



**Procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa**

Tatiana Paola Rúa García

Tesis de maestría presentada para optar al título de Magíster en Educación

Tutor

Gilberto Obando Zapata, Doctor (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia  
Facultad de Educación  
Maestría en Educación  
Medellín, Antioquia, Colombia  
2021

<b>Cita</b>	(Rúa García, 2021)
<b>Referencia</b>	Rúa García, T.P. (2021). <i>Procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa</i> [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
<b>Estilo APA 7 (2020)</b>	



Seleccione posgrado UdeA (A-Z), Cohorte XVII.

Grupo de Investigación Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).



Centro de Documentación Educación

**Repositorio Institucional:** <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - [www.udea.edu.co](http://www.udea.edu.co)

**Rector:** John Jairo Arboleda Céspedes.

**Decano/Director:** Wilson Bolívar Buriticá.

**Jefe departamento:** Juan David Gómez González.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

## **Dedicatoria**

A mi familia

A mis amigos

A mis estudiantes

A mis profesores y compañeros de maestría

## **Agradecimientos**

A Dios, quien me dio fortaleza y fuerza en los momentos más difíciles.

Gracias a mi familia y amigos quienes me brindaron su comprensión y apoyo incondicional.

A mi asesor, Gilberto Obando Zapata quien, con su conocimiento, dedicación, apoyo y paciencia me acompañó en la construcción de mi proceso de formación y cualificación como maestra.

A mis compañeros docentes y directivos de la Institución Fe y Alegría la Cima quienes fueron un punto de apoyo para sacar adelante esta propuesta de investigación. Gracias también a los estudiantes del grado séptimo, por su participación, esfuerzo y disposición de trabajo frente a la propuesta de investigación desarrollada.

A la Universidad de Antioquia, docentes y compañeros de la Maestría en Educación, línea Matemáticas por sus aportes significativos en pro del mejoramiento de mi formación académica e investigativa.

A la Secretaría de Educación de Medellín por el apoyo para los docentes fortaleciendo la calidad educativa.

## Tabla de contenido

Resumen .....	9
Abstract .....	10
Introducción .....	11
1. Justificación y planteamiento del problema.....	13
1.2 Una mirada a los referentes de calidad y al documento de orientación curricular sobre razón, proporción y proporcionalidad. ....	13
1.1 Resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas .....	16
1.3 Aspectos relevantes del plan de estudios institucional.....	20
1.4 Aspectos teóricos y curriculares.....	22
2. Objetivos .....	25
2.1 Objetivo general .....	25
2.2 Objetivos específicos.....	25
3. Marco Teórico.....	26
3.1 Nociones centrales sobre Razón, Proporción y Proporcionalidad .....	26
3.1.1 Razón .....	27
3.1.2.1 Razón como Relator. ....	28
3.1.2.2 Razón como Operador.....	28
3.1.1.3 Razón como correlator.. ....	29
3.1.1.4 Razón como Transformador.....	30
3.1.2 Proporción.....	34
3.1.3 Proporcionalidad .....	36
4. Metodología .....	39
4.1 Ámbito general del estudio .....	39
4.2 Tipo de investigación .....	39

4.3 Consideraciones generales sobre los participantes.....	40
4.4 Técnicas de investigación y fuentes documentales .....	42
4.4.1 Textos escritos de los estudiantes. ....	42
4.4.2 Grabaciones de audio y video. ....	42
4.4.3 Tareas.....	43
4.4.4 Diario reflexivo.....	43
4.5 Unidades de análisis y proceso de codificación .....	43
4.6 Descripción general de las tareas .....	45
4.7 Compromiso del investigador .....	47
4.8 Confiabilidad, validez e integridad de los datos .....	48
4.9 Consideraciones éticas .....	49
5. Análisis de Resultados .....	50
6. Conclusiones .....	82
7. Recomendaciones .....	86
Referencias .....	87
Anexos.....	90
Anexo 1. Tarea 1 - Servicios Públicos .....	90
Anexo 2. Tarea 2 – Precio por unidad.....	92
Anexo 3. Tarea 3 - El Reciclaje .....	93
Anexo 4. Consentimiento informado de la Institución Educativa .....	95
Anexo 5. Respuesta del consentimiento informado de la Institución Educativa .....	97
Anexo 6. Consentimiento informado para padres, madres y/o acudientes .....	98
Anexo 7. Consentimiento informado para estudiantes.....	104

## Lista de tablas

<b>Tabla 1</b> Malla Curricular de Matemáticas Grado Séptimo - Tercer Periodo .....	21
<b>Tabla 2</b> Situación problema - Dulces y precios.....	33
<b>Tabla 3</b> Ejemplo de matriz codificación.....	44
<b>Tabla 4</b> Electrodomésticos del hogar .....	61
<b>Tabla 5</b> Actividades diarias en las que se usa el servicio del acueducto.....	65
<b>Tabla 6</b> Aceites del mercado .....	69
<b>Tabla 7</b> Reciclaje de botellas.....	77

## Lista de figuras

<b>Figura 1</b> Esquema de representación de los isomorfismos de medidas .....	32
<b>Figura 2</b> Promedio consumo últimos 6 meses del servicio de Acueducto .....	51
<b>Figura 3</b> Respuestas Tarea 1 .....	52
<b>Figura 4</b> Respuestas Tarea 1 .....	54
<b>Figura 5</b> Esquema de problema isomorfismo de medida - Proporción simple .....	56
<b>Figura 6</b> Histórico de los servicios públicos de energía y acueducto .....	57
<b>Figura 7</b> Respuestas Tarea 1 .....	60
<b>Figura 8</b> Respuestas Tarea 1 .....	63
<b>Figura 9</b> Respuestas Tarea 1 .....	64
<b>Figura 10</b> Respuestas Tarea 1 .....	65
<b>Figura 11</b> Respuestas Tarea 1 .....	67
<b>Figura 12</b> Respuesta Tarea 2 .....	72
<b>Figura 13</b> Respuestas Tarea 2 .....	75
<b>Figura 14</b> Respuestas Tarea 1 .....	76
<b>Figura 15</b> Respuestas Tarea 3 .....	78
<b>Figura 16</b> Respuestas Tarea 3 .....	79
<b>Figura 17</b> Respuestas Tarea 3 .....	79

## Resumen

El objetivo de la presente investigación es reconocer las características de los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa. Este objetivo surge de la necesidad de comprender cómo abordan situaciones problema en las que se involucra la proporcionalidad directa y así establecer las características de los procedimientos aplicados en el tratamiento de las mismas.

La metodología utilizada está basada en el diseño de Investigación Acción, con herramientas que admitieron el análisis e interpretación de las experiencias propias de los estudiantes con respecto a los procedimientos utilizados para resolver situaciones de proporcionalidad directa, dichos procedimientos están basados en razonamientos por analogía y razonamientos analíticos.

Los resultados obtenidos en la investigación muestran como los estudiantes centran la atención en los razonamientos por analogía utilizando la relación multiplicativa entre parejas de cantidades homogéneas y hacen un avance en la comprensión y aplicación de los razonamientos analíticos comparando parejas de cantidades heterogéneas a partir de la razón entre ellas como parte de los procesos que permiten establecer la razón constate en situaciones de proporcionalidad directa.

*Palabras clave:* razón, proporción, proporcionalidad, razonamientos por analogía, razonamientos analíticos

### **Abstract**

The objective of this research is to recognize the characteristics of the procedures used by seventh grade students to identify the constant reason in situations of direct proportionality. This objective arises from the need to understand how students address problematic situations in which direct proportionality is involved and thus establish the characteristics of the procedures applied in their treatment.

The methodology used is based on the Action Research design, with tools that allowed the analysis and interpretation of the students own experiences with respect to the procedures used to resolve situations of direct proportionality, these procedures are based on analogical and analytical reasonings.

The results obtained in the research show how the students focus their attention on reasoning by analogy using the multiplicative relationship between pairs of homogeneous quantities and make an advance in the understanding and application of analytical reasoning by comparing pairs of heterogeneous quantities based on the ratio among them as part of the processes that make it possible to establish the stated reason in situations of direct proportionality.

*Keywords:* ratio, proportion, proportionality, reasoning by analogy, analytical reasoning

## Introducción

Las investigaciones sobre razón, proporción y proporcionalidad, realizadas en los últimos 40 años, han indagado por las estrategias curriculares empleadas para construir conceptos relacionados con la proporcionalidad y los procedimientos utilizados para dar tratamiento a situaciones que involucran la razón constante. Estas investigaciones han contribuido a los avances que hoy en día se tienen sobre estos objetos matemáticos y su aplicación en diferentes situaciones problema. Además, han dejado algunas líneas abiertas como, por ejemplo, lo concerniente a los procedimientos que están basados en razonamientos por analogía y especialmente en razonamientos analíticos para el tratamiento de situaciones problema que involucran la proporcionalidad directa.

Este documento se estructura en cuatro capítulos. Un primer capítulo dividido en dos partes, de las cuales la primera se enfoca en la justificación y el planteamiento del problema a partir de los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas, los referentes de calidad, el documento de orientación curricular, los aspectos en la escuela a través de las vivencias propias en el aula, además de los aspectos teóricos y curriculares que dejan ver las dificultades de los estudiantes para identificar la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa; la segunda parte incluye la pregunta de investigación y los objetivos.

El segundo capítulo contiene los planteamientos teóricos sobre razón, proporción, proporcionalidad y los procedimientos basados en razonamientos por analogía y razonamientos analíticos. Estos conceptos fundamentaron la investigación y permitieron trazar una ruta para el análisis de la información y los hallazgos.

El tercer capítulo describe la metodología, las consideraciones generales del estudio, el enfoque, las técnicas de investigación, las unidades de análisis, la descripción general de las tareas, el compromiso del investigador y las consideraciones éticas.

En el cuarto capítulo se desarrolla el análisis de resultados, donde se presentan los hallazgos a partir de los aportes realizados por los estudiantes del grado séptimo de básica secundaria sobre los procedimientos utilizados al enfrentarse a situaciones de proporcionalidad directa.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones que apuntan a dar respuesta a los objetivos de la investigación. Además, se proponen algunas posibles líneas de investigación que quedan abiertas, relacionadas con los procedimientos, específicamente los denominados

razonamientos analíticos y las funciones de razón utilizadas para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa.

## **1. Justificación y planteamiento del problema**

La presente investigación sobre los procedimientos utilizados por los estudiantes para tratar situaciones que involucran la proporcionalidad directa se justifica a partir de cuatro fuentes de análisis: la primera son los referentes de calidad y el documento de orientación curricular, centrando la atención en los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad. La segunda son los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas donde se logran identificar algunos elementos (metodológicos y conceptuales), que permiten el desarrollo del pensamiento proporcional en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La tercera centra la atención en aspectos teóricos y curriculares donde el conocimiento matemático es tomado como una variable fundamental en el acercamiento a la problematización didáctica en la escuela, integrando lo didáctico, lo cognitivo y el contexto. La cuarta, son los aspectos estructurales y conceptuales que actualmente se están empleando en la institución educativa donde se desarrolló la investigación.

### **1.2 Una mirada a los referentes de calidad y al documento de orientación curricular sobre razón, proporción y proporcionalidad.**

En su conjunto, los referentes de calidad del Ministerio de Educación Nacional (MEN): Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM) (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC) (2006); asimismo el documento de orientación curricular Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA-V2) (2017), proporcionan orientaciones a los profesores colombianos con respecto a elementos teóricos, metodológicos, didácticos y pedagógicos, que fortalecen el diseño del currículo a partir de contextos, procesos y pensamientos matemáticos para promover el aprendizaje de conocimientos, habilidades y actitudes coherentes con el pensamiento matemático, en contextos en los que se requiera su uso de manera efectiva para resolver situaciones cotidianas.

Estos documentos son un conjunto de herramientas que están organizadas por los saberes básicos y estructurantes que los estudiantes pueden aprender en su proceso escolar en cada grado en el área de matemáticas. Es así como la visión del MEN, planteada en los tres documentos, supone la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje a través de “los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende” (MEN, 1998, p. 18).

Al mismo tiempo, este conjunto de herramientas proporcionadas por el MEN para Colombia, vincula los procesos de razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en relación con el aprendizaje. Por último, y no menos importante, los pensamientos matemáticos tienen que ver con los conocimientos específicos y los sistemas propios de las matemáticas: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamiento métrico y sistemas de medidas, Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Al rastrear en los referentes de calidad (MEN, 1998, 2006) la razón, la proporción y la proporcionalidad, se presentan con ciertas relaciones entre el pensamiento numérico y sistemas numéricos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Con respecto al pensamiento numérico, los estudiantes comienzan a desarrollarlo cuando tienen la oportunidad de pensar y usar los números en diferentes contextos, también cuando construyen diversos caminos o acercamientos al pensamiento matemático, donde logran percibir las matemáticas de manera crítica y las utilizan al momento de tomar algunas decisiones en la vida cotidiana.

Por su parte, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos centran la atención en el desarrollo de la noción de variación y cambio en diferentes contextos como la vida cotidiana, otras ciencias y por supuesto en las matemáticas mismas. Este pensamiento reconoce que es necesario superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para involucrar conceptos y procedimientos que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente las situaciones.

Ambos pensamientos se entretajan específicamente cuando se trabaja con las propiedades y las operaciones de los números, sin dejar de lado la variación de los resultados al cambiar los argumentos o los operandos en situaciones problema que involucran la variación y el cambio en diferentes contextos. Además, cabe mencionar que en este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades que se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o de recurrencia para identificar los criterios que permiten establecer el patrón que se repite. El estudio de estos patrones se relaciona con conceptos y nociones que hacen parte fundamental del pensamiento variacional, entre las cuales tenemos:

constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones. (MEN, 2006, p.67)

A propósito de la variación en relación a objetos matemáticos como la razón, la proporción y la proporcionalidad, ésta debe ser de naturaleza multiplicativa, donde de manera conjunta existen al menos dos cantidades variables, para las cuales, la variación en una de ellas determina el proceso de variación en la otra. Cabe señalar también que en los contextos de la vida práctica y en los científicos, “la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa)” (MEN, 1998, p.50).

La proporcionalidad adquiere un significado especial al promover en los estudiantes la observación y utilización de registros y lenguaje matemático en diferentes contextos. Es así como el tipo de variación multiplicativa es considerada el vínculo entre los pensamientos numérico y variacional, específicamente en la variación y el cambio al utilizar conceptos y procedimientos relacionados con la multiplicación y los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad.

En cuanto a las funciones lineales, estas comprenden la razón de cambio entre cantidades de magnitudes y están conectadas con el estudio de la proporcionalidad directa porque definen una constante de primer orden, que permite modelar gran variedad de fenómenos que implican variación y cambio, además de analizar distintos fenómenos y procesos en contextos cotidianos, las ciencias naturales, las ciencias sociales y las matemáticas.

El MEN (2006), propone diseñar situaciones que posibiliten a los estudiantes exponer sus apreciaciones, generar discusión, escuchar y respetar las opiniones de los demás, desarrollar la capacidad de justificar con argumentos sus aportes y así poder tomar decisiones en diferentes escenarios de las matemáticas y de la vida cotidiana. Los EBC ofrecen también una serie de indicadores que los estudiantes deben alcanzar al final de cada ciclo, los cuales preparan al estudiante para la toma de decisiones en las diversas situaciones que se presentan en la vida cotidiana.

Por ejemplo, al terminar el séptimo grado, en el pensamiento numérico los estudiantes deben resolver y formular problemas con la multiplicación en diferentes contextos y sistemas numéricos; así mismo, justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Por su parte, en el pensamiento variacional, deben reconocer el conjunto de valores de las cantidades variables ligadas entre sí en contextos concretos de cambio (variación), analizar las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables y aplicar la proporcionalidad directa o inversa en diversas situaciones.

El documento de orientación curricular emitido por el MEN (2017), guarda coherencia con los documentos referentes en tanto “plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados” (p.6).

Así entonces, los LCM, EBC y DBA-V2, con respecto al aprendizaje de lo multiplicativo y los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad, invitan a tener una visión amplia donde se analice, reflexione e identifique en las diferentes situaciones, las unidades que acompañan el número que le dan significado, la solución de problemas en contexto, el estudio de dichos objetos de conocimiento a partir de la variación y el cambio, y de los procesos de generalización subyacentes para ir más allá de los procesos algorítmicos.

### **1.1 Resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas**

Las primeras investigaciones realizadas centran la atención en los procesos cognitivos subyacentes al aprendizaje, de lo que en general la didáctica de las matemáticas llamó razonamiento proporcional, y en particular, multiplicación y proporcionalidad directa. En este sentido Ben-Chaim et al. (1998), utilizan diferentes estrategias curriculares con estudiantes del grado séptimo para construir los conceptos y los procedimientos propios de la proporcionalidad, a partir de un trabajo colaborativo, que permite a los estudiantes aportar sus conocimientos y estrategias frente a la solución de situaciones problema que involucran la proporcionalidad.

La experiencia vivida con los estudiantes en esta investigación muestra cómo las estrategias utilizadas por ellos para resolver problemas de proporcionalidad, en su mayoría, se quedan en la aplicación del algoritmo, cuando lo que finalmente se requiere en un proceso de aprendizaje es la comprensión clara de la relación estructural y no solo un patrón de memoria. De allí nace la

necesidad de seguir investigando sobre el proceso de aprendizaje de la proporcionalidad y por ende sobre las habilidades básicas del razonamiento proporcional.

La investigación de Ben-Chaim et al. (1998), evidencia las dificultades en la complejidad de los números al utilizar diferentes sistemas numéricos y conversiones entre magnitudes, que pueden llevar al estudiante a hacer comparaciones erróneas. Por otra parte, el contexto y la familiaridad del mismo no son considerados un rol mayor en la comprensión, pero pueden llegar a generar resistencia para establecer la estrategia adecuada para dar solución, además estos dos elementos, la complejidad de los números y el contexto, deberían ser considerados básicos en el currículo y por consiguiente en el proceso de enseñanza según los autores.

Fernández et al. (2010), al explorar las estrategias utilizadas por los estudiantes en problemas relacionados con la proporcionalidad, logran identificar las características propias del razonamiento proporcional y al mismo tiempo cómo son usadas las relaciones entre números enteros y no enteros, además de la influencia que la naturaleza discreta y continua del número tiene para desarrollar dicho pensamiento. Se destacan en la investigación dificultades sobre el tipo de relación entre los números involucrados en cada situación ya que los estudiantes utilizaron estrategias aditivas para resolver este tipo de problemas, obstaculizando el sentido del razonamiento proporcional centrado en relaciones de tipo multiplicativo.

Con respecto a la naturaleza de las cantidades según los resultados de la investigación, “parece no afectar a los estudiantes de secundaria, mientras que la estructura del número sólo afecta a la utilización de estrategias proporcionales” (Fernández et al., 2010, p. 15). Se hace necesario compartimentar las estrategias, ya que la naturaleza de las cantidades influye en la utilización de éstas en las diferentes situaciones de proporcionalidad. Además, se debe prestar atención a las relaciones que se presentan en las situaciones problema, para que las estrategias aplicadas no sean superficiales y no se utilicen de manera sistemática en todas las situaciones sin identificar la pertinencia o no de las mismas.

Por otro lado, con respecto a las relaciones que se establecen entre los números a partir de situaciones problema que involucran relaciones multiplicativas, Torres (2013) considera que estas toman un significado diferente a la suma de sumandos iguales, en tanto involucran procesos de correlación de dos cantidades que covarían linealmente, y que, por ende, vinculan a la multiplicación con la razón, la proporción y la proporcionalidad.

En relación con la enseñanza tradicional de la multiplicación, Obando (2015) establece que en la escuela ésta se ha trabajado de una manera inapropiada, porque limita las situaciones que los estudiantes desarrollan y solo involucra acumulaciones sucesivas de una sola cantidad (adición repetida). En contraste, se debe propiciar en los estudiantes una interacción con diferentes situaciones problema en las que logren abstraer la solución pensando multiplicativamente, es decir, estableciendo una relación multiplicativa, lo cual es apropiado en un inicio, para cantidades de igual espacio de medidas y posteriormente entre las cantidades de diferentes espacios de medidas. Por su parte, Vergnaud (1991) estableció que la relación entre los elementos correspondientes en los dos espacios de medida es siempre la misma (razón constante) y se denomina constante de proporcionalidad.

Con respecto al estudio de lo multiplicativo en la escuela y parafraseando a Vergnaud (1994), este proceso se torna difícil y poco comprensible para los estudiantes, y se convierte en un campo problemático para el aprendizaje. Vergnaud (1994), destaca que los algoritmos de la división y la multiplicación son utilizados por los estudiantes para comprobar la igualdad entre razones, los problemas de proporción son limitados a lo numérico, mientras los de cuarta proporcional los resuelven con la llamada regla de tres, la cual ha sido ya mecanizada, en tanto no se piensa en las cantidades, ni mucho menos en las relaciones entre ellas y solo se limita a la aplicación del algoritmo.

Los problemas utilizados para establecer las relaciones multiplicativas según Torres (2013), involucran como mínimo cuatro cantidades y dos espacios de medida, que se caracterizan por tener dos cantidades que pertenecen a cada uno de ellos y además guardan una correspondencia entre las cantidades de cada espacio de medida, donde se logran establecer razones que son equivalentes y a su vez son proporcionales.

A partir de lo cognitivo, Torres (2013) señala que los estudiantes no identifican con frecuencia las dos variables que se relacionan y solo expresan una acumulación sucesiva de una cantidad. Por otra parte, los estudiantes comprenden con facilidad las propiedades de los isomorfismos de medidas como precisa Vergnaud (1991), entendidos como una estructura que pone en juego cuatro cantidades de magnitud, pero no las propiedades del coeficiente constante (constante de proporcionalidad).

Park y Nunes (2001), consideran la razón constante como el núcleo del concepto de multiplicación, simbolizado matemáticamente como  $y = f(x) = k \cdot x$ . De acuerdo con esto, el

concepto tiene su origen en el esquema de correspondencia, como una relación invariante entre dos cantidades, donde esta relación constante es considerada razón o proporción. Según Sánchez (2011), estos objetos matemáticos necesitan ser estudiados ya que están articulados en los planes del área de matemáticas elaborados por los docentes en las diferentes instituciones educativas en el marco de sus Proyectos Educativos Institucionales. Estos planes de área dentro del currículo no solo son un documento que guía la planificación del área, sino que también permiten desarrollar el proceso de aprendizaje de los estudiantes y están estructurados según reglamentaciones educativas adaptadas a los contextos en los que se desarrollan, buscando favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por su parte, Ben-Chaim et al. (2012) expresan que la proporción se utiliza para resolver problemas tanto de matemáticas como de otros campos. Estos problemas implican situaciones en las que la naturaleza de las relaciones es multiplicativa, opuesto a lo aditivo, y permite formar dos proporciones iguales entre sí. Es allí donde la capacidad para resolver problemas permite determinar la existencia o no del razonamiento proporcional, lo cual conduce a un pensamiento abstracto.

Los problemas que se planteen para trabajar con los estudiantes deben tener una estructura que considere aspectos cognitivos, didácticos, matemáticos y especialmente epistemológicos, relacionados con los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad. Es así como Sánchez (2011), propone identificar situaciones y acciones que contribuyan por un lado a

... dar forma a los objetos razón, proporción y proporcionalidad como objetos matemáticos que contribuyen al entendimiento y dominio del campo conceptual multiplicativo por parte de los estudiantes, y de otro, identificar la manera como son reconocidas, manipuladas, por los estudiantes en situaciones de aula, las razones, las proporciones y la proporcionalidad. (p. 27)

En líneas generales, el trabajo de Sánchez (2011) incentiva a fortalecer los conocimientos conceptuales inherentes a lo multiplicativo y además brinda herramientas a los estudiantes para dar tratamiento a las diferentes situaciones que comprenden los conceptos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad. Así mismo, logra identificar los sistemas de prácticas, es decir, las formas de hacer y de pensar que desarrollan los estudiantes en la solución de situaciones que

involucran variación y cambio, y también cómo estos sistemas permiten dar forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.

Por su parte, Obando (2015) indaga por el lugar de las razones, proporciones y proporcionalidad en las prácticas matemáticas institucionalizadas, por medio de las cuales se articulan los objetos matemáticos antes mencionados, las estrategias y los instrumentos que se utilizan específicamente en los grados 3° y 4° en una Institución Educativa de Colombia, a través de la caracterización y las configuraciones epistémicas específicas para estas prácticas. También plantea que se logra establecer en las prácticas matemáticas de los estudiantes, los procedimientos utilizados para resolver los problemas planteados y además identifica una idea de razón asociada a los procesos que permiten la medición relativa entre las cantidades, las tasas de intercambio o distribución.

Adicional a lo anterior, Obando (2015) propone que los problemas deben ser analizados teniendo en cuenta las prácticas matemáticas de los estudiantes y a partir de allí, percibir en las diferentes situaciones, la articulación de los objetos del conocimiento que obstaculizan el tratamiento, además de las técnicas e instrumentos que permiten a los objetos y conceptos movilizar discursos que aporten a la solución de dichos problemas.

### **1.3 Aspectos relevantes del plan de estudios institucional**

El plan de estudios construido en la institución educativa pública de la ciudad de Medellín donde se desarrolla la investigación, cuenta con tres periodos académicos que están distribuidos de la siguiente manera: el primer y segundo periodo cuentan con 12 semanas cada uno y el tercero con 16 semanas, este último distribuido así con el fin de tener espacios de recuperación con asesorías grupales de temas trabajados durante el año para lograr que los estudiantes alcancen las competencias propuestas para cada grado. En el grado séptimo de básica secundaria (estudiantes entre los 12 y los 14 años), específicamente en la malla curricular formada por indicadores de desempeño y los respectivos contenidos y/o temas; se puede observar que los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad, están ubicados en el tercer periodo académico como lo muestra la siguiente tabla:

**Tabla 1***Malla Curricular de Matemáticas Grado Séptimo - Tercer Periodo*

	<b>Indicadores de desempeño</b>	<b>Contenidos y/o Temas</b>
<b>Tercer periodo</b>	Analiza las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.	Razones
	Justificación sobre el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Proporcionalidad

*Nota:* Adaptado de <https://www.feyalegrialacima.edu.co/index2.php?id=51676&idmenutipo=5200>

Particularmente en este plan de estudios, la proporcionalidad directa y la proporción no aparecen explícitas en los temas y/o contenidos, mientras en los indicadores de desempeño la atención está centrada en analizar las propiedades de correlación positiva, la variación lineal o proporcionalidad directa en diferentes contextos; además del uso de representaciones y procedimientos de la proporcionalidad directa, lo cual brinda una información más detallada de lo que se debe alcanzar en el periodo.

Lo anterior evidencia algunas imprecisiones en el plan de estudios con respecto a los objetos matemáticos de la razón, la proporción y la proporcionalidad, al encontrarlos solo de manera implícita en los contenidos, pero explícita en los indicadores, donde se espera que los estudiantes los utilicen en la solución de diferentes situaciones. Las representaciones y los procedimientos quedan a la interpretación del docente, quien es libre de utilizar los que crea convenientes mientras logre alcanzar los indicadores establecidos.

Con respecto a la estructura del plan de estudios, se han desarrollado algunos cuestionamientos por parte de los docentes que integran el área de matemáticas en la institución educativa, acerca de la organización que se tiene del mismo y que se ha estado aplicando durante los 2 últimos años, surgiendo la necesidad de desarrollar construcciones teóricas que permitan analizar, aplicar, comprender y por supuesto crear un currículo más actualizado, que concuerde con lo que se está implementando en el aula de clase y con la propuesta del MEN con respecto a la razón, la proporción y la proporcionalidad.

### 1.4 Aspectos teóricos y curriculares

Por otra parte, el razonamiento proporcional, es considerado una habilidad que puede ser desarrollada a partir de la utilización de conceptos propios de las razones y las proporciones en situaciones de proporcionalidad directa, particularmente en las que involucra el cálculo de la cuarta proporcional. En los últimos años este razonamiento ha tomado posesión como:

un campo privilegiado para las investigaciones en virtud de su importancia para las matemáticas que se enseñan en la escuela, en tanto pone en relación diferentes ámbitos de las matemáticas escolares a partir de una estructura compleja que liga conceptos, situaciones y formas de representación y procedimientos de naturaleza diversa, tales como la multiplicación, la división, la razón, la proporción, la proporcionalidad, la función lineal, etc. (Obando, 2015, p. 29)

Lamon (2007), añade que considerar el razonamiento proporcional como una capacidad que brinda la posibilidad de identificar y entender las relaciones estructurales presentes en los problemas de comparación y además verlo con esta perspectiva, logra convertirlo en un elemento necesario para la comprensión de la proporcionalidad, aunque enfatiza que éste no es suficiente en dicha comprensión. Por lo tanto, propone el estudio de variables, ecuaciones lineales y otros objetos de conocimiento matemático que permitan la profundización sobre relaciones multiplicativas.

En contraste con esta importancia, las dificultades con la enseñanza y el aprendizaje aún persisten. Por ejemplo, Howe et al. (2010), reconocen que hacia el final de la escuela primaria, en la enseñanza de las matemáticas hay un incremento en la intensidad del énfasis puesto sobre los números racionales. “Este énfasis se mantiene a lo largo de la educación secundaria, pero es no recompensado con el dominio generalizado de los estudiantes” (p. 391). Es decir, a partir de la básica primaria se trabajan los números racionales en niveles de complejidad que aumentan a lo largo de la básica secundaria. A pesar de esto los estudiantes presentan dificultades al no reconocer la relación entre los elementos dentro de los espacios de medida y la relación funcional a través de espacios de medida, porque este razonamiento gira en torno a las razones e implica un reconocimiento de la relación entre las cantidades involucradas.

Adicionalmente, se ha documentado que en la escuela es común encontrar que los estudiantes no alcancen la comprensión y el aprendizaje del razonamiento proporcional, lo cual ha sido reconocido por Obando (2015), al expresar que la permanencia de las dificultades se puede entender como una muestra de la complejidad existente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad.

En contraste con las dificultades antes enunciadas, se pueden expresar investigaciones que dan luces sobre posibles caminos a seguir. Por ejemplo, Sánchez (2011) indica que, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos de razón, proporción y proporcionalidad, es necesario diseñar e implementar situaciones que involucren la variación y el cambio (pensamiento variacional), tomadas de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las mismas matemáticas,

... en las cuales intervengan diferentes magnitudes para que los estudiantes logren determinar, en primera instancia de forma cualitativa, la correlación entre tales magnitudes y progresivamente vayan logrando cuantificar dicha correlación, utilizando para ello, inicialmente en acto, las diferentes facetas que juega la razón como relator, operador o correlator, y determinando el tipo de proporcionalidad, simple directa o simple inversa, que existe entre ellas. (p. 31)

Por su parte, Obando (2015) plantea que el razonamiento proporcional, en un sentido más amplio, está vinculado con el reconocimiento de las variables, las relaciones entre ellas y los invariantes operatorios que se enlazan en el proceso de variación. Al respecto, se podría decir que los estudiantes para reconocer las variables, sus relaciones e identificar los invariantes operatorios, es decir, los conceptos y operaciones necesarias para resolver una situación, necesitan tener conceptos propios de linealidad y la falta de estos no permite que tengan la capacidad de identificar regularidades entre las variables, por lo tanto, presentan dificultades para aplicarlos en diferentes situaciones de proporcionalidad directa.

Obando (2015) manifiesta que en Colombia se puede afirmar que:

la enseñanza de la proporcionalidad se centra en procesos algorítmicos (fundamentalmente la regla de tres) sin que sean explícitas las relaciones de covariación entre magnitudes y,

por ende, el uso significativo de las razones y proporciones que se exige en este tipo de situaciones de proporcionalidad directa. (p.28)

En este orden de ideas “los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado unificado con la noción de función lineal. La noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos” (Fiol & Fortuny, 1990, p. 83). Lo anterior podría entenderse como la matematización que logramos a partir de las experiencias cotidianas y la utilidad que le damos a la proporcionalidad en las diversas situaciones, lo cual permite visualizar los comportamientos de variación que se presentan en cada caso.

Además de estas experiencias, Lamon (2012) considera que “un estudiante debe aprender a pensar en las cantidades y cómo se relacionan entre sí para determinar las operaciones apropiadas” (p.25). En otras palabras, no basta solo con tener datos de una situación problema, es necesario identificar el rol de cada una de las cantidades y las operaciones pertinentes según la relación que se establece en cada situación.

Por su parte, Vergnaud (1991) denomina los isomorfismos de medidas como problemas que comprenden dos conjuntos conformados por dos cantidades variables diferentes y que se correlacionan a través de una función lineal, es decir, este tipo de situación permitirían el trabajo con la proporcionalidad directa, facilitando elementos a los estudiantes a través de los cuales puedan identificar la correspondencia entre las cantidades, sin utilizar la multiplicación para establecer en ambos sistemas de cantidades la correlación uno a uno.

Es así como se hace necesario trabajar en torno a los interrogantes didácticos, los aspectos cognitivos, matemáticos y de contexto asociados a la organización escolar en el grado séptimo de educación básica secundaria, a partir de los razonamientos analíticos que elaboran los estudiantes cuando enfrentan problemas de isomorfismo de medidas, y cómo tales procesos de razonamiento les permiten comprender las relaciones de proporcionalidad directa entre cantidades que pertenecen a diferentes magnitudes cuando resuelven este tipo de problemas.

Teniendo en cuenta los diferentes elementos problemáticos expuestos en los párrafos anteriores y reconociendo la importancia de los objetos matemáticos, se plantea como pregunta de investigación: *¿Qué características tienen los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa?*

## 2. Objetivos

### 2.1 Objetivo general

Reconocer las características de los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa.

### 2.2 Objetivos específicos

- Identificar los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para hallar la razón constante (constante de proporcionalidad) en situaciones de proporcionalidad directa.
- Interpretar las formas de representación de la razón constante (constante de proporcionalidad) en la solución de situaciones de proporcionalidad directa.

### 3. Marco Teórico

En coherencia con el objetivo propuesto, *reconocer las características de los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa*, se desarrollan en este capítulo nociones centrales sobre la razón, la proporción, la proporcionalidad y los procedimientos basados en razonamientos por analogía y razonamientos analíticos para afrontar situaciones que incluyen la proporcionalidad directa.

#### 3.1 Nociones centrales sobre Razón, Proporción y Proporcionalidad

La complejidad que se presenta en la construcción del conocimiento no se puede subestimar, por lo tanto, es necesario tener una idea de lo que implica el razonamiento proporcional para identificar los conceptos centrales que forman la columna vertebral de los dominios de este razonamiento. Cabe señalar que Ben-Chaim et al. (2012) precisan el razonamiento proporcional como la capacidad que tiene el ser humano para usar de una forma efectiva objetos matemáticos como la razón, la proporción y la proporcionalidad en la solución de diferentes situaciones y es así como esta capacidad tiene un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático. Con frecuencia, se describe el razonamiento proporcional como uno de los principios básicos de las matemáticas.

Los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad, en general se denominan razonamiento proporcional, que en palabras de Lamon (2012) se refiere a “detectar, expresar, analizar, explicar y proporcionar evidencia en apoyo de afirmaciones sobre relaciones proporcionales” (p. 5). Además, es necesario resaltar que este razonamiento está asociado al sentido común, a la utilización de un juicio propio, un enfoque reflexivo y un análisis de las relaciones proporcionales que se presentan entre cantidades a partir de situaciones que giran en torno a los objetos de razón, proporción y proporcionalidad.

Lamon (2012) también ha utilizado el término de razonamiento proporcional para representar formas matemáticas complejas que se presentan a finales de la básica primaria, las cuales continúan desarrollándose en la básica secundaria y la universidad con más profundidad. Lo anterior en palabras de Lamon (2012) “significa el logro de un cierto nivel de madurez matemática

que consolida muchas ideas elementales y abre la puerta a lo más avanzado del pensamiento matemático y científico” (p. 10).

### **3.1.1 Razón**

El concepto de razón comienza a desarrollarse a partir de los primeros años de la básica primaria: En palabras de Obando (2015), este objeto matemático es un pilar fundamental en la organización de los procesos de estudio de los primeros aprendizajes sobre la multiplicación en grado 3° y de los primeros aprendizajes sobre los números racionales en el grado 4°: Incluso sin nombrar el concepto específico, los estudiantes pueden referirse directa o indirectamente a la razón cuando utilizan el precio por artículo, las fracciones o los porcentajes, mientras en la básica secundaria la razón es utilizada de forma gradual en el tratamiento de situaciones problema que hacen parte del proceso de enseñanza, donde los estudiantes pueden llegar a identificar la relación multiplicativa entre los números o las magnitudes.

Obando (2015), formula una aproximación a la idea de razón que surge en las prácticas matemáticas de los estudiantes, en donde interviene un sistema de cantidades, que se define de forma general como “el conjunto de cantidades con la estructura mínima posible: una estructura relacional de orden” (p.152). Esto quiere decir que la operación suma no necesariamente debe estar contenida en el conjunto de cantidades y que su estructura relacional de orden permite plantear una noción de magnitud más general en la que intervienen otras relaciones y operaciones, si las hay.

Por lo tanto, como lo manifiesta Obando (2015), la razón puede entenderse a partir de:

dadas dos cantidades  $x \in A_1$  e  $y \in A_2$  (con  $A_1$  y  $A_2$  dos sistemas de cantidades no necesariamente diferentes), la razón entre las dos cantidades  $x$  e  $y$  nos permite expresar la relación por cociente entre las dos cantidades. Si ambas cantidades son de la misma naturaleza, la razón expresa la medida relativa de una de ellas con respecto a la otra (como por ejemplo en las tareas propuestas para el inicio del estudio de los números racionales), pero en caso de que las cantidades  $x$  e  $y$  sean de naturaleza distinta, la razón expresa la normalización de una de las cantidades con respecto a la otra (como por ejemplo, en la coordinación de los procesos de conteo en el aprendizaje de la multiplicación, cuando la razón era interpretada como constante de proporcionalidad). (p. 293)

Es así como Obando (2015), establece que la razón surge de comparar los números y magnitudes por medio del cociente entre ellos, donde la medida relativa de uno de ellos se expresa tomando como unidad el otro. La naturaleza de los números, las relaciones que se pueden establecer y las acciones desarrolladas con respecto a ellos en una situación, permiten centrar la atención en el papel que cumple la razón en relación con las cantidades involucradas en la situación, y, por ende, de las acciones que se realizan sobre las cantidades, presentando la razón a partir de cuatro funciones:

**3.1.2.1 Razón como Relator.** En palabras de Obando (2015), la razón como relator se presenta en situaciones en las que un par de cantidades conocidas, por lo general de la misma naturaleza (homogéneas), expresan cuántas veces una de ellas está contenida en la otra. Mientras, las cantidades de diferente naturaleza (heterogéneas), expresan la relativización de una cantidad por la respectiva unidad de la otra. Así, por ejemplo, si se tuviera un segmento AB igual a 8, y un segmento CD igual a 4, y se asume que el segmento CD es dos veces el segmento AB, entonces al medir estos segmentos se tendría lo siguiente:

$$AB = 4 \cdot u$$

$$CD = 2 \cdot u$$

Este tipo de función de la razón como relator permite establecer cuántas veces una de las cantidades está contenida en la otra, es decir, el segmento CD es la mitad del segmento AB o bien, el segmento AB es el doble del segmento CD. Particularmente, la anterior situación representa el caso en el que las cantidades son homogéneas.

**3.1.2.2 Razón como Operador.** “Dadas una cantidad y la razón de esta cantidad con otra cantidad desconocida, entonces la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida” (Obando et al. 2013, p. 980). Si tanto la cantidad inicial como la final son homogéneas, la razón expresa un factor de ampliación o reducción que al ser aplicado sobre una de las cantidades logra determinar la cantidad desconocida. Por otro lado, si las cantidades son heterogéneas, de naturaleza distinta, la razón se representa como una cantidad intensiva dimensional, es decir, expresa la medida relativa de una de las cantidades, tomando la otra como unidad cumpliendo la función de correlator.

Para comprender la razón como operador, se propone el ejemplo de una fiesta a la que asisten hombres y mujeres; la razón entre la cantidad de hombres y mujeres que asisten es de 4:8. Si en la fiesta hay 12 hombres, ¿cuántas personas hay en la fiesta? En esta situación se tiene la razón, *por cada 4 hombres en la fiesta hay 8 mujeres* y además en el contexto de la situación se expresa que asistieron 12 hombres a la fiesta, por lo tanto, estos datos se representan de la siguiente manera:

$$\frac{4 \text{ hombres}}{8 \text{ mujeres}} = \frac{12 \text{ hombres}}{? \text{ mujeres}}$$

La razón como operador toma como punto de partida la razón entre las cantidades conocidas. En el ejemplo anterior la razón es 4:8, además se asume que el otro par de cantidades están en la misma razón y se aplica sobre la cantidad conocida para hallar la cantidad desconocida. En otras palabras, la razón conocida opera directamente con la tercera cantidad para así tener el valor que falta. Para comenzar, es necesario identificar el tipo de relación que hay entre 4 y 8, el resultado se utiliza como operador sobre la cantidad conocida del segundo par de cantidades, es decir, se considera que *4 es la mitad de 8* o que *8 es el doble de 4*, donde 2 se aplica como operador, por lo tanto para el ejemplo anterior,  $12 \times 2 = 24 \text{ mujeres}$ , es decir, el valor de la cantidad desconocida.

$$\frac{4 \text{ hombres}}{8 \text{ mujeres}} = \frac{12 \text{ hombres}}{24 \text{ mujeres}}$$

**3.1.1.3 Razón como correlator.** Dada una familia de cantidades correlacionadas (uno a uno), donde todas las parejas de cantidades correspondientes tienen la misma medida relativa, la razón cumple la función de correlator logrando establecer la constante de proporcionalidad, la cual podrá ser adimensional si el correlator se establece entre familias de cantidades homogéneas o tendrá dimensiones entre familias de cantidades heterogéneas, es decir, las cantidades pueden estar acompañadas de varias unidades.

Por ejemplo, en la plaza de mercado, 1kg de peras valen \$2000, ¿cuánto valen 3kg? En este tipo de situación se conocen tres de las cantidades y se espera establecer el valor de la cuarta cantidad. Los datos se representan de la siguiente manera:

$$\frac{1 \text{ kg}}{\$2000} = \frac{3 \text{ kg}}{?}$$

Para hallar la constante de proporcionalidad con los valores conocidos, en este ejemplo en particular, 1kg de peras y su valor de \$2000, se debe tener en cuenta que es la misma constante para el otro par de cantidades y con esta relación definida se puede establecer el valor desconocido de la cuarta cantidad de la siguiente forma:

$$\frac{1kg}{\$2000} = 0,0005 \text{ por lo tanto } \frac{3kg}{?} = 0,0005$$

Aplicando la función de la razón como correlator a partir de la constante de proporcionalidad (0,0005), se obtiene el valor de la cantidad desconocida; es así como la relación establecida entre las familias de cantidades se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1kg}{\$2000} = \frac{3kg}{\$6000}$$

**3.1.1.4 Razón como Transformador.** Con respecto a la función de la razón como transformador, Obando et al. (2013) afirman que se presenta cuando:

dadas una cantidad y la razón de esta cantidad con otra cantidad desconocida, entonces la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida. Si la cantidad inicial y final son homogéneas, la razón  $\alpha$  expresa un operador escalar (factor de ampliación-reducción) que, aplicado sobre una de las dos cantidades, produce la otra cantidad. Si cantidad inicial y final son heterogéneas, entonces la razón es un *transformador* que aplicado sobre una de las cantidades, la transforma en otra con la que se correlaciona. (p. 980)

Cuando se da una comparación entre familias de cantidades que se correlacionan linealmente, se establece una relación de proporcionalidad simple directa, la cual es un caso particular del tipo de problemas denominados isomorfismos de medida. Este tipo de correlación es un caso de especial interés porque el transformador lineal, es decir, la constante de proporcionalidad, se aplica sobre cualquiera de las cantidades de una de las familias para producir la cantidad que corresponde a la otra familia. La razón como constante de proporcionalidad permite analizar la función lineal que modela la proporcionalidad directa presente en este tipo de situaciones.

Así, por ejemplo, en una fábrica de muebles han llegado 840 camiones de madera en 2 meses. Si el flujo de camiones se mantiene, ¿cuántos camiones recibirán en 5 meses? Con los datos que la situación brinda, se logra expresar una razón con las cantidades conocidas:

$$\frac{840 \text{ camiones}}{2 \text{ meses}} = 420 \text{ camiones por mes (Razón como correlator)}$$

Las funciones de la razón no desarrollan un rol aislado, al contrario, operan relacionadas entre sí, en la anterior expresión se logra evidenciar la razón como correlator. Por otra parte, el resultado obtenido se denomina constante de proporcionalidad y aplicado sobre la otra cantidad conocida, en este caso 5 meses, la transforma en el valor de la cantidad que se desconocía en dicha situación:

$$420 \text{ camiones} \cdot 5 \text{ meses} = 2100 \text{ camiones en 5 meses (Razón como operador)}$$

$$\frac{840 \text{ camiones}}{2 \text{ meses}} = \frac{2100 \text{ camiones}}{5 \text{ meses}} \text{ (Razón como correlator)}$$

Las funciones de la razón no son estáticas, una razón puede cambiar continuamente de una función a otra dependiendo de las situaciones problema que se van presentando. Por consiguiente, las funciones demuestran lo dinámicas que son las razones en su aplicación y adaptación a las diferentes situaciones, logrando que los estudiantes identifiquen la relación existente entre las cantidades.

En otro sentido, Vergnaud, en la Teoría de los Campos Conceptuales (1988, 1997), hace un análisis de la complejidad de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje, en especial, en las áreas de matemáticas y ciencias. Esta teoría plantea que el conocimiento está organizado en campos conceptuales que para ser dominados por el sujeto requieren de un largo periodo de tiempo y una amplia variedad de experiencias de aprendizaje.

Vergnaud (1988), identifica en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas dos tipos de problemas: el isomorfismo de medidas y el producto de medidas.<sup>1</sup> Los problemas de isomorfismos de medida se presentan entre dos conjuntos de dos cantidades variables diferentes

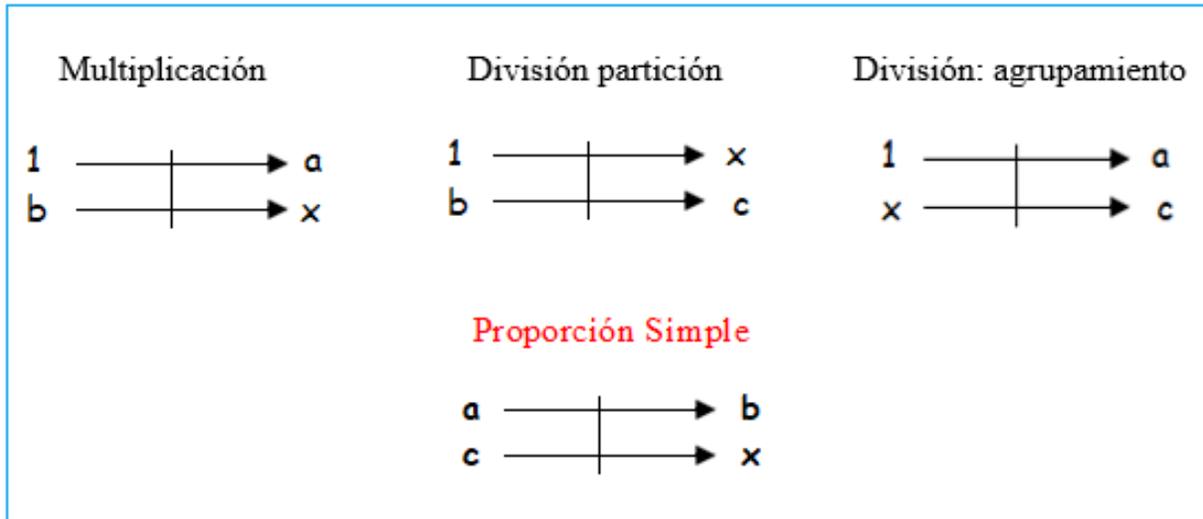
---

<sup>1</sup> Los problemas del tipo producto de medida son aquellos en los que se relacionan multiplicativamente dos o más cantidades y sus respectivas dimensiones de medida. La relación que se establece entre las cantidades de este tipo de problemas es ternaria, donde una de ellas es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional (Vergnaud, 1991). En este trabajo no desarrollaremos este tipo de problemas.

que se correlacionan a partir de una función lineal y plantean cuatro tipos de problemas simples representados en los siguientes esquemas:

**Figura 1**

*Esquema de representación de los isomorfismos de medidas*



*Nota.* Los cuatro esquemas representan los tipos de problemas relacionados con los isomorfismos de medida. Adaptado de Vergnaud (1988)

En esta investigación, la atención está centrada en el tipo de problema denominado *proporción simple* por Vergnaud (1988), conformado por dos variables entre las cuales se establece una relación constante. Para dar solución a este tipo de problemas multiplicativos es necesario según Vergnaud (1991), utilizar un operador-escalar donde la razón establecida por el par de cantidades es correspondiente con la razón del otro par de cantidades. Es decir, en palabras de Fernández y Llinares (2012), es necesario identificar y usar la razón interna “relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud” (p. 132).

También los problemas de proporción simple se pueden resolver utilizando lo que Vergnaud (1991) llamó un operador-función o coeficiente de proporcionalidad. En otras palabras, este coeficiente de proporcionalidad establece la razón que existe entre un par de valores que pertenecen a variables diferentes y es invariante porque relaciona dos variables entre sí estableciendo una proporcionalidad directa.

Para dar un tratamiento adecuado a los problemas del tipo de isomorfismos de medidas se utilizan procedimientos que están basados en razonamientos por analogía y razonamientos

analíticos. Los razonamientos por analogía según Obando (2015), establecen que “la relación entre dos o más cantidades en uno de los sistemas de cantidades, se traslada de forma análoga a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades” (p. 205). En otras palabras, las cuatro cantidades pertenecen a la misma familia de cantidades, tres cantidades son conocidas y el valor de la cuarta cantidad es desconocido; para encontrar este valor se establece la razón entre un par de cantidades conocidas (y de la misma naturaleza), y se traslada de manera análoga a la otra pareja de cantidades.

Esta clase de razonamientos favorece a los estudiantes en el momento de identificar la relación entre la misma familia de cantidades. Por ejemplo, en la primera columna de la Tabla 2, se registra las cantidades de dulces y en la segunda columna los precios correspondientes de algunas cantidades. Se debe completar la tabla para hallar el precio de cada una de las cantidades de dulces que faltan.

**Tabla 2**

*Situación problema - Dulces y precios*

Cantidad de dulces	Precio \$
2	\$400
4	\$800
6	
8	

La pregunta específica para esta situación es: ¿cuál es el precio de 6 dulces?, los estudiantes relacionan las familias por aparte. En la primera familia denominada cantidad de dulces, identifican la relación entre las cantidades conocidas, donde *4 es el doble de 2* y *6 es el triple de 2*. Análogamente en la otra familia la relación es la misma, es decir, *\$800 es el doble de \$400* y *el precio de 6 dulces es el triple del precio de 2 dulces*. Al comprender esta relación se puede responder la pregunta utilizando el siguiente procedimiento:  $\$400 \cdot 3 = \$1200$ .

Por otra parte, los razonamientos analíticos son “procedimientos soportados en la comparación de parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas” (Obando, 2015, p. 213). Es decir, se fundamentan en la relación funcional entre las parejas de cantidades

heterogéneas, donde se permite que las familias de parejas de cantidades se relacionen a partir de la razón como correlator, al estar en correspondencia biunívoca o como transformador cuando se aplica a las cantidades de una familia transformándolas en las cantidades de la otra familia.

Este tipo de razonamientos analíticos obligan a cambiar el centro de análisis hacia la relación funcional entre las parejas de cantidades heterogéneas y así comparar estas cantidades por medio de instrumentos como las tablas, que permiten identificar la relación entre las familias de cantidades y no solo entre parejas de cantidades.

### **3.1.2 Proporción**

Al igual que la razón, el concepto de proporción es aplicado en matemáticas y en otros campos del saber. Una de las estrategias de aprendizaje más utilizada son las situaciones problemas en las que se establecen relaciones matemáticas de carácter multiplicativo, las cuales permiten la identificación de dos relaciones que indican la presencia de un razonamiento proporcional.

La proporción como relación multiplicativa se puede presentar en la misma dirección (proporción directa), o en dirección opuesta (inversa). Con respecto a la proporción directa Ben – Chaim et al. (2012) expresan que ocurre entre dos cantidades cuando:

los cambios cuantitativos en ellas ocurren uniformemente. Es decir, si la cantidad  $a$  se multiplica por un factor  $m$ , entonces la cantidad  $b$  se debe multiplicar por  $m$ , que es el factor constante. En este caso, el cociente (razón) entre las dos primeras cantidades es igual al cociente (razón) del segundo par. (p. 35)

Este tipo de proporción centra la atención en la relación de linealidad que se mantiene constante en la misma dirección, donde la relación multiplicativa se expresa como un cociente constante entre los dos valores que nunca cambia.

Por su parte, Piaget citado por Obando (2015), establece que es necesario tener en cuenta, para comprensión de la proporción, dos aspectos a saber:

aspecto lógico, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón se presenta como una relación entre dos variables, y la proporción como una relación

de equivalencia entre dos razones) y, por ende, implica el recurso a una lógica de segundo orden y a cuantificadores sobre las variables y aspecto matemático, la comprensión de las compensaciones cuantitativas en forma de equivalencias (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) para que conserven invariante un cociente o un producto (si  $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$ , entonces  $xy' = x'y$ ). (p. 9)

La lógica de segundo orden utiliza variables que representan propiedades, funciones y relaciones, además de cuantificadores que operan sobre las variables, por lo tanto, para lograr comprender este aspecto, es necesario deducir que se trata de la relación entre dos cantidades de magnitud que se ponen en correspondencia con otras dos que también están en correlación y así establecer una relación entre relaciones que se representa en el aspecto matemático.

Por su parte, Lamon (2012) considera que, a nivel visual, en los primeros años de vida se hace un acercamiento al concepto de proporción y se puede construir un conocimiento intuitivo del mismo; además, propone usar imágenes que permitan a los estudiantes desarrollar conceptos relacionados con las proporciones. En el aula de clase la discusión necesita ser abordada con ideas como “estirar, encoger, agrandar, distorsionar, estar en proporción, estar fuera de proporción, y ser dibujado a escala” (p.68).

Por otro lado, para ayudar a desarrollar la capacidad de observación en diferentes situaciones y hacer comparaciones, Lamon (2012) menciona que es necesario “discernir las características cuantificables importantes, teniendo en cuenta si las cantidades están cambiando o no en esa situación, y si lo están, tener en cuenta la dirección de cambio de uno con respecto al otro” (p.70). Esta comparación permite que los estudiantes comprendan que una relación no se puede expresar de forma aislada como un solo número.

Madden (2018), a partir de las investigaciones realizadas a fuentes históricas que presentan ideas sobre razón y proporción como objetos importantes del conocimiento de las matemáticas, ha determinado que para el grado sexto de básica secundaria los estudiantes alcanzan a representar y razonar acerca de las relaciones que se establecen entre cantidades, mientras en el grado séptimo logran reconocer las relaciones proporcionales entre cantidades variables y además las representan con “una ecuación de la forma  $y = k \cdot x$ , donde  $k$  es una constante” (p. 101).

En palabras de Ben-Chaim et al. (2012), referirse a proporcionalidad es nombrar el corazón de la matemática en la educación básica, donde las relaciones matemáticamente establecidas tienen naturaleza multiplicativa y es allí donde especialmente para un matemático, la formalización del concepto permite comprender la proporción como un estado de equivalencia entre dos razones.

### ***3.1.3 Proporcionalidad***

La proporcionalidad ha sido objeto de estudio durante varios años y por diferentes autores, a causa de esto se ha logrado cambios significativos en la concepción que se ha ido construyendo del concepto. El razonamiento proporcional no es ajeno a la vida cotidiana y muchas de las situaciones que se viven en la cotidianidad giran en torno a la idea de razón, proporción y proporcionalidad.

Por su parte, Fiol y Fortuny (1990) consideran que la proporcionalidad “presenta una dualidad de parecer en un principio como concepto sencillo y, sin embargo, se muestra como una noción difícil en las aplicaciones” (p. 113). Los autores hacen esta afirmación tomando como punto de partida la educación primaria, donde la multiplicación y la razón se trabajan en la aritmética, mientras los demás conceptos involucrados en la proporcionalidad son desarrollados en la básica secundaria.

Es posible que, al pretender entender la proporcionalidad, se evidencien errores de cálculo cuando el estudiante solo aplique el algoritmo automáticamente sin comprender el concepto. Además, en otras ciencias a finales de la básica primaria aplican la proporcionalidad en mapas, diagramas o tablas que los estudiantes trabajan de forma automática pero que en realidad siguen sin comprenderla en su totalidad.

Para Obando (2015), en la modernidad el concepto de proporcionalidad “se encuentra estrechamente ligado con el álgebra lineal, pues las relaciones lineales (y en general n-lineales) están en la base de toda situación de proporcionalidad directa o inversa, simple o compuesta” (p.134). Lo anterior establece que, el tratamiento aplicado a varios conceptos como las operaciones básicas, particularmente la multiplicación y el concepto de razón, logra evidenciar la linealidad a través de ciertos métodos que potencializan la relación lineal existente.

(Vergnaud, 1997; Posada & Obando, 2006; Lamon, 2012), con respecto a la linealidad presente en las situaciones de proporcionalidad directa, manifiestan que puede ser expresada por

medio de una función lineal de la forma  $f(x) = k \cdot x$ . En esta función,  $k$  representa la constante de proporcionalidad, la cual expresa la relación constante entre cualquier par de valores correspondientes de las cantidades variables  $x$  y  $f(x)$ . Además, el modelo matemático para las relaciones directamente proporcionales es una función lineal que mantiene una relación constante  $\frac{y}{x} = k$ , donde la constante  $k$  representa la relación proporcional establecida según el contexto.

Mientras Obando et al. (2006), en lo que se refiere a la proporcionalidad toman como punto de partida el concepto de razón, definen el concepto como el cociente entre dos números naturales (p. 122). Dicho de otra forma, se compara la medida de dos cantidades y se halla el cociente (razón), a partir del cual se construye el concepto de proporción al establecer la igualdad entre dos razones y se representa con una equivalencia entre estas, por ejemplo,  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$ . Estos dos conceptos son la base fundamental de la proporcionalidad, que se entiende en esta investigación como la aplicación que se hace de la proporción en la solución de diversas situaciones.

Además, reconocer la razón constante que se establece en el proceso de variación simultánea entre las cantidades en dos sistemas, permite a los estudiantes llegar a identificar la constante de proporcionalidad. Frente a lo anterior, Lamon (2012) plantea que las relaciones proporcionales se establecen como “dos cantidades que están vinculadas entre sí de tal forma que cuando una cambia, la otra también cambia de manera precisa con la primera cantidad, y existe una tercera cantidad que permanece invariante (es decir, no cambia)” (p. 6).

Las relaciones proporcionales implican algunas covariaciones simples vinculando a dos cantidades de tal manera que, específicamente en la proporcionalidad directa, ambas cantidades pueden aumentar o disminuir siempre en la misma dirección, por ejemplo, si una disminuye a la mitad la otra también o si una aumenta el doble la otra también lo hace, lo cual implica que el cambio se da en la misma dirección y en la misma proporción.

Por otra parte, las relaciones multiplicativas son la primera aproximación al estudio de la proporcionalidad directa, para lo cual se requiere en palabras de Obando (2015)

identificar los dos sistemas de cantidades que se correlacionan; identificar las dos unidades de conteo, una en cada sistema de cantidades implicado en la situación; objetivar la razón que gobierna el proceso de covariación de ambas cantidades (definida como una razón entre

las unidades de conteo) y definir un procedimiento que permita controlar y coordinar los dos procesos de variación de ambas cantidades. (p. 307)

Esta noción de la proporcionalidad directa entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades, emerge a partir de un primer acercamiento al estudio de la razón como constante, donde se logra poner en correspondencia tanto las parejas de cantidades como las familias de cantidades.

## **4. Metodología**

### **4.1 Ámbito general del estudio**

La presente investigación está centrada en los razonamientos utilizados por los estudiantes de séptimo grado al afrontar situaciones de proporcionalidad directa y se enmarca en el enfoque de investigación cualitativa, que permite identificar y caracterizar los procedimientos empleados por los estudiantes al dar tratamiento a este tipo de situaciones.

Cuando se asume un enfoque de investigación cualitativo se utilizan herramientas para el análisis e interpretación de las experiencias vividas por los estudiantes y el docente, buscando establecer generalidades que pueden ser aplicadas en diferentes situaciones que permitan la comprensión de los conceptos. El investigador (quien es a su vez el docente) constantemente interactúa con el objeto de estudio, los estudiantes e indaga acerca de los conocimientos que tienen, como punto de partida de las orientaciones teóricas planteadas para examinar e interpretar los datos obtenidos.

### **4.2 Tipo de investigación**

El método utilizado es la Investigación Acción Educativa (IAE) y como lo expresa Rodríguez (2005), es un proceso

reflexivo–activo que vincula dinámicamente la investigación para la generación de conocimiento, la acción transformadora sobre las prácticas educativas asociadas al currículo y la formación docente; y que requiere para su realización de la implicación colectiva de los actores educativos. (p. 8)

Es allí donde docente y estudiantes interactúan simultáneamente facilitando espacios de discusión y formación, permitiendo un constante mejoramiento de las prácticas educativas, además de brindar la oportunidad de generar propuestas de intervención que alimenten los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es así como este método se caracteriza por tener un enfoque práctico centrado en las prácticas propias del docente, quien también desarrolla el papel de investigador,

fomentando un proceso dinámico que se establece a partir de un plan de acción con la colaboración de los estudiantes para posteriormente lograr compartir la investigación.

La IAE tiene hoy en día en la escuela una gran implicación al promover la participación de los estudiantes frente a las diferentes tareas que se proponen, además permite reducir la brecha entre la práctica y la visión de la educación e invita a reflexionar sobre las propias prácticas pedagógicas. Por otra parte, este diseño admite que los estudiantes aporten a la transformación de las escuelas y por ende de las prácticas educativas que se desarrollarán, centrando la atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

### **4.3 Consideraciones generales sobre los participantes**

La investigación se desarrolla en una institución de carácter oficial ubicada en el barrio Manrique San Blas, comuna 3 de la ciudad de Medellín, con estudiantes del grado séptimo de educación básica secundaria. La organización académica de la institución en su plan de área de matemáticas, ha tomado como base los LCM, los EBC y los DBA-V2, lo cual hace posible en el grado séptimo el estudio de la proporcionalidad directa (como parte del plan de estudios regular).

La institución educativa cuenta con cinco grupos del grado séptimo conformados en promedio por 30 estudiantes cada uno y la investigación se desarrolló con 8 estudiantes de un mismo grupo, donde la investigadora es docente. Estos estudiantes tomaron la decisión de participar de forma voluntaria después de socializar con el grupo los objetivos de la investigación y el plan de trabajo, además se tuvo en cuenta que contarán con dispositivo electrónico e internet para la conexión ya que por la situación mundial por la pandemia del Covid-19, el trabajo de campo se desarrolló de forma virtual.

Se plantearon un conjunto de situaciones problema sobre temas relacionado con la cotidianidad, que para términos de la investigación serán nombradas como tareas, las cuales se diseñaron teniendo en cuenta los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad, con la posibilidad de confrontar y validar los diferentes análisis que los estudiantes construyen a partir de la interacción continua con el docente investigador y con otros estudiantes. De esta manera, se pretende indagar y crear argumentos personales y grupales que permitan la formalización del conocimiento.

El área de matemáticas en la institución educativa durante los últimos años ha asumido cambios en las estrategias empleadas en el aula buscando fortalecer el trabajo por competencias. Una de las estrategias que en la actualidad se está utilizando es la aplicación de situaciones problema, entendidas por Obando y Munera (2003) como una posibilidad de

participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación. (p. 185)

Por lo tanto, una situación problema no solo debe recrear la vida cotidiana, debe además permitir que los estudiantes experimenten, analicen, hagan hipótesis, construyan estrategias de solución y saquen conclusiones a partir de lo cual se logre el aprendizaje de los conceptos que se pretenden enseñar. Para la presente investigación se diseñaron tres tareas que están formadas cada una por un conjunto de situaciones problema relacionadas con la vida cotidiana de los estudiantes, donde la proporcionalidad directa es el principal elemento, buscando con ello centrar la atención en los procedimientos utilizados para dar respuesta a dichas situaciones.

El trabajo de campo se desarrolló en el primer semestre del año 2020, entre los meses de mayo y junio, ya que la situación mundial por la pandemia del Covid-19 influyó en este, por lo tanto, se adaptaron las tareas para que los estudiantes por medio de correo electrónico y el WhatsApp las recibieran y en sus hogares las desarrollaran de forma individual. Posteriormente se lograron varios encuentros asincrónicos en los que podían hacer preguntas sobre las situaciones planteadas en las tareas y así continuar el desarrollo de las mismas. Finalmente se tuvieron tres encuentros sincrónicos en los que socializaron sus producciones escritas y sus apreciaciones verbales sobre los procedimientos utilizados para dar tratamiento a cada una de las tareas.

Los encuentros estuvieron guiados por la investigadora, quien participaba de las clases también como profesora. Las fechas fueron organizadas en el marco de las condiciones de tiempo y organización dispuestas por la institución educativa.

#### **4.4 Técnicas de investigación y fuentes documentales**

La observación e interacción en los encuentros, las tareas y el proceso de recolección de información, se utilizaron como técnicas de investigación a partir de las cuales se desarrollaron varias fuentes como:

##### ***4.4.1 Textos escritos de los estudiantes.***

Las notas producidas y registradas en los cuadernos, hojas de block y documentos de Word, evidenciaron los procedimientos matemáticos utilizados en las diferentes tareas, proporcionando información para identificar los razonamientos por analogía y los razonamientos analíticos implicados en el tratamiento de las situaciones de proporcionalidad directa que desarrollaron. Estos textos son el primer acercamiento a los conceptos que tienen los estudiantes y brindan además elementos de análisis acerca de los instrumentos y las técnicas que consideran pertinentes para afrontar las diferentes tareas.

##### ***4.4.2 Grabaciones de audio y video.***

Captan la experiencia detallada de las intervenciones que orientan cada una de las tareas, además de los diálogos (interacción permanente estudiante – docente sobre los conceptos, procedimientos y razonamientos), que se establecen en la socialización de interpretaciones que los estudiantes tienen frente a las tareas y aportan elementos que no son descritos puntualmente por estudiantes en sus producciones escritas.

También permiten identificar detalles que en los textos realizados por los estudiantes no están explícitos, además acompañan la parte escrita y complementan las ideas que construyeron a partir de la socialización con sus compañeros y la docente, lo cual es importante porque profundiza en los aportes que fortalecen la investigación.

Las grabaciones de audio y video permiten un análisis minucioso de los procedimientos utilizados por los estudiantes, ya que se puede poner atención en otros elementos como las expresiones verbales que dan sentido y significado a cada uno de los procesos en la experiencia individual y grupal con tareas aplicadas.

#### ***4.4.3 Tareas.***

Están diseñadas por la investigadora, esperando que los estudiantes analicen, confronten y validen sus razonamientos. Para este diseño se tuvieron en cuenta situaciones de la vida cotidiana que involucran la proporcionalidad directa y que puedan ser tratadas utilizando conceptos matemáticos como la multiplicación.

A través de estas tareas se puede rastrear los procedimientos empleados por los estudiantes en la construcción que hacen del significado de objetos matemáticos como la razón, la proporción y la proporcionalidad, además de la relación de estas con la vida cotidiana, fortaleciendo el aprendizaje y favoreciendo la participación. Además, son una fuente documental que orienta el trabajo de los estudiantes y permite la formalización del conocimiento.

#### ***4.4.4 Diario reflexivo.***

La investigadora escribe en su diario personal las interpretaciones y/o reflexiones con respecto a las situaciones que se presenten en la interacción con los estudiantes y las tareas propuestas, con el fin de profundizar y revisar las anotaciones allí plasmadas cuando sea necesario, además en el rol de investigadora son elementos que fortalecen la investigación.

Este diario reflexivo contiene elementos personales y grupales que, si en algún momento es necesario retomar, permitirá tener visiones centrales de los procesos desarrollados con los estudiantes, además de ideas generales y particulares que son observadas a partir de la experiencia vivida en el aula de clase y complementar las fuentes de recolección de información utilizadas.

### **4.5 Unidades de análisis y proceso de codificación**

Las unidades de análisis permiten la comprensión de la acción mediada, por lo tanto, la clase de matemáticas es considerada la unidad de análisis fundamental y las demás unidades son determinadas por las tareas desarrolladas por los estudiantes. Así entonces, se analizaron las producciones elaboradas en relación con las tareas planteadas y la producción discursiva de los estudiantes en el proceso de interacción con situaciones que involucran la proporcionalidad directa.

Se tuvo en cuenta los razonamientos utilizados por los estudiantes y reflejados en las construcciones, las apreciaciones y las conclusiones que logran formalizar y validar el aprendizaje.

A partir de estos aspectos se da una mirada inicial a las fuentes documentales utilizadas para la investigación con el fin de realizar una primera organización de la información obtenida en el trabajo de campo, identificando en las producciones escritas, los audios y videos, fragmentos (partes de los diálogos), que de alguna manera pudieran dar cuenta de los objetos matemáticos y los razonamientos utilizados por los estudiantes para desarrollar cada una de las tareas. Mientras se digitan estos fragmentos, se hacen comentarios preliminares sobre objetos y razonamientos que se logran evidenciar.

Después de esta primera organización muy general, se procedió a una organización más detallada buscando elementos comunes en el tratamiento de las tareas, tomando como punto de partida las producciones escritas y el discurso oral a partir de los documentos compartidos, los audios y las grabaciones. La interacción con la tarea, el manejo de los objetos matemáticos y los razonamientos utilizados, permitieron identificar la comprensión que tienen los estudiantes de las relaciones que se establecen entre las diferentes cantidades, además evidencian el alcance que tienen para hacer comparaciones entre cantidades.

Un segundo nivel de organización permitió determinar cómo los estudiantes identifican las relaciones entre cantidades y los razonamientos que utilizan para resolver, además de la forma en la que dan tratamiento a tales situaciones para establecer la razón constante que regla el proceso de variación. Posteriormente se nombraron con un código los instrumentos de recolección de datos y los estudiantes participantes de la investigación de la siguiente manera: la letra inicial en mayúscula representa el instrumento de recolección de datos, audios (A), número del audio (1, 2 y 3), tareas (T), número de la tarea (1, 2 y 3), sesión (S), número de sesión (1, 2 y 3), nombre del estudiante (M, J, E, P, V, ...), nombre de la investigadora (I) y año de aplicación (2020).

**Tabla 3**  
*Ejemplo de matriz codificación*

INSTRUMENTO	TAREA	SESIÓN	ESTUDIANTE(S)	FECHA	CÓDIGO
A	1	2	V- J	2020	A1-S2 V-J 2020
T	1	3	M	2020	T1-S3 M 2020

El análisis de resultados se desarrolló teniendo en cuenta los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad (razonamiento proporcional) y los razonamientos por analogía o razonamientos analíticos que dan forma a los procedimientos utilizados por los estudiantes. Esta mirada estará enfocada en las fuentes escritas que permitieron, en un primer nivel, la organización de la información en relación con los análisis que los estudiantes realizan al enfrentarse a situaciones de proporcionalidad directa. Posteriormente los audios y videos contribuyeron a determinar elementos comunes e interrelacionados que conllevaron a la comprensión de los razonamientos analíticos observados en la investigación.

La presentación de resultados se realiza por medio de narrativas que describen los razonamientos utilizados y la manera cómo los estudiantes dan cuenta de los instrumentos, procedimientos y objetos matemáticos que dan forma al trabajo. Los resultados se organizan en una base de datos a partir de un proceso de codificación que tiene en cuenta las unidades de análisis.

Los diálogos que se presentan en el análisis de resultados son fragmentos textuales de la interacción entre investigadora y estudiantes en cada una de las tres sesiones virtuales que se tuvieron con el fin de compartir las percepciones, datos, procedimientos y resultados de las tareas. La expresión (Respondieron en coro), indica que los estudiantes respondieron todos al mismo tiempo y además concuerdan en la respuesta.

#### **4.6 Descripción general de las tareas**

Las tareas se diseñaron a partir de situaciones problema que involucran la proporcionalidad directa, para términos de la investigación se realizaron tres tareas denominadas: *Servicios Públicos*, *Precio por Unidad* y *Reciclaje* que a continuación se desarrollan:

##### ***Tarea 1: Servicios Públicos***

Esta tarea se diseñó respetando las unidades de medida y el costo que la empresa encargada de la medición y cobro de los servicios públicos tiene para cada uno de los estratos socioeconómicos de la ciudad de Medellín (ver anexo 1). Tomando la información registrada en las cuentas que llegan a los hogares sobre la energía, el acueducto y el alcantarillado, se propusieron algunas preguntas y situaciones de la vida cotidiana en las que intervienen estos servicios, como el

consumo de energía de diferentes electrodomésticos o el gasto de agua en ciertas actividades del hogar.

### ***Momento 1:***

En la primera parte de esta tarea se realizaron preguntas generales para promover la familiarización de los estudiantes con los datos registrados en la cuenta de servicios, entre las preguntas se tienen ¿en qué mes aumentó más el costo del servicio de energía eléctrica?, ¿en qué mes el costo del servicio acueducto disminuyó más?, ¿cuáles meses tuvieron un consumo constante en el servicio de alcantarillado? y ¿cuál fue el costo de este consumo?

Las siguientes preguntas son específicas, con cantidades exactas de consumo con las cuales deben hallar el valor a pagar por mes en los servicios de acueducto y energía como: si en el hogar consumieran 12m<sup>3</sup> de agua en un mes ¿cuál sería el valor a pagar por el servicio? y si consumieran 25Kwh en un mes ¿cuál sería el valor a pagar por el servicio?, asimismo deben describir los procedimientos utilizados para hallar estos costos.

### ***Momento 2:***

Se relacionan los electrodomésticos que normalmente se tienen en los hogares, con los datos de su potencia eléctrica y las horas de uso al día. En el contexto de la situación los estudiantes tienen una tabla conformada por seis columnas, en la primera están registrados los electrodomésticos, en la segunda la potencia eléctrica (Watts) de cada uno, en la tercera las horas de utilización por día, en la cuarta la energía eléctrica (Wh) por día, en la quinta la energía (Kwh) por día y en la sexta la energía (Kwh) por 30 días. Para completar la cuarta columna se brinda la siguiente fórmula:

$$\text{Energía Eléctrica (Wh)} = \text{Potencia Eléctrica (W)} \times \text{tiempo de uso en horas (h)}$$

Adicionalmente en la cuenta de servicios la unidad utilizada es Kwh, por lo tanto, para la cuarta columna es necesario realizar una conversión entre unidades, dividiendo el resultado de la tercera columna entre 1000. Además, la cuenta de cobro llega a los hogares cada mes, por eso para la sexta columna los datos a registrar evidenciarán el consumo de la energía en 30 días por cada uno de los electrodomésticos.

Se presenta también una tabla sobre el consumo del servicio de acueducto en algunas actividades que normalmente se realizan en los hogares con un tiempo establecido para cada una y los estudiantes deben completarla con los datos del costo de su propia cuenta de servicios públicos.

### ***Tarea 2: Precio por unidad***

Esta tarea está relacionada con los costos y tamaños de diferentes aceites que se pueden conseguir en el mercado. Está estructurada con una información básica de los tamaños más comunes y su respectivo costo, hay en total 3 marcas diferentes que se nombraron como A, B y C (ver anexo 2). Con base en esta información los estudiantes deben responder una serie de preguntas que posteriormente son analizadas bajo los procedimientos utilizados en su desarrollo, buscando que identifiquen en el proceso la constante de proporcionalidad.

Algunas de las preguntas planteadas en la tarea se relacionan con ¿cómo se puede establecer cuál es el aceite más económico?, ¿cuál es el costo de  $1\text{cm}^3$  en cada una de las marcas?, además de pedirles identificar la relación que se establece entre tamaño y precio en cada una de las marcas de aceite e invitarlos a reflexionar frente a si ¿es la misma en todas las marcas? para posteriormente observar cómo argumentan las respuestas de forma escrita y verbal.

### ***Tarea 3: Reciclaje***

Esta tarea estuvo inspirada en una actividad que se desarrolla en la institución educativa donde se realiza la investigación y que hace parte del proyecto de cuidado del medio ambiente y el entorno, es así como el diseño de esta tarea se centra en la identificación de las cantidades y los ingresos económicos que genera reciclar. A partir de la información suministrada, los estudiantes deben determinar unos valores que hacen falta y así poder identificar los procedimientos y las relaciones que se establece entre las variables (ver anexo 3).

## **4.7 Compromiso del investigador**

La investigación tiene su punto de inicio en las dificultades que cotidianamente se presentan en el aula de clase cuando los estudiantes se ven enfrentados a problemas típicos de proporcionalidad y les dan solución utilizando la tradicional regla tres, que es la aplicación

mecánica de un algoritmo y deja de lado los análisis, procesos y razonamientos que se pueden desarrollar en la interacción con situaciones, específicamente de proporcionalidad directa.

En la presente investigación los razonamientos se entrelazan con las prácticas educativas, escenario en el cual se construye el conocimiento, estas prácticas las entiende Obando (2015) como el proceso investigativo que promueve la transformación de la práctica y del investigador.

La participación de la investigadora se dio específicamente en tres aspectos:

- Diseño de tareas pertinentes para favorecer el trabajo de los estudiantes con respecto a los razonamientos y la utilización de la constante de proporcionalidad en situación de proporcionalidad directa.
- En el trabajo de aula, interactuando constantemente con los estudiantes formulando preguntas que permitían ampliar los argumentos, las discusiones formativas y las explicaciones necesarias.
- En el análisis de los datos obtenidos en el aula de clase, logrando establecer las conclusiones de la investigación.

En el aula la investigadora no solo es una observadora pasiva, dedicada a registrar lo que pase, al contrario, participa del trabajo de los estudiantes (en relación con los objetos matemáticos), y, por ende, durante el proceso ayuda a la cualificación de los aprendizajes en su rol de docente.

#### **4.8 Confiabilidad, validez e integridad de los datos**

El trabajo de campo fue desarrollado durante el primer semestre del año 2020 en varios encuentros sincrónicos y asincrónicos con los estudiantes, entre los meses de mayo y junio, ya que la situación mundial por la pandemia del Covid-19 afectó la planeación que en primera instancia se había realizado, en la que se contaba con las clases de matemáticas en el aula de manera presencial, por lo tanto, se reconstruyeron las tareas basadas en la nueva realidad para así fortalecer una buena fuente documental con elementos conceptuales y metodológicos que aporten a la investigación.

Las fuentes de información utilizadas fueron trianguladas entre sí, retroalimentando continuamente de una fuente a otra, pasando por los textos escritos, grabaciones de video o audio, tareas y diario reflexivo, a través de registros de datos en forma estructurada y codificada que aseguran la validez de los resultados.

Los datos obtenidos en la investigación se digitalizaron, construyendo una base de datos en la que se tuvo en cuenta el proceso de organización de la información realizado en la primera parte del análisis, es decir, textos, imágenes, audios y videos fueron registrados uno a uno para favorecer la confiabilidad, validez e integridad de éstos.

#### **4.9 Consideraciones éticas**

La investigación tiene en cuenta varias consideraciones éticas que garantizan el bienestar de los participantes, el desarrollo del trabajo de campo y por ende de la investigación en general. Todos los participantes obtuvieron información de los objetivos y las responsabilidades. Antes de iniciar el trabajo de campo se les aclaró sobre la participación voluntaria, para lo cual se elaboró un documento “consentimiento informado para estudiantes” (ver anexo 7), donde se brinda una breve explicación de los objetivos, riesgos y/o incomodidades, privacidad y confiabilidad al participar de la investigación. Al ser los participantes menores de edad, se elaboró también un “consentimiento informado para padres o acudientes” especificando en el documento objetivos, riesgos y/o incomodidades, beneficios, procedimientos, uso de datos y privacidad de la información; ambos documentos fueron firmados por los interesados en participar.

La información que los participantes aportaron a la investigación es privada y se les garantiza confiabilidad, utilizando seudónimos para proteger la identidad de cada uno, además los nombres utilizados fueron reemplazados con iniciales como M: Michell, J: Jean Pier, E: Evelin, P: Pablo, V: Valentina, A: Andrea, D: Dahiana y N: Nicolás. En el proceso de análisis de datos se trató de mantener fielmente los aportes hechos por los participantes y procurar exponerlos al mínimo riesgo en el desarrollo del trabajo de campo. Así mismo, se garantizó un ambiente de participación y respeto por las diversas opiniones que se generaron.

## 5. Análisis de Resultados

El análisis de resultados es un proceso que se percibe como parte del diseño y la recolección de datos (Creswell, 2012). Este proceso se hace a partir de un trabajo sistemático, reflexivo y riguroso, para finalmente comprender el contexto de los datos obtenidos y dar sentido en torno al planteamiento del problema. Con la situación a nivel mundial por el Covid-19, el proceso de diseño y recolección de datos fue reestructurado, ajustando las tareas para ser desarrolladas por estudiantes en sus hogares y de forma individual. Es decir, la primera aproximación que tuvieron los estudiantes con las tareas fue individual, además se brindaron encuentros asincrónicos también individuales para aclarar dudas sobre las interpretaciones que tenían de las tareas, para que logaran avanzar y tener aportes para los encuentros virtuales con sus compañeros.

En un primer momento los 8 estudiantes recibieron las tareas de forma virtual por medio de correo electrónico y WhatsApp para analizarlas y resolverlas individualmente. En un segundo momento se desarrollaron tres sesiones virtuales por medio de la plataforma Meet entre los meses de mayo y junio, estos espacios se programaron en jornada aparte de las clases de matemáticas. En dichas sesiones los estudiantes compartieron sus propias percepciones y apreciaciones de las tareas por medio del trabajo colaborativo.

El análisis de resultados inicia con la transcripción de los audios que surgen en las tres sesiones virtuales, además de la observación de los videos y las producciones escritas elaboradas por los estudiantes, que fueron enviadas en documentos escaneados o en formato Word. A partir de estas producciones se trianguló la información para identificar elementos explícitos que describen los procedimientos aplicados en las tres tareas y elementos implícitos en el discurso verbal de los estudiantes. La producción discursiva refleja la interacción que cada uno de los estudiantes tuvo con las tareas, pero también permite encontrar similitudes y diferencias en las percepciones, ya que los procedimientos utilizados para dar tratamiento a las situaciones planteadas en las tareas y las construcciones así lo reflejan.

El diario reflexivo permitió registrar las interpretaciones y/o reflexiones personales de la investigadora. En este análisis de resultados el diario reflexivo se utilizó para retomar algunos aspectos nombrados por los estudiantes en las intervenciones, pero las fuentes de textos escritos, audio y video obtenidos de los estudiantes, permitieron una mayor profundización en los análisis y la caracterización de los procedimientos utilizados para identificar la razón constante.

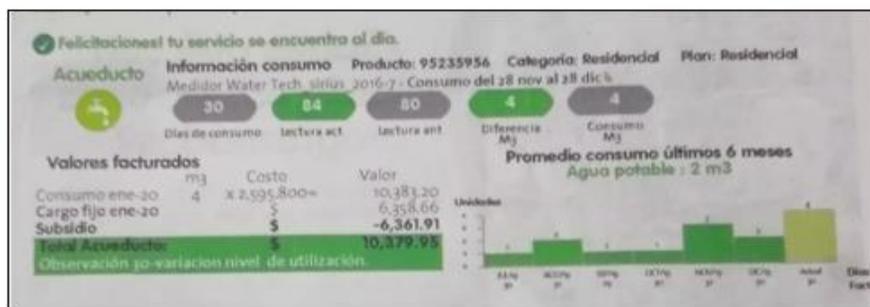
En el primer momento de la Tarea 1, los estudiantes observan en la cuenta de servicios públicos de sus respectivos hogares, algunos datos como el consumo mensual de cada servicio y el costo del mismo y si bien en la cuenta no se especifica los costos de los meses anteriores, solo del actual, pueden confirmar el consumo mes a mes en la gráfica de barras denominada “promedio consumo últimos 6 meses”. Dicha información la organizaron en una tabla que les permitió observar e identificar la unidad de medida de cada uno de los servicios con sus respectivos consumos y costos.

La Figura 2(a) muestra la información del servicio de acueducto y el promedio del consumo de los últimos 6 meses, por medio de una gráfica de barras, en el hogar del estudiante J. La Figura 2(b) muestra la respectiva información para el hogar del estudiante M.

**Figura 2**  
*Promedio consumo últimos 6 meses del servicio de Acueducto*



(a)



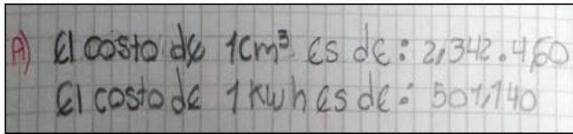
(b)

*Nota.* Se muestra el promedio del servicio de acueducto en dos hogares diferentes. Archivo de imagen. T1-S1 J-M 2020

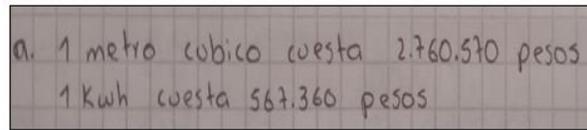
Teniendo en cuenta esta información, se plantearon preguntas sobre el costo de  $1\text{m}^3$  en el servicio de acueducto y en el servicio de energía eléctrica el costo por  $1\text{Kwh}$ . Este tipo de preguntas pretendía centrar la atención de los estudiantes en el costo por unidad en cada uno de los servicios públicos mencionados. En la Figura 3(a) se muestran algunas de las respuestas proporcionadas por el estudiante V y en la Figura 3(b) se muestran las del estudiante M.

### Figura 3

#### Respuestas Tarea 1



(a)



(b)

*Nota.* Precio por unidad de los servicios de acueducto y energía eléctrica. Archivo de imagen. T1-S1 V-M 2020

En ambos casos la forma de presentar las respuestas es similar, aunque los costos en cada uno de los casos son diferentes. En la Figura 3(a) el estudiante V expresa la unidad de medida del servicio de acueducto como  $\text{cm}^3$  mientras en la factura de servicios públicos este valor se presenta en  $\text{m}^3$ . Este error con la unidad de medida referida hace notar que en la solución de la tarea este elemento no fue relevante para el estudiante V y su atención fue centrada en el número y no en la unidad que acompaña esta cantidad.

En la Figura 2 se encuentran registrados diferentes costos y al ser compartida la información de forma verbal con los demás estudiantes, se evidencia una confusión con la comprensión numérica ya que no los identifican como números decimales tal y como se expresan en la cuenta de servicios. Al leer el número, el estudiante V lo hace como si fuera un número natural, por ejemplo 501,140 lo nombraban como (quinientos un mil ciento cuarenta), cuando en realidad es (quinientos uno coma ciento cuarenta). Por lo tanto, el siguiente fragmento muestra la visión de estudiantes con respecto al costo y consumo del servicio de energía:

#### *Diálogo 1. Fragmento tomado del archivo de audio A1-S1 2020*

6:30 - I: ¿Cuál es el costo por  $1\text{m}^3$  en el servicio de acueducto?

6:42 - M: La mía es de 2.800 pesos [Dos mil ochocientos].

6:49 - J: Yo tengo 501.140 [quinientos un mil ciento cuarenta].

6: 54 - E: La mía 567.360 [cinco mil sesenta y siete trescientos sesenta].

6:57 - I: Las cifras deben leerse como números decimales por ejemplo [quinientos sesenta y siete punto trescientos sesenta]. Con respecto a los datos que comparten, ¿por qué creen que hay diferencias en los valores?

7:11 - P: Sí, profe (Responden en coro).

7:14 - M: Porque consumieron más en una casa que en la otra.

7:17 - P: Sí, por eso (Responden en coro).

7:21 - I: Lo que dicen tiene que ver con la cantidad total de consumo, pero estamos hablando de: ¿por qué varía el costo de 1Kwh en el caso de la energía?

7:50 - E: No sabemos (Responden en coro).

7:52 - J: Ese costo está en nuestras cuentas, debe ser que depende de donde vivimos.

7:56 - I: Esa cantidad es el costo de 1Kwh, es decir, el costo de una sola unidad y el consumo es la cantidad total que gastamos en un mes y la empresa encargada tiene una tarifa regulada para cada servicio.

8:03 - P: Entonces la empresa pone el valor por eso son diferentes.

8:20 - E: Así es (Responden en coro).

8: 23 - I: Es un costo establecido por unidad.

8:27 - J: Ese valor lo utilizamos en la pregunta que sigue al multiplicar.

8: 29 - I: ¿Qué multiplicaste?

8: 33 - J: Pues ese valor por la cantidad de consumo.

En la primera parte del Diálogo 1, los estudiantes repiten los costos que identificaron en la cuenta de servicios, estos datos los expresan verbalmente de manera incorrecta ya que la cifra registrada en la factura de servicios públicos está indicada como número decimal y no como número natural, por lo cual la investigadora compartió con los estudiantes la forma correcta de leer los números para tener una mejor comprensión del costo registrado en las facturas.

Las respuestas proporcionadas para el costo del servicio de energía son diferentes, por tal motivo la investigadora plantea la pregunta, ¿por qué creen que hay diferencias en los costos de 1Kwh? El estudiante M manifiesta que depende del consumo en cada vivienda, olvidando que la pregunta se refiere al costo por 1Kwh y no al total del consumo. Posteriormente el estudiante J expresa que esta diferencia puede depender del lugar donde están ubicadas sus viviendas, este

aporte permite comprender que estos valores son regulados por la empresa encargada del servicio y la diferencia radica en la estratificación socioeconómica, que en Colombia se entiende como la clasificación de los inmuebles residenciales de un municipio, además establece este elemento como primordial en la construcción de los conceptos matemáticos como razón, proporción y proporcionalidad.

Esta parte de la Tarea 1 evidencia que los estudiantes, si bien identifican el costo por unidad en la factura de servicios públicos, el papel que juega el número y la unidad de medida que lo acompaña es una noción de la cual aún no hay evidencia clara de comprensión. Al final del Diálogo 1, el estudiante J enuncia un nuevo concepto denominado multiplicación, que según su intervención permite hallar los costos totales del consumo y se logra apreciar que los procedimientos basados en razonamientos no son inmediatos ni mucho menos fáciles de alcanzar para los estudiantes. Esto se evidencia porque solo aplican el algoritmo de la multiplicación y no hacen análisis de la relación que existe entre los números y mucho menos la relación entre las unidades de medida.

Continuando con el desarrollo de la Tarea 1, se proponen preguntas que contienen cantidades exactas de consumo con las cuales los estudiantes deben hallar el valor a pagar por mes en los servicios de acueducto y energía.

#### Figura 4

##### Respuestas Tarea 1

b) el valor a pagar es de: 28.109,52  
el proceso que utilizo es multiplicar  
ejemplo  $12 \times 2.342.460 = 28.109,52$

(a)

Si en el hogar se consumieran  $12\text{m}^3$  de agua ¿Cuál sería el valor a pagar por el servicio? Describe los procedimientos utilizados  
R: multiplico el valor de un 1m y lo multiplico por 12m que en total serian 24.084 pesos  
Si consumieran 25Kwh ¿Cuál sería el valor a pagar por el servicio?  
R: 8.400 pesos

(b)

b.  $12 \text{ metros cubicos de agua} \times 2.340.570 \text{ pesos} = 28.126 \text{ pesos}$   
se multiplica la cantidad de metros cubicos de agua por el valor de 1 metro cubico y se obtiene el valor a pagar.  
c.  $25 \text{ kwh} \times 337.360 \text{ pesos} = 8.434 \text{ pesos}$

(c)

Nota. Resultados de diferentes hogares si se consumieran  $12\text{m}^3$  y 25Kwh, teniendo en cuenta el valor por unidad para cada servicio. Archivo de imagen T1-S1 V-M-J 2020

Los estudiantes V, M y J en sus respuestas plantean la multiplicación como el procedimiento que les permite calcular los costos de cada uno de los consumos. Su forma de justificar la respuesta es concreta y nombran solamente las cantidades a operar, donde el total de dicha operación es el costo que se paga por el servicio. Por lo tanto, las unidades que acompañan el número son objetos que hasta este momento para los estudiantes no hacen parte del proceso y coinciden en que el procedimiento aplicado es el único para dar solución a la pregunta. Es decir, los estudiantes operaron las cantidades y obtuvieron el resultado numérico correcto sin considerar las unidades.

Si bien es cierto que hay diversas actividades que desarrollan en el hogar, en las que utilizan el servicio de acueducto y por ende consumen agua de manera diferente, para esta situación se plantea con un consumo mensual sin especificar las actividades en las que se presentó dicho consumo. El fragmento de diálogo que se encuentra a continuación refleja los primeros pasos que los estudiantes dan para identificar el costo por unidad como un elemento principal en la solución de la pregunta: si consumieran  $12\text{m}^3$  de agua en un mes ¿Cuál sería el valor a pagar por el servicio?

*Diálogo 2. Fragmento tomado del archivo de audio A1-S1 2020*

8:37 - M: A mí me dio 24.084 pesos.

8:45 - J: A mí me dio 28.109 pesos.

9:18 - I: Los costos que nos comparten son diferentes, pero la cantidad de consumo es la misma, ahora podrían decir qué hicieron para conocer este costo, es decir ¿cómo se dieron cuenta que ese era el valor a pagar?

10:20 - P: Multiplicando (Responden en coro).

10:25 - M: Multipliqué el valor de un metro y lo multiplico por  $12\text{m}^3$ .

10:33 - I: Entonces el costo por  $1\text{m}^3$  se multiplica por  $12\text{m}^3$ .

10:36 - M: Eso el costo por  $12\text{m}^3$ .

10:38 - I: ¿Ese fue el procedimiento que todos utilizaron?

10:40 - P: Sí (Responden en coro).

10:43 - I: Hicieron algo similar para responder a la pregunta: si consumieran  $25\text{Kwh}$  en un mes ¿cuál sería el valor a pagar por el servicio?, o ¿hicieron algún procedimiento diferente?

10:49 - P: El mismo (Responden en coro).

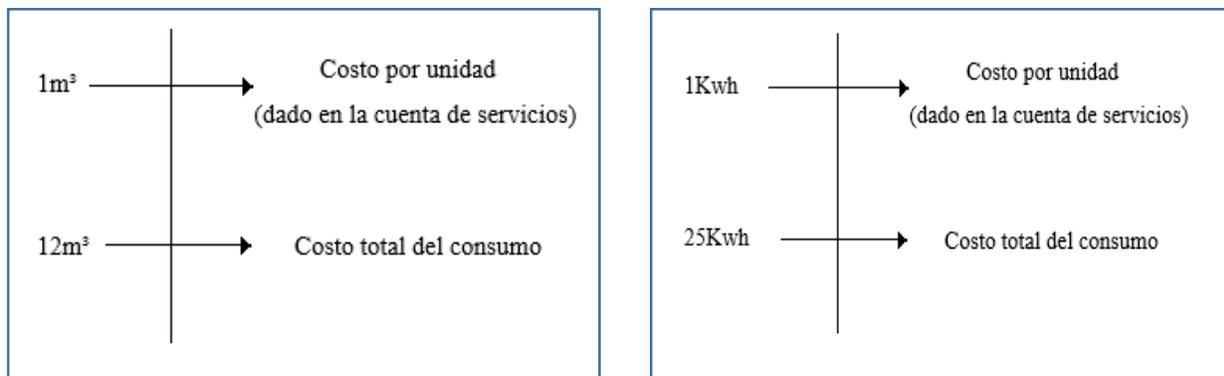
11:01 - I: Hasta este momento ya hemos encontrado un elemento importante y es el costo por la unidad, por ejemplo, en el primer caso el costo de  $1\text{m}^3$  y en el segundo caso el costo de  $1\text{Kwh}$ . Es importante comprender que estamos hablando de dos unidades diferentes relacionadas con dos servicios diferentes.

Podemos observar que la multiplicación es la operación base para resolver, según los estudiantes, esta clase de situaciones y se logra evidenciar que se requiere de más trabajo para comprender el papel que juega cada una de las unidades en relación con las cantidades involucradas, es decir,  $\text{m}^3$  y pesos acompañan a un número, así mismo  $\text{Kwh}$  y pesos. El procedimiento realizado evidencia la aplicación del algoritmo, obteniendo la respuesta correcta sin analizar en realidad que se están utilizando las unidades que dan sentido al número.

Estas situaciones problema planteadas en la Tarea 1 pretendían acercar a los estudiantes a comprender la estructura de las situaciones del tipo isomorfismo de medida, denominado proporción simple, es decir, expresar la relación de la siguiente manera:

### Figura 5

*Esquema de problema isomorfismo de medida - Proporción simple*



En este tipo de situaciones, los estudiantes aplican la operación de multiplicación para dar tratamiento a la misma, pero se hace necesario continuar con el trabajo para lograr que los estudiantes comparen las parejas de cantidades heterogéneas e identifiquen que tienen la misma medida relativa, para establecer la constante de proporcionalidad.

La Tarea 1 permitió elaborar una tabla estadística con los valores de consumo establecidos en los últimos 6 meses y el costo de los servicios de energía eléctrica y acueducto cada mes. A partir de esta información, se plantearon algunas preguntas buscando en el discurso escrito y oral

que los estudiantes identificaran una relación matemática entre las dos variables consumo y costo, además, determinar cuáles son los procedimientos que ellos utilizan al enfrentarse a situaciones como estas.

La Figura 6(a) muestra las tablas estadísticas realizadas por el estudiante V y la Figura 6(a) las del estudiante J, sobre el consumo histórico que hallaron en sus respectivas cuentas de servicios.

### Figura 6

*Histórico de los servicios públicos de energía y acueducto*

MES	consumo (kwh)	costo (\$)	consumo (m <sup>3</sup> )	costo (\$)	Pg
AGOS	0	0	14	38,640	19
SEP	8	4,009.12	23	63,480	19
OCT	18	9,220.52	31	85,560	19
NOV	39	12,544.46	28	77,280	19
DIC	47	23,553.88	30	84,800	19
ENE	54	21,261.56	30	82,800	20

(a)

Mes	Consumo en metro cubico	Costo \$
1	19	52,450.83
2	17	46,929.69
3	21	57,971.91
4	23	63,493.11
5	16	44,169.12
6	18	49,690.26

Mes	Consumo en Kwh	Costo \$
1	277	153,754.56
2	253	143,541.08
3	265	150,350.4
4	249	141,272.69
5	276	156,541.36
6	277	157,158.32

(b)

*Nota.* Construcciones realizadas por estudiantes sobre datos históricos de consumo y costo de los servicios de energía y acueducto. Archivo de imagen T1-S1 V-J 2020

En la Figura 6, los estudiantes V y J reflejan el histórico de consumo y su respectivo costo en dos hogares diferentes en los servicios de energía eléctrica y acueducto, donde la variación entre los mismos es evidente. Por otro lado, el costo por unidad como concepto no se ha trabajado en el aula de clase y es por eso que los estudiantes han utilizado algunas relaciones multiplicativas a partir de su conocimiento intuitivo, el cual es automático y no necesita de mucho análisis para resolver las preguntas planteadas. Es decir, identificaron el costo por unidad en cada uno de los servicios y el consumo por mes para aplicar la operación multiplicación entre ambos datos y finalmente determinar el costo mensual de cada uno de los servicios.

Siguiendo con el desarrollo de la Tarea 1, se plantearon preguntas como ¿qué relación se puede establecer entre el consumo por mes y su respectivo costo en el servicio de energía eléctrica?, ¿cuál es la relación establecida entre el consumo y el costo en el servicio de acueducto? y ¿es la misma relación en todos los meses?, por lo tanto, los estudiantes lograron expresarse en el Diálogo 3 a partir de su propia percepción.

Diálogo 3. *Fragmento tomado del archivo de audio A1-S1 2020*

16:10 - I. ¿Qué relación se puede establecer entre el consumo por mes y su respectivo costo en el servicio de energía eléctrica?

16:21 - J: Yo creo que es que el costo varía depende del consumo.

17:20 - P: Así al gastar más pago más.

17: 29 - J: O gasto menos y pago menos, todo depende del consumo de energía creo yo.

17: 45 - I: ¿Es la misma relación todos los meses?

18:57 - J: Pues no, en mi caso casi siempre, nunca llega el mismo costo o cobro.

19:07 - M: En el mío tampoco llega el mismo valor, a veces sube y a veces baja.

19:11 - I: Estaríamos de acuerdo al decir que si consumo más debo pagar más y si consumo menos debo pagar menos, es lo que deduzco. Entonces, ¿qué podemos responder con respecto a cuál es la relación entre consumo y costo en el servicio de acueducto?

20:09 - J: El precio de cada centímetro cúbico y el cobro de lo que se gasta, eso es lo que yo opino.

20:30 - I: Ya saben que hay dos elementos involucrados en la relación y lo han logrado establecer a lo largo de la tarea, hace rato concluí a partir de sus aportes, que si gasto más pago más y si gasto menos pago menos. ¿Siempre es la misma relación o que creen ustedes?

21:01 - J: Pues sí.

21:11 - M: Desde mi punto de vista yo digo que, si por ejemplo toda la familia acá en mi casa somos 5 personas y todos mantenemos al mismo tiempo conectados, todos tenemos varias cosas conectadas entonces eso gasta más energía, en cambio cuando me quedo sola en la casa o salen de pronto mis hermanos, entonces gastamos menos o pagamos menos de lo que pagamos cuando estamos los 5 reunidos.

22:09 - I: Vamos a centrarnos en los datos que tenemos para identificar la relación. ¿Quién me recuerda que datos conocemos?

23:01 - J: Lo que vale cada centímetro cúbico y lo que gastamos en la casa.

23:30 - M: Falta el total que pagamos, bueno ese dato también lo conocemos o lo podemos conocer si multiplicamos.

24:07 - I: Ahora, vamos a mirar los elementos que ya identificamos y les pregunto: ¿hay algún elemento que se repite o es constante en esta situación?

24:29 - E: No (Responden en coro).

25:01 - I: Observemos bien algún dato o cantidad que utilizamos varias veces.

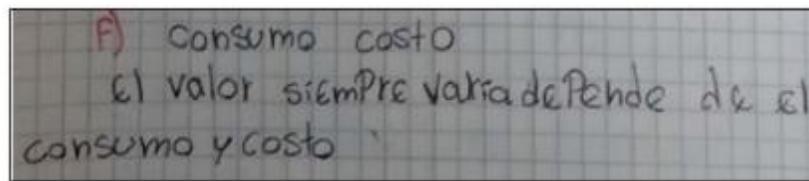
26:22 - J: Pienso que  $1\text{m}^3$ , ese es el dato que utilizamos más.

26:35 - I: Sí, ese es elemento constante.

En el anterior diálogo se hace evidente en los estudiantes algunas dificultades por la utilización por parte de la investigadora de la palabra *relación* con la cual hasta el momento no están familiarizados, por lo tanto, es necesaria una explicación detallada y específica para el contexto que se está utilizando, como son las situaciones de proporcionalidad directa planteadas en la tarea.

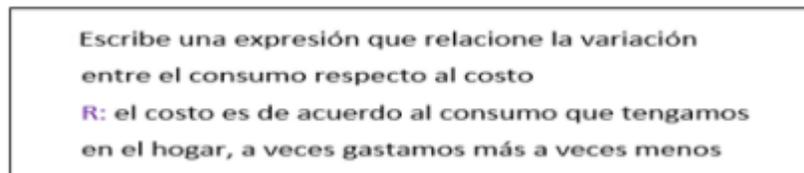
Al mismo tiempo, a partir del conocimiento intuitivo, los estudiantes utilizan el costo por unidad como uno de los elementos de la relación multiplicativa que se establece para dar solución a la pregunta planteada e involucran otros elementos como la cantidad de personas que viven en el hogar, o los electrodomésticos que tienen y la utilización de los mismos, para comprender el consumo total en un mes. Además, producen expresiones como “*a mayor consumo mayor costo*” o “*a menor consumo menor costo*”. Allí están utilizando formas de relación entre las cantidades e identificando la correlación entre dos sistemas de cantidades.

En la última parte del Diálogo 3, la investigadora hace una pregunta para que los estudiantes comiencen a formar regularidades entre las cantidades y lograr un acercamiento a identificar la razón constante. Para finalizar este primer momento de la Tarea 1, los estudiantes debían escribir una expresión que determinara la variación del consumo respecto al costo. La Figura 7 muestra algunas de las respuestas.

**Figura 7***Respuestas Tarea 1*

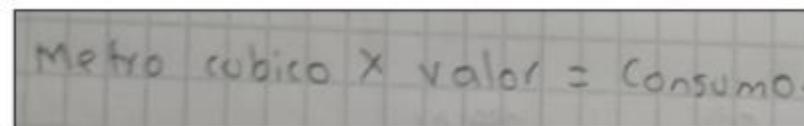
P) Consumo costo  
el valor siempre varía de pende de el  
consumo y costo

(a)



Escribe una expresión que relacione la variación  
entre el consumo respecto al costo  
R: el costo es de acuerdo al consumo que tengamos  
en el hogar, a veces gastamos más a veces menos

(b)



Metro cubico X valor = Consumo

(c)

*Nota.* Expresiones que representan la relación de variación del consumo con respecto al costo. Archivo de imagen T1-S1 V-M-J 2020

En la Figura 7 se observan las respuestas de los estudiantes V, M y J, donde coinciden en la correlación entre el consumo y el costo, es decir, una relación lineal entre las variables; además, el estudiante J, Figura 7(c), logra expresar una ecuación para establecer matemáticamente la relación multiplicativa entre las cantidades. Asimismo, este par de cantidades pertenecientes a dos familias diferentes se pondrían en correspondencia biunívoca, por ejemplo, cuando las cantidades de consumo transforman las cantidades del costo.

En palabras del estudiante M, Figura 7(b), el costo depende del consumo y además a mayor consumo mayor es el costo o al contrario a menor consumo menor costo, evidenciando una naturaleza empírica en las correlaciones existentes entre los dos sistemas de cantidades, que son la base para identificar y comprender la razón constante. Mientras en la tercera imagen ubicada en el centro de la figura, el estudiante J, Figura 7(c), expresa una relación multiplicativa utilizando las unidades involucradas: *metro cúbico · valor = consumo*, donde se logra observar la ecuación que representa para el estudiante la variación del consumo con respecto al costo.

En el segundo momento de la Tarea 1, los estudiantes completaron una tabla utilizando los datos y las fórmulas proporcionadas para hallar las respectivas equivalencias en las diferentes unidades de medida.

**Tabla 4**

*Electrodomésticos del hogar*

<b>Electrodoméstico</b>	<b>Potencia eléctrica (Watts)</b>	<b>Horas (día)</b>	<b>Energía Wh (día)</b>	<b>Energía Kwh (día)</b>	<b>Energía Kwh (30 días)</b>
2 bombillas	60	1	120	0.12	
5 bombillas	75	4		1.5	
Nevera	290	9			78.3
Estufa 4 puestos	1800	2			
Equipo de sonido	200	1		0.2	
Televisor de 21"	140	5			21

Con respecto a los procedimientos que se debe utilizar para completar la Tabla 4, en la primera sesión virtual con los 8 estudiantes de la investigación, se logró registrar el siguiente fragmento de diálogo:

*Diálogo 4. Fragmento tomado del archivo de audio A1-S1 2020*

27:20 - I: ¿Cómo hago para saber cuántos Kwh gastaría entre las dos bombillas en 30 días? ¿qué hicieron para responder esa parte de la tabla?

27:39 - J: Multiplicando.

27:40 - I: ¿Qué se multiplica?

27:45 - J: Ese número por 1000.

27:50 - I: De acuerdo con lo que dice el compañero, si multiplico esos números, el resultado no coincide con las tablas que les estoy compartiendo en la pantalla ¿Qué otras ideas tienen para saber el consumo en 30 días?

28:07 - V: Hay que dividirlo.

28:16 - I: Ya, dividieron para saber cuál fue el consumo del día, pero ahora necesitamos saber en un mes, es decir en 30 días y en las tablas que les estoy compartiendo el resultado que está registrado es 3,6.

28:45 - J: Me equivoqué, hay que multiplicarlo, pero por 30.

28:50 - I: ¿Multiplicar a quién?

29:15 - M: A los Kwh por 30 días o eso yo creo.

29:25 - I: El valor de un día en Kwh multiplicado por 30 días, así podemos determinar la energía consumida por cada electrodoméstico en un mes, claro está, utilizándolos solo las horas registradas en la tabla.

30:00 - D: Estuvo difícil en algunas casillas. Por ejemplo, en las de las 2 bombillas estuvo un poquito difícil y las 5 bombillas también.

30:17 - I: ¿Cuál fue la dificultad específicamente? ¿Tuvo que ver la comprensión de los datos registrados en la tabla, las fórmulas para hallar las equivalencias o la dificultad fue otra?

30:25 - D: No entendí los procedimientos, por eso al principio se me dificultó un poquito.

En el minuto 27:50 la investigadora interviene para cuestionar a los estudiantes sobre la operación (multiplicación) y así fortalecer la comprensión de los principales elementos que están involucrados en los procedimientos y así mismo incentivar la participación y las reflexiones sobre la forma adecuada de comprender y establecer la razón constante. En general, los estudiantes completaron la Tabla 4 aplicando la multiplicación para expresar las medidas relativas entre dos cantidades, esto en esencia es una primera aproximación al estudio de la proporcionalidad directa, sin dejar de lado las dos unidades y cómo se relacionan entre ellas.

En el minuto 29:15 los estudiantes señalan las unidades Kwh y días, es decir, para este momento de la Tarea 1, emerge una noción del concepto de multiplicación al entender el rol que representa cada cantidad y no solo aplicar del algoritmo. No basta con nombrar y utilizar las cantidades numéricas, hay que identificar cada una de las unidades que acompañan el número y le dan significado a la cantidad, es decir, por ejemplo, tener 30 no es igual a tener 30 días ya que la unidad le da un papel específico al número en la situación planteada.

Comprender que Kwh y días son unidades diferentes que cumplen una relación multiplicativa, como se evidencia en el minuto 29:15, donde el estudiante M expresa que el valor (consumo) de un día se multiplica por 30 días para hallar el consumo del mes, es un avance hacia la construcción del concepto de proporcionalidad directa entre las cantidades de dos sistemas de

cantidades, colocando en correspondencia no solo parejas de cantidades, sino familias de cantidades.

La Figura 8 muestra cómo los estudiantes J y S completaron la Tabla 5, cumpliendo con las especificaciones dadas y en ambos casos los resultados son los mismos.

**Figura 8**  
*Respuestas Tarea 1*

Electrodomestico	Potencia(w)	Horas (dia)	Energía Wh(dia)	Energía kWh(dia)	Energía kWh(30)
2 bombillas de 60w	60	1	120	0,12	3,6
5 bombillas de 75w	75	4	1.500	1,5	45
Nevera	290	9	2.610	2,61	78,3
Estufa 4 puestos	1800	2	3.600	3,6	108
Equipo de sonido	200	1	200	0,2	6
Televisor 21"	140	5	700	0,7	21

(a)

Electrodomestic o	Potencia eléctrica (watts)	Horas (día)	Energía Wh (día)	Energía kwh (día)	Energía kWh (30 días)
2 bombillas de 60 w	60	1	120	0,12	3,6
5 bombillas de 75 w	75	4	1.500	1,5	45
Nevera	290	9	2.610	2,16	78,3
Estufa 4 Puestos	1800	2	3.600	3,6	108
Equipo de sonido	200	1	200	0,2	6
televisor de 21"	140	5	700	0,7	21

(b)

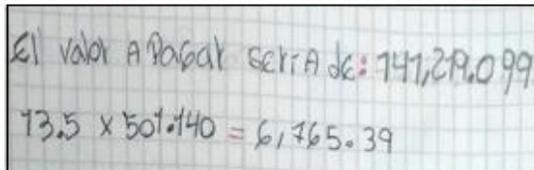
*Nota:* Respuestas de los estudiantes J y N al completar la Tabla 4. Archivo de imagen T1-S1 J-N 2020

Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 4, se realizaron varias preguntas que permitieron a los estudiantes identificar la razón constante, entre ellas tenemos: ¿cuál es el valor a pagar en el mes por el consumo total de los electrodomésticos que se encuentran en la tabla?, si en casa se

tienen 8 bombillas de 75W cada una y se utilizan 2 por 3 horas diarias, y ¿cuál es el valor a pagar mensualmente solo por el consumo de las bombillas?

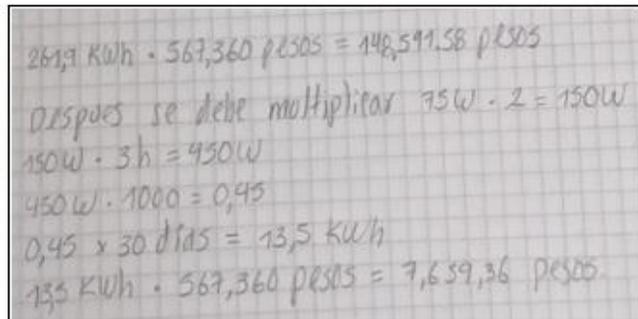
### Figura 9

#### Respuestas Tarea 1



El valor a pagar sería de: 747,29.099  
 $73,5 \times 507.140 = 6,765.39$

(a)



$261,7 \text{ kWh} \cdot 567,360 \text{ pesos} = 148,599.58 \text{ pesos}$   
 Después se debe multiplicar  $75\text{W} \cdot 2 = 150\text{W}$   
 $150\text{W} \cdot 3\text{h} = 450\text{W}$   
 $450\text{W} \cdot 1000 = 0,45$   
 $0,45 \times 30 \text{ días} = 13,5 \text{ kWh}$   
 $13,5 \text{ kWh} \cdot 567,360 \text{ pesos} = 7,659,36 \text{ pesos}$

(b)

*Nota.* Valor a pagar por el consumo de energía en el mes de todos los electrodomésticos y por 2 bombillas de 75W cada una utilizadas por 3 horas diarias al mes. Archivo de imagen T1-S1 M-J 2020

Se observa en ambas imágenes de la Figura 9 cómo los estudiantes M y J expresan la ecuación, particularmente en la Figura 9(a). El estudiante M primero escribe el resultado sin justificar el procedimiento utilizado, mientras en la siguiente pregunta ya especifica una igualdad, pero nuevamente deja de lado las unidades que acompañan las cantidades. Entre tanto, el estudiante J utiliza las unidades de medida y al preguntarle cómo lo hizo, responde que ha aplicado el procedimiento que se describe en la Tarea 1 y que tuvo en cuenta las palabras de la investigadora cuando les decía que no olvidaran las unidades de medida, lo cual le permitió estar atento durante el desarrollo de esta situación planteada en el segundo momento de la Tarea 1 y tenerlas en cuenta en la formulación de la ecuación, aunque aún no comprende el papel que estas unidades juegan al acompañar el número.

En la siguiente pregunta de la Tarea 1, se pide a los estudiantes completar la Tabla 5 utilizando el costo por  $1\text{m}^3$  indicado en la factura de servicios públicos de sus hogares, específicamente para el servicio del acueducto.

**Tabla 5***Actividades diarias en las que se usa el servicio del acueducto*

Actividad diaria	Litros de agua	Costo (\$)
Ducha (8 minutos)	76	
Lavado de platos (3 veces)	40	
Lavado (Dientes, manos)	34	
Sanitario (5 usos)	50	
<b>Total</b>		

Teniendo en cuenta el costo por unidad registrado en la cuenta de servicios y la unidad de medida del servicio de acueducto, los estudiantes debían completar la Tabla 5 utilizando los procedimientos que creían más convenientes, las siguientes son las respuestas de los estudiantes J y N.

**Figura 10***Respuestas Tarea 1*

Actividad diaria	Litros de agua	Costo \$
Ducha (8 minutos)	76	39.535,2
Lavado de platos (3 veces)	40	20.808
Lavado (Dientes, manos)	34	17.686,8
Sanitario (5 usos)	50	26.010
Total diario	200	

Costo unidad 520,200

(a)

Actividad diaria	Litros de agua	Costo (\$)
Ducha (8 minutos)	76	209.498
Lavado de platos (3 veces)	40	110420
Lavado (Dientes, manos)	34	93857
Sanitario (5 usos)	50	138.025
Total diario	200	

(b)

*Nota.* Respuestas de los estudiantes J y N al completar la Tabla 5. Archivo de imagen T1-S1 J-N 2020

En el Dialogo 5 los estudiantes dan cuenta de los procedimientos que utilizaron para completar la Tabla 5:

*Diálogo 5. Fragmento tomado del archivo de audio A1-S1 2020*

49:22 - I: ¿Quién me cuenta qué hizo para completar la columna del costo?

49:28 - J: Consulté el valor de un litro y lo multipliqué.

49:39 - I: ¿El valor lo sacaste de la cuenta de servicios?

49:42 - J: Sí.

49:46 - I: ¿Quién me dice algo diferente? o ¿hicieron lo mismo?

50:10 - P: Lo mismo (Responden en coro).

50:24 - M: Yo creo que hice esas operaciones.

50:32 - I: Estoy mostrando parte de tu trabajo M, ¿podrías compartírnos qué hiciste?

50:43 - M: De hecho, no recuerdo bien, creo que multipliqué el costo del metro cúbico por el número que aparece ahí el 76. Ah, sí, eso hice.

52:41 - I: ¿Alguno notó que en la tabla se habla de litros y en la cuenta de servicios de metros cúbicos?

54:59 - J: Yo lo que hice fue primero fue averiguar el valor de un litro y así lo multipliqué, ¿si me entiende?

55:13 - I: ¿Hiciste la conversión entre las unidades de medida? ¿hallaste la equivalencia entre litros y centímetros cúbicos?

55:28 - J: Sí.

55:29 - I: ¿Alguien hizo algo diferente a los procedimientos que han compartido, lo que sus compañeros nos han dicho?

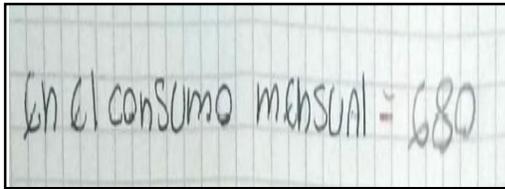
55:35 - P: No (Responden en coro).

En este Dialogo 5 se logra identificar que los estudiantes continúan sin diferenciar las unidades de medida o por lo menos no fue un elemento que tuvieron en cuenta a la hora de completar la Tabla 5, esto implica que presentan dificultades en la comprensión del rol que cada número desempeña en la situación y aunque el resultado es correcto, dejar de lado la unidad de medida sugiere que aún falta identificar la relación multiplicativa entre las familias de cantidades. Para este momento de la Tarea 1, el costo por unidad ya es considerado un elemento importante que identifican y multiplican por las cantidades de consumo para obtener los costos totales.

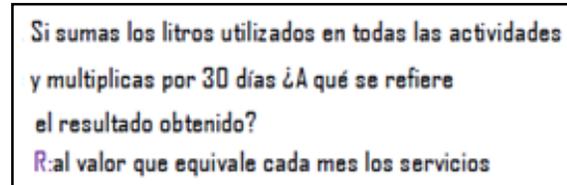
Así mismo se les plantea una situación en la que deben sumar los litros utilizados en todas las actividades diarias registradas en la Tabla 5 y multiplicar el total por 30 días. Posteriormente a esto deben responder a la pregunta ¿a qué se refiere el resultado obtenido?

### Figura 11

#### Respuestas Tarea 1



(a)



(b)

*Nota.* Consumo mensual de todas las actividades registradas en la tabla donde se utiliza el servicio de acueducto.  
Archivo de imagen T1-S1 A-M 2020

Los estudiantes A y M han logrado utilizar por momentos el costo por unidad en una relación multiplicativa con otra cantidad perteneciente a una familia diferente, también por instantes reconocen el rol de la cantidad con respecto a la situación específica que se está desarrollando. Por ejemplo, logran identificar la cantidad de pesos en el costo o los  $m^3$  en el consumo del servicio de acueducto y además, se han acercado a una noción de proporcionalidad directa cuando expresan que las cantidades aumentan o disminuyen conservando una misma relación, es decir, las cantidades correspondientes en cada sistema de cantidades aumentan o disminuyen conservando la misma razón. Hasta esta parte los estudiantes tienen una percepción de la covariación entre las dos cantidades y una intuición sobre la conservación de una relación entre las cantidades correspondientes, pero aún no hay una comprensión de que esto se refiere a una razón constante de proporcionalidad.

La Tarea 1 finaliza con las siguientes preguntas: ¿cuál es el promedio mensual de consumo de agua si disminuyes a 6 minutos la ducha diaria? y teniendo en cuenta los valores establecidos en la factura de servicios públicos, ¿cuál es el costo del consumo establecido en la pregunta anterior? El siguiente fragmento nos muestra cómo los estudiantes lograron abordar las preguntas y los análisis que realizaron de las mismas.

Diálogo 6. *Fragmento tomado del archivo de audio A1-S1 2020*

1:04:14 - I: Según la tabla, una ducha de 8 minutos utiliza 90 litros de agua, ¿cuál es el promedio mensual de consumo de agua si disminuyes a 6 minutos la ducha diaria? Debemos tener en cuenta los datos: si en 10 minutos me gasto 90 litros entonces en 6 minutos ¿cuántos litros me gastaré?

1:05:01 - J: Lo que me voy a gastar son 17.100 y multipliqué 570 por 30.

1:05:15 - I: El 570, ¿de dónde salió?

1:05:23 - J: Ese 570 lo obtuve de los ejemplos, yo comparé lo que vale un litro y de ahí era de donde yo sacaba.

1:05:38 - I: La primera pregunta no nos pide el costo, nos pide el promedio mensual de consumo en una ducha diaria de 6 minutos, la siguiente pregunta pide ¿cuál es el costo del consumo establecido en la pregunta anterior?, por tanto, primero debo hallar ese consumo, así que esta comparación no es correcta.

1:06:45 - M: No la hice porque no sabía que hacer ahí.

1:06:55 - D: A mí me explicaron que debía multiplicar y dividir.

1:07:01 - I: ¿Cuáles números multiplicaste y cuáles dividiste?

1:07:20 - D: Multipliqué 6 por 95 y después dividí por 10.

1:07:43 - I: Podrías decirnos, por qué hiciste ese procedimiento.

1:08:05 - D: Pues me dijeron que así se hacía y yo solo hice las operaciones.

1:09:00 - I: Que bueno poder escuchar como lo hiciste para conocer los procedimientos.

1:09:25 - D: Pues no sé decirle, solo seguí lo que me dijeron.

Al final del Diálogo 6 se evidencia que, si bien los estudiantes pueden aplicar las operaciones de multiplicación y división, aún no van más allá de ello, se les dificulta hacer comparaciones entre las familias de cantidades. En el minuto 1:06:55 el estudiante D hizo un acercamiento a esta comparación sin estar consciente de lo que hizo y expresa que siguió las recomendaciones que le compartieron en su hogar para que lograra responder la pregunta, pero no comprende el porqué de los procedimientos.

Hasta el momento se ha logrado ver una aproximación a la multiplicación y se espera que los estudiantes comprendan durante este proceso, que detrás de ésta hay una proporcionalidad entre dos sistemas de cantidades. Por otra parte, identificaron el costo por unidad que ellos llaman costo unitario y lo ponen en correspondencia con cantidades de otro sistema de cantidades, por ejemplo, pesos con Kwh o pesos con  $\text{cm}^3$ . Esta correspondencia da paso a la idea de razón, centrando la

atención en las situaciones planteadas en la tarea, que requieren un análisis del comportamiento de las parejas de valores.

Para la Tarea 2, se ha elaborado una tabla con datos reales de 3 marcas de aceite que podemos encontrar en el mercado y se nombraron como A, B y C con sus respectivos tamaños y precios como podemos verlo a continuación:

**Tabla 6**  
*Aceites del mercado*

Tamaños/Precios	Aceite A	Aceite B	Aceite C
500 cm <sup>3</sup>	\$ 2.950	\$ 5.340	\$ 3.450
1000 cm <sup>3</sup>	\$ 6.000	\$ 10.250	\$ 7.300
3000 cm <sup>3</sup>	\$ 17.900	\$ 28.100	\$ 21.700
5000 cm <sup>3</sup>	\$ 29.700	\$ 50.200	\$ 36.300

A partir de los datos registrados en la Tabla 6, se plantean una serie de preguntas que los estudiantes de manera individual analizan y responden para compartir sus apreciaciones con los demás estudiantes en el segundo encuentro virtual. Los estudiantes deben observar la Tabla 6 y responder ¿cómo se puede establecer cuál es el aceite más económico? El siguiente Diálogo 7, muestra la comprensión que tienen hasta el momento con respecto al precio por unidad, las cantidades de los empaques establecidos para los aceites y la relación multiplicativa que se establece entre las variables.

*Diálogo 7. Fragmento tomado del archivo de audio A2-S2 2020*

2:07 - I: ¿Cómo se puede establecer cuál es el aceite más económico?

2:23 - J: Para establecer cuál es el aceite más económico se debe comparar el tamaño por el precio del producto pequeño.

2:43 - I: ¿Hiciste una relación con cada uno de los aceites o con un aceite específico?

2: 51 - J: De un aceite en específico el aceite, así me entiende, obtenía el precio de los otros.

3:00 - I: ¿Alguien hizo algo diferente?

3:09 - V: Hay que encontrar el costo de cada centímetro cúbico y se hace dividiendo el total de cada marca por la cantidad de centímetro cúbico, por ejemplo, 2.950 dividido 5000 o por 500.

3:36 - I: Ambos tamaños están en la tabla, pero debemos tener en cuenta que el precio que mencionas pertenece al tamaño de 500, entonces por lo que les entendí, debo tomar el valor del tamaño y el precio del aceite para dividirlos, si hago esto el resultado que obtengo ¿qué significado tiene?

3:59 - V: El costo de cada centímetro.

4:05 - J: Profe el costo de 1 centímetro cúbico.

4: 16 – I: Con lo que acabamos de hacer, ¿creen que responderíamos solo a esta pregunta?

4:21 - M: No, hay otra que se responde.

4: 22 - I: ¿Cuál es la otra pregunta?

4: 24 - M: La que dice el precio de  $1\text{cm}^3$ .

5:35 - I: ¿Con solo hacer la operación que mencionan en una sola marca, puedo determinar que es el mismo valor para todas?

5:40 - J: Puede ser una de esas maneras, pero no es el mismo valor, cambia poquito, pero cambia.

6:03 - V: Por ejemplo, yo lo que hice fue aproximar en el aceite A y me dio aproximadamente 6.

6:17 - I: ¿Qué números operaste del aceite A?

6:22 - V: Los que estaban en frente.

6:49 - I: Podríamos con esto concluir que ese valor es el costo de un centímetro cúbico. Ahora les compartiré los diferentes resultados que ustedes mismos realizaron para que los observen y me respondan ¿qué tienen en común estos valores?

8:24 - J: Yo digo que en la pregunta que usted hizo, no varía mucho el precio por la cantidad.

8: 45 - I: Como todos estamos observando los diferentes resultados, vamos a analizar la tabla y a centrar la atención en el Aceite A, ¿que logran ver ahí?

9:16 - V y E: Todos se aproximan.

9:19 - V: Todos se aproximan a 6.

9:20 - I: Hay una diferencia mínima entre los valores, pero no todos se aproximan a 6, sino observen el aceite B, ¿qué pasa con el aceite B?

9:36 - V: Que todos también se aproximan, pero a 10.

9:46 - I: ¿Hay menos diferencias o más diferencias entre las cantidades?

9:56 - D: Yo digo que hay menos diferencias.

10:01 - I: ¿Y en el aceite C?

10:18 - V: En ese hay más diferencia.

10:50 - I: En esta pregunta nos pedían justificar la respuesta, es decir ¿cuál es el procedimiento que utilizaron para determinar cuál es el aceite más económico?

11:06 - V: El A.

11:09 - I: ¿Todos estamos de acuerdo o alguien tiene otra respuesta diferente?

11:14 - D: Yo estoy de acuerdo.

11:16 - P: De acuerdo (Responden en coro).

En el minuto 3:09 se logra ver cómo uno de los estudiantes identifica el costo por unidad como base para establecer el aceite más económico y enuncian las operaciones que se deben hacer. La investigadora interviene para preguntar ¿qué significa este resultado? Entre los minutos 3:59 y 4:05 identifican este resultado como el costo por  $1\text{cm}^3$  y dan respuesta inmediata a la segunda pregunta ¿cuál es el costo de  $1\text{cm}^3$  en cada una de las marcas?, utilizando el mismo procedimiento en cada marca de aceite para hallar el costo por unidad.

Con estas preguntas se busca promover el análisis y la reflexión de los estudiantes con respecto a los datos registrados en la Tabla 6 e identificar los procedimientos utilizados que pueden estar basados en razonamientos por analogías o en razonamiento analíticos, además de reconocer en los sistemas de cantidades si hay o no una razón constante que les permita comprender la correlación establecida y finalmente determinar si los procedimientos utilizados son adecuados para el tratamiento de la tarea.

Continuando con la pregunta ¿cuál es el aceite más económico?, entre los minutos 9:16 y 11:06, el diálogo se centra en cada una de las marcas de aceite y sus respectivos precios según el tamaño. Observando las diferencias o similitudes entre éstos, se logra determinar según los estudiantes que el aceite más económico es el A y justifican la respuesta utilizando la operación división, sin determinar el rol que desempeña cada una de las cantidades en relación con el tamaño y el precio.

Este tipo de situaciones problemas planteadas en la Tarea 2 se clasifica dentro de los isomorfismos de medidas, donde dos cantidades variables diferentes se correlacionan linealmente.

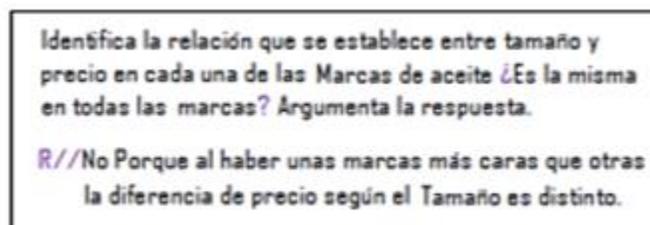
En este sentido  $1\text{cm}^3$  tiene un precio que le corresponde en cada una de las marcas de aceite y por ende los diferentes tamaños también tienen un precio establecido. Los estudiantes tienen hasta este momento un avance en la forma de analizar las situaciones y aplicar los procedimientos para identificar el costo por unidad, este avance permite comenzar a introducir la relación lineal entre las cantidades de diferentes familias para comprender el concepto de proporcionalidad directa.

Las cantidades involucradas en esta solución en particular son el tamaño ( $\text{cm}^3$ ) y su respectivo precio (\$), por lo tanto, una vez se logre establecer la razón entre estas cantidades tomando como punto de partida el costo por unidad, se puede trasladar analógicamente (razonamientos por analogía) esta razón a otro par de cantidades. En un escenario ideal la razón entre todas las parejas de cantidades sería la misma, comprendiendo de manera clara la linealidad que caracteriza la covariación de las cantidades que se correlacionan sobre la base de una proporcionalidad directa.

Estos razonamientos por analogía son el primer paso para entender la linealidad y por el momento cumplen un papel importante, proporcionando a los estudiantes instrumentos nuevos para identificar la razón entre dos cantidades y buscar regularidades en las demás parejas que se relacionan.

La Tarea 2 también propone a los estudiantes identificar la relación que existe entre tamaño y precio en cada una de las marcas de aceite y posteriormente establecer si es la misma en todas las marcas. Esta parte de la tarea fue abordada de manera general a partir de los hallazgos realizados en la anterior pregunta, cuando se evidencia que la razón entre un par de cantidades no se conserva para el siguiente par de cantidades. A pesar de no observarse esta razón constante en cada una de las marcas de aceite utilizando datos de la vida real, se logran construir algunas reflexiones que evidencian los avances alcanzados con respecto a la razón constante.

**Figura 12**  
*Respuesta Tarea 2*



*Nota.* Relación entre tamaño y precio de cada una de las marcas de aceite. Archivo de imagen T2-S2 M 2020

Con respecto a esta pregunta sobre la relación entre tamaño y precio, uno de los estudiantes logra evidenciar que una de las variables depende de la otra, en sus palabras el precio se da según el tamaño y al final del Diálogo 8 se puede observar cómo logran identificar en los datos la existencia de una constante, con preguntas específicas realizadas por la investigadora, para completar las reflexiones en torno a los procedimientos que los estudiantes utilizan para dar solución a las tareas.

Diálogo 8. *Fragmento tomado del archivo de audio A2-S2 2020*

12:60 - I: Vamos a establecer si la relación en las 3 marcas es la misma y cómo llamaremos a esta relación.

13:18 - J: La relación entre el tamaño y el precio lo obtenemos multiplicando el valor de un centímetro cúbico por las cantidades.

13:39 - I: Y la otra pregunta ¿es la misma relación en las 3 marcas?

13:49 - J: No es la misma relación, definitivamente no lo es entre las 3 marcas.

14:09 - I: Observando la tabla podemos ver la diferencia y si les digo que observen el tamaño más grande de las tablas ¿qué pasa con el precio?

14:52 - P: Aumenta (Responden en coro).

15:08 - I: ¿Si el tamaño aumenta entonces el precio va a ser mayor en las todas las marcas?

15:14 - P: Sí (Responden en coro).

15:16 - D: Y si el tamaño es pequeño el precio es el menor.

15:19 - I: Ahora les pregunto: ¿hay en la situación algún elemento que no cambia?

15:34 - P: No (Responden en coro).

15:43 - I: Entonces ¿el precio por  $1\text{m}^3$  es diferente en todos los tamaños del aceite A?

15: 51 - J: Es muy parecido, porque al dividir nos da unos valores casi igualitos.

16:02 - D: Pero entre los aceites sí es diferente, cuando dividimos se veía.

16:13 - I: Por ahora solo vamos a observar el aceite A para encontrar las similitudes.

17:01 - D: Siendo así entonces si hay similitudes.

17:15 - I: ¿Cuáles similitudes?

17:33 - D: Esa, que dividí y dio casi lo mismo.

17:46 - I: ¿Qué dividiste?

18:05 - D: Pues el precio y el tamaño.

18:13 - I: ¿Todos estamos de acuerdo con el compañero o hay algún otro elemento que no cambia?

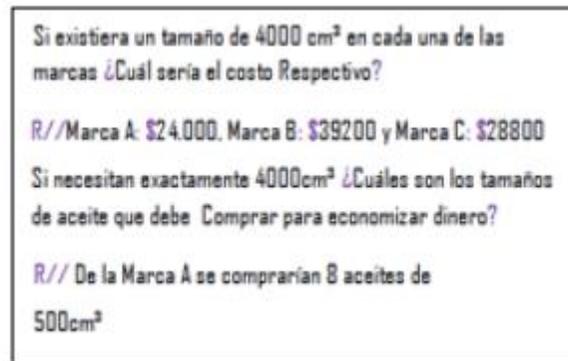
18:30: - E: No (Responden en coro).

En el Diálogo 8 se puede interpretar cómo los estudiantes observan los datos de la tabla y visualmente identifican solo las diferencias en los tamaños y precios. Para ampliar la visión, la investigadora en el minuto 15:43 trata de hacer preguntas que lleven a los estudiantes a comprender la constante y es allí donde el estudiante J responde que para él hay un elemento constante que conoce como precio por unidad. Algo que durante el diálogo los estudiantes enunciaron y de lo cual se sentían seguros, es que el precio depende el tamaño, es decir, a menor tamaño menor precio y a mayor tamaño mayor precio, lo cual permite avanzar hacia la comprensión de la noción de proporcionalidad directa.

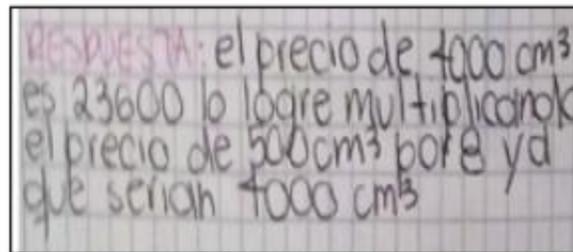
El conocimiento de la linealidad es inherente a este tipo de situaciones donde se puede establecer la razón constante y así mismo transformar una cantidad en otra, es decir, dada una de las cantidades se puede obtener la otra a partir de una multiplicación o una división. Los procedimientos basados en razonamiento por analogía o razonamiento analítico se pueden desarrollar de forma paralela y encontrarse cuando los conceptos propios de la linealidad están consolidados, además, hasta este momento los estudiantes van el camino correcto hacia a la comprensión de la proporcionalidad y su aplicación en el contexto.

La siguiente situación problema de la Tarea 2, establece un caso diferente a los datos registrados en la tabla donde, si existiera un tamaño de  $4000 \text{ cm}^3$  en cada una de las marcas, ¿cuál sería el costo respectivo? y además, si tuvieran que formar este tamaño con los que están en la Tabla 6, ¿cuáles son los tamaños de aceite que debe comprar para economizar dinero?

**Figura 13**  
*Respuestas Tarea 2*



(a)



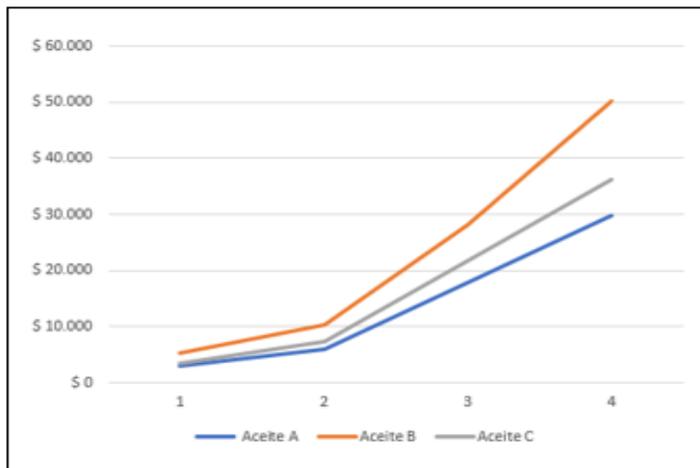
(b)

*Nota.* Precio del aceite en el tamaño de  $4000 \text{ cm}^3$  en cada marca. Archivo de imagen T2-S2 J-M 2020

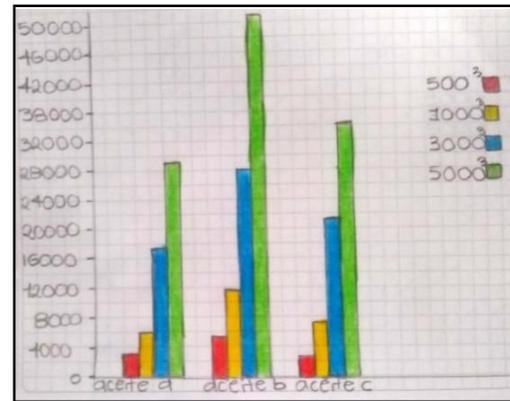
En la Figura 13(a) el estudiante J solo expresa los resultados y no especifica los procedimientos utilizados para hallarlos, mientras en la Figura 13(b) el estudiante M describe el procedimiento y utiliza información de la Tabla 6, específicamente el precio de  $500 \text{ cm}^3$  en la marca más económica que habían identificado antes y lo multiplican por 8, para determinar finalmente el precio que les permite economizar dinero y cumplir con la cantidad de aceite que propone la situación.

Finalmente, en la Tarea 2 se propone la realización de una gráfica de líneas teniendo en cuenta los tamaños y los precios en cada una de las marcas de aceite.

**Figura 14**  
*Respuestas Tarea 1*



(a)



(b)

*Nota.* Gráfica de líneas y gráfica de barras con los datos de la tabla de aceites. Archivo de imagen T2-S2 M-J 2020

En la Figura 14(b), aunque representa una aproximación de los datos propuestos en la Tabla 6 en un diagrama de barras, dificulta visualizar cómo varía, respecto al precio, cada una de las marcas de aceite y además, no cumple con las condiciones de la pregunta, donde se solicitaba una gráfica de líneas. En la Figura 14(a) se logra evidenciar la variación que existe entre cada una de las marcas de aceite como lo han manifestado los estudiantes durante el desarrollo de la Tarea 2, se logran identificar nociones básicas de razón constante y principios de proporcionalidad directa, aunque aún distan de la teoría porque no hay un reconocimiento total del rol del número y la relación lineal entre las familias de cantidades, para asegurar que se logra comprender la razón constante y la proporcionalidad directa.

Representar gráficamente los datos permite a los estudiantes observar y analizar la variación y el cambio que se presenta en las diferentes marcas de aceite a partir de la razón existente entre el precio y el tamaño. Este análisis no solo es fundamental en la estrategia de solución, sino que es un conjunto de inferencias que se debe hacer sobre la base de conocimiento matemático y no matemático, para lograr comprender y reconocer los elementos que hacen parte de la construcción del concepto de proporcionalidad directa.

En la Tarea 3, se propone una tabla para completar y con los datos registrados, posteriormente realizar una gráfica de líneas que los represente. Nótese que en la Tabla 7 se

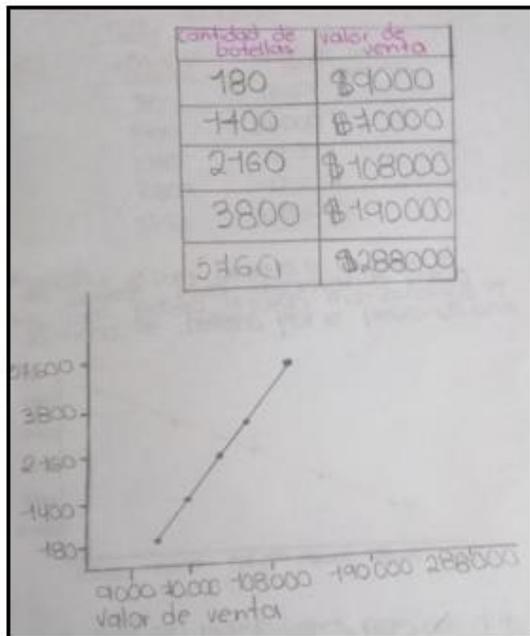
encuentran algunas cantidades conocidas, pero solo hay un par de cantidades que ya están correlacionadas, es decir, para 1400 botellas el valor de la venta es \$70000. Para las cantidades restantes es necesario identificar la razón constante que pone en relación la pareja de cantidades y trasladar dicha función al otro par de cantidades (una conocida y otra desconocida).

**Tabla 7**  
*Reciclaje de botellas*

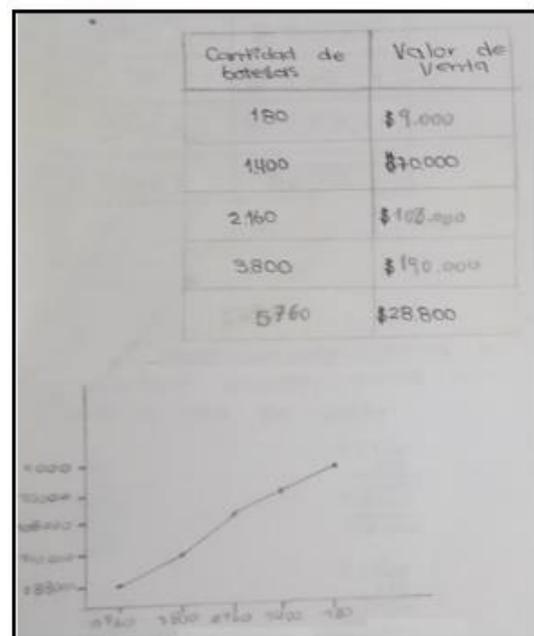
Cantidad de botellas	Valor de venta
180	
1400	\$70000
2160	
3800	
	\$288000

Los estudiantes completaron la Tabla 7 utilizando en primer lugar el valor por unidad al dividir \$70000 entre 1400 y obteniendo como resultado \$50, en segundo lugar, aplicaron la multiplicación del valor por unidad por cada uno de los datos registrados en la columna denominada cantidad de botellas. Y en tercer lugar la última fila de la tabla registra el valor de la venta y es necesario encontrar la cantidad de botellas, por lo cual emplearon la división entre \$288000 y \$50 para encontrar la cantidad desconocido.

**Figura 15**  
*Respuestas Tarea 3*



(a)



(b)

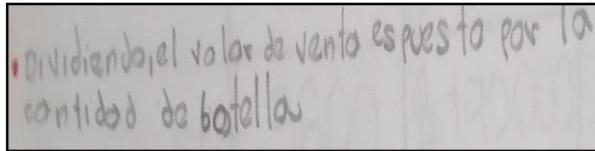
*Nota.* Tabla y grafica sobre reciclaje de botellas. Archivo de imagen T3-3 M - J 2020

La Figura 15 presenta dos imágenes con tablas iguales tanto en su estructura como en los datos registrados. Mientras en las gráficas de líneas visualmente se observa una leve diferencia, la Figura 15(a) representa una variación lineal y proporcional entre las variables; la Figura 15(b) representa una variación no tan lineal. La diferencia entre las imágenes podría considerarse un error de aproximación en el momento de graficar ya que los datos para ambas son los mismos. En forma general, ambas gráficas evidencian cómo, en tanto la cantidad de botellas aumenta, el valor de venta también lo hace, poniendo en correlación cantidades entre dos sistemas de cantidades.

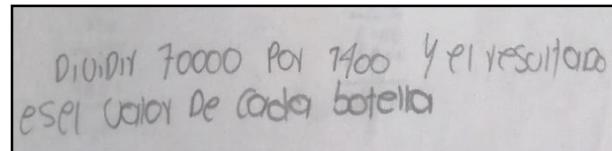
Detrás de las gráficas está la comprensión de ciertos conocimientos que son la base para los primeros aprendizajes sobre las proporciones y que aún los estudiantes no asimilan de forma clara. Entre esos aprendizajes se logra evidenciar cómo dos parejas de cantidades están en la misma razón y, por lo tanto, una vez establecida la razón, se considera haber aplicado la función como relator u operador sobre dichas cantidades. Esta razón es trasladada al otro par de cantidades como parte del proceso basado en razonamientos por analogía.

Continuando con la Tarea 3 y teniendo en cuenta los valores registrados en la Figura 15, se les pide a los estudiantes describir el mejor método para calcular el costo por botella. Algunas de las respuestas se muestran en la Figura 16.

**Figura 16**  
*Respuestas Tarea 3*



(a)



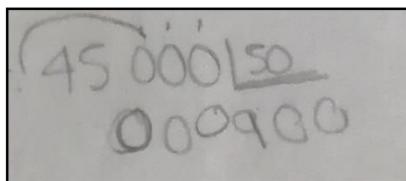
(b)

*Nota.* Métodos utilizados para calcular el costo por botella. Archivo de imagen T3-S3 E-M 2020

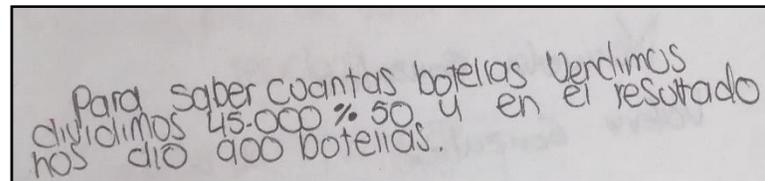
Con respecto al mejor método para calcular el costo por botella, los estudiantes concuerdan que utilizaron los datos conocidos de la Tabla 7, es decir 1400 botellas tienen un valor de venta de \$70.000, posteriormente aplicaron la división entre estas dos cantidades y obtuvieron el costo por botella. La investigadora los cuestiona sobre el resultado obtenido y el rol que cumple éste en la situación, a lo que ellos responden que este valor representa el costo por una botella al venderla.

La siguiente pregunta tiene que ver con una situación específica, si reciben \$45000 por la venta ¿cuántas botellas vendieron? el procedimiento aplicado por los estudiantes se puede evidenciar en la Figura 17.

**Figura 17**  
*Respuestas Tarea 3*



(a)



(b)

*Nota.* Procedimientos para hallar la cantidad de botellas vendidas dado el valor total de dinero recibido. Archivo de imagen T3-S3 E-M 2020

A su vez, la Figura 17 muestra cómo los estudiantes aplican el algoritmo de la división utilizando los datos del problema y el costo por unidad hallado en la pregunta anterior. Nuevamente

dejan de lado el rol del número, es decir, solo operan las cantidades y no tienen en cuenta las unidades que los acompañan, las cuales le dan sentido al número y esto se hace evidente en los registros escritos, mientras en el discurso verbal sí expresan el número con su respectiva unidad de medida como se ve reflejado en el siguiente fragmento de diálogo:

*Diálogo 9. Fragmento tomado del archivo de audio A3-S3 2020*

40:16 – I: ¿Me podrían explicar qué procedimiento utilizaron para responder a la pregunta:

¿Cuántas botellas vendieron, si reciben \$45000 por la venta?

40:35 - E: Dividir (Respondieron en coro).

40:42 - I: ¿Qué cantidades dividieron?

41:03 - J: Como ya sabía el costo de una botella, entonces tomé 45000 pesos de la venta y lo dividí por 50 pesos lo que vale una botella y el resultado es la cantidad de botellas que vendió.

41:19 - I: ¿Hay en esta situación algún elemento constante, es decir, que se repite?

41:36 - J: Claro profe, los 50 pesos porque es lo que pagan por una botella, el costo por unidad.

41: 42 - D: Hay sí, eso es verdad, nos pasó en varias preguntas.

41:50 - I: ¿Qué fue lo que pasó en varias preguntas?

42:01 - D: Pues que nos tocaba buscar lo que valía uno y después de ahí encontrábamos el resultado de las preguntas, lo que cambiaba era la unidad, así es que se llama profe creo.

42: 46 - I: Sí, la unidad que acompaña al número o cantidad, ustedes en la asignatura de geometría están trabajando las unidades de medida.

43:07 - E: Sí (Responden en coro).

43:17 - J: Las de longitud, masa y estamos estudiando el volumen en 3D.

43:25 - D: Ya entendí, porque tenemos que decir la unidad porque ahí sabemos cómo estamos midiendo es que ya es más claro y entonces acá estamos con los pesos.

45:11 - I: Estamos hablando de cantidad de dinero o valor de venta lo cual es una forma de medición.

En el Diálogo 9, los estudiantes se cuestionan y comienzan a utilizar el número acompañado de la unidad de medida y además identifican el costo por unidad de una manera clara y como un elemento que se repite y al relacionarse con otras cantidades les permite hallar los resultados de situaciones que, aunque aún no es claro para ellos, son de proporcionalidad directa. De manera intuitiva se ve reflejada en el proceso la razón como correlator después de dividir la cantidad de

dinero recibido entre el precio por unidad de cada botella, ya que, dada una familia de cantidades correlacionadas y con la misma medida relativa, se logra establecer la razón constante.

Esta función de la razón como correlator permite acercarse a los razonamientos analíticos que están soportados en la comparación de parejas de cantidades heterogéneas, las cuales estarían en correspondencia biunívoca. Es claro que los estudiantes aún no comprenden, ni mucho menos aplican estos razonamientos de manera correcta, pero se ve un avance cuando identifican un elemento regular o constante que les permite comparar las familias de cantidades y por ende hacen parte del proceso de construcción del concepto de proporcionalidad directa en este tipo de situaciones.

Es importante expresar que los estudiantes antes de estas intervenciones habían trabajado la multiplicación sólo como un algoritmo, por lo tanto, la solución de las situaciones planteadas en las tareas es mecánica, aunque por medio del trabajo colaborativo entre estudiantes y la investigadora se ha logrado construir algunas reflexiones, preguntas, aplicaciones y conclusiones para comprender por lo menos que las cantidades están acompañadas de una unidad de medida que les da sentido y significado en la situación.

Las tres tareas aplicadas pretendían identificar los procedimientos utilizados por los estudiantes para dar tratamiento a situaciones problemas en las que se involucra la proporcionalidad directa y es evidente a lo largo del trabajo de campo que aplican los algoritmos de manera correcta y centran la atención en dar solución numérica, pero se han presentado complicaciones y dificultades para llegar hasta este punto, ya que no fue fácil identificar las regularidades existentes en las diferentes situaciones que planteaban las tareas. Si los estudiantes logran reconocer de manera correcta las nociones de linealidad, podrán identificar la relación multiplicativa y lineal que se presenta en la proporcionalidad directa y por supuesto lograrían establecer la razón constante en diferentes situaciones.

Si bien se logra entrever en la solución de las tareas algunos elementos fundamentales en la comprensión de la razón constante, los estudiantes aún deben hacer comparaciones claras y precisas entre familias de cantidades para determinar la relación lineal existente y así fortalecer el uso de los procedimientos basados en razonamientos analíticos que conllevan a la comprensión de la razón constante.

## 6. Conclusiones

El presente trabajo de investigación tuvo como punto de partida la pregunta *¿Qué características tienen los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa?* Además plantea como objetivo general, reconocer las características de los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa y como objetivos específicos, identificar los procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para hallar la razón constante (constante de proporcionalidad) en situaciones de proporcionalidad directa e interpretar las formas de representación de la razón constante (constante de proporcionalidad) en la solución de situaciones de proporcionalidad directa.

La investigación comprende elementos teóricos como razón, proporción y proporcionalidad; procedimientos basados en razonamientos por analogía y razonamientos analíticos. El desarrollo de ésta se realizó en un ambiente virtual ya que la situación a nivel mundial del Covid-19 llevó a buscar estrategias para aplicar el trabajo de campo, proponiendo 3 tareas que involucraban situaciones de proporcionalidad directa, donde se buscan identificar los procedimientos utilizados por los estudiantes para darles tratamiento.

Los estudiantes desarrollaron las tareas en sus hogares de forma individual para luego ser socializadas de forma virtual en tres encuentros que quedaron grabados en la plataforma Meet, dejando registros escritos, audios y videos de cada una de las intervenciones. Posteriormente se realizó la transcripción de los audios y la organización de los archivos enviados por los estudiantes con sus producciones escritas, las cuales, junto con sus producciones verbales, fueron el punto de inicio del análisis. Además, la atención se centró en los procedimientos utilizados por los estudiantes para identificar las características y los razonamientos presentes.

Teniendo en cuenta las características de la investigación, se optó por el enfoque de investigación cualitativa y el método Investigación Acción Educativa que genera conocimiento y transformación sobre las prácticas educativas en colaboración con los actores educativos. Los resultados de la investigación se organizaron con base en la teoría de las funciones de la razón y los procedimientos centrados en razonamientos por analogía y razonamientos analíticos, que los estudiantes aplicaron en la solución de las diferentes tareas.

Es necesario reflexionar acerca de los procedimientos iniciales que tradicionalmente se desarrollan en el aula, ya que se observa por parte de los estudiantes una tendencia por acudir a procesos multiplicativos para resolver las tareas propuestas, operando solo los números sin tener en cuenta las unidades y es claro que los procedimientos mencionados implican una comprensión formal de las relaciones multiplicativas inherentes a las situaciones que involucran la proporcionalidad directa.

Inicialmente los estudiantes utilizan los algoritmos de la multiplicación y la división de manera correcta para dar una solución numérica de las situaciones sin comprender el significado de la cantidad en el contexto que se está tratando, lo cual da a entender que conocen y manejan mecánicamente las operaciones sin establecer ninguna relación o comparación entre las cantidades y las unidades.

En general, los estudiantes después de interactuar con las tareas y compartir con los compañeros sus apreciaciones, logran identificar las cantidades que van a medir y además tienen un acercamiento al reconocimiento del rol que juegan las unidades de medida en las situaciones y asimismo, a la correspondencia que existe entre ellas por medio de la comparación de cantidades y unidades a partir de una medida relativa, en la que una de las cantidades es tomada como unidad de medida de la otra, favoreciendo la comprensión de la relación multiplicativa presente entre las cantidades.

Aunque durante el trabajo de campo los estudiantes no utilizaron la palabra razón, se percibe una noción del concepto matemático por momentos, a partir de la comparación de una cantidad mayor con respecto a una menor o de una cantidad menor con respecto a una mayor. Por ejemplo, compararon en la Tarea 1 el consumo mensual con su respectivo costo y lograron expresar de forma verbal y escrita cómo las cantidades de ambas familias de cantidades aumentan o disminuyen. Por lo tanto, si identifican la existencia de dos cantidades en las que al variar una de ellas también lo hace la otra, ya están estableciendo una relación.

En este mismo sentido la palabra proporción tampoco fue utilizada por los estudiantes en el desarrollo y socialización de las tareas, pero realizaron algunas comparaciones intuitivas entre familias de cantidades con expresiones verbales y escritas como “*a mayor consumo mayor costo*” o “*a menor consumo menor costo*”, allí específicamente ya utilizan formas de relación entre las cantidades e identifican una correlación entre dos sistemas de cantidades, favoreciendo el proceso

para entender qué es la razón constante y cuáles son las relaciones multiplicativas propias de este tipo de situaciones que involucran la proporcionalidad directa.

Las funciones de la razón como relator y la razón como operador surgen de manera intuitiva en medio del tratamiento de las situaciones, al utilizar la idea de proporción como analogía en la medida relativa entre dos pares de cantidades, donde a partir de cantidades conocidas encuentran el valor de una cantidad desconocida. Por otra parte, las funciones de la razón como correlator y la razón como transformador no fueron utilizadas de manera concreta y se evidencia que aún no hay una comprensión de la comparación entre parejas de cantidades por lo general heterogéneas, las cuales estarían en correspondencia biunívoca proporcionando elementos fundamentales para aplicar los procedimientos basados en razonamientos analíticos.

Es importante tener en cuenta que el primer acercamiento hacia la comprensión del concepto de linealidad son los razonamientos por analogía que proporcionan elementos para identificar la razón constante entre dos cantidades. Son también el punto de partida para utilizar las comparaciones y familiarizarse con las regularidades y así después poner en correspondencia uno a uno las familias de cantidades promoviendo la utilización de los razonamientos analíticos.

Después de implementar este tipo de situaciones y obtener estos resultados, se hace necesario formalizar las propiedades de la linealidad, los diferentes roles de la razón y los razonamientos analíticos. Es decir, hay que incentivar a los estudiantes para que usen de manera formal las unidades de medida y así siempre aparezcan explícitas en los diferentes procedimientos que apliquen. Esto les favorece a la hora de identificar las distintas funciones de la razón, principalmente de la razón como correlator y transformador, cuando se trabaja con magnitudes heterogéneas.

En el desarrollo de las tareas se muestran algunos acercamientos a la noción de razón como una constante de proporcionalidad y además hay un avance significativo cuando intentan correlacionar dos familias de cantidades, por ejemplo, en la Tarea 3, cuyas cantidades están en correspondencia uno a uno, es evidente que a cada cantidad de botellas le corresponde un precio que debe ser determinado por el precio por unidad (razón constante). Además, al aplicar la razón sobre una cantidad perteneciente a una de las familias, se obtiene la cantidad correspondiente en la otra familia de cantidades, es decir, utilizan la razón como transformador así no lo manejen formalmente. Todo esto favorece la mirada lineal que modela la proporcionalidad directa.

Si bien en términos generales los procedimientos basados en razonamientos por analogía fueron utilizados en la solución de las tareas casi de manera formal después del análisis y las reflexiones realizadas entre estudiantes y docente investigadora, cabe anotar que los razonamientos analíticos también fueron utilizados de manera básica por los estudiantes iniciando un camino de comprensión y formalización del conocimiento.

Teniendo en cuenta que las tareas proponen algunas preguntas donde debían realizar gráficas de líneas, el análisis de éstas evidenció que se requiere un trabajo previo sobre elaboración, lectura e interpretación de gráficas estadísticas. Estas gráficas son instrumentos que bien utilizados favorecen la observación directa de la variación y el cambio entre las cantidades, pero deben ser significativas para los estudiantes, es decir, las deberían analizar, interpretar, darles sentido y utilidad en los contextos adecuados.

Es importante anotar que las preguntas estaban orientadas a identificar los razonamientos utilizados por los estudiantes, se hizo evidente que acuden con mayor naturalidad y espontaneidad a operar los números y dar una respuesta concreta sin recurrir a un análisis más detallado de los elementos involucrados que les permita identificar relaciones lineales y por ende la razón constante entre las cantidades.

Se logró evidenciar, durante el desarrollo de las tareas dificultades persistentes en los estudiantes del grado séptimo de básica secundaria al enfrentarse a situaciones que involucran la proporcionalidad directa, específicamente la no utilización de las unidades de medida que acompañan las cantidades para diferenciar las familias de cantidades y la dificultad para establecer la relación lineal existente entre las parejas de cantidades cuando estas son heterogéneas (diferente naturaleza).

De lo anterior se logra deducir que antes de construir los objetos matemáticos de la razón, la proporción y la proporcionalidad se hace necesario que los estudiantes entiendan la multiplicación como una relación lineal y no como una suma reiterada de sumandos iguales, para así facilitar la utilización de razonamientos que conlleven a identificar la razón constante (constante de proporcionalidad).

También es necesario en el aula de clase diferentes estrategias que permitan a los estudiantes identificar el rol del número en diferentes situaciones y por ende comprendan cuales son las unidades que lo acompañan para dar sentido a los procesos que se utilizan para dar tratamiento a las situaciones problema.

## 7. Recomendaciones

Por la situación mundial del Covid-19 la implementación del trabajo de campo fue realizado de forma virtual, por lo cual no fue muy inclusivo, ya que solo participaron estudiantes que contaban con acceso a internet, por eso se sugiere implementar en un grupo más numeroso y de manera presencial para fomentar la reflexión y el análisis de los procedimientos utilizados para identificar la razón constante (constante de proporcionalidad).

Es importante fortalecer el desarrollo del pensamiento proporcional y por ende la utilización de procedimientos adecuados para dar tratamiento a situaciones que involucran la proporcionalidad, particularmente en la proporcionalidad directa se sugiere una investigación que centre la atención en los procedimientos basados en razonamientos analíticos.

Indagar sobre las estrategias que los docentes utilizan para enseñar la proporcionalidad y su aplicación en contextos tanto propios de las matemáticas como de otras ciencias.

Se puede pensar también en la posibilidad de analizar los procesos de construcción de la linealidad a partir de las funciones de la razón (relator-operador, transformador-correlator) o de otras estrategias que permitan a los estudiantes construir los objetos matemáticos de la razón, la proporción y la proporcionalidad.

## Referencias

- Ben-Chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). El razonamiento proporcional en alumnos de 7º grado con diferentes experiencias curriculares. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 247-273. <https://bit.ly/3ptX5TF>
- Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B.-S. (2012). *Ratio and Proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Creswell, J. (2012). *Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Pearson
- Fernández, C., Llinares, S., Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Proportional reasoning: How task variables influence the development of students' strategies from primary to secondary school. *Mathematics*, 10, 1-18. <https://bit.ly/3vA0W2F>
- Fernández, C. & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 30(1), 129-142.
- Fiol, M., & Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número*. Editorial síntesis S.A.
- Howe, C., Nunes, T & Bryant, P. (2010). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and sciences. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 391-417.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1, 629–667.
- Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Madden, J. (2018). Knowing Ratio and proportion for Teaching. En Y. Li, W, Lewis & J. Madden (Eds.), *Mathematics Matters in Education* (pp. 93 – 115).
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)

- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*.  
<http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje • V.2.:*  
<http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/node/93226>
- Obando, G., & Munera, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 183 – 200.  
<https://core.ac.uk/download/pdf/160126492.pdf>
- Obando, G., Vanegas, M., & Vásquez, N. (2006). Módulo 1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. *Serie Didáctica de las Matemáticas*. Editorial Artes y Letras Ltda.
- Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 977-986.  
<http://funes.uniandes.edu.co/4193/1/ObandoRazonALME2013.pdf>
- Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica* [tesis de doctorado, Universidad del Valle]. Biblioteca Digital Universidad de Antioquia Colombia.
- Park, J. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive development*, 16, 763 – 773. <https://bit.ly/3GfVHda>
- Posada, F., Obando, G. (2006). Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Secretaria de Educación Para La Cultura de Antioquia. *Serie Didáctica de las Matemáticas*. Editorial Artes y Letras Ltda.
- Rodríguez, J. (2005). Características de la Investigación Acción Educativa: orígenes, corrientes y características. En J. Rodríguez (Ed.). *La Investigación Acción Educativa: ¿Qué es? ¿Cómo se hace?* Ali arte gráfico publicaciones srl .
- Sánchez, E. (2011). *Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: Una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos matemáticos* [tesis de maestría, Universidad del Cauca]. Biblioteca Digital Universidad del Cauca Colombia
- Torres, M. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional* [tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Medellín]. Biblioteca Digital Universidad de Antioquia Colombia

Vergnaud, Gérard. (1988). Multiplicative structures. *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp. 141–161).

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas. <https://bit.ly/3Bb6Acy>

Vergnaud, G. (1994). *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany: State University of New York.

Vergnaud, G. (1997). *The Nature of Mathematical Concepts*. Psychology Press Ltda., Publishers.

## Anexos

### Anexo 1. Tarea 1 - Servicios Públicos

#### Primer momento

Los estudiantes deben buscar la cuenta de servicios públicos más reciente de sus respectivos hogares y utilizando los datos:

Observa los datos históricos de los 6 últimos meses y comparando cada mes con el anterior responde:

- a. ¿En qué mes aumentó más el costo del servicio de energía eléctrica?
- b. ¿En qué mes el costo del servicio de acueducto disminuyó más?
- c. ¿Cuáles meses tuvieron un consumo constante en los servicios de energía eléctrica y acueducto? y ¿Cuál fue el consumo y el costo de este en cada servicio?
- d. Elabora una tabla con los valores de consumo establecidos en los últimos 6 meses y el costo por mes en los servicios de energía eléctrica y acueducto. (No tener en cuenta los subsidios que la empresa otorga).

#### Ejemplo:

<b>Servicio de Energía</b>		
Mes	Consumo (Kwh)	Costo (\$)
1		
2		
3		
-		
-		
6		

- e. Teniendo en cuenta los datos registrados en las tablas realiza una gráfica de líneas para cada uno de los servicios de energía eléctrica y acueducto.

## Segundo Momento

El consumo de energía en nuestros hogares está determinado por la utilización de los diferentes electrodomésticos donde cada uno posee una potencia eléctrica asociada y cuyas unidades son conocidas como Watts(W) o Vatios. Para analizar y comprender nuestra factura es necesario tener en cuenta que:

$$\text{Energía Eléctrica} = \text{Potencia Eléctrica (W)} \times \text{tiempo de uso en horas (h)},$$

es decir,

$$\text{Energía Eléctrica (Watts por hora)} = Wh$$

Las unidades obtenidas son Wh por lo que se debe dividir entre 1000 para obtener Kwh unidad que indica el recibo de energía (1000 Wh = 1 Kwh).

Completa la siguiente tabla:

Electrodoméstico	Potencia eléctrica (Watts)	Horas (día)	Energía Wh (día)	Energía Kwh (día)	Energía Kwh (30 días)
2 bombillas de 60W	60	1	120	0.12	
5 bombillas de 75W	75	4		1.5	
Nevera	290	9			78.3
Estufa 4 puestos	1800	2			
Equipo de sonido	200	1		0.2	
Televisor de 21"	140	5			21

Teniendo en cuenta los valores registrados en la tabla y los costos establecidos en la cuenta de servicios públicos responde:

- ¿Cuál sería el valor a pagar cada mes por la suma total de los consumos de los electrodomésticos registrados en la tabla?
- Si en casa se tienen 8 bombillas de 75W cada una y se utilizan 2 por 3 horas diarias ¿Cuál es el valor a pagar mensualmente solo por el consumo de las bombillas?
- Completa la tabla utilizando el valor indicado en la factura de servicios públicos determina el costo de cada una de las actividades diarias planteadas:

---

<b>Actividad diaria</b>	<b>Litros de agua</b>	<b>Costo (\$)</b>
Ducha (8 minutos)	76	
Lavado de platos (3 veces)	40	
Lavado (Dientes, manos)	34	
Sanitario (5 usos)	50	
<b>Total</b>		

---

- d. Construye una gráfica de líneas utilizando los valores registrados en la tabla
- e. Teniendo en cuenta que el consumo registrado en la tabla anterior es por persona en un día, relaciona este consumo con la cantidad de personas que viven en tu hogar y determina ¿Cuál es el consumo total y el valor a pagar por el servicio de acueducto en tu hogar en un mes? Describe los procedimientos utilizados

### **Anexo 2. Tarea 2 – Precio por unidad**

En la institución educativa se desarrolla la feria de emprendimiento donde los estudiantes comercializan productos comestibles. Uno de los grupos pretende vender empanadas y para tal fin les falta comprar aceite, papas, tomate y cebolla. Para comenzar van al supermercado buscando economía en los precios.

Necesitan 4000 cm<sup>3</sup> de aceite, al llegar al supermercado se encuentran con tres marcas (A, B y C) y varios tamaños como lo muestra la siguiente tabla:

Tamaños/Precios	Aceite A	Aceite B	Aceite C
500 cm <sup>3</sup>	\$ 2.950	\$ 5.340	\$ 3.450
1000 cm <sup>3</sup>	\$ 6.000	\$ 10.250	\$ 7.300
3000 cm <sup>3</sup>	\$ 17.900	\$ 28.100	\$ 21.700
5000 cm <sup>3</sup>	\$ 29.700	\$ 50.200	\$ 36.300

A partir de los datos en la tabla responder:

- ¿Cómo se puede establecer cuál es el aceite más económico? Argumenta tu respuesta.
- ¿Cuál es el costo de 1cm<sup>3</sup> en cada una de las marcas?
- Identifica la relación que se establece entre tamaño y precio en cada una de las marcas de aceite ¿Es la misma en todas las marcas? Argumenta la respuesta.
- Si existiera un tamaño de 4000cm<sup>3</sup> en cada una de las marcas ¿Cuál sería el costo respectivo?
- Si necesitan exactamente 4000cm<sup>3</sup> ¿Cuáles son los tamaños de aceite que debe comprar para economizar dinero?
- Elabora una gráfica de líneas teniendo en cuenta los tamaños y el precio en cada una de las marcas de aceite.

### Anexo 3. Tarea 3 - El Reciclaje

Los estudiantes del grado 7° se encuentran desarrollando un proyecto de reciclaje para lo cual han ubicado en su aula de clase una caja que tiene la capacidad de contener 180 botellas de 250 ml. Cada semana se alcanza la capacidad total de la caja, al final del mes se vende el reciclaje y el dinero será utilizado para la despedida de año escolar.

---

Cantidad de botellas	Valor de venta
180	
1400	\$70000
2160	
3800	
	\$288000

---

- a. Completa la tabla y elabora una gráfica de líneas cantidad de botellas y el valor de venta

Teniendo en cuenta los valores de la tabla y la gráfica responde:

- b. Describa el mejor método para calcular el costo por botella.
- c. Si reciben 45000\$ por la venta ¿Cuántas botellas vendieron?
- d. En el transcurso de 8 meses y alcanzando la capacidad total de la caja cada mes ¿Cuánto dinero lograrán obtener?
- e. Si solo alcanzan la capacidad cada mes y medio ¿Cuánto dinero alcanzarán a recoger en 6 meses?
- f. Si el pago por botella es de \$80 ¿Cuánto dinero obtendrá por mes?

#### Anexo 4. Consentimiento informado de la Institución Educativa



Medellín, 4 de septiembre de 2019

Señora

Claudia María Gómez Hoyos

Rectora

**Autorización la Institución Educativa Fe y Alegría la Cima para el desarrollo de la investigación de Maestría titulada “Procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa”**

En el marco de una educación de calidad, todos los actores educativos deben estar encaminados a fortalecer las habilidades de los estudiantes en pro de su desarrollo integral, aportando a la construcción de una mejor sociedad y en el ámbito de la Educación Matemática la presente investigación es propicia para favorecer los razonamientos y por ende de los procedimientos analíticos utilizados por los estudiantes del grado séptimo. Por tal motivo, siguiendo el interés primordial de mejorar los procesos formativos de los estudiantes; me encuentro realizando una investigación que busca establecer las características de los procedimientos utilizados por los estudiantes para identificar la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa.

Así, solicito me permita llevar a cabo dentro de la Institución Educativa en el grado séptimo, la implementación que permitirá fortalecer los procedimientos que los estudiantes utilizan en el aprendizaje de la constante de proporcionalidad. Dicha aplicación se realizará durante las clases de matemáticas, a partir de tareas que estarán integradas al plan de estudio del tercer periodo.

Cabe aclarar que esta investigación se regirá por principios éticos como el respeto por la libre participación de los estudiantes seleccionados, la confidencialidad de sus procesos, salvaguardando la protección integral, manteniendo una relación cordial de reciprocidad tanto con el grupo de estudiantes como con la institución y sus familias. También se le brindará al colegio

un detallado informe de los resultados, teniendo en cuenta los aportes y límites de la investigación, dentro de la confidencialidad respectiva evitando cualquier tipo de subjetividad sobre alguno de los participantes.

Agradezco su colaboración y quedo atenta a cualquier información sobre la investigación que desee ampliar.

---

Tatiana Paola Rúa García  
CC. 42693010 de Copacabana  
Docente de Matemáticas

**Anexo 5. Respuesta del consentimiento informado de la Institución Educativa****I. E Fe y Alegría La Cima**

RES N°16193 DEL 27 DE NOVIEMBRE DE 2002, RES. 325 DE ENERO 22 DE 2016, RES. 3314 DE 2005  
ES. 10744 DE 30 DE OCTUBRE DE 2013, RES. 8753 DEL 08 DE NOVIEMBRE DE 2001, RES. 201850018639 DE 2018,  
RES. 8753 DE 2001, RES. 201850050021 DE 2018  
NIT: 811.O19.074-0



CODIGO DANE: 1050001010588 Principal 105001000078 San José 105001005860 Escuela N°3

Medellín, septiembre 06 de 2019

Señores  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Ciudad

Asunto: AUTORIZACIÓN DESARROLLO INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

Cordial saludo,

CLAUDIA MARÍA GÓMEZ HOYOS, en mi calidad de rectora de la I.E. Fe y Alegría la Cima de Medellín, por medio de la presente informo que la **docente TATIANA PAOLA RUA GARCIA**, cuenta con la autorización para realizar la investigación de la maestría titulada “PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO PARA IDENTIFICAR LA RAZÓN CONSTANTE EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA” que como ella lo indica, está encaminada a fortalecer las habilidades de los estudiantes del grado 7° y que se llevará a cabo durante las clases de matemáticas, rigiéndose por principio éticos, de confidencialidad, y reciprocidad. De la cual brindará un informe detallado a la I.E.

Cordialmente,

---

**CLAUDIA MARÍA GÓMEZ HOYOS**  
Rectora

**Anexo 6. Consentimiento informado para padres, madres y/o acudientes****INSTITUCIÓN EDUCATIVA FE Y ALEGRIA LA CIMA  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA – FACULTAD DE EDUCACIÓN****Permiso de padres, madres y/o acudientes para la participación de su hijo o hija en la investigación: “Procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa”**

Es probable que el presente formulario de consentimiento contenga palabras o conceptos que usted no entienda. Por favor, pídale al investigador que le explique todas las palabras, conceptos o información que no comprenda con claridad. Igualmente, puede realizar todas las preguntas que considere sean necesarias para tomar la decisión, tómese el tiempo necesario para pensar y, si es del caso, consulte a familiares, amigos o personas allegadas que le ayuden a comprender mejor las razones para aceptar la inclusión de su hijo(a) en la investigación.

**Identificación del investigador.** Tatiana Paola Rúa García (principal) Correo electrónico: [paola.rua@ude.edu.co](mailto:paola.rua@ude.edu.co).

**Lugar de trabajo.** Institución Educativa Fe y Alegría la Cima, carrera 36c #86BB - 15, Manrique

San Blas, Medellín – Antioquia. Teléfono: (57+4) 263 31 19.

**Sitio donde se llevará a cabo el estudio.**

El estudio se desarrollará en la Institución Educativa Fe y Alegría la Cima en las clases de matemáticas del grado séptimo.

**Entidad que respalda la investigación.**

La investigación es ejecutada en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia, con el aval del grupo de Investigación MATHEMA-FIEM.

**Información para el participante.**

Por este medio deseo solicitar permiso para que su hijo(a), que en adelante llamaré el estudiante, haga parte de la investigación que adelantó en la Maestría en Educación de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, titulada “Procedimientos utilizados por estudiantes del grado séptimo para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa”. Esta investigación forma parte de los requisitos de grado del programa.

En el marco de una educación de calidad, todos los actores educativos deben estar encaminados a fortalecer las habilidades de los estudiantes en pro de su desarrollo integral, aportando a la construcción de una mejor sociedad y en el ámbito de la Educación Matemática la presente investigación es propicia para favorecer los razonamientos y por ende de los procedimientos analíticos utilizados por los estudiantes del grado séptimo. Por tal motivo, siguiendo el interés primordial de mejorar los procesos formativos de los estudiantes; me encuentro realizando una investigación que busca establecer las características de los procedimientos analíticos utilizados por los estudiantes en el aprendizaje de la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa.

No se divulgará información personal sobre el estudiante a ninguna persona fuera del proceso de investigación. El nombre del estudiante será reemplazado por un seudónimo. El personal de investigación mantendrá la información confidencial y no se revelará ningún detalle que permita la identificación personal del estudiante (fotos, nombres, imágenes, etc.) en cualquier material o documento que se haga público. Por ejemplo, cuando los resultados de la investigación se publiquen o se discutan en conferencias, no se incluirá información que pueda revelar la identidad del estudiante de ninguna manera. Cualquier transcripción de trabajos, audio o video serán tomados con absoluta confidencialidad.

#### **Identificación de los riesgos o molestias y plan para minimizarlos.**

La participación en el proyecto no implica ningún riesgo que ponga en peligro la integridad física o psíquica del estudiante. Tampoco se hará ningún tipo de tratamiento, experimentación o manipulación de con sustancias que pongan el riesgo del estudiante, ni se realizarán actividades que impliquen riesgos para la integridad personal del estudiante.

Entre los riesgos potenciales del proyecto por la participación del estudiante se considera lo relacionado *con el tratamiento de la información personal*, pues se hace necesario el cumplimiento de normas relacionadas con la protección de la identidad (personal e institucional), salvaguardar el buen nombre, y el buen uso de los datos y la información utilizada en el proceso.

Para minimizar dicho riesgo, se respeta la identidad e integridad personal contenida en videos y fotografías según lo establecido en la normativa colombiana (p. ej. decreto 1377 de 2013). De igual forma, no se publicará contenido ofensivo y se evitará la identificación directa de la identidad personal.

### **Beneficios para el participante.**

El estudiante, al participar del estudio tendrá como principal beneficio establecer las características de los procedimientos analíticos utilizados en el aprendizaje de la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa por medio de tareas que le permitirá identificar las características de representación e interpretar las formas de mediación de las representaciones de la razón constante (constante de proporcionalidad). Además, disfrutará de la oportunidad de experimentar, reflexionar y comprender los procedimientos analíticos involucrados en este tipo de situaciones.

### **Procedimientos del estudio.**

En consonancia con los planteamientos de lo que entendemos por Actividad Matemática, se observan y caracterizan las acciones propias del estudiante, en la clase de matemáticas. En ese sentido, les solicitamos su colaboración y respaldo en este ejercicio autorizando que su actividad sea registrada a través de los medios que se presentan a continuación, con el fin de que posteriormente sea analizada en función de los objetivos del proyecto:

1.  SI  NO Audios y Videos que registran cada una de las sesiones de clase de matemáticas
2.  SI  NO Informe de las acciones realizadas y los contenidos dispuestos en el desarrollo de las clases de matemáticas
3.  SI  NO Diálogos, documentos y demás recursos que se utilicen en las clases de matemáticas.
4.  SI  NO Audios y video grabaciones de entrevistas.
5.  SI  NO Fotografías.

### **Participación en el proyecto.**

En la investigación participarán 35 estudiantes, todos de grado séptimo de la Institución Educativa Fe y Alegría la Cima y residentes en Manrique San Blas. El estudiante debe cumplir con las actividades previstas en la malla curricular, y la participación en la investigación no tendrá

efectos sobre la calificación (notas) de sus desempeños en la asignatura, ni tampoco ofrece riesgos para su salud, su integridad física o mental.

La participación del estudiante en la investigación será valorada y reconocida bajo la óptica del reconocimiento personal, el valor del trabajo socialmente útil y la participación en actividades colectivas de reconocimiento social. Adicionalmente, sobre la participación en el proyecto informamos que:

1. La participación en el proyecto es voluntaria.
2. El estudiante se puede retirar de la investigación en cualquier momento por medio de notificación verbal, sin que eso represente un perjuicio para él.
3. El estudiante no tendrá incentivos económicos o algún cobro por su participación en el proyecto.

#### **Uso de las producciones del estudiante.**

Se preservará la identidad del estudiante en el estudio a través de seudónimos y no se realizará ningún tipo de divulgación de la información recolectada que ponga en evidencia su identidad personal.

La información producida será salvaguardada en medios físicos y electrónicos, y en este proceso, se cumplirá la norma colombiana al respecto (decreto 1377 de 2013). Dichas producciones serán usadas solo con fines académicos e investigativos evitando sesgos y juicios de valor que afecten a los participantes. La información recolectada será archivada en formato digital en los computadores del equipo de investigación del presente proyecto o del grupo de investigación MATHEMA-FIEM, y será utilizada para los fines propuestos en esta investigación. Tampoco será vendida o cedida a terceras personas o entidades.

La información recolectada podrá ser utilizada en otras investigaciones en las que participe el equipo de investigación del presente proyecto, u otros miembros del grupo de investigación MATHEMA-FIEM. La información será tratada de la misma forma como se utilizará en el presente proyecto, teniendo en cuenta la normativa vigente, y siempre garantizando la protección del estudiante.

#### **Obligaciones del investigador.**

La investigadora orientará pedagógicamente la asignatura de matemáticas a partir de los planteamientos descritos en los planes de área y mallas curriculares complementandolo con tareas que permitan la identificación las características de representación e interpretación las formas de

mediación de las representaciones de la razón constante (constante de proporcionalidad) utilizadas por los estudiantes en situaciones de proporcionalidad directa., lo cual brinda todas las garantías posibles para el normal desarrollo y cumplimiento de los contenidos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para este grado de escolaridad.

La información recolectada sólo se utilizará para fines académicos. En caso de requerir usar alguna imagen o transcripción para algún informe de investigación se hará salvaguardando la identidad del estudiante. De igual forma, la investigadora se compromete a informar oportunamente cualquier hallazgo que pueda significar problemas o beneficios en la formación del estudiante.

#### **Devolución de la información en la investigación.**

El desarrollo de este proceso investigativo se difundirá principalmente por medio del trabajo de grado de la Maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, de igual forma se espera que de esta experiencia surja al menos una participación en un evento académico y/o un artículo de difusión con fines académicos. Además de esto, el equipo de investigación contempla procesos de difusión e interacción con la comunidad nacional en donde se discutan de manera continua el desarrollo del proyecto. También se realizará una puesta en común de los resultados con los directivos de la institución, los estudiantes y padres de familia, con el fin de mencionar aspectos que deben ser tomados en cuenta para la formación de los estudiantes.

#### **Personas de contacto para información.**

Tatiana Paola Rúa García (Principal). Institución Educativa Fe y Alegría la Cima, carrera 36c #86BB - 15, Manrique San Blas, Medellín – Antioquia. Teléfono: (57+4) 263 31 19. Correo electrónico: paola.rua@udea.edu.co

#### **Aceptación de la participación.**

Manifiesto que no he recibido presiones verbales, escritas y/o mímicas para permitir la participación de mi hijo(a)\_\_\_\_\_ del grado 7°\_\_\_ en el estudio; que dicha decisión la tomé en pleno uso de mis facultades mentales, sin encontrarme bajo efectos de medicamentos, drogas o bebidas alcohólicas, consciente y libremente.

He leído y escuchado satisfactoriamente las explicaciones sobre la participación de mi hijo(a) en esta investigación. Manifiesto entender que mi hijo(a) puede elegir el no participar en la investigación incluso después de que haya concedido este permiso. Así mismo, he tenido la oportunidad de hacer preguntas con respecto a la investigación, las cuales se me han respondido

satisfactoriamente, por lo que estoy de acuerdo en que mi hijo(a) participe en ella y autorizo el uso de la información obtenida para los propósitos planteados en el apartado introductorio del presente consentimiento.

\_\_\_\_\_  
Nombre del padre o acudiente

\_\_\_\_\_  
Firma del padre o acudiente

C.C: \_\_\_\_\_

Teléfono de contacto: \_\_\_\_\_

Correo electrónico: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

## Anexo 7. Consentimiento informado para estudiantes



### INSTITUCIÓN EDUCATIVA FE Y ALEGRIA LA CIMA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA – FACULTAD DE EDUCACIÓN

#### **Permiso de estudiantes para la *participación* en la investigación de Maestría titulada “Procedimientos utilizados por estudiantes de séptimo grado para identificar la razón constante en situaciones de proporcionalidad directa”**

Por este medio deseo invitarte para que hagas parte de esta investigación la cual es requisito de grado en la Maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, la cual estoy cursando en el momento. La investigación se titula: “Procedimientos analíticos de los estudiantes en el aprendizaje de la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa”

En el marco de una educación de calidad, todos los actores educativos deben estar encaminados a fortalecer las habilidades de los estudiantes en pro de su desarrollo integral, aportando a la construcción de una mejor sociedad y en el ámbito de la Educación Matemática la presente investigación es propicia para favorecer los razonamientos y por ende de los procedimientos analíticos utilizados por los estudiantes del grado séptimo. Por tal motivo, siguiendo el interés primordial de mejorar los procesos formativos de los estudiantes; me encuentro realizando una investigación que busca establecer las características de los procedimientos analíticos utilizados por los estudiantes en el aprendizaje de la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa.

#### **¿Por qué se realiza esta investigación?**

Esta investigación se realiza en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia y entre sus objetivos se pretende establecer las características de los procedimientos analíticos utilizados por los estudiantes en el aprendizaje de la constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad directa, en los que tú, por medio de las tareas propuestas puedas

identificar y utilizar los procedimientos analíticos que te permitan determinar la razón constante (constante de proporcionalidad).

Las tareas propuestas están pensadas en la necesidad de retomar tu papel como protagonista del aprendizaje, despertando motivación e interés en relación con los razonamientos y los procedimientos que se utilizan para el aprendizaje la constante de proporcionalidad. Por lo tanto, es la oportunidad de experimentar, reflexionar y comprender las características de los procedimientos analíticos en situaciones de proporcionalidad directa.

### **¿Existen probables riesgos y/o incomodidades para ti?**

Los riesgos para ti en esta investigación son bajos. En la clase de matemáticas se procurará que proporciones tus pensamientos en torno al trabajo que realizas. Te realizaré entrevistas enfocadas en tus percepciones y sentires, te tomaré fotos y realizaré grabaciones de audio y video. Si no deseas participar en alguna de las actividades que se propongan estarás en libertad de hacerlo. Si te sientes incómodo con alguna pregunta durante la entrevista de grupo, no tienes que contestar.

Igualmente, no tienes que preocuparte de decir algo “equivocado”. Además, el proceso del grupo será administrado por la investigadora que se entrena para ayudarte y ayudar a los compañeros a escuchar de manera respetuosa cada una de las opiniones. La investigadora escuchará con cuidado y se cerciorará de que te sientas cómodo. Se te invitará también a que hables con el entrevistador en privado si no deseas discutir las experiencias delante de otros estudiantes.

### **¿Qué pasará con tu privacidad?**

No se divulgará ninguna información tuya a cualquier persona fuera del proceso de la investigación. Tu nombre será reemplazado por seudónimo. La investigadora mantendrá la información confidencial y no se revelará en ningún material o documento. Por ejemplo, cuando los resultados de la investigación se publiquen o se discutan en conferencias, no hay información incluida que pueda revelar tu identidad de ninguna forma. Cualquier transcripción de trabajos, audio o video serán tomados con absoluta confidencialidad.

### **¿Puedes retirarte del estudio?**

Puedes elegir estar en esta investigación o no. Puedes retirarte en cualquier momento sin consecuencia alguna. Puedes también rechazar contestar cualquier pregunta que no desees contestar y todavía permanecer en la investigación. El retiro de la investigación será dejado en evidencia en un acta, y no afectará tu proceso académico en el área de matemáticas.

### **¿A quién pregunto si tengo alguna duda?**

Si tienes preguntas que no sean tratadas por esta forma del consentimiento, te puedes comunicar con la Investigadora principal **Tatiana Paola Rúa García**, Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia. Avalada por el grupo de investigación MATHEMA-FIEM; a través del correo electrónico: [paola.rua@udea.edu.co](mailto:paola.rua@udea.edu.co) La Investigadora estará disponible para discutir cualquier pregunta que desees plantear.

**¿Deseas participar de la investigación?**

Si deseas participar en la investigación de manera voluntaria y aceptas lo mencionado antes, firma y escribe en letra legible tu nombre en la línea que aparece abajo.

**Firma del estudiante.** Acuerdo querer participar en esta investigación. Manifiesto entender que puedo elegir el no participar en ella, incluso después de que haya concedido este permiso, y que se me han aclarado las dudas que he manifestado al respecto de la investigación y mi participación en ella.

\_\_\_\_\_  
Nombre del estudiante

\_\_\_\_\_  
Firma del estudiante

D.I.: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_