



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Facultad de Educación

**La objetivación de la multiplicación como producto de medida en estudiantes
de los grados segundo y tercero de primaria**

**David Espinosa Zapata
Natalia Medellín Jiménez
Alejandra María Quintero Cañas**

Asesora:

Magister Monly Catherine Torres Jaramillo

**Trabajo de investigación para optar al título de licenciado en educación básica
con énfasis en matemáticas**

**Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Medellín
2015**



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

**La objetivación de la multiplicación como producto de medida en estudiantes de los grados
segundo y tercero de primaria**

David Espinosa Zapata

Natalia Medellín Jiménez

Alejandra María Quintero Cañas

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

Universidad de Antioquia

Medellín

**1 8 0 3
2015**



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

AGRADECIMIENTOS

“Léame a ver cómo quedó y me corrige”

David Espinosa Zapata

“¿Es artefacto a instrumento o instrumento a artefacto?”

Natalia Medellín Jiménez,

“Yo se los compartí por Drive”

Alejandra María Quintero Cañas.

“¡ay no me asusten! ¿Ya que paso?”

Monly Catherine Torres Jaramillo.

En primero lugar agradecemos a nuestras familias por su comprensión, paciencia y apoyo en este tiempo de crecimiento académico y personal.

También agradecemos a nuestros maestros y compañeros de la Universidad, quienes nos aportaron de manera ética y académica todos aquellos saberes que nos hicieron crecer profesionalmente, en especial a nuestra asesora Monly Catherine Torres Jaramillo por su acompañamiento, consejos, dedicación, paciencia, historias y ayuda en la elaboración de la presente investigación, la cual sin ella no hubiese sido posible.

Agradecemos a la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac por abrimos sus puertas y permitirnos desarrollar este proceso en compañía de los padres de familia, docentes por su apoyo incondicional y, principalmente, sus estudiantes por su atención y entusiasmo en el tiempo en que se llevó a cabo la investigación.

Finalmente, de manera individual, a cada uno de nosotros como equipo de trabajo por la dedicación, constante participación, los momentos de debate académico y enriquecimiento en el proceso de construcción de este trabajo investigativo.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



RESUMEN

En el presente trabajo investigativo, se pretende dar a conocer lo realizado en la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac de la ciudad de Medellín, en la cual se busca analizar el cómo objetivan las estudiantes del grado segundo y tercero de primaria la multiplicación como producto de medida. Para ello, se presenta la caracterización de la Institución Educativa, un recorrido histórico sobre la multiplicación en diferentes civilizaciones y un estado del arte respecto a las diferentes miradas de la multiplicación. Posteriormente, se da a conocer el marco teórico, el cual está estructurado de manera secuencial, partiendo de la teoría de la actividad, intermediando con la teoría de la objetivación y con la multiplicación como producto de medida, vista desde una perspectiva matemática y una perspectiva didáctica, para terminar con la metodología utilizada en la presente investigación, los análisis a partir de dos categorías emergentes: Perspectiva estocástica, el plano dimensional como consecuente del plano numérico, y Perspectiva geométrica y métrica, el área como una dimensión-producto; y las respectivas conclusiones.

Palabras clave:

Actividad; Objetivación; Subjetivación; Objeto/Motivo; Multiplicación; Producto de medida; Estudiantes.



CONTENIDO

| | |
|--|-----|
| Introducción..... | 8 |
| Justificación..... | 10 |
| Rastreo histórico..... | 15 |
| Estado del arte..... | 20 |
| Planteamiento del problema..... | 27 |
| Marco teórico..... | 31 |
| Teoría de la Actividad..... | 31 |
| Teoría de la Objetivación..... | 39 |
| Producto de Medida..... | 44 |
| Metodología..... | 52 |
| Fases de la Actividad en el salón de clase..... | 53 |
| Implementación del diseño metodológico..... | 54 |
| Descripción de las actividades..... | 55 |
| Análisis..... | 59 |
| Episodios..... | 60 |
| Categorías Emergentes..... | 91 |
| Primera categoría: <i>Perspectiva estocástica: El plano dimensional como consecuente del plano numérico.</i> | 91 |
| Segunda categoría: <i>Perspectiva geométrica y métrica: el área como dimensión-producto.</i> .. | 102 |
| Conclusiones..... | 112 |
| Referencias bibliográficas..... | 118 |
| Anexos..... | 121 |

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



LISTA DE ILUSTRACIONES

| | |
|---|-----|
| Ilustración 1: <i>Simbolos del sistema de numeracion egipcio.</i> | 16 |
| Ilustración 2: <i>Simbolos del sistema de numeracion egipcio.</i> | 16 |
| Ilustración 3: <i>Definición de multiplicación.</i> | 27 |
| Ilustración 4: <i>Relacion entre multiplicación y combinatoria.</i> | 28 |
| Ilustración 5: <i>Estudiante señalando las prendas del uniforme</i> | 62 |
| Ilustración 6: <i>Dibujo estudiante de las faldas, las blusas y pares de zapatos</i> | 64 |
| Ilustración 7: <i>Estudiante contando la cantidad de colores de los marcadores.</i> | 66 |
| Ilustración 8: <i>Estudiantes contando los colores que eligieron para las bombas.</i> | 67 |
| Ilustración 9: <i>Dibujo realizado pro las estudiantes del diseño para la decoracion de la fiesta</i> ... | 69 |
| Ilustración 10: <i>Estudiante indicando uno de los lados del arco de bombas.</i> | 69 |
| Ilustración 11: <i>Estudiantes pensando</i> | 70 |
| Ilustración 12: <i>Estudiante explicándole a una de sus compañeras por medio de un dibujo.</i> | 71 |
| Ilustración 13: <i>Estudiante realizando un conteo por medio de sus manos.</i> | 72 |
| Ilustración 14: <i>Estudiante representado la unión con las manos.</i> | 72 |
| Ilustración 15: <i>Pregunta ficha de trabajo</i> | 75 |
| Ilustración 16: <i>Estudiante indicando el ancho de la figura geométrica.</i> | 75 |
| Ilustración 17: <i>Estudiantes indicando el largo y el ancho de la figura geométrica.</i> | 76 |
| Ilustración 18: <i>Estudiante realizando una multiplicación.</i> | 86 |
| Ilustración 19: <i>Respuesta estudiante: “Veintisiete x 30 = 810 baldosas cuadradas”</i> | 88 |
| Ilustración 20: <i>Solución de una de las estudiantes, donde no se tiene en cuenta el plano dimensional</i> | 92 |
| Ilustración 21: <i>Solución de una de las estudiantes.</i> | 93 |
| Ilustración 22: <i>Estudiante pensando</i> | 94 |
| Ilustración 23: <i>Estudiantes haciendo uso de las prendas para realizar las combinaciones.</i> | 95 |
| Ilustración 24: <i>Representacion de las posibles combinaciones.</i> | 97 |
| Ilustración 25: <i>Diseño de la decoracion de la fiesta</i> | 98 |
| Ilustración 26: <i>Representación gráfica de la dimensión-producto.</i> | 108 |
| Ilustración 27: <i>Respuesta de las estudiantes. (Ficha de trabajo)</i> | 110 |

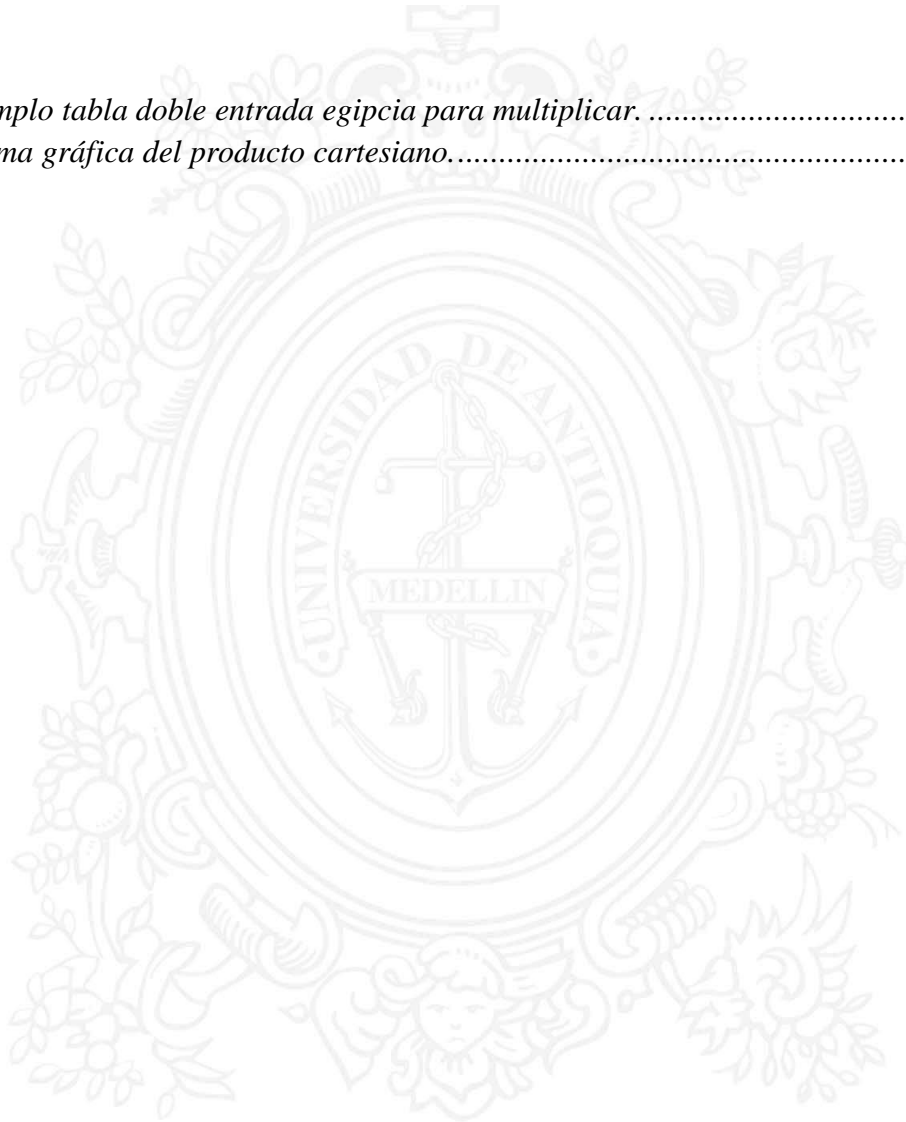


UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Facultad de Educación

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1: <i>Ejemplo tabla doble entrada egipcia para multiplicar.</i> | 17 |
| Tabla 2: <i>Forma gráfica del producto cartesiano.</i> | 50 |



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Introducción

En el ámbito de la investigación en educación matemática, la consideración respecto a las definiciones formales y didácticas de los objetos matemáticos, tienen que tener una relación convergente, de tal manera que en el desarrollo de las prácticas académicas y cotidianas, se muestre de manifiesto el uso de tales objetos, con el fin de ayudar a la solución de tareas y el alcance de necesidades que tienen los diferentes sujetos que hacen parte del acto educativo.

Siendo así, la definición de la multiplicación no puede estar sujeta a una sola forma de verse, puesto que hay diversas maneras de usarla y todas con características muy particulares. En este sentido, el uso de tal objeto matemático puede usarse en diferentes contextos, de tal manera que puede visualizarse transformaciones que a simple vista no son observables tan tangiblemente.

De lo anterior, la presente investigación se centra en la multiplicación como producto de medida, en la cual convergen distintas temáticas curriculares, dejando de lado la definición de una multiplicación como una suma de sumandos iguales y centrándose en una multiplicación vista como un producto cartesiano en la cual ocurren transformaciones de carácter numérico y dimensional, el cual se posibilita si se lleva a cabo a partir de la manipulación de objetos concretos y del uso de unidades de medida, de tipo convencional y no convencional.

No obstante, en el ámbito de la educación matemática y su investigación, se parte de la posibilidad de que los sujetos inmersos en el contexto educativo, encuentren actividades de la cotidianidad, en la cuál el uso de un objeto matemático es primordial para alcanzar sus necesidades, expresando así sus discursos, sus maneras de hacer y de pensar y las formas en las

cuales la matemática no se entiende como un curso más del currículo, sino como una herramienta que ayuda a la solución de problemas académicos, sociales y personales.

Por último, se debe rescatar el papel del docente y del estudiante durante la actividad de enseñanza y aprendizaje, puesto que a partir del desarrollo de las actividades, el docente debe estar pendiente de que tipo de tareas diseña y ejecuta con el fin de alcanzar las necesidades de los estudiantes, estableciendo como un punto en común el carácter científico de los objetos matemáticos y el carácter aplicativo de los mismos en los espacios de discusión académica y social.

Justificación

Para dar inicio al trabajo de investigación se partió de las observaciones realizadas en la práctica pedagógica, práctica que fue llevada a cabo en la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac. Es por ello que, en esta primera parte del trabajo se realiza una descripción de la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac, con el fin de dar contexto social, político, administrativo y estructural; acto seguido se da un recorrido histórico de la multiplicación con el objetivo de mostrar las diferentes concepciones que se han tenido sobre esta, dependiendo de la cultura que la utiliza; y por último se da a conocer un estado del arte sobre la multiplicación, en el cual intervienen distintos autores como Vergnaud (1991), Greer (1992), Maza (1991), Torres (2013), entre otros.

Caracterización de la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac

La Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac, se encuentra ubicada en el barrio Pedregal al noroccidente de Medellín, es una institución de naturaleza oficial y de carácter femenino que ofrece tres niveles de educación: preescolar, básica primaria y media académica, y desde el año 2013 ofrece una media técnica industrial.

La Institución cuenta con 30 aulas de clase, dos salas de informática, una biblioteca, un laboratorio de química y amplias zonas verdes dotadas para 1.200 estudiantes, los cuales están divididos en dos jornadas académicas: en la mañana bachillerato y media académica, y en la tarde preescolar y primaria.

Fue fundada y es dirigida por la orden de la compañía de María desde el año 1966, iluminada por los ideales y valores del evangelio, y el respeto a los derechos humanos, según la pedagogía humanizadora de Juana de Lestonnac y Miguel de Montaigne.

El modelo pedagógico de la Institución Educativa tiene sus raíces en el proyecto educativo de la compañía de María, en el cual la persona es el eje fundamental, pretende formar mujeres íntegras, es decir, cultivando todas sus dimensiones éticas, espirituales, cognitivas, afectivas, estéticas, comunicativas, corporales y socio-políticas; en palabras de Santa Juana de Lestonnac “Educar en la vida y para la vida, es una formación integral” (PEI, 2013, p. 85).

Además, forma a sus estudiantes en el desarrollo del pensamiento, la conciencia crítica, el sentido de fraternidad, el ejercicio de la libertad, el uso adecuado de las TIC y el aprovechamiento sano del tiempo libre, con la intención de preparar “[...] a la mujer para afrontar los retos de la sociedad y favorecer la participación en busca de una mejor calidad de vida” (PEI, 2013, p. 9), basada en los valores del evangelio y los valores institucionales de sentido de trascendencia, comunicación-diálogo, solidaridad, respeto, tolerancia, justicia, paz, responsabilidad, autenticidad, honestidad, sencillez, espíritu democrático, respeto por los bienes comunes, compromiso, calidad, confianza y convivencia; y una orientación académica profunda y seria que la lleve a ubicarse con éxito en el mundo laboral.

En el Proyecto Educativo Institucional (PEI) se hace énfasis en el perfil de las estudiantes, en el cual se menciona que éstas viven con alegría, reconocen sus dones y cualidades, aceptando la riqueza de la diferencia. Además, las estudiantes tienen la capacidad de diferenciar las situaciones de las personas y relacionarse con los demás, con el Dios de la vida; y lucha por mantener su libertad ante la sociedad de consumo. Trata de ser coherente y llevar a la práctica los valores y orientaciones contemplados en la filosofía institucional dentro y fuera de ella.

Así mismo, se afirma que los padres de familia deben ser responsables de la vida que han engendrado y que acompañan, compartiendo la filosofía de la compañía de María y el PEI,

viviendo los valores humanos y colaborando con los educadores en el crecimiento integral de sus hijas.

Se plantea que un docente de la institución educativa debe proceder de acuerdo con el espíritu y la filosofía de la institución y la compañía de María; conocer y aplicar las normas contenidas en el manual de convivencia. A su vez, el docente debe respetar los criterios de la Institución y de las religiosas que administran el establecimiento, potenciar valores, promover la práctica pedagógica llevando al interés por el conocimiento, vivir la opción de educar en la vida y para la vida, tratar a todos justamente y a los miembros de la comunidad educativa con delicadeza y respeto, generar actitudes que faciliten el diálogo, el trabajo en equipo, la búsqueda pedagógica y el crecimiento personal y de la Institución.

El plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac de los grados escolares segundo y tercero de primaria, está enfocado en el constructivismo, fundamentalmente, al aprendizaje significativo de David Ausubel quien afirma que:

[...] se parte de que las estudiantes ya saben, el maestro establece puentes entre lo que saben y los saberes nuevos para reconstruir los conceptos en su estructura cognitiva. El aprendizaje depende de lo que el estudiante ya sabe, para orientar la labor educativa es necesario conocer los conceptos y las proposiciones que maneja así como su grado de estabilidad en tanto los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio (Ausubel, 1983, p.18).

En este sentido, el aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados con la experiencia y los saberes del alumno, esta relación se denomina sustancial y no arbitraria, entendida como aquellas ideas que se relacionan con algún aspecto existente, encontrándose específicamente en la estructura cognoscitiva del alumno: las imágenes, símbolos significativos,

conceptos o proposiciones. (Parafraseando a Ausubel 1983, mencionado en la planeación general del área de matemáticas).

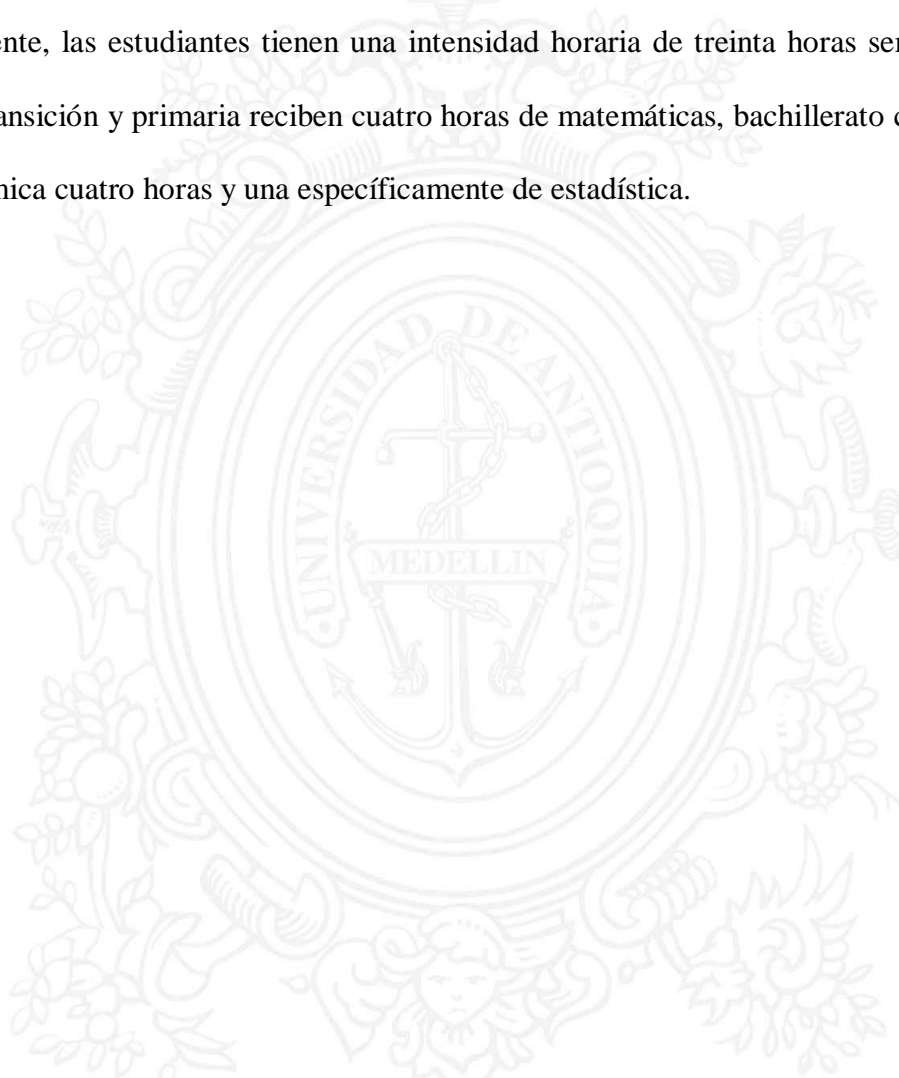
Es preciso aclarar que, las ventajas del aprendizaje significativo son una cualidad importante dentro de la forma de enseñanza de la Institución Educativa. a modo general según el PEI (2013) se plantea que ésta metodología:

- Produce una retención más duradera de la información.
- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno.
- Es personal, ya que la significación de aprendizaje depende los recursos cognitivos del estudiante.

Como apoyo a la labor académica que se desarrolla en la Institución Educativa, se tienen convenios con la universidad EAFIT, el SENA, COMFAMA, el Colegio de la Compañía de María - La Enseñanza, la cooperativa CONFIAR y la Secretaría de Educación, con el fin de desarrollar, en jornada extraclase, actividades que apoyen el avance de las estudiantes en habilidades y competencias para el logro de un mejor desempeño académico y de la formación integral. Las actividades que se desarrollan son: Técnica Industrial en laboratorio químico textil (SENA y Secretaria de Educación), semilleros de inglés (EAFIT y Colegio de la Compañía de María - La Enseñanza), programas de lecto-escritura (Secretaría de Educación y Universidad de

Antioquia), programa de bilingüismo (Secretaría de Educación y COMFAMA) y por último un programa de simulacros pruebas saber 11° (Instruimos).

Finalmente, las estudiantes tienen una intensidad horaria de treinta horas semanales, de las cuales en transición y primaria reciben cuatro horas de matemáticas, bachillerato cinco horas, y media académica cuatro horas y una específicamente de estadística.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Rastreo histórico

Hacer un rastreo histórico acerca de la multiplicación y sus diversas concepciones, conlleva a la caracterización de la mencionada palabra, lo cual hace más pertinente el análisis, el estudio del término y el porqué de su variedad en cuanto a significado. No obstante, la necesidad de este estudio está en que “El maestro se ha educado, como todos, en la realización de una forma concreta de sí mismo. Antes de tener que enseñar su utilización es muy probable que nunca se haya planteado por qué adopta dicha forma” (Maza, 1991, p. 83), lo que conlleva útilmente la génesis del pensamiento multiplicativo.

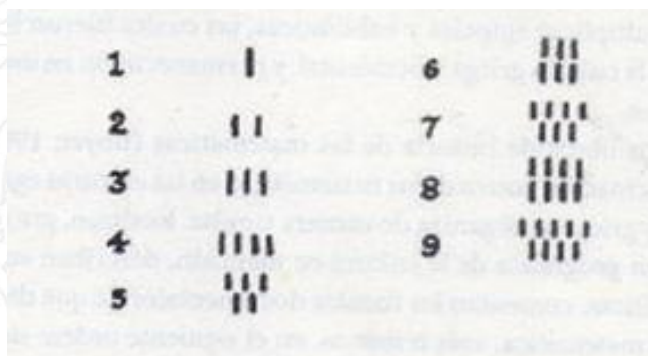
Es por esto que se plantea un rastreo histórico de la multiplicación con base en algunas culturas como la egipcia, la babilónica y la griega, que ayuda a una conceptualización de los significados; además muestra la evolución de los métodos y el impacto socio-cultural que estos tienen en la civilización.

Desde el hombre prehistórico, la carencia de métodos numéricos para conocer y controlar sus procesos de vida cotidiana (cacería, agricultura, entre otros) eran un obstáculo para la regulación de sus prácticas, por lo tanto gracias al ingenio de los primeros hombres, llevaron a cabo el uso de la primera herramienta empleada para dicha regulación: los dedos. (Porrás & Monge, 2012, p. 1) “Los dedos se convirtieron en el principal instrumento para contar diferentes elementos de la época, se utilizaban los diez dedos de la mano y para cifras de mayor tamaño ese conteo volvía a iniciar”.

En general, las diversas culturas “presentan la matemática, más o menos, en el siguiente orden: sistema de numeración, operaciones aritméticas, problemas algebraicos, problemas geométricos” (Rojas, 2011, p. 37).

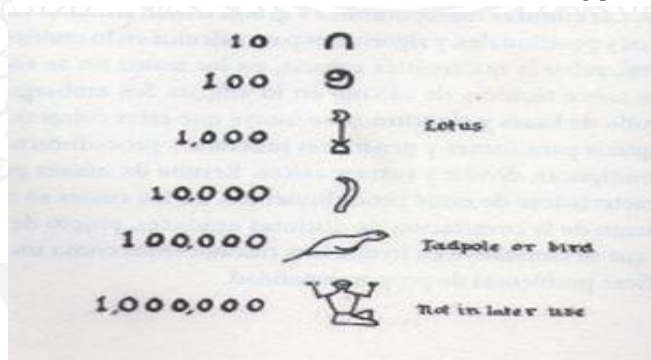
En la cultura **egipcia** la simbología para la representación de números era bastante tediosa, por lo cual se presentaban dificultades al momento de establecer un algoritmo que les permitiera la ejecución y solución de problemas de tipo aditivo y multiplicativo. Sin embargo, el ingenio de los egipcios es bastante sorprendente. A continuación se presentan algunos de sus símbolos jeroglíficos, tomados de (Rojas, 2011, p. 38) (Ver ilustración 1 y 2).

Ilustración 1: *Simbolos del sistema de numeracion egipcio.*



Fuente: Rojas, 2011, p. 38

Ilustración 2: *Simbolos del sistema de numeracion egipcio.*



Fuente: Rojas, 2011, p. 38

El procedimiento utilizado por los egipcios para la multiplicación era el siguiente:

1. Hacer una tabla de doble entrada.
2. Decidir cuál era el multiplicando.

3. Partir del primer número (1), duplicarlo repetidamente, y sumar algunos de estos múltiplos hasta que la suma diese el multiplicando.

4. Al frente de los primeros números, duplicar el multiplicando.

5. Sumar los valores de los duplos del multiplicando hasta obtener el resultado.

Ejemplo: Multiplicar 8 y 7 (Ver tabla 1).

$$1 + 2 + 4 = 7 \text{ (Multiplicador)}$$

$$8 + 16 + 32 = 56 \text{ (Resultado)}$$

Tabla 1: Ejemplo tabla doble entrada egipcia para multiplicar.

| | Multiplicando | |
|----------------|---------------|-----------|
| 1 | 8 | |
| 2 | 16 | |
| 4 | 32 | |
| Totales | 7 | 56 |

Fuente: Rojas, 2011, p.40

Se destaca de lo anterior que los egipcios utilizaban una definición de la multiplicación como suma de sumandos iguales. Además “La comprensión de este algoritmo y la posibilidad de la existencia están basadas en una propiedad especial de la sucesión pues cualquier entero puede expresarse de manera única como la suma de algunos de estos términos” (Rojas, 2011, p. 42).

En la cultura **Babilónica**, el sistema de numeración utilizado era sexagesimal posicional. Se destaca principalmente, dentro de esta manera de razonamiento, el uso reiterado de la media aritmética, de tal manera que la vuelve una técnica de aproximación. En esta cultura, se dan muchos aspectos importantes dentro de la matemática, como el hallazgo de raíces de números.

“Asimismo, de acuerdo con los problemas planteados, en esta técnica se manifiesta el conocimiento y uso reiterado del concepto de entre los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado” (Rojas, 2011, p. 46).

Con respecto a la multiplicación, dado que su sistema de numeración era sexagesimal posicional, al parecer llegaron a tener un producto por medio de cálculos por sumas repetidas; “no sabemos si llegaron a construir tablas de multiplicar para números menores de 60” (Rojas, 2011, p. 48).

El método de multiplicación era bastante abstracto, dado que usaban el trinomio cuadrado perfecto, por ejemplo, “En 1854 se encontraron un par de tablas en Senkerah, la antigua Larsa, situada a orillas del Eufrates a 250 km al sur de Baghdad, que se remontan al año 2000 A.E.C. y que dan los cuadrados de todos los números naturales hasta el 59 y los cubos de todos los naturales hasta el 32” (García, 2009, p. 22).

Ejemplo: $8^2 = 1, 4 = 60 + 4 = 64$

La cultura **Griega** es caracterizada por el auge de la filosofía, la dialéctica y la ciencia, las matemáticas fueron un eje central en la construcción de su conocimiento. Fundamentalmente, las operaciones numéricas que se desarrollaron en Grecia fueron las mismas que utilizaron los egipcios, solamente que fueron traducidos al lenguaje y escritura griega.

Uno de los principales desarrollos de su aritmética fue que “Extendieron las operaciones al contexto geométrico, donde se desarrollaron algoritmos potentes para la extracción de raíces cuadradas de manera precisa, entre otros” (Rojas, 2011, p. 49).

La cultura griega deja como legados fundamental el desarrollo del concepto de razón junto con los de proporción y orden, “con estos conceptos se desarrollan su forma de operar, predecir y calcular” (Rojas, 2011, p. 50).

En una de las definiciones escritas por Euclides en Elementos libro V, “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra”. (Definición 15, libro VII). De esta manera, la definición dada por Euclides alude a la multiplicación, puesto que se expresa una relación de razón entre magnitudes.

En conclusión, la evidencia resalta una vez más lo mencionado por Maza (1991), que la multiplicación tiene su origen en la elaboración de sumas reiteradas y sus algoritmos llevaron al entendimiento de la multiplicación más allá de la simbología y las operaciones.

Estado del arte

El pensamiento numérico se considera en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas como “Un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y las destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitudes, etc.” (MEN, 1998, p. 43).

Además, se plantean tres elementos que favorecen el desarrollo del Pensamiento Numérico: en primera instancia se tiene la comprensión de los números y la numeración, que involucra la utilización de los números a partir de sus diversos significados y el uso significativo del sistema de numeración decimal posicional.

En segunda instancia se hace referencia al cálculo con números y las aplicaciones de éstos para resolver problemas de la vida diaria desarrollando el sentido de aproximación y estimación en los estudiantes.

Finalmente, se encuentra la comprensión del concepto de cada una de las operaciones que implica reconocer su significado, los modelos de uso más frecuente, sus propiedades matemáticas y las relaciones entre las diversas operaciones.

En este último elemento se hará énfasis, específicamente en el campo de la multiplicación, en el cual se definen varios tipos de problemas multiplicativos que se enseñan en la escuela: Vergnaud (1991), Maza (1991), Greer (1992), los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), Botero (2006), y Torres (2013) hacen referencia a algunos problemas multiplicativos.

Para Maza (1991) la multiplicación puede ser interpretada de muchas maneras, dado que:

Es, ante todo, una operación aritmética tanto de naturaleza unitaria como binaria, que puede interpretarse como una suma reiterada (sin ser lo mismo) o como un producto cartesiano.

¿Qué es la multiplicación? Es cada cosa y todo a la vez [...] la multiplicación debe entenderse como una operación aritmética entre números naturales. El punto de partida de esta operación son dos números y el punto de llegada otro número distinto (o no) de los anteriores. En el camino se puede registrar una transformación de los primeros en el último. (Maza, 1991, p. 21).

Por otra parte, Vergnaud (1991) plantea tres tipos de problemas: el primer tipo lo nombra isomorfismo de medidas, definido como “La primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo” (Vergnaud, 1991, p. 197).

El segundo tipo de problema lo nombra producto de medida que consiste en “[...] una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional” (Vergnaud, 1991, p. 211) En esta relación, se identifican dos campos de medida (que pueden ser el mismo), en dónde se componen para formar otro mediante un proceso análogo al producto cartesiano.

El tercer tipo de problema es el espacio único de medidas, el cual se refiere a problemas de comparación pero en términos multiplicativos. Este tipo de problemas es muy similar al de comparaciones aditivas, pero en este caso la comparación utiliza un coeficiente multiplicativo.

Ahora bien, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se plantean cuatro tipos de problemas multiplicativos, los cuales Botero (2006) retoma y define. El primer tipo es Factor multiplicante, que si se compara con los tipos de problemas multiplicativos conceptualizados por Vergnaud (1991) corresponde a problemas de espacio único de medidas. Un ejemplo de ello es: “Juan tenía 3 carritos. María tenía 4 veces más. ¿Cuántos carritos tenía María?” (MEN, 1998, p. 33). En estos problemas uno de los factores corresponde a un escalar

que indica la cantidad de veces que una cantidad es mayor que otra. De esta forma, en el problema planteado, el 3 indica que la cantidad de canicas de Pedro corresponde a tres veces la cantidad de canicas de Juan, y por lo tanto, al variar el número de canicas de Juan, varía también la cantidad de canicas de Pedro.

El segundo tipo es Adición repetida, los cuales le corresponden problemas de la forma: “Juan compró 3 carritos cada día durante 4 días. ¿Cuántos carritos tiene en total? (MEN, 1998, p. 33) En este tipo de problemas existen dos magnitudes en las cuales a cada uno de los elementos de un primer conjunto, en este caso los 4 días, le corresponde un subconjunto de otro, como son las 3 carritos. La diferencia fundamental entre este tipo de situaciones y la anterior, es que ahora no se trata de la comparación de dos conjuntos, para determinar el tamaño relativo de uno con respecto al otro, sino de una acumulación sucesiva (sumas de sumandos iguales) de una cantidad como función del desarrollo de un proceso determinado.

En esta misma línea, se puede establecer una comparación de este tipo de problemas con la definición dada por Maza (1991) de la multiplicación como Suma reiterada; la definición es posible sin más que generalizar la definición de suma como el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos.

1. Escoger un conjunto A cuyo cardinal fuera a.
2. Realizar la unión del conjunto A consigo mismo tantas veces como marque el cardinal b.
3. Hallar el cardinal c del conjunto unión de todos los anteriores.

A y C tienen la misma naturaleza. B la tiene distinta de los anteriores.

Paralelo a este planteamiento, Greer (1991) define este tipo de problema multiplicativo como una clase de situación que involucra la multiplicación de enteros de equal groups, los cuales pueden surgir de diferentes maneras. Algunos ejemplos son la matematización de casos de

replicación natural, la repetición de una secuencia de acciones y las prácticas humanas como la de dar el mismo número de objetos a un número de personas. Una forma alternativa de conceptualizar las situaciones de igualdad de los grupos, radica en entablarlos en términos de una razón, es decir, “Si hay 4 galletas por niño, ¿cuántas galletas tienen 3 niños?”. Se expresa de manera implícita que, esta conceptualización, es una relación invariante que vincula el número de niños y el número de galletas; la situación descrita en el ejemplo es la creación de instancias particulares de esta relación cuando el número de niños es 3.

Continuando con las definiciones de Botero (2006) retomando los lineamientos curriculares (1998), tenemos un tercer tipo de problema llamado Razón, el cual también tiene similitudes con el definido por Vergnaud (1991) como problemas de isomorfismo de medidas. A modo de ejemplificación, un tipo de problema correspondiente a este tipo es: “Cada empaque trae 2 canicas. Si son 3 empaques, ¿cuántas canicas hay en total?”. En esta categoría se da una razón que permite relacionar de forma lineal dos magnitudes de carácter discreto, que están presentes en el problema. En el ejemplo, de 1 a 2, quiere decir que las canicas están distribuidas a razón de 2 por cada empaque, por lo tanto se establece una relación de covariación entre las dos variables consideradas, las canicas y los empaques.

A su vez, éste es comparable con el definido por Greer (1991) como Multiplicative comparison, verbalmente expresada por n veces más que: “John tiene 3 veces más manzanas que Mary. Mary tiene 4 manzanas ¿Cuántas manzanas tiene John?” (p. 276) Aquí el factor multiplicativo puede ser concebido como el multiplicador, sin embargo, también es posible ver la situación en términos de una correspondencia mucho-uno, es decir, “3 manzanas de John por cada manzana de Mary”, lo cual hace de 3 el multiplicador.

Por último, Botero (2006) define problemas de Producto cartesiano, comparable con el definido por Vergnaud (1991) como producto de Medida. A este tipo de problemas le corresponden problemas de la forma: “en una fábrica se producen canicas en 2 tamaños diferentes y de 3 colores diferentes. ¿Cuántas clases de canicas se pueden fabricar?”. En estos problemas se presentan dos magnitudes que al ser combinadas (multiplicativa) producen una magnitud diferente de las otras dos, pero compuesta por cada una de ellas. Así, en la fábrica se producen canicas con características específicas que pueden ser clasificadas de acuerdo a dos categorías diferentes: el tamaño y el color.

Paralelamente, Maza (1991) explica el Producto cartesiano de la siguiente forma:

1. Escoger un conjunto A cuyo cardinal fuera a.
2. Escoger un conjunto B cuyo cardinal fuera b.
3. Formar el producto cartesiano $A \times B$
4. El cardinal de $A \times B$ es el resultado deseado, el cardinal de C

A y B tienen la misma naturaleza. C la tiene distinta a las anteriores.

Este tipo de problema también es definido por Greer (1991) como cartesian product, pero en éste se proporciona un contexto muy diferente para la multiplicación de números naturales: “Si 4 chicos y 3 chicas están bailando, el diferente número de parejas posibles son”. Esta clase de situaciones corresponde a la definición formal de $M \times N$ en términos del número de pares ordenados distintos que se pueden formar cuando el primer miembro de cada par pertenece al juego con M elementos y el segundo a un conjunto con N elementos. Esta forma sofisticada de definir la multiplicación de números enteros se formalizó hace relativamente poco en términos históricos.

Este, a su vez, menciona otro tipo de problema llamado rectangular área, el cual puede relacionarse con la definición de Vergnaud (1991) de producto de medida, conceptualizado como la identificación de que los lados de un rectángulo son enteros: digamos 4 cm por 3 cm. En este caso, el rectángulo se puede dividir en cuadrados de 1 cm de lado de modo que el área se puede encontrar contando estos cuadrados. Dicho diagrama lleva una similitud obvia a la disposición física de los objetos de $M \times N$ en un arreglo rectangular con M filas y N columnas, o también se puede considerar un arreglo rectangular del rectángulo con lados enteros, proporcionando una representación útil para hacer ciertas propiedades de la multiplicación como una operación binaria, tales como conmutatividad, intuitivamente aceptable. Al igual que con los productos cartesianos, los dos números multiplicados desempeñan papeles equivalentes, por lo que no son distinguibles como multiplicando y el multiplicador.

Teniendo en cuenta todos los tipos de problemas mencionados por cada autor, se hará énfasis en la concepción del tipo de problema multiplicativo como Producto Cartesiano nombrado así en los lineamientos curriculares en matemáticas (MEN, 1998) o Producto de Medida según Vergnaud (1990).

Autores como Botero (2006) y Torres (2013) retomando a Vergnaud (1990) dan definiciones con respecto a cada uno, que ponen en manifiesto algunas similitudes: una primera definición de este tipo de problemas es que “Las situaciones de tipo producto cartesiano son aquellas en las que dos o más magnitudes son multiplicadas (o divididas) para producir una tercera magnitud, o en las que se realiza el conteo combinatorio de dos o más colecciones dadas” (Torres, 2013, p. 11), mientras que otra definición de la misma es que “En estos problemas (Producto cartesiano) se presentan dos magnitudes que al ser combinadas (multiplicativa) producen una magnitud diferente a las otras dos, pero compuesta por cada una de ellas” (Botero,



2006, p. 22). Tal y como se puede ver, estas definiciones expresan una el Producto Cartesiano como la combinación de dos magnitudes no necesariamente diferentes para formar una tercera que si tiene como característica ser diferente.

Para terminar estos planteamientos, Vergnaud (1991), define el tipo de problemas multiplicativo como producto de medida así: “Esta forma de relación consiste en una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional” (Vergnaud, 1991, p. 211).

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

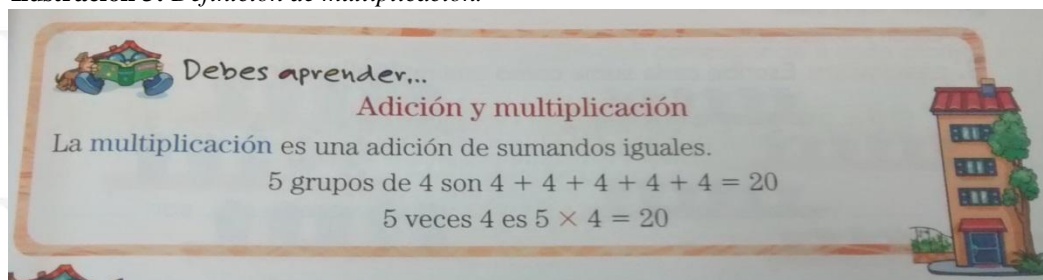
Planteamiento del problema

La presente investigación tiene como eje central el análisis de la objetivación de las estudiantes de los grados segundo y tercero de primaria con respecto a la multiplicación, dado que, autores como Vergnaud (1990), Maza (1991) Ministerio de Educación Nacional (1998), Botero (2006) y Torres (2013) afirman y exponen la diversificación de definiciones con respecto al campo de la multiplicación, que dependen del tipo de situaciones problemas planteados.

Ahora bien, las interpretaciones respecto a la definición de multiplicación y tipos de problemas multiplicativos se evidencian en una encuesta realizada a las tres maestras cooperadoras del grado segundo de la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac, en donde se evidencia que la definición de la multiplicación es una suma de sumandos iguales..

Además, en los textos guía de matemáticas del grado segundo que son utilizados por las maestras cooperadoras, los cuales son Casa de las matemáticas 2 (2009) y Estrategias en matemáticas 2 (2010), y el texto de práctica de las estudiantes Animaplanos (2014), es posible observar que la multiplicación es definida como una suma de sumandos iguales y no da pie para interpretar otras perspectivas en torno a su definición¹ (Ver ilustración 3).

Ilustración 3: Definición de multiplicación.

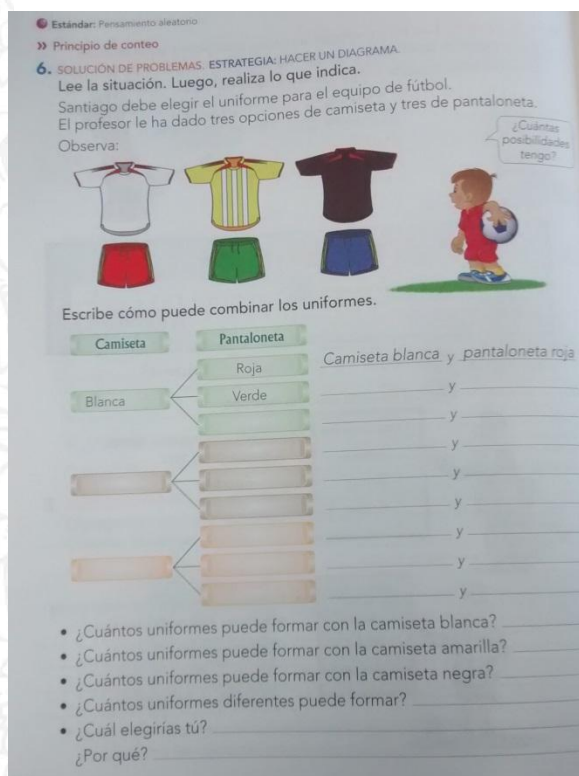


Fuente: Libro Casa de las matemáticas 2 (2009)

¹ Como son la de producto de Medida o espacio único de medidas, definidos en el campo conceptual de la multiplicación de Vergnaud (1990).

No obstante, en los textos guías, específicamente en el pensamiento numérico no se hace referencia al tipo de problema multiplicativo de producto de medida; sin embargo, en la unidad de pensamiento aleatorio se plantea la enseñanza de las combinaciones, en los que se proponen ejercicios al respecto, pero no se da una relación entre multiplicación y combinación. (Ver ilustración 4).

Ilustración 4: *Relacion entre multiplicación y combinatoria.*



Estándar: Pensamiento aleatorio
Principio de conteo

6. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ESTRATEGIA: HACER UN DIAGRAMA.
Lee la situación. Luego, realiza lo que indica.
Santiago debe elegir el uniforme para el equipo de fútbol.
El profesor le ha dado tres opciones de camiseta y tres de pantaloneta.
Observa:

¿Cuántas posibilidades tengo?

Escribe cómo puede combinar los uniformes.

| Camiseta | Pantaloneta | |
|----------|-------------|------------------------------------|
| Blanca | Roja | Camiseta blanca y pantaloneta roja |
| | Verde | y |
| | | y |
| | | y |
| | | y |
| | | y |
| | | y |
| | | y |

- ¿Cuántos uniformes puede formar con la camiseta blanca?
- ¿Cuántos uniformes puede formar con la camiseta amarilla?
- ¿Cuántos uniformes puede formar con la camiseta negra?
- ¿Cuántos uniformes diferentes puede formar?
- ¿Cuál elegirías tú?
- ¿Por qué?

Fuente: *Estrategias matemáticas 2 (2010)*

Derivado de lo anterior, se hace importante analizar las interpretaciones de cada estudiante con respecto a la multiplicación como producto de medida, que conlleva a diversificar las concepciones que se tienen acerca de ésta y da la posibilidad de observar y experimentar como es el comportamiento de sus campos conceptuales.

Ahora, respecto al campo conceptual de la multiplicación, la presente investigación define la multiplicación desde el enfoque de producto de medida (Vergnaud, 1990), convirtiéndose ésta en el eje teórico principal. Por lo tanto, se quiere observar y analizar hasta qué punto objetivan las estudiantes de segundo y tercer grado de primaria la multiplicación como producto de medida.

El plan de área de matemáticas de segundo grado de la IE Santa Juana de Lestonnac, en relación al pensamiento numérico, plantea que en el primer periodo académico se debe enseñar los números naturales (el concepto, lectura y escritura de números, la decena y centena y el manejo del ábaco); en el segundo periodo, los números naturales (la adición y sustracción); en el tercer periodo se enseña números naturales y fraccionarios (los millares, operación con números mayores de cinco cifras, la multiplicación reagrupando y sin reagrupar) y en el cuarto periodo números naturales y fraccionarios (propiedades de la multiplicación, descomposición de números de cinco y más cifras, la división, números fraccionarios).

Wood (2000) cita a Nunes y Bryant (1996), los cuales concluyen que:

Es mucho más difícil entender la multiplicación y la división que calcular sumas. El niño debe aprender y entender un número completamente nuevo de un grupo de significados y un nuevo grupo de invariables todos los cuales están relacionados con multiplicación y división pero no con adición y sustracción (p. 283).

Siendo así, se precisa la pertinencia de la enseñanza de la multiplicación en segundo grado, teniendo en cuenta lo establecido por las políticas públicas colombianas en educación, el plan de área de Matemáticas establecido por la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac, bajo las teorías de los diversos investigadores mencionados anteriormente y tras lo mencionado

por Clark y Kamii (1996) “La introducción de la multiplicación en segundo grado es apropiada, pero los educadores no deben esperar que los niños la utilicen, incluso en quinto grado”.

Por todo lo anterior, sobre la enseñanza de la multiplicación en los grados segundo y tercero de primaria, el significado que tiene la multiplicación desde diferentes perspectivas y desde el plan de área de matemáticas de la institución, surge entonces la siguiente,

Pregunta de investigación: ¿Cómo es el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida de las estudiantes del grado segundo y tercero de primaria?

Objetivo: Analizar el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida de las estudiantes del grado segundo y tercero de primaria.

Marco teórico

La presente investigación, está enmarcada en tres pilares: el primero es la teoría de la actividad, en el cual se describen los procesos y las acciones que se llevan a cabo al realizar la actividad, teniendo en cuenta el objeto/motivo de los sujetos, los artefactos e instrumentos que se utilizan, los niveles de las acciones realizadas y el camino hacia el cuál se dirige el sujeto para alcanzar el objeto de conocimientos.

Después de esta primera conceptualización, se presenta la teoría de la objetivación, en la cual se describe el proceso que realiza el sujeto, a partir de la actividad, para lograr la objetivación del objeto de conocimiento y cómo éste transforma al sujeto en el plano de la conciencia.

Por último, se conceptualiza desde dos perspectivas el objeto de conocimiento, es decir, la multiplicación como producto de medida, vista desde la perspectiva de la matemática pura y desde la perspectiva de la didáctica, en dónde se tienen en cuenta lo estocástico y lo geométrico y métrico.

Teoría de la Actividad

Como parte de la conceptualización de la presente investigación, se dedicará un capítulo para abordar la teoría de la actividad, vista desde Leontiev (1984); Montealegre (2005); Torres (2013); Arboleda, Obando & Vasco (2014) y Radford (2014), que han hecho investigaciones sobre qué necesita el ser humano para llegar a la objetivación.

Dentro de la conceptualización de actividad como eje central de la teoría de la objetivación de Radford (2014), comprenden un conglomerado de definiciones, por lo tanto, es

importante lo que en este trabajo es entendido como sujeto, objeto/motivo, objeto, acción, artefacto e instrumento.

El ambiente escolar está rodeado por un entorno que influye en el desarrollo del estudiante, más específicamente y en palabras de Ivic (1999):

La institución escolar, aun haciendo abstracción se [*sic*] los contenidos que en ella se enseñan, implica cierta estructuración del tiempo y el espacio y se basa en un sistema de relaciones sociales (entre alumnos y docentes, entre los alumnos entre sí, entre el establecimiento de enseñanza y el medio ambiente, etc.). Los efectos de la escolarización se deben, en gran parte, a estos aspectos del “medio escolar” (Ivic, 1999, p.11).

Siendo así, las relaciones que se dan en este espacio y tiempo son de carácter constitutivo en miras al desarrollo cognoscitivo del estudiante, pero para que se logre, es necesaria la mediación de artefactos, en relación con el sujeto, además de estar atravesados por un objeto/motivo que potencia y regula las acciones del mismo.

Se define entonces actividad como aquel sistema de procesos que realiza el sujeto, mediada por artefactos, un objeto/motivo, e instrumentos que regulan una serie de acciones que conllevan al cambio en su estructura cognitiva, su realidad y la objetivación en particular.

Las actividades que realiza el sujeto no son separadas del entorno socio-cultural que lo rodea, sino que por el contrario están impregnadas en él, por lo tanto, “Se sobrentiende que la actividad de cada hombre depende, además, de su lugar en la sociedad enfrentada a él” (Leontiev, 1984, p. 67).

Es de vital importancia tener claro que no hay cabida para definir una actividad no objetivada, dado que ésta es parte fundamental de su conceptualización, Leontiev afirma que ésta carece de todo sentido, por lo tanto, “La actividad puede parecer no objetivada, pero la investigación científica de la actividad exige perentoriamente que se descubra su objeto” (Leontiev, 1984, p. 68).

Teniendo en cuenta lo anterior, el punto de partida radica en el sujeto, que se expresa en diferentes perspectivas, desde la perspectiva biológica y la perspectiva sociocultural. Tomado el sujeto desde un enfoque biológico se constituye a si mismo (Intrapersonal), además, a medida que se da su crecimiento, éste está acompañado, en términos psicológicos, de ciertas capacidades como memoria, atención, asimilación de conceptos, entre otras, que tienen que ver con diferentes vertientes teóricas psicológicas; y desde un enfoque socio-cultural, que existe en cuánto este constituye su conciencia con respecto a los aspectos de la cultura que lo rodea y sus necesidades en cuanto a la prácticas (Interpersonal).

Desde el enfoque socio-cultural, se tienen en cuenta las dos perspectivas del sujeto, pero además, dentro de la constitución de la conciencia del sujeto se establecen una serie de relaciones entre sujeto-medio, sujeto-objeto y sujeto-sujeto (Torres, 2013, p. 30).

Ahora bien, es necesario entonces pensar el sujeto desde perspectivas más generales, teniendo en cuenta las dos anteriores, por lo tanto, el sujeto es aquel ser que constituye sus significados por medio de las interacciones interpersonales a medida que interactúa así mismo con el entorno para constituirse intrapersonalmente; por lo tanto el sujeto es un ser social, político y cultural e históricamente en constitución.

No obstante, el sujeto empieza una serie de interacciones que están reguladas por lo que se denomina objeto/motivo, definido como las miras hacia las cuáles el sujeto se dirige para realizar una acción en dónde se cuenta con una meta doble, desde una perspectiva externa, dado que es la que orienta el camino de la actividad, y desde la perspectiva interna que es en dónde ocurren cambios propios de la psiquis del sujeto; esto quiere decir más estrictamente, cuándo:

La orientación de la actividad por el objeto motivo permite la transformación mutua del uno sobre el otro (sujeto y objeto), en una doble dimensión que proyecta el objeto sobre la mente de los sujetos, pero que a la vez proyecta la mente de los individuos sobre los objetos de la realidad objetiva (Arboleda *et al.* (2014) Citando a Kaptelinin, p.11).

Así pues, dado que el sujeto es un ser social que se va constituyendo por medio de la actividad y que ésta para ser llevada a cabo necesita del objeto/motivo, así mismo el objeto como concepto individual es visto desde una mirada didáctica en relación con la enseñanza de las matemáticas, en dónde éste aparece como algo real y no simplemente como meras cosas como afirma Restivo y Collins (2010, citado en Arboleda *et al.*), sino que por el contrario son el conjunto de operaciones y demás actividades que el sujeto realiza, por lo tanto, para ser más concretos, Giusti (2000) afirma que “Ellos no provienen de una realidad exterior, independiente del hombre, representado por la esencia desprovista de impurezas materiales, sino que ellos formalizan la acción humana” (Giusti, 2000, pp. 25-26, citado en Arboleda *et al.*, 2014).

Estos objetos no simplemente se visualizan o sirven de interacción y de desarrollo cognitivo, sino que además son objetivados, es decir, se desarrollan a partir de un proceso social

que está en constante movimiento en torno a lo creativo, que tiene como logro la construcción de sentido y además de significado en relación con el entorno cultural que rodea al sujeto².

No obstante, el punto de convergencia de la realidad, el sujeto, el objeto/motivo y el objeto, es la acción, que se define como como aquel conjunto de procesos que el sujeto realiza en la interacción con objetos (que, por pertinencia de la investigación, son de índole matemática) planificados mentalmente para el alcance de ciertos logros trazados en miras a una finalidad objetiva. Por lo tanto y respecto a lo anterior es pertinente afirmar que las acciones y las finalidades están estrechamente ligadas, “Las finalidades se dan arbitrariamente en el desarrollo de circunstancias objetivas. Su delimitación y toma de conciencia no es ni automática ni instantánea, sino un proceso de prueba a través de la acción” (Arboleda *et al.*, 2014).

Ahora bien, estas acciones están mediadas por una intención que las dirige, tienen en cuenta el cómo se puede lograr, es decir, reunir el conjunto de procesos que hacen posible la concertación y pertinente conclusión de las acciones, es a lo que Leontiev (1984) llama operaciones de la actividad.

Estas operaciones son entonces definidas en cinco niveles (Montealegre, 2005), los cuales están conceptuados así:

Primer nivel: El sujeto toma conciencia y, por lo tanto, primero analiza el logro que se debe alcanzar. Este es un nivel de idealización total de la acción y es aquí en donde inicia un proceso de realización. Así pues, empieza la ejecución del plan idealizado teniendo en cuenta, de manera subjetiva, su individualidad y sus habilidades.

² La ampliación de este concepto y del proceso que se lleva a cabo para llegar a ser objetivado será desarrollada con más claridad en el capítulo que respecta al proceso de objetivación.

Segundo nivel: El eje central de este nivel es el de la búsqueda e interacción del sujeto con objetos materiales, en dónde éste observa de manera intrínseca aquellas propiedades del objeto y sus relaciones con otros objetos que anteriormente había visto y contextualizado.

Tercer nivel: Aparece en el sujeto el habla, dado que surge en él la necesidad derivada de su interacción con el objeto material. Por lo tanto, permanece su apoyo en el objeto pero ya desde una mirada social.

Cuarto nivel: Terminada la interacción con el objeto material, en este nivel se da más énfasis en el habla, pero no como algo indispensable en el sujeto de comentar la acción realizada, sino más bien desde la perspectiva de que ha adquirido una nueva acción, esta vez de forma verbal.

Quinto nivel: En este último nivel se dan las conclusiones de la acción y su concertación. Es aquí en dónde el sujeto opera mentalmente y en dónde ya se puede afirmar que el sujeto ha asimilado la acción.

De esta manera, el punto de convergencia entre el objeto/motivo y las acciones son denominadas tareas en el sentido de Davidov (1988), sin embargo, en un sentido didáctico, de la mencionada intersección, las tareas son aquellos dispositivos que orientan el objeto/motivo de los docentes y estudiantes, en miras a llegar al objeto, dándose a través del acto educativo (Obando, 2015, p. 161). Cabe resaltar que estas tareas no nacen antes de la actividad, sino que emergen de las acciones que realiza el sujeto, a medida que interactúa con los otros.

Dentro de las tareas, se manifiestan de explícito un doble objeto/motivo, el primero de ellos es el emergente del estudiante y el segundo es el intencionado por parte del docente. Esta

característica que lo considera explícito se da porque es allí a partir de la emergencia de la tarea que se logra un aprendizaje matemático. Siendo más sintéticos, Obando (2015) afirma que:

[...] el objeto/motivo explícito de la tarea, al generar un espacio en el que el estudiante organiza sus acciones, también genera un espacio compartido entre estudiantes y profesores, espacio en el cual el objeto/motivo educativo se va constituyendo como objeto/motivo explícito en la actividad matemática del estudiante (Obando, 2015, p. 163).

Por lo anterior, las acciones derivan la interacción del sujeto con los artefactos, que deben ser diferenciados de los instrumentos, dado que los primeros están enmarcados en el ámbito operativo y metodológico, mientras que los segundos se enmarcan en el ámbito cognitivo, transformador y reflexivo.

Así, los instrumentos son aquel conjunto de operaciones y métodos construidos histórico y socialmente. No necesariamente son de naturaleza física, sino que también son de naturaleza mental, que en sí convergen en una abstracción y una generalización de las acciones de índole cultural.

Estos instrumentos amplifican las capacidades humanas, en relación a la interacción en doble sentido, sujeto-instrumento y viceversa, que ayudan al desarrollo de la cognición humana y por lo tanto aporta grandes logros en torno al aprendizaje. Es por ende que la construcción de los instrumentos por parte del hombre “Se hace indisoluble con el desarrollo mismo de las acciones prácticas humanas, en tanto toda acción es mediada por el uso de un instrumento (físico o simbólico)” (Arboleda *et al.*, 2014).

Siendo así, en la actividad, la mediación entre la acción y sujeto³ se da por medio de los artefactos, que igual a los instrumentos, estos pueden ser de índole física o simbólica. Por lo tanto, los artefactos tomados desde la psicología cultural son aquellos aspectos del mundo material que con el paso del tiempo son modificados dado que las miras hacia las que se dirigen son las acciones con rumbo a la actividad.

Teniendo en cuenta la doble naturalidad de los artefactos, desde la mirada simbólica, éstos derivan una actividad transformadora del sujeto, una creación de formas cognitivas y una mediación que se dirige respecto el objeto/motivo (Cole, 2003), por lo tanto es preciso afirmar que la relación sujeto-instrumento es una mediación natural⁴ y cuando aparece el artefacto se forma una relación trídica sujeto-artefacto-instrumento y es dónde aparece la mediación que termina por ayudar al sujeto a comprender el significado ideal del instrumento⁵.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

³ En teoría de la Objetivación, esta mediación es llamada Mediación Semiótica.

⁴ En la Psicología Cultural de Michael Cole, esta mediación natural se denomina “no mediada” (Cole, 1996, p. 115)

⁵ Es aquí dónde radica la diferencia entre instrumento y artefacto.

Teoría de la Objetivación

En el marco de la teoría de la objetivación, la teoría de la actividad es un eje fundamental dentro de su comprensión, por lo tanto, en este capítulo se aborda el cómo el sujeto objetiva un objeto y cómo ésta objetivación cambia su forma de mirar el mundo, su forma de pensar y una nueva constitución de conceptos.

En este orden de ideas, durante la conceptualización se define la conciencia desde la perspectiva dialéctico-materialista; el knowing, el becoming y la mediación semiótica, para finalmente terminar con lo que es objetivación y subjetivación, los tres objetivos de la objetivación y el proceso de objetivación.

Como referentes teóricos dentro de esta conceptualización están Radford (2006, 2013, 2014) como teórico de la objetivación, Arboleda *et al.* (2014), Torres (2013) y Davidov (1988), siendo todos estos autores de literatura que ayuda a la comprensión y conceptualización de cada uno de los conceptos que se necesita para la teoría de la objetivación.

Conciencia: Siendo el sujeto un ser biológico y un ser social, éste tiene por naturaleza la conciencia, que se va constituyendo a medida que su internalización en cuánto a las actividades y de lo que allí se deriva (como los conceptos) se va dando. Sin embargo, esta internalización, específicamente de los objetos matemáticos, viene acompañada del conocimiento que de la cultura emerge, así mismo como de las acciones que realiza el sujeto y que llevan a la constitución de su subjetividad y por ende de su conciencia.

Es por eso, que para definir la conciencia es preciso empezar por la internalización, que si bien se toma desde Arboleda *et al.* (2014) y Torres (2013), éste no se puede considerar como un duplicado de la realidad en la cual se desenvuelve el sujeto, sino que debe ser entendido como

aquella reconstrucción interna del sujeto en el plano social de aquellas funciones psicológicas superiores, derivando así una nueva forma de percepción, de atención, de memoria lógica, de formación de conceptos, de lenguaje oral, entre otras Arboleda *et al.* (2014).

Así pues, esta internalización permite una reflexión, entendida como aquella forma de modificación del sujeto respecto a sus acciones, lo cual hace que éste se transforme y constituya un nuevo significado de las acciones realizadas con los instrumentos. Así, su subjetividad es una nueva constitución derivada de la actividad realizada a partir del mundo externo.

La reflexión del sujeto tiene su génesis en las tareas que realiza a medida que acciona con los instrumentos, es por eso que la tarea, haciendo referencia a aquella convergencia entre el para qué voy hacer la actividad y el cómo voy hacer la actividad, reconstituye un nuevo pensamiento que entra en el plano de la psiquis, siendo esta el conjunto de acciones que conllevan a la solución de una tarea específica, que en términos de N. Bernshtéin (Citado en Davidov, 1988, pp. 35-36), son los denominados movimientos vivos.

La psiquis posee como funciones principales la construcción de la realidad objetiva y, la búsqueda y la prueba de los movimientos y las acciones que conllevan a la satisfacción de las necesidades propias del sujeto. Por lo tanto, a medida que se dan las funciones de la psiquis, más específicamente en la actividad, ésta pasa a ser mediatizadora de la actividad y por ende se va convirtiendo en conciencia, entendida como aquella reproducción de la internalización constituida por el sujeto en la actividad y la representación de aquellas funciones psicológicas superiores de otros sujetos que lo rodean (Davidov, 1988, p. 45).

Siendo así, la conciencia se desarrolla en una naturaleza doble: (1) en el plano de la cultura, en dónde se encuentran todos aquellos eventos que histórica y socialmente se han

constituido y (2) en el plano interno, en dónde se da la constitución de aquellos conceptos histórico-culturales.

No obstante, la conciencia no se puede definir como un referente aparte desligado de la actividad, dado que estos aspectos teóricos “[...] se encuentran en una unidad indisoluble, teniendo esta última, importancia predominante” (Davidov, 1988, p. 12), es por eso que previamente la actividad es definida y por lo tanto es una teoría fundamental dentro de la presente investigación.

La teoría de la objetivación parte de una postura histórico-cultural, permeada por una sociedad globalizada en el ámbito político y conceptual, teniendo una definición propia de la educación como aquel trato en el que se da la constitución de saberes y paralelamente el desarrollo de seres, es decir, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, entendida como una sola actividad que se desarrolla dentro de un espacio político y social, aumenta en relieve el knowing o conociendo, que parafraseando a Radford (2014) es entendido como aquella toma de conciencia que se deriva de un proceso social, emocional y sensible, que es mediado por lo semiótico y lo corpóreo.

Esta mediación semiótica, desde la perspectiva histórico-cultural, es el conjunto de todos aquellos artefactos, recursos lingüísticos y signos que se utilizan de manera intencionada para alcanzar por medio de sus acciones la actividad propuesta. Estos medios semióticos son de naturaleza social, debido a que son el resultado de un proceso histórico y cultural de la humanidad.

La utilización de estos medios semióticos se da en el territorio del artefacto como lo denomina Voloshinov 1973, citado en Radford, 2006, como aquel espacio en donde la

subjetividad y la objetividad convergen, y por lo tanto, el pensamiento encuentra un campo de acción. Lo anterior entonces se puede evidenciar en lo corpóreo, más específicamente en las expresiones gestuales y los movimientos kinestésicos, cuando en el transcurso de las acciones que van en miras a la actividad se muestran de manera explícita, entrando a colación la relación que hay entre las matemáticas y la toma de conciencia.

Cabe resaltar entonces que es importante la observación de lo corpóreo, más específicamente de los gestos, por lo cual, Radford afirma que “Los gestos importan, ya que, en los entornos de aprendizaje, cumplen una función importante: son elementos importantes en los procesos de objetivación del conocimiento de los estudiantes” (2006, p. 1)⁶.

Siendo así, la evidencia de estos gestos y la relación que hay entre sujeto y artefacto en el territorio del artefacto, se afirma entonces que el sujeto está en constante movimiento, en constante transformación, pero nunca acabado, lo que Radford (2014, p. 138) denomina como el *becoming* o volviéndose.

El *knowing* y el *becoming* se dan en un entorno socio-político, como lo plantea la teoría de la objetivación, por lo tanto, los objetivos en los que se circunscribe la mencionada teoría son de índole cognitivo y social, partiendo de que la educación matemática es un esfuerzo político, social, histórico y cultural, cuyo logro es la creación de individuos éticos y reflexivos que toman partido crítico respecto a las prácticas matemáticas que se han constituido histórica y socialmente, es así como el sujeto se relaciona con el saber y así mismo con la cultura que lo rodea; en síntesis, Radford, afirma que:

⁶ “Gestures matter because, in learning settings, they fulfill an important function: they are important elements in the students’ processes of knowledge objectification.” Traducido por: Natalia Medellín Jiménez.



[...] desde un punto de vista ontológico, el ser y el saber están interrelacionados de una manera profunda en la que uno no ocurre sin el otro. Es por eso que, a nivel de la práctica concreta, la enseñanza y el aprendizaje no producen solamente saberes. La enseñanza y el aprendizaje también producen subjetividades. (2014, p. 136).

Además, dado que la enseñanza y el aprendizaje son significativos desde las formas pedagógicas de acción, estas conllevan a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, así mismo como la creación de espacios socio-políticos en dónde se manifiestan cada una de las subjetividades de cada sujeto y por lo tanto se da una reflexión solidaria y responsable (Radford, 2014).

Ahora bien, cuándo son llevados a cabo estos objetivos y además de ello, la actividad se da en el ambiente que la teoría de la objetivación plantea, se da a conocer que éstas convergen en la objetivación, conceptualizado como aquel proceso social en constante acción que lleva a la toma de conciencia crítica de los sentidos y significados que la historia y la cultura han constituido y expresado en las formas de hacer y de pensar.

Estás formas de hacer y de pensar del sujeto respecto a lo que la cultura constituye no solamente reposan en el conocimiento de conceptos, que son entendidos como aquella predicción de características de los objetos, sino también en las acciones del sujeto y los medios que utiliza para realizarlas; las maneras del cómo razona y discute, y en general, todo el conjunto de creencias que permiten la significación de los objetos de conocimiento. (Arboleda, *et al.*, 2014)

Esta significación de los objetos que el sujeto constituye, cambia su percepción frente a la realidad que lo rodea, por lo tanto, entra a colación la subjetivación, entendida como el conjunto de procesos en dónde el sujeto toma una posición de las prácticas histórico-culturales,

constituyéndose como ser reflexivo, crítico y único, además, esta unicidad del sujeto, en términos de la conciencia, es lo que se denomina como la subjetividad, que aparece en las formas de participación y aporte a la actividades sociales, es por eso que Radford afirma que:

[...] la subjetivación no es posible sin la participación del sujeto. El sujeto se constituye en tanto que sujeto a través de sus acciones, reflexiones, gozos, sufrimientos, etc. Pero, por otro lado, las acciones a través de las cuales el sujeto se constituye, están inmersas en formas de acción y de relación hacia otros que son culturales e históricas (2014, p. 143).

Estos dos procesos, de objetivación y subjetivación, se dan paralelamente, dado que sin el uno no puede ocurrir el otro; por lo tanto, los conceptos de actividad y conciencia se convierten en el eje principal de la teoría, dado que desde la perspectiva dialéctico-materialista hegeliano, la constitución de conceptos se da de manera recíproca entre el sujeto y su cultura.

Producto de Medida

Para la conceptualización de lo que concierne al presente capítulo, es necesario tener en cuenta dos miradas fundamentales para la comprensión de lo que es un producto de medida.

Estas dos miradas se centran, por una parte, en el enfoque puramente matemático del término, que para ello es necesario hacer una revisión bibliográfica, más específicamente en el campo de la teoría de la medida, teniendo como libros base “Apuntes al a Teoría de la Medida” del departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura (2014), “Teoría de la Medida” de Pedro Alegría (2007); y por otra parte está la revisión bibliográfica desde la perspectiva didáctica de la matemática de Vergnaud (1991).

Perspectiva Matemática

En las actividades cotidianas del hombre y además de ello, dentro de las características científicas, se destaca la observación de magnitudes, entendidas como aquellas “propiedades físicas susceptibles de ser medibles” (Universidad de Extremadura., 2014); y además de ello su respectiva medición.

Es por eso que un término general del presente capítulo es el de la definición formal de medida, en dónde se engloban términos como la longitud, el área, el volumen, la probabilidad, entre otros.

A primera vista se cree que las magnitudes medibles son todas aquellas que pertenecen a un conjunto de carácter tridimensional, pero en realidad no es así, es por eso que se deben presentar características propias en la generalización del conjunto digno de medición.

En la Teoría de la Medida, es necesario la definición de una δ -álgebra en el conjunto X que es una familia Ω de subconjuntos de X (Alegría, 2007) que tiene las siguientes propiedades:

1. El vacío pertenece a la colección Ω .
2. Si un subconjunto $A \in \Omega$, implica que el complemento del conjunto A también pertenece a Ω .
3. Si los elementos $A_1, \dots, A_n, \dots \in \Omega$, implica que la unión de todos los elementos de Ω .

Retomando las definiciones anteriores, se conceptualiza entonces lo que es un espacio medible, definido como un par (X, Ω) que está formado por el conjunto X y por la δ -álgebra de Ω de los subconjuntos de X (Alegría, 2007), esto implica que si se toma un subconjunto $A \in X$, es medible si $A \in \Omega$.

Cuando se tiene el espacio medible, la medida es una función $\mu: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

1. $\mu(A)$ es mayor o igual a cero, para todo A que pertenece a Ω
2. La función μ del vacío es cero.
3. La función μ de todos los elementos que pertenecen al subconjunto A es igual a la sumatoria de cada una de las funciones μ de cada elemento de A , si cada elemento pertenece a Ω y la intersección entre ellos es disjunta.

De lo anterior es posible definir un espacio de medida, en donde se tiene que es una terna (X, Ω, μ) formada por el espacio medible (X, Ω) y una medida definida en él (Alegría, 2007)

El producto de medida, dentro de la teoría de la medida, está basado en la construcción de una δ -álgebra en el conjunto Ω y una función medida μ en el producto $X = \prod X_i$, y la construcción de un espacio de medida (X_i, Ω_i, μ_i) , en donde i pertenece a un intervalo dado.

El producto de medida se da si se toman subconjuntos, un $A \in \Omega_1$ y un $B \in \Omega_2$ tal que, la función medida μ del producto entre $(A \times B)$ ⁷ es igual al producto de la función medida μ_1 de los elementos del subconjunto A con la función medida μ_2 de los elementos del subconjunto B que construyen una nueva δ -álgebra llamada δ -álgebra producto.

En términos formales se tiene que: $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$

Dentro de las proposiciones de la Teoría de la Medida, se ha demostrado que la δ -álgebra producto existe, es única y es la generada por los productos medibles (Universidad de Extremadura, 2014, pp. 116-117).

⁷ La simbología “x” no hace referencia al producto cartesiano, sino a la operación producto o multiplicación.

Perspectiva Didáctica

En términos didácticos, el número es también un sinónimo de medida, dado que compara la distancia y denota así mismo relaciones de orden como el mayor que o menor que. No obstante, en términos de conjuntos, es el número quien se encarga de dotar de sentido a la cantidad de elementos que están allí, lo que hace posible entonces en el niño identificar de manera relacional el tamaño de cada uno de los conjuntos:

Ello se debe al hecho de que la operación medida de los conjuntos, que consiste en encontrar su cardinal, conserva la relación de orden: si el conjunto A es más grande que el conjunto B, entonces el cardinal de A es más grande que el cardinal de B. Recíprocamente si el cardinal de A es más grande que el cardinal de B, entonces el conjunto A es más grande que el conjunto B (Vergnaud, 1991, p. 111).

Siendo así, la mirada que se hace del número como medida debe ser interpretada desde dos perspectivas. Como primera parte, está la medida relacionada con lo geométrico y métrico, en cuánto a medidas de longitudes, áreas y volúmenes; y como segunda parte la medida relacionada con lo estocástico, más específicamente en la combinatoria.

Medida relacionada con lo geométrico y métrico

Como primera instancia en esta perspectiva, está la de buscar soluciones a problemas de tipo métrico, como el de las longitudes de un segmento o de objetos del mundo material. Por lo tanto, surge la necesidad de encontrar instrumentos de tal manera que estén muy próximos a la medida del objeto y, que además, permita comparar un objeto entre varios.

Así pues, dentro de las soluciones está la de encontrar un intermediario (Vergnaud, 1991) cuyo instrumento permite hacer comparaciones de tipo cualitativo para llegar a conclusiones como mayor que, menor que o igual que. Así pues, “La composición de dos comparaciones sólo tiene sentido, efectivamente, si el intermediario se mantiene invariable entre las dos comparaciones” (Vergnaud, 1991, p. 120).

Ahora bien, no es la única solución que existe, y es necesario puntualizar que, para lo anterior, como es de carácter cualitativo, se necesita encontrar un instrumento de tal manera que se pueda establecer comparaciones de tipo cuantitativo, siendo así, este instrumento es denominado medidor (Vergnaud, 1991), cuyo papel principal es el de poder dotar de sentido numérico al objeto que se mide, es decir, asociar un número a cada objeto que se compara. Sin embargo, en este instrumento aparece la aproximación dado que hay objetos que no son proporcionales al instrumento. No obstante:

La función de los instrumentos de medida (metro, cinta flexible, cadena de agrimensor, balanza, litro, decilitros, etc.) es la de permitir asociar un objeto a un número, que será su medida, y facilitar así la comparación de los objetos entre sí (Vergnaud, 1991, p. 120).

Cuándo se utilizan estos instrumentos denominados medidores, se plantean las unidades de medida⁸, que al ser multiplicadas forman una dimensión distinta a la que están, por lo tanto, la dimensión en términos didácticos, es considerada desde dos perspectivas: la primera es una dimensión simple, que son aquellas que se miden de manera directa con el medidor; y la segunda se divide en dos: dimensión-producto o dimensión-cociente, que son entendidas como aquellas

⁸Para la presente investigación, éstas son de carácter convencional: el metro, centímetros, decímetros, etc.

medidas que se miden indirectamente y que existen por mediación de dimensiones simples que las componen (Vergnaud, 1991).

Medida relacionada con lo estocástico

El pensamiento estocástico que se relaciona con la medida es más específicamente en la combinatoria, en dónde existe un conjunto producto entre dos conjuntos diferentes, ya no de tipo geométrico como el anterior subtítulo, sino de carácter cualitativo (niños, niñas, camisetas, pantalones, etc.).

De esta manera, las cualidades son denominadas como dimensiones simples, comportándose de igual manera que en los problemas de la perspectiva geométrica y métrica, es decir, la dimensión-producto o dimensión-cociente va ser así mismo una cualidad que está compuesta por las dimensiones simples que se presentan en los problemas desde la perspectiva estocástica.

Siendo así, el número es asociado con cada una de las cualidades de un objeto en particular y por lo tanto se establece un producto cartesiano⁹ que permite la comprensión del producto resultante.

Cabe resaltar que el producto cartesiano y el producto de medida tienen una adecuada relación (Vergnaud, 1991), puesto que éste permite mostrar la relación entre los elementos de un conjunto y los elementos del otro, además de que permite analizar que por cada elemento de un conjunto hay una relación con todos los elementos del otro conjunto, esto es, a manera de

⁹ En esta investigación no está profundizado el producto cartesiano, pero se da a entender que es aquella operación matemática en dónde existe una pareja ordenada en la cuál un elemento de un conjunto dado le corresponde uno y sólo un elemento de otro conjunto diferente o igual.

ejemplo: “3 muchachas y 4 muchachos quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha y cada muchacha con cada muchacho. ¿Cuántas posibles parejas hay?” (Vergnaud, 1991, p. 211).

Del anterior ejemplo, se puede establecer el producto cartesiano de forma gráfica (Ver Tabla 2), en el que se puede observar las anteriores premisas: llamaremos A al conjunto de muchachos, el cual tiene 3 elementos, denotados por las letras a, b, c; y llamaremos B el conjunto de muchachas, el cual tiene 4 elementos, denotados por las letras w, x, y, z.

Tabla 2: Forma gráfica del producto cartesiano.

| | W | X | Y | Z |
|---|--------|--------|--------|--------|
| A | (a, w) | (a, x) | (a, y) | (a, z) |
| B | (b, w) | (b, x) | (b, y) | (b, z) |
| C | (c, w) | (c, x) | (c, y) | (c, z) |

Fuente: Vergnaud, 1991, p. 221

De forma directa, haciendo uso de la multiplicación, se tiene que 3 muchachos por 4 muchachas es igual a 12 parejas, en dónde el 3 y el 4 pertenecer al plano numérico, muchachos y muchachas son dimensiones simples y parejas es una dimensión-producto. Sin embargo, al hacerse el uso del plano cartesiano, se pueden ver las 12 parejas posibles y las relaciones entre elemento a elemento y elemento a conjunto.

Conceptualización del producto de medida

Con base a las conceptualizaciones anteriormente dadas, es posible establecer para este trabajo un producto o multiplicación entre cada una de las medidas que permiten, desde la perspectiva geométrica y métrica y la perspectiva estocástica, encontrar una nueva dimensión-

producto, por lo tanto, entenderemos la multiplicación de producto de medidas como aquella relación entre tres cantidades, en donde la cantidad resultante es una composición diferente a las otras dos pero compuesta por ellas, que son expresadas tanto en un plano numérico como en el plano dimensional.

Ahora bien, dado que la composición es diferente, pero compuesta por cada una de las cantidades multiplicadas, en el plano dimensional, desde la perspectiva geométrica, nace el concepto de área o de volumen, por lo tanto:

La noción de metro cuadrado tiene, pues, dos sentidos complementarios, el de cuadrado de un metro de lado, y el de producto de dos medidas de longitud (metro x metro). Sólo el segundo sentido permite extender a formas que no se dejan componer en cuadrados (triángulos, círculos, etc.) la relación fundamental que acabamos de ver. (Vergnaud, 1991, p. 213).

Pero si es tomada desde la perspectiva estocástica, más específico la combinatoria, el producto resultante es así mismo una composición diferente, dada a partir de las otras dos, es por eso que Vergnaud (1991) hace un énfasis en sus ejemplos al afirmar que: “Una pareja consiste en la asociación de un elemento del primer conjunto (muchachos) a un elemento del segundo (muchachas). El número de parejas es igual al producto del número de muchachos por el número de muchachas” (Vergnaud, 1991, p. 212).

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Metodología

Con el fin de responder la pregunta de investigación ¿Cómo es el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida de las estudiantes de segundo y tercer grado de primaria? y en concordancia con el objetivo de analizar el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida de las estudiantes de segundo y tercer grado, se hace necesaria una investigación de enfoque cualitativo que permita poner en diálogo el marco teórico anteriormente descrito respecto a las actividades que realizan los sujetos investigados.

Se justifica entonces una investigación desde un enfoque cualitativo, dado que este permite observar, describir y analizar un proceso, en dicha investigación, el proceso de objetivación de las estudiantes, teniendo en cuenta las acciones, los gestos, las palabras, los procedimientos y los medios semióticos que utilizan.

De esta manera, “El enfoque cualitativo evalúa el desarrollo de los sucesos, es decir, no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad” (Corbetta citado en Sampieri *et al.*, 2006, p. 50), en dónde la realidad se define a través de las interpretaciones de los participantes de la investigación.

Por medio del enfoque cualitativo, se implementa un *estudio de casos* para comprender en profundidad esa realidad social y educativa de las participantes, dado que éste es el “Estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas” (Stake, 1998, p.3), además se enfatiza la idea de que el propósito de un caso no es el de representar el mundo, si no el de presentar la realidad concreta del caso.

Siendo así, para ser más precisos, se toma el *estudio intrínseco de casos*, dado que el propósito de éste es generar la comprensión del caso en sí mismo, mediante un análisis descriptivo y no una teoría o una generalización con los datos obtenidos (Stake, 1998).

Ahora bien, como apoyo metodológico se diseñaron fichas de trabajo basadas en las *fases de la actividad*, propuestas por Radford (2010), las cuales, a su vez, están basadas en la *Teoría de la Actividad* y la *Teoría de la Objetivación*.

Fases de la Actividad en el salón de clase.

Dado que la Teoría de la Objetivación parte de una postura histórico-cultural, el éxito en matemáticas no sólo depende de la autonomía del sujeto, sino que ésta autonomía se complementa con la interacción con el entorno y los demás sujetos participantes, es así entonces que:

El alumno que resuelve con éxito problemas, pero que es incapaz de socializar o de entender o interesarse en las soluciones de los otros o de ayudar a los otros a comprender la suya está apenas a medio camino de lo que entendemos por éxito en matemáticas (Radford, 2006, pp. 117-118).

Para propiciar este éxito, se propone dentro de la mencionada teoría, las fases de la actividad en el salón de clase, dado que este espacio no es solo para el consenso personal, sino que éste da oportunidades para que los alumnos estén dentro de la comunidad. Así, las fases de la actividad son tres, que se dan de manera secuencial y permiten que los estudiantes se relacionen en pequeños grupos, después con otros grupos y por ende otros sujetos y por último un consenso entre la comunidad en general y el docente.

En la primera fase nombrada *El trabajo en pequeños grupos*, el profesor debe proponer tareas y problemas que conlleven a la objetivación del saber, “En cada pequeño grupo, los alumnos se apoyan mutuamente para alcanzar la solución de los problemas que se les ha dado. Los alumnos y el profesor están conscientes de que hay diferencias individuales que llevan a formas diferentes de participación” (Radford, 2010, p.16).

La segunda fase nombrada *Intercambio entre pequeños grupos*, hace referencia a la minimización de la diferencia entre argumentos de distintos grupos con el fin de alcanzar una reflexión matemática. Por lo tanto, “Las reflexiones producidas por los pequeños grupos son, a menudo, objeto de intercambio. Un grupo puede intercambiar sus soluciones con otro grupo con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios” (Radford, 2010, p.19).

Por último, la fase nombrada *Discusiones generales* es el momento de convergencia de todos los alumnos y el profesor, dónde se discuten aspectos generales y acuerdos a los que se llega en el intercambio entre pequeños grupos. Esta fase “Es otra manera de intercambiar ideas y discutirlos. Es otro momento que posee el profesor para lanzar la discusión en puntos que requieren mayor profundidad de acuerdo con los estándares curriculares” (Radford, 2010, p.19).

Implementación del diseño metodológico

Esta investigación se llevó a cabo con las estudiantes del grado segundo (2º1, 2º2 y 2º3) en el año 2014 continuando con las mismas estudiantes en el grado tercero (3º1, 3º2 y 3º3), quienes proporcionaron la recolección de la información. El caso que se analizó fue conformado por tres grupos de tres estudiantes cada uno, teniendo así un total de nueve estudiantes. Se entiende el caso como “[...] un grupo de personas, eventos, sucesos, comunidades, etcétera,



sobre el cual habrán de recolectar los datos, sin que necesariamente sea representativo del universo o población que se estudia” (Sampieri, 2006, p. 596) y el número de estudiantes escogidos se justifica en que “no hay reglas” para el tamaño de la muestra siempre y cuando ésta investigación se dé bajo un enfoque cualitativo (Patton, 1990, p. 181).

Para la elección del caso nos basamos en la observación realizada en el grado segundo e inicios del grado Tercero, además, dado que la investigación busca profundidad en la información recolectada, se pretende calidad en la muestra, más que cantidad. Nos conciernen casos que nos ayuden a entender el fenómeno de estudio y a responder a las preguntas de investigación (Sampieri, 2006), por ello seleccionamos estudiantes con habilidades para la comunicación, la argumentación, buen tono de voz, participativas, expresivas y con capacidad de escucha.

En coherencia con el enfoque de metodología cualitativo, es importante destacar que la recolección de los datos se enfoca “[...] en obtener las perspectivas y puntos de vista de los estudiantes (sus emociones, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos)” (Sampieri 2006, p.49), siendo así, para la recolección de los datos se realizó por medio de las observaciones en clase, dos actividades, desarrolladas en tareas y a partir de tres fichas de trabajo, y en cada una de ellas se obtuvo videos, imágenes y audios, autorizados por la institución educativa (Ver anexo 1).

Descripción de las actividades

Las actividades descritas a continuación, emergieron a partir de diferentes situaciones y acciones realizadas por las estudiantes.

Ficha de trabajo diagnóstica:

La ficha de trabajo diagnóstica se realizó de manera individual, en esta se propuso a las estudiantes resolver cinco problemas de tipo aditivo y multiplicativo, en particular retomando los planteamientos de Vergnaud (1991), quien clasifica los tipos de problemas multiplicativos en: Isomorfismo de medida, Producto de medida y Espacio único de medida; con el objetivo de conocer si las estudiantes identifican cómo resolver un determinado problema mediante la adición, sustracción o multiplicación. (Ver anexo 2).

Actividad 1:

Diseño de mi uniforme ideal

Esta primera actividad emergió a partir de la conversación de un grupo de estudiantes, quienes mencionaban que su uniforme era muy bonito, sin embargo, les gustaban también otros uniformes, por tener otros accesorios, como por ejemplo un chaleco, o por los colores de dicho uniforme; de esta situación surgen entonces dos tareas, descritas a continuación.

Tarea 1.1: Cada estudiante realizó en la casa el diseño del uniforme ideal, pegando con cinta adhesiva cada una de las prendas y accesorios del uniforme. (Ver anexo 3).

Tarea 1.2: La tarea dos de esta primera actividad se realizó con base a lo desarrollado en la tarea 1.1, esta se llevó a cabo en grupos de a tres estudiantes, guiadas por la ficha de trabajo, en la cual se le propuso a las estudiantes solucionar las siguientes preguntas: ¿Cuántas partes tienen en total incluyendo prendas, accesorios y zapatos entre todas?; luego deberían seleccionar

todas las blusas y faldas y responder: ¿de cuántas maneras diferentes pueden diseñar el uniforme utilizando una blusa y una falda?; y por último debían seleccionar todos los zapatos, las blusas y las faldas y responder: ¿de cuántas maneras diferentes pueden diseñar el uniforme utilizando una blusa, una falda y un par de zapatos?. (Ver anexo 4).

Actividad 2:

Planeación fiesta de despedida

La segunda actividad emergió durante la conversación de un grupo de estudiantes que preguntaron la fecha de finalización de actividades por parte de los practicantes, algunas estudiantes mencionaron que sería una buena idea realizar una despedida, de allí surge entonces la planeación de la fiesta de despedida.

Para la realización de dicha planeación, inicialmente se realizaron dos tareas, con el fin de familiarizar a las estudiantes con las dimensiones de largo y ancho de una figura; posteriormente se conformaron tres grupos de trabajo, un grupo encargado de la logística, otro de la decoración, y, por último, un grupo encargado de la comida.

Tarea 2.1: Las estudiantes realizaron la tarea en los pequeños grupos de trabajo, con apoyo de una ficha de trabajo, en la cual se cuestionó acerca de la identificación del largo y el ancho de algunas figuras geométricas; posterior a ello, las estudiantes se familiarizaron con el concepto de perímetro, utilizándolo en figuras geométricas, la baldosa de un salón de clase y por último en el piso de un salón de clase. Las estudiantes no estuvieron condicionadas bajo ninguna



unidad de medida, ni medidor, puesto que la idea era que lo establecieran ellas mismas. (Ver anexo 5).

Tarea 2.2: En dicha tarea, las estudiantes accionaron respecto a la medición del largo y el ancho de un salón de clase, además se cuestionó respecto al área del salón; con el fin de determinar que entendían por área, y como relacionaban esta con las longitudes del salón. (Ver anexo 6).

Tarea 2.3: Cada estudiante realizó en la casa una ficha de trabajo, dependiendo al grupo que pertenecía, en esta las estudiantes escribieron acerca de cómo ha sido la decoración, comida o lugar de una fiesta en la que hayas estado. Además, acerca de la temática, propuesta del menú o el lugar adecuado para realizar la fiesta de despedida. (Ver anexo 7, 8 y 9).

Tarea 2.4: Para la realización de la tarea 2.4 se socializó previamente la tarea 2.3 con el fin de compartir las ideas y propuestas, luego en medio del debate se inició la realización de la segunda tarea, con apoyo de una ficha de trabajo, la cual por medio de preguntas logró concretar las propuestas para la comida, la decoración y la logística. (Ver anexo 10, 11 y 12).

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida

El análisis de la presente investigación, se da a partir de la información recolectada por medio de videos y fotografías de las tareas que fueron derivadas de las actividades que realizaron los estudiantes; para ello en un primer lugar se hará la descripción de los episodios en los cuales se observa la distinción entre las acciones que realizaron y el discurso que tuvieron al estar en contacto con problemas desde la perspectiva estocástica y la perspectiva geométrica y métrica de la multiplicación, vista como producto de medida.

En segundo lugar, a partir de esta diferencia emergen dos categorías, las cuales están denotadas por lo estocástico (específicamente la combinatoria) y por lo geométrico y métrico (específicamente el área), las cuales tienen en común la constitución de la dimensión y la objetivación de la multiplicación como producto de medida. Siendo así, la primera categoría está dividida en tres momentos:

- 1. La única dimensión simple:** En el primer acercamiento al reconocimiento de las unidades de medida correspondientes a las cantidades dadas en los problemas propuestos, se evidencia que las estudiantes utilizan la adición como un instrumento, puesto que solo se reconoce una única dimensión simple en el proceso y su solución.
- 2. El reconocimiento de más dimensiones simples:** En las tareas relacionadas con el producto de medida, se evidencia que las estudiantes reconocen varias dimensiones simples de las cantidades correspondientes de un problema multiplicativo, las cuales se

dieron a partir del uso de material concreto y de las representaciones gráficas, posibilitando así la relación elemento a conjunto.

- 3. La dimensión-producto:** Constitución de la nueva dimensión y objetivación de la multiplicación como producto de medida. Los estudiantes además de reconocer las dos dimensiones de las cantidades dadas en un problema de tipo multiplicativo de producto de medida, reconoce la nueva dimensión que se forma para dar respuesta a dicho problema.

Respecto la segunda categoría, está dividida en dos momentos que se relacionan por el uso de medidores por parte de las estudiantes y la necesidad de asignarle un número a las dimensiones:

- 1. Identificación de las dimensiones simples:** Evidencia de las dimensiones simples a partir de medidas no convencionales y convencionales, con el fin de asignarle un número a la dimensión simple a partir del uso de medidores.
- 2. Relación de las dimensiones simples:** Evidencia de las dimensiones simples y su relación, las cuales llevan a formar la dimensión-producto compuesta por dimensiones convencionales o no convencionales.

Episodios

Descripción de los episodios categoría 1

A partir del desarrollo de las tareas, cuyo objetivo principal fue el de orientar las actividades que emergieron de las estudiantes, se pudo realizar algunos videos con la intención de obtener registro visual y auditivo de los gestos, las acciones y la manipulación de los artefactos mentales y físicos utilizados por las estudiantes. A estos videos se les extrajeron algunos episodios, para

sustentar las acciones de las estudiantes y la manipulación de los artefactos para analizar el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida.

- **Episodios de la Actividad 1:** “Diseño de mi uniforme ideal”

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, a partir de la segunda tarea de la Actividad 1 “Diseño de mi uniforme ideal”, en los episodios 1, 2 y 3, se observan las primeras acciones realizadas por las estudiantes encaminadas al diseño del uniforme ideal, en las cuales hubo un primer momento en que ellas solo tenían en cuenta la cantidad de prendas que tenían, mas no cómo su uso podía ayudarlas a representar las diferentes formas de diseñar el uniforme.

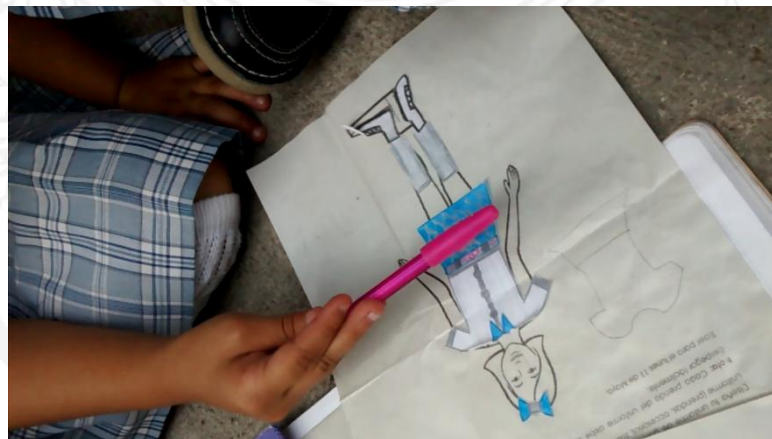
Episodio 1:
(Grupo 1)

1. **P¹⁰:** listo, tenemos una blusa, una falda y un par de zapatos.
2. **E2:** va una forma.
3. **P:** tú ahora me explicaste con las dos blusas y las dos faldas que yo con esta blusa me puedo poner ¿Cuántas faldas?
4. **E2:** dos.
5. **P:** ok, ¿y con la otra blusa?
6. **E2:** también las dos.
7. **P:** listo, entonces si lo vemos así, yo con esta falda y esta blusa me pongo este par de zapatos, ¿pero yo con esta misma blusa y esta misma falda me pongo el otro par?
8. **E2:** si, puedo.
9. **P:** entonces con esta blusa y esta falda, y teniendo tres pares de zapatos ¿Cómo me puedo vestir?
10. **E2:** ¿solamente esta y esta (señalando una blusa y una falda), y los tres pares?
11. **P:** sí.
12. **E2:** esta con esta (señalando la falda y la blusa) y un par, esta con esta (señalando la misma blusa y la misma falda) con el otro par, y esta con esta (señalando la misma blusa y la misma falda) y el otro par.
13. **P:** ¿y ahí cuantas formas habían?
14. **Es:** tres.
15. **P:** tres formas, listo, pero es que de vestirme tengo cuatro formas, estas faldas y estas blusas tengo cuatro formas de usarlas.

¹⁰ En la presente investigación, se denota por P a los practicantes y E1, E2, E3 en cada grupo, las intervenciones de las estudiantes, Es el discurso de dos o más estudiantes, puesto que por motivos éticos no son mencionadas por nombres propios.

- 16. Es:** sí.
- 17. P:** Pero a esas blusas y esas faldas le vamos a añadir los zapatos porque uno no va a salir descalzo a la calle ¿cierto?
- 18. E1:** a ver, cuatro y tres [mmm] siete.
- 19. P:** siete, ¿Por qué?
- 20. E1:** porque mire acá tenemos cuatro, que son dos blusas y dos faldas, y acá tenemos tres pares de zapatos.
- 21. P:** ¿entonces como llegaste al siete?
- 22. E1:** uno suma esto con esto (señalando el uniforme con blusa y falda, y los zapatos).
- 23. P:** ¿lo sumaste? Pero tú cuando tenías las blusas y las faldas, ¿sumaste las dos blusas y dos las faldas? o ¿qué fue lo que hiciste?
- 24. E1:** sume las dos blusas y las dos faldas.
- 25. E2:** ya se, mire yo esta con esta y con esta (señalando la blusa, la falda y el par de zapatos) es una forma, como ahorita dijimos me puedo poner esta y esta (señalando blusa y falda) con los tres pares de zapatos, y el par de ella (haciendo referencia al uniforme de blusa y falda de la compañera) con los tres pares de zapatos, entonces serian seis formas.
- 26. P:** ahí van seis formas, ¿cierto?
- 27. Es:** sí.
- 28. P:** pero es que solamente te vestiste con estas dos formas, tenemos la blusa y la falda de E1, y la blusa y la falda de E2, entonces tú me estabas diciendo con tu blusa y con tu falda te puedes vestir con los tres pares de zapatos ¿Cuántas veces?
- 29. E2:** con mi blusa y con mi falda son tres formas porque son tres pares de zapatos.
- 30. P:** recuerda que también podemos usar tu blusa y la falda de E1, o tu falda y la blusa de E1, ¿Cuántas formas de usar el uniforme teníamos usando las blusas y las faldas de las dos?
- 31. E1:** son mmm... cuatro formas diferentes, porque son esta blusa con estas dos faldas y esta blusa con las mismas dos faldas (señalando las prendas de cada uniforme) y son tres pares de zapatos.

Ilustración 5: Estudiante señalando las prendas del uniforme



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

- 32. E2:** entonces con una forma de vestirnos me puedo poner los tres pares de zapatos, con otra forma los mismos tres pares serian seis formas de usar el uniforme, con otra van nueve y serian 12 formas de usar el uniforme.
- 33. P:** ¿con las blusas y las faldas?
- 34. E1:** ¡no! Son 12 formas de usar el uniforme con las blusas, las faldas y los pares de zapatos.

Episodio 2:
(Grupo 2)

1. **E3:** esta blusa (Señala una ficha) se la puede poner con esta falda y estos zapatos (Señalando la otra ficha) o esta blusa (Señala una ficha) con esa blusa y estos zapatos (Señala la otra ficha)
2. **P:** ¿Y por qué no la visten? Ustedes pueden vestir las muñecas, pueden quitarle las prendas.
3. ¿Cómo puede ser una combinación?
4. **E1:** estos zapatos (señala su ficha) con esta blusa (la de la otra ficha) y esta falda (La de su ficha)
5. **P:** vístela.
6. **E1:** retira la blusa de su ficha.
7. **E2:** esa (señalando la blusa) póngala acá (En su ficha).
Las estudiantes visten la muñeca.
8. **P:** ¿Ahí cuantas maneras van?
9. **E1:** nueve.
10. **P:** ¿Nueve?
Las estudiantes siguen vistiendo la muñeca
11. **P:** ¿Ya cuantas maneras van?
12. **E:** dos.
Las estudiantes continúan vistiendo la muñeca.
13. **P:** ¿Cuantas maneras van?
14. **E1:** tres.
15. **E3:** esta es otra, van cuatro.

Episodio 3:
(Grupo 3)

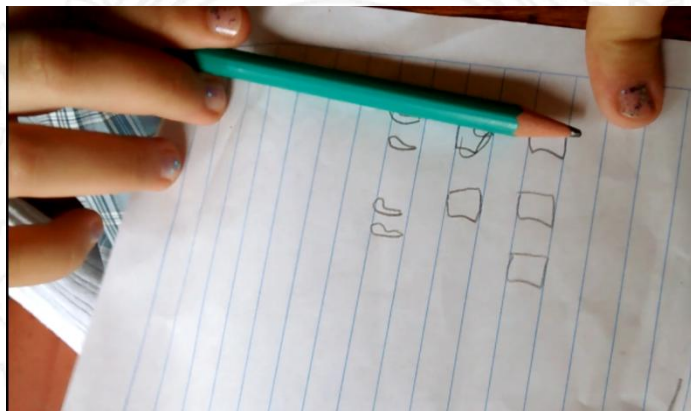
1. **P:** entonces si yo pongo esta con esta (blusa) no sirve. (tiene en la mano una de las faldas e indica que si no se puede con otra de las blusas que ya estaba con otra falda).
2. **E1:** no, porque esa (blusa) ya tiene falda.
3. **E2:** no, porque vea seria así:
E2 explica a sus dos compañeras del grupo como se puede combinar los uniformes utilizando una blusa y una falda, teniendo tres blusas y tres faldas.
4. **E2:** esta (Blusa) se puede poner con esta (falda), con esta (falda) o con esta otra (falda) y pues lo mismo pasa con las otras dos (Blusas).

En medio del accionar con los instrumentos de las estudiantes y del discurso con sus compañeras y los investigadores, la representación con las prendas se hace evidente a partir de las diferentes formas de usarlas y diseñar el uniforme. Así pues, las estudiantes pasan a la relación que hay entre las cantidades de cada prenda y la cantidad de uniformes resultantes con estas, a su vez, la relación entre lo que representa cada cantidad de la nueva representación llamada “uniforme”.

Episodio 4:
(Grupo 3)

1. **E1:** Entonces debemos multiplicar las blusas, con los zapatos y las faldas.
2. **P:** Bueno, ¿Cómo quedaría?
3. **E1:** Quedaría: Debemos multiplicar tres por cuatro.
4. **P:** ¿tres por cuatro? ¿De dónde sale el cuatro?
Las estudiantes tienen una hoja y en ella hay dibujados lo que representan las blusas (tres), las faldas (dos) y los pares de zapatos (dos).
5. **E1:** (Señalando la hoja) Porque aquí son tres (Señala las blusas) y aquí dos y aquí dos (Señala las faldas y los pares de zapatos respectivamente) entonces son cuatro. ¿tres por cuatro? Serían 12 en total. (Ver ilustración 6).

Ilustración 6: Dibujo estudiante de las faldas, las blusas y pares de zapatos



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

6. **P:** ¿12 qué?
7. **E1:** 12 uniformes.
8. **P:** Vamos a escribirlo como en el ejercicio pasado. ¿Cómo quedaría la operación sin dibujitos sino con palabras y números?
Las estudiantes escriben.
9. **E1:** tres blusas por dos faldas por dos zapatos igual 12.
10. **P:** ¿12 qué?
11. **E1:** 12 uniformes.
Una de las estudiantes no entiende, entonces otra del grupo le explica.
12. **E1:** Tenemos que sumar (refiriéndose a la palabra operar) tres blusas por dos faldas por dos zapatos, entonces sería multiplicar tres por cuatro que sería 12 y nos daría 12 uniformes. ¿Entiendes?
13. **E2:** [¡Ah!] Ósea que yo tendría que multiplicar tres por cuatro para que me pueda dar el resultado de los uniformes.
14. **E1:** En total serían 12.

Episodio 5: (Grupo 3)

1. **P:** Saben que dos por tres da seis, pero ¿por qué faldas y blusas dan uniformes?
2. **E1:** Porque... Porque si uno no tuviera ni la falda ni la blusa, no podríamos tener un uniforme.
3. **P:** ¿Que dices E2 al respecto? ¿Si escuchaste lo que dijo Ella? Repítele otra vez.
4. **E1:** Sin faldas y sin blusas no podríamos tener uniformes.
5. **E2:** Yo estoy de acuerdo con lo que dice ella, porque si uno necesita una falda y una blusa Para hacer un uniforme, y no lo tiene, al respecto, lo que dice ella es la verdad.

- **Episodios de la Actividad 2:** “Planeación de la fiesta de despedida”

Durante la ejecución de las tareas respecto a la Actividad 2 “Planeación de la fiesta de despedida”, se observan en los episodios, las acciones y discusiones generadas en los grupos, en relación a los materiales e ingredientes necesarios para la fiesta, y como estos se utilizarían.

Para comenzar, el grupo de decoración realizó un listado con los materiales que a ellas les parecían pertinentes para la decoración de una fiesta; luego de tener los materiales, pensaron en cómo podían utilizar los diferentes tipos de estos, y llegaron a la decisión de realizar un cartel de bienvenida (marcadores y cartulina), una flor con bombas (bombas redondas) y una mariposa con bombas (bombas chorizo y bombas redondas). En los episodios, 6, 7 y 8, se observan las discusiones generadas a partir de cómo usar los diferentes colores de los materiales, planteados por las mismas estudiantes.

Episodio 6:
(Grupo 2: decoración)

1. **P:** bueno, vamos a mirar primero lo del cartel de bienvenida, entonces ¿Qué necesitamos?
2. **Es:** marcadores.
3. **E1:** y una cartelera.
4. **P:** cartulina.
5. **E1:** eso, cartulina para hacer la cartelera.
6. **P:** listo, entonces ¿cuantos colores de cartulina pusimos?
7. **E1:** ¡cuatro!
8. **P:** listo cuatro, ¿y de marcadores?
9. **E3:** seis.
10. **E1:** no, vea uno, dos, tres, hay cuatro.
11. **E2:** ¿de marcadores? No, son cinco, porque vea uno, dos, tres a no si cuatro. (Ver ilustración 7).

Ilustración 7: Estudiante contando la cantidad de colores de los marcadores.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

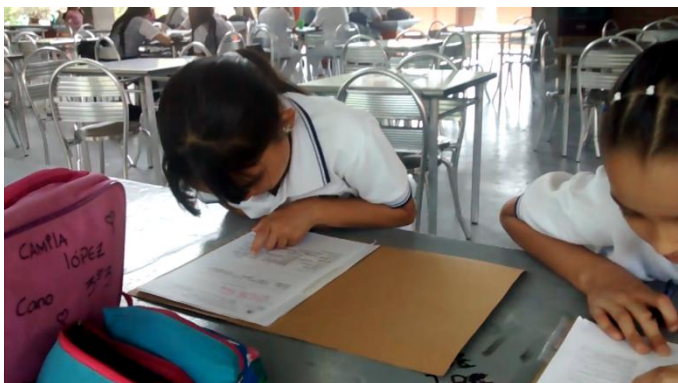
12. **P:** entonces tenemos cuatro colores de marcadores y cuatro colores de cartulina, ¿cierto? Entonces, ¿de cuantas formas podemos hacer el cartel de bienvenida?
13. **E2:** ocho.
14. **E1:** si ocho.
15. **P:** ¿de ocho? ¿Por qué?
16. **E2:** porque cuatro más cuatro es ocho.
17. **E1:** si tenemos cuatro colores de cartulina y cuatro colores de marcadores, en cada cartulina puede ir de a un color.
18. **P:** porque podemos usar un color en diferentes cartulinas.
19. **E3:** si diferentes colores de marcadores.
20. **P:** entonces, ¿de cuantas formas podemos hacer la cartelera usando un color de marcador y un color de cartulina?
21. **E1:** ¡16!
22. **P:** ¿16? ¿Por qué?
23. **E1:** porque cuatro por cuatro, 16.
24. **P:** pero, ¿cuatro qué?
25. **E1:** cuatro colores y cuatro form... mmm...
26. **E3:** ¡cartulinas!
27. **E1:** cuatro colores de cartulinas y cuatro colores de marcadores.
28. **P:** listo, y eso sería 16...
29. **E1:** formas para hacer las carteleras o los carteles que es lo mismo.

Episodio 7:

(Grupo 2: Decoración)

1. **P:** listo, entonces sigamos con las flores de bombas ¿cierto? Tenemos muchos colores para las bombas y de las flores, ¿Cuántos colores de bombas tenemos? (Las estudiantes cuentan los colores que eligieron para las bombas). (Ver ilustración 8).

Ilustración 8: *Estudiantes contando los colores que eligieron para las bombas.*



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

2. **E1:** cinco, hay cinco colores de bombas.
3. **E2:** hay cuatro, porque vea rosado, lila, verde azul y azul claro.
4. **E1:** ah sí, hay cuatro.
5. **P:** ¿y cuantos colores de flores?
6. **E3:** otros cuatro.
7. **P:** miremos entonces, tenemos cuatro colores de flores.
8. **E1:** y cuatro colores de bombas.
9. **P:** entonces ¿cómo vamos a usar las bombas?
10. **E1:** mezclando los colores.
11. **E2:** no, pero como vamos a mezclar los colores.
12. **E1:** si, porque puede poner una bomba rosada y otra azul, y así sería la flor.
13. **P:** E1 ¿cómo nos habías dicho que eran las flores de tu carpeta?
14. **E1:** el centro era de diferente color y los pétalos también.
15. **P:** el centro diferente a los pétalos, ¿cierto? Entonces escojamos los colores que tenemos de las bombas para los pétalos, y los que colocamos para las flores que sean los del centro, ¿Cuántos colores del centro tenemos?
16. **E2:** uno, dos, tres, hay cuatro.
17. **P:** ¿hay alguno igual al de los pétalos?
18. **Es:** ¡no!
19. **P:** listo, entonces de aquí (los colores para los pétalos) escojamos tres colores, y de ¿cuatro colores para el centro? Para tener opciones diferentes para el centro. ¿entonces como quedo?
20. **E3:** tres colores para los pétalos y cuatro para el centro.
21. **P:** ok, entonces ¿de cuantas maneras podemos hacer la flor de bombas?
22. **E1:** de siete.
23. **P:** ¿Por qué de siete?
24. **E1:** porque cuatro más... ¡Ah no! Porque se puede mezclar, digamos que este es el color rosa ¿cierto?, se puede mezclar con este, con este y con este (haciendo referencia a las tres opciones de colores escogidos para los pétalos).
25. **E1:** eso sería como repartirlos.
26. **E2:** divídalo. (relacionando la palabra “repartir” con la división).
27. **E1:** pues mezclarlos, puede mezclar por ejemplo el rosado con el negro, el rosado con el blanco... pues una división de colores.
28. **P:** pero es que si dividimos, nos van a dar ¿más o menos colores?
29. **E2:** mmm ¡más! Ah no, menos.
30. **P:** menos, entonces si tenemos muchos colores y vamos a hacer diferentes bombas, será que nos van a dar ¿más o menos formas de hacer las flores de bombas?
31. **Es:** menos.
32. **P:** miren lo que está diciendo Angie acá, podemos coger uno de los colores para el centro, ¿Cuántos colores tenemos para el centro?
33. **Es:** cuatro.

34. **P:** y tres para los pétalos, cogemos uno del centro.
35. **E1:** el rosado por decir.
36. **P:** listo el rosado, con tres para los pétalos; entonces, si tengo uno y aquí ya hay tres (señalando el dibujo realizado por le E1), ¿Cuántas flores llevo acá? Con un solo color.
37. **Es:** tres.
38. **P:** ¿nos dio más? O ¿nos dio menos?
39. **Es:** ¡más!
40. **P:** más formas de hacer las flores con bombas, entonces ¿será que si dividimos?
41. **E1:** no, ah sí.
42. **P:** pero dijiste que dividiendo nos da menos.
43. **E2:** necesitamos que nos dé más. Entonces ¡multipliquemos!, cuatro por tres.
44. **E1:** cuatro colores para el centro.
45. **E3:** para el centro de las flores.
46. **E2:** por tres, que son los de los pétalos de las flores.
47. **P:** y eso nos da...
48. **E1:** 12 flores.
49. **P:** ok, llevamos el cartel para la entrada, llevamos las flores de bombas, ¿Qué nos falta?
50. **E2:** la mariposa.
51. **P:** entonces la mariposa se hace con bombas...
52. **E3:** de chorizo.
53. **E1:** y las redondas normales, que puede ser una café la de chorizo y en las alas las bombas normales las redondas de un color diferente. De las bombas normales hay que elegir varios colores.
54. **E2:** a ver, hagamos la mariposa.
55. **P:** listo, ¿Cuántos colores vamos a escoger para las alas?
56. **E1:** dos.
57. **E3:** dos.
58. **E2:** no, mejor tres.
59. **P:** ¿entonces tres colores para las alas?
60. **Es:** ¡sí!
61. **P:** ¿y para el cuerpo?
62. **E3:** dos.
63. **P:** ¿Cuáles dos?
64. **Es:** dos colores.
65. **P:** ¿Qué colores podrían ser?
66. **E1:** entonces para las alas tres colores y para el cuerpo dos colores, el cuerpo puede ser negro o café, y las alas pueden ser rosado, morado y lila.
67. **P:** ¿están de acuerdo?
68. **Es:** sí.
69. **P:** ok, entonces tenemos tres colores para las alas y dos colores para el cuerpo, ¿de cuantas formas podemos hacer la mariposa?
70. **E2:** de... mmm...
71. **E3:** de seis, si porque multiplicamos 3 colores para las alas y dos colores para el cuerpo, tres por dos da seis.
72. **P:** ¿seis qué?
73. **Es:** seis formas para hacer la mariposa.

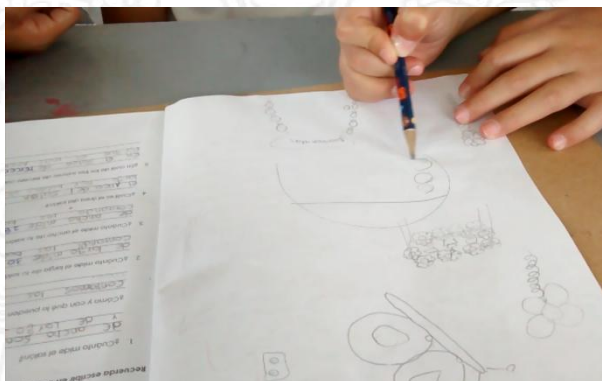
Episodio 8:

(Grupo 2: Decoración)

1. **P:** ok, ya tenemos listo el cartel, las flores de bombas, las mariposas de bombas y nos está faltando...
2. **E3:** las bombas de la entrada.
3. **E1:** pueden ser de diferentes colores.
4. **P:** pero entonces ¿de un solo color?
5. **E2:** sí, porque adentro ya hay muchos colores, afuera mejor que sea de uno solo.
6. **E1:** o como un arcoíris.
7. **E3:** no, así se ve muy feo.

8. **E1:** a bueno, entonces de un solo color todo el arco.
9. **P:** a listo, y tenemos diferentes opciones de colores.
10. **E1:** o también se pueden dos arcos, vea como en una fiesta que yo estuve, el cartel en la mitad, y a acá un color (dibuja las bombas que irán a un lado del arco). (Ver ilustración 9).

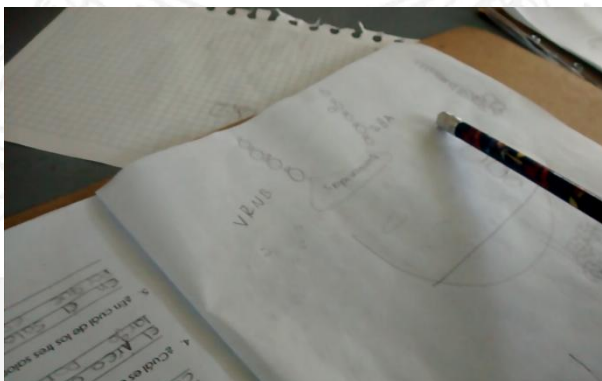
Ilustración 9: Dibujo realizado pro las estudiantes del diseño para la decoracion de la fiesta



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

11. **E2:** y acá otro (refiriéndose al otro lado del arco). (Ver ilustración 10).
12. **E1:** por ejemplo blanco y rosado.
13. **P:** listo entonces vamos a mirar los colores, ¿cuantas opciones para este lado?
14. **E3:** entonces un lado rosado y otro lado blanco.
15. **P:** listo, ¿qué otros colores?
16. **E2:** negro y blanco.
17. **E3:** azul y rojo.
18. **E2:** verde y blanco.

Ilustración 10: Estudiante indicando uno de los lados del arco de bombas.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

19. **P:** ya tenemos entonces a este lado derecho cuatro colores y tres colores al lado izquierdo. ¿de cuantas formas podemos hacer el arco?
Las niñas se toman un momento para pensar.

Ilustración 11: *Estudiantes pensando*



Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

20. **E1:** 12 formas.
21. **E2:** porque cuatro por tres, 12; cuatro colores de un lado y tres colores del otro lado, cuatro colores por tres colores sería 12 arcos.

El grupo encargado de la comida, después de presentar diferentes ideas de los que se podía hacer para la fiesta llego a la decisión de preparar sánduches con alguna bebida, ya que, como ellas lo expresaban, era más fácil de preparar y a la gran mayoría le gusta. Luego de saber que se iba a preparar, pasaron a realizar el listado de los ingredientes necesarios para preparar un sánduche y diferentes tipos de sabores de estos ingredientes.

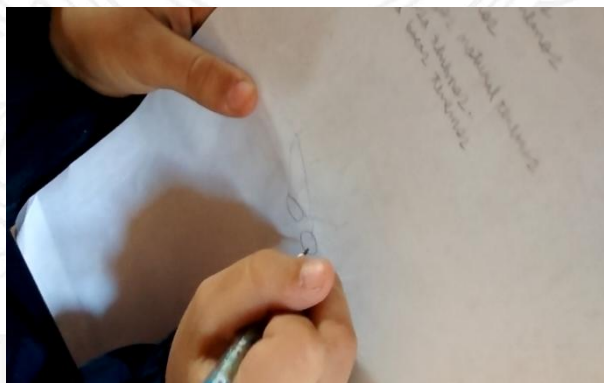
En los episodios 9 y 10, se evidencian las discusiones generadas al preguntar por cómo se pueden utilizar los diferentes tipos de ingredientes para preparar el sánduche, teniendo en cuenta las cantidades y además las características de las cantidades.

Episodio 9:
(Grupo 1: Comida)

1. **P:** miremos, vamos a preparar un sánduche que tenga un tipo de pan, un tipo de carne y un tipo de verdura, ¿Cuántos tipos de cada ingrediente tenemos?
2. **Es:** dos tipos de pan, tres tipos de carnes y tres tipos de verduras.
3. **P:** listo, entonces ¿de cuantas formas diferentes podemos hacer los sánduches? Utilizando un tipo de pan, un tipo de carne y un tipo de verdura.
4. **E1:** de a nueve.
5. **P:** ¿Por qué nueve?
6. **E1:** porque vea tenemos tres panes...
7. **E2:** ¡no! Son dos tipos de panes.

8. **E1:** ah entonces de ocho formas podemos hacer el sánduche, porque son dos tipos de panes, tres tipos de carnes y tres tipos de verduras, si se suman los tres da ocho.
9. **P:** ¿recuerdan cuando hicimos la tarea del uniforme?
10. **E2:** ¡ah sí! Pero no se suma así, serian ocho formas más ocho formas más ocho formas.
11. **P:** entonces estas sumando de a ocho.
12. **E1:** yo digo que es una multiplicación.
13. **P:** ¿Por qué?
14. **E1:** porque una suma es más difícil, pero una multiplicación es igual que una suma, pero usted puede hacer el resultado más rápido
15. **E2:** por ejemplo nueve por ocho.
16. **P:** ¿nueve qué?
17. **E1:** nueve blusas y ocho faldas.
18. **E2:** espere yo hago la multiplicación 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72.
19. **P:** ¿72 que?
20. **E1:** blusas.
21. **E2:** no, blusas y faldas.
22. **E1:** combinadas.
23. **E2:** ah vea es como un conjunto de blusas y faldas.
24. **P:** muy bien, ahora vamos a mirarlo con los sánduches, tenemos dos tipos de panes, tres tipos de carnes y tres tipos de verduras.
25. **P:** entonces ¿de cuantas formas diferentes podemos hacer los sánduches? Utilizando un tipo de pan, un tipo de carne y un tipo de verdura.
26. **E1:** ¡ay! mire acá los dos tipos de panes podemos juntarlos con las verduras.
27. **E1:** a ver, mire por ejemplo, aquí ¿Cuántos eran los tipos de panes? Son dos tipos de panes, hagamos una bolita que significa los panes y las verduras son tres, usted junta estos tres (refiriéndose a los tipos de verduras) con este pan, y con estos tres el otro pan, y ahí hay que hacer una multiplicación. (Ver ilustración 12).

Ilustración 12: Estudiante explicándole a una de sus compañeras por medio de un dibujo.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

28. **P:** entonces ahí tienes panes con...
29. **E1:** con verduras.
30. **P:** entonces ¿Cuántas formas de hacer el sánduche llevas ahí?
31. **E1:** el conjunto de panes y verduras
32. **P:** pero entonces nos falta la carne.
33. **E1:** ah la carne, entonces sería un conjunto de panes, carnes y verduras.
34. **P:** entonces ¿Cuántas formas de hacer el sánduche sería?
35. **E1:** a ver, tenemos dos panes, tres verduras y tres carnes.
36. **E1:** entonces sería uno, dos, tres (llevando la cuenta en su mano) cuatro, cinco, seis... (Ver ilustración 13).

Ilustración 13: Estudiante realizando un conteo por medio de sus manos.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

37. E2: igual a ocho.
38. E1: si ocho.
39. P: lo sumaste, ¿no estabas diciendo que hay que multiplicar?
40. E1: ¡ah sí! Una multiplicación.
41. E2: seis por dos.
42. P: ¿Por qué por dos?
43. E2: ah no, seis por ...
44. P: ¿seis qué?
45. E1: panes y verduras, pues multiplicando tres por dos.
46. P: espera, vamos despacio ¿tres qué?
47. E1: tres verduras, usted junta los tres (refiriéndose a la combinación de cada pan con los tres tipos de verduras, representándolos con la mano derecha) con los otros tres (representándolos con la mano izquierda) son seis (representándolos con la unión de sus manos). (Ver ilustración 14).

Ilustración 14: Estudiante representado la unión con las manos.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

48. E1: y luego multiplica seis panes y verduras, por dos panes.
49. P: pero si ya tenemos panes.
50. E1: ah, por tres carnes. (La estudiante indica con sus dedos la cantidad).
51. P: y eso sería...
52. E1: seis por tres.
53. E2: seis por tres igual a 18.
54. P: ¿18 que?
55. E2: 18 sánduches.
56. E1: 18 conjuntos de panes, verduras y carnes, y todo ese conjunto serían los sánduches.

57. **P:** listo, serían 18 formas de hacer el sandwich con un pan, una carne y una verdura, y ¿si hay alguien a quien no le gustan las verduras?
58. **E2:** se la quitamos
59. **P:** se la quitamos, y ¿que otro ingrediente le colocamos?
60. **Es:** ¡queso!
61. **P:** ¿Cuántos tipos de queso tenemos?
62. **E2:** cuatro tipos de queso.
63. **P:** entonces vamos a hacer, con los ingredientes que tenemos, el sandwich que tenga un tipo de pan, un tipo de carne y un tipo de queso, ¿de cuantas formas lo podemos preparar?
64. **E2:** de 18.
65. **P:** ¿Por qué 18?
Se queda pensando un momento en su respuesta.
66. **P:** debes tener en cuenta cuantos tipos tienes de cada ingrediente ¿cierto?
67. **P:** ¿Cuántos tipos de panes tenemos?
68. **E2:** dos tipos de panes.
69. **P:** ¿Cuántos tipos de carne?
70. **E2:** tres tipos de carne.
71. **P:** ¿y cuantos tipos de quesos?
72. **E2:** cuatro tipos de quesos.
73. **P:** entonces, ¿de cuantas formas podemos hacer el sandwich?
74. **E2:** ¿seis?
75. **P:** ¿Por qué seis? Miremos, ¿Cuántos tipos de sandwich tenemos solo con pan y carne?
76. **E1:** ¡seis tipos! Porque eran dos panes y tres carnes.
77. **P:** entonces, si son seis formas diferentes de hacer el sandwich con carne y pan, ¿Cuántas serían utilizando el queso?

Episodio 10:

(Grupo 1: Comida)

1. **Es:** tenemos tres tipos de carnes, dos tipos de panes y cuatro tipos de quesos.
2. **P:** entonces utilizando un tipo de cada ingrediente, ¿de cuantas formas diferentes podemos hacer el sandwich?
3. **Es:** de 24 formas.
4. **P:** ¿Por qué?
5. **E2:** en las verduras eran 3 tipos y ahora son cuatro tipos de quesos.
6. **E1:** y dio 24 porque lo multiplicamos.
7. **E2:** cuatro quesos por...
8. **E1:** seis panes y carnes.
9. **P:** y nos dio...
10. **Es:** 24 sandwich.

Para finalizar con la actividad 2, en los episodios 11 y 12, cada grupo preparó una exposición en la cual presentaron a las demás compañeras del grado 3^o su propuesta de decoración y comida para la fiesta de despedida, teniendo en cuenta los diferentes tipos y cantidades de materiales e ingredientes que se necesitan para llevar a cabo esta propuesta.

Episodio 11:

(Grupo 1: Comida)

1. **E1:** hola compañeras mi nombre es E1 y estoy con mi amiga E2. hoy estamos con la propuesta de la comida. [...] tenemos dos diferentes tipos de pan, dos diferentes tipos de carne y cuatro tipos de queso [...].
2. **P:** La idea es preparar sánduches que tenga un tipo de pan, un tipo de carne.
3. **E1:** y un tipo de queso. Nosotras multiplicamos estos (Señalo números en la cartelera dos, dos, y cuatro) y nos dio 24 (sánduches) [No] 24 formas para hacer un sanduche.
4. **E2:** Nosotras multiplicamos como hay 2 tipos de bebidas entonces lo multiplicamos con 24, que 24 por dos que nos dio 48 y fueron todo los sánduches y las bebidas.

Episodio 12:

(Grupo 2: Decoración)

1. **E1:** hubo tres colores para los pétalos y cuatro colores para el centro, [eh] hay 12 maneras de hacer la flor, porque cuatro por tres es 12.
2. **E2:** nosotras vamos a hacer la propuesta de la decoración lo que yo voy a hacer es la mariposa de bombas. [eh] los colores son: tres colores para las alas y dos para el cuerpo y nos da seis colores porque tres por dos es seis.
3. **E3:** yo los carteles, que va a decir bienvenidas. Los colores cuatro para los marcadores y cuatro para las cartulinas. porque ¿de cuántas formas lo podríamos hacer? de 16 formas porque cuatro por cuatro me da 16 formas para hacer el cartel.

Descripción de los episodios de la categoría 2

Con relación a los tipos de problemas multiplicativos de producto de medida relacionados con la parte geométrica y métrica, las estudiantes trabajaron en la propuesta de logística para la actividad 2, en la que se plantearon 2 tareas previas para los tres grupos de trabajo, referentes al perímetro y el área de un salón, con las cuales se pretendió identificar las longitudes de un salón o cualquier otro espacio de la institución educativa, para posteriormente, a partir de la comparación de áreas, poder plantear la propuesta sobre el espacio más adecuado para realizar la fiesta.

En el desarrollo de la primera tarea, en los episodios 13 y 14, se registran las concepciones de las estudiantes sobre las longitudes largo y ancho, definidas bajo sus propios discursos, con miras al trabajo con el perímetro del salón.

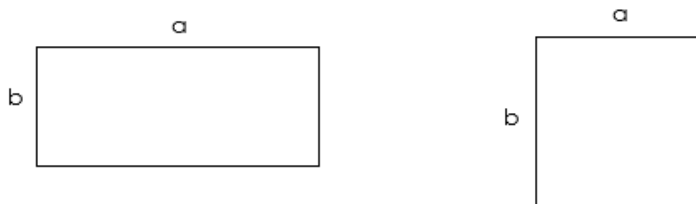
Episodio 13:

(Grupo 1)

1. **P:** bueno niñas, recordamos que las figuras tienen largo y ancho ¿verdad? En el punto 3 nos piden identificar estas longitudes en las dos figuras que allí se muestran, pero primero ¿Qué es el ancho? (Ver ilustración 15).

Ilustración 15: Pregunta ficha de trabajo

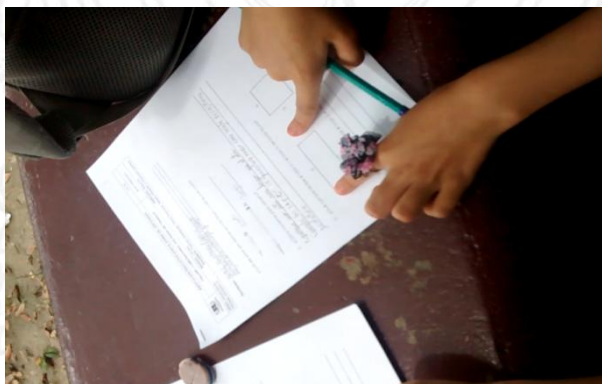
3. ¿Qué nombre recibe el lado a y el lado b de cada figura?



Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

2. **E2:** sería lo más grande.
3. **E3:** El ancho, lo más largo.
4. **E1:** uno es ancho para mantener como una figura así (refiriéndose a los lados paralelos, para que la figura sea cerrada) y para que sean dos iguales, y el otro lado es para diferenciar de otras figuras, entonces el otro es el largo. (Ver ilustración 16).

Ilustración 16: Estudiante indicando el ancho de la figura geométrica.



Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

5. **P:** ok, entonces ¿cómo sería? ¿El lado a es qué?
6. **E1:** ancho (señalando el lado b) y largo (señalando el lado a) de la figura 1, y ancho (señalando, junto con su compañera E2, el lado b) y largo (señalando el lado a) de la figura 2. (ver ilustración 17).

Ilustración 17: Estudiantes indicando el largo y el ancho de la figura geométrica.



Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

Episodio 14:
(Grupo 3)

1. **P:** ¿Cuál sería el largo y cuál sería el ancho?
2. **E1:** El largo podría ser este (señala un lado vertical del cuadrado) y el ancho podría ser este (señala uno de los lados horizontales del cuadrado).
3. **P:** Listo. ¿Y en la otra figura?
4. **E1:** Este podría ser el largo (señala uno de los lados horizontales del rectángulo) y este podría ser el ancho (Señala uno de los lados verticales del rectángulo).
Las estudiantes escriben en la ficha de trabajo.
5. **E1:** ¿Qué diferencia hay entre el largo y el ancho de una figura? (Lee de la guía y se queda pensando) un lado es más largo y otro es más ancho (Sonríe y vuelve a pensar)
6. **P:** ¿Por qué sabes que uno es largo y por qué sabes que otro es ancho?
7. **E1:** Porque este es más chiquito (Se refiere a un lado vertical del rectángulo) y este es más largo (Señala uno de los lados horizontales del rectángulo y escribe la respuesta)
8. **E2:** Otra cosa. Este es más largo que éste (Compara el rectángulo respecto al cuadrado) y este es más ancho que éste (Compara el cuadrado respecto al rectángulo)
9. **P:** ¿Escuchaste lo que dijo ella?
10. **E1:** No.
11. **P:** Explícale (refiriéndose a E2).
12. **E2:** Mira, éste es más largo (refiriéndose al rectángulo) y este es más ancho que... (Se queda pensando) ah no, este es más largo que este (comparando el cuadrado respecto al rectángulo) y éste es más, este es más ancho que...
13. **E1:** Este es más largo y éste es más ancho (refiriéndose al rectángulo y al cuadrado respectivamente)
14. **E2:** Este es el largo y este es el ancho (Señala el rectángulo y el cuadrado respectivamente y pone cara de confusión). Este es el largo, no, este no es tan largo (se refiere al cuadrado). Este no es tan ancho (el rectángulo) y este si es muy ancho (cuadrado). ¿SI me entendió?

Al haber identificado las longitudes de una figura, se pasa al trabajo referente al perímetro del salón de clase, en el cual las estudiantes en un principio se enfrentaron con la dificultad de tener longitudes mayores, para las cuales expresaron que serían más fácil de medir con un metro pero ellas solo tenían reglas pequeñas; dificultad que resolvieron generando una relación entre la

cantidad de largos de una baldosa, su magnitud y el largo del salón, relación que establecieron de igual forma para la medición del ancho del salón.

Episodio 15:

(Grupo 3)

1. **P:** ¿Qué necesitamos hallar?
2. **E1:** Necesitamos hallar el perímetro del salón.
3. **P:** Listo. Estábamos ahorita en la discusión ¿Cierto? De que si esta baldosa de aquí (la del salón) es igual a la de allá (la del corredor)
4. **E1:** No.
5. **P:** ¿No es igual? ¿Por qué?
6. **E1:** Porque esta es más pequeña.
7. **P:** ¿Por qué sabes que es más pequeña?
8. **E1:** Porque se nota.
9. **P:** ¿Cómo lo de muestras en realidad que es pequeña?
10. **E1:** Las de allá son un poquito más grandes (las del corredor)
11. **P:** Por eso, ¿cómo vas a demostrar que la de allá es más grande y la de acá más pequeña?
12. **E1:** Pues midiendo. Porque mire, mide 26 centímetros (Las estudiantes midieron un una regla uno de los lados horizontales de la baldosa)
13. **P:** ¿Cuánto dio?
14. **E1:** 26 de largo.
15. **P:** ¿Y de ancho?
Las estudiantes se quedan pensando.
16. **E2:** Apuesto que estos también miden 26 (señala los dos lados verticales de la baldosa)
17. **P:** ¿Cuál medimos?
18. **E2:** Este (señala el lado medido) pero nos faltan estos (señala los lados verticales)
Las estudiantes cogen la regla y miden uno de los lados verticales.
19. **Es:** Y mide... 26 centímetros.
20. **E2:** $26 + 26 + 26 + 26$
21. **P:** Bueno, ya sabemos cuánto vale el ancho y cuánto vale el largo.
22. **Es:** 26 centímetros.
23. **P:** Listo. Ahora, nos piden hallar el perímetro de todo el salón. ¿Qué necesitamos saber del salón?
24. **E2:** (Cara de sorprendida) Hay que medir
25. **P:** ¿Qué vamos a medir?
26. **E2:** El salón.
27. **P:** ¿Qué partes del salón?
28. **E2:** El largo y el ancho.
29. **P:** ¿Cómo proponen medir el largo y el ancho del salón?
30. **E2:** Con una regla. Pero es más fácil con un metro.
31. **E1:** Medimos cada baldosa y las contamos.
32. **P:** E1, ¿qué estás haciendo?
33. **E1:** Contando las baldosas.
34. **P:** ¿Para qué cuentas las baldosas?
35. **E1:** Para hallar el perímetro.
36. **E2:** Primero hay que contarlas porque ya sabemos cuánto mide todo y con contarlas podemos multiplicar o sumar todas esas baldosas.
37. **P:** Listo, empecemos.
38. **E2:** Y uno puede contar sin regla.
39. **P:** ¿Sin regla? ¿Por qué sin regla?

40. E2: Porque ya sabemos cuánto mide la baldosa.

Episodio 16:

(Grupo 2)

1. P: ¿Cuánto mide el largo de la baldosa?
2. E1: 25 cm
3. P: ¿y el ancho de la baldosa?
4. E1: lo mismo.
5. P: Ahora cuantas baldosas de largo tiene el salón.
6. E1: 33 baldosas.
7. P: como saben entonces cual es el largo del salón.
8. E1: es el centímetro más largo.
9. P: bien,... la longitud mayor, entonces cuánto mide el largo del salón.
10. E1: 33 baldosas y 25 centímetros.
11. P: o sea cada baldosa tiene de largo.
12. Es: 25 centímetros de largo.
13. P: pero como son ¿Cuántas baldosas?
14. Es: 33 baldosas.
15. P: entonces, ¿cómo saben cuál sería el largo total del salón?
16. Es: No saben [cara de no entender].
17. P: ya sabemos que el salón tiene de largo 33 baldosas y cada baldosa tiene de largo 25 cm
18. P: como sabemos entonces el largo del salón.
19. E1: es más fácil multiplicar 33 por 25, mas no sumar 25+25+25... 33 veces
20. E1: para saber más fácil cuantos centímetros tiene las 33 baldosas, lo podemos multiplicar porque es más fácil más que si lo sumamos.
21. P: entonces seria 33 baldosas por 25 cm, entonces ¿eso cuánto te daría?
22. E1: [realiza la operación en una hoja] en el video explica la multiplicación de 33 x 25
23. P: ya realizaste la operación ¿cuánto te dio?
24. E1: me dio 825 centímetros.
25. P: ¿Ese sería qué?
26. E1: el resultado del largo de todo el salón.
27. P: Cuántas baldosas tiene de ancho el salón.
28. E2: 31 baldosas.
29. P: y cada baldosa cuanto ancho tiene.
30. E2: 25 cm
31. P: entonces, ¿cómo hacemos para saber el ancho del salón?
32. E2: [... cara de no saber]
33. E1: Lo multiplicamos, hágalo así 25 por 31 o al revés que eso es lo mismo ¿cierto?
34. P: si porque la multiplicación es conmutativa ...
E2 realiza la operación en una hoja.
35. P: cuanto mide entonces el largo del salón.
36. E2: 775 baldosas.
37. P: segura que 775 baldosas.
38. E2: ¡Ah no! ... centímetros 775 centímetros.
39. P: cómo hacemos entonces el perímetro del salón.
40. E1: los sumamos [solo largo + ancho]
41. P: ¿cuántos lados tiene el salón?
42. E1: tiene cuatro.
43. P: entonces, ¿por qué solo estás sumando dos lados?
Las estudiantes suman los cuatro lados para hallar el perímetro del salón.

44. E1: el perímetro es 3620 centímetros.

Episodio 17:

(Grupo 1)

1. P: ok niñas ¿ya midieron el perímetro?
2. E1: si, contamos las baldosas.
3. E2: primero lo contamos en el tablero (largo), y después en la pared de las ventanas (ancho).
4. P: ¿solamente esos dos lados?
5. Es: sí.
6. P: ¿Por qué solo esos dos lados?
7. E1: porque es que vea, el lado del tablero es igual al de la puerta, y el de las ventanas es igual al que está al frente.
8. P: a bueno, y ¿cuantos lados de la baldosa había en la parte del tablero?
9. E2: ahí contamos 33 baldosas.
10. E1: y en la ventana 31.
11. P: entonces, ¿Cómo hallamos el perímetro?
12. E1: tenemos que sumar los lados.
13. P: Listo, y ¿Cuánto sería entonces?
14. E2: sería $31 + 31 + 33 + 33$, o sea ...
15. E1: 128 baldosas.
16. P: pero miren que en la esquina hay una baldosa que en las cuentas que ustedes hicieron se contó dos veces ¿Por qué?
17. E1: es que en esa baldosa hay un lado del largo del salón, y también un lado del ancho.
18. P: entonces ¿si serian 128 baldosas?
19. E2: ¡ah no! Serian lados de baldosa.
20. E1: un perímetro de 128 lados de baldosa.
21. P: yo vi que usaron la regla cuando estaban contando, ¿para que la usaron?
22. E2: es que medimos el lado de la baldosa y nos dio 24 centímetros, pero medir toooodo el lado del salón no nos alcanzaba.
23. P: ¿los cuatro lados de la baldosa midieron 24 centímetros?
24. Es: sí.
25. P: pero miren que ya tenemos todos los lados de baldosa que hay alrededor del salón, ¿será que podemos saber cuál es el perímetro del salón en centímetros?
Se quedan pensando
26. E1: si porque vea cada lado mide 24 centímetros, y tenemos 128 lados entonces sería $24 + 24 + 24 \dots$
27. P: pero eso tan largo para sumar.
28. E2: ¡ay pues lo multiplicamos!
29. P: ¿y cuánto daría el perímetro?
Hacen la multiplicación en una hoja.
30. E1: 3072.
31. P: ¿3072 qué?
32. E2: lados de baldosa.
33. E1: ¡no! 3072 centímetros.

Teniendo en cuenta lo evidenciado en los episodios relacionados con la primera tarea sobre el perímetro, en la cual se enfatiza en la identificación de longitudes, se da paso a la relación de

estas longitudes y el área del salón, el cual es nombrado por las estudiantes como el piso. Para esta tarea, las estudiantes utilizan como medidores sus pies o las baldosas del piso. Durante el desarrollo de esta tarea, se presentan dos momentos: el primero, identificar que es el área del salón; el segundo, cómo y con qué medir el área.

Episodio 18:

(Grupo 3)

1. **P:** Decíamos que tenemos que medir el salón.
2. **E1:** Así [Prum] (Señalando el largo del salón) y [Prum] (Señalando el alto del salón).
3. **E2:** Contando desde acá (punto de partida) hasta la puerta del salón y eso forma un salón, por los lados.
4. **E1:** De acá hasta acá y acá (se refiere a los lados del salón).
5. **P:** Entonces, en síntesis, ¿Qué forma un salón? Forma esto (se refiere al largo del salón) ¿Qué más forma un salón?
6. **E1:** Hasta el techo, los lados.
7. **P:** Y los lados ¿Cierto?
8. **E3:** Y hasta allá (Señala el largo del salón)
9. **P:** Bueno, ya sabemos que un salón está formado por tres cosas.
10. **E3:** Largo, ancho y techo.
11. **P:** ¿Cómo vamos a llamar al techo? ¿Lo vamos a llamar techo?
12. **E1:** No.
13. **E3:** Alto.
14. **E2:** Hasta acá mide 23 (se refiere a la medida en baldosas del largo)
15. **P:** ¿23 qué?
16. **E2:** Baldosas. Porque mire.
Las tres estudiantes empiezan a contar las baldosas.
17. **E3:** 24, 25.
18. **P:** ¿No es mejor bajarnos y empezar a contar una por una?
19. **Es:** ¡ay sí!

Episodio 19:

(Grupo 1)

1. **P:** Bueno niñas, ¿Cuál es la primera pregunta?
2. **Es:** cuanto mide el salón.
3. **P:** ok, y al salón ¿Qué le vamos a medir?
4. **E1:** El largo y el ancho.
5. **P:** el largo y el ancho, y ¿Cuál es la diferencia entre el largo y el ancho?
6. **E1:** el largo es el más largo y el ancho es lo gordo.
7. **P:** Ok, al salón le vamos a medir el largo y el ancho, pero ¿Qué problema tenemos?
8. **E1:** ¡no hay salón!
9. **E2:** no hay salones desocupados porque están haciendo un arreglo.
10. **P:** listo, entonces vamos a mirar los salones ¿Qué lados comparte el salón con el pasillo?
11. **E1:** uno.
12. **P:** uno, y ese sería que longitud del salón ¿el largo o el ancho?
13. **Es:** el largo.

14. **P:** ok, como no podemos entrar al salón porque hay compañeritas en clase ¿Cómo hacemos para medir ese largo del salón?
15. **E1:** contando.
16. **P:** ok, ¿Dónde empieza el salón?
17. **Es:** ahí. (Señalando el lado en que comienza el salón.)
18. **P:** y ¿Dónde termina?
19. **E2:** como por allá. (Señalando la parte de la pared donde considera alcanza a llegar el salón)
20. **E3:** ¡SI!
21. **P:** listo, ya tenemos un lado del salón ¿cierto? Que es el...
22. **E1:** el largo.
23. **P:** ¿Cuál nos falta?
24. **E1:** el ancho.
25. **P:** y ¿qué lado sería igual al ancho del salón? Que podamos medir acá afuera.
26. **Es:** este. (Señalando el pasillo de manera paralela al ancho del salón, pero no con la misma longitud).
27. **P:** pero este no es el mismo espacio.
28. **Es:** ¡ah no!
29. **P:** pero bueno, ¿Dónde empieza el salón? Si lo vamos a mirar desde afuera.
30. **E2:** ahí. (Señalando el lado en que comienza el salón)
31. **P:** ¿y dónde termina?
32. **Es:** allá. (Señalando el lado opuesto, visto desde el pasillo que conecta el baño)
33. **P:** entonces, como no podemos entrar al salón a medirlo...
34. **E2:** lo podemos medir por acá. (Mostrando con la mano las longitudes que identificaron desde el pasillo)
35. **P:** muy bien, entonces podemos medir el ancho ¿por dónde?
36. **Es:** por acá. (Señalando el pasillo del baño)
37. **P:** ¿y el largo?
38. **Es:** por allí. (Señalando el otro pasillo).
39. **P:** ok, entonces respondamos la ficha.
40. **E1:** ¿Cuánto mide un salón? Ah no hemos hecho esa.
41. **P:** no hemos medido el salón, pero ¿Qué necesitamos para medirlo?
42. **Es:** el ancho y el largo.
43. **P:** la que sigue, ¿Cómo y con que lo podemos medir?
44. **Es:** con los pies, con la regla.
45. **E1:** con un metro.
46. **P:** listo, y ¿que tenemos en este momento que nos sirva para medir?
47. **E1:** los pies.
48. **P:** ok, entonces vamos a medirlo.
Se disponen a ir a medir.
49. **P:** pero esperen, miremos una cosa, ¿el pie de E1 es igual al de E2?
50. **Es:** ¡no! (colocan los pies de cada una juntos para compararlos).
51. **P:** el pie de E1 ¿es más grande o más pequeño que el de aleja?
52. **Es:** más grande.
53. **P:** listo, ¿y el de E3?
54. **E1:** más grande. (En comparación con el de E1).
55. **P:** o sea que tenemos tres pies diferentes, y si lo medimos con el pie de E2 ¿nos medirá lo mismo que con el pie de E3?
56. **Es:** ¡no!
57. **P:** ¿cierto? Entonces, cuando nosotras medimos, necesitamos una misma unidad de medida, porque si no nos dan resultados diferentes. Entonces escojamos un pie para medir.
58. **E3:** ¡el mío!
59. **P:** ¿el de E3? ¿O el de E1?
60. **E1:** pues el mío no porque es muy chiquito.

61. **P:** a no, pero no hay problema, sería una medida diferente, o sea no tiene que ser ni el más grande ni el más pequeño, sino que vamos a elegir uno para trabajar con ese.
62. **E2:** ¡el mío!
63. **P:** ok, el de E1. Entonces, vamos a medir primero el...
64. **Es:** el ancho.
65. **P:** a bueno, pero respondamos primero la pregunta de con que vamos a medir.
66. **Es:** con el pie. (Escriben su respuesta en la ficha).
67. **P:** ¿y colocando el pie cómo? ¿Caminando así? (pasos largos).
68. **E1:** ¡no! Así. (Colocando el pie uno tras otro).
69. **P:** bueno digamos de una vez con el pie de E1 para que sepamos con que unidad estamos trabajando.

Episodio 20:

(Grupo 1)

1. **P:** Vamos a medir el...
2. **Es:** ancho.
3. **P:** ¿con el pie de quién?
4. **Es:** ¡De E2!
5. **P:** listo E2 parece, E1 y E3 van a tomar nota.
6. **E2:** (comienza a colocar un pie delante del otro)
7. **Es:** (cuentan cada paso que da la compañera)...15, 16, 17, 18...
8. **P:** listo, ¿Cuánto midió?
9. **E2:** 34 y medio, más o menos.
10. **P:** 34 y medio, más o menos ¿cierto?, pero ¿cuál es la unidad que tenemos nosotras?
11. **E1:** el pie de E2.
12. **P:** pero ¿el pie de E2 lo podemos cortar?
13. **E1:** no.
14. **P:** ¿cierto? Entonces no lo podemos cortar, entonces ¿Cuántos pies de E2 midió el ancho?
15. **Es:** ¡34!
16. **P:** listo, y ¿Dónde nos preguntan por el ancho?
17. **E2:** ¿Cuánto mide el ancho de tu salón? ¿Cómo lo medimos?
18. **P:** entonces ¿Cuánto midió el ancho del salón?
19. **Es:** 34.
20. **P:** ¿34 que?
21. **E2:** 34 metros.
22. **E1:** ¡34 pies!
23. **P:** porque nosotras no medimos con el metro ¿o sí?
24. **E3:** no.
25. **P:** entonces ¿con que estamos midiendo?
26. **Es:** con el pie.
27. **P:** ¿con el pie de quién?
28. **Es:** de E2.
29. **E3:** o sea 34 pies de E2.
30. **P:** ya medimos el ancho, nos falta el...
31. **E1:** ¡el largo! ¡El largo!
32. **P:** listo, vamos a medir el largo, ¿con que lo vamos a medir?
33. **E2:** con mi pie.
34. **P:** listo, ¿dónde empieza el salón?
35. **E2:** aquí. (Señalando donde comienza el otro pasillo)
36. **P:** ¿segura? ¿Ahí que hay?
37. **E1:** ¡el baño!
38. **E2:** 1, 2, 3... (Se ubica dónde comienza el salón y coloca un pie tras otro)

39. **Es:** (cuentan los pasos de la compañera)
40. **E2:** (por donde llevaba la cuenta se dio cuenta que iba a encontrar una silla, así que se corre, pero para hacerlo alinea sus pies y desplaza uno para continuar en el mismo paso)
41. **Es:** ¡35!
42. **P:** ¿35 que?
43. **E3:** ¡35 pies de E2!
44. **P:** listo, vamos a responder. Entonces, ¿Qué midió 35 pies de E2?
45. **E2:** ¡el largo del salón!

Episodio 21:

(Grupo 1)

1. **E2:** ¿Cuál es el área del salón?
2. **E1:** matemáticas.
3. **P:** esa es una asignatura, ¿Qué estuvimos haciendo hoy?
4. **Es:** midiendo.
5. **P:** entonces ¿Qué será el área?
6. **E2:** es el área de longitud.
7. **P:** ¿y que es el área de longitud?
8. **E2:** las medidas.
9. **P:** bueno, ya dijimos longitud, medidas, pero ¿Qué será el área del salón?
10. **E1:** longitud.
11. **P:** las longitudes eran las que estábamos midiendo, que son ancho y largo, pero entonces ¿Qué es el área?
¿Por qué nos preguntaran por área?

Se quedan pensando, pero no dicen nada.

12. **P:** si yo les digo que pueden jugar en esta área, ¿Cuál será esa área?
13. **E1:** pues en esta parte.
14. **P:** ¿Cuál sería la parte?
15. **E2:** el suelo.
16. **P:** ok, entonces ¿Qué es el área?
17. **E2:** el lugar donde esta uno.
18. **E3:** el suelo.
19. **P:** entonces ¿Cuál será el área del salón?
20. **E2:** el suelo.
21. **P:** ¿el suelo de qué?
22. **E3:** del salón.
23. **P:** entonces ¿Cuál será el área del suelo del salón?
24. **E1:** el suelo rectangular.
25. **P:** listo, en los primero puntos nos preguntaron cuanto mide esa área ¿cierto?
26. **E1:** 35 más 34.
27. **E2:** 69.
28. **P:** ¿será que el salón mide 69 pies de E2? Mediamos el largo...
29. **Es:** y el ancho.
30. **P:** pero esos son solo dos lados del salón, ¿Cuánto va a medir el piso del salón? ¿69 pies de E2?
31. **E1:** midamos el piso de la biblioteca.
32. **P:** pero si vamos a medir en la biblioteca, esas serian medidas de...
33. **E3:** de la biblioteca.
34. **P:** necesitamos el del salón, ¿cómo medimos el piso?
35. **E1:** contemos los cuadritos (señalando las baldosas).
36. **P:** a bueno, vamos al salón y volvemos a contar.

37. **Es:** ¡no! ¿Otra vez?
38. **P:** comparemos la baldosa con el pie de E2.
39. **E2:** es más grande la baldosa.
40. **P:** ¿Sera lo mismo lo que medimos con el pie de E2 contando las baldosas?
41. **E3:** no, porque las baldosas son más grandes.
42. **P:** yo pude haber contado las baldosas, los ladrillos, pero ¿Qué contamos?
43. **E2:** mi pie.
44. **P:** contamos con el pie de E2, entonces si vamos a mostrar el piso del salón medido con los pies de E2 ¿Cómo sería?, es decir, tenemos el piso rectangular como habían dicho, ¿Cuánto me dio el largo?
45. **Es:** 35 pies de E2.
46. **E3:** y de ancho 34 pies de E2.

Episodio 22:

(Grupo 3)

Se les pregunta a las estudiantes que creen que es el área

1. **E2:** Lo que está por fuera.
2. **E3:** ¡Por dentro!
3. **E2:** Por fuera.
4. **E3:** Por dentro.
5. **P:** ¿Por fuera o por dentro?
6. **E2:** Por fuera.
7. **P:** ¿Usted que dice E2?
8. **E3:** Por fuera.
9. **P:** ¿Por qué por fuera?
10. **E2:** Ella había dicho que por dentro. Yo digo que por fuera.
11. **P:** ¿Por fuera? ¿Qué es el área?
12. **E2:** Lo que hay afuera de las cosas.
13. **E3:** Del salón.
14. **E2:** La parte de afuera del salón.
15. **P:** ¿Cuál es la parte de afuera de un salón?
16. **E3:** El corredor.
17. **E2:** Esta, esta y esta (señala el los corredores y las zonas verdes)
18. **E3:** El corredor.
19. **P:** Bueno, estamos en ese problema. Ustedes dicen que el área es lo que hay afuera, pero, ¿Qué nos preguntan ahí?
20. **E1:** Adentro.
21. **E1:** las ventanas.
22. **E2:** las de arriba, las de abajo, las de un lado, las del otro.
23. **P:** Bueno muchachas, ahora sí, nos están preguntando: ¿cuál es el área del salón?
24. **E2:** La manga y el corredor.
25. **P:** ¿Eso si es un área?
26. **E2:** Yo no sé.
27. **E1:** Es lo que está alrededor.
28. **P:** ¿Cómo se llama lo que está alrededor?
29. **E2:** Noooo!!! ¡Ya sé que es un área!
30. **P:** ¿Qué es un área?
31. **E2:** El piso.
32. **P:** el piso, excelente.
33. **E2:** El piso del salón.



34. **P:** El piso del salón, excelente. ¿Cómo vamos a medir el piso del salón?
35. **E2:** Con las baldosas.
36. **E3:** Con el metro.
37. **E2:** Pero no tenemos metro.
38. **P:** Como no tenemos metro, entonces ¿Qué tenemos que utilizar?
39. **Es:** Las baldosas.
40. **P:** y bueno ¿para qué nos sirven entonces las baldosas?
41. **Es:** Para medir.
42. **P:** ¿Para medir qué?
43. **E2:** El piso. Para medir el área del salón.

Episodio 23:

(Grupo 3)

Las estudiantes tenían el problema de que no había salón para medir.

1. **E3:** No hay piso del salón (Euforia)
2. **E2:** Ni hay salón.
3. **P:** No hay salón, ese es el problema. ¿Cómo vamos hacer entonces?
4. **E3:** Vamos a medir el área.
5. **P:** Bueno, vamos a medir el área.
6. **E2:** Pero con las baldosas pero no hay salón.
7. **P:** Bueno, no hay salón, ¿pero que tenemos?
8. **E2:** Baldosas.
9. **P:** ¿Qué nos preguntaron en la ficha?
10. **E2:** Ancho y largo.
11. **P:** ¿Ya tenemos ancho y largo?
12. **Es:** ¡SI!
13. **P:** Listo. ¿Y qué vamos hacer con ese ancho y largo?
14. **E2:** ¡Juntarlos!
15. **P:** ¿Para qué los vamos a juntar?
16. **E2:** Sumarlos.
17. **P:** ¿Para qué los vamos a sumar?
18. **E2:** Para que dé el resultado de todas las baldosas.
19. **P:** ¿Para qué sumamos?
20. **E2:** Para que dé el resultado de todas las baldosas.
21. **P:** Bueno, si sumamos este con este (señala el largo y el ancho del salón) ¿Seguro que nos da el salón?
22. **E2:** No.
23. **P:** ¿Por qué no?
24. **E2:** Porque todavía faltan las de la mitad.
25. **P:** ¿Cómo vamos hacer para contar las de la mitad teniendo en cuenta el largo y el ancho?
26. **E2:** Contando las de la mitad.
27. **P:** ¿Y tenemos las de la mitad?
28. **E2:** Si.
29. **P:** ¿Y esto es un salón?
30. **Es:** Noo!
31. **E2:** Hay nooooo!! ¿Cómo vamos hacer sin salón?
32. **E1:** Pero no hay salón

Episodio 24:

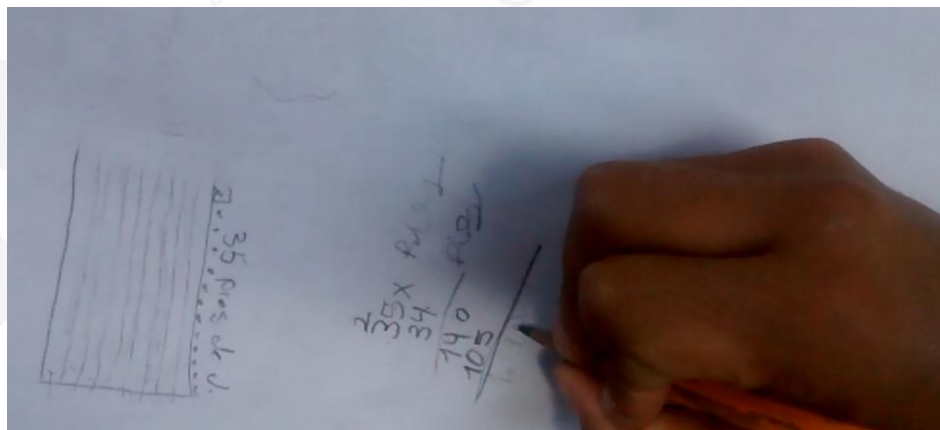
(Grupo 1)

1. **P:** listo, tenemos las longitudes, ustedes decían que podíamos contar las baldosas, pero ya contamos con los pies de E2, a este lado (haciendo referencia al ancho del piso del salón) hay 1, 2, 3... 34 pies de E2, y a este (haciendo referencia al largo del piso del salón) hay 1, 2, 3, 4,... 35 pies de E2. ¿Sería lo mismo si hubiera contado en los lados 1 baldosa, 2, baldosas, 3 baldosas...?
2. **E2:** mediría diferente.
3. **P:** es verdad, mide diferente porque la baldosa es más grande, pero la forma en que voy contando ¿será similar?
4. **E1:** ah sí, pues pero contando los pies.
5. **E3:** ya se, eso se hace con una multiplicación porque vea, en ese lado solo hemos contado una fila de pies de E2, pero faltan más.
6. **P:** ya contamos una fila, ¿esa fila que sería?
7. **E3:** sería la primera fila, pero faltan más filas.
8. **P:** o sea que en esa primera fila hay...
9. **E3:** 35 pies de E2.
10. **P:** ¿y cuantas filas hay?

Se quedan pensando.

11. **P:** ¿El piso como esta dibujado?
12. **E1:** con rectángulos.
13. **P:** ok, podemos ver entonces los lados de los rectángulos, no como las baldosas, si no relacionándolos con los pies de E2, entonces ¿Cuántas filas habrían?
14. **E3:** serían las filas del ancho que son 34 pies de E2, esta primera fila serian 35 pies de E2 y nos faltan 33 filas, cada fila tiene 34 pies pero para que uno no se demore tanto tiene que multiplicar.
15. **P:** ok y ¿Qué multiplicamos?
16. **E3:** 34 pies por 35 pies.
17. **E2:** hay que hacer una multiplicación de pies, 35 pies por 34 pies y entonces seria 4 por 5, 20.
18. **E1:** llevo 2.
19. **E2:** 4 por 3, 12.
20. **E1:** mas 2, 14.
21. **E2:** entonces es 142, ahora 3 por 5, 15.
22. **E3:** llevo 1, y 3 por 3 es 9, más 1.
23. **E1:** 10, o sea 105. (Ver ilustración 18).

Ilustración 18: Estudiante realizando una multiplicación.



Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

24. **E2:** lo sumamos y eso da 1109.
25. **P:** listo ahí multiplicamos...
26. **E1:** los números.
27. **P:** ¿Qué nos faltó?
28. **E3:** las unidades.
29. **P:** ¿y cómo nos da?
30. Se quedan pensando.
31. **E2:** nos da un conjunto de pies.
32. **P:** ¿por qué?
33. **E3:** porque multiplicamos pies por pies.
34. **E1:** pero como no sabemos cuánto es pies por pies dejémoslo así.

Episodio 25:

(Grupo 3)

1. **E2:** Si no tuviera el largo y el ancho, no tendría lo de la mitad. Esta es el área, esta parte (Señala con la palma de la mano la baldosa como tal)
2. **P:** Excelente, lo de adentro es el...
3. **E3:** Es el área.
4. **P:** ¿Cómo está compuesta entonces el área?
5. **E2:** por el ancho y el largo.
6. **P:** El largo y el ancho hacen el...
7. **E2:** área.
8. **P:** ¿Entendieron?
9. **Es:** Si.
10. **P:** ¿Seguras?
11. **Es:** Si.
12. **P:** ¿Tienen preguntas? Porque ella es la profesora (señala a la estudiante E2).
La estudiante E3 hace caras de confusión o insatisfacción.
13. **P:** ¿Qué le van a pregunta a la profe? A E3, dime.
14. **E2:** Que si no entendió nada de lo que dijimos.
15. E3 niega con la cabeza.
16. **P:** ¿No? Vuelve a explicarle (se dirige a la estudiante E 2)
17. **E3:** Mentiras que sí. Si, si, ya entendí.
18. **P:** No, no me convences.
19. **E2:** Diga pues que entendió.
20. **E3:** Que este es el área (señala la baldosa). Lo de afuera.
21. **P:** ¿Por qué esas es el área?
22. **E2:** Dizque lo de afuera
23. **P:** Bueno, E2, dile a E3 como es la situación.
24. **E1:** Mire, sin el largo y el ancho, ¿Cómo es que es?
25. **E2:** Sin el largo ni el ancho, no tuvieran lo de adentro, porque lo de adentro es el área.
26. **E3:** ¡Ah! Ya entendí.

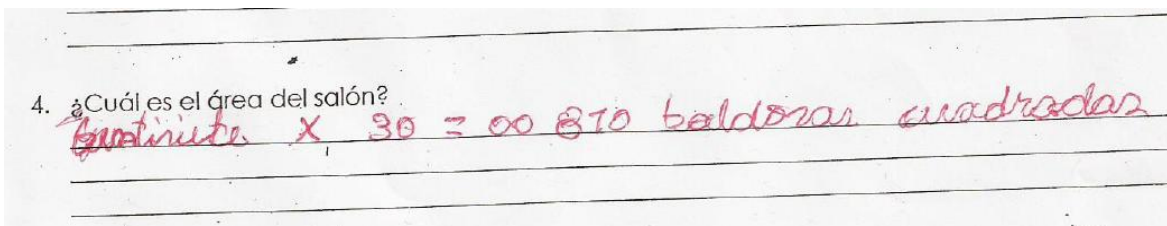
Episodio 26:

(Grupo 3)

1. **P:** Ustedes me dijeron ahorita que el largo y el ancho conforman el área.
2. **E3:** Una baldosa.
3. **P:** ¿Una baldosa de qué?

4. E2: De cuadrado.
5. P: ¿O sea que el largo y el ancho forman?
6. E2: Un cuadrado.
7. E3: Un cuadrado y una baldosa.
8. E2: Un cuadrado, una baldosa y un área.
9. P: Ahora, resulta y sucede, que ustedes ahorita multiplicaron el largo y el ancho del salón ¿cierto que si? Y eso les dio un número.
10. E3: Eh 810.
11. E2: 810 baldosas.
12. P: Les dio 810. Ahora miremos, ¿seguro que son baldosas?
13. E3: ¡Ah! 810 Perímetro (Su cara es de no estar convencida)
14. P: ¿Que estamos hallando?
15. E3: El área.
16. E2: 810....
17. E: 810 áreas.
18. P: ¿810 áreas?
19. E2: No, no, no... El área mide 810
20. P: Pero necesitamos una unidad de medida.
21. E2: ¡Metros!
22. P: ¿Estamos midiendo con qué?
23. E2: Con una baldosa.
24. P: ¿Baldosas de que tipo?
25. E2: De cuadrado.
26. P: ¿Baldosas qué?
27. E3: ¡De cuadrado!
28. E2: 810 cuadrados.
29. P: ¿810 que?
30. E2: Baldosas, cuadradas, de área.... Hay, yo no entiendo.
31. E3: 810 baldosas cuadradas (En tono alto)
32. P: ¿Por qué baldosas cuadradas?
33. E3: Porque son cuadradas y traen las rayas. Sin un largo ni un ancho no nos da la baldosa.
34. E2: Yo sé por qué baldosas cuadradas: porque cuadradas tienen todos los lados iguales y estos tienen lados iguales.
35. E3: En cambio este es más largo (se para y señala un ladrillo del muro del salón)...
36. E2: Esto es un rectángulo.
37. E3: Bueno, el rectángulo es más largo.
38. P: ¿Cuál es entonces la respuesta? ¿810 qué?
39. E2: Baldosas cuadradas.
40. E3: Yo ya lo había hecho.

Ilustración 19: Respuesta estudiante: "Veintisiete x 30 = 810 baldosas cuadradas"



Fuente: ilustración lograda durante la investigación. (Ficha 6.2 Tarea: área del salón).

Para finalizar la actividad 2 con la propuesta del grupo de logística, en los episodios 27 y 28, se evidencia como en las estudiantes se genera el problema de darle nombre a la dimensión producto obtenida de la relación del largo y el ancho de los diferentes espacios medidos en la institución (Salón de clase, cancha y patio salón).

Episodio 27:

(Grupo 3 Logística)

Después de realizar la ficha, las estudiantes se preguntan por el cómo poner metros cuadrados.

1. **P:** Nos dio metros, pero cuadrados. ¿Cómo poner metros cuadrados? Ya abreviamos metros que es m, ahora, ¿Cómo abreviamos el cuadrado?
2. **E1:** ¡Jum!
3. **E2:** (Se queda pensando)... CS, CD, CU
4. **E1:** DA.
5. **P:** Recordemos que aquí estamos multiplicando números con números ¿y también estamos multiplicando que con qué?
6. **E2:** Metros con metros.
7. **P:** ¿Cuántas veces se repite el metro?
8. **E1:** Dos.
9. **E2:** Tres, ¡eh! dos, dos.
10. **P:** Resulta y sucede que ese dos tiene algo que ver.
11. **E2:** (Exalta y...) ¡Se escribe C 2!... Dos.
12. **P:** ¿Dónde va el dos?
13. **E2:** Después de metros.
14. **P:** ¿Dónde?
15. **E2:** Aquí (señala su ficha y dice que lo pone como subíndice de mt)
16. **P:** ¿Abajo? ¿Segura?
17. **E2:** ¡Arriba!
18. **P:** ¿Qué dices tú? ¿Arriba o abajo?
19. **E1:** En la mitad.
20. **E2:** ¡Arriba!
21. **P:** ¿Por qué arriba?
22. **E2:** No sé.
Las estudiantes se quedan pensando.
23. **E2:** Porque mucha gente. ¿Quién tiene un cuaderno? ¿Me lo presta? Mucha gente hace esto (Escribe en el cuaderno mt^2) pone como aquí arriba los números.
24. **P:** Si señorita, entonces ¿el dos dónde iría?
25. **E2:** ¡Arriba!

Episodio 28:

(Grupo 3 Logística)



1. **P:** Sigamos con la conversación del dos. ¿Qué es medir el área? Cuándo estamos buscando el área, ¿qué estamos midiendo?
2. **E2:** Largo y ancho.
3. **E1:** Estamos midiendo... Hay, no sé cómo se dice eso. Estamos midiendo todo el... (La estudiante no encuentra palabras para describir la superficie, simplemente se queda señalándola con su mano derecha)... Todo lo que tiene adentro de lo que estamos midiendo (La estudiante se refiere a la relación entre largo y ancho)... ¿Cómo es que se dice? El piso.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Categorías Emergentes

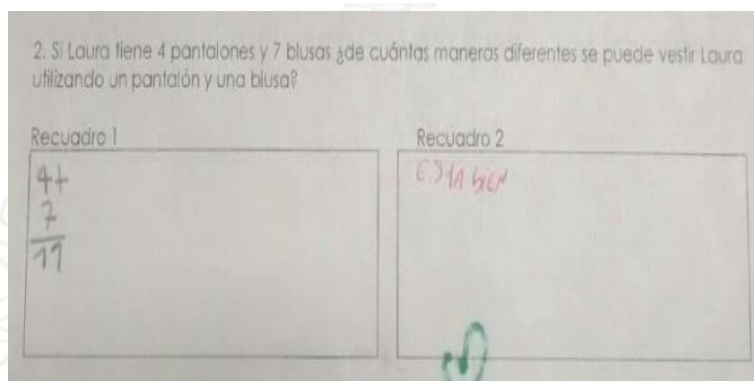
Primera categoría: *Perspectiva estocástica: El plano dimensional como consecuente del plano numérico.*

La única dimensión simple:

En el diseño y ejecución de la primera ficha de trabajo realizada (Ver anexo 3), la cual consistía en que las estudiantes resolvieran diferentes problemas aritméticos entre los que había un primer acercamiento a problemas de la perspectiva estocástica de la multiplicación como producto de medida, se enfrentaron a las cantidades y su representación como dimensión simple, expresadas en cada uno de ellos. En medio de esta lectura y del pensar sobre las cantidades, se evidencia que la adición se convierte en un instrumento que prima en la solución de algunos de los problemas, sin tener en cuenta la pregunta ni lo que representa cada una de las cantidades.

Siendo así, la adición alude a la totalidad de las representaciones, es decir, independientemente de la cantidad de objetos que se tengan, estos forman un solo conjunto por medio de la operación suma, constituyendo así el número total de combinaciones que se pueden formar: la combinación está relacionada con la agrupación. Cabe resaltar, que las cantidades son lo único relevante dentro de la solución a los problemas para las estudiantes, dejando de lado las representaciones de esas cantidades (ver ilustración 20).

Ilustración 20: Solución de una de las estudiantes, donde no se tiene en cuenta el plano dimensional

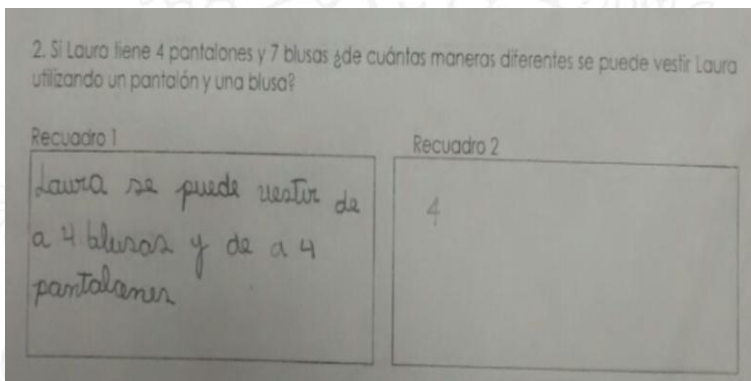


Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

La solución dada por las estudiantes a partir de la suma se debe a que las unidades utilizadas en cada una de las cantidades son entendidas por las estudiantes como parte de una misma dimensión, es decir, los pantalones y las blusas son prendas de vestir por tanto lo que tengo son 10 prendas. Las prendas no las relacionan como la unidad formada al combinar las blusas con los pantalones.

En otras ocasiones, las estudiantes denominan la combinación como una relación biunívoca, es decir, a manera de ejemplo, por cada pantalón solo hay una blusa, lo cual evidencia de que hay un desconocimiento sobre la relación entre elemento y totalidad del otro conjunto: por cada pantalón hay tantas blusas o por cada blusa hay tantos pantalones. Es aquí donde se evidencia que las estudiantes solo tienen en cuenta una única dimensión simple entendida como prendas, pero no en el sentido de dimensión-producto, sino de que las prendas son sinónimo de accesorios (blusas, faldas, pantalones, etcétera) (Ver ilustración 21).

Ilustración 21: Solución de una de las estudiantes.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

En la anterior ilustración, se evidencia que la estudiante hace la relación biunívoca, en donde selecciona cuatro de las blusas para relacionarlas con los cuatro pantalones, dejando de lado las otras tres blusas que faltan.

En esta misma línea, durante las acciones realizadas por las estudiantes al estar en contacto con la actividad “Diseño de mi uniforme ideal”, se evidencian sus gestos al estar enfrentadas al problema de combinación entre blusas, faldas y pares de zapatos (Ver ilustración 22). Si bien la suma sigue siendo el instrumento utilizado por las estudiantes, ya hay una primera reflexión respecto a la representación de las cantidades, puesto que las unidades de las cantidades (faldas, blusas, pares de zapatos) entran a jugar como si pertenecieran a una misma dimensión simple, que en este caso serían las prendas.

Es digno de mencionar, que su discurso para entender la nueva medida son las palabras “formas” o “formas de vestir”, pero éstas, estaba asociada a la pregunta del problema, más que al convencimiento de que al multiplicarse cantidades con cantidades y unidades con unidades dan

un nuevo número y un nuevo plano dimensional. Dado que las estudiantes están en una misma dimensión simple, éstas se empiezan a cuestionar respecto a las preguntas de las tareas propuestas, las cantidades y las unidades de medida que se mencionan en el problema. (Ver ilustración 22 y el episodio 1).

Ilustración 22: *Estudiante pensando*



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

Las estudiantes, empiezan a utilizar otros artefactos, como las prendas de la muñeca, las representaciones gráficas o el discurso, para darle sentido a las combinaciones y cómo la multiplicación llega a convertirse en el objeto matemático para dar solución a las tareas derivadas de la actividad. (Ver episodio 1, líneas 25 a la 34). Estas representaciones se convierten en el principal instrumento puesto que “algunas representaciones mentales son objetivables, en el sentido de que se pueden observar testimonios importantes en las producciones del sujeto” (Vergnaud, 1991, p. 67).

El reconocimiento de más dimensiones simples:

Durante el momento en que las estudiantes solo veían una dimensión simple, éstas presentaban una solución inmediata a los problemas que se les proponía en las tareas, dejando de

lado la relación que hay entre las cantidades, sus unidades y la respuesta. De esta manera, como investigadores, se les propone a las estudiantes establecer esta relación, generando así una duda que derivaba en el cuestionamiento del procedimiento y la solución para ser argumentada bajo sus propios discursos.

De esta manera, el material concreto (como las prendas y accesorios del uniforme desprendibles de la muñeca) y las representaciones gráficas, pasan de ser un artefacto a un instrumento con el cual las estudiantes discutieron respecto a la relación entre las cantidades, las unidades dadas y la construcción de una nueva cantidad y una nueva unidad.

Este paso de artefacto a instrumento se da porque las estudiantes hacen uso del material concreto y los dibujos, en el sentido de que lo usan como una forma discursiva para dar sus conclusiones, es decir, se establece una relación sujeto-artefacto-instrumento que le ayuda a comprender el significado ideal de las representaciones y las acciones que ejecuta, desarrollando así su prácticas humanas (Arboleda *et al.*, 2014).

Este tipo de acciones se pueden ver en el momento en que las estudiantes empiezan a manipular sus guías de trabajo, haciendo las posibles combinaciones entre las cantidades y sus respectivas unidades que allí se presenta. (Ver episodio 2, líneas de la 1 a la 7) (Ver ilustración 23).

Ilustración 23: *Estudiantes haciendo uso de las prendas para realizar las combinaciones.*

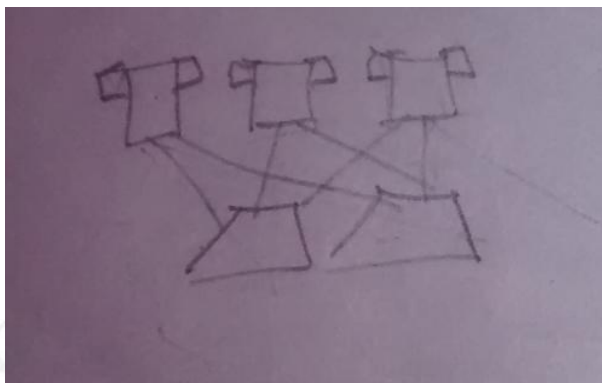


Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

En estas acciones, al identificar varios artefactos y hacer el traspaso a instrumento, se evidencia el reconocimiento de más dimensiones simples, ya no es solo artefactos, sino que son instrumentos porque cada blusa, cada pantalón, cada par de zapatos son dimensiones simples diferentes que empiezan a ser relacionadas para conformar el uniforme, como se puede observar en el episodio 4.

Las estudiantes comienzan a relacionar un elemento con el conjunto, es decir, a manera de ejemplificación, por cada falda hay tantas blusas o por cada blusa hay tantas faldas, dejando de lado la idea de combinación como una totalidad aditiva, ya la palabra uniforme deja de ser una dimensión simple y pasa a ser una dimensión-producto, puesto que es la combinación de faldas, blusas y pares de zapatos. La utilización de la representación y el uso del instrumento del dibujo, es una explicación análoga al uso del cuadro cartesiano, lo cual evidencia que ya hay una estructura del producto de medida (Vergnaud, 1991) (Ver ilustración 24).

Ilustración 24: Representación de las posibles combinaciones.



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

También se evidencia que con el trabajo en pequeños grupos, las discusiones entre las estudiantes refuerzan las consideraciones de las otras compañeras, con el fin de que todas estuvieran sincronizadas con las acciones que allí derivaban (Radford, 2010). Si bien algunas de las estudiantes aún utilizaban la relación biunívoca, otra de las estudiantes las corrige, mencionándoles que hay es una relación de elemento a conjunto (Ver episodio 3).

Dado que las estudiantes ya han visto que no hay una sola dimensión simple, sino que ya hay más dimensiones simples que se relacionan entre sí para conformar una nueva dimensión que posteriormente será la dimensión-producto, una de las acciones más usuales es el uso del conteo para identificar esa nueva dimensión, a lo que en el discurso de las estudiantes, es denominado usualmente como “Formas de...” (Ver episodio 2, líneas de la 11 a la 15).

En este reconocimiento de más de una dimensión simple, la adición ya no es un instrumento útil para dar solución a las tareas que se les propuso, por lo tanto, ocurre un cambio de la adición a la multiplicación, derivado de la identificación de las unidades que representan las cantidades dadas en el problema. (Ver episodio 7, líneas de la 19 a la 25).

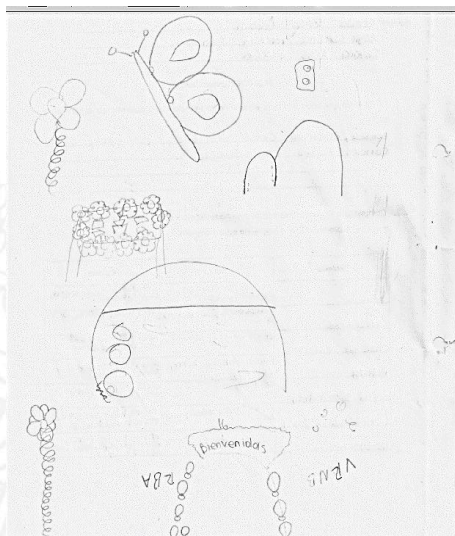
No obstante, a medida de que avanzaban la solución de las tareas y el alcance del objeto/motivo de las estudiantes y de los investigadores respecto a las actividades, las acciones también tenían una transformación, es decir, se avanzaban los niveles de las acciones descritos por Montealegre (2005), en donde los dos primeros hacen referencia al uso de instrumentos gráficos para entender y dar a conocer sus explicaciones, que posteriormente pasan a ser más hablados que graficados, lo cual denota una asimilación de las acciones que están realizando.

Este avance de niveles de las acciones es evidenciable en el momento en que las estudiantes no utilizan los instrumentos gráficos para representar las dimensiones simples, sino que lo verbalizan de manera más natural, haciendo uso de sus gestos, los cuales representan lo gráfico por medio de lo corpóreo, además, su discurso se torna más natural puesto que hay un acercamiento a la dimensión-producto. (Ver episodio 9, líneas de la 24 a la 56).

De esta manera, los gestos y los movimientos kinestésicos que realizan los estudiantes para dar a conocer sus discursos y lo que ha hecho en el accionar con las tareas y los instrumentos, son una de las bases para afirmar que ya hay un proceso de objetivación del conocimiento de las estudiantes (Radford, 2005), específicamente al identificar la multiplicación como producto de medida. (Ver episodio 3; episodio 4, líneas 5 a la 7; episodio 7, líneas de la 1 a la 10).

Debido al reconocimiento de la dimensión-producto, el instrumento gráfico reaparece pero no para explicar la relación elemento a elemento y elemento a conjunto, sino para explicar la dimensión-producto, por lo tanto las estudiantes ya dibujan es esa nueva dimensión. (Ver ilustración 25).

Ilustración 25: *Diseño de la decoración de la fiesta*



Fuente: Ilustración lograda durante la investigación.

En la anterior ilustración, se evidencian la nueva dimensión-producto, expresada como la mariposa, el arco o el cartel, teniendo en cuenta las dimensiones simples (como los colores o las bombas). Las estudiantes han llegado al cambio de dimensión en el sentido estocástico, la composición de una nueva dimensión-producto a partir de las dimensiones simples (ver episodio 8, líneas de la 9 a la 18).

De este modo, se puede evidenciar que las estudiantes al enfrentarse con un problema multiplicativo, en particular de producto de medida, reconocen las cantidades, y que además, estas están relacionadas con diferentes dimensiones y que para dar solución al problema es necesario relacionar tanto las cantidades como las dimensiones involucradas. (Vergnaud, 1991).

La dimensión-producto

La constitución de la nueva dimensión, emerge del diálogo y del accionar de las mismas estudiantes, puesto que con ayuda de los instrumentos utilizados y del conocer el instrumento de la multiplicación como el objeto matemático que les era más útil para la resolución de los problemas propuestos en las tareas, lograron llegar a la dimensión-producto.

Para las estudiantes, el multiplicar las cantidades se les era común, pero el multiplicar las dimensiones simples se les fue más largo el recorrido, empezando por el reconocimiento de ellas y el reconocimiento de que al ser operadas formaban una nueva dimensión compuesta por las simples pero diferente de las demás. Esto se observa en las primeras tareas, donde la suma era la forma de solucionar un problema de tipo producto de medida, pero luego hay un reconocimiento de las unidades de cada una de las cantidades, es decir, se reconocen más dimensiones simples y además, el reconocimiento de que la composición de ellas forman una dimensión-producto. (Ver episodio 4, líneas de la 5 a la 11; episodio 8, líneas de la 19 a la 21).

En primera instancia, dado que las estudiantes ya han reconocido varias dimensiones simples y que entre ellas hay una multiplicación para poder llegar a la solución de la tarea, el discurso entre ellas fomenta esa relación y el uso de la multiplicación como instrumento (Ver episodio 4, líneas de la 9 a la 14).

Siendo así, después de la solución de las tareas que le permitieron alcanzar el objeto/motivo de la actividad, las estudiantes llegaron a la composición de la dimensión-producto a partir del reconocimiento de las dimensiones simples y de la operación entre ellas. El discurso entre pequeños grupos les fue crucial para poder identificar estas dimensiones y que el diálogo entre ellas tuvo como finalidad el convencimiento y la visualización de lo que allí sucedía (Ver episodio 5).

A partir de esto, las palabras más utilizadas que evidencian una clara identificación de la dimensión-producto a partir de las dimensiones simples, fueron uniforme, cartel, sánduche, arco y mariposas. Siendo así, es fundamental la identificación de las dimensiones simples, puesto que las estudiantes al enfrentarse a este tipo de problemas multiplicativos se da una doble

proporcionalidad, lo cual permite entonces un entendimiento del producto de medida, justificando así la identificación de una nueva dimensión a partir del producto de dimensiones simples (Vergnaud, 1991).

A medida que se realizaban las tareas propuestas por los investigadores, las dimensiones simples se les tornaron más reconocibles para las estudiantes, de tal manera que la dimensión-producto también fue una derivada de este reconocimiento, tanto en el lenguaje como en el pensamiento sobre el mismo. Además de ello, la frase “formas de...” no se es tan común en el lenguaje, puesto que la dimensión-producto es mencionada con una cualidad propia: uniforme, sandwich, cartel o arco (Ver episodio 10).

De esta manera, la constitución de la dimensión-producto y la objetivación de la multiplicación como producto de medida, es evidenciable en la manera en que las estudiantes dan a conocer su experiencia al resto de sus compañeras, haciendo uso de las representaciones gráficas que denotan la dimensión-producto, el discurso para explicar la existencia de esta dimensión y el proceso de cómo llega a darse esa nueva dimensión a partir de dimensiones simples, como es nombrar blusas por faldas por zapatos da uniformes (episodio 4, líneas de la 9 a la 13); de igual forma lo hacen con los sandwiches, las prendas, arco y mariposas al nombrar sus dimensiones.

Se sustenta entonces la objetivación de la multiplicación como producto de medida respecto a la perspectiva estocástica, porque entienden el conocimiento del concepto a partir de las acciones que realizaron para llegar hasta él, además del razonamiento que tuvieron las estudiantes para reconocer las dimensiones simples y como se operan para constituir la dimensión-producto, y como discute, expresa y explica a las demás compañeras sus respectivos

procesos (Ver episodio 11 y episodio 12). De este modo, las estudiantes identifican que además de las relaciones entre las cantidades, también deben relacionarse las dimensiones para dar una respuesta a los problemas de tipo multiplicativo de producto de medida.

Segunda categoría: *Perspectiva geométrica y métrica: el área como dimensión-producto.*

La segunda categoría está sustentada en el área, denotada como una dimensión-producto, pero con la salvedad de que no es la única, sino que, dentro de la perspectiva geométrica y métrica, es una entre muchas otras, como el volumen, que se componen a partir de dimensiones simples (Vergnaud, 1991). Además de ello, en el plan de área establecido por la Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac, el área hace parte de las temáticas a trabajar en el grado tercero.

Es por eso que se justifica el trabajo con las estudiantes sobre la noción de área, vista como un producto de medidas, con el fin de que a partir de la actividad que emergió de sus motivos y del diseño de tareas como dispositivos que orientan el objeto/motivo, tanto de las estudiantes, como de los investigadores, se pueda llegar a la identificación de dimensiones simples y su asociación con el número, a partir de las acciones realizadas con los medidores no convencionales y convencionales, y la relación que hay entre estas para la composición de la dimensión-producto llamada área.

Identificación de las dimensiones simples: Con el fin de lograr el objeto/motivo de las estudiantes respecto a la segunda actividad, denominada como “Planeación de la fiesta de

despedida”, se hace pertinente para los investigadores, diseñar y ejecutar tareas, con el fin de que las estudiantes identifiquen un lugar dentro del colegio en el cual se pueda realizar dicho evento.

De esta manera, la primera tarea tuvo la orientación de la identificación de las dimensiones simples que conforman el área. En este sentido, el perímetro es visto como un objeto matemático que posibilita esta identificación, además de que las estudiantes se enfrentan al problema de encontrar las unidades de medida y además el instrumento medidor que les permitiese la asignación del plano numérico a las dimensiones simples que conforman una figura.

Las primeras acciones realizadas por las estudiantes, se encaminaron principalmente al reconocimiento de las longitudes como el largo y el ancho, siendo éstas identificadas a partir de las representaciones bidimensionales (cuadrado, rectángulo y baldosas del piso), puesto que son necesarias para el desarrollo de la tarea referente al perímetro.

De esta manera, las estudiantes empiezan a dialogar e identificar las propiedades que tiene la dimensión simple denominada longitud, definiendo así que lo largo es aquel segmento de mayor longitud, mientras que lo ancho es aquel segmento de menor longitud (ver episodio 14, líneas de la 5 a la 14). En este diálogo muestran que las estudiantes se encuentran en la segunda y tercera fase de las acciones de una actividad, que son descritas por Montealegre (2005) y desarrolladas en el marco teórico de la presente investigación.

Además de ello, en el discurso entre estudiantes, las dimensiones simples fueron identificadas por la relación que hay entre ambas, es decir, el largo y el ancho son las dimensiones que conforman un cuadrilátero (Ver episodio 13). Es por ello que Radford (2006), denota la importancia de trabajo en grupos y el diálogo entre pares, dado que es en medio del

discurso y de la interactividad que las estudiantes dan a conocer las conclusiones de lo visto y lo analizado.

De esta manera, la identificación de las dimensiones simples se ven manifestadas en las acciones de las estudiantes al darle solución a la tarea de hallar el perímetro de uno de los salones de clase, pues allí señalan el largo y el ancho de este espacio y al mismo tiempo utilizan la regla como instrumento para medir una de las baldosas del salón, puesto que las estudiantes encuentran una relación entre el ancho y largo del salón respecto al ancho y largo de una baldosa.

Esta relación consiste en que se les es más fácil medir las dimensiones simples de una baldosa y multiplicarlas por el número total de baldosas que conforman las dimensiones simples del salón, puesto que no disponían del artefacto metro para hacer tales medidas. Esta relación no fue establecida por un solo grupo, sino que cada uno estableció en sus discursos y en sus acciones que ésta era la mejor solución (ver episodios 15, 16 y 17).

De lo anterior, se concluye que la identificación de las dimensiones simples en la perspectiva geométrica y métrica se dan en dos aspectos, tal y como los nombra Vergnaud (1991): el primero es identificar las dimensiones simples (longitudes) y segundo, asignarle un número a estas dimensiones simples a partir del uso de medidores.

Los medidores utilizados por las estudiantes, para poder asignarle un plano numérico a un plano dimensional, fueron dos: un primer medidor fue la regla, de tal manera que pudiesen mirar y comparar las dimensiones simples que tenían las baldosas y utilizar las unidades de medida convencionales (ver episodio 15, líneas 1 a la 22). En segunda instancia, fueron las baldosas del salón, lo cual les permitió determinar la relación entre dimensiones simples de ésta respecto a las de un salón. Si bien las baldosas son una unidad de medida no convencional, las estudiantes

hacen el traspaso de no convencional a convencional a partir de la multiplicación, es decir, dado que las dimensiones simples de la baldosa estaban expresadas en centímetros, a partir de la relación, se podía hacer la transformación de dimensiones simples del salón multiplicando los centímetros de una baldosa por la cantidad de baldosas que conforman el largo o el ancho del salón, (ver episodio 15, líneas 31 a la 40; episodio 16, líneas de la 10 a la 26).

El reconocimiento de las dimensiones simples de una figura dimensional y la asignación de medidas a dichas dimensiones, dan paso para relacionar las dimensiones simples y conformar el área, de tal forma que se comparan y unifican las dimensiones simples tanto en el plano dimensional como numérico.

Relación de las dimensiones simples: Con el fin de alcanzar el objeto/motivo de las estudiantes, al momento de encontrar un espacio adecuado para realizar la fiesta de despedida, como investigadores se propone la tarea de identificar diferentes espacios de la Institución Educativa, de tal manera que las estudiantes pudiesen observar, analizar y deliberar, con ayuda de la matemática, el mejor espacio para reunirse los tres terceros.

De esta manera, puesto que la identificación de las dimensiones simples de la perspectiva geométrica y métrica ya había sido analizada con anterioridad (Tareas 2.1 y 2.2 de la Actividad 2: Planeación fiesta de despedida), las estudiantes empiezan a dialogar sobre si un salón es un espacio adecuado para realizar dicho evento. Para ello, se les cuestiona a las estudiantes sobre que dimensiones conforman un salón de clase, a lo que las estudiantes responden que son conformados por largo, ancho y alto. Cabe resaltar que la dimensión simple “alto”, fue llamada en un principio “techo”, pero en el diálogo como pequeños grupos las estudiantes llegan a la conclusión de llamarla alto. (Ver episodio 18, líneas 5 a la 16; episodio 19, líneas 1 a la 4).

Siendo así, después de la identificación de las dimensiones simples del salón, los estudiantes se proponen a establecer la relación entre las longitudes y un número que permita las comparaciones. De este modo es que el medidor, como instrumento, vuelve a aparecer para poder entablar estas comparaciones.

La utilización de los medidores se vio desde dos aspectos: Uno como instrumento de medida no convencional y otro como instrumento de medida convencional. Así pues, se procede a analizar como la multiplicación como producto de medida es vista cuando se tienen dos medidores diferentes que asignan un número a las longitudes de los salones de clase a comparar.

Para establecer esta comparación entre salones, se les propone a los estudiantes una tarea respecto al área como objeto matemático. De esta manera, se da la discusión sobre qué es el área, a lo que las estudiantes la relacionan con la asignatura (ver episodio 21, líneas 1 a la 24) o con el espacio fuera de los salones (ver episodio 22).

Después de la discusión entre pequeños grupos es que las estudiantes relacionan el área con el piso de los salones, de tal manera que para poder que exista se necesitan de las dimensiones simples, la longitud del largo y la longitud del ancho, tal y como se evidencia en el episodio 22, entre las líneas 29 y 31, y en el episodio 21, entre las líneas 5 a la 24. Siendo así que las estudiantes, puesto que ya habían identificado las dimensiones simples, proceden a medirlo.

De lo anterior, es que surge la necesidad de utilizar los medidores para hallar el área, siendo en primer lugar medidas de carácter no convencional. Para ello, las estudiantes utilizaron dos instrumentos: las baldosas de los salones y los pies de una de las estudiantes. Puesto que fueron tres grupos los que hicieron el trabajo, cada uno asesorado por un investigador, dos de los

grupos discuten y proponen el utilizar las baldosas (Ver episodio 22, líneas de la 34 a la 43), mientras que el otro grupo utiliza directamente los pies (Ver episodio 19, líneas de la 40 a la 69).

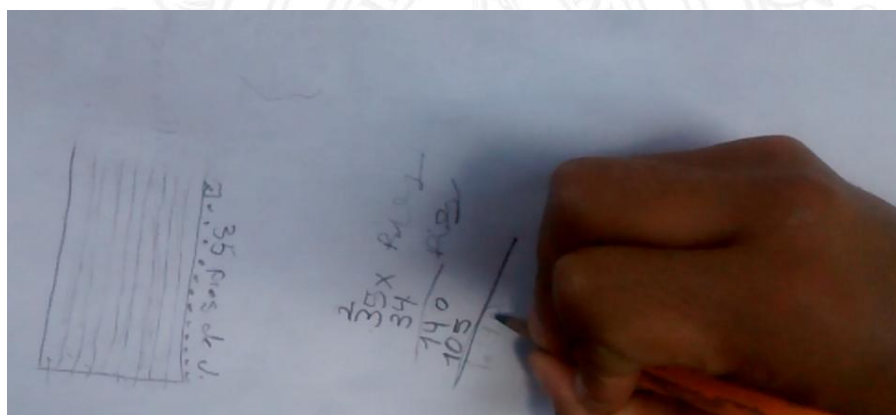
Esta necesidad de poder asignarle un número a las dimensiones simples radica en que, “la función de los instrumentos de medida [...] es la de permitir asociar un objeto a un número, que será su medida, y facilitar así la comparación de los objetos entre sí” (Vergnaud, 1991, p. 120). Es aquí entonces donde les permitió a las estudiantes ver cómo se pueden comparar distintas áreas a partir de la medida de las dimensiones simples que la componen.

Puesto que las estudiantes ya asignaron el plano numérico al plano dimensional, las estudiantes empiezan a relacionar estas dimensiones simples para conformar la dimensión-producto. En estas acciones, las estudiantes buscan relacionar las dimensiones simples y para ello, uno de los grupos se basan en la suma como objeto matemático para esta relación, pero en sus discursos se dan cuenta de que no es pertinente puesto que no se pretende sumar las longitudes sino conformar el área, que en sus palabras era el piso del salón. Es así entonces como la multiplicación se convierte en el objeto matemático para hacerlo y está justificado en que por medio de la multiplicación se puede encontrar cuanto mide lo de la mitad (Ver episodio 23, líneas de la 13 a la 32).

Respecto a otro de los grupos centraron su discusión entre la relación de estas dimensiones simples a partir la correspondencia entre que, por cada pie de la dimensión longitud de ancho le corresponden 35 pies de la dimensión longitud de largo (ver episodio 24, líneas de la 5 a la 16). Para darle una mejor explicación a sus palabras, las estudiantes realizan un dibujo el cual se evidencia la relación entre las dimensiones simples, las cuales se operan para componer la dimensión-producto a la cual se le da el nombre de área.

Ahora bien, respecto a esta relación de dimensiones simples que analizaron las estudiantes, se utiliza lo que Vergnaud (1991) denomina como segundo método, el cual afirma que primero se miden las dos dimensiones simples que conforman el rectángulo y después se multiplican los números, haciendo primero una construcción para después pasar a una multiplicación. (Ver ilustración 26). Y, en palabras de las estudiantes, sin estas dos dimensiones no tendrían lo de “la mitad” (Ver episodio 25, líneas de la 1 a la 7).

Ilustración 26: Representación gráfica de la dimensión-producto.



Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

De esta manera es que en el discurso de las estudiantes se evidencia el reconocimiento y la relación que hay, es decir, la dimensión-producto área se compone por las magnitudes de las longitudes que conforman el salón, largo y ancho, puesto que sin estas dos longitudes no existe tal dimensión-producto.

Cabe rescatar que la socialización vista en el episodio 25 es un acercamiento a lo que Radford (2006) denomina como éxito en matemáticas, puesto que los alumnos, además de resolver con éxito las tareas propuestas, fueron capaz de socializarlo, de entenderlo y además de interesarse por las soluciones que otros alumnos han propuesto, con la salvedad de hubo una

intervención de los investigadores, con el fin de hacer hincapié en aspectos importantes, tal y cómo se propone en la fase de discusiones generales de las fases de la actividad (Radford, 2006)

Siendo así, la unidad de medida para el área se torna confusa para las estudiantes, puesto que no saben cómo llamarla. Es aquí donde deriva un nuevo problema para las estudiantes, y para darle solución, los investigadores pasan a discutir sobre la unidad de medida, ya que las relaciones entre las cantidades de las medidas ya eran entendidas, pero la relación entre las dimensiones las estudiantes no sabían cómo nombrarlas. Los grupos empiezan a dialogar sobre la composición de la dimensión-producto a partir de las dimensiones simples previamente identificadas y su relación respecto al uso de la multiplicación como objeto matemático que permitió el área.

Así pues, las estudiantes relacionan el plano numérico, pero el plano dimensional aun no lo definen, esto es, las estudiantes buscan darle un nombre a la multiplicación de baldosas por baldosas o pies por pies. Para ello, las estudiantes utilizaron palabras como áreas, baldosas cuadradas, conjunto de pies o pies por pies (Ver episodios 26, líneas de la 9 a la 34; episodio 24, líneas de la 16 a la 34).

Al momento de realizar la tarea de la propuesta de logística, el grupo decidió usar entre sus materiales la cinta métrica, accionando con este instrumento puesto que es utilizado como medidor, dado que se le da el plano numérico al plano dimensional pero con el uso de medidas convencionales, las cuales les sería más útil para dar medidas exactas y medir lugares, como la cancha, que no cuenta con baldosas.

El accionar de las estudiantes con la cinta métrica les proporcionó la asignación del plano numérico al plano dimensional, de tal manera que los datos obtenidos eran escritos en una tabla, asignando el número a la dimensión longitud de largo y ancho respectivamente.

Ilustración 27: Respuesta de las estudiantes. (Ficha de trabajo)

3. Completen la tabla.

| Lugar | Ancho | Largo | Área |
|------------------|---------|---------|-----------------------|
| Salón 3º-1 | | | |
| Patio salón | 13.00 m | 19.80 m | 257.40 m ² |
| cancha con tech. | 15.70 m | 28.50 m | 447.45 |

Fuente: ilustración lograda durante la investigación.

Puesto que las estudiantes utilizaban la multiplicación como objeto matemático para la solución de las tareas propuestas, además de que ya era identificado por las acciones previamente realizadas, como fue la del área del salón por medidas no convencionales, este instrumento permitió entonces el discurso entre ellas para establecer qué tipo de unidad de medida convencional representaba el área.

Siendo así, la conclusión a los discursos entre estudiantes e investigadores llegó a que se utilizaba el metro cuadrado, pero no era reconocido como la composición de dos dimensiones de metro por metro, sino por el impacto de los conocimientos de la cultura respecto a su quehacer diario (Ver episodio 27, líneas de la 23 a la 25).

De lo anterior, es que se concluye, que las estudiantes identifican la relación entre las dimensiones simples de longitud, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional, cuando éstas son medidas por medidores no convencionales, puesto que encuentran la relación al

utilizar objetos concretos (baldosas y pies, en este caso). Sin embargo, al utilizar medidas convencionales, las estudiantes no identifican la relación de multiplicar las unidades de medida de las dimensiones, se construye la dimensión-producto que tiene una unidad de medida compuesta por ellas dos pero diferente de ambas.

Siendo más precisos, la identificación de la dimensión-producto área sigue siendo definida como “el piso” y las estudiantes identifican sus dimensiones simples, pero no alcanzan a objetivar la dimensión-producto bajo medidas convencionales, pero si bajo medidas no convencionales (Ver episodio 28), dado que muestran confusión a lo que se nombra por metro cuadrado. Además de ello, las estudiantes no ven la relación de que, por cada metro de largo le corresponden tantos de ancho, o por cada metro de ancho le corresponden tantos de largo, sin embargo, con el uso de material concreto (como lo fueron los pies de una de las estudiantes) esta relación si fue identificada.

Conclusiones

En el desarrollo del presente trabajo investigativo, teniendo como base la literatura revisada y el trabajo de campo realizado (las actividades, sus fases y las respectivas tareas), se analizaron las acciones que cada estudiante hizo para que se llegase a una objetivación de la multiplicación vista desde el producto de medida, con miras a darle una respuesta a la pregunta que orientó esta investigación, la cual fue *¿cómo es el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida en las estudiantes del grado segundo y tercero de primaria?*. De esta manera, se espera haber dado respuesta a la esta pregunta a partir de dos categorías emergentes, definidas como: *Perspectiva estocástica: el plano dimensional como consecuente del plano numérico, Perspectiva geométrica y métrica: el área como dimensión-producto.*

En este sentido, en el proceso de objetivación de la multiplicación, vista como un producto de medida, se ve de manifiesto que para su definición se deben tener en cuenta dos planos, uno numérico y uno dimensional, que al ser relacionados por la operación producto conforman un nuevo número y una nueva dimensión. Sin embargo, para ser objetivado, no basta con dar una definición dado que, como se ha visto, este objeto matemático es definido solo como una suma de sumandos iguales, sino que se deben plantear actividades en las cuales este tipo de multiplicación deba ser utilizado bajo tareas propuestas para alcanzar el objeto/motivo, tanto de las estudiantes, como de los docentes.

En las actividades emergentes de las estudiantes, el proceso de objetivación, los instrumentos para la objetivación del objeto y los objetos de conocimiento derivados, estuvieron

ligados en las acciones que realizaron respecto al producto de medida, de tal manera que se sintetiza así:

Proceso de Objetivación:

- La constitución de los objetos de conocimiento que traen consigo las estudiantes, desde su historia y su cultura, son el punto de partida para alcanzar la objetivación de nuevos objetos. Siendo así, para llegar a la objetivación de la multiplicación como producto de medida, se parte del objeto/motivo de las estudiantes, diseñando así actividades que permitan el alcance de sus necesidades. A partir de aquí, las tareas propuestas por los investigadores fueron las que direccionaron el objeto/motivo de las estudiantes y de los investigadores, en donde estuvo de manifiesto la manipulación de la multiplicación como instrumento para dar solución a éstas.
- En la búsqueda de la satisfacción de sus necesidades para alcanzar el objeto/motivo de las estudiantes, el manejo de planos numéricos y planos dimensionales son los que dan solución a sus tareas. Es por esto entonces que se afirma que un estudiante ha objetivado un nuevo objeto de conocimiento, como es la multiplicación como producto de medida si:

El estudiante es capaz de manipular ambos planos y de identificar su relación y la construcción de un nuevo plano numérico y dimensional;

Aplica estos objetos en su quehacer cotidiano y en la solución de sus tareas académicas;

De tomar conciencia sobre lo que está haciendo, sobre lo que obtuvo y sobre las respuestas a las preguntas, el diálogo con otras estudiantes, la identificación de características de los objetos, los artefactos e instrumentos utilizados en su accionar.

- Para objetivar una dimensión-producto, como lo es el área, las actividades diseñadas no siempre logran alcanzar esta objetivación en particular, puesto que aún se requieren factores temporales, actividades que emerjan de las estudiantes, diseño de más tareas respecto a este objeto matemático específico y espacios de discusión académica entre estudiantes y docentes respecto a este tema en particular.
- La identificación de dimensiones simples hace que las estudiantes, dentro del proceso de objetivación, lleguen a las dimensiones compuestas, dado que al resolver problemas multiplicativos de tipo producto de medida, se observa una relación entre las cantidades y las dimensiones.

Instrumentos para la objetivación del objeto:

- El uso de recursos concretos, permiten a las estudiantes una visualización de las dimensiones simples, con el fin de identificar, así mismo, una dimensión-producto. Es así que, las estudiantes al manipular estos recursos es que logran visualizar el cambio de los planos numéricos y dimensionales, reconociendo que a partir de dimensiones simples y el producto como instrumento matemático, son los que construyen una nuevo número y una nueva dimensión.
- El uso de medidores no convencionales y convencionales, son los que ayudan a las estudiantes darles un plano numérico a las dimensiones que tienen que ver con lo geométrico y métrico, además de que identifican las unidades de medida en las cuáles se miden la dimensión simple longitud. Sin embargo, la relación entre estas dimensiones simples para construir la dimensión-producto área, es más identificable bajo medidas no convencionales, puesto que son más tangibles y manipulables.

Objetos de conocimiento derivados:

- En la realización de las tareas que llevaron al objeto/motivo de las actividades de las estudiantes y de los investigadores, la combinatoria fue uno de los objetos de conocimiento abordados, puesto que en el trato de la multiplicación como producto de medida desde la perspectiva estocástica, esta temática es la utilizada para identificar otros tipos de multiplicación de manera analítica.
- El perímetro fue una de las temáticas que ayudó a la identificación de la dimensión simple longitud en el cuadrilátero como objeto geométrico, y las relaciones que hay entre estas dimensiones.
- El área, fue el objeto de conocimiento derivado desde la perspectiva geométrica y métrica en el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida. Sin embargo, la objetivación del producto de medida bajo esta perspectiva sólo alcanzó hasta el tratamiento del plano numérico respecto a las dimensiones simples bajo medidas convencionales.

En el transcurso de las actividades realizadas, el plano numérico y el plano dimensional se ven de manifiesto en las tareas diseñadas, dado que en el tratamiento de aspectos cualitativos que definen un número, como lo es en la perspectiva estocástica, o las unidades de medidas que se asignan a partir de la manipulación con medidores para la perspectiva geométrica y métrica, son relacionadas a partir de la multiplicación como objeto matemático, permitiendo así, de forma visual para las estudiantes, construir una nueva dimensión y un nuevo número.

De esta manera, las estudiantes estuvieron en constante constitución de nuevos conocimientos matemáticos, que permitió así llegar a la objetivación de la multiplicación como

producto de medidas. Cabe resaltar, que esta objetivación fue posible porque las actividades a las que se enfrentaron las estudiantes nacieron de un objeto/motivo propuesto por ellas mismas y porque como investigadores, se justificó la realización de tareas respecto a las matemáticas para poder lograr la objetivación de un objeto a partir del objeto/motivo de conocimiento.

Es digno mencionar, que el objeto/motivo de conocimiento planteado por los investigadores no es convergente en su inicio con el de las estudiantes. Es así que, la justificación del diseño de tareas por parte de los investigadores radica en direccionar las acciones de las estudiantes hacia el logro de su objeto/motivo y la objetivación del objeto de conocimiento, por lo tanto, realizar tareas a modo de proceso que permitan la identificación de dimensiones simples y después la relación entre éstas para conformar una dimensión-producto son las que posibilitan la identificación y construcción de una nueva dimensión y un nuevo número.

De todo este trabajo investigativo nos queda, como docentes investigadores, la reflexión sobre las consideraciones respecto a las diversas definiciones que se le da a la multiplicación y cómo éstas deben ser llevadas al aula de clase para que los estudiantes identifiquen las diferentes relaciones respecto a los planos numéricos y planos dimensionales que tienen los distintos problemas. Además de ello, a partir del manejo de la multiplicación como producto de medida, emergen varias temáticas que están inmersas en los planes de estudio y propuestas en los Lineamientos curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas (2006), las cuales son la combinatoria, el área o el volumen, por mencionar algunos.

Por lo anterior, el aporte investigativo respecto a la educación, se fundamenta en que se hace necesaria la interpretación de los tipos de problemas multiplicativos a partir de actividades



que emerjan de los estudiantes, además del análisis de las unidades de medida en el aspecto métrico y de la transformación de las cualidades en el aspecto estocástico. Es digno de mencionar que este trabajo establece un punto de convergencia entre diferentes temáticas, tomándolas como una unicidad, es decir, la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación, a partir de la combinatoria y el área, como producto de medida; al igual, es importante resaltar que los conocimientos constituidos, se dieron a partir del trabajo en pequeños grupos, el cual permitió interactuar a las estudiantes mediante sus diálogos, explicaciones y conclusiones.

Finalmente, la presente investigación deja como líneas abiertas el trabajo con los docentes respecto a las diferentes definiciones que se le puede dar a la multiplicación, las cuales están estipuladas en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), el trabajo con las estudiantes de la multiplicación como producto de medidas pero específicamente en el volumen como objeto matemático y la profundización del trabajo con el área visto como un tipo de problema multiplicativo y el análisis de los planos numéricos, las dimensiones simples y la dimensión-producto.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Referencias bibliográficas

- Alegría, P. (2007). Teoría de la Medida (p. 134). Bilbao, España.
- Anzola, J. & Abril, P. (2010). Animaplanos 2. Bogotá, Colombia: Editorial Didáctica y matemáticas Ltda.
- Arboleda, L., Obando, G., & Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva Histórico-Cultural en Educación Matemática. *Revista Científica* (20), 72-91
- Arévalo, S.; Perafán, L.; & Salazar, A. (2010). Estrategias en matemáticas 2. Bogotá, Colombia: Editorial Libros & Libros S.A.
- Babativa, M.; Chizner J.; Joya, A. & Rojas, V. (2009). Casa de las matemáticas 2. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana.
- Botero, O. (2006). Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Cole, M. (2003). Poner la cultura en el centro. *Psicología cultural*. (pp. 113–115) Ediciones Morata. S. L.
- Davidov, V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Moscú: Editorial progreso.
- Euclides (1996). Elementos (LIBROS I-VI) (PUERTAS. M, trad.). (pp. 192-193). España: Editorial Gredos, S.A. (Obra publicada en 330 a.C)

Greer, B. (1991). Multiplication and division as models of situations. Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 276–277)

Ivic, I. (1999). Lev Semionovich Vygotsky (1896-1934). *Perspectivas: Revista Trimestral de Educación Comparada*, XXIV, 773–799.

Leontiev, A. (1984). *Actividad, Conciencia y Personalidad*. (Cartago, Ed.) (Primera Ed., p. 183). México D. F.

Maza, C. (1991). Resolución de problemas elementales, Naturaleza de las operaciones. *Enseñanza de la Multiplicación y División*. (pp. 17-23). Editorial síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares curriculares para matemáticas para la educación preescolar, básica y media*. Bogotá: Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Montealegre, R. (2005). La Actividad Humana en la Psicología Histórico Cultural. *Avances en Psicología Latinoamericana*. 23, pp. 33–42.

Proyecto Educativo Institucional Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac (2013)

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. (Número especial), pp. 103–129.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Revista de Investigación En Didáctica de Las Matemáticas*. 2, pp. 7–44. doi:10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2014). De la Teoría de la Objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 7, pp. 132–150.

Rojas, P. (2011). La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje. Bogotá: Grupo MESCUD. Universidad distrital Francisco José de caldas. pp. 37-65.

Sampieri, R.; Fernández-Collado, C.; Baptista, P.(2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana Editores. S.A.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

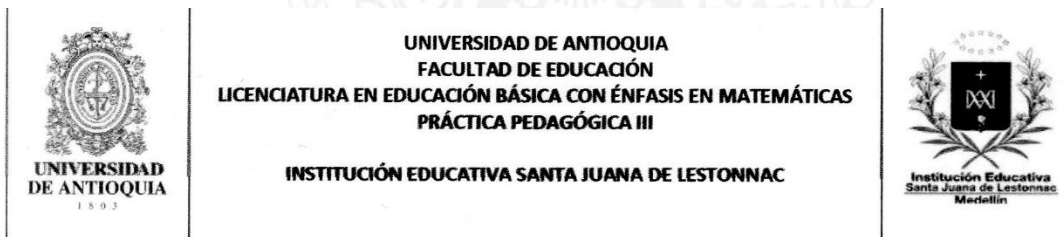
Torres, M. (2013). Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Universidad de Extremadura. (2014). *Apuntes a la Teoría de la Medida* (Vol. 1, p. 393). Badajoz.

Vergnaud, G. (1991). *El Niño, Las Matemáticas y la Realidad: Problemas de la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria*. México: Editorial Trillas. p. 275

Wood, D. (2000). *Cómo piensan y aprenden los niños*. (pp. 282–283). México: Siglo XXI Editores.

Anexo 1: Carta de autorización.



Medellín, Mayo del 2015

Señores:


Directivas Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac

Reciban un cordial saludo.


En la clase de matemáticas del grado tercero, orientada por la profesora Patricia Velásquez, estamos realizando un proyecto de investigación titulado “La objetivación de la multiplicación como producto de medidas en estudiantes del grado segundo y tercero de primaria”. Dicho proyecto se ha venido desarrollando desde Abril del 2014.

Queremos solicitarle, formalmente, su autorización para que las estudiantes formen parte de la muestra de la investigación. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de las estudiantes en forma de videos, grabaciones, fotos, informes, entre otros que se han propuesto en la clase de matemáticas.

Agradecemos su atención y colaboración.



Ofelia Sánchez Sánchez
Coordinadora Institución Educativa
Santa Juana de Lestonnac



Monly Catherine Torres Jaramillo
Asesora de Práctica Pedagógica
Universidad de Antioquia

3. Camila quiere regalar a cada una de sus 8 amigas de a 3 manillas ¿cuántas manillas necesita Camila para regalarle a sus amigas?

Recuadro 1



Recuadro 2



4. María tiene 37 bombones más que los que tiene Andrés, si Andrés tiene 15 bombones ¿cuántos bombones tiene María?

Recuadro 1



Recuadro 2

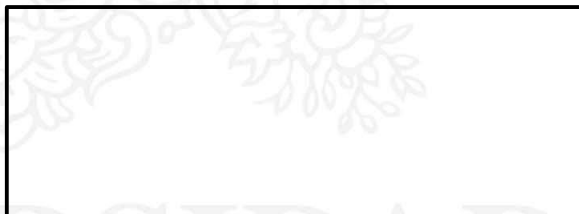


5. Natalia tiene 8 años, su abuelo es 5 veces mayor que él. ¿Qué edad tiene su abuelo?

Recuadro 1




Recuadro 2



¡FELIZ SEMANA!

1 8 0 3

Anexo 3: Tarea 1.1 “Diseño de mi uniforme ideal”

| | | |
|---|---|-------------------------|
|  | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| ÁREA: Matemáticas | | GRADO: Tercero |
| FECHA: | | PERÍODO: Segundo |
| DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | | |

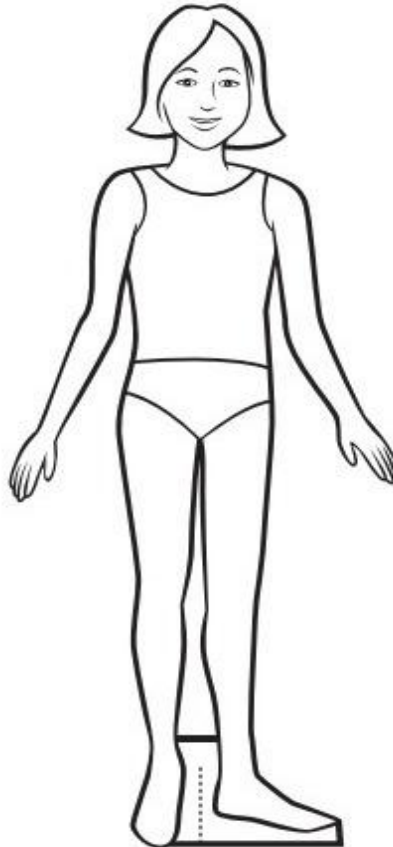
Nombre: _____

TAREA 1.1


Diseño de mi uniforme ideal

Diseña tu uniforme de gala ideal, para ello, dibuja, recorta y pega con cinta cada parte del uniforme (prendas, accesorios, zapatos) en el dibujo que aparece a continuación.

Nota: Cada prenda del uniforme debe ser pegada con cinta de tal manera que se pueda despegar fácilmente.



Anexo 4: Tarea 1.2 “Diseño de mi uniforme ideal”

| | | |
|---|---|-------------------------|
|  | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| ÁREA: Matemáticas | | GRADO: Tercero |
| FECHA: | | PERÍODO: Segundo |
| DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | | |

Nombres: _____

TAREA 1.2

Diseño de mi uniforme ideal

Recuerda en cada punto escribir el procedimiento y respuesta completa.

“Yo hago lo que tú no puedes, y tú haces lo que yo no puedo. Juntos podemos hacer grandes cosas” Madre Teresa de Calcuta

1. ¿Cuántas partes tienen en total incluyendo prendas, accesorios y zapatos entre todas?
2. Seleccionen todas las blusas y faldas, ¿de cuántas maneras diferentes pueden diseñar el uniforme utilizando una blusa y una falda?
3. Seleccionen los zapatos, las blusas y las faldas, ¿de cuántas maneras diferentes pueden diseñar el uniforme utilizando una blusa, una falda y un par de zapatos?

4. Ahora imaginen que tienen 10 blusas, 8 faldas para diseñar el uniforme. ¿de cuantas maneras diferentes se puede diseñar el uniforme usando una blusa y una falda?


5. Camila puede diseñar el uniforme de 6 maneras diferentes utilizando una blusa y una falda, para ello tiene 3 blusas. ¿Entonces cuántas faldas debe tener Camila?



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Anexo 5: Tarea 2.1

| | | |
|---|---|---------------------|
|  | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| ÁREA: Matemáticas | | |
| GRADO: Tercero | | |
| PERÍODO: Segundo | | |
| FECHA: | | |
| DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | | |

Nombres: _____

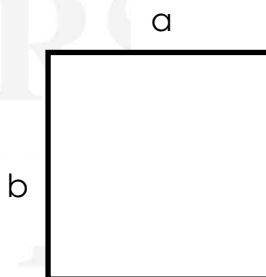
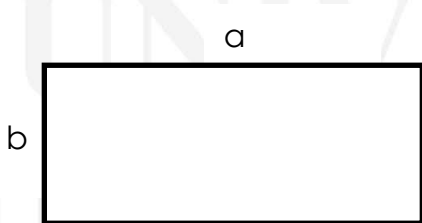
TAREA 2.1

1. ¿Cuál de estos dos lápices es más largo y cuál es más corto?



2. ¿Cómo hacemos para saberlo?

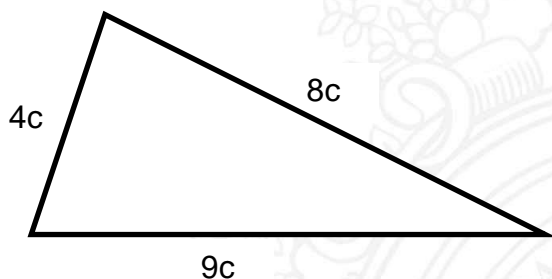
3. ¿Qué nombre recibe el lado a y el lado b de cada figura?



4. ¿Qué diferencia hay entre el largo y el ancho de una figura?

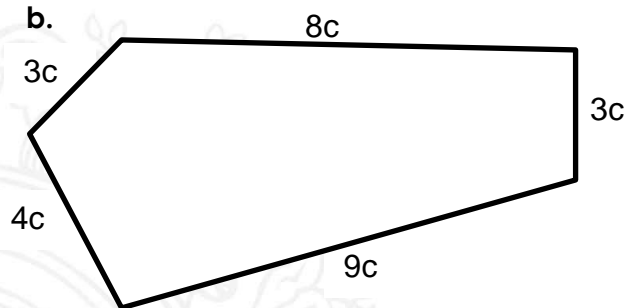
5. Hallar el perímetro de las siguientes figuras.

a.



Perímetro: _____.

b.



Perímetro: _____.

6. ¿Cuál es el perímetro de una baldosa de tu salón?

7. ¿Cuál es el perímetro de tu salón? Identifica sus longitudes:

8. Conociendo el perímetro de dos salones, ¿podemos decir cuál es más grande o más pequeño?

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Anexo 7: tarea 2.3 “Planeación fiesta de despedida (Grupo de comida)”

| | | |
|--|---|-------------------------|
|  <p>Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac Medellín</p> | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| AREA: Matemáticas | GRADO: Tercero | PERIODO: Segundo |
| FECHA: | DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | |

Nombre: _____

TAREA 2.3

PLANEACIÓN FIESTA DE DESPEDIDA (Grupo de comida)


1. Cuéntanos como ha sido la comida de una fiesta en la que hayas estado.

2. ¿Qué comida podemos preparar para la fiesta? Recuerda que debe ser fácil de preparar.

3. ¿Qué ingredientes necesitamos?

4. ¿Además de esa comida mencionada, ofrecerías otro menú?, ¿Cuál sería?

Anexo 8: tarea 2.3 “Planeación fiesta de despedida (Grupo de decoración)”

| | | |
|---|---|-------------------------|
|  | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| ÁREA: Matemáticas | | GRADO: Tercero |
| FECHA: | | PERÍODO: Segundo |
| DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | | |

Nombre: _____

TAREA 2.3

PLANEACION FIESTA DE DESPEDIDA (Grupo de decoración)


1. Cuéntanos como ha sido la decoración de una fiesta en la que hayas estado.

2. ¿Qué temática utilizarías para la fiesta? (La temática hace referencia al estilo, música, decoración)

3. ¿Qué materiales necesitamos para decorar?

4. ¿Qué colores te gustaría?

Anexo 9: tarea 2.3 “Planeación fiesta de despedida (Grupo de logística)”

| | | |
|--|---|-------------------------|
|  <p>Institución Educativa Santa Juana de Lestonnac Medellin</p> | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| ÁREA: Matemáticas | | GRADO: Tercero |
| FECHA: | | PERÍODO: Segundo |
| DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | | |

Nombre: _____

TAREA 2.3

PLANEACIÓN FIESTA DE DESPEDIDA (Grupo de Logística)

1. Cuéntanos como ha sido el lugar de una fiesta en la que hayas estado.

2. Prefieres un lugar cerrado o abierto para la fiesta. ¿por qué?

3. ¿Qué lugar del colegio es más adecuado para reunirnos todas las estudiantes del grado tercero?

4. ¿Estarías de acuerdo en realizar la fiesta en el salón de 3º1? ¿Por qué?

Anexo 12: tarea 2.4 “Planeación fiesta de despedida (Grupo de logística)”

| | | |
|---|---|-------------------------|
|  | INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA JUANA DE LESTONNAC | FA 15 |
| | TALLER – LABORATORIO Y/O FICHA DE TRABAJO | 08 DE ENERO 2013 |
| ÁREA: Matemáticas | | GRADO: Tercero |
| FECHA: | | PERÍODO: Segundo |
| DOCENTE: Patricia Velásquez, David Espinosa, Natalia Medellín y Alejandra Quintero | | |

Nombres: _____

TAREA 2.4

PLANEACIÓN DE LA FIESTA DE DESPEDIDA (Grupo de logística)

- ¿Creen que el salón de 3º1 es adecuado para reunirnos los 3 terceros? ¿Por qué?
- De las ideas que cada una trajo, elijan entre las tres el lugar más adecuado para realizar la fiesta y escriban por qué eligieron este.
- Completen la tabla.

| Lugar | Ancho | Largo | Área |
|-------|-------|-------|------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

- Teniendo en cuenta la información de la tabla anterior, ¿Qué lugar consideran más adecuado para reunirnos a realizar la fiesta?