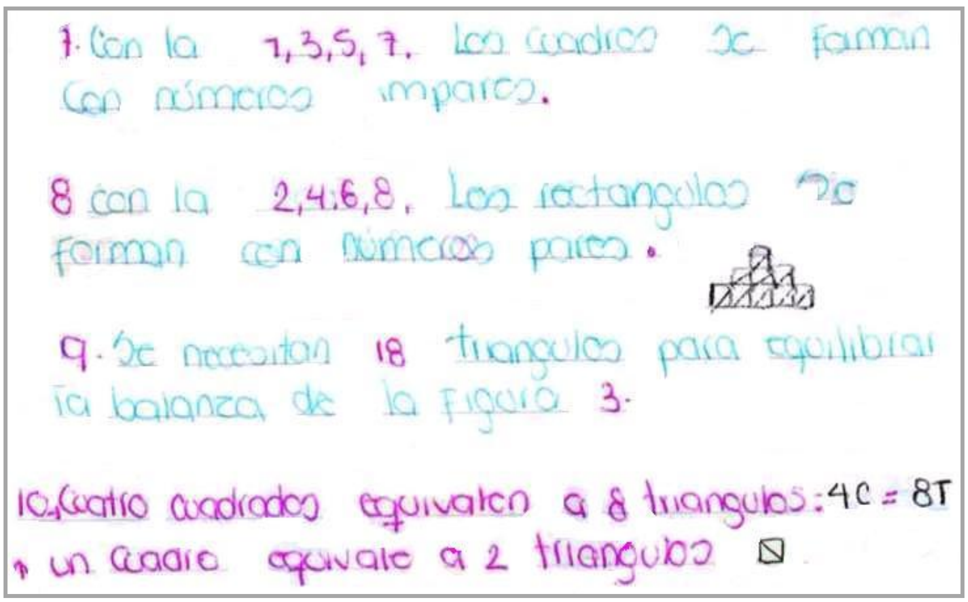
La pregunta número 6, hace referencia a la interpretación de una tabla, tenía como objetivo conocer el nivel de argumentación que los estudiantes tenían sobre las relaciones que podían darse, en este caso entre el número de lados y el perímetro de cada una de las figuras; igualmente, conocer la aprehensión en este caso particular de las estructuras aditivas y multiplicativas. Las respuestas que los estudiantes dieron a esta pregunta y a las tres siguientes permiten evidenciar la poca familiarización que ellos tienen con preguntas donde tengan que argumentar e interpretar; pues la mayoría de ellos dieron respuestas incoherentes y fuera de lugar. A continuación se transcriben algunas respuestas dadas por los estudiantes.



Esta clase de respuestas reflejan el razonamiento matemático que los estudiantes tienen (lógico, inductivo, deductivo), la capacidad de “comunicar” y comprender lo que se les está preguntando, también esta clase de situaciones reflejan el “nivel” de conocimiento y Pensamiento Matemático que ellos tienen.

Se puede evidenciar en las actividades de los estudiantes que éstos presentan falencias en las competencias matemáticas; pues entre otras no realizaban comparaciones, clasificaciones, no ordenaban sus ideas antes de escribir, por lo tanto, sus argumentos eran pobres, esto se refleja en el discurso tanto oral como escrito utilizado por ellos. Los procedimientos que utilizaron para dar solución a las situaciones propuestas son ambiguos. Los estudiantes son muy dependientes del docente pues, no tienen independencia en la solución de los ejercicios porque pretenden que el docente les dé la solución a las situaciones propuestas, sin que ellos hagan un esfuerzo por crear estrategias para solucionarlas. Aunque se rescata el trabajo de algunos estudiantes quienes son autónomos en la realización de las situaciones propuestas.

A continuación se muestra la forma como Sirley utiliza la generalización verbal y la generalización formal para dar solución a las situaciones propuestas, ella relaciona el sistema de representación gráfico con el sistema de representación escrita, además realiza equivalencias entre la gráfica y la ecuación que construye, la cual es válida para dar solución a la última pregunta de la actividad diagnóstico.


7. Con la 1,3,5,7. los cuadros se forman con números impares.

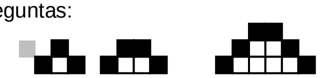
8 con la 2,4,6,8. Los rectangulos se forman con números pares.

9. Se necesitan 18 triangulos para equilibrar la balanza de la figura 3.

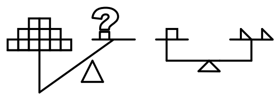
10. Cuatro cuadrados equivalen a 8 triangulos: 4C = 8T
, un cuadro equivale a 2 triangulos

5.2.2 Sistematización del análisis de la Actividad Diagnóstico Inicial

Para analizar la Actividad Diagnóstico Inicial en el grado 7° se utilizaron los mismos ítems que se tuvieron en cuenta para realizar la sistematización de la Actividad Diagnóstico Inicial para los grados 4°, 5° y 6°, como se muestra a continuación.

<table>
<tr><th>CATEGORÍA</th><th>PREGUNTA</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>LOGROS O DIFICULTADES</th><th>ESTRATEGIAS</th></tr>
<tr><td>Patrones y Regularidades y Sistemas de Representación</td><td>Observe la siguiente secuencia de figuras y responde las siguientes preguntas:

Representa gráficamente la posición de la figura número 3</td><td rowspan="4">Estas situaciones invitan al estudiante a que observe y construya figuras que cumplan con ciertas condiciones que debe “descubrir” y comprender a través de otras figuras dadas.</td><td rowspan="4">“En un primer momento el análisis cualitativo de Las gráficas son mucho más pertinentes que el trazado de gráficas a partir de fórmulas o tablas” (Pág. 15, Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales).

Los estudiantes “descubren” que permanece invariante y que varía en la figura.
Utilizan el razonamiento, la comunicación y procedimientos que conllevan a la realización de la propuesta.</td><td rowspan="4">La observación. Ensayo y error
El conteo.
Representaciones icónicas.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de Representaciones (icónicas)</td><td>¿De qué otra manera podemos representar las figuras de cada posición? Represéntalas gráficamente.</td></tr>
<tr><td>Patrones y Regularidades</td><td>¿Cuántos cuadritos deben haber en la figura de la posición 10?</td></tr>
<tr><td>Patrones y Regularidades</td><td>¿Cuántos cuadrados negros y blancos encuentras en la figura número 08?</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidad (estructuras aditivas y multiplicativas)</td><td>Si cada uno de los lados de cada cuadrado que conforma una figura mide 3 unidades (3u). Realiza las operaciones que sean necesarias para llenar la siguiente tabla:<table><tr><th>Fig. N</th><th>N. de lados</th><th>Perímet ro</th><th>Área</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td rowspan="3">El estudiante debía completar una tabla de acuerdo a una información dada, donde estaba inmerso no sólo el Pensamiento Variacional sino también el pensamiento espacial y pensamiento numérico, y con base a ésta, debería dar respuesta a las siguientes tres preguntas que daban cuenta explícitamente, de las competencias argumentativa, interpretativa y propositiva que él poseía.</td><td rowspan="3">Evidencia la poca aprehensión que los estudiantes del grado 7º tienen sobre los conceptos de perímetro y área.
Aprendizaje memorístico y desarticulado.
No relacionan conocimientos previos con los nuevos.
La mayoría de los estudiantes utilizan la estructura aditiva para dar cuenta de la información que deben completar en la tabla.
Los argumentos que utiliza la mayoría de los estudiantes carecen de estructura.
“Descubren” cual magnitud se conserva y cual varía independiente de la transformación que realicen a la figura inicialmente propuesta.</td><td rowspan="3">El conteo para completar la tabla.
Sus enunciados verbales y escritos son “vagos”
Algunos estudiantes observan, y realizan afirmaciones como: “El perímetro es mayor que el número de lados”
El ensayo y error para construir las figuras.
La comparación entre el perímetro y área de las figuras anteriores con las nuevas.
Razonamiento inductivo</td></tr>
<tr><td>Sistemas de Representación</td><td>Con la información suministrada en la tabla responde las siguientes preguntas ¿Qué podemos decir del perímetro respecto al número de lados y al contrario?</td></tr>
<tr><td>Sistemas de Representación</td><td>Con cuáles figuras puedes formar cuadrados, moviendo uno o varios cuadritos (Representa gráficamente la situación). Después compara los perímetros y las áreas de las figuras que hizo con las de la tabla. ¿Qué podemos concluir de esta situación?</td></tr>
</table>

Sistemas de Representación.	 ¿Cuántos triángulos son necesarios en la figura 3 para equilibrar la balanza?	Representar y analizar una ecuación con base a una figura e interpretar y comprender esta situación a través de la comunicación tanto oral como escrita.	"No utilizan el lenguaje matemático. En sus conclusiones se percibe que han generalizado a partir de los ejemplos particulares que se le proponen, pues afirma uno de los estudiantes "si dos triángulos son necesarios para construir un cuadrado, pues multiplicamos el número de cuadritos por dos, ya que dos triángulos forman un cuadradito"	El estudiante utilizó el razonamiento inductivo para solucionar las preguntas 9 y 10.
Sistemas de Representación	Utilizar el lenguaje matemático para simbolizar la siguiente proposición: "Cuatro cuadrados equivalen a ocho triángulos" y con la ecuación que halles resuelve: "¿Un cuadrado a cuántos triángulos equivale?"	Crear en los estudiantes la posibilidad de elaborar modelos que describan la relación entre un cuadrado y dos triángulos.		

5.3 Análisis[39] por Categorías del proceso realizado en la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga.

5.3.1 Análisis de la Categoría “Patrones y Regularidades”

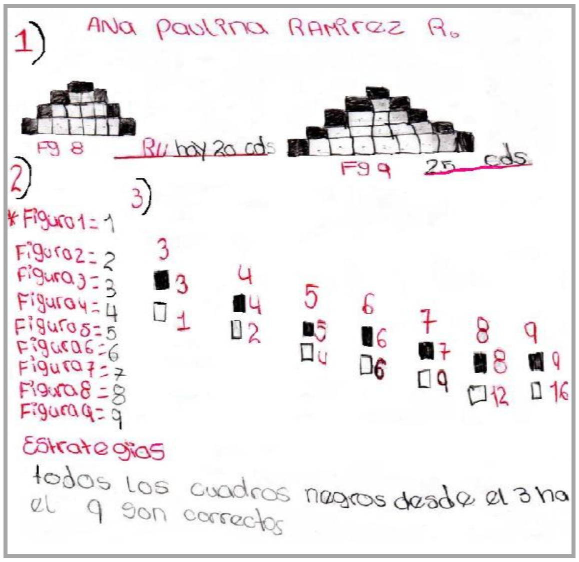
La matemática como ciencia de los patrones, es una forma de mirar el mundo, tanto físico, psicológico y sociológico que habitamos como el mundo inerte de nuestra mente y el pensamiento. La dependencia matemática de la notación abstracta que la caracteriza actualmente como expresiones algebraicas, formulas complicadas de ver, y figuras geométricas son un reflejo de los patrones abstractos que estudia. Se justifica así la importancia de trabajar patrones en la enseñanza. Sobre todo en la enseñanza de las matemáticas en sus distintos niveles. Por ejemplo reconocer colecciones de objetos que presenten alguna semejanza, reconocer y ordenando secuencias de objetos de acuerdo con alguna regularidad pueden ser tareas para los más pequeños. Resolver problemas en los que la estrategia de solución sea crear o reconocer un patrón, partiendo de casos particulares y organizar los datos sistemáticamente, puede ser una tarea a realizar en niveles más avanzados” Castro E. (2005).

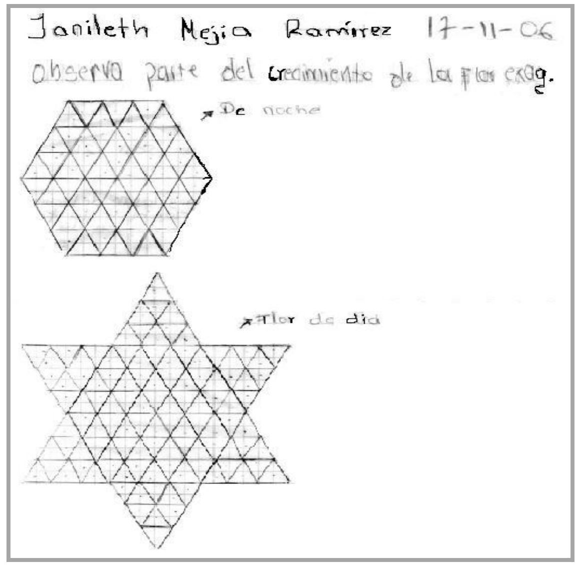
En los talleres propuestos, se tuvo como intención que los estudiantes reconocieran, interpretaran, comunicaran, construyeran e investigaran sobre patrones y regularidades, donde se discutiera el razonamiento lógico que ellos utilizaron para argumentar las respuestas de las preguntas que hacían alusión a la descripción, relación, características, operaciones que pueden existir entre las figuras que se le presentaron, donde con base en los patrones [40] y regularidades inmersas en ellas, conllevaron a los estudiantes a construir conceptos matemáticos.

[39] En el análisis de cada categoría no se usó información del grado octavo. Ésta se presentará en un trabajo anexo.

[40] Los Patrones pueden ser de conteo, de razonamiento, de comunicación, patrones de figuras, patrones de posición

Con los diversos talleres se pretendía que el estudiante expresará gráficamente el patrón que se le sugería, para ello se realizaron preguntas como: “Dibujar la figura número 9 y responder ¿cuántos cuadritos hay en esta figura?”[41], o “Representa o (dibuja) la flor en la tercera noche y cuarto día”[42]. Los estudiantes propusieron las siguientes soluciones:



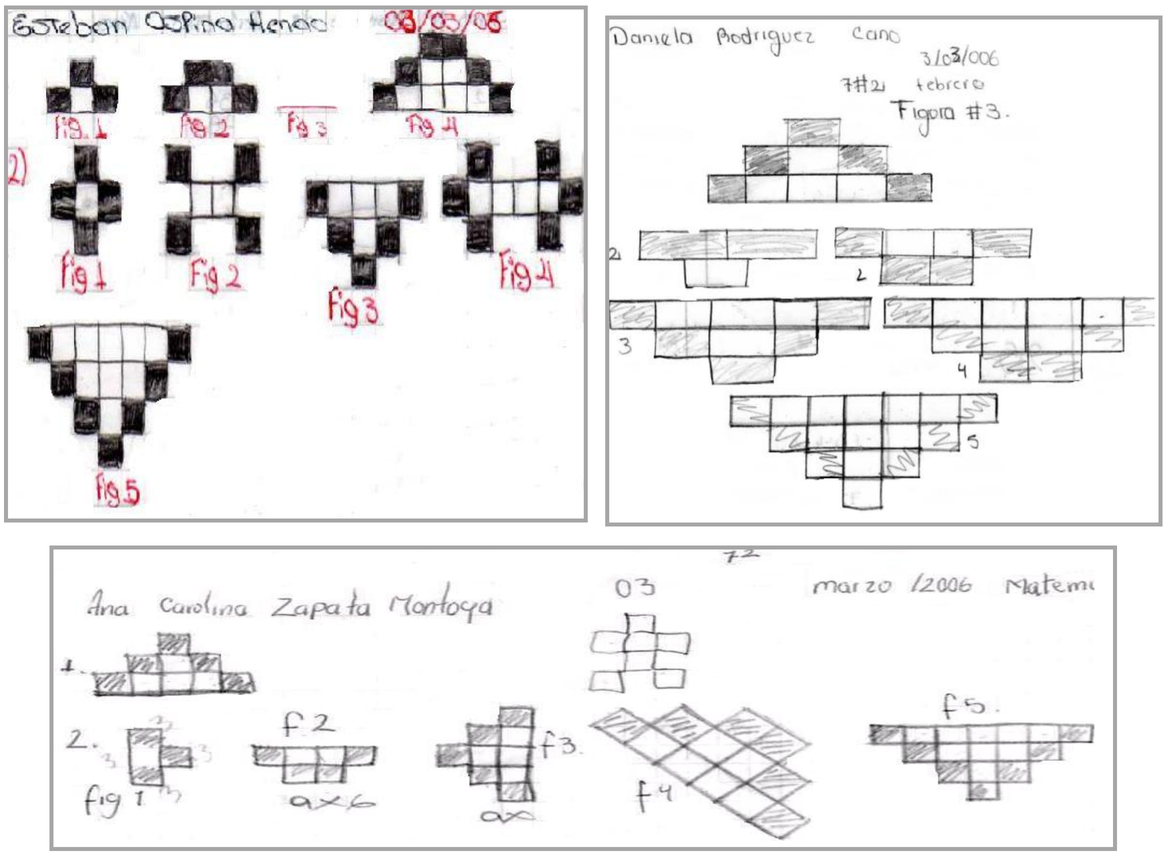


Evidencias de las estudiantes Ana Paulina Ramírez y Janileth Mejía, (grado 5º-2)
Institución Educativa Héctor Abad Gómez

También se realizaron propuestas donde el estudiante tenía que cambiarle la posición a las figuras, en las soluciones como de la estudiante Ana Carolina Zapata, se pudo constatar las diferentes maneras que tienen los estudiantes de abstraer las figuras, y de acuerdo a Mason (1999) esta abstracción hace parte de la habilidad del “ver”. En otros estudiantes la abstracción que hacen de la figura, referente a su posición, solamente tiene una forma, para otros los cambios de posición y de forma son iguales como es el caso del estudiante Esteban Ospina Henao, y algunos estudiantes, el cambiar de posición es cambiar de forma,

[41] Esta pregunta corresponde a la Actividad Diagnóstico Inicial, grado 4º a 6º.
[42] Esta pregunta corresponde a la Actividad Final aplicada a los grados en los que se intervinieron.

aspecto que se evidencia en el trabajo realizado por la estudiante Daniela Rodríguez. Las siguientes evidencias dan cuenta de lo anteriormente dicho.



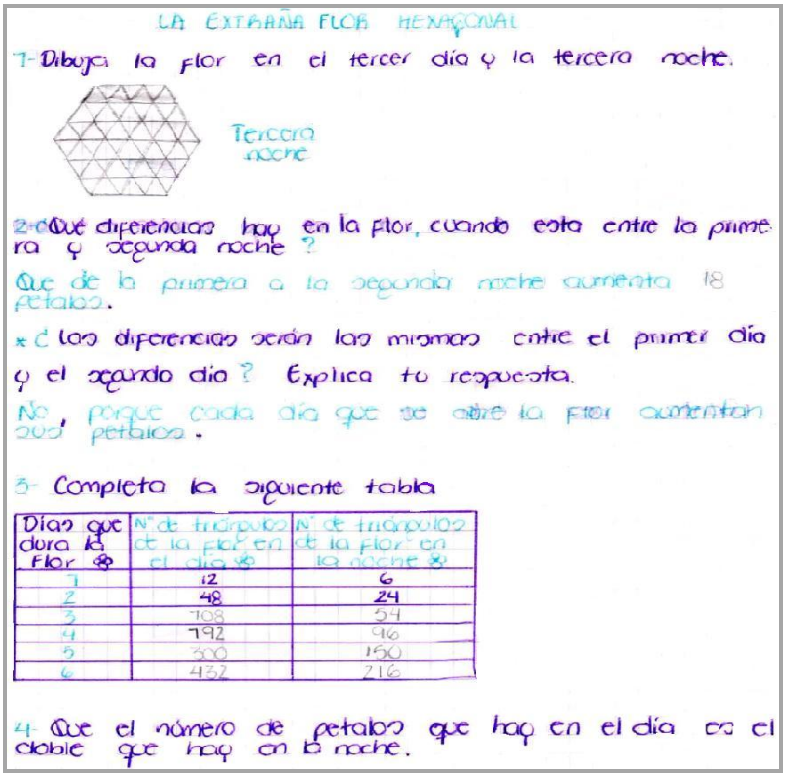
Evidencias de los estudiantes: Esteban Ospina, Daniela Rodríguez y Ana Carolina Zapata (Grado 7º-2) Institución Educativa Héctor Abad Gómez

Con las representaciones que los estudiantes realizaban, se pretendía que sirvieran como fuente para que hallaran la solución a las preguntas que hacían referencia a: conocer sus saberes previos, interpretar su pensamiento lógico e inductivo, donde se reflejara su nivel de conceptualización y los procedimientos que utilizó para dar solución a las situaciones propuestas, igualmente, visualizar y reflexionar de cómo expresaron, tradujeron, leyeron y representaron los patrones de variación y cómo utilizaron los sistemas de representación y los procesos algebraicos.

A continuación se retomarán algunas evidencias que dan cuenta de la solución que los estudiantes realizaban en algunos talleres, donde está propuesta la categoría patrones y regularidades, que fue fundamental para analizar los procedimientos utilizados por ellos. Ésta permitió utilizar las demás categorías (sistemas de representación, procesos algebraicos y proporcionalidad) para dar solución a las diversas preguntas que giran alrededor del patrón propuesto, donde aparecen preguntas que articulan conceptos inmersos en los diversos pensamientos matemáticos y le permiten al estudiante desarrollar habilidades como ver, decir y registrar.

Para Mason (1999), el reconocer los patrones, describirlos y representarlos de diversas maneras, es fundamental para que el estudiante desarrolle procesos de generalización en matemáticas. Durante toda la propuesta de Intervención Didáctica se pudo evidenciar que los estudiantes no llegaron a la construcción de modelos matemáticos (estos entendidos como formulas matemáticas), pero si observaron y manipularon las figuras propuestas en los diversos talleres y utilizaron la generalización verbal, que se les facilitó debido a la utilización de diferentes sistemas de representación (icónico, tabular y gráfico), exigiéndoles a ellos la descripción de las regularidades, las variaciones, los cambios, las constantes y las magnitudes que intervienen en el patrón propuesto.

La solución que plantea Sirley (grado 7º-2) en la actividad final, demuestra que en los talleres, donde los patrones y regularidades estén soportados y argumentados en los sistemas de representación, facilita comprender los enunciados de las situaciones propuestas. En este caso en particular, analizando las preguntas 2, 3 y 4 de la actividad final, Sirley necesitó utilizar y *establecer relaciones, expresándolas con el lenguaje natural mediado por el patrón, igualmente, la tabla que completó con las expresiones simbólicas, fueron resultado de observar la figura que construyó (flor hexagonal), todo ello permitiéndole registrar algunas características fundamentales del patrón de* *variación inmerso en esta Actividad Final*[43]. A continuación se anexa apartes de la elaboración del taller que realizó esta estudiante.


LA EXTRAÑA FLOR HEXAGONAL

1- Dibuja la flor en el tercer día y la tercera noche.

Tercera noche

2- ¿Qué diferencias hay en la flor, cuando esta entre la primera y segunda noche ?

Que de la primera a la segunda noche aumenta 18 petalos.

* ¿ Las diferencias serán las mismas entre el primer día y el segundo día ? Explica tu respuesta.

No, porque cada día que se abre la flor aumentan 36 petalos.

3- Completa la siguiente tabla

Días que dura la Flor	N° de triángulos de la flor en el día	N° de triángulos de la flor en la noche
1	12	6
2	48	24
3	108	54
4	192	96
5	300	150
6	432	216

4- Que el número de petalos que hay en el día es el doble que hay en la noche.

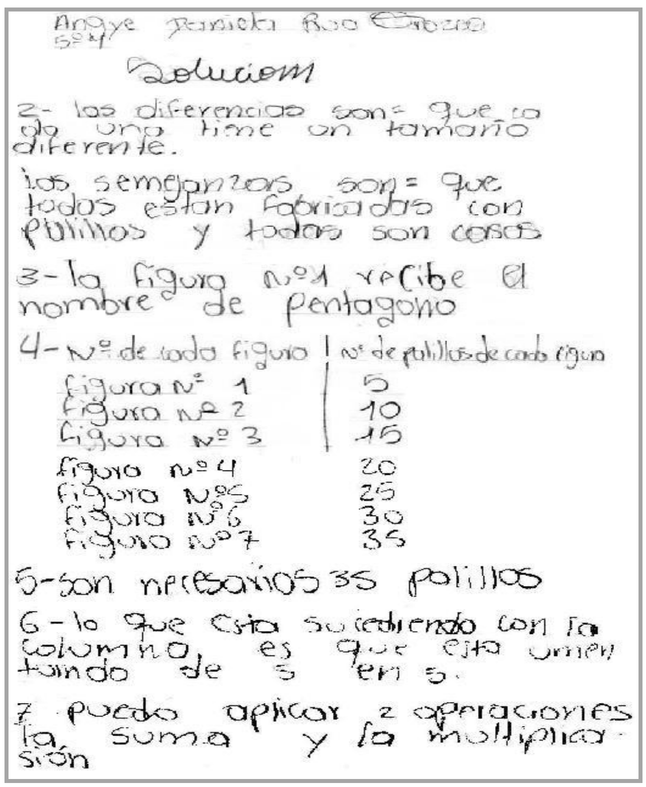
Estudiante Sirley Posada (grado 7º-2) Institución Educativa Héctor Abad Gómez

Además, los talleres realizados durante la Intervención Didáctica como es el caso del taller que se muestra (ver figura) donde la estudiante Angye Daniela Rúa (grado 5°-4) exploró, reconoció, descubrió propiedades y regularidades de los números propuestos en situaciones contextualizadas. Analizando las preguntas n° 3, 4, 5 y 6, donde se esperaba que la estudiante hiciera uso de la estructura multiplicativa para dar solución a la situación planteada, ella por el contrario, mediante el lenguaje matemático, utilizó la estructura aditiva, la cual se evidenció en el conteo de uno en uno donde agrupó de a cinco elementos, para llegar así a la solución pedida. También explicó sus ideas y justificó las respuestas, hallando la regularidad verbalizada en la pregunta n° 5: "*lo que esta sucediendo con la*

[43] Ver anexo: Actividad Final para los grados de 4° a 8°. (primera y segunda página).

columna es que esta aumentando de 5 en 5", donde el conteo fue su eje fundamental para el desarrollo de esta situación apoyada en el patrón propuesto. Además, se infirió que la estudiante pudo haber construido cualquier figura que estuviera establecida bajo los parámetros propuestos en el taller, porque descubrió la regularidad que se propuso en la secuencia geométrica.

Igualmente, estos talleres[44] tienen elementos que permiten identificar y expresar los patrones y regularidades, si son retomados de manera continua facilitan el uso de diferentes representaciones, la traducción entre diferentes lenguajes, la modelación y los procesos de generalización, aspectos que son valiosos para desarrollar Pensamiento Matemático.


Angye Daniela Rua [illegible]
5º4
Solucion
2- los diferencias son= que ca da una tiene un tamaño diferente.
los semejanzas son= que todos estan fabricados con palillos y todos son casas
3- la figura nº1 recibe el nombre de pentagono

4-

Nº de cada figura	nº de palillos de cada figura
figura Nº 1	5
figura Nº 2	10
figura Nº 3	15
figura nº 4	20
figura Nº 5	25
figura Nº 6	30
figura Nº 7	35

5- son necesarios 35 palillos
6 - lo que esta sucediendo con la columna, es que esta umentando de 5 en 5.
7 puedo aplicar 2 operaciones la suma y la multiplicasión

Evidencia de la estudiante Angye Daniela Rúa (grado 5º-4)
Institución Educativa Héctor Abad Gómez

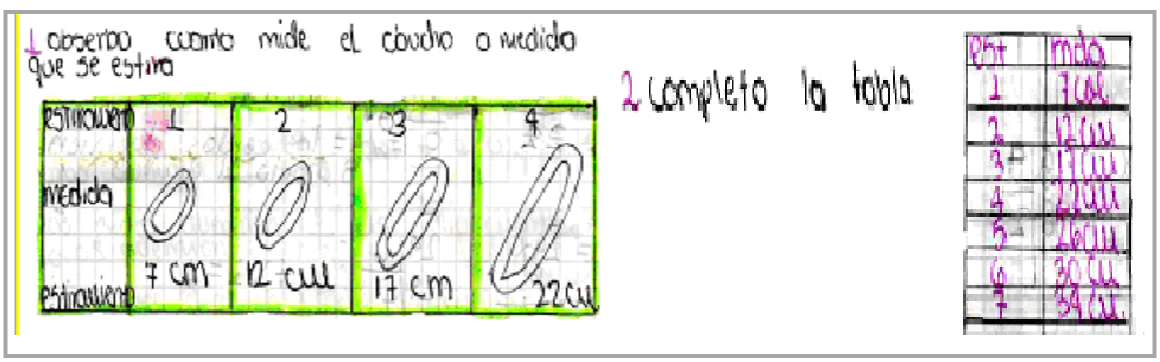
[44] Ver anexo: *Taller "Casa de Palillos"*

5.3.2 Análisis de la Categoría “Sistemas de Representación”

Los “*sistema de representación semiótica son un conjunto de símbolos con reglas de tratamiento*” que permiten como se observa a continuación “*la transformación de una representación en otra equivalente, y con reglas de transformación que permiten poner en correspondencia unidades significantes de una representación en un sistema, con otra representación perteneciente a otro sistema*”. Duval (1999).

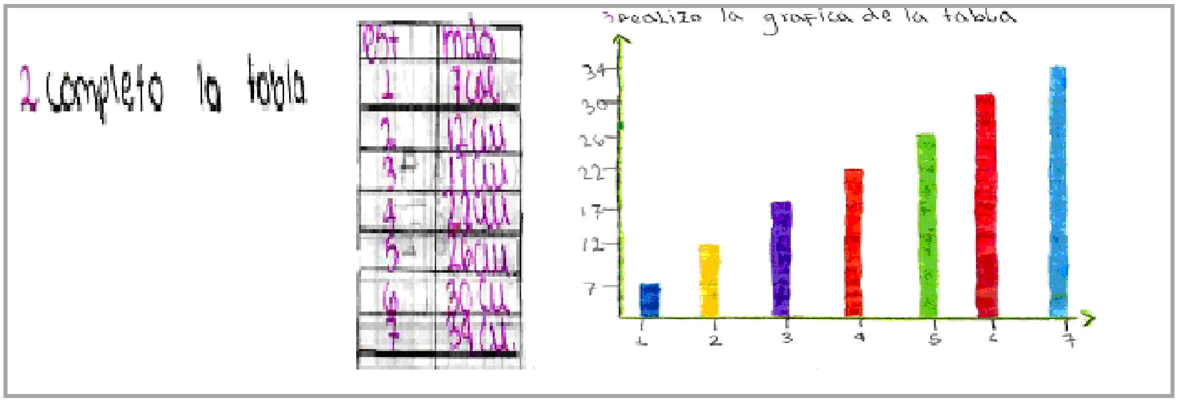
La estudiante Manuela Ortega del colegio Mano Amiga (grado 4°-A), articuló en esta situación distintos sistemas de representación, a través de procesos fundamentales como: **La identificación y la conversión**.

En el proceso de **identificación**, la estudiante hizo una selección de rasgos en el contenido de la actividad, visualizando el cambio presentado por el caucho a medida que éste era estirado, éste proceso le permitió en primera instancia elaborar una **Representación Tabular**, la cual apareció por que la estudiante fue capaz de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación.

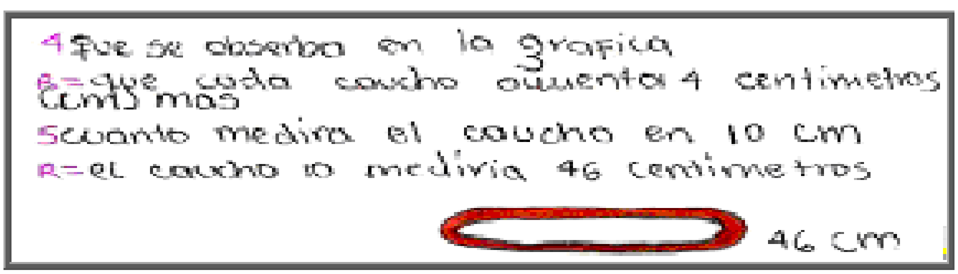


Por su parte la **conversión**, se vio en esta actividad cuando la estudiante realizó la transformación de un registro a otro registro de un sistema de representación diferente, es decir de una **Representación Pictórica a una Tabular** y de una

Representación Tabular a un Diagrama de Barras[45]; en ésta última, la tabla sirvió como una herramienta para mostrar los datos gráficamente, lo cual le permitió a la estudiante descubrir patrones y hacer predicciones.



La actividad permitió que la estudiante fuera capaz de escribir con sus propias palabras (usar la **REPRESENTACIÓN ESCRITA**) lo que estaba sucediendo en la situación de cambio, al igual que la conclusión que se dedujo de sus observaciones (cada caucho aumenta cuatro centímetros más) que aunque errónea, le permitió tener una comprensión completa de la situación, la cual implicó la articulación de los distintos sistemas de representación.

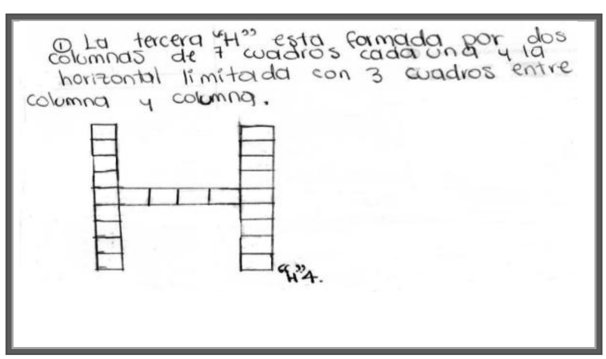


Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación Resnick y Ford (1981).

[45] Las tablas en este caso se usaron para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante.
Esta gráfica hace posible el estudio dinámico de la variación; igualmente tiene como fin abordar los aspectos de dependencia entre variables, gestando la noción de función.

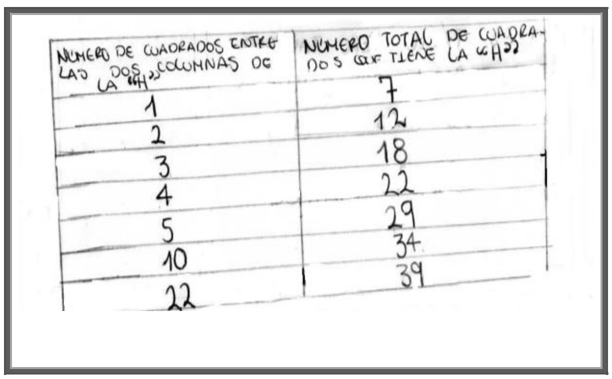
Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos Paivio (1978); De Vega (1984). Apoyando la idea anterior y observando la actividad realizada por Manuela, es posible decir que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacer representaciones internas de un objeto de conocimiento (para que la mente pueda operar sobre las ellas), mientras que para comunicar estas ideas se necesitan representaciones externas de las mismas por medio de signos. "*Las primeras se desarrollaran al interiorizar las segundas y la diversificación de representaciones del mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto*" Duval (1993).
Un trabajo similar al anterior fue realizado por Michelle Quintero (grado 6º-3) de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez

A los estudiantes se les presentó un conjunto de haches (tres en total), con estas ellos debían encontrar la cuarta hache; Michelle utilizó el **Sistema de Representación Escrito** para dar a conocer lo que estaba sucediéndole a la última figura dada, a partir de la **identificación** de rasgos y características de la misma, también uso el **Sistema de Representación Pictórica** para representar la cuarta figura, utilizando para ello el procesos de **tratamiento de una representación**[46].



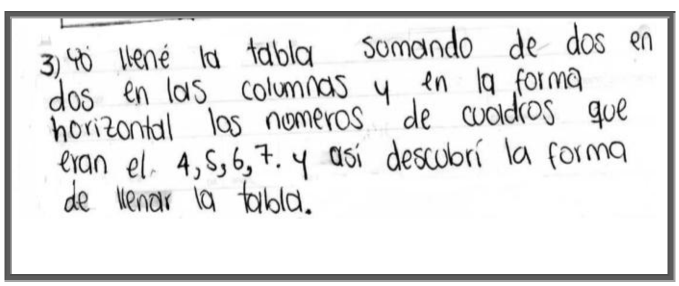
[46] Usando las figuras iníciales para hallar la cuarta figura como lo plantea Duval.

La estudiante también empleó **la conversión** a través de una **Representación Tabular**[47]**,** para organizar las diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes del desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. La tabla en este caso también se constituyó en una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso filas ayudó a que la estudiante comprendiera que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo.



NUMERO DE CUADRADOS ENTRE LAS DOS COLUMNAS DE LA "H"	NUMERO TOTAL DE CUADRADOS QUE TIENE LA "H"
1	7
2	12
3	18
4	22
5	29
10	34
22	39

Por último, se les pidió a los estudiantes que explicaran la forma en la que habían llenado la tabla[48]; la estudiante respondió



3) Yo llené la tabla somando de dos en dos en las columnas y en la forma horizontal los numeros de cuadros que eran el 4, 5, 6, 7. y así descubrí la forma de llenar la tabla.

Aunque el método empleado es el correcto, por haber encontrado un patrón, la estudiante no observo que el número total de cuadrados que tiene cada hache va

[47] Es decir, paso de representación pictórica a representación tabular
[48] por medio de la **Representación Escrita**

aumentando de cinco en cinco y esto se evidencia en el error cometido al completar la tabla.

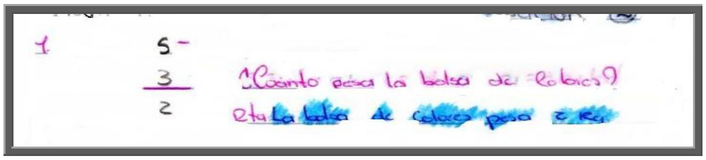
A continuación se mostrará la situación desarrollada por Manuela Gañan Carvajal y María Alejandra Caro (grado 5°-2) de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, en el cual se le presentaba a los estudiantes cierta información, la cual era representada en una balanza[49] (una bolsa con cuadernos y otra bolsa con colores equilibrada por un peso de 5 Kg.), los estudiantes tenían que indicar el peso de la bolsa con colores, conociendo el peso total de ambas bolsas y el de la bolsa con cuadernos.

En la actividad realizada por las estudiantes, se pudo ver como consiguieron **la formación de una representación identificable**, a través de una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar; respetando las reglas del registro y asegurando "en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los parámetros". Duval (1999b; p. 177).

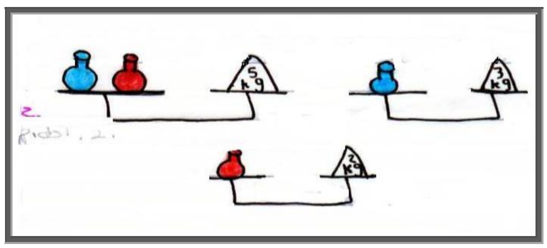
Es así como ambas estudiantes disponen de un sistema de representación que es muy familiar a ellas, una **Representación Escrita Numérica** (haciendo una sustracción entre el peso de las dos bolsas y la bolsa con colores), con la cual comunican las observaciones que hacen de ésta situación de variación, desde este punto de vista las estudiantes se acercan al proceso de **tratamiento de una representación**, es decir una transformación que se lleva a cabo dentro del mismo registro donde ha sido formada dicha representación; pasando de un sistema de representación escrita a otro con un mayor nivel de complejidad. "El "tratamiento es una transformación interna a un registro"[50].

---

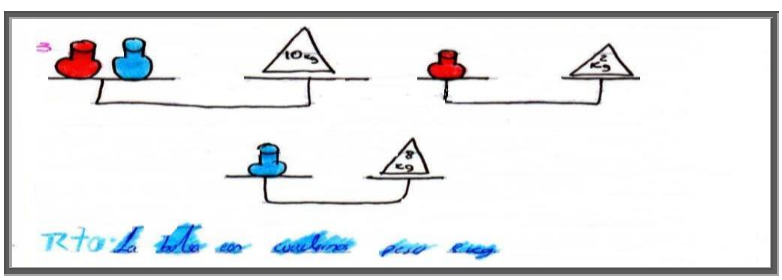
[49] Ver anexo: *Taller "Pesando…"*
[50] Duval (1999b; p. 165)



Por último, las estudiantes utilizan **la conversión de una representación**, es decir la transformación de dicha representación a una representación de otro registro (de un **Sistema de Representación Escrita** a un **Sistema de Representación Pictórica),** plasmando de otra forma lo que entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos pueden ser muy concretos pero dan a conocer lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio.



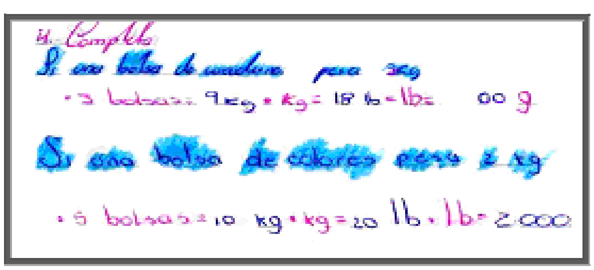
En el tercer punto las estudiantes tenían dibujar en balanzas la información presentada junto con su respuesta. Como es posible observar, las estudiantes realizaron la misma interpretación que hicieron en el punto anterior, por tanto interiorizaron el método, sin tener que recurrir al **Sistema de Representación Escrito Numérico** para llegar a la solución de la actividad.



De lo anterior se puede deducir que la construcción de los conceptos matemáticos está mediada por el uso e interacción de diferentes sistemas de representación. Así por ejemplo, una misma situación puede ser presentada a través del lenguaje natural, un gráfico cartesiano, una ecuación, una tabla de valores, entre otros. La comprensión completa de un concepto matemático o de **alguna situación** implica la articulación de los distintos registros de representación, en tanto que cada uno aporta información distinta sobre la situación y por ende sobre el concepto que se enseña. Este proceso de construcción como se ha visto implica coordinar situaciones en diferentes contextos, y a propósito de una misma situación, articular distintos sistemas de representación, a través de procesos fundamentales como: La identificación, el tratamiento y la conversión.

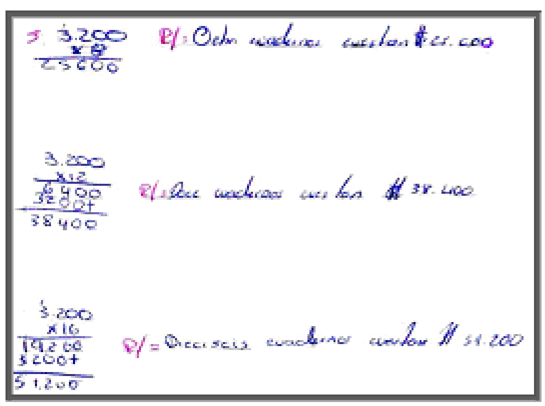
En el cuarto punto de este mismo taller, se les presenta una serie de equivalencias, luego con la información suministrada deben completar los espacios faltantes.

Durante esta actividad se observo la utilización de los procesos fundamentales de los sistemas de representación; primero identificando los rasgos o características de las equivalencias, luego utilizando el tratamiento de un registro al proceso de transformación en otra forma equivalente pero entre el mismo sistema de representación. Y por ultimo las estudiantes utilizaron la conversión, para pasar de un sistema de unidades de medida a otro sistema de unidades de medida diferente. Aunque las estudiantes no dieron una solución correcta cuando se hacia la conversión de libras a gramos, intentaron establecer equivalencias entre los sistemas de medidas.

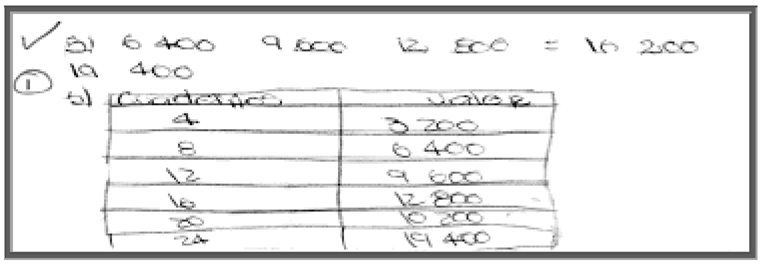


En este punto las estudiantes utilizaron la **Forma de Representación Escrita** para poder comunicar lo que estaba sucediendo en la actividad.

En el quinto punto los estudiantes debían descubrir la constante de proporcionalidad, es decir conocer el precio de un solo cuaderno para averiguar el valor de los otros, para ello tenían que interpretar la situación que se estaba dando a considerar, la cual estaba dada de la siguiente forma.
Si cuatro cuadernos cuestan $ 3.200. ¿Cuanto cuestan ocho cuadernos? ¿Doce cuadernos?, ¿dieciséis cuadernos?, ¿veinte cuadernos? Y ¿veinticuatro cuadernos?
Manuela Gañan y María Alejandra Caro establecieron que un solo cuaderno costaba $ 3.200, a partir de allí, las niñas empezaron a averiguar el precio de los otros artículos realizando multiplicaciones sucesivas. Durante el desarrollo de esta actividad las estudiantes no hallaron la constante de proporcionalidad, dieron por hecho que esta constante era $3.200, lo que les llevo a cometer los errores que se observan a continuación.



Si observamos el trabajo realizado por Carlos Enrique y Cristian, podemos ver que los estudiantes hallaron la constante de proporcionalidad, al establecer que el precio de un solo cuaderno era de $ 800 y a partir de allí encuentran el costo de 8, 12, 16, 20 y 24 cuadernos y organizan toda la información de manera adecuada en un **Sistema de Representación Tabular**, si observamos el proceso llevado a cabo por los estudiantes, no solo encontraremos que utilizan la proporcionalidad para dar solución a la situación presentada, sino que utilizan los **Sistema de Representación Escrita Numérica y Tabular** para llegar a una conclusión de la actividad.



Otro tema a considerar dentro de este proceso, es el cambio del lenguaje natural al lenguaje matemático, a continuación se presentaran una serie de actividades realizadas por estudiantes de grado 6° de la institución educativa Héctor Abad Gómez, en donde se presenta una sucesión de preposiciones, la tarea del estudiante era la de convertir las mismas al lenguaje matemático o viceversa.

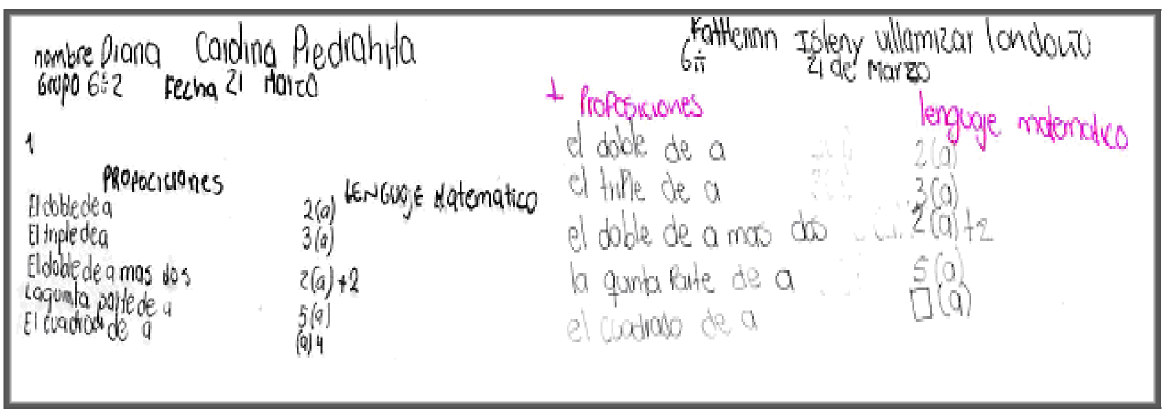
“*La matemática tiene, como la mayoría de las ciencias y otras disciplinas del saber, un lenguaje particular, específico, el cual simplifica, en algunos casos, la comunicación, y por otro lado clarifica y designa de una manera exacta, sin posible confusión, sus contenidos. En este lenguaje, que podemos llamar lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad, y sin permitir ambigüedades. Todos y cada unos de los símbolos de escritura definidos y utilizados tienen una tarea determinada, exacta, sin solapamientos ni posibles equívocos, mientras que también la estructura de su presentación es idónea para su perfecta comprensión*”[51]. El desconocimiento de este lenguaje puede provocar errores de construcción, de interpretación, y hace imposible la comunicación. Es decir, si se

[51] Ortega Dato, Juan. Et al. (2001). MATEMÁTICAS: ¿UN PROBLEMA DE LENGUAJE? España: Universidad de Castilla-La Mancha.

pierde la gran virtud de las matemáticas que es, como hemos dicho, su exactitud, nos queda una ciencia con un lenguaje que producirá errores y confusiones.

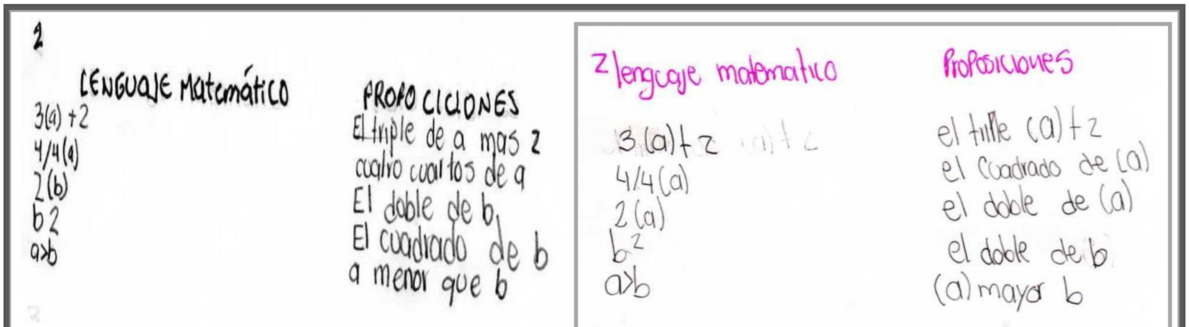
Varios estudiantes lograron pasar correctamente algunas de las preposiciones al lenguaje matemático y viceversa, pero cuando se habla de elevar un número al cuadrado o la quinta parte de un número, algunas estudiantes como Diana Carolina Piedrahita y Katherinn Isleny Villamizar del grado 6°, no tienen las suficientes habilidades lingüísticas para escribir dicho enunciado en un lenguaje matemático, en lugar de ello escriben:

El cuadrado de ***a*** como: ☐ (a), (a) 4 (suponemos que es por los cuatro lados del cuadrado) y la quinta parte de a como: 5(a).



Estos errores surgen principalmente cuando el estudiante se enfrenta a nuevos conocimientos (álgebra) que lo obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben (aritmética). Es por ello que los errores que se cometen en el álgebra o al menos en la trascripción de un lenguaje natural al lenguaje matemático tienen su origen en la aritmética. Por lo general son errores causados por un aprendizaje deficiente de conceptos previos (números racionales y potenciación).

Ahora, en el segundo punto las estudiantes tienen que utilizar el lenguaje matemático para formar preposiciones. Observando la actividad desarrollada por Diana Carolina Piedrahita es posible concluir que la estudiante utilizó correctamente sus conocimientos previos para trasformar cada expresión en una proposición, a excepción de la última en la cual a era mayor que b. Mientras que Katherinn Isleny comete los mismos errores que tuvo durante la primera actividad, lo que quiere decir que la estudiante presenta una confusión entre la multiplicación y la potencia y los números racionales y la potenciación. Se puede considerar que este tipo de error puede tener su origen en una ausencia de sentido, ya que son errores que están relacionados con cuestiones que han quedado sin resolver en la Aritmética.

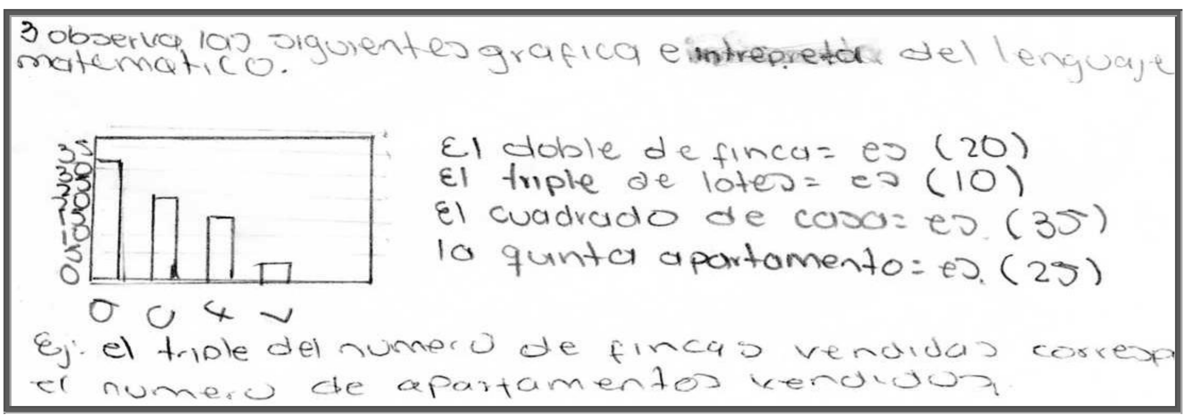


Estudiante: Diana Carolina Piedrahita Katherinn Isleny Villamizar

"*De igual forma los aspectos cognitivo y lingüístico intervienen simultáneamente en la comprensión y uso de los diferentes tipos de formulaciones: la semántica de una formulación es construida por el estudiante por medio de sus representaciones mentales y de los rasgos lingüísticos de la formulación*". Rojano, T (1994; p. 48).

Con respecto al tercer punto de este taller, Diana Carolina intento usar el diagrama de barras para convertir la información que se presentaba en ella al **Sistema de Representación Escrito**, es decir luego de reconocer los rasgos de dicha grafica uso la **conversión de representaciones** para explicar lo que sucedía en dicha situación. Este punto exigía, además de considerar la relación entre los datos de los ejes vertical y horizontal, reconocer la escala utilizada en el eje vertical y utilizar la graduación de una escala como unidad patrón para determinar el valor que corresponde a las fincas, casas, apartamentos y lotes.

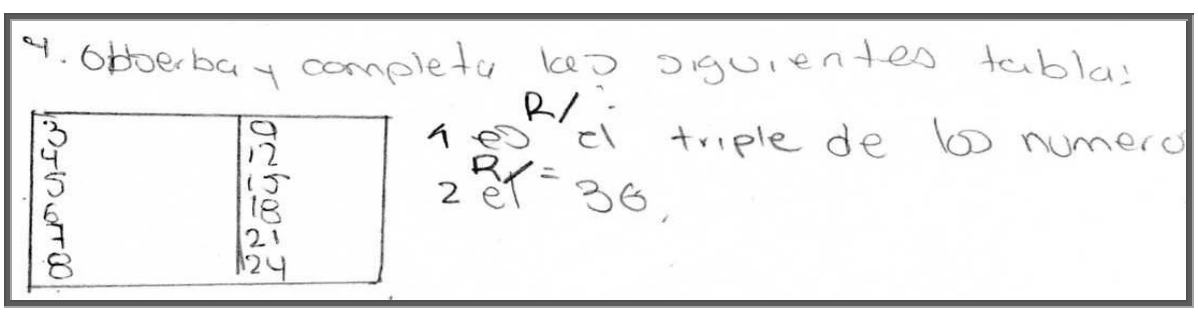
Cuando la estudiante tuvo conciencia de la cantidad de lotes, fincas, apartamentos y casas vendidas, busco formar equivalencias al interior de los datos presentados en la tabla. Aunque se debe aclarar que la estudiante no estableció relaciones entre los otros elementos presentados, como se sugería en el ejemplo "*El triple del número de fincas vendidas corresponde al número de apartamentos vendidos"*.
Así, uno de los ejemplos que dio la estudiante fue *"el doble de fincas es: 20"*, lo anterior quiere decir que Diana leyó correctamente, la información presentada en la gráfica, escribiendo adecuadamente lo dado a través del lenguaje matemático.



Con respecto a los otros ejemplos aportados por Diana, se puede observar que la estudiante comete varios errores debido a una ausencia de sentido, el primero es considerado por Carrión (2007) como **error de entrada** "se presenta en la lectura de texto (gráfica para este caso). Son errores de visión". Otros son los **errores en las operaciones**. "Se encuentran entre los errores que alteran la repuesta. Consisten en distorsionar el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada en forma independiente". (Carrión, 2007, 66). Los ejemplos presentados por la estudiante y que entrarían dentro de esta categorización se cometen a la hora de realizar los cálculos *"el triple de lotes es 10"* conociendo que son 5 lotes el triple de estos correspondería a 15 y no a 10 como lo establece la estudiante, de igual forma se presenta el mismo error en los otros dos ejemplos donde las respuestas correctas serian 400 para el cuadrado de casas y 15 para la quinta parte de los apartamentos. También puede ser posible que los ejemplos dados por la estudiante sean correctos lo que pudo haber sucedido es que Diana tuvo **errores en la escritura** que se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión numérica a una expresión diferente.

En el último punto de este taller Diana Carolina debía completar la tabla, por medio de la información que se le suministraba en la misma, para ello la estudiante utilizó el proceso de **formación de una representación identificable**, ya que a través de los rasgos, los datos suministrados y respetando las reglas del registro la estudiante pudo finalizar la construcción de la tabla. Además Diana Carolina utilizó el **tratamiento de una representación**, para llevar a cabo dentro del mismo registro otro registro igual; pasando de un sistema de representación escrita a otro sistema más complejo.

Por último, utiliza **la conversión de una representación**, es decir la transformación de dicha representación a una representación de otro registro (de un **Sistema de Representación Tabular** a un **Sistema de Representación Escrita**), para dar a conocer sus conclusiones con respecto al trabajo elaborado.


4. Obberba y completa las siguientes tabla:

3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24

1 R/ es el triple de los numero
2 R/ el = 36,

La estudiante en esta situación utilizó el **Sistema de Representación Tabular** para **procesar la información** que tenían. Ya que una forma efectiva de usar provechosamente esa información es llevando los datos a un esquema que resuma adecuadamente las frecuencias con que se repiten los valores de la(s) variable(s) que se han registrado en esos datos (**Representación Tabular**). La representación tabular en el centro da cuenta de su carácter mediador entre las representaciones de los diferentes lenguajes que anteriormente se conocían (lenguaje gráfico y habitual) y un nuevo lenguaje (lenguaje algebraico). En síntesis el reconocimiento de los elementos que intervienen en la conformación de un sistema de representación y de algunas reglas básicas que sugieran las actividades de identificación, tratamiento y conversión, permite establecer relaciones entre un objeto matemático y las características necesarias para su comprensión conceptual.

5.3.3 Análisis de la categoría "Procesos algebraicos"

Al "*interpretar los procesos algebraicos en la escuela como un espacio rico en actividad matemática que convoque a la búsqueda de significados y relaciones, a la reflexión, a la comunicación de las observaciones y a la organización de los aprendizajes; sólo así estaremos incorporando formas de generalizar, desde el aporte de la vivencia personal*[52]*".*

El acercamiento que se hace referente a la importancia de trabajar los *procesos algebraicos* en la escuela se retoma en el análisis de esta categoría, en la que el trabajo realizado fue progresivo, de tal manera que permitiera una reflexión crítica de algunos de los procesos generales establecidos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, y que fueron aplicados por los estudiantes al momento de realizar las distintas actividades (Actividad Diagnóstico Inicial, los

[52] POSADA, María E. et al. (2005) Interpretación e Implementación de Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia. p. 54.

talleres de apoyo enmarcados en situaciones problema que determinaron el proceso, y la Actividad Final).

Al observar y analizar los trabajos hechos por los estudiantes, acordes a los talleres propuestos, se evidencio la poca o escaza práctica en el trabajo de actividades que les permitan desarrollar procesos algebraicos desde los primeros grados de escolaridad, que conlleven al acercamiento y posible construcción de expresiones de generalidad, siendo estas “la raíz básica del álgebra” como lo afirma John Mason (1999; p. 106).

Es entender el trabajo de los procesos algebraicos, no como un trabajo que se debe iniciar desde el grado 8º de básica secundaria, en la mayoría de los casos relacionado con la enseñanza y aprendizaje del “Álgebra de Baldor”, sino como aquel enmarcado en “*actividades que promuevan oportunidades para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones*” Kaput (2002), donde el estudiante de los primeros grados, continua el trabajo de la aritmética a la vez que hay posibilidad de relacionarlo con el álgebra, por lo cual Carreher, Schlimann y Brizuela (2001), afirman que “*la aritmética es algebraica*”.

El pensar una aritmética algebraica, no es transformar el rol que el docente de matemáticas tiene en la escuela, en relación a la enseñanza de la aritmética, mas bien, es que él reflexione a cerca del álgebra como *“el lenguaje de las matemática, por el que ellas son esencialmente, la expresión (o reducción) de ideas complejas y sofisticadas mediante símbolos, y operaciones sobre símbolos. Una vez que tenemos símbolos y las operaciones aparece el álgebra”* D. J. Lewis (1975), donde resalte en este aspecto, la pertinencia que tiene el desarrollo de los procesos algebraicos en el estudiante, haciéndose necesario la aplicación de las estructuras aditivas y estructuras multiplicativas que ha ido construyendo en su proceso de aprendizaje de la matemática, en el que no hay una simple aplicación de algoritmos (suma, resta, multiplicación, división, entre otros) desligados de los conceptos matemáticos e interpretaciones que estos tienen desde el contexto de la matemática escolar hasta la matemática universitaria, sino que se destaca la capacidad de alcanzar un nivel de razonamiento que le permita una conceptualización matemática acorde al grado en el que se encuentra y a las capacidades que él tiene.

Para ello es crucial plantear y ejecutar trabajos que ayuden al desarrollo de dichas estructuras, y así realizar aportes en los procesos de aprendizaje de la matemática escolar que desplacen la falta de una adecuada y pertinente inclusión en los procesos de matematización que el docente de matemáticas realiza de manera incipiente, y lleva al estudiante de la escuela a un desapego hacia la matemática y todo lo que implica su trabajo y utilización en la vida cotidiana.

Uno de los aportes que se realizan desde el trabajo hecho con los estudiantes, es aquel que presenta las *situaciones de variación y cambio* como el eje central para desarrollar Pensamiento Matemático, por medio de la enseñanza y aprendizaje del Pensamiento Variacional desde los primeros grados de escolaridad, teniendo como insumos de apoyo, los diferentes sistemas de representación (icónico, gráfico y simbólico) que ayudan al desarrollo de los procesos algebraicos, y a la vez conllevan a un razonamiento inductivo, en el que el estudiante *"produzca sus propias afirmaciones y alcance sus conclusiones, partiendo de casos particulares y buscando una generalidad*" Cañadas (2002). Este es un paso para darle sentido a las preguntas que los estudiantes formulan cuando se encuentran con alguna dificultad particular, al momento de desarrollar las actividades que se le proponen.

En relación, con el desarrollo y trabajo de los procesos algebraicos que estaban inmersos en los talleres realizados con los estudiantes, se resalta en la Actividad

Diagnóstico Inicial y la final, algunas dificultades que ellos tuvieron al momento de proceder a darle solución a dichas actividades. Siendo las más relevantes:

- La poca aplicación de los conocimientos previos.
- Lectura inadecuada y poca comprensión de algunas preguntas.
- La ambigüedad en la respuesta a las preguntas hechas por el docente al momento de pedirle una explicación de las estrategias que estaba utilizando para responder algunos de los puntos de la actividad, no permitiendo reconocer el nivel conceptual en el que se encontraba.

Sin embargo, estas dificultades persistieron durante el proceso que se llevo con ellos.

A continuación se presentan algunas de las evidencias de los talleres aplicados a los estudiantes que ayudan a determinar el proceso que realizaron, y que dan elementos importantes para reflexionar en torno al trabajo y desarrollo de los procesos algebraicos inmersos en la estructura de los talleres. La escogencia de los estudiantes que aparecen con su respectivo trabajo se hace de forma aleatoria, pero resaltando algunas diferencias en la forma de responder las preguntas o de abordar los problemas.

El taller "***Los Salones de Clase***"[53], aplicado el 25 de julio de 2006, a los estudiantes del grado sexto uno (6º-1) de la institución educativa Héctor Abad Gómez, pretendía que ellos utilizaran adecuadamente cada uno de los algoritmos que sustentan la adición y la multiplicación, realizando previamente, una lectura interpretativa de los enunciados e identificando los datos, y de acuerdo a ello, encontrar la solución.   No era sólo dar una respuesta a la pregunta, sino resaltar su nivel de simbolización, visualizándose la aplicación de algoritmos que llevan al

[53] Ver anexo: *Taller "Los Salones de Clase"*

análisis de situaciones en las que están inmersas las proporciones simples. Este aspecto hace referencia a la aplicación de la estructura multiplicativa.

El estudiante Sebastián Cortes Vélez (grado 6º-1), logra darle respuesta a las preguntas, pero para llegar a dichas respuestas, él tuvo que realizar una lectura interpretativa que le permitió resaltar los datos de la pregunta y reconocer cuál era el algoritmo que debía utilizar, llegando así a unos resultados en los que no se limita a escribir la simple respuesta al momento de aplicar el algoritmo, sino que justifica el porqué de la respuesta y su coherencia con la pregunta.

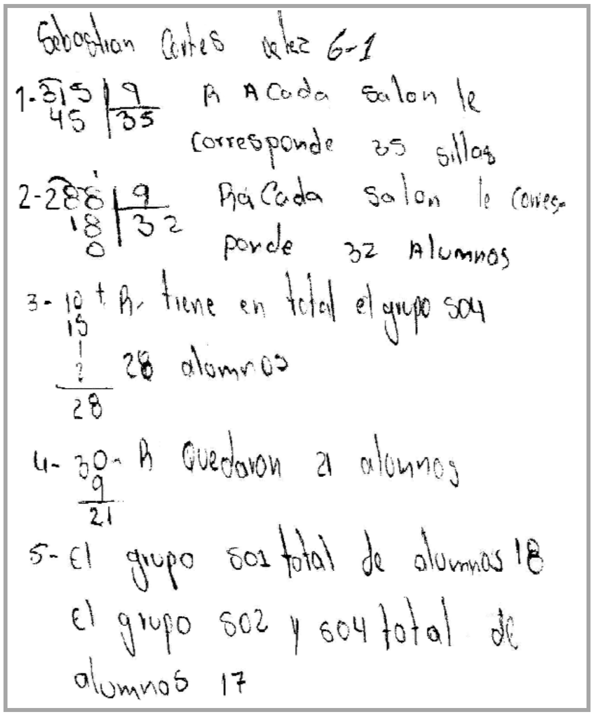
Las operaciones matemáticas que se aplican en el taller son la suma, la resta, la división y la multiplicación. En el caso de las dos últimas, *su trabajo le exige al estudiante un nivel de uso y dominio de los números, y un conocimiento de la simbolización, todo ello en un grado más completo que en el caso de la suma y la resta, confirmando el comienzo de la construcción de una nueva estructura: La estructura multiplicativa*, *que es una de las más ricas de las matemáticas.* Castro E, et al. (1995)

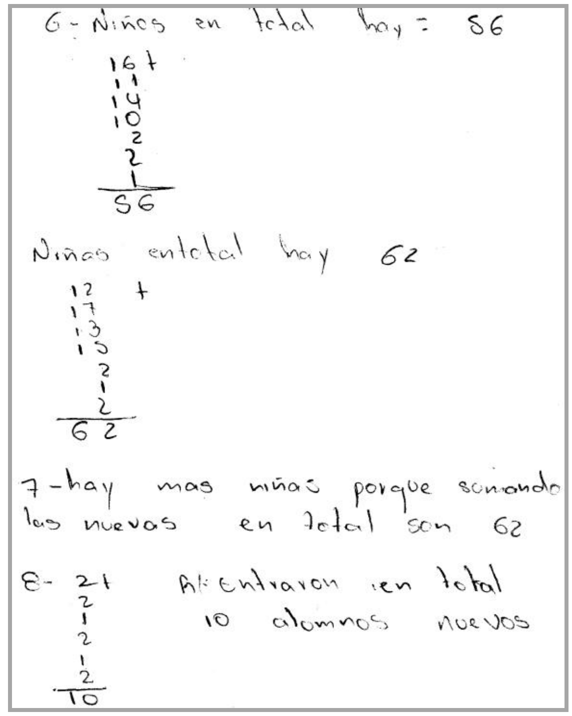
Ejemplo:

Primera pregunta.

Se tienen en total 315 sillas para los salones de los grados de cuarto y quinto. Si son 5 salones en el grado cuarto y 4 salones en el grado quinto., y cada salón debe tener el mismo número de sillas. ¿Cuántas sillas le corresponderá a cada salón?

En la respuesta, Sebastián presenta la solución del algoritmo acorde a la pregunta. De igual forma ocurre durante todo el taller, donde se ve la coherencia entre la pregunta y la aplicación del algoritmo.



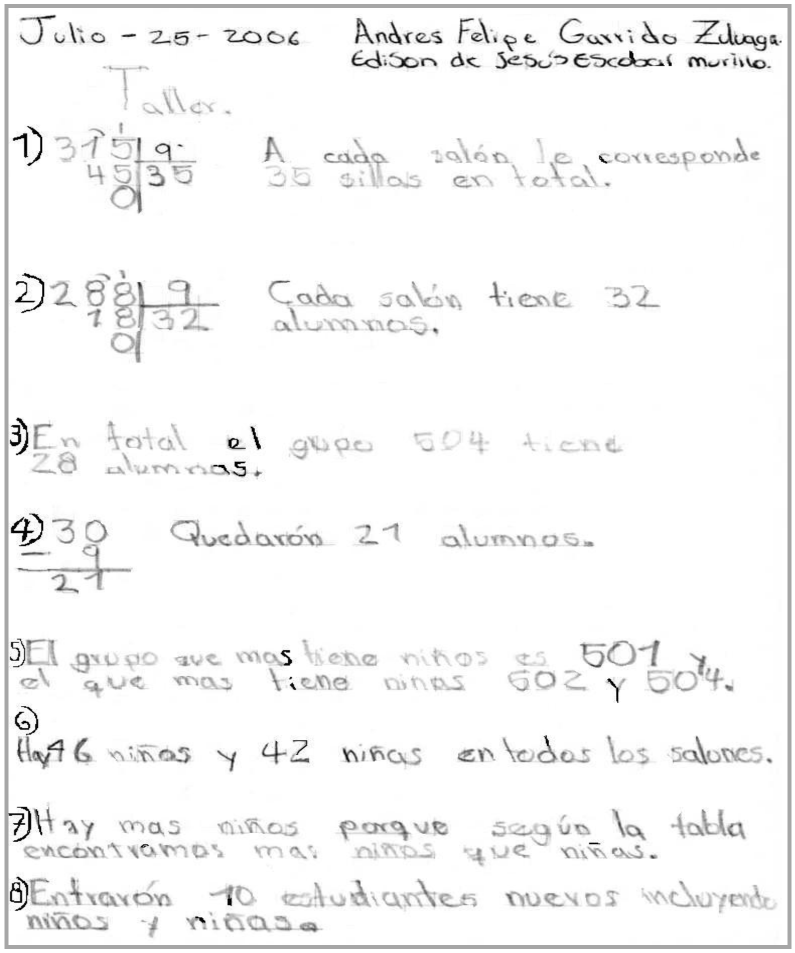


Evidencias del estudiante Sebastián Cortez V. (grado 6°-1),
Institución Educativa Héctor Abad Gómez

El trabajo que realiza el estudiante conlleva a la aplicación de unos procesos, presentes en una actividad matemática (el taller), y en estrecha relación con el aprendizaje. Entre ellos se destacan; el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración, la comparación y la ejercitación de procedimientos, propuestos desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Los estudiantes: Andres Felipe Garrido Zuluaga y Edisón Escobar Murillo, y Jorge Luís Salgado, Cristian Camilo, William Marín del grado sexto uno (6º-1), realizan un trabajo igual al de Sebastian, en relación a la solución de las preguntas. Pero, resaltando el trabajo individual de este estudiante, por lo que los otros lo realizan de forma grupal, sin embargo es un aspecto que no determina la forma en como cada uno de ellos hacen uso de los algoritmos, y luego los interpreta.

En ambos casos, se hace alusion a la estructura aditiva y multiplicativa, con mayor exigencia en esta última, de acuerdo a la explicación que se da en el caso de Sebastian.



Julio - 25 - 2006 Andres Felipe Garrido Zuluaga.
Edison de Jesús Escobar murillo.

Taller.

1) 315 | 9
45 | 35
0
A cada salón le corresponde 35 sillas en total.

2) 288 | 9
18 | 32
0
Cada salón tiene 32 alumnos.

3) En total el grupo 504 tiene 28 alumnas.

4) 30 − 9 = 21 Quedarón 21 alumnos.

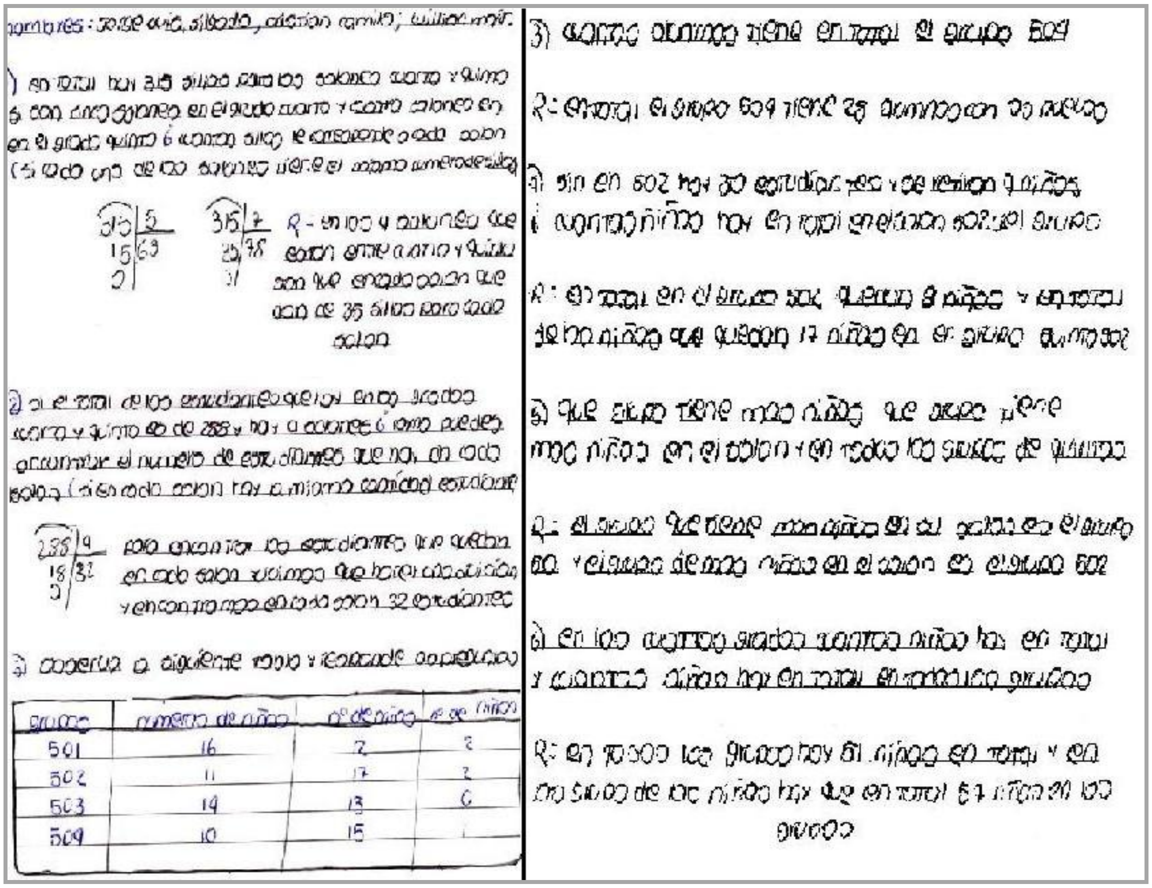
5) El grupo que mas tiene niños es 501 y el que mas tiene ninas 602 y 504.

6) Hay 46 niños y 42 niñas en todos los salones.

7) Hay mas niños porque según la tabla encontramos mas niños que niñas.

8) Entrarón 10 estudiantes nuevos incluyendo niños y niñas.

Evidencias de los estudiantes Andrés F Garrido. y Edison de J Escobar (grado 6°-1)
Institución Educativa Héctor Abad Gómez



Evidencias de los estudiantes Jorge Luís, Cristian Camilo y William M. (grado 6°-1) de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez

En los anteriores trabajos, a pesar que se visualiza la aplicación de algoritmos, este procedimiento no se desliga del trabajo y desarrollo de los procesos algebraicos, por parte de los estudiantes, quienes han reconocido en una situación, un algoritmo que se ha construido a través de un proceso de generalización en la aritmética y dentro de un sistema de numeración conocido por ellos. Pasos que permiten que el rol asumido por el estudiante en su proceso de aprendizaje se enmarque en *situaciones de variación y cambio*, lo preparen para estar en capacidad de relacionar los diferentes sistemas de representación (verbal, icónicos, gráficos, simbólicos), a través de la matematización, la cual es definida como la realización de actividades, donde él debe enfrentarse a “pensar” como simbolizar, formular, cuantificar, validar, esquematizar, representar, y por ende generalizar; es encontrar la esencia de los significados de los conceptos matemáticos, donde asume responsabilidades de describir, explicar y construir el concepto matemático. Posada (2005; p. 53).

En otras palabras, es tener un razonamiento algebraico sobre el que se desarrolla el Pensamiento Variacional, y según Godino (2000; p. 8) "*el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar […], especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones […].* De esta manera, el desarrollo de los procesos algebraicos en el estudiante implica que se dé, entre otros, un razonamiento algebraico, por lo cual el docente debe conocer algunas características[54] de este razonamiento planteadas por Godino (2000; p10) y que pueden ser adquiridas por el estudiante desde los primeros grados de escolaridad. Estas son:

1 *"Los patrones y regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas".*
2 *"Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos".*
3 *"Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números".*
4 *"Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en*

[54] Las características que se presentan del razonamiento algebraico, se retoman de forma textual, del texto: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Módulo 2. De: POSADA B, Fabián A. et al. (2006). Gobernación de Antioquia. p. 19.

contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados. [diagramas sagitales o como una representación mecánica, a saber cómo máquina]".

Cada una de las características permite el desarrollo del Pensamiento Variacional en el estudiante, y así cumplir parte del objetivo de la actividad matemática en él.

El taller "***Pesando…***"[55], aplicado el 5 de julio de 2006 a los estudiantes del grado quinto uno (5º-1) de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, pretendía que ellos realizaran una lectura interpretativa de algunas respresentaciones, en este caso unas balanzas, para darle respuesta a las preguntas, haciéndose necesario la aplicación de una proporción directa y la utlización de algoritmos de las operaciones básicas de la aritmética.

Con este taller se resaltan las distintas formas de abordar el trabajo y desarrollo de los procesos algebraicos, en los que no es solo hacer alusión al trabajo del álgebra y todo lo que conlleva el hablar de ella, sino aprovechar aquellas representaciones sencillas de situaciones enmarcadas en la matemática que pueden ayudar a desarrollar aspectos cruciales de los procesos algebraicos, como lo son la proporcionalidad acompañado de la utilización de los símbolos escritos, entendidos como "…*una manera conveniente y poderosa de representar las situaciones matemáticas y manipular las ideas matemáticas…"* A. T. Hiebert (1988), permitiéndole a los estudiantes que "*modelen, exploren, comenten, predigan, supongan y pongan a prueba sus ideas, a demás de practicar sus habilidades de cálculo"* Blanton y Kaput (2003).

Las estudiantes: Manuela Gañan Carvajal y María Alexandra Caro, realizan el taller partiendo de la lectura e interpretación de las preguntas, en las que encuentran la necesidad de representar graficamente las situaciones planteadas, lo cual les permite encontrar la respuesta y acercarse al concepto de

[55] Ver anexo: *Taller "Pesando…"*

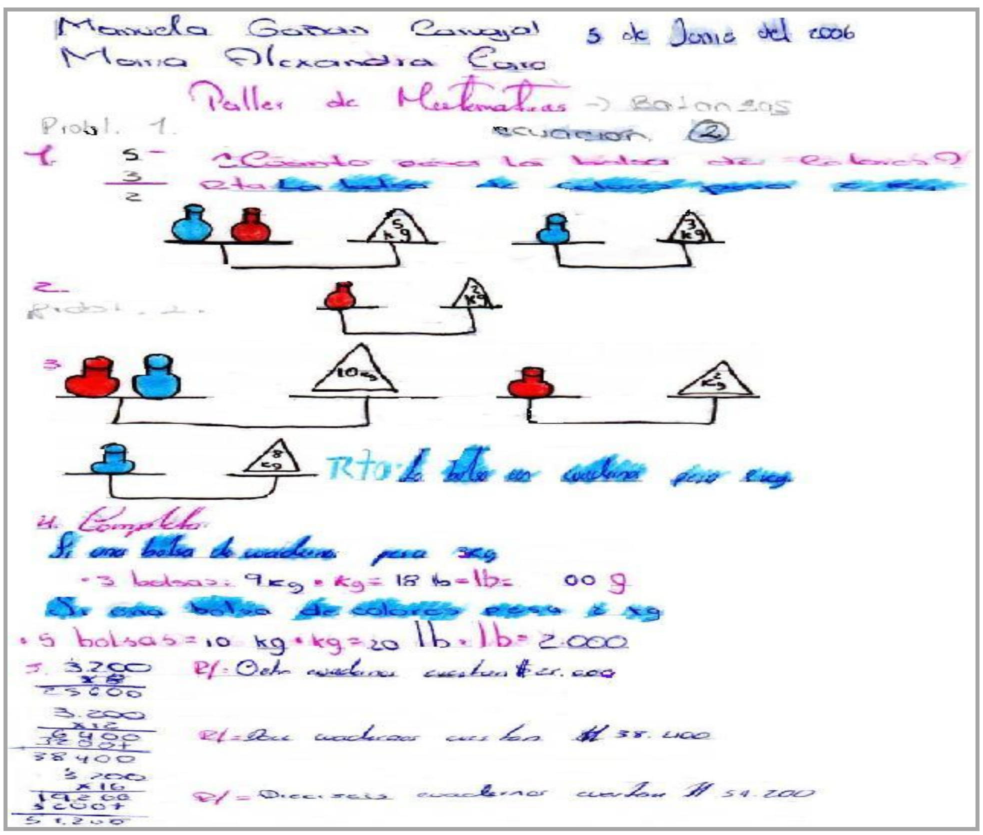
proporcionalidad, entendido como “una relación entre magnitudes” que involucra muchos de los conceptos que se han trabajado a lo largo de la educación primaria, sobre todo en la estructura multiplicativa con la multiplicación y la división. Desde el punto de vista cognitivo, constituye el paso a las llamadas operaciones formales, por tal razón, entre otras, “*la proporcionalidad es una relación de relaciones, contituyendose en la base para otras nociones importantes dentro de la matemática, como lo son; semejanza, escalas, homotecia, porcentajes, probabilidad, razones trigonométricas, función lineal, etc*.”. García P. y Amador G. (2004). Partiendo de la información que presenta la pregunta, las estudiantes realizan el dibujo de las balanzas (una representación pictórica) para bosquejar la situación propuesta, este procedimiento las lleva a establecer una “relación entre magnitudes”, que luego puede convertirse en una ecuación donde es necesario encontrar el valor de una letra llamada incógnita, entendida ésta como “*el valor de un número desconocido, aunque concreto, con el que se puede operar directamente*” Küchemann (1981).

Ellas no solo se limitan a encontrar el valor de la incógnita sino que aplican procedimientos como; identificar, caracterizar, describir y argumentar, para luego comparar los objetos que deben pesar en las balanzas, resaltándose la magnitud masa, cuya unidad básica es el kilogramo. Este trabajo se enmarca en uno de los ejes[56] para el desarrollo del razonamiento algebraico, llamado “*Aritmética generalizada: El uso de la aritmética como dominio de expresión y formalización para la generalización”*, el cual se divide en algunos procesos retomados desde Kaput (2005), quien en el contexto de la aritmética generalizada identifica siete procesos, resaltándose aquel que tiene que ver con “*la solución de problemas que involucran ecuaciones en las cuales la letra es interpretada como cantidad desconocida o incógnita*”. Éste, en esencia, expresa un nivel más sofisticado del sentido de la igualdad como relación de equivalencia, aplicadas a situaciones que

[56] Los ejes para el desarrollo del razonamiento algebraico, se toman del texto: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Módulo 2. De: POSADA B, Fabián A. et al. (2006) Gobernación de Antioquia. p. 26.

implican solucionar ecuaciones complejas (varias ocurrencias de la incógnita), o incluso sistemas de ecuaciones. De igual manera implica la construcción de la capacidad para operar con las incógnitas, y por ende, un paso más en la construcción de la noción de variable Posada B. et al. (2006; p 26).

Es un proceso, que de acuerdo a las capacidades y conocimientos de las estudiantes, y a las preguntas del taller, fue utilizado por ellas para darle significado a la representación icónica y así solucionar la mayor parte de este que les exigía observar, representar y aplicar algunos cálculos sencillos (sumar, restar, multiplicar, dividir), a la vez permitiéndoles llegar a la respuesta, esto lo hacen sin dejar de lado la aplicación de la proporción simple establecida desde la magnitud masa, a la vez que debían solucionar las ecuaciones tanto propuestas como las planteadas por ellas, pero miradas como relación de equivalencias.



Evidencia que muestra el proceso realizado por Manuela Gañan y María Alejandra (grado 5º-2)

Institución Educativa Héctor Abad Gómez

El taller “***Publicación de Mi cuento***”[57] aplicado el 10 de agosto de 2006 a las estudiantes (se aplicó sólo al grupo femenino) del grado cuarto-A (4º-A) del colegio Mano Amiga. Pretendía que ellas tuvieran una comprensión del enunciado a través de la lectura, permitiéndoles; realizar un buen conteo, establecer relaciones de orden y relaciones multiplicativas, interpretar y analizar gráficos de barras[58]. Este taller no sólo se enfocó al trabajo de cálculos sencillos, pretendía mostrarle al estudiante aquellas relaciones que guarda la matemática con otras áreas del conocimiento, para el caso se combinó algo de la literatura (el cuento) con la matemática.

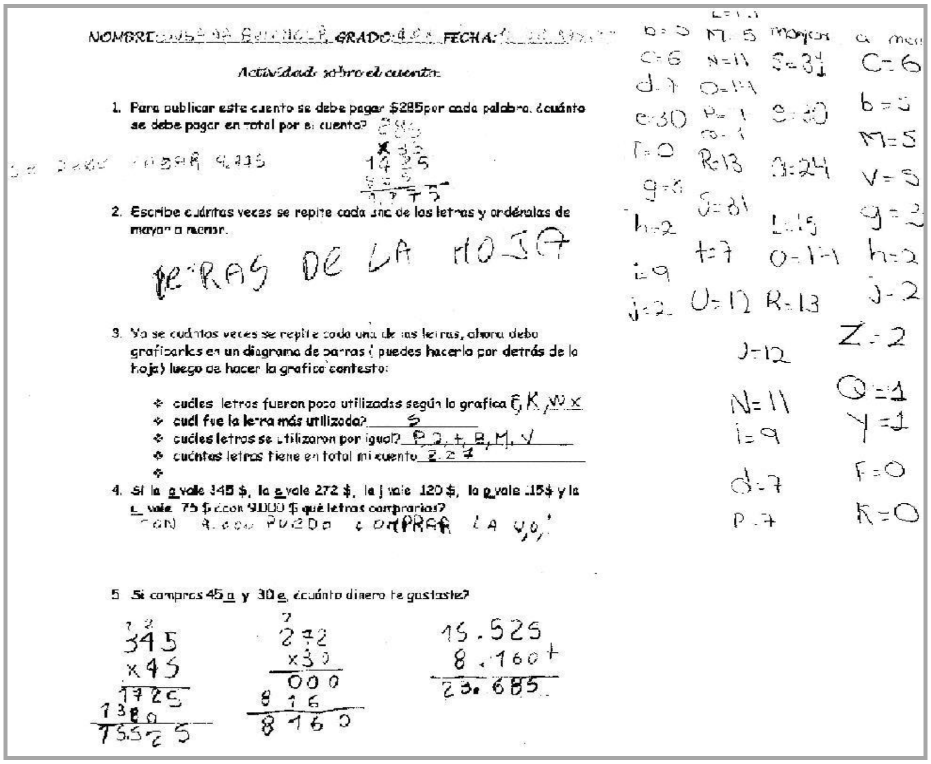
La estudiante Susana Betancur, realiza el taller de forma progresiva, resaltando la relación entre la pregunta y su posible respuesta. En las preguntas uno, tres y cuatro el resultado que obtiene al aplicar al algoritmo que ella considera ser el adecuado, no lo deja como un simple valor numérico, relaciona dicho valor con lo pedido en la pregunta, lo que conlleva a una aplicación de los procesos generales y de habilidades propuestas por John Mason para movilizar el estudio de los patrones, que son: “*Ver” Hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación…, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de algo común… El “Decir”, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar” es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos)…”* Mason et al. (1999, p. 17). Cada una de ellas se puede aplicar en cualquier actividad matemática, por lo que en este caso, aunque el taller no estuviera direccionado al trabajo de patrones, si permitió que la estudiante aplicara dichas habilidades sin ser consciente en lo que consiste cada una de ellas, pero que el docente las debe observar y ayudar a que sus estudiantes a través de un trabajo continuo y acorde a las condiciones de los

[57] Ver anexo: *Taller “Publicación de Mi cuento”*
[58] Las estudiantes ya tenían algunas nociones respecto a la forma de realizar los gráficos de barra, por lo que era un trabajo que la docente de matemáticas venía realizando con ellas en el desarrollo de las clases.

contextos de ellos, fortalezcan el ver, decir y registrar en el proceso de aprendizaje de la matemática escolar.

Ahora, al pasar a la pregunta cinco se observa que la estudiante se limita a realizar correctamente las operaciones matemáticas (multiplicaciones y sumas), pero no relaciona el resultado con la pregunta, por medio de una justificación escrita en la que comunique el significado de ésta. Sin embargo, es una situación que no desmerita el trabajo hecho por la estudiante, y el cual permite reafirmar la aplicación de los procesos generales y de las habilidades, anteriormente mencionadas, por parte del estudiante en la forma de responder las situaciones que él le proponga.

De otro lado, el trabajo hecho por la estudiante da aportes importantes al docente para reflexionar en torno a la forma de trabajar aspectos relevantes de los procesos algebraicos, en especial los que incluyan *situaciones de variación y cambio*, desde los primeros grados de escolaridad, de tal manera que se introduzca en el proceso de aprendizaje del estudiante, como lo proponen Blanton y Kaput (2003), actividades aritméticas donde los problemas sean redactados no para llegar a una sola respuesta sino con oportunidades para que el estudiante descubra patrones que permitan realizar y justificar conjeturas y posibles generalizaciones sobre hechos y relaciones matemáticas dentro de la vida cotidiana.


NOMBRE: GRADO: FECHA:

Actividad sobre el cuento:

1. Para publicar este cuento se debe pagar $285 por cada palabra. ¿cuánto se debe pagar en total por el cuento?
2. Escribe cuántas veces se repite cada una de las letras y ordénalas de mayor a menor.
3. Ya se cuántas veces se repite cada una de las letras, ahora debo graficarlas en un diagrama de barras (puedes hacerlo por detrás de la hoja) luego de hacer la grafica contesta:
   - cuáles letras fueron poco utilizadas según la grafica
   - cuál fue la letra más utilizada?
   - cuáles letras se utilizaron por igual?
   - cuántas letras tiene en total mi cuento
4. Si la a vale 345 $, la e vale 272 $, la j vale 120 $, la g vale 115$ y la L vale 75 $ ¿con 9000 $ qué letras comprarías?
5. Si compras 45 a y 30 e, ¿cuánto dinero te gastaste?

Evidencia de la estudiante Susana Betancur (grado 4°-A).Colegio Mano Amiga. (En la parte derecha se observan las preguntas y algunas respuestas, y en la izquierda la respuesta a la segunda pregunta)

5.3.4 Análisis de la categoría “Proporcionalidad”

“*El estudio de las estructuras multiplicativas en la escuela tiene como meta fundamental el desarrollo de lo que podría llamarse el pensamiento proporcional y por tanto su estudio no puede darse por fuera de la proporcionalidad. En otras palabras el estudio de la multiplicación y la división, separados de los conceptos básicos de proporcionalidad no sólo desarticula una unidad conceptual, sino que no permiten desarrollar en los alumnos un pensamiento matemático más avanzado*”. Posada et al (2005).

Para el análisis de las siguientes actividades se tomó el razonamiento proporcional en estrecha relación con la comprensión de conceptos fundamentales de las matemáticas, en concordancia con lo que Vergnaud ha llamado campo conceptual de las estructuras aditivas y multiplicativas; es decir el razonamiento proporcional se basa fundamentalmente en conceptos como: adición, sustracción, multiplicación, división, razón, proporción, función lineal etc.

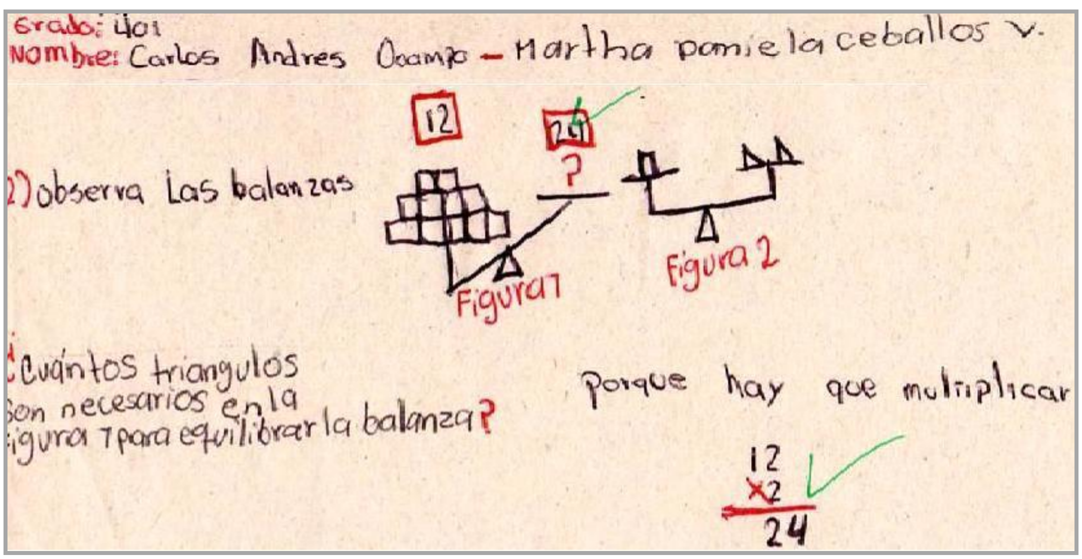
La estructura multiplicativa presenta una construcción progresiva que se da desde la estructura aditiva, donde se resalta la influencia del trabajo de la adición y de la sustracción, los cuales son elementos trabajados a la par con la adquisición del concepto del número. Al ocurrir ésto, es necesario reflexionar en el cómo el estudiante puede asumir dicha estructura en el desarrollo de su pensamiento, en este caso, a aquel relacionado con la matemática aplicada a su cotidianidad, donde es necesario tener claridad en los distintos modelos que presenta cada estructura, y que se van reforzando con el trabajo continuo y pertinente de situaciones problema de la vida diaria.

Tal como lo afirma Encarnación Castro, para que el niño pueda trabajar en el desarrollo de la estructura multiplicativa, o en otras palabras, "*comenzar a trabajar en el producto y en la división*", es esencial que "*tenga un nivel y un dominio de los números, que conozca su simbolización*", debido a que dicho trabajo le exige un grado más completo que en el de la suma y la resta. No se debe asumir la multiplicación o la división como dos operaciones que pretenden la aplicación de determinado modelo o algoritmo, sino como aquellas operaciones que exigen una construcción, un conocimiento, un dominio y una aplicación de modelos que ya han sido construidos, a través de todo un proceso de matematización, en el que se resalta su pertinencia en las distintas situaciones que vive el niño". Castro E (1995)

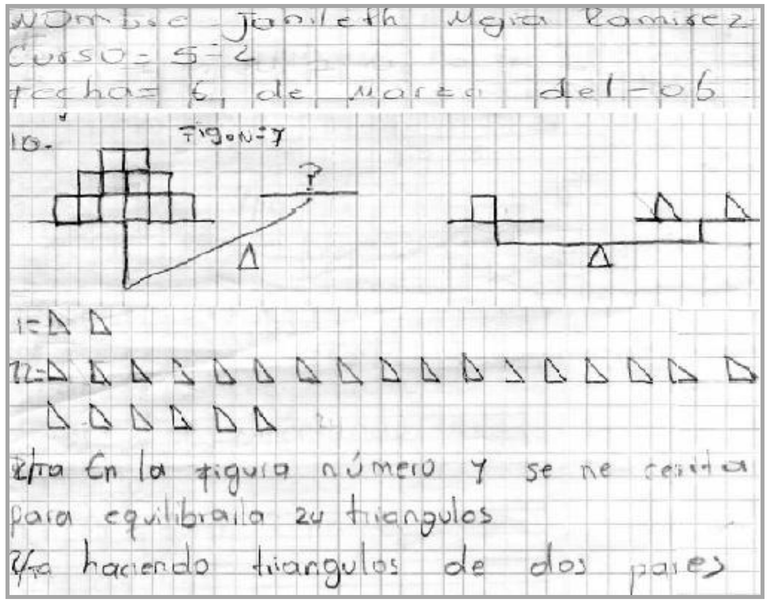
A continuación se mostrarán algunas evidencias de la Actividad Diagnóstico Inicial que dejan ver las estrategias que utilizaron los estudiantes al resolver el último punto de dicha actividad.

En este problema, los estudiantes debieron observar, analizar e interpretar la representación gráfica que allí se les mostró, en este caso unas balanzas. A partir de este análisis tuvieron que responder a la pregunta de cuántos triángulos son necesarios para equilibrar la balanza, se pretendía que argumentaran y explicaran la respuesta de forma coherente y las estrategias utilizadas para dar solución a ella, además evidenciar el desarrollo del razonamiento proporcional y la generalización tanto verbal como formal que los estudiantes tenían.

Al revisar la forma como los estudiantes resolvieron este punto, se logró evidenciar como ellos utilizaron las estructuras aditivas y multiplicativas en las estrategias y argumentos, observándose lo siguientes:
"*profe, como un cuadrito vale dos triángulos, entonces yo conté todos que son 12 y los multipliqué, por 2 eso me da en total 24*" (estructura multiplicativa); este tipo de solución fue presentado por los estudiantes Carlos A. Ocampo y Martha D. Ceballos (grado 4º-1) de las Institución Educativa Héctor Abad Gómez.



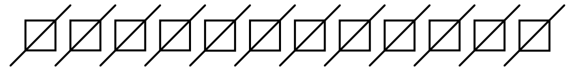
Otros, simplemente contaron los cuadrados de la primera balanza de dos en dos (estructura aditiva), llegando a la conclusión de que cada cuadrado esta conformado por dos triángulos:



Evidencia del trabajo hecho por la estudiante Janileth Mejía (grado 5º-2) en la última pregunta de la Actividad Diagnóstico Inicial. Institución Educativa Héctor Abad Gómez

En los grupos del grado sexto, una de las estrategias más utilizadas fue el uso por parte de los estudiantes de ayudas gráficas, observándose entre otros, el razonamiento inductivo que ellos tienen. Dentro de las propuestas de solución de los estudiantes a este problema, se tiene la de Carolina Piedrahita (grado 6º-2); ella sacó aparte los 12 cuadrados que se le mostraba en la primera balanza y a cada uno de ellos le trazó una línea, de manera que estos quedaron divididos en dos triángulos, luego de tener esta división se dispuso a contar cada uno de ellos. Algo para resaltar fue la ayuda corporal utilizada por la mayoría: (contar con los dedos), y la poca utilización del conteo mental para obtener el total de triángulos.

Estrategia utilizada por la estudiante Carolina Piedrahita (grado 6º-2) de la institución Educativa Héctor Abad Gómez:

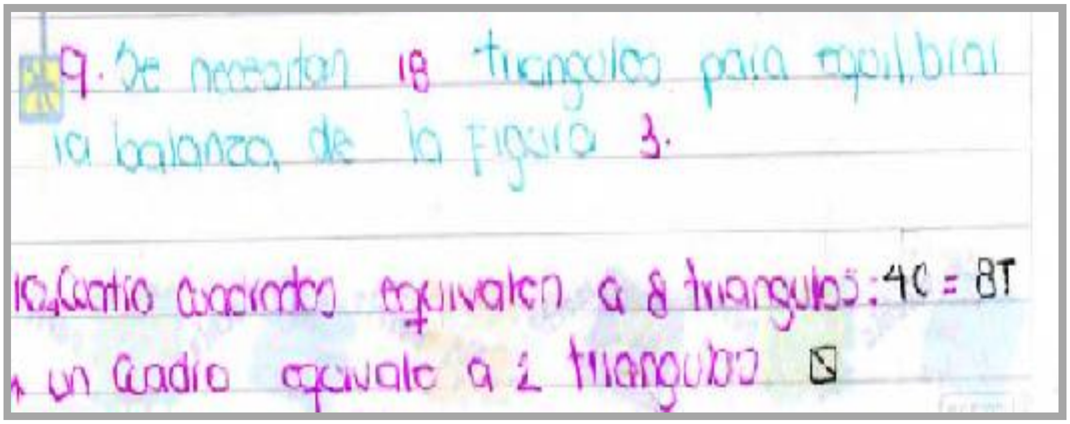


En esta actividad se evidenció como los estudiantes establecieron una comparación directa entre las dos figuras reconociendo la importancia de la información que tiene la figura número dos, además de hacer inferencias según las figuras suministradas. Se observa una de las fases que proponen investigadores como Lesh et al. (1998-2003) en relación a la construcción del razonamiento proporcional, esta fase se caracteriza por el uso de estrategias centradas en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades, pero desde una perspectiva aditiva, más que multiplicativa.

En el grado séptimo la pregunta número 10 de la Actividad Diagnóstico Inicial tuvó como intención que los estudiantes utilizaran el lenguaje matemático y crearan modelos que representaran la relación entre las figuras geométricas propuestas. Con base en las respuestas dadas por los estudiantes se pretendió además evidenciar el razonamiento proporcional[59] al modelar situaciones donde intervengan distintos niveles de igualdad[60].

Como se puede observar, el razonamiento matemático que utilizó la estudiante Sirley Posada (grado 7º-2) de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, deja ver la creación de un modelo matemático al escribir que "***4C = 8T***"; además tuvó claro el concepto de equivalencia en la proposición que se le propuso, pues afirmó que "*equivalencia es sinónimo de igualdad*". También, se infiere que a pesar de que no utilizó la ecuación que ella creó para dar respuesta a la pregunta ¿un cuadrado a cuántos triángulos equivale?, utilizó el sistema de representación escrito y gráfico y respondió "*un cuadro equivale a dos triángulos*" y dibujó una figura que da cuenta de su respuesta:

[59] Desde una perspectiva Piagetiana, el razonamiento proporcional es indicador de las operaciones formales del pensamiento, e implica el tratamiento consistente de relaciones de covariación entre variables [...] este tipo de análisis los lleva a proponer que el razonamiento proporcional esta en estrecha relación con relaciones multiplicativas antes que con relaciones aditivas. (tomado del modulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, p. 79)
[60] Entendida la igualdad como equivalencia entre ecuaciones.



En conclusión, la lectura que se realiza a los procedimientos utilizados por Sirley para dar respuesta a esta pregunta evidencia el razonamiento inductivo y el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional que esta estudiante tiene.

Algunos talleres propuestos a los estudiantes tenían como objetivo que ellos representaran la covariación[61] entre dos magnitudes, de manera que le dieran sentido a la construcción de las operaciones y las relaciones multiplicativas que había entre ellas.

En el siguiente taller "*Casas de Palillos*"[62] los estudiantes con base en un sistema de representación gráfico tenían que hallar un patrón que diera cuenta de la regularidad que caracterizaba dicha figura, además a través del diseño y elaboración de una tabla se podía evidenciar entre otros; el razonamiento proporcional y los procesos de generalización de ellos.

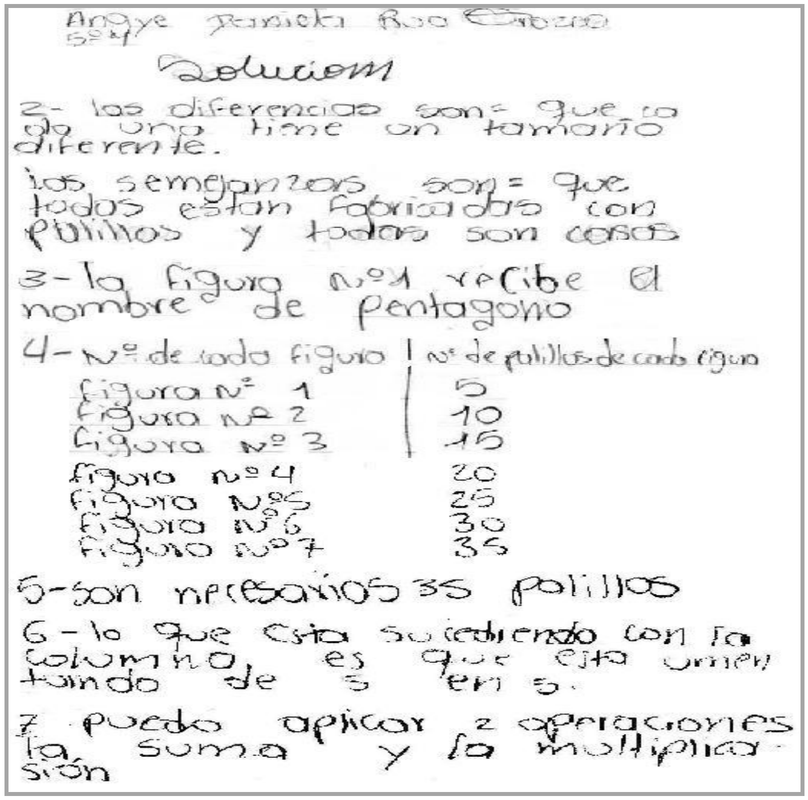
En el taller estaba propuesta la pregunta; *elabora una tabla de dos columnas donde se registre en una de ellas el número de cada figura y en la otra el número de palillos que tiene la figura*, con el diseño y elaboración de esta tabla se

[61] La covariación implica que dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio (s) en la(s) restante(s).
[62] Ver anexo: *Taller "Casa de palillos"*

buscaba que los estudiantes realizaran un análisis escalar[63] y con base en ella dieran cuenta de la comprensión, reflexión y análisis de los datos registrados

La estudiante Angye D. Rúa (grado 5º-4) de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, realizó conteos verbales de cinco en cinco, ésto se evidenció en la respuesta a la pregunta número cinco, aunque es una respuesta válida mostró que esta estudiante utilizó la estructura aditiva y realizó una lectura de la tabla vertical; se esperaba que ella utilizara un razonamiento multiplicativo entendido éste como "*un análisis de la correlación simultanea de varios espacios de medida*" Obando G y Botero O (2006; p 79), es decir, que argumentara las respuestas cinco y seis a través de un análisis escalar donde relacionara los datos de la primera columna con la segunda, y que descubriera por ejemplo, que "*la figura uno cabe "n veces" en la figura tres*"; o que infirieran que en esta tabla estaba inmersa la tabla de multiplicar del cinco.

[63] Entendido "*este tipo de análisis como la relación entre las variaciones en uno de los espacios de medida con respecto a las variaciones en el otro. o dicho de otra forma, cambios en un espacio de medida, generan cambios simétricos en el otro espacio de medida"*. Obando G y Botero O (2006; p 82) Unidad número 3: La Proporcionalidad Directa e Inversa a partir de la modelación de situaciones de variación.



Angye Daniela Rua
5º4

Solucion

2- los diferencias son= que ca
da una tiene un tamaño
diferente.

los semejanzas son= que
todos estan fabricados con
palillos y todos son casas

3- la figura Nº1 recibe el
nombre de pentagono

4- Nº de cada figura	Nº de palillos de cada figura
figura Nº 1	5
figura Nº 2	10
figura Nº 3	15
figura Nº 4	20
figura Nº 5	25
figura Nº 6	30
figura Nº 7	35

5- son necesarios 35 palillos

6- lo que esta sucediendo con la
columna, es que esta aumen
tando de 5 en 5.

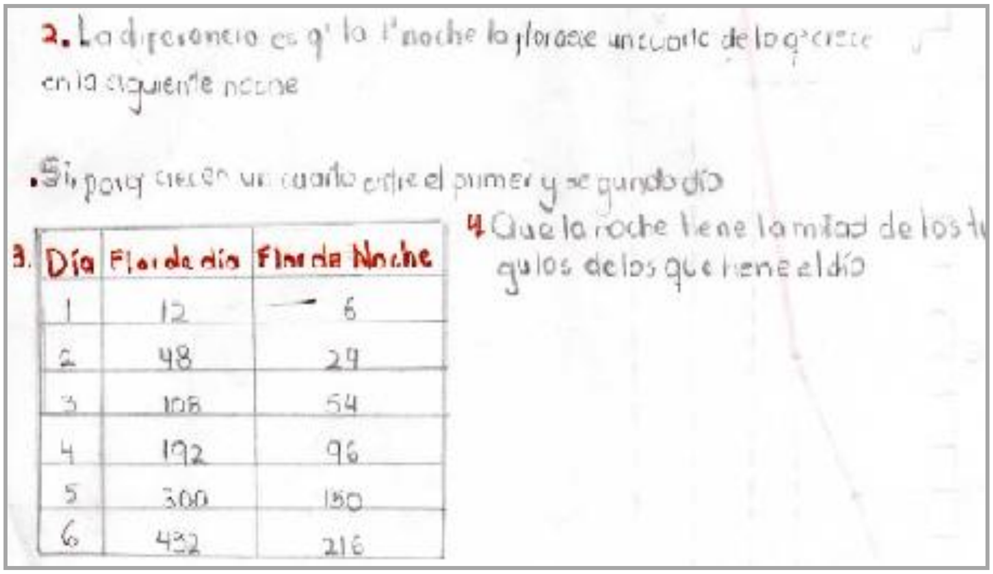
7 puedo aplicar 2 operaciones
la suma y la multiplica-
sión

Evidencia de la estudiante Angye Daniela Rúa E. (grado 5º-4)
Institución Educativa Héctor Abad Gómez

En síntesis, con esta actividad se proponía una situación multiplicativa específica, que exigía a la estudiante correlacionar el número de cada figura, con el número de palillos que tiene la figura.

Comparando los procedimientos realizados por la estudiante Angye D. Rúa (grado 5º-4) con los de las estudiantes Jana Loaiza y Verónica Álvarez (grado 7º-2), se pudieron observar algunas diferencias en cuanto al razonamiento proporcional, ya que Jana y Verónica tuvieron un razonamiento multiplicativo más elaborado, utilizando generalizaciones verbales como las que se evidenciaron en las respuestas dadas a las preguntas dos y cuatro de la actividad final, éstas dieron cuenta de la comprensión de las estructuras multiplicativas al correlacionar los espacios de medida, e igualmente, al realizar un análisis escalar con base en los datos registrados en la tabla que elaboraron.

A continuación se muestra las respuestas dadas por las estudiantes Jana Loaiza y Verónica Álvarez (grado 7º-2):


2. La diferencia es q' la 1ª noche la flor crece un cuarto de lo q' crece en la siguiente noche

•Si, porq crecen un cuarto entre el primer y segundo día

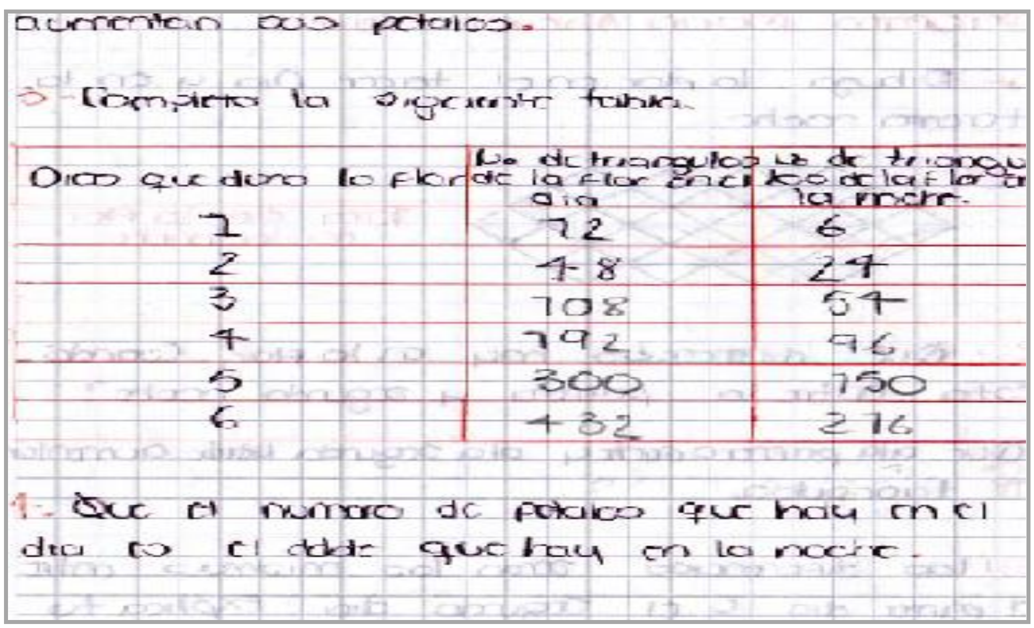
3.

Día	Flor de día	Flor de Noche
1	12	6
2	48	24
3	108	54
4	192	96
5	300	150
6	432	216

4 Que la noche tiene la mitad de los triangulos de los que tiene el día

Evidencia de la estudiante Jana Loaiza (grado 7º-2)

Institución Educativa Héctor Abad Gómez


aumentan dos petalos.

3- Completa la siguiente tabla.

Dias que duro la flor	No de triangulos de la flor en el dia	No de triangulos de la flor en la noche
1	12	6
2	48	24
3	108	54
4	192	96
5	300	150
6	432	216

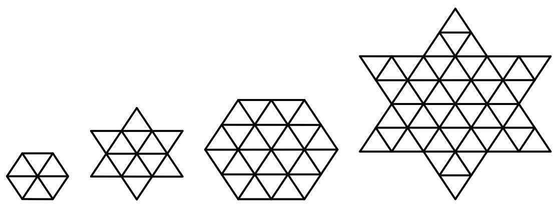
4- Que el numero de petalos que hay en el dia es el doble que hay en la noche.

Evidencia de la estudiante Verónica Álvarez (grado 7º-2)

Institución Educativa Héctor Abad Gómez

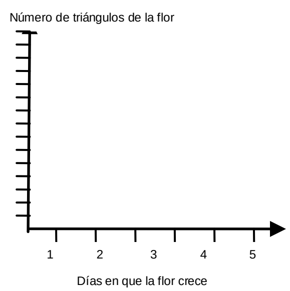
5.4 Sistematización del Análisis de la Actividad Final de los grados cuarto a séptimo.

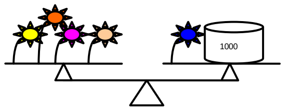
Esta actividad se diseño con un nivel de complejidad mayor a los anteriores. Se quería ver que transformaciones se habían en el proceso de aprendizaje de los estudiantes usando el contexto de la geometría, y sin dejar de lado el reconocimiento de patrones y regularidades y la aplicación de estrategias que los llevara a lograr un proceso de generalización verbal y luego formal, y por ende la posible construcción de modelo matemático acorde a las condiciones propuestas en la actividad.

CATEGORIA	PREGUNTA	PUNTOS EN COMÙN
Patrones y Regularidades. Sistemas de Representación. Procesos Algebraicos.	1). Dibuja la flor del día 3; durante el día y la noche 	Se les dificulta dibujar y describir figuras geométricas, debido a que no reconocían y aplicaban las características de los polígonos. No vislumbraban una estrategia para llegar a la construcción de la flor hexagonal, aunque formulan hipótesis, pero no la ponían a prueba, debido a que el nivel de abstracción era muy intuitivo; haciendo afirmaciones como por ejemplo: “la flor de día es muy grande y no me caben en la hoja”. Algunos alcanzaron a notar que la flor de día, era el doble de la flor de la noche.
Patrones y Regularidades Sistemas de Representación	2. ¿Qué diferencias hay en la flor, cuando esta entre la primera y la segunda noche?	Uno de los intereses de la propuesta, era lograr cambios en la construcción del lenguaje matemático, encontrándose que el lenguaje de los estudiantes ya es más elaborado, por lo que responden a expresiones como: “En la primera noche la flor florece ¼ de lo que crece en la siguiente noche”.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>“En la flor de la segunda noche cabe la flor de la primera noche”.
“De la primera a la segunda noche la flor tiene un crecimiento de 18 pétalos”
Utilizan la estructura aditiva para establecer diferencias entre la primera y la segunda noche del primer y segundo día. La diferencia del día uno al día 2 es de 18 (flor de noche)” “en la primera noche hay menos triángulos que en la segunda noche”
Solo en los grados séptimo y octavo algunos estudiantes establecen relaciones multiplicativa para explicar lo que esta sucediendo con la flor hexagonal tanto en el primer como en el segundo día.</td>
</tr>
<tr>
<td>Sistemas de Representación

Procesos Algebraicos.</td>
<td>3. Completar la tabla
<table>
<tr><th>Días que dura la flor</th><th>Nº de triángulos de la flor en el día</th><th>Nº de triángulos de la flor en la noche</th></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>48</td><td>24</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Intentaron buscar una regularidad, para completar la tabla.
Solo en los grados séptimo y octavo llegaron a establecer una relación multiplicativa entre las columnas que sistematizaban el proceso del crecimiento de la flor, mientras que en los grados de cuarto a sexto utilizaron relaciones aditivas.
Algunos estudiantes deducían el crecimiento de la flor para llenar la tabla teniendo en cuenta lo analizado en los dos primeros puntos.
Utilizaron el lenguaje matemático para expresar que el número de triángulos en la flor de noche era el doble de triángulos de la flor de día. Los estudiantes afirmaron que el número de triángulos de la flor en la noche eran la mitad de los triángulos de la flor en el día</td>
</tr>
</table>

Sistemas de Representación Procesos Algebraicos.	4. ¿Qué observas que pasa con los números de triángulos que componen la flor hexagonal, entre el día y la noche, según los datos obtenidos en la tabla?	En los grados de cuarto a sexto se estableció que la flor de día era el doble que la flor de noche en forma aditiva y en séptimo y octavo de forma multiplicativa. Utilizaron el lenguaje matemático expresado que “en la flor de día se duplican los triángulos”. En los grados de cuarto a sexto la estrategia utilizada por los estudiantes fue el conteo “uno a uno” y a partir de la visualización de la tabla resuelta.
Patrones y Regularidades Sistemas de Representación Procesos Algebraicos.	De acuerdo a lo que obtuviste en la tabla, gráfica en el plano cartesiano el crecimiento de la flor durante un día, teniendo en cuente el aumento en el número de triángulos.  ¿Qué parejas ordenadas encontraste? Une los puntos donde ubicaste las parejas ordenadas, con color rojo. ¿Qué gráfica obtuviste? ¿Por qué crees que resulta esa gráfica? Ahora, debido a la belleza de la flor hexagonal, algunos extranjeros han pedido dicha flor para exportarla a sus	Los estudiantes de octavo utilizaron adecuadamente el plano cartesiano, pero no sabían identificar el tipo de función que se presentaba. Algunos de los estudiantes de octavo aplicaban en la grafica las cantidades que tenían en la tabla. Solo algunos de los estudiantes de octavo llegaron a explicar que la grafica que daba era porque estaba creciendo constantemente la cantidad de triángulos tanto en el día como en la noche de una misma forma, pero no fueron capaces de expresarlo por medio de la proporcionalidad (relación funcional). Los estudiantes de séptimo y octavo reconocieron relaciones entre el conjunto de datos y lo representaron en el plano cartesiano, ya que encontraron significados en las parejas ordenadas que utilizaron para elaborar la grafica. Dando respuestas como: “los números que están en el eje X son los días en los que florece la flor y los que están en el eje Y son el total de triángulos que florece la flor ese día” Al unir los puntos de las parejas ordenadas en el plano, los estudiantes de séptimo expresaron que era una línea que entre

	países de origen. Para ello, es necesario pesar las flores que serán exportadas. A continuación se muestra el peso de las mismas:  Para la exportación de la flor se deben empacar en cajas, que pesa cada una 5500 gramos. ¿Cuántas flores debe ir en cada caja? Si la exportación total es de 2500 flores. ¿En cuántas cajas deben ir empacadas las flores?	más días creciera la flor, la línea también crecía. La gran mayoría de los estudiantes de octavo lo expresaron en regla de tres simple, pero se les dificulto manejar el número decimal en las repuestas, ya que expresaban que “no daba porque era un número decimal”. Las estudiantes del grado 4-A del Colegio Mano Amiga, realizaron las transformaciones haciendo equivalencia entre los gramos del barril y el peso de las flores, y mediante un lenguaje matemático quisieron expresar una ecuación sin llegar a definirla algebraicamente.

6 CONCLUSIONES

- Con base en el rastreo bibliográfico realizado, se concluye que la enseñanza de las *situaciones de variación y cambio* no es tomada en cuenta desde los primeros años de escolaridad, pero el currículo en matemáticas suministra elementos y herramientas al docente para tomar el trabajo del Pensamiento Variacional como eje transversal en los demás pensamientos matemáticos. Entre estos elementos se encuentran las Situaciones Problema enmarcadas en la cotidianidad y en la ciencia, permitiendo al estudiante involucrarse en su proceso de aprendizaje de una manera directa y así contribuir a la formalización de conceptos matemáticos.

- La importancia de incluir el Pensamiento Variacional es que se convierta en una actividad intelectual, de examinar y detectar por medio de la inducción y la deducción, patrones y regularidades, sistemas de representación, procesos algebraicos y estructuras aditivas y multiplicativas que conlleven a resolver una situación problema, a través de diferentes estrategias encaminadas a los procesos de generalización y a la creación y aplicación de modelos matemáticos.

- La propuesta de Intervención Didáctica conlleva a que las Situaciones Problema propuestas, permitan la comunicación oral y despierten el interés de los estudiantes en tomar la iniciativa de participar en las mismas. Además, afianzar en ellos la cooperación, la solidaridad, el trabajo colaborativo, el respeto a las diferencias y a las normas colectivas.

- Durante el desarrollo de la propuesta de Intervención Didáctica se evidenció como los estudiantes de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y el Colegio Mano Amiga, utilizaron los procesos generales propuestos en los

Lineamientos Curriculares de Matemáticas (resolución y planteamiento de problemas, razonamiento, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos) para dar solución a las actividades propuestas, reflejándose de igual modo, las habilidades matemáticas con las que ellos contaban (intuición, capacidad de observación, percepción, definiciones, conocimiento previo de los conceptos, procedimientos y concepciones sobre las reglas a aplicar).

- Con base en el análisis de las Categorías, la estructura de los talleres permitió en los estudiantes un mayor acercamiento al lenguaje verbal y escrito, siendo éste esencial para que se de una comunicación, concisa, precisa y rigurosa. El lenguaje matemático aplicado a diferentes fenómenos (en especial aquellos que tienen que ver con *situaciones de variación y cambio*), y aspectos de la realidad, es un instrumento eficaz que ayuda a comprender mejor el entorno que rodea a los estudiantes y a visualizar objetivamente un mundo en continua evolución.

- El Proceso de aprendizaje de los estudiantes permitió resaltar la lectura crítica y reflexiva que se debe realizar a los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas, por lo que son directrices que brindan elementos (Procesos Generales, Contextos y Conocimientos Básicos) para el planteamiento , diseño y ejecución de una propuesta de aprendizaje. En este caso, se resalta la resignificación que se le da a la triada Docente-Saber-Estudiante.

7 RECOMENDACIONES

- Se sugiere continuar con esta propuesta de Intervención Didáctica, donde las *situaciones de variación y cambio* son fundamentales para que los estudiantes adquieran procesos de generalización, porque éstos no se desarrollan a corto plazo, necesitan de un trabajo continuo, en el que las categorías aplicadas estén presentes en su proceso de aprendizaje de las matemáticas escolares.

- Se le sugiere a los docentes el desarrollo de situaciones problema que impliquen construir y fortalecer las estructuras multiplicativas desde los primeros grados de escolaridad en los estudiantes. Ellas permiten el desarrollo del razonamiento proporcional.

- La actividad matemática incluye contextos tanto disciplinar como sociocultural que afectan los procesos de enseñanza y aprendizaje debido a múltiples factores, entre ellos se tienen: cognitivos, comportamentales, afectivos, psicológicos e insuficiencia en los recursos y dotaciones de las instituciones educativas, los cuales no son retomados con frecuencia para analizarlos dentro de comunidades académicas.

- Los docentes cooperadores deben ser parte fundamental del proceso que los maestros en formación inician en las instituciones educativas, su participación activa permitiría un buen acompañamiento y también que sus valiosos aportes en los procesos de aprendizaje que se dan dentro y fuera del aula fueran objeto de reflexión al interior de cada proyecto investigativo..

8 ANEXOS

Anexo: Instrumento evaluativo dirigido a los docentes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FORMATO DE EVALUACIÓN

Nombre del Docente: ______________________________ **Jornada:** ______________
Àrea de conocimiento: ________________________________

Apreciado docente, el siguiente espacio es para evaluar las actividades: **Taller teórico-práctico de Situación Problema y "El Carrusel Matemático"**, elaboradas por los maestros en formación de la Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Matemáticas, de la Universidad de Antioquia que realizan la práctica profesional en la institución Educativa Héctor Abad Gómez..

Marque con una equis "X" la casilla que considera que cumple con los criterios que se describen en la siguiente tabla, teniendo en cuenta las calificaciones: excelente (E), sobresaliente (S), aceptable (A), insuficiente (I) deficiente (D).

CRITERIO	E	S	A	I	D
Desempeño de los maestros en formación en las actividades en que participó					
Las actividades contribuyeron a la formación de los estudiantes.					
Claridad en las exposiciones.					
Pertinencia de la metodología aplicada en cada actividad.					
Calidad académica del trabajo realizado.					
Puntualidad y tiempo dedicado para las orientaciones requeridas por las actividades.					
Aporte de las temáticas para el desarrollo y avance en las propuestas del proceso de enseñanza y aprendizaje.					
Cumplimiento de sus necesidades, expectativas e intereses.					
Respeto por los asistentes (estudiantes y docentes) a las actividades.					

Responda, según considere:

- ¿Cómo puede ayudar el trabajo de las actividades, a la interdisciplinariedad y al mejoramiento de los procesos educativos dentro y fuera del aula de clase?
- ¿Considera que las actividades propuestas favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Justifique su respuesta.
- Plantee algunas sugerencias para los maestros en formación, que puedan contribuir en el buen desarrollo de próximas actividades.

Muchas gracias por su participación y grandes éxitos en su labor docente.

Formato de evaluación, diseñado por los Maestros en Formación del noveno semestre de la Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación. Universidad de Antioquia, y con la asesoría de la docente Luz Marina Díaz Gaviria.

Anexo: Instrumento evaluativo dirigido a los estudiantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FORMATO DE EVALUACIÓN

NOMBRE: ______________________________________ **GRADO:** _____________

Apreciado estudiante; marque con una X, la valoración que usted considere pertinente con relación a la actividad: "El Carrusel Matemático", realizado en la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, el 18 de octubre. Para esta evaluación tenga en cuenta las siguientes valoraciones: DEFICIENTE (D), INSUFICIENTE (I), ACEPTABLE (A), SOBRESALIENTE (S), EXCELENTE (E).

CRITERIOS	E	S	A	I	D
La motivación en el desarrollo de la actividad.					
El tiempo para desarrollar cada actividad					
Claridad en las explicaciones, por parte de los orientadores					
Espacio utilizado					
Material utilizado					
Respeto por parte de los orientadores hacia los estudiantes					
Claridad en las explicaciones, en cada una de las actividades					

1. Las actividades realizadas fueron de su agrado. SI______ NO______,
   ¿Por qué?____

2. ¿Cuál fue la actividad que más le gusto?________________________________

3. Haga una lista de los conocimientos que repasó o adquirió en las diferentes estaciones de "El Carrusel Matemático" por las que tuvo la oportunidad de pasar.________________
____

4. Mencione las dificultades que se le presentaron en las estaciones de "El Carrusel Matemático____
____

5. ¿Le gustaría que esta actividad se volviera a repetir? SI_____ NO_____,
   ¿Por qué?____
   ____

6. Sugerencias para un próximo carrusel matemático para realizar en la institución._______
   ____

Muchas gracias por su participación y grandes éxitos para el próximo año.

Formato de evaluación, diseñado por los Maestros en Formación del noveno semestre de la Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación. Universidad de Antioquia, y con la asesoría de la docente Luz Marina Díaz Gaviria.

Anexo: Actividad Dignóstica Inicial para los grados cuarto, quinto y sexto

LAS TORRES (parte uno)[23]

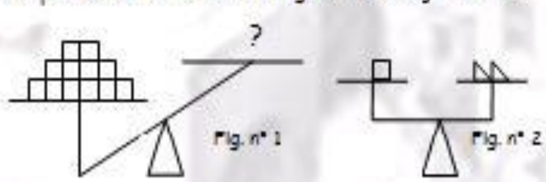
Observe los siguientes arreglos de cuadritos:

Responde las preguntas con respecto a las figuras presentadas:

1. Dibuja la figura n° 9 y responde ¿cuántos cuadritos hay en esta figura?
2. ¿Cuáles son los números que representan los cuadritos que están en la primera fila de cada figura (iniciando desde la primera)?
3. ¿Qué estrategias puedes utilizar para encontrar la cantidad de cuadritos negros y blancos a partir de la figura n° 3?
4. ¿Cuántos cuadros negros y blancos hay en total en la figura n° 9?
5. Completa la siguiente tabla:

Figura n°	N° de cuadros en la 1ª fila	N° de cuadros en la 2ª fila	N° de cuadros blancos	N° de cuadros negros	Total de cuadros
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

6. ¿Qué puedes decir de los datos obtenidos en las columnas 2 y 3, y de los datos obtenidos en las columnas 4 y 6?
7. ¿Con cuáles figuras puedes formar cuadrados, moviendo uno o varios cuadritos? Y ¿cuántos cuadritos hay en cada figura?
8. Un cuadrito representa una unidad de área, ¿cuántas unidades de área contienen la figura n° 10?
9. ¿Qué fracción representan los cuadritos negros de la figura n° 7?



10. ¿Cuántos triángulos son necesarios en la figura 1 para equilibrar la balanza? Explica por escrito como hiciste para hallar la respuesta a la pregunta anterior.

Anexo: Actividad Diagnóstico Inicial para el grado séptimo

LAS TORRES (parte dos)[24]

Observe la siguiente secuencia de figuras y responde las siguientes preguntas:

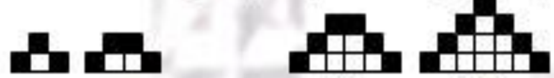


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 4 Fig. 5

1. Representa gráficamente la posición de la figura número 3?
2. ¿De qué otra manera podemos representar las figuras de cada posición?
3. ¿Cuántos cuadritos deben haber en la figura de la posición número 10?
4. ¿Cuántos cuadrados negros y blancos encuentras en la figura número 8?
5. Si cada uno de los lados de cada cuadrado que conforma una figura miden 3 unidades (3u).
6. Realiza las operaciones que sean necesarias para llenar la siguiente tabla.

Figura No.	Número de lados	Perímetro	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Con la información suministrada en la tabla responde las siguientes preguntas:

7. ¿Qué podemos decir del perímetro respecto al número de lados y al contrario?
8. ¿Con cuáles figuras puedes formar cuadrados, moviendo uno o varios cuadritos (representa gráficamente esta situación)? Después compara los perímetros y las áreas de las figuras con las de la tabla. ¿Qué podemos concluir de esta situación?
9. Con cuáles figuras puedes formar rectángulos, moviendo uno o varios cuadritos (representa gráficamente esta situación). Después compare los perímetros y las áreas de las figuras que hizo con las de la tabla. ¿Qué podemos concluir de esta situación?
10.

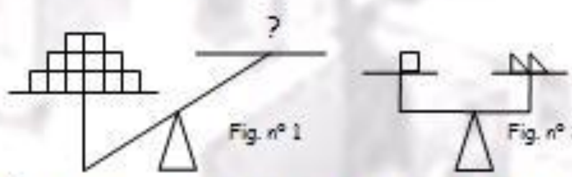


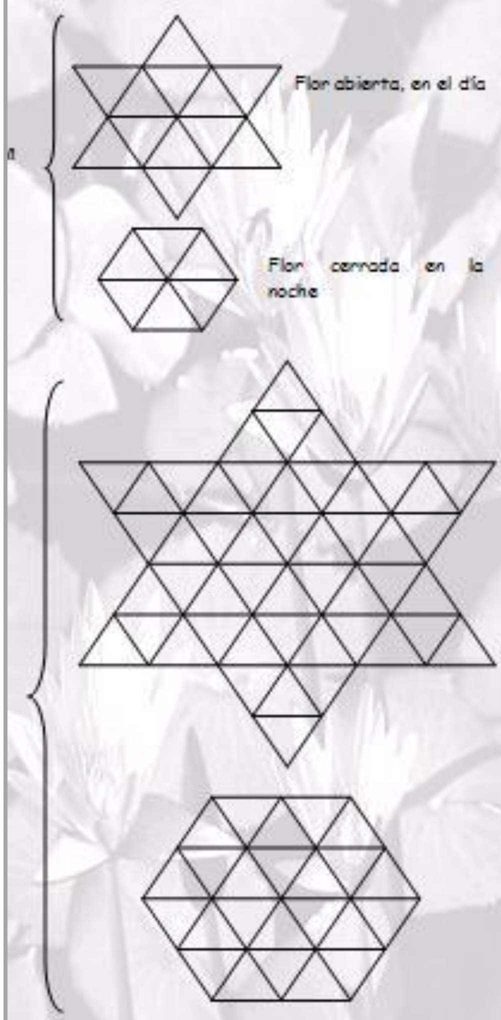
Fig. nº 1 Fig. nº 2

11. ¿Cuántos triángulos son necesarios en la figura 3 para equilibrar la balanza?
    a) Utiliza el lenguaje matemático para simbolizar la siguiente proposición: "Cuatro cuadrados equivalen a ocho triángulos".
    b) Resuelve la siguiente situación utilizando una ecuación: ¿un cuadrado a cuántos triángulos equivale?

Anexo: Actividad Final para los grados de 4° a 8°

LA EXTRAÑA FLOR HEXAGONAL[26]

De un planeta lejano se ha traído una extraña especie de flor en forma de Hexágono, que crece durante seis días hasta marchitarse y morir. Su crecimiento lo hace formando, en todo su interior y en los pétalos, triángulos de igual tamaño. Esta flor abre sus pétalos en el día y los cierra en la noche. (Ten en cuenta que un día se compone, de 12 horas de día y 12 horas de noche).



1. Dibuja la flor en el tercer día y la tercera noche.
2. ¿Qué diferencias hay en la flor, cuando está entre la primera y segunda noche?
   ¿Las diferencias serán las mismas entre el primer día y el segundo día? Explica tu respuesta.
3. Completa la siguiente tabla, donde encuentras el número de *triángulos (de igual tamaño) que conforman la flor,* durante el día y durante la noche.

Días que dura la flor	N° de triángulos de la flor en el día	N° de triángulos de la flor en la noche
1	12	6
2	48	24
3		
4		
5		
6		

4. ¿Qué observas que pasa con el número de triángulos que componen la Flor Hexagonal, entre el día y la noche, según los datos obtenidos en la tabla?
5. De acuerdo a lo que obtuviste en la tabla, gráfica en el plano cartesiano el crecimiento de la flor durante un día, teniendo en cuente el aumento en el número de triángulos.

Primera página

6. ¿Qué parejas ordenadas encontraste?

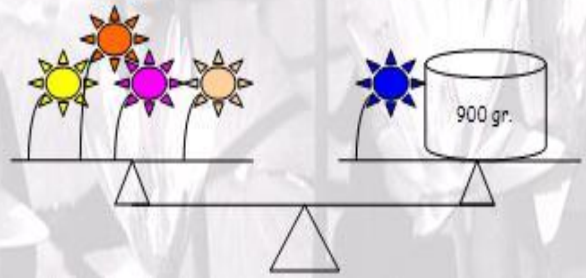
7. Une los puntos donde ubicaste las parejas ordenadas, con color rojo.

8. ¿Qué gráfica obtuviste? ¿Por qué crees que resulta esa gráfica?

Ahora, debido a la belleza de la flor hexagonal, algunos extranjeros han pedido dicha flor para exportarla a sus países de origen. Para ello, es necesario pesar las flores que serán exportadas.

A continuación se muestra el peso de las mismas:

¿Cuánto pesa el ramo de flores hexagonales?
¿Cuánto pesa cada flor?



Segunda página

Anexo: Taller “Casa de Palillos”

CASAS DE PALILLOS[31]

Observa las casas que se han elaborado con algunos palillos.

Figura Nº 1 Figura Nº 2 Figura Nº 3

1. Escriba las diferencias y semejanzas que hay entre las figuras.
2. ¿Qué nombre recibe la figura Nº 1?
3. Elabora una tabla de dos columnas donde se registre, en una de ellas: **EL NÚMERO DE CADA FIGURA** y en la otra **EL NÚMERO DE PALILLOS QUE TIENE LA FIGURA.**
4. ¿Cuántos palillos son necesarios para construir la casa de la figura Nº 7?
5. Observa la columna que indica "**EL NÚMERO DE PALILLOS QUE TIENE LA FIGURA**" y explica lo que está sucediendo con los palillos.
6. ¿Qué operación debes realizar con los valores de la **PRIMERA COLUMNA** para llegar a los valores de la **SEGUNDA COLUMNA**? ¿Por qué número debes operar?

Anexo: Taller “Los Salones de Clase”

LOS SALONES DE CLASE[6]

La Institución Educativa Héctor Abad Gómez está siendo reconstruida. Por tal motivo, el señor rector quiere que los estudiantes opinen y participen de los cambios que se están realizando. Necesita tu ayuda para responder las siguientes preguntas:

1. Se tienen en total 315 sillas para los salones de los grados de cuarto y quinto. Si son 5 salones en el grado cuarto y 4 salones en el grado quinto., y cada salón debe tener el mismo número de sillas. *¿Cuántas sillas le corresponderá a cada salón?*

2. El total de los estudiantes que hay en los grados de cuarto y de quinto es de 288, y hay 9 salones. *¿Qué operación debes realizar para hallar el número de estudiantes que hay en cada salón? ¿Cuál es ese valor?* ¡Ten presente que cada salón tiene igual cantidad de estudiantes!

3. Observa la siguiente tabla y responde las preguntas de la 3 a la 8.

GRUPOS	Nº de niños	Nº de niñas	Nº de niños Nuevos	Nº de niñas nuevas
4-1	16	12	2	2
4-2	11	17	2	0
4-3	14	13	0	1
4-4	10	15	1	0
4-5	12	15	2	4

4. ¿Cuántos alumnos, en total, tiene el grado 4-4?

5. Si en 4-2 hay 30 estudiantes y se retiraron 9. ¿Cuántos estudiantes quedaron en el grupo?

6. ¿Qué grupo tiene más niños, y qué grupo tiene más niñas?

7. ¿Cuántos estudiantes nuevos ingresaron a la institución?

8. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay en total en cada grupo?

9. ¿Cuántos estudiantes nuevos (niños y niñas) ingresaron a la institución?

Anexo: Taller “Pesando…”

PESANDO [9]…

¡LEE CON ATENCIÓN!

La Alcaldía de Medellín le regalará a la Institución educativa Héctor Abad Gómez una bolsa con cuadernos y otra con colores, pasando 13 Kg. las dos bolsas.

Si se sabe que la bolsa con cuadernos pesa 9 Kg.

1. ¿Cuánto pesa la bolsa con colores?

2. Las profesoras quisieron pesar de nuevo la bolsa con cuadernos, porque no creían que pesara sólo 9 Kg. Por lo cual, se dieron cuenta de que tenían la razón. La bolsa con cuadernos pesa más de 9 Kg. OBSERVA la balanza que esta desequilibrada, y responde;

3. Si la bolsa con colores pesa 4kg. y las dos bolsas juntas pesan 16 Kg. ¿Cuánto debe pesar la bolsa con cuadernos para que la balanza se pueda equilibrar?

4. Si la bolsa con cuadernos pesaba 9 kg., cuando la recibió la institución. ¿Cuántos kilogramos de más tiene la bolsa, si sabes que las dos bolsas juntas ya no pesan 13 Kg., sino 16 kg.?

INFORMATE

El *kilogramo* es una unidad utilizada para medir el peso de un objeto, y se escribe;
1 kilogramo = 1kg. También el peso se mide en:
- Libras. Se escribe; 1 libra = 1 lb.
- Gramos. Se escribe; 1 gramo = 1 gr.

OBSERVA LAS SIGUIENTES EQUIVALENCIAS

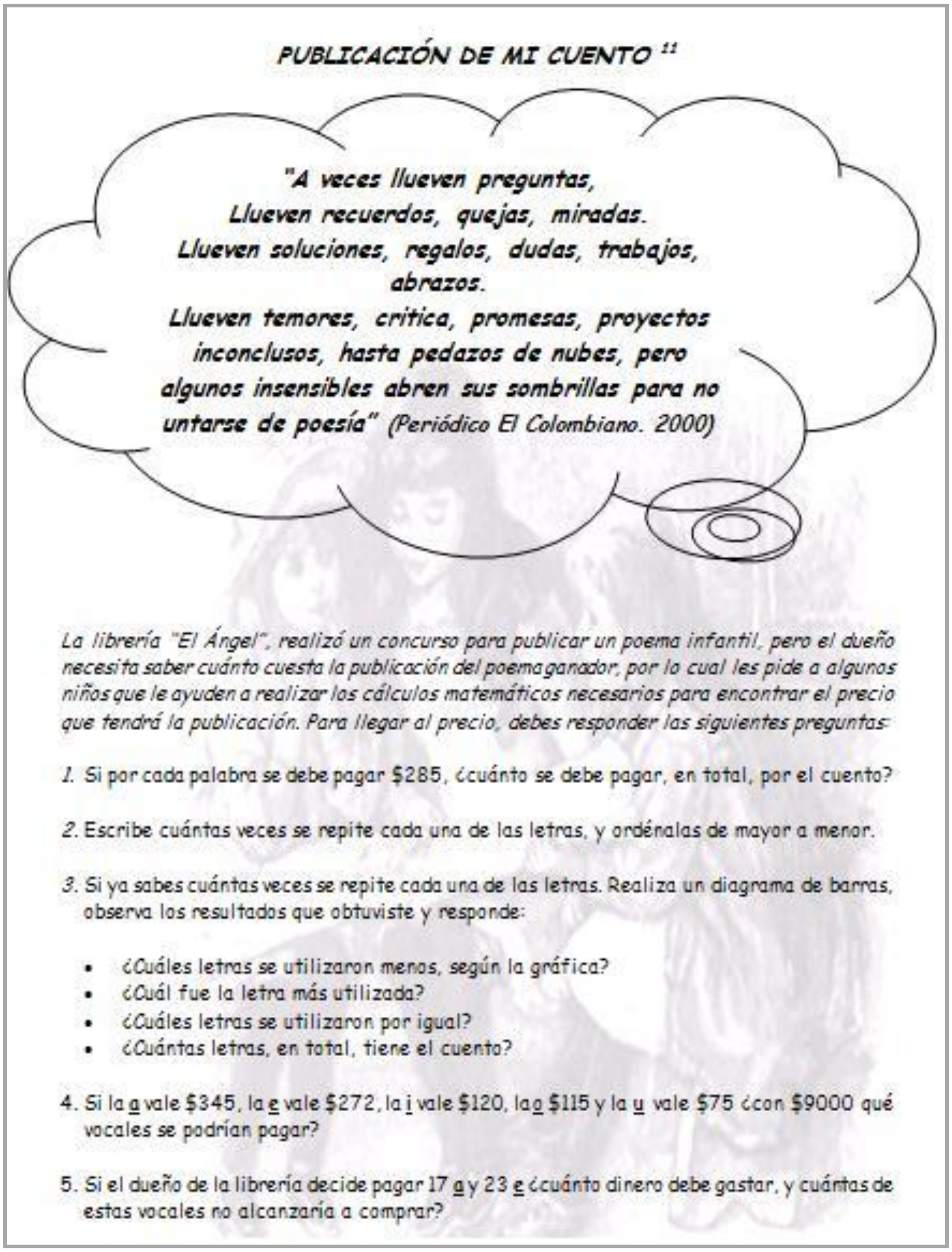
1 kg. = 2 lb. 1 lb. = 500 gr. 1 kg. = 1000 gr.

Completa las siguientes equivalencias;

5. Si una bolsa con cuadernos pesa 3 kg.
- 3 bolsas =________Kg. = ________lb. =___________gr.

6. Si una bolsa con colores pesa 2 kg.
- 5 bolsas =________lb. =__________kg. =___________gr.

Anexo: Taller "La Publicación de mi cuento"



PUBLICACIÓN DE MI CUENTO [11]

"A veces llueven preguntas,
Llueven recuerdos, quejas, miradas.
Llueven soluciones, regalos, dudas, trabajos, abrazos.
Llueven temores, critica, promesas, proyectos inconclusos, hasta pedazos de nubes, pero algunos insensibles abren sus sombrillas para no untarse de poesía" *(Periódico El Colombiano. 2000)*

La librería "El Ángel", realizó un concurso para publicar un poema infantil, pero el dueño necesita saber cuánto cuesta la publicación del poema ganador, por lo cual les pide a algunos niños que le ayuden a realizar los cálculos matemáticos necesarios para encontrar el precio que tendrá la publicación. Para llegar al precio, debes responder las siguientes preguntas:

1. Si por cada palabra se debe pagar $285, ¿cuánto se debe pagar, en total, por el cuento?

2. Escribe cuántas veces se repite cada una de las letras, y ordénalas de mayor a menor.

3. Si ya sabes cuántas veces se repite cada una de las letras. Realiza un diagrama de barras, observa los resultados que obtuviste y responde:

- ¿Cuáles letras se utilizaron menos, según la gráfica?
- ¿Cuál fue la letra más utilizada?
- ¿Cuáles letras se utilizaron por igual?
- ¿Cuántas letras, en total, tiene el cuento?

4. Si la a vale $345, la e vale $272, la i vale $120, la o $115 y la u vale $75 ¿con $9000 qué vocales se podrían pagar?

5. Si el dueño de la librería decide pagar 17 a y 23 e ¿cuánto dinero debe gastar, y cuántas de estas vocales no alcanzaría a comprar?

ANEXOS GRADO OCTAVO

ERIKA PAOLA TREJOS GÓMEZ

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA INICIAL DEL GRADO OCTAVO

PREGUNTA	CATEGORIA	DESCRIPCION	ANÁLISIS LOGROS Y DIFICULTADES	ESTRATEGIAS
1. ¿Cuántos cuadrados en total debe haber en la figura 10?	• Patrones y regularidades. • Sistemas de representación. • Procesos algebraicos.	Teniendo en cuenta que sólo se le dan las tres primeras posiciones, hallar la secuencia general, para conocer la cantidad de cuadrados de la posición de la figura10. Se pretendía que los estudiantes lograran hallar las secuencias sin tener que dibujar las torres en cada una de las posiciones; por tal motivo se realizó un trabajo de forma dirigida.	LOGROS Identificar la secuencia, en una situación dada. Observar los cambios que se dan en los cuadrados blancos y en los cuadrados negros. Favorecer el proceso de aprendizaje de las matemáticas desde el trabajo de los patrones y las regularidades. DIFICULTADES Pasar del lenguaje común al lenguaje matemático. Donde los estudiantes se quedaron con expresiones como “la	La relación que los estudiantes encontraron es de 3 en 3. Observar que entre posición y posición aumenta la secuencia, estandarizando el aumento de cuadrados en cada una de las posiciones. Los que decidieron dibujar las torres en cada una de las secuencias, lo hacían de forma correcta. Sumar los cuadrados de cada fila de manera horizontal, empezando de abajo hacia arriba donde la primera fila era llamada por los

			figura de la posición 10 es más grande", sin especificar que estaba pasando matemáticamente, cuál era el cambio que se presentaba desde un razonamiento lógico y cómo aumentaba en cada una de las posiciones. Que en términos de Encarnación Castro (1995) podían utilizar elementos específicos en las estructuras aritméticas y de modelación. Solo daban la respuesta después de realizar los dibujos de las pirámides en cada una de las posiciones. Profundizar en las respuestas dadas. Los estudiantes tuvieron bastante dificultad para generalizar las secuencias sin ayuda	estudiantes como la base de la pirámide, con esto trataban de encontrar alguna relación en el aumento de cuadrados en cada una de las posiciones; sin embargo no les resulto satisfactorio. Muy pocos estudiantes optaron por contar la cantidad de cuadrados blancos y negros en cada posición y sumarlos, pero no alcanzaban a expresar la generalización.

			de los dibujos en cada una de las posiciones. En esta parte se esperaba que los estudiantes respondieran de manera intuitiva, buscando la relación y el cambio que hay entre posición y posición. En la solución de este punto se pudo notar claramente que los estudiantes aun no poseen un desarrollo del pensamiento lógico que involucra el razonamiento intuitivo y deductivo para la solución de estas actividades. Darse cuenta que existen diferentes sistemas de representación que permiten transformar diferentes situaciones.	

2. ¿Qué crees que pasaría con la figura de la posición 20? Explica.	• Sistemas de representación • Patrones y regularidades. • Procesos algebraicos	Buscar el camino más corto para realizar el diagnóstico, sin tener que utilizar los dibujos para llegar a las respuestas o solución de cada uno de los puntos, teniendo en cuenta el aumento de los cuadrados en cada una de las posiciones, tratando de llegar a una generalización matemática. Los estudiantes debían tener muy en cuenta la relación que hay entre figura y figura, y cómo van cambiando algebraicamente de acuerdo a sus múltiplos. Se pretendía que los estudiantes pudieran expresarlo por medio de un lenguaje matemático Razonar por medio de procesos algebraicos	DIFICULTADES Según la definición de Posada, M. (2005) Los estudiantes no alcanzan a acercarse al patrón como una regularidad o cualidad invariante que expresa una relación estructural entre figura y figura. Ninguno de ellos hallan la cantidad de cuadrados en la figura de la posición 20, sólo hacen un acercamiento donde relacionan "*el doble de*" ó "*el triple de cuadrados que hay en la figura de posición 10*", incluso llegan a decir que "*aumentan de 3 en 3".* Los estudiantes presentan dificultades en los procesos de formación y asimilación que llevan al desarrollo de conceptos que dependen mucho del aprendizaje de la representación, que	Algunos estudiantes optaron por dibujar las pirámides en cada una de las posiciones pero se les hacía largo y se llevaban bastante tiempo para responder este punto, otros por el contrario dieron respuesta a partir de la observación y análisis del punto anterior, pero para ellos no fue suficiente, ya que no obtienen una respuesta correcta, esto se debe que todavía no poseían el desarrollo y proceso de formación y asimilación para llegar a un patrón o generalización

		para un proceso de aprendizaje de las matemáticas mediado por las situaciones de y cambio según Mason (1999)	según Ausbel (1983) son los que permiten encontrar propiedades, atributos y criterios comunes en situaciones especificas; es por esto que los alumnos se quedan sólo en una estructura de suma. Por lo tanto, se les dificulta observar otros tipos de cambios y hallar una secuencia entre figura y figura.	
3. Que relación existe entre los cuadros negros y blancos de las figuras dadas	• Patrones y regularidades • Sistemas de representación • Procesos algebraicos	Obtener una ley de formación que se pueda expresar usando cualquier forma de lenguaje que ayude a encontrar la cantidad de cuadrados negros y blancos, además de la cantidad total de cuadrados de la pirámide	LOGROS: Encuentran un aumento entre las figuras blancas y negras; dicen que: “varían pero no en la misma cantidad”. Donde se puede evidenciar alguna noción de la variación y el cambio como proceso del pensamiento variacional. DIFICULTAD: Son capaces de	En esta parte se debía tener un especial cuidado en lo que era la secuencia y como aumentaban los cuadrados secuencialmente; además de la posición de éstos.

			identificar una secuencia pero no logran una ley de formación, porque todavía no alcanzan los referentes de los campos conceptuales según Vergnaud (1983), que permiten comprender, explicar e investigar procesos de aprendizaje significativo.	
4. ¿Qué relación puedes encontrar en las figuras de posición impar?	• Patrones y regularidades • Sistemas de representación • Procesos algebraicos	Llevarlos a que profundicen en sus respuestas, por medio de la orientación.	LOGROS: La relación que pudieron encontrar es que van de 4 en 4. En la observación que hacen los estudiantes coinciden en que "*la punta" ó "final" de la pirámide es de un cuadrado y que la base de la misma tienen cantidades impares de cuadrados.*	Los estudiantes llegan a relaciones de 4 en 4 en las figuras de posición impar, donde se puede notar la estructura multiplicativa y el lenguaje matemático.

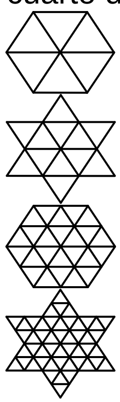
5. Escribe la serie que corresponde al total de los cuadrados de las figuras de posición par	• Patrones y regularidades • Sistemas de representación • Procesos algebraicos	Indagar y descubrir el tipo de serie Encontrar la diferencia entre las figuras de posición par e impar. Conocer los conjuntos numéricos con los trabajan a diario.	Los estudiantes escriben correctamente la serie, realizando la pirámide que corresponde a cada una de las posiciones. DIFICULTADES: La totalidad de estudiantes se apoyan en la representación grafica y no observan la relación entre los números, que según Duval (1999) sería un sistema de representación semiótico, importante para este proceso en este grado.	
6. Que números representan los cuadrados que están en la primera fila de cada figura	• Sistemas de representación. • Procesos algebraicos	Orientarlos para que en cada uno de los puntos encuentren un patrón o regularidad	LOGROS: Alcanzan un buen acercamiento a la respuesta, por la familiaridad de los números de la secuencia, afirman que los cuadrados de la primera fila son los números naturales	La capacidad de expresarse por medio de un lenguaje matemático.

7. De acuerdo al análisis realizado a las figuras dadas; completa los datos de la siguiente tabla. (la tabla pregunta en cada una de las posiciones del 1 al 9 sobre: número de cuadrados en blanco, número de cuadrados en blanco, total de cuadrados, relaciones numéricas entre los cuadrados que conforman la figura y total de cuadrados de cada una de las figuras en una forma	• Patrones y regularidades • Sistemas de representación • Procesos algebraicos	Explicar a lo que se refería los enunciados de cada una de las columnas	DIFICULTADES: Las estudiantes completan la tabla de manera aditiva llegando al mismo resultado, y para el grado octavo según Vergnaud (1996) se debe tener un desarrollo del aprendizaje de conceptos y competencias más complejas, que se forman con un proceso de interacción adaptativa con las situaciones que se viven. Sólo se evidencia que la gran mayoría de estudiantes llenan las tres primeras columnas y que no son capaces de identificar los datos, ni de hacer una adecuada relación en las respuestas dadas en la tabla para completar las dos	La estrategia que se tenía en este punto es el análisis de datos desde la misma organización de tabla, teniendo en cuenta todos los datos de las preguntas y respuestas anteriores.

diferente).			últimas columnas.	
8. ¿Cuál es el área de la figura 9,10 y 20? (tomando como unidad de área un cuadrado).	• Procesos algebraicos.	Explicar el concepto de área y relacionarlo con el que ellos tenían. Se hacía fundamental la parte cognitiva, desde el conocimiento de lo que es el área y el manejo de las formulas para encontrar de esta manera la solución.	DIFICULTAD: El concepto de área se hacía sólo desde el manejo de formulas, sin tener en cuenta que se puede utilizar cualquier unidad de medida y una ellas podía ser un cuadrado, por lo tanto les fue difícil el concepto de área.	Solo se utilizaron las formulas de áreas.
9. ¿Con la unión de qué figuras se forman cuadrados?	• Sistemas de representación.	Preguntarles como hallarían el total de cuadrados sin dibujar la figura	DIFICULTAD: Todos los estudiantes se limitaron con la grafica, ya que para poder contestar tuvieron que dibujar todas las figuras. Ninguno lo hizo con un razonamiento abstracto.	Como estrategia se tenía lo abstracto para poder unir las figuras.

			No hicieron uso de los diferentes sistemas de representación según la interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas referenciados en este trabajo.	
10. ¿Qué relación encuentras entre las nuevas figuras?	Sistemas de representación. Patrones y regularidades	Llevarlos por medio de preguntas a la relación en números	DIFICULTAD: Los estudiantes buscan relaciones superficiales y físicas, no van más allá de lo que tienen en la figura	Se pretendía un desarrollo del pensamiento lógico como parte fundamental del pensamiento variacional desde los sistemas de representación y patrones y regularidades que se manejaron a lo largo del taller. Sin embargo, ellos se quedaron en la representación grafica o pictórica.

SISTEMATIZACIÓN DEL ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD FINAL DEL GRADO OCTAVO

PREGUNTA	CATEGORIA	DESCRIPCION	ANALISIS LOGROS Y DIFICULTADES	ESTRATEGIAS
1. Representa (o dibuja) la flor en la tercera noche y el cuarto día 	• Sistemas de representación. • Patrones y regularidades.	Los estudiantes debían tener en cuenta como crecía la flor y cuáles eran los cambios que se presentaban entre el día y la noche para seguir la secuencia, teniendo en cuenta el patrón para encontrar una generalización y los sistemas de representación. Se pretendía que los estudiantes pudieran encontrar el crecimiento de la flor y cuántos triángulos aumentaban en el día y en la noche y	Por medio de esta actividad final se pudo evidenciar que los estudiantes adquirieron elementos que les permitieron expresar relaciones de cambios que se presentaban en la flor. Estos elementos se deben al proceso que se desarrollo por medio de categorías como la de patrones y regularidades con un buen razonamiento intuitivo y deductivo por parte de los mimos alumnos que desde sus	Los estudiantes poseen más elementos cognitivos con las categorías trabajadas a lo largo de los talleres, por lo tanto tienen un desarrollo del la lógica matemática que les permiten analizar y justificar las diferentes situaciones problemas. La mayoría de los estudiantes tenían como estrategia el representar la figura desde la anterior a ella, para encontrar la relación de

		poderlo representar por medio de la lógica del lenguaje matemático y el aprendizaje significativo usando cada una de las categorías y de esta manera encontrar la regla que regía para el aumento de la flor.	interrogantes llegaban a la solución. Entre ellos se tenían algunos como estos: “crece mucho, pero ¿cómo crece?” “¿Cómo se organizan los pétalos que aumentan en la noche?” Los estudiantes sabían que estaba pasando, como aumentaba los pétalos de la flor (la cantidad de triángulos), además, fueron capaces de hacer un buen análisis verbal de la situación, sin embargo, se vieron en una gran dificultad al	crecimiento, justificando lo que estaba pasando de una forma matemática, encontrando una secuencia o patrón para el aumento de los triángulos en las flores, pero no alcanzan la construcción de la flor.

			enfrentarse a la construcción de la flor por problemas de precisión ya que al construir la flor a medida que avanzan los días se hacía bastante grande, pero no llegaron a confundirse en la cantidad de triángulos que aumentaban entre día y día y entre día y noche.	
2. a) ¿Qué diferencias hay entre la flor cuando esta entre la primera y la segunda noche?	• Sistemas de representación	Los estudiantes deben relacionar las flores cerradas en la noche y mirar que diferencias tienen entre la primera y las segunda noche.	Los estudiantes logran llegar a una respuesta muy acertada como: “La primera y segunda noche. Tuvo un crecimiento de 18 pétalos o triángulos”.	En general todos los estudiantes pudieron llegar a las mismas respuestas. Concluyen de una forma muy acertada y a la vez emplean un lenguaje matemático para

			“En el día crece una sexta parte”. “En la primera noche tiene 6 pétalos y en la segunda noche tiene 24”.	referirse a los triángulos de la flor de noche, como de la flor de día. En este diagnóstico o actividad final del grado octavo Se evidencian grandes avances en el manejo de la categoría de sistema de representación, mejoran notablemente la comprensión donde fueron capaces de transformar las representación de la flor tanto de día como de noche
b) Las diferencias serán las mismas entre el primer día y el segundo día. explica tu respuesta	• Sistemas de representació n	Luego de observar las flores y sacar sus diferencias, comparar la flor de día y la flor de noche, del primer día y el segundo día.	Después de un proceso cognitivo trabajado con los estudiantes por medio de situaciones problemas y talleres donde se desarrollaron las	

			categorías de patrones y regularidades, sistemas de representación, procesos algebraicos y proporcionalidad para el desarrollo del pensamiento variacional se puede evidenciar grandes avances del aprendizaje significativo desde la teoría cognoscitiva trabajada desde los referentes teoricos del pensamiento variacional (2005), dando cuenta de esto por medio de frases como: “La segunda noche es el triple de la primera”. “En la noche crecen y al amanecer ya están duplicadas”.	

			“La segunda noche es dos veces mayor que la primera noche”. “En el día equivale al doble de la noche. En la flor de la segunda noche cabe la flor de la primera noche”. Frases que les permitieron fundamentar claramente las diferencias o cambios de la flor en el día.	

<table>
<tr>
<td>3. Completa la siguiente tabla, donde encuentras el número de triángulos que conforman la flor, según el día, y si es de noche o de día
<table>
<tr><th>DÍA</th><th>F. DÍA</th><th>F. NOCHE</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>24</td><td>48</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>

Sistemas de representación
Patrones y regularidades

</td>
<td>Teniendo en cuenta lo analizado en los dos puntos anteriores y lo que deducían de su crecimiento se llenaba la tabla con la cantidad de triángulos de la flor de día y la flor de noche.</td>
<td>Los estudiantes alcanzan los elementos propios del pensamiento variacional entre los cuales se destacan los procesos de cambio y los sistemas de representación, por medio del análisis que hacen a lo largo de toda la actividad.

Este análisis les sirvió a la gran mayoría de estudiantes como herramienta para llegar a completar más fácilmente la tabla sabiendo lo que está pasando con la flor y cuál es el aumento de triángulos que tiene la flor entre el día y la noche y entre día y día.</td>
<td>Los estudiantes que completan acertadamente la tabla que son la mayoría, lo hacen por medio del análisis de los puntos anteriores.

Algunos de los estudiantes que no fueron capaces de completar la tabla fue porque se confundieron; tomaban la flor de noche y colocaban el doble de noche anterior.</td>
</tr>
</table>

ANEXO DE TRABAJOS DE LOS ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO EN EL DIAGNOSTICO INICIAL

6/11

INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GÓMEZ
DIAGNOSTICO – OCTAVO

NOMBRE: Julieth Catalina Martinez Muriel GRUPO: 8º2
FECHA: 07.03.06

Observo los siguientes cuadrados y las figuras que se dan cuando están organizadas en forma de torre.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Representa gráficamente las figuras que seguirían y luego responde:

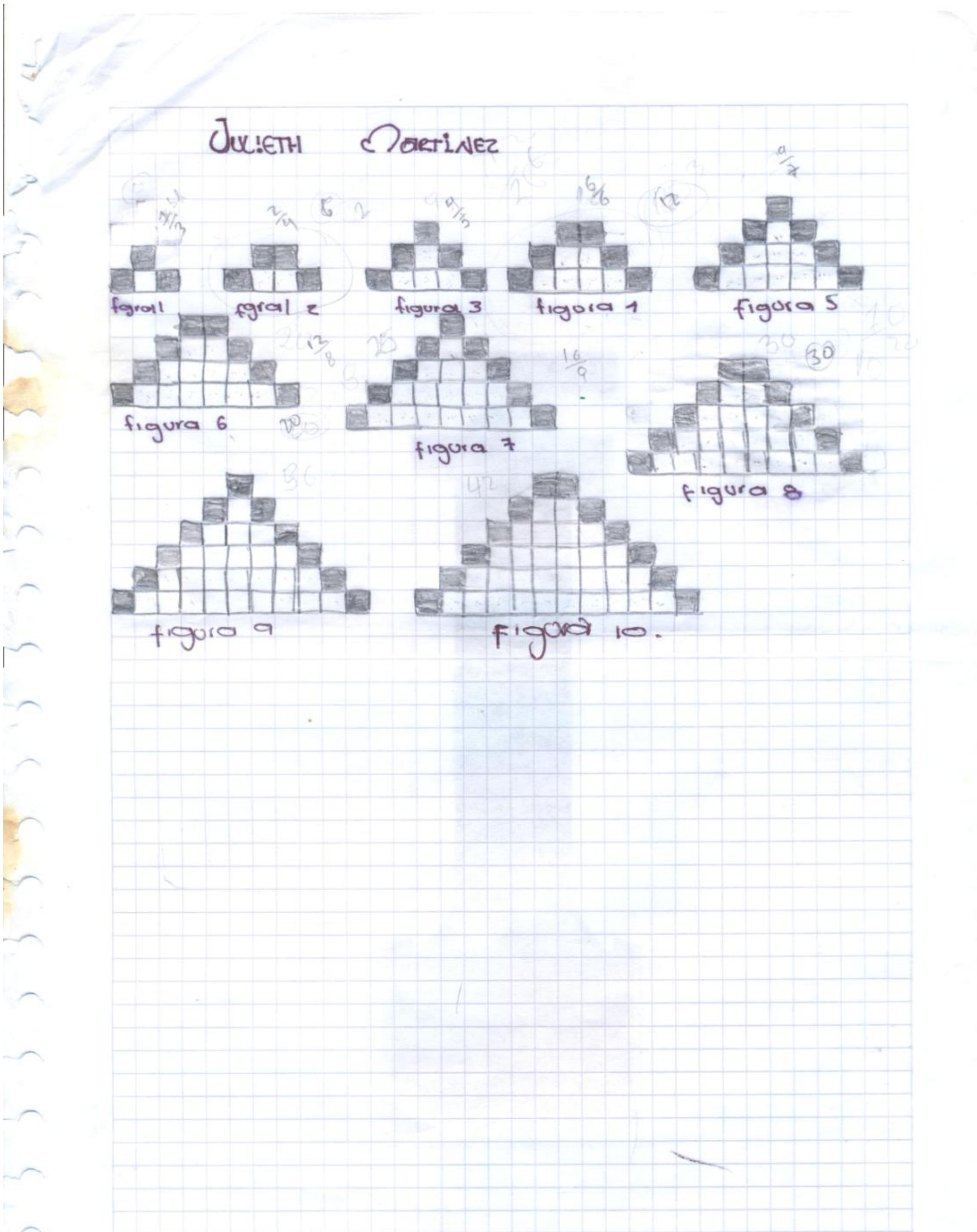
1. ¿Cuántos cuadrados en total debe haber en la figura de posición 10?
2. ¿Qué crees que pasaría con la figura de la posición 20? Explica.
3. ¿Qué relación existe entre los cuadrados negros y blancos de las figuras dadas?
4. ¿Qué relación puedes encontrar en las figuras de la posición impar? R
5. Escribir la serie que corresponde al total de los cuadrados de las figuras de la posición par.
6. ¿Qué números representan los cuadrados que están en la primera fila de cada figura?
7. *De acuerdo al análisis realizado a las figuras dadas, completo los datos de la siguiente tabla.*

Figura	No de cuadrados en blanco	No de cuadrados sombreados	Total de cuadrados	Relaciones numéricas entre los cuadrados que conforman la figura	Total de cuadrados de cada una de las figuras en una forma diferente.
1	1	3	4	2	
2	2	4	6	2	
3	4	5	9	-2 ?	?
4	6	6	12	0	?
5	9	x	16	-2 ?	
6	12	8	20	-4	
7	16	9	25	-x	
8	20	10	30	-10	

10 = 42 11 = 56

8. ¿Cuál es el área de la figura 9,10 y 20? (tomando como unidad de área un cuadrado).
9. ¿Con la unión de qué figuras se forman cuadrados?
10. ¿Qué relación encuentras entre las nuevas figuras? R.
11. ¿En los cuadrados, qué porcentaje representan la parte sombreada? R.

ADAPTADO DE: Interpretación de los estándares básicos de matemáticos.
REALIZADO POR: Erika Paola Trejos Gómez


Julieth Martinez
figura 1
figura 2
figura 3
figura 4
figura 5
figura 6
figura 7
figura 8
figura 9
figura 10.

TALLER REALIZADO POR ERIKA PAOLA TREJOS GÓMEZ CON LOS ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GÓMEZ

NOMBRE: Ana Milena Perez Loaiza GRUPO: 8º02
FECHA: 9 de abril 2006

En una tienda donde se venden tarjetas de ocasiones especiales se manejan tres tipos de marcas: nico, gusanito y zea, de las cuales se presentan promociones cada determinado tiempo.

El dueño de la tienda, llamado Fernando realiza un cuadro que le servirá para mayor información en las promociones que presentan las tarjetas, cada semana, quedando en blanco donde no se presenta ninguna promoción.

PROMOCIONES 2006

Mes	Primera semana	Segunda semana	Tercera semana	Cuarta semana
Enero	nico	gusanito	Zea	
Febrero		nico	gusanito	zea
Marzo			nico	gusanito
Abril	zea			nico
Mayo	gusanito	zea		
Junio	nico	gusanito	zea	
Julio		nico	gusanito	zea
Agosto			nico	gusanito
Septiembre	zea			nico
Octubre	gusanito	zea		
Noviembre	nico	GUSANITO	zea	
Diciembre		nico	gusanito	zea

1. Como el cuadro tiene desde el mes de junio hasta el mes de noviembre sin llenar, nuestra misión será ayudarle a don Fernando con la información faltante en el cuadro de promociones.

2. ¿En qué meses las tarjetas nico están en promoción?

3. ¿Cada cuánto se da la promoción de la tarjeta nico en la primera semana? ¿qué puedes decir de esta promoción en la segunda, tercera y cuarta semana?

4. ¿Lo que sucede con la tarjeta nico sucede con las otras tarjetas? Explique

5. ¿Por qué crees que la promoción de la tarjeta gusanito no se da en el mes de abril? ¿En que otro mes o meses se presenta esta situación?

6. ¿Si una tarjeta zea tiene un precio de $1200 y en una promoción rebaja 12.5%, en cuánto queda?

7. Si se venden 10 tarjetas zea en promoción, ¿Cuánto deja de ganar o gana el dueño de la tienda?

8. si las tarjetas gusanito valen $2500 y en Promoción $300 menos ¿Cuántas tarjetas podría comprar en promoción si tuviera $15000?

9. ¿Cuánto te gastarías comprando 6 tarjetas zea y 4 gusanito en alguna de las promociones del año?

10. Jonier compro cierta cantidad de tarjetas zea. Si cada tarjeta cuesta $1050 y paga con $20000 y además le devuelven $7400 ¿Cuántas tarjetas compro Jonier?

9 BIBLIOGRAFÍA

ANDER-EGG, Ezequiel (1991) El Taller, una alternativa de renovación pedagógica. Argentina: Ed. Magisterio del Río de la Plata. p. 10

AUSUBEL, D. P. (1973). "*Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento".* Buenos Aires: Ed. El Ateneo pp. 211-239.

AUSUBEL-NOVAK-HANESIAN (1983) *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo* (2ª ed.) México: Ed. TRILLAS.

AUSUBEL, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva.* Barcelona: Ed. Paidós.

BELTRAN, Yolanda et al (2007) "*Acerca de la Metodología" D*ocumento para docentes en el *Proyecto Recontextualización Planes de Área. Matemáticas. Universidad de Antioquia. Medellín. p. 4.*

BETANCURT M, Anobio (1996) El Taller Educativo. ¿Qué es? Fundamentos, Cómo Organizarlo y Dirigirlo, Cómo Evaluarlo. Bogotá: Ed. Aula Abierta. Magisterio.

BLÁZQUEZ, Sonsoles (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. En: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4 N° 3. pp. 219-236.

BUSTAMANTE, Guillermo (2003) *Estándares curriculares y autonomía.* En: Revista colombiana de educación. N° 44. pp. 65.

BUTTO, Cristianne y ROJANO, Teresa (2004) *Introducción Temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría*. México Santillana, abril, pp. 113-148.

CARRIÓN M, Vicente (2007) Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. En: Revista Iberoamericana de educación matemática. UNIÓN. N° 11

CASTAÑEDA B, Luz Ángela e HIGUITA D, Heriberto (2005) Modelación Matemática en un entorno de la visualización para el Aprendizaje Significativo. Tesis para optar al título de Magister en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemática. Universidad de Antioquia. Medellín.

CASTRO, Encarnación et al. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelación.* España: Ed. Síntesis.

DUARTE, Jacqueline. (2003). “Ambientes de Aprendizaje: una aproximación conceptual”. En: Estudios pedagógicos. N° 29. p. 97-113.

DUVAL, Raymond (1999) Traducción del libro “*Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales”* por VEGA R, Miryam. Merlyn I D. Cali.

EVALOS, Cedillo. “*El álgebra como lenguaje alternativo y de cambio en las concepciones*”. Artículos perfiles educativos. México Vol.25.

FORTUNY, J. et al. (1990). Proporcionalidad directa. La forma y el número. Ed. Madrid: Síntesis.

GARCÍA P, Silvia y GÓMEZ A, Esther M (2004) “Excale 06 Matemáticas 2005” Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación Dirección de Pruebas y Medición. México. SEP. De http://www.quadernsdigitals.net/datosweb/hemeroteca/r1/nr502/a_6856/6856.hml

GARCÍA, Gloria. (2005). Séptimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa: Memorias. Tunja: Asociación Colombiana de Matemática Educativa Asocolme.

GARCÍA G, A. et al. El Problema de las categorías básicas de la pedagogía. Instituto Superior Pedagógico Manuel Ascunce Doménech. Facultad de Formación del profesor general, integral de secundaria básica

GUZMAN, M de. (1993) Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones. Educación ciencia y tecnología. Madrid. Editorial popular SA. pp. 116.

GUZMÁN, M. de (1995) “*Tendencias e innovaciones en educación matemática*”. Conferencia en el Seminario de Educación Matemática. (Documento inédito disponible en La OEI). OEI. Bogotá.

KAPUT, James (2000) Referenciado por: BLAIR, Leslie (2005) “*Es elemental: Introducción al Pensamiento Algebraico antes de la Enseñanza Media*”. De:http://www.educadormarista.com/ARTICULOS/IntroducciondelPensamientoAlgebraico.hm

KAPUT, James (2002) Referenciado por: POSADA B, Fabián et al. (2006). Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Ed. Artes y Letras. Gobernación de Antioquia. p. 19.

LANFRACESCO V, Giovanni. (2003). Estructuración de estándares en la educación básica colombiana. En revista: "Educación y Educares" N°6.

LATORRE, Antonio, et al. (1996) Bases metodológicas de la investigación educativa, capítulo 12. Universidad de Barcelona.

MASON, John et al (1999) Referenciado por: POSADA, María E et al. (2005) Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia

MESA, Orlando. (1998). Contextos para el desarrollo de Situaciones Problema en la enseñanza de las matemáticas, (un ejemplo con los números para contar). Colombia: Grupo impresor. Ltda.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio

MEN. (1998). Pruebas saber en Antioquia. Informe de análisis de los resultados de las pruebas de logro en 7º y 9° grado aplicadas a los municipios de la primera etapa del proyecto: mejoramiento de la calidad de la educación básica en Antioquia. De www.minieducacion.gov.co

MEN. (2002) "Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías". En: Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, evento organizado (Bogotá, D.C., 8 al 10 de mayo de 2002), (pp. 68-77).

MEN. (2004) *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

MÚNERA, John Jairo (2001) "*Las situaciones problema como puente de matematización*". Artículo de cuadernos pedagógicos N°16.

MÚNERA, John Jairo et al. (2001) "*Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*". En: revista de educación y pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia. N° 15 (35). pp. 183-199.

OROZCO, Juan. (2004) *Estándares, enseñanza de las ciencias y control político del saber.* En: revista nodos y nudos. Vol. 2 N° 17. Julio-diciembre pp.4.

ORTEGA D, Juan. Et al. (2001). MATEMÁTICAS: ¿UN PROBLEMA DE LENGUAJE? España: Universidad de Castilla-La Mancha.

PALAREA M, Mª de las Mercedes. (1998) La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por estudiantes de 12 a 14 años. España: Universidad de la Laguna.

PIAGET, J. (1978). Introducción a la Epistemología Genética. I. El Pensamiento Matemático (2ª ed.) Buenos Aires. Paidós.

POSADA B, Fabián et al. (2006). Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Ed. Artes y Letras. Gobernación de Antioquia

POSADA, María E et al. (2005) Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia

RICO, Luis. (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid: Síntesis.

RODRÍGUEZ P, M. L. y MOREIRA, M. A. (2002). La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud. En: Actas del PIDEC. Nº 4. UFRGS. Porto Alegre.

ROJANO, T (1994) La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. En: enseñanza de las ciencias, Vol. 12. N° 1.

RUANO, Raquel M. et al. (2007) Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En: PNA, Vol. 2 N° 2.

SOCAS R, Martín et al. (1996) *INICIACIÓN AL ÁLGEBRA*. Madrid: Síntesis.

VALDERRAMA, Cecilia Agudelo. "*Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria*". Artículo Aula urbana.

VALVERDE R, Lourdes (2000) "*Sistematización de experiencias significativas en didáctica de las matemáticas*". Artículo: en cuaderno pedagógicos N°13.

VALVERDE RAMIREZ, Lourdes (2001) "*El razonamiento matemático*". Artículo de cuadernos pedagógicos N° 16.

VERGNAUD, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Ed. Trillas.

VERGNAUD, G. (1993). *La Teoría de los Campos Conceptuales*. En: Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV- IPN. México. pp. 88-117.

VILLA, Johny Alexander. "*Algunas reflexiones en torno a la validación de una generalización matemática*". Artículo. Memorias séptimo encuentro colombiano de matemáticas educativas.