SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN
PROYECTO DE PRÁCTICA PROFESIONAL

MARITZA AGUDELO DÁVILA.
ELIZABETH ESTRADA BETANCUR.
LEHIDY MILENA POSADA MEDINA.
LORENA MARÍA RODRÍGUEZ RAVE.
MONLY CATHERINE TORRES JARAMILLO.
MIRIAM CRISTINA SANTA QUINTERO.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLÍN
2006

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN

PROYECTO DE PRÁCTICA PROFESIONAL

MARITZA AGUDELO DÁVILA C.C. 43.910.266
ELIZABETH ESTRADA BETANCUR C.C. 21.533.504
LEHIDY MILENA POSADA MEDINA C.C. 43.911.759
LORENA MARÍA RODRÍGUEZ RAVE C.C. 42.691.714
MONLY CATHERINE TORRES JARAMILLO C.C. 43.914.707
MIRIAM CRISTINA SANTA QUINTERO C.C. 43.259.068

Monografía presentada como requisito para obtener el título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

María Denis Vanegas Vasco
Magíster en Educación

Jesús María Gutiérrez
Magíster en Educación
Asesores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
MEDELLÍN
2006

Nota de aceptación:

____

____

____

____

____

____

____

Firma del presidente del jurado

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Medellín, 27 de Febrero 2006

Este trabajo lo dedicamos a nuestras familias quienes con gran esfuerzo nos apoyaron durante el proceso de formación como docentes, especialmente a la familia Posada Medina por habernos brindado un caluroso espacio para realizar la sistematización de la investigación.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a nuestros profesores María Denis Vanegas y Jesús María Gutiérrez por la colaboración y asesoría brindada durante el desarrollo de la práctica profesional, y la elaboración de este trabajo.

A la Institución Educativa la Paz del municipio de Envigado por permitirnos realizar nuestras observaciones y diagnósticos a estudiantes de la educación básica, con el fin de desarrollar y aplicar situaciones problema para la enseñanza de las magnitudes volumen y capacidad.

TABLA DE CONTENIDO

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN

La enseñanza de la matemática se estructura a partir de los conocimientos básicos como son: el pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento espacial y sistemas geométricos, el pensamiento métrico y sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; como también los diferentes procesos de aprendizaje y los contextos en los cuales se enmarca el aprendizaje de los estudiantes.

A lo largo de este trabajo se da una caracterización del pensamiento métrico y los sistemas de medidas específicamente en lo que se refiere al concepto de las magnitudes volumen y capacidad; estas se abordan desde los componentes didáctico, epistemológico, teórico y metodológico; mediante el rastreo de los elementos más próximos al aula, el desarrollo de la medida a través de la historia, además de la realización y aplicación de situaciones problema de tipo económico que tienen relación con las magnitudes volumen y capacidad.

Éste se enmarca dentro de la "Ingeniería Didáctica" como metodología de investigación propia de la didáctica de las matemáticas, la cual se caracteriza "por un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 2002); y sirve de apoyo para estructurar la propuesta del diseño de situaciones didácticas para la enseñanza del volumen, concepto en el que se centra la investigación.

La metodología de investigación es desarrollada a través de tres fases: análisis preliminar; experimentación concepción y análisis a priori; análisis a posteriori y resultados.

1. ANÁLISIS PRELIMINAR

El análisis preliminar consta de: “el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva y por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación” (Artigue, 2002).

Por tanto, se realizan los preliminares a partir del análisis de tres componentes: el didáctico, el histórico-epistemológico y el teórico.

1.1 COMPONENTE DIDÁCTICO

El componente didáctico se desarrolla mediante el análisis del currículo propuesto (Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Matemáticas), el análisis del currículo desarrollado (evidencias de textos, cuadernos del área de matemáticas y concepciones de los docentes de esta área) y el análisis del currículo logrado (evidencia de las magnitudes volumen y capacidad desde las pruebas TIMSS, SABER e ICFES). Dentro de cada uno de estos currículos se analiza cómo ha sido el desarrollo del pensamiento métrico y se busca cuál ha sido el tratamiento de las magnitudes volumen y capacidad.

1.1.1 Análisis del currículo propuesto. El currículo propuesto se entiende como el conjunto de documentos legales, que orientan a las instituciones educativas en la organización de su currículo, estos documentos son propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia; entidad encargada de elaborar y dar a conocer las directrices que guían el trabajo dentro de las áreas fundamentales y obligatorias del currículo.

Para ello ha realizado varios documentos indispensables en la enseñanza de las matemáticas dentro de todos los niveles de la educación básica, con el fin de establecer parámetros generales para la elaboración del currículo y la labor del docente en las Instituciones Educativas. Entre estos se encuentran los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas y los Estándares Básicos de matemáticas.

1.1.1.1 Lineamientos Curriculares: Pensamiento métrico y sistemas de medida. Su elaboración surge como una necesidad para el mejoramiento del currículo de matemáticas en las diferentes instituciones educativas a nivel nacional, direccionando la función, comprensión y enseñanza del área de matemáticas, a través de conocimientos básicos como: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Cada uno de los pensamientos y sistemas se desarrollan en tres grandes aspectos, los **conocimientos** que son… "Procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas" (MEN, Lineamientos curriculares, 1998, pp. 35), donde las habilidades matemáticas puedan relacionarse con el desarrollo de todos los sistemas matemáticos. Los

procesos… “tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (MEN, Lineamientos curriculares, 1998, pp. 35), y los **contextos**, relacionados… “con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprenden” (MEN, 1998).

En cuanto al pensamiento métrico y los sistemas de medidas, los conocimientos son elaborados partiendo de la construcción del concepto de cada magnitud (volumen, peso, área, longitud, tiempo, amplitud, capacidad y superficie); la cual comienza cuando se sabe que algo es más o menos que (comparación) y la construcción del concepto de “patrón de medida”, que debe ser enseñado mediante ejercicios donde se requiere de medidas no estandarizadas para observar la importancia de establecer una medida estándar, diferenciando la unidad de medida y la utilización adecuada del instrumento de medición.

Para llegar a la construcción de los conocimientos en dicho pensamiento, se requiere de procesos como la conservación y la estimación de magnitudes, la selección de unidades de medida, patrones e instrumentos y la asignación numérica. Dichos procesos tienen lugar en diferentes contextos como: la solución de problemas y el trasfondo social de la medición (compras en el supermercado, los deportes, la lectura de mapas, etc.), los cuales dan significado a los conceptos que el estudiante adquiere en la escuela.

Estos tres aspectos: conocimientos, procesos y contextos se desarrollan a lo largo de los Lineamientos Curriculares de matemáticas, cuya finalidad es lograr que los conocimientos se adquieran a través de procesos que deben ser integrados en los contextos propios del estudiante, de tal manera que puedan aprender y aplicar los conocimientos en su vida cotidiana..

1.1.1.2 Estándares Básicos de matemáticas: **pensamiento métrico y sistemas de medida.** Como consecuencia de los Lineamientos Curriculares se establecen los conocimientos básicos de la enseñanza para la matemática fundamentados en procesos que permiten el desarrollo del trabajo en el aula. Dichos conocimientos son definidos como "...criterios claros y públicos que permiten conocer qué es lo que deben aprender los estudiantes; son el punto de referencia de lo que un alumno puede estar en la capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel." (MEN, 2002).

A su vez, los Estándares Básicos de Matemáticas están organizados por grupos de grados y por pensamientos y sistemas matemáticos que conservan una jerarquización de los ejes temáticos para el desarrollo de estos procesos en los diferentes niveles de la educación básica, redactados en términos de procesos. En cuanto al pensamiento métrico y sistemas de medidas, este documento pretende que se aborde "la comprensión de las características mensurables de los objetos tangibles y de otros intangibles como el tiempo; de las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones y de los instrumentos utilizados para hacerlas" (MEN, 2002), así como también se resalta la importancia de incluir el margen de error, la relación de las matemáticas con otras ciencias y el manejo del cálculo aproximado o estimación cuando no se tienen los instrumentos adecuados para hacer una buena medición.

Dentro del análisis de los Estándares Básicos de Matemáticas, se ha hecho énfasis además de su diseño en general, en el Pensamiento métrico y sistemas de medida, teniendo en cuenta principalmente los conceptos que se relacionan con la magnitud volumen y verificando en qué grados y en que medida deben ser enseñados. Para ello se seleccionan los estándares relacionados con dicho concepto en los diferentes niveles.

Primero a tercer grado / Pensamiento métrico y sistemas de medidas:

1. Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo) en diversas situaciones.
2. Comparar y ordenar objetos respecto a atributos mensurables.
3. Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo al contexto.
4. Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.
5. Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y las ciencias
6. Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas.

Cuarto a quinto grado / Pensamiento métrico y sistemas de medidas:

1. Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.
2. Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
3. Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y en las ciencias.
4. Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
5. Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.

6. Reconocer el uso de las magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Sexto a séptimo grado / Pensamiento métrico y sistemas de medidas:

1. Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
2. Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
3. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.
4. Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
5. Resolver y formular problemas que requieran técnicas de estimación.

Octavo a noveno / Pensamiento métrico y sistemas de medidas:

1. Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
2. Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
3. Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.

Dentro del pensamiento métrico se puede establecer una clasificación de los estándares de acuerdo a los principales ejes temáticos que se trabajan en los diferentes conjuntos de grado, con el fin de que se establezca una relación con otros conceptos más específicos. Esta se realiza de forma vertical y horizontal. Verticalmente a través de tres ejes temáticos como lo son: El concepto de magnitud, los sistemas e instrumentos de medida y el cálculo, horizontalmente a partir de los conjuntos de grado que plantean los Estándares básicos de matemáticas. Dicha clasificación puede ser adaptada según el objetivo y las necesidades de quien la requiere y de los temas a trabajar dentro del aula de clase, con el fin de profundizar en los conceptos relacionados con las magnitudes y observar su complejidad en cada grado.

EJES TEMATICOS	PRIMERO A TERCERO	TERCERO A QUINTO	SEXTO A SEPTIMO	OCTAVO A NOVENO	DECIMO A UNDECIMO
CONCEPTO DE MAGNITUD	1 Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie capacidad, masa y tiempo)en diversas situaciones 2 Comparar y ordenar objetos	1 Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa-peso, tiempo, y amplitud angular) en diversas situaciones. 6 Reconocer el uso de magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.	3 Calcular áreas y volúmenes a través de la composición y la descomposición de figuras de cuerpos.		

SISTEMAS DE MEDIDA	3. Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo con el contexto. 4. Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.	2.Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones	1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. 4. Identificar relaciones entre unidades y patrones para medir diferentes magnitudes.	2. Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. 3. Justificar la pertinencia de usar unidades de medida específicas de las ciencias	1. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. 2. Resolver y formular problemas que involucren mediciones derivadas para atributos tales como, velocidad y densidad

CALCULO	5 Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y de ciencias	3 Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y en las ciencias. 4 Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes. 5 Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes. 6 Reconocer el significado y el sentido de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas	2 Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas) 5. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación	1 Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.	3 Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Como se puede apreciar, los estándares básicos de matemática se trabajan mediante procesos, pues lo que allí se expone, permite que el estudiante adquiera los conocimientos matemáticos, a través de situaciones donde él sea capaz de razonar, resolver y plantear nuevas situaciones de la cotidianidad que presenten y requieran soluciones directas e indirectas.

Analizando el currículo propuesto se puede considerar que tanto los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas como los Estándares Basicos de Matemáticas, "implican que las relaciones entre el maestro, los alumnos, la matemática escolar y la institución sean replanteadas" (MEN, 1998), con el fin de crear estrategias que le permitan estructurar, planear y ejecutar la enseñanza del pensamiento métrico en la escuela.

Por lo tanto, es importante que los maestros conozcan y apliquen estas directrices en sus actividades docentes para que los estudiantes adquieran los conocimientos básicos del pensamiento métrico y los sistemas de medida, obteniendo mejores niveles de competencia en su desempeño social. Para ello, es necesario tener en cuenta en la enseñanza, los contenidos, procesos y contextos que se plantean a partir de los Lineamientos y los Estándares básicos para el área de matemáticas, de tal forma que los conocimientos que se den en el aula sean significativos para el alumno y de acuerdo al contexto social en que se desenvuelven.

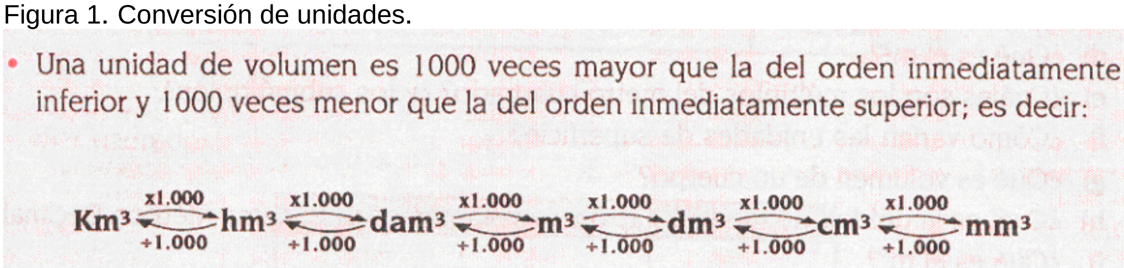
1.1.2 Análisis del currículo desarrollado. El currículo desarrollado se entiende como el trabajo que se lleva a cabo en el aula, en el cual se evidencian los conocimientos y los métodos de enseñanza del docente, así como los conocimientos y los logros adquiridos por parte de los alumnos.

Para dar a conocer el análisis del currículo desarrollado se tienen en cuenta tres elementos importantes como son: Estructura y contenido de algunos textos escolares de matemáticas, concepciones y conocimientos que tienen los docentes acerca del pensamiento métrico y evidencias de ejes temáticos trabajados en los cuadernos de varios alumnos. Éste análisis se realiza mediante la observación de textos y cuadernos escolares y la recolección de datos a través de encuestas realizadas a maestros que ejercen su labor educativa.

1.1.2.1 Análisis de textos escolares de matemáticas: Dentro de este análisis se muestra el tratamiento que se le da al pensamiento métrico en los libros "Matemática Experimental 6º", "Inteligencia Lógico Matemática 6º", "Matemáticas con Énfasis en Competencias 7º", "Pensamiento Matemático 8º" y "Matemática experimental 9º" debido a que en ellos se encuentran contenidos que involucran las magnitudes volumen y capacidad, y puesto que sirven de apoyo para la enseñanza en las Instituciones Educativas en las que se lleva a cabo la práctica profesional; con el fin de determinar que tipo de conocimientos se llevan al aula y la forma como éstos se desarrollan.

- **Matemática Experimental 6º:** En cuanto a la magnitud volumen el texto inicia definiéndola como "el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio", el cual se halla mediante el conteo de unidades cúbicas que lo conforman, es decir, cubos cuyas aristas se miden en metros con sus respectivos múltiplos y submúltiplos. El trabajo con la "unidad" de medida para esta magnitud (metro cúbico) se plantea a partir de la conversión de unidades multiplicando si la unidad es de orden superior a orden inferior o dividiendo si el cambio es de orden inferior a orden superior.

Figura 1. Conversión de unidades.



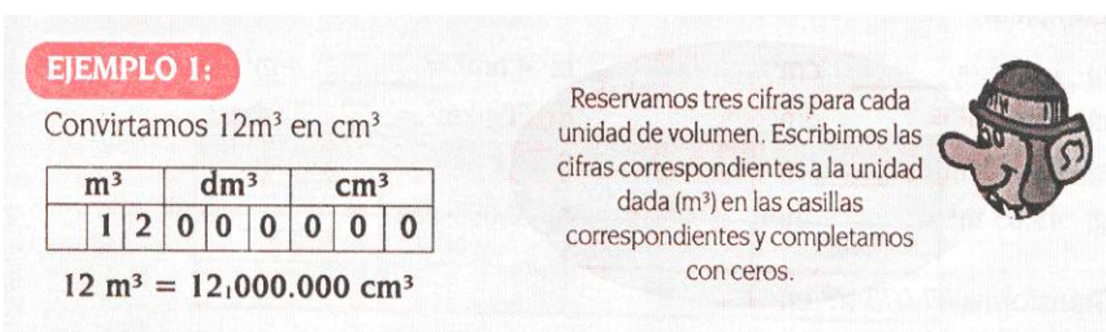
- Una unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inmediatamente inferior y 1000 veces menor que la del orden inmediatamente superior; es decir:

$$Km^3 \underset{\div 1.000}{\overset{x1.000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{\div 1.000}{\overset{x1.000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{\div 1.000}{\overset{x1.000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{\div 1.000}{\overset{x1.000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{\div 1.000}{\overset{x1.000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{\div 1.000}{\overset{x1.000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

Fuente: Matemática Experimental 6º. Editorial Uros. Medellín. 2005

También se plantean diferentes ejercicios que requieren de la aplicación de algoritmos y fórmulas como los que se muestran a continuación:

Figura 2. Aplicación de algoritmos y fórmulas.



EJEMPLO 1:

Convirtamos $12m^3$ en cm^3

m^3			dm^3			cm^3		
	1	2	0	0	0	0	0	0

$12\ m^3 = 12{,}000.000\ cm^3$

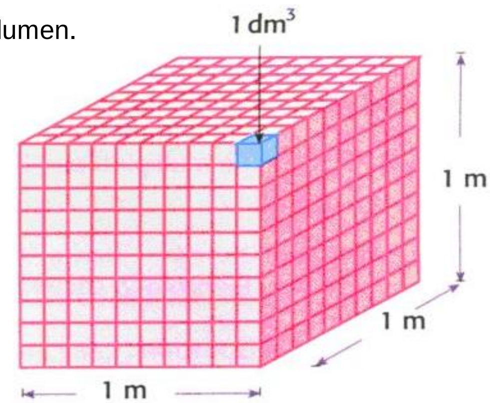
Reservamos tres cifras para cada unidad de volumen. Escribimos las cifras correspondientes a la unidad dada (m^3) en las casillas correspondientes y completamos con ceros.

Fuente: Matemática Experimental 6º. Editorial UROS. Medellín. 2005.

Para el tratamiento de la magnitud capacidad se da a conocer inicialmente el litro como la unidad fundamental, con sus respectivos múltiplos y submúltiplos: Kilolitro, Hectolitro, Decalitro, decilitro, centilitro y mililitro, para los cuales se realizan conversiones, a partir de la multiplicación y la división según corresponda.

- **Matemáticas con Énfasis en Competencias:** Se refiere al volumen como "un número no negativo que indica la porción del espacio que ocupa un cuerpo con respecto a la unidad de medida", dicha unidad se representa mediante el metro cúbico a partir del cual se realizan conversiones de unidades entre múltiplos y submúltiplos, con el fin de poder medir el volumen de algunos cuerpos dependiendo del tamaño de estos. A continuación se observa la definición de la magnitud volumen a partir de un gráfico y la tabla de múltiplos y submúltiplos que se emplea para la conversión de unidades de la magnitud volumen:

Figura 3. Definición de volumen.



Fuente: Matemáticas con énfasis en competencias. Editorial Horizonte. Bogotá. 2001

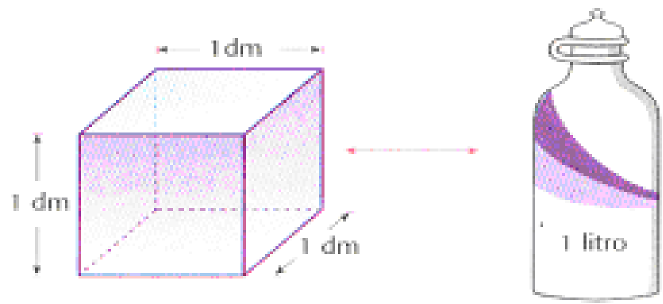
Figura 4. Tabla de múltiplos y submúltiplos.

	Nombre	Símbolo	Valor en metros^3
Múltiplos	Kilómetro cúbico	km^3	1 000 000 000 = 10^9
	Hectómetro cúbico	hm^3	1000 000 = 10^6
	Decámetro cúbico	dam^3	1000 = 10^3
Unidad básica	**Metro cúbico**	m^3	**1 = 10^0**
Submúltiplos	decímetro cúbico	dm^3	0.001 = 10^{-3}
	centímetro cúbico	cm^3	0.000001 = 10^{-6}
	milímetro cúbico	mm^3	0.000000001 = 10^{-9}

Fuente: Matemáticas con énfasis en competencias. Editorial Horizonte. Bogotá. 2001

En cuanto a la capacidad el texto presenta la siguiente definición: “la capacidad de un cuerpo vacío es el volumen de los cuerpos que lo pueden llenar completamente”; la unidad básica para esta magnitud es el *litro* definido como “la capacidad de un cubo vacío de 1 dm de arista”

Figura 5. Definición de capacidad.



Fuente: Matemáticas con énfasis en competencias. Editorial Horizonte. Bogotá. 2001.

Al igual que el tratamiento dado a la magnitud volumen, el libro presenta una tabla donde se muestran los múltiplos y submúltiplos que se derivan de la unidad fundamental de la capacidad (litro), como se puede observar en la siguiente tabla:

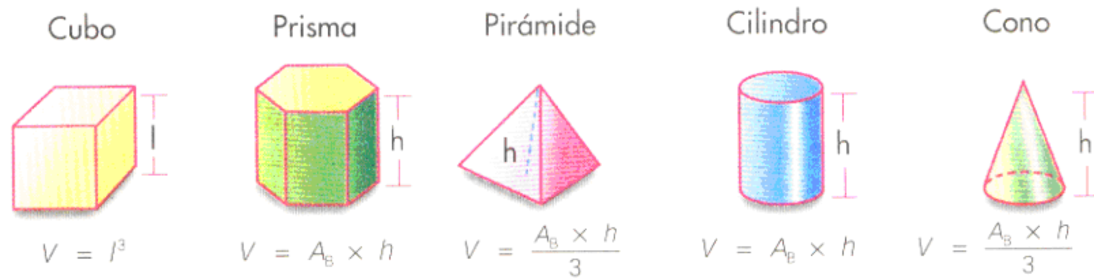
Figura 6. Tabla de múltiplos y submúltiplos del litro.

	Nombre	Símbolo	Valor en gramos
Múltiplos	kilolitro hectolitro decalitro	kℓ hℓ daℓ	$1000 = 10^3$ $100 = 10^2$ $10 = 10^1$
Unidad básica	litro	ℓ	$1 = 10^0$
Submúltiplo	decilitro centilitro mililitro	dℓ cℓ mℓ	$0.1 = 10^{-1}$ $0.01 = 10^{-2}$ $0.001 = 10^{-3}$

Fuente: Matemáticas con énfasis en competencias. Editorial Horizonte. Bogotá. 2001.

- **Inteligencia Lógico Matemática:** En este texto se hace referencia a las unidades de volumen como aquellas que “sirven para medir el espacio que ocupa un cuerpo, siendo las más usadas el m^3, dm^3, cm^3” y las unidades de capacidad como aquellas que “sirven para medir la cantidad de líquido que cabe en un recipiente, siendo las más usadas el litro y el mililitro”. Luego se muestran algunos cuerpos con sus respectivas fórmulas para hallar el volumen y algunos problemas que permiten aplicar las definiciones y las relaciones establecidas entre las magnitudes. Así:

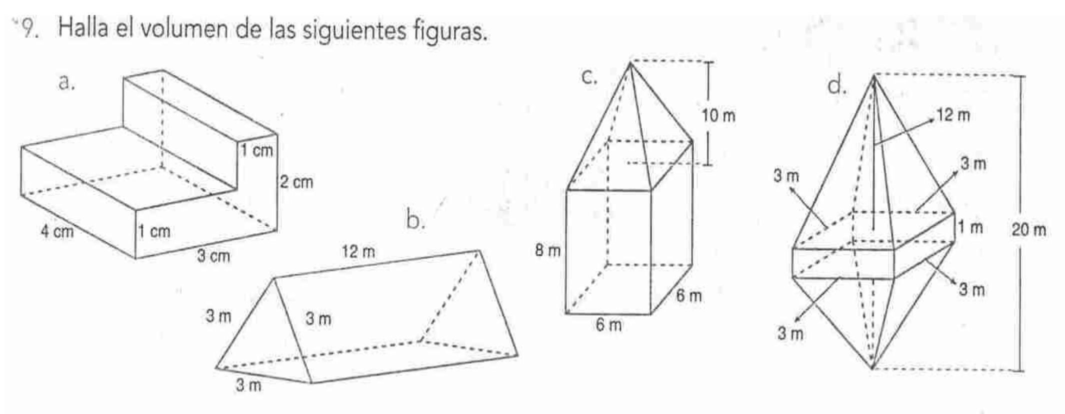
Figura 7. Fórmulas para hallar volumen de cuerpos.



Fuente: Inteligencia Lógico Matemática.

- **Pensamiento Matemático 8:** El texto recuerda que el volumen “es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo”. Luego presenta un trabajo basado en el volumen de prismas y pirámides donde se muestra como hallar el volumen de estos cuerpos a partir de sus respectivas fórmulas. También se proponen algunos ejercicios y problemas en los que se pide hallar la relación entre las longitudes de los lados con el volumen y descomponer cuerpos en pirámides y prismas con el fin de aplicar fórmulas a partir de los datos observados.

Figura 8. Descomposición de cuerpos en pirámides y prismas para hallar volúmenes.



Fuente: Pensamiento matemático 8. Editorial Libros y Libros S.A. Bogotá. 2002

- **Matemática Experimental 9**: Se define el volumen como “el número de unidades cúbicas contenidas en la porción de espacio limitada por un cuerpo”, el cual se mide eligiendo una unidad que suele ser la porción de espacio ocupada por un cubo cuya arista mide una unidad de longitud, por ello se denomina “Unidad cúbica”.

  Por otro lado se construye la tabla de múltiplos y submúltiplos de la magnitud volumen, a partir de su unidad fundamental que es el metro cúbico (m^3).

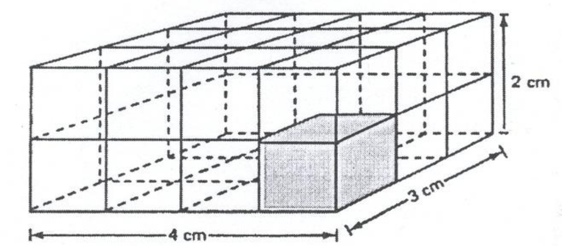
Figura 9. Tabla de múltiplos y submúltiplos del m^3.

NOMBRE	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA
Kilómetro cúbico	km^3	$10^9\ m^3$
Hectómetro cúbico	hm^3	$10^6\ m^3$
Decámetro cúbico	dam^3	$10^3\ m^3$
METRO CÚBICO	$\mathbf{m^3}$	$\mathbf{10^0\ m^3}$
Decímetro cúbico	dm^3	$10^{-3}\ m^3$
Centímetro cúbico	cm^3	$10^{-6}\ m^3$
Milímetro cúbico	mm^3	$10^{-9}\ m^3$
LAS UNIDADES DE VOLUMEN VARIAN DE MIL EN MIL		

Fuente: Matemáticas experimental. UROS editores. Medellín. 2005

Con el fin de hallar el algoritmo de las fórmulas para el volumen de cuerpos como el ortoedro, el prisma, el cilindro, el cono y la pirámide el texto parte de una experiencia (ver figura 10) que induce al alumno hacia la construcción de estas.

Figura 10. Construcción de fórmulas: experiencia.



• Fíjate bien en el siguiente ortoedro y contesta las preguntas:

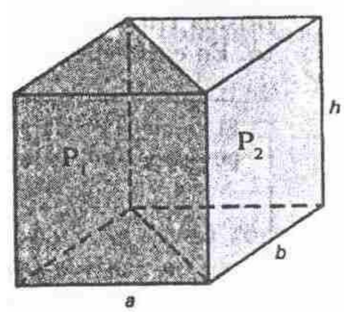
– ¿Cuántos cubos de 1 cm³ cubren la base del ortoedro?
– ¿Cómo obtenemos este número sin contar?
– ¿Cuál es el área de la base del ortoedro?
– ¿Cuantos cubos son necesarios para llenar el ortoedro?
– ¿Cómo podemos obtener este número sin contar?

Fuente: Matemáticas experimental. UROS editores. Medellín. 2005

Luego de esta experiencia se propone dividir el cubo en dos prismas triangulares congruentes (ver figura 11) que dan a conocer su volumen, el cual es igual a:

$$\mathbf{V= \frac{(a\ .\ b)}{2}\ .h}$$

Figura 11. Descomposición del ortoedro en dos prismas.



Fuente: Matemáticas experimental. UROS editores. Medellín. 2005

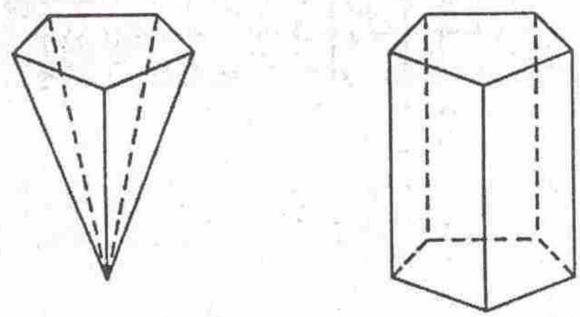
Cuando el prisma no es de base triangular se descompone su base en triángulos y la suma de las áreas de estos triángulos es igual al área del polígono de la base. Por lo tanto el volumen de cualquier prisma, siempre será igual al área de la base por la altura.

Con esta fórmula también se puede calcular el volumen de un cilindro recordando que a medida que se aumenta el número de lados de la base de un prisma, éste tiende a parecerse a un cilindro, luego el volumen del cilindro: Vcilindro= Abase.h, como la base del cilindro es un círculo

$$V_{Cilindro} = r^2h$$

Figura 12. Volumen del cono a partir de la pirámide.

- Construye en cartulina un prisma y una pirámide que tengan la misma base y la misma altura.



- Llena de arena o aserrín la pirámide y deposita el contenido en el prisma. Contesta: ¿Cuántas pirámides llenas de arena necesitas para completar el prisma?
- Esta experiencia nos muestra que:

$$V_{PIRAMIDE} = \frac{1}{3} V_{PRISMA}$$

Y como:

$$V_{PRISMA} = A_{BASE} \bullet h$$

entonces:

$$\boxed{V_{PIRAMIDE} = \frac{1}{3} A_{BASE} \bullet h}$$

- En forma similar, podemos deducir que el volumen de un cono es:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3} A_{BASE} \bullet h$$

$$\therefore \boxed{V_{CONO} = \frac{1}{3} \pi R^2 \bullet h}$$

Fuente: Matemáticas experimental. UROS editores. Medellín. 2005

Al finalizar la unidad se presentan ejercicios en los que se busca calcular el volumen de algunos cuerpos, utilizando las medidas que aparecen en ellos y del mismo modo, se dispone de problemas que requieren de la comprensión y aplicación de los conceptos y las fórmulas relacionadas con la magnitud volumen.

Como se observa en el análisis realizado a los textos, todos coinciden en definir el volumen como el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio; del mismo modo se trabaja la unidad de medida del volumen con un cubo de 1m o de 1cm de arista, el cual se utiliza para llenar algunos cuerpos, en su mayoría regulares. A su vez se presentan tablas donde se evidencian múltiplos y submúltiplos para las magnitudes volumen y capacidad, partiendo de sus unidades fundamentales como son el metro cúbico y el litro respectivamente.

Los textos presentan ejercicios donde los alumnos deben aplicar definiciones de la magnitud volumen, convertir unidades y aplicar fórmulas para hallar el volumen de algunos cuerpos utilizando los datos y medidas dadas. En cuanto al tratamiento que se le da a la magnitud capacidad, se puede decir que es muy poco, puesto que se presentan algunas definiciones y no se proponen ejercicios o problemas que requieran de su aplicación, o en algunos casos no se evidencia ningún tipo de contenido que se relaciona con esta.

En consecuencia tanto el volumen como la capacidad presentan una estructura similar en cuanto al desarrollo de su contenido y de los conceptos relacionados con dichas magnitudes, sus ejercicios permiten que los estudiantes utilicen directamente las fórmulas en las actividades que se plantean y además sugieren convertir unidades de orden superior a inferior o viceversa a partir de la aplicación de los algoritmos de la multiplicación y de la división.

1.1.2.2 Análisis de las concepciones y conocimientos de los docentes: En éste se pretende recoger información sobre los conocimientos que se tienen acerca de la magnitud volumen y la manera como estos son desarrollados por el docente en el aula de clase. Para lo cual se diseña una encuesta con cuatro interrogantes, contestada por cinco docentes del municipio de Envigado, que enseñan en la educación básica secundaria.

Con el planteamiento de los interrogantes se quiere identificar cómo conciben los docentes la magnitud volumen, detectando falencias o aciertos, que implican un replanteamiento de contenidos, estrategias y metodologías.

Además observar la importancia o no que tiene el abordaje de algunos ejes temáticos del pensamiento métrico, señalando qué es lo que se transmite al momento de enseñar la magnitud volumen.

Los interrogantes son:

1. ¿Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la enseñanza de la magnitud volumen?

2. ¿Qué conceptos trabaja en torno a dicha magnitud?

3. ¿En qué tipo de situaciones se basa para enseñar la magnitud volumen?

4. ¿Se basa en los estándares curriculares de matemáticas? ¿En los lineamientos curriculares?

A estos interrogantes los docentes respondieron:

Pregunta 1¿*Qué conceptos previos se deben tener en cuenta para abordar la enseñanza de la magnitud volumen?*

Profesor 1 (9º, 10º y 11º)

-Conceptos de potencias de igual base y el manejo de la parte algebraica.-

Profesor 2 (6º, 7º, 8º y 9º)

-Mire le presto éste libro que es del que saco los conceptos – Matemáticas con énfasis en competencias.

Profesor 3 (6º y 7º)

No respondió al interrogante

Profesor 4 (7º)

-Antes del trabajo de las magnitudes ya he enseñado las potencias, y las proporciones, la gran mayoría de los contenidos del libro Matemáticas con énfasis en competencias. 7º-

Profesor 5 (9º)

-Pues los conceptos se trabajan directamente cuando se enseñan las magnitudes, lo único es lo que se ha enseñado anteriormente-

Pregunta 2: *¿Qué conceptos trabaja en torno a dicha magnitud?*

Profesor 1:

-Se parte de la longitud y luego de abordar los conceptos trabajados en el área, se define el volumen como la relación entre el largo, el ancho y la altura; así desde las conversiones se define el m^3 como: m*m*m, así 100cm*100cm*100cm= 1’000.000 cm^3-

Profesor 2

Se ciñe a los elementos y conceptos trabajados por el texto (Matemáticas con énfasis en competencias 7º y 8º)

Profesor 3

-Trabajo conceptos para la conversión de unidades, la tabla de los múltiplos y submúltiplos del m^3 también trabajo la capacidad relacionándola con el volumen.-

Profesor 4

-Unidades y conversión m^2, alturas.-

Profesor 5

-Unidades y conversión de unidades, capacidades y unidad de medida.-

Pregunta 3 *¿En qué tipo de situaciones se basa para enseñar la magnitud volumen?*

Profesor 1

-Para los volúmenes con cajas y pongo a medir largos y anchos.-

Profesor 2

-Desde el libro: la medición se da a través de las fórmulas-

Profesor 3

-Con la medida de los volúmenes de objetos como las cajas; con ejercicios, como el de hallar el volumen de una piscina. Luego con la conversión de unidades y llenando tablas.-

Profesor 4 y 5

-Fórmulas, conversión de unidades, problemas que plantea el libro, para la capacidad con recipientes y botellas, para los litros.-

Pregunta 4 *¿Se basa en los estándares curriculares de matemáticas? ¿En los lineamientos curriculares?*
Los cinco docentes dicen conocer los lineamientos curriculares de matemáticas y los estándares básicos.

Según las diferentes respuestas de los docentes, se puede decir que la mayoría de éstos desarrollan su trabajo a partir de los contenidos, problemas y ejercicios que plantean los textos de matemáticas, tablas que muestran múltiplos y submúltiplos a través de la conversión de unidades fundamentales y actividades que requieren la aplicación de fórmulas para hallar el volumen de diferentes cuerpos (cajas, piscinas).

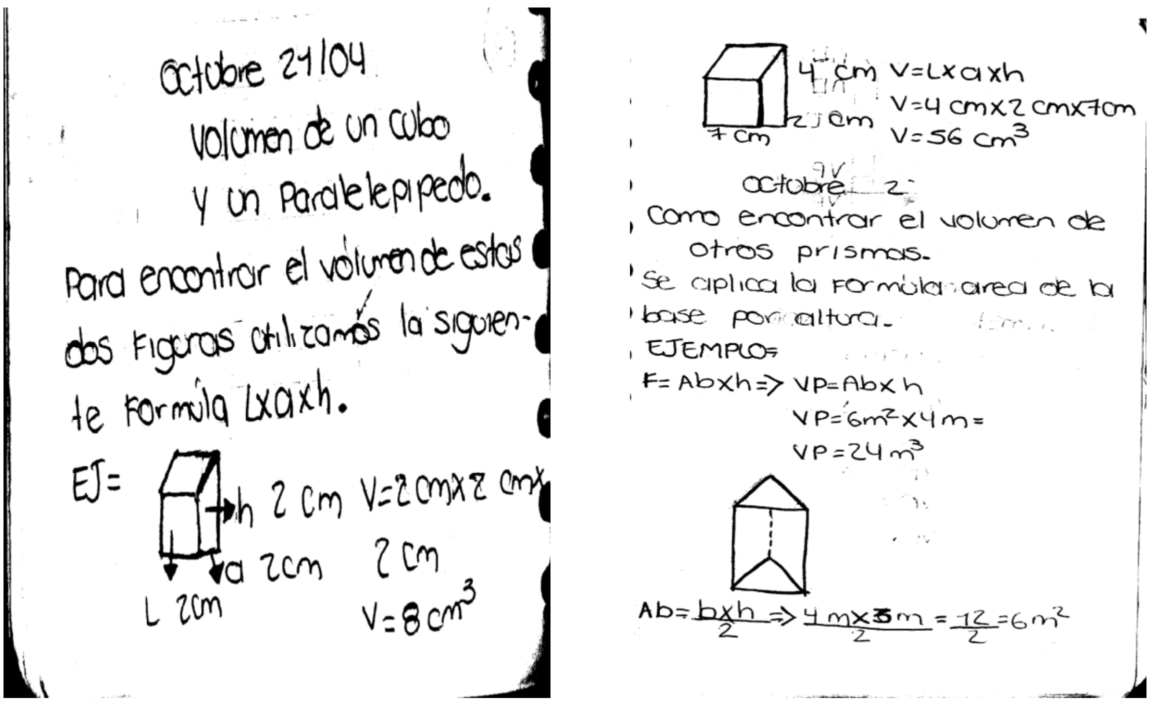
En cuanto a los conceptos previos que deben tener los alumnos para el trabajo con esta magnitud, los profesores afirman que estos deben haber adquirido conocimientos acerca de potencias de igual base con el fin de que puedan realizar ejercicios de conversión de unidades.

Las situaciones en las que los docentes basan la enseñanza del volumen, se centran en ejercicios para hallar volúmenes de cajas, piscinas, acuarios; con las medidas dadas, el trabajo se realiza mediante la conversión de unidades, tanto entre las unidades para el volumen como para las unidades de la capacidad y su equivalencia con las de volumen.

1.1.2.3 Análisis del trabajo desarrollado por los estudiantes: En este análisis se indaga sobre los conceptos trabajados desde el pensamiento métrico, especialmente los relacionados con la magnitud volumen, mediante observaciones de cuadernos en los grados 6 a 9, realizando un rastreo de las notas tomadas durante las clases, que permitan evidenciar la manera como estos conceptos son abordados en la escuela.

Conforme a lo observado en los cuadernos de los alumnos de 7º, 8º y 9º se puede afirmar que no se lleva a cabo el trabajo con las magnitudes volumen y capacidad, puesto que sólo se encuentran evidencias de actividades que involucran áreas y perímetros. Sin embargo, en las notas de 6º, se evidencia el trabajo de la magnitud volumen, a través de fórmulas que permiten hallar el volumen del cubo y del paralelepípedo, además la representación de dichos cuerpos en el plano con las medidas dadas, (ver figura 13), con el fin de que el estudiante aplique el algoritmo y encuentre sus volúmenes.

Figura 13. Cuadernos del grado 6.



Fuente: cuaderno de un estudiante de la Institución Educativa la Paz.

Según el análisis realizado al currículo desarrollado se nota que para la enseñanza de la magnitud volumen, tanto el trabajo de los docentes como el contenido que presentan los diferentes libros analizados, se basan en una estructura similar, ya que en ambos se desarrolla dicha magnitud a partir de la definición, el reconocimiento y la construcción de la unidad fundamental (m^3), la conversión de unidades teniendo como única unidad de medida el cubo de un centímetro de arista, la aplicación de fórmulas para hallar el volumen de algunos cuerpos regulares y la solución de ejercicios que requieren la utilización de los conceptos y conocimientos anteriores.

En general el currículo desarrollado da a conocer cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las magnitudes volumen y capacidad, a partir de los conocimientos que ofrecen los libros para éstas, la manera como el docente aborda dichos conocimientos que son llevados al aula y las evidencias de éstos en los cuadernos de los alumnos.

Los tres elementos que componen este currículo, tienen un tratamiento similar en cuanto a la construcción de los conceptos trabajados en las magnitudes volumen y capacidad y la forma como estos son llevados al aula, a partir de ejercicios o actividades con métodos de soluciones equivalentes.

1.1.3 Análisis del currículo logrado. El currículo logrado es aquel que permite conocer los resultados de las evaluaciones realizadas a la educación Básica y Media a través de pruebas específicas que se aplican en algunos grados escolares y para algunas materias o, como prueba general de conocimientos en el último grado escolar, en muchos casos, requisito para el ingreso a la educación Superior.

El análisis al currículo logrado permite establecer a través de los resultados consolidados lo que son capaces de hacer los estudiantes. Para tal fin se realiza una lectura y análisis de las diferentes pruebas aplicadas en todo el país con las cuales se valoró el conocimiento y el nivel de competencia de los estudiantes colombianos; éstas son: Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias

—TIMSS—, Pruebas SABER en Matemáticas y Lenguaje y el Examen de Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior —ICFES—.

De las anteriores pruebas se observa su objetivo, su estructura, los tópicos a evaluar y los resultados en el área de matemáticas, específicamente lo relacionado con la magnitud volumen.

1.1.3.1 Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias —TIMSS—. Las pruebas TIMSS que se han realizado cada cuatro años (hasta 1995), aunque con diferente nombre, tienen como objetivo conocer el nivel de rendimiento de los alumnos, en las áreas de matemáticas y ciencias; comparar los resultados entre países y tratar de explicar las diferencias observadas en función de las distintas características de los sistemas educativos.

El TIMSS realiza la investigación en tres niveles de la población escolar: La población 1 consiste en todos los alumnos que cursan grados escolares adyacentes los cuales incluyen la mayoría de los alumnos que tengan 9 años en la fecha de la evaluación. La población 2 consiste en todos los alumnos que cursan grados escolares adyacentes que incluyen la mayoría de los alumnos que tengan 13 años en la fecha de la evaluación. La población 3 consiste en todos los alumnos que cursan el último grado de educación secundaria, independiente del tipo de programa que estén siguiendo. La participación de Colombia en el TIMSS se está haciendo a nivel de la Población 2 del Estudio.

Estas pruebas contemplan tres aspectos: de contenido, de habilidades y de perspectiva; fundamentales para establecer las características que se evalúan a cada uno de los estudiantes con el fin de lograr el objetivo primordial de las pruebas; en el siguiente cuadro se muestra los rasgos esenciales de cada uno de los aspectos antes mencionados.

Aspecto de Contenido

1.1 Números
1.2 Medición
1.3 Geometría: posición, visualización
1.4 Geometría: simetría, congruencia
1.5 Proporcionalidad
1.6 Funciones, relaciones y ecuaciones
1.7 Representación de datos, probabilidad
1.8 Análisis elemental
1.9 Validad y estructura

Aspecto de Habilidades

2.1 Uso de Conocimiento
2.2 Uso de procedimientos de rutina
2.3 Investigación y solución de problemas
2.4 Razonamiento matemático
2.5 Comunicación

Aspecto de Perspectivas

3.1 Actitudes a ciencias, matemáticas y tecnología.
3.2 Carreras que tienen ciencias, matemáticas
3.3 Participación en grupos de matemáticas
3.4 Interés creciente en ciencia y tecnología
3.5 Hábitos de la mente científicos y matemáticos

Marco de referencia curricular de Matemáticas. Aspectos principales
(Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas, TIMSS Colombia, MEN, 1997, Pág. 5)

Teniendo como base este marco general, la prueba se estructura asumiendo los siguientes bloques de contenido:

Fracciones y sentido
Geometría
Medida
Álgebra
Representación y análisis de datos.
Proporcionalidad

Las preguntas planteadas para el área de matemáticas, específicamente las relacionadas con el bloque de la medida evalúan los siguientes ejes temáticos:

a) “Concepto de medida y unidades estándar
(Comparación de objetos, uso de unidades estándar, sistema inglés y métrico, uso apropiado de instrumentos, precisión y confiabilidad, medidas comunes de longitud, área,

volumen, capacidad, tiempo, año calendario, moneda, temperatura, masa, ángulos; cocientes y productos de unidades; análisis dimensional).

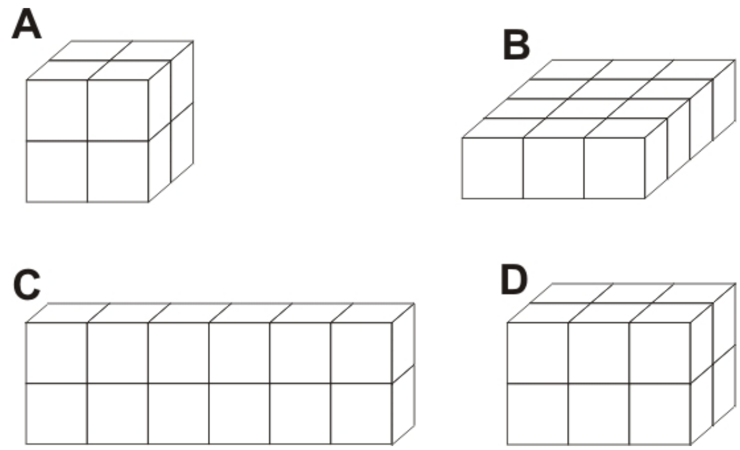
b) Perímetro, área y volumen.
(Comparación de perímetro, área, superficie del área, volumen; fórmulas para determinar perímetros, áreas y volúmenes).

c) Estimaciones y errores
(Estimación en la medición, errores en la medición, precisión y confiabilidad de las mediciones)"
(Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas, TIMSS Colombia, MEN, 1997, pág 8).

Dentro de las pruebas TIMSS, se observan los resultados específicamente para el concepto de medida, encontrando así la situación de los estudiantes frente a este bloque de contenido a nivel nacional, con el fin de determinar las fortalezas y dificultades en el proceso de aprendizaje especialmente del pensamiento métrico.

Entre las diferentes preguntas que se realizaron a los estudiantes mediante las pruebas TIMSS se rastrearon aquellas que se relacionaran con las magnitudes volumen y capacidad

Todos los bloques pequeños son de igual tamaño. ¿Cuál grupo de bloques tiene un volumen diferente de los otros?



% Respuestas	A	B	C	D
Colombia 7º	25.4	19.3	37.7	6.2
Colombia 8º	28.0	22.0	36.5	5.8
Internacional 7º	54.0	17.3	17.9	6.3
Internacional 8º	59.1	15.5	16.4	5.7

La respuesta correcta es la A, pero la mayor parte de estudiantes de los grados 7 y 8 de Colombia respondieron que la respuesta correcta es la C, lo que no ocurre con el porcentaje establecido internacionalmente, pues allí se muestra claramente que la respuesta con mayor porcentaje es la que corresponde a la respuesta correcta.

A nivel Nacional se divulgaron los resultados de esta prueba, mostrando la situación de Colombia a escala internacional. Esta situación se evidencia en las tablas que condensan de manera general los resultados de estas pruebas.

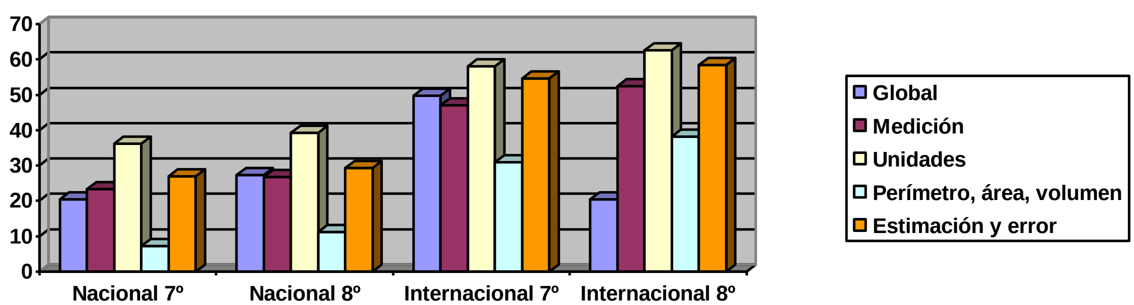
Figura 14. Rendimiento promedio por áreas temáticas evaluadas

Código	Área temáticas	Nacional		Internacional	
		Séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	Global	26.8	30.3	49.8	55.6
1.1	Fracciones y sentido numérico	28.6	30.7	52.6	57.4
1.3 y 1.4	Geometría	26.0	2931	48.9	55.2
1.6	Álgebra	24.2	28.8	44.2	52.9
1.7	Representación de datos y proba	35.5	40.5	60.8	65.9
1.2	**Medición**	**23.4**	**26.7**	**47.1**	**52.5**
1.5	Proporcionalidad	20.5	22.9	39.3	44.3

Fuente: Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas, TIMSS Colombia, MEN, 1997, págs 38, 120.

Figura 15. Rendimiento promedio por temas evaluados

Código	Área temáticas	Nacional		Internacional	
		Séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	Global	26.8	30.3	49.8	55.6
1.2	**MEDICIÓN**	**23.4**	**26.7**	**47.1**	**52.5**
1.2.1	Unidades	36.1	39.3	58.1	62.6
1.2.2	Perímetro, área, y volumen	7.3	11.2	30.9	38.1
1.2.3	Estimación y error	26.9	29.3	54.7	58.5



Fuente: Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas, TIMSS Colombia, MEN, 1997, Págs. 38, 120

Figura 16. Rendimiento promedio por tipo de desempeño evaluado

Código	Área temáticas	Nacional		Internacional	
		Séptimo	Octavo	Séptimo	Octavo
	Global	26.8	30.3	49.8	55.6
1.2	**MEDICIÓN**	**23.4**	**26.7**	**47.1**	**52.9**
2.1	Uso de conocimientos	42.1	44.2	64.5	67.9
2.2	Uso de procedimientos de rutina	25.5	28.4	51.0	55.5
2.3	Solución de problemas	12.8	17.8	37.0	44.0
2.5	Comunicación	4.5	5.6	25.1	32.4

Fuente: Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas, TIMSS Colombia, MEN, 1997, Págs. 38, 120.

En el anterior gráfico se muestran los resultados para el área de matemáticas, proporcionando información sobre la situación de los alumnos respecto a la comprensión de los diversos ejes temáticos que se relacionan con el concepto de medida tanto a nivel nacional como internacional

Según los resultados anteriores se encuentran las conclusiones generales de lo que saben o no los estudiantes de 7º y 8º con relación a la medida:

> *"Los estudiantes colombianos de 7º y 8º se desempeñan bien leyendo en una escala el resultado de una medición (longitud, peso) cuando la lectura es exacta y directa (Unidades y Uso de conocimientos), pero este desempeño se torna precario cuando la lectura o la interpretación se hace menos directa y supone un proceso de estimación y redondeo (Estimación y error y Procedimientos más complejos). Los estudiantes colombianos no parecen tener familiaridad con el concepto de lectura de una medición 'aproximada a una unidad más cercana'.*
>
> *Los estudiantes colombianos de 7º y 8º muestran familiaridad con unidades, de longitud y peso, con su nombre y significado en preguntas que evalúan Uso de conocimientos, pero en preguntas elaboradas con otras unidades de medida, volumen y tiempo, por ejemplo, y que evalúan Procedimientos más complejos su rendimiento baja considerablemente hasta ubicarse en el grupo M. Una de las preguntas sugiere que puede haber desconocimiento de equivalencias entre unidades de tiempo.*

> *La mayoría de los estudiantes colombianos no están familiarizados con la estrategia básica de descomposición de figuras, en figuras más simples, para facilitar el cálculo de volúmenes, áreas o perímetros. Hay, además, indicios de que se presentan confusiones entre los conceptos de área y perímetro así como entre rectángulo y cuadrado y que pueden haber dificultades con las fórmulas para calcular áreas de figuras como triángulos y rectángulos." (Perímetro, área, volumen y uso de conocimientos). (MEN, 1997).*

Las pruebas TIMSS permiten que se compare el sistema educativo colombiano con los sistemas educativos de otros países, con el fin de determinar sus fortalezas y debilidades, a nivel de las matemáticas y las ciencias.

En nuestro caso, Colombia debe mejorar en la comprensión y análisis de preguntas indirectas, en las que se requiera unidades de medida no exactas o la descomposición de figuras y cuerpos que facilitan el cálculo de algunas magnitudes, para ser utilizadas en la resolución de problemas prototipo que se encuentran inmersas en la vida cotidiana de los alumnos.

1.1.3.2 Pruebas de Evaluación de la Calidad de la Educación en Matemáticas y Lenguaje SABER 2002-2003. Las pruebas SABER se aplican a los estudiantes de 3º, 5º, 7º, y 9º, de Educación Básica, en las áreas de lenguaje y matemáticas. Las pruebas SABER de matemáticas se concentran en evaluar el uso que el estudiante hace de la matemática para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos; mientras tanto, las pruebas de lenguaje buscan evaluar la competencia comunicativa a partir del análisis de la forma como los estudiantes hacen uso de éste para acceder a la comprensión de diferentes tipos de textos, es decir, la manera como el estudiante usa su lenguaje en los procesos de negociación de sentido. Ambas pruebas tienen como objetivos:

Fortalecer la reforma educativa en marcha y orientar la gestión del sector.

Reconocer y cualificar los diferentes programas y actores de la evaluación de manera sistemática.

Promover la valoración de la evaluación y sus resultados como instrumento necesario para el mejoramiento de las prácticas educativas.

El propósito de estas pruebas es determinar niveles de logro en las competencias en matemáticas, de los estudiantes en la educación básica, a través del enfoque de formulación y resolución de problemas matemáticos como estrategia de evaluación.

Las pruebas SABER se caracterizan por la evaluación de logros en los problemas por niveles así:
Para los grados 3 y 5 se evalúan tres niveles de logro para matemáticas:

Nivel B: En éste se proponen problemas rutinarios en los que la información necesaria para resolverlos se encuentra en el enunciado y en el orden en el que se debe operar. Las situaciones a las que hacen referencia son de carácter concreto, las cuales se pueden considerar como cotidianas para el estudiante.

Nivel C: En este nivel se proponen problemas no rutinarios simples. La información necesaria para resolverlos se encuentra en el enunciado; pero es necesario reorganizar la información, se caracterizan por su lenguaje "*si sucede x, pasaría que...”*

Nivel D: En este nivel se proponen problemas no rutinarios complejos, los datos del enunciado no determinan por sí mismos el posible desarrollo de su resolución, los datos no están organizados y las situaciones no son las típicas en el trabajo de determinados conceptos matemáticos en la escuela.

Para los grados 7 y 9 se evalúan cuatro niveles:

Nivel C: En este nivel, en el enunciado de los problemas aparece explícita la información necesaria para su resolución, y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir, los problemas requieren del manejo de dos variables con relaciones de dependencia entre ellas.

Nivel D: En este nivel la información necesaria para resolver los problemas se encuentra explícita en el enunciado, el estudiante debe reorganizar la información, pueden implicar también la búsqueda de una regularidad o patrón.

Nivel E: En los problemas de este nivel no aparecen explícitamente ni datos ni relaciones que permitan realizar directamente una modelación, lo que posibilita diferentes formas de abordar el problema, el estudiante debe establecer relaciones entre los datos y condiciones del problema.

Nivel F: En este nivel se ubican los estudiantes que son capaces de resolver problemas no rutinarios complejos. Para la resolución de éstos problemas, el estudiante pone en juego un conocimiento matemático que da cuenta de un mayor nivel de conceptualización logrado.

La caracterización de los niveles es similar en los diferentes grados, en tanto se reconocen los mismos tipos de problemas y las acciones que implica la resolución de estos, pero la complejidad de los niveles de un grado a otro es diferente, desde aspectos disciplinares propios de cada grado (sintaxis, semántica, conceptos, hechos...), y las relaciones que se involucran en cada problema. Los grados 3 y 5 constituyen un caso particular, en donde el nivel B se caracteriza de la misma manera, pero la formalidad del lenguaje que se usa para estructurar las situaciones y las preguntas en los dos grados, se va haciendo más exigente.

Para esta prueba se tuvieron en cuenta las siguientes temáticas de la medida:

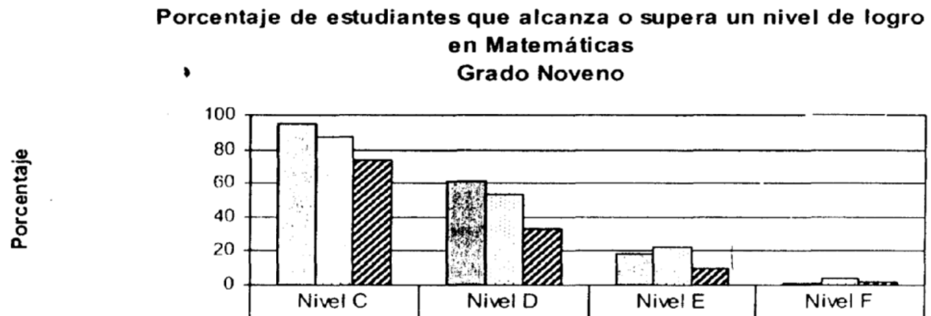
Figura 17. Temas evaluados en las pruebas SABER 2002-2003

	GEOMETRIA Y MEDICION		GEOMETRIA Y MEDICIÓN
TERCERO	Reconocimiento de figuras geométricas. Nociones de perímetro y área en figuras planas. Seguimiento de patrones. Mediciones con unidad patrón.	SEPTIMO	Conceptualización de perímetro y área. Ubicación espacial de figuras planas. Relaciones y propiedades geométricas. Propiedades y clasificación de figuras planas. Movimientos en el plano: simetrías, rotaciones, traslaciones. Uso de diferentes unidades de medida.
QUINTO	Noción de perímetro y de área por recubrimiento. Reconocimiento de figuras geométricas. Rectas, posiciones relativas: perpendicularidad, paralelismo. Propiedades de las figuras. Transformaciones: rotaciones y traslaciones.	NOVENO	Conceptualización de perímetro y/o área. Manejo espacial, volumen. Caracterización de figuras planas. Relaciones y propiedades de objetos geométricos. Conceptualización de la longitud de la circunferencia y área del círculo. Movimientos en el plano (traslaciones). Utilización de patrones de medida no convencionales.

Los resultados de las pruebas censales SABER de 2003, aplicadas a los grados 5 y 9 de educación básica en las áreas de Lenguaje y Matemáticas permiten evaluar si se está alcanzando o no las competencias y en qué grado. Las áreas definidas para esta prueba han servido como base para numerosos estudios sobre el estado de calidad en la educación del país.

A continuación se presentan gráficas que muestran los resultados obtenidos por los estudiantes del grado 9 del Liceo La Paz en el municipio de Envigado, institución que ha permitido realizar el proyecto de práctica profesional docente.

Figura 18. Nivel de logro en Matemáticas grado 9º.



	Nivel C	Nivel D	Nivel E	Nivel F
1. Plantel	95	61	18.5	1
2. Municipio	87.63	53.82	22.56	4.08
3. Departamento	74.12	33.13	10.07	1.77

Fuente: Resultados obtenidos por estudiantes del Liceo La paz - JORNADA TARDE - PÚBLICO – URBANA

Desempeño relativo por grupos de preguntas o tópicos

GRADO 9 °			
Aritmética	**Algebra**	**Geometría y medición**	**Estadística y probabilidad**
A: Alto	**B: Bajo**	**SB: Significativamente bajo**	**SA: Significativamente alto**

Se analizan a continuación algunas preguntas realizadas en las pruebas en el año 2003.

RESPONDE LAS PREGUNTAS 26, 27 Y 28 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Las figuras representan dos sólidos rectangulares cuyas bases son cuadrados

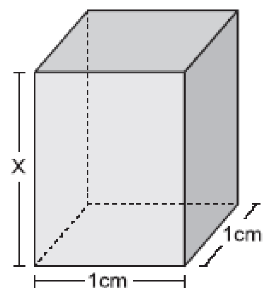


Figura 1

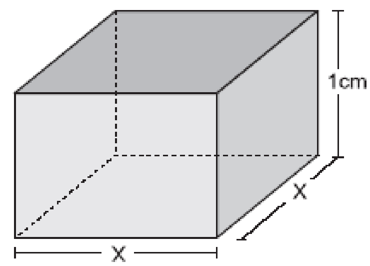


Figura 2

26.

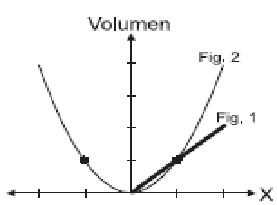
Las expresiones que representan los volúmenes de los sólidos en la figura 1 y en la figura 2, respectivamente, son

A. x y x^2
B. $2x$ y $2x^2$
C. $2 + x$ y $2x + 1$
D. $x + 1$ y $x^2 + 1$

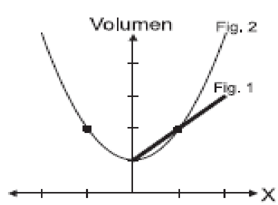
27.

La gráfica que corresponde a la relación entre los valores de x y los volúmenes de los sólidos, es

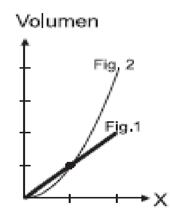
A.



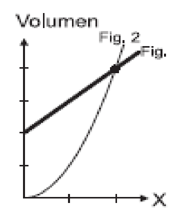
B.



C.



D.



28.

Si el volumen del sólido en la figura 2 es igual a $3cm^3$, el lado de la base mide

A. 1 cm

B. $\sqrt{1.5}$ cm

C. $\sqrt{2}$ cm

D. $\sqrt{3}$ cm

En la tabla se muestra el número de alumnos y los porcentajes de las respuestas que estos dieron a cada opción, tanto dentro del plantel educativo como a nivel municipal y departamental.

		Opción A				Opción B				Opción C				Opción D				Multimarca+Omisión			
		Plantel				Plantel				Plantel				Plantel				Plantel			
Ítem	clave	n	%	M	D	n	%	M	D	n	%	M	D	n	%	M	D	n	%	M	D
26	A	85	38,29	27,09	22,62	38	17,12	20,14	23,59	62	27,93	29,57	28,22	35	15,77	22,51	24,78	2	0,9	0,68	0,79
27	C	84	37,84	24,24	23,04	51	22,97	29,01	28,63	49	22,07	28,29	28,01	28	12,61	16,13	18,24	10	4,5	2,33	2,09
28	D	57	25,68	28,13	29,01	57	25,68	25,2	28,12	36	16,22	13,72	15,57	70	31,53	32,1	29,3	2	0,9	0,84	1

Las respuestas dadas a la pregunta 26 muestra como el 38.3% (85) de los estudiantes del Liceo La paz contestaron correctamente al marcar la opción A, esto muestra que saben aplicar la fórmula del volumen para sólidos rectangulares, sin embargo, la opción B fue marcada por el 17% (38) de los estudiantes del plantel, al parecer no realizan la operación adecuada para hallar el volumen y solamente suman y multiplican los datos dados en el ejercicio. El 27% (62) de los estudiantes que marcaron la opción C confunden las características de los cuerpos y de las figuras (volumen y perímetro). El 15.8 % (35) de los estudiantes marcaron la opción D, se puede observar que hallan el área de la base cuadrada y luego suman la altura. En este ejercicio se omitieron las respuestas del 0.9% (2) por presentar múltiples respuestas.

En el ejercicio 28, la respuesta correcta es la opción D, ésta fue marcada por 31.5% (70) de los estudiantes, lo cual muestra que la gran mayoría de los alumnos respondió correctamente el ejercicio 26, pues la respuesta de este ejercicio es base para dar solución al 28. En este mismo ejercicio el 25.7% (57) de los estudiantes marcaron la opción A, que puede ser consecuencia de haber contestado en el ejercicio 26 la opción C. El 25.7% (57) de los estudiantes marcaron la opción B, lo que indica que en el ejercicio 26 también marcaron la opción B, es decir, realizan operaciones de suma y multiplicación con datos propuestos. El 16.2% (36) de los estudiantes marcaron la opción C, posiblemente marcaron la opción D en el ejercicio 26, lo que muestra que confunden cuerpos con figuras. Al igual que en el ejercicio 26 se omitieron las respuestas de 0.9% (2) de los estudiantes del plantel.

Las pruebas SABER permiten realizar un balance nacional de cada una de las instituciones educativas y así establecer cuál es el nivel de competencia que tienen los estudiantes, a través de ejercicios con distintos niveles de complejidad. Además, facilita a los directivos docentes, identificar en qué estado se encuentra su institución frente a las otras instituciones del municipio, departamento y país. A partir de ese diagnóstico, estos diseñan sus Planes de Mejoramiento de calidad de la educación.

De igual manera, esta prueba permite a los docentes concientizarse del desarrollo de las competencias de sus estudiantes, y ver los resultados de sus prácticas pedagógicas, posibilitando la reflexión y autoevaluación para generar nuevas propuestas y alcanzar mejores resultados.

1.1.3.3 Pruebas de acceso a la Educación Superior ICFES. Son pruebas generales de conocimiento que se aplican a los alumnos del grado 11, con el fin de permitir el ingreso a la educación superior y evaluar competencias en cada una de las áreas que hacen parte de esta.

Dichas pruebas están compuestas por: un núcleo común que indaga competencias básicas en áreas fundamentales de la Educación Básica y Media y un componente flexible que permite al estudiante poner en acción sus competencias en niveles de mayor complejidad (profundización) o frente a problemáticas actuales (interdisciplinar). Esto implica que el alumno posea un dominio significativo del saber, ya que su contenido apunta hacia una comprensión profunda, a la construcción de inferencias y deducciones, al análisis crítico y a la utilización oportuna y pertinente de conceptos.

Dentro del pensamiento métrico y en cuanto a la magnitud volumen se puede observar como las preguntas se basan en la comprensión e interpretación de tablas o información que surge de problemas de la vida diaria. Esto se refleja en los siguientes ejemplos que hacen referencia a dicha magnitud.

RESPONDA LAS PREGUNTAS 36 A 39 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Con motivo de la temporada navideña, una empresa de licores lanzará al mercado los vinos **Amoroso** y **Sensación**, cuyas características principales son su exquisito sabor y su particular presentación al público, pues son envasados en botellas alargadas de 40 cm de longitud. Para invertir en la primera producción, el dueño cuenta con $ 20 000 000 y con el equipo necesario para procesar 2 600 000 cm^3 de vino. En la siguiente tabla se indica los costos de producción y ganancias de cada vino

	Vino Amoroso	Vino Sensación
Contenido de cada botella	1 000 cm^3	1 920 cm^3
Costo de producción por botella	$ 15 000	$ 19 600
Ganancia neta (botella)	$ 12 000	$ 7 400

36. Luego de hacer estimaciones, el jefe de producción le informa al gerente que la relación de costos que debe mantenerse en esta producción está representada por la expresión

$$15\,000\ A + 19\,600\ S \leq 20\,000\,000.$$

El gerente, al analizar lo anterior, le responde diciendo que está

A. de acuerdo, ya que esta expresión permite determinar cuántas botellas de cada vino deben producirse, para no superar los $ 20 000 000 de presupuesto

B. en desacuerdo, porque es necesario considerar la cantidad de vino Amoroso que se puede producir durante cada mes, para luego estimar la cantidad de vino Sensación producido durante ese período

C. de acuerdo, ya que esta expresión relaciona la inversión que hará la empresa, con posibles cantidades de botellas de cada vino, para no superar la inversión establecida

D. en desacuerdo, porque debe considerarse, además, la ganancia neta que se obtendrá con la venta de cada botella de vino de las dos marcas

37. Para obtener la máxima ganancia con esta producción de las dos marcas de vino, el gerente afirma que será necesario procesar

A. igual cantidad de vino de las dos marcas, sin que se supere las 1 050 botellas, para no sobrepasar el presupuesto que se tiene destinado

B. 900 botellas de vino Sensación y 1 100 de Amoroso, pues con éste la ganancia neta por botella es mayor

C. el vino necesario para llenar 720 botellas de cada marca de vino

D. más vino Sensación, llenando máximo 500 botellas y 680 de vino Amoroso

38. Pasado un mes de estar disponibles al público las dos marcas de vino en el punto de venta principal, el administrador reportó en su informe, que 3/4 del dinero recaudado se debe a las ventas del vino Amoroso, mientras que sólo 1/4 proviene del vino Sensación. Cuando el gerente recibe este informe, se dispone a calcular la ganancia que puede obtener. De los siguientes procesos el que le permite calcular dicha ganancia es

A. $\left[9000 \times \begin{array}{l}\textbf{Cantidad de botellas}\\ \textbf{de vino AMOROSO}\\ \textbf{producidas}\end{array}\right] + \left[1850 \times \begin{array}{l}\textbf{Cantidad de botellas}\\ \textbf{de vino SENSACIÓN}\\ \textbf{producidas}\end{array}\right]$

B. $\left[12000 \times \begin{array}{l}\textbf{Costo de producción}\\ \textbf{por botella de vino}\\ \textbf{AMOROSO}\end{array}\right] + \left[7400 \times \begin{array}{l}\textbf{Costo de producción}\\ \textbf{por botella de vino}\\ \textbf{SENSACIÓN}\end{array}\right]$

C. $\left[15000 \times \begin{array}{l}\textbf{Ganancia neta por}\\ \textbf{botella de vino}\\ \textbf{AMOROSO}\end{array}\right] + \left[19600 \times \begin{array}{l}\textbf{Ganancia neta por}\\ \textbf{botella de vino}\\ \textbf{SENSACIÓN}\end{array}\right]$

D. $\left[11250 \times \begin{array}{l}\textbf{Cantidad de botellas}\\ \textbf{de vino AMOROSO}\\ \textbf{producidas}\end{array}\right] + \left[4900 \times \begin{array}{l}\textbf{Cantidad de botellas}\\ \textbf{de vino SENSACIÓN}\\ \textbf{producidas}\end{array}\right]$

39. La opción que tiene el gerente para reducir el costo del vino Sensación, sin cambiar la característica de la longitud del empaque, es reemplazar las botellas por cajas, y en cada una se envasará 1920 cm^3 de este vino. De las siguientes afirmaciones hechas por algunos diseñadores, sobre las dimensiones que debe tener la base de cada caja, la que permite emplear la menor cantidad de material en su elaboración es

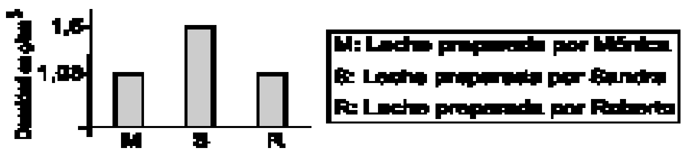
A. la medida de una de las dimensiones de la base de la caja, debe ser 12 veces mayor que la otra medida

B. las medidas de las dimensiones de la base de la caja, deben estar a razón de 3 a 4

C. la medida de una de las dimensiones de la base de la caja, debe ser 6 veces menor que la otra medida

D. la medida de una de las dimensiones de la base de la caja, debe representar aproximadamente el 19% de la longitud de la otra medida

41. Mónica prepara 1 litro de leche, Sandra y Roberto preparan 3 litros cada uno, aunque no todos siguen las instrucciones de la etiqueta para preparar 1 litro de leche. La siguiente gráfica muestra la densidad de la leche que cada uno obtuvo en su preparación.



Teniendo en cuenta que la densidad de la leche preparada, según la instrucción de la etiqueta, es 1,03 g/cm^3, es válido afirmar que Mónica obtuvo 1 litro de leche ideal, mientras que

A. Sandra obtuvo 1,5 litros de leche ideal
B. Roberto obtuvo 1,03 litros de leche ideal
C. Roberto obtuvo 3 litros de leche ideal
D. Sandra obtuvo 1 litro de leche ideal

Tal como se evidencia en los ejemplos anteriores, la prueba contiene situaciones donde es necesario tener claro el concepto de volumen como también realizar estimaciones y conversión de unidades para esta magnitud, ya que se presentan tablas y gráficas que permiten comparar e interpretar información para dar respuesta a una o varias preguntas planteadas.

Conforme a lo presentado en el análisis del currículo logrado se puede resaltar que las pruebas TIMSS, SABER e ICFES, buscan obtener, procesar, interpretar y brindar información a las diferentes instituciones educativas que les permita realizar análisis pertinentes para fortalecer los niveles de competencias en los estudiantes, además de reestructurar y plantear nuevas estrategias para el mejoramiento del plan de estudio, creando distintas alternativas que conlleven a obtener el objetivo del currículo propuesto.

Por tanto, las instituciones educativas deben tener en cuenta en sus procesos de enseñanza y aprendizaje los parámetros establecidos en este tipo de pruebas, puesto que esto permite no sólo cumplir con lo requerido por el Ministerio de Educación, sino también incrementar la calidad educativa en el país.

En todo lo que se refiere al componente didáctico, se considera importante determinar si la información presentada por cada uno de los currículos y la forma como se trabaja, es la apropiada para el proceso de enseñanza y aprendizaje del pensamiento métrico, en especial de las magnitudes volumen y capacidad.

Es claro que el currículo propuesto está conformado por los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas, los cuales tienen como objetivo orientar el desarrollo y enseñanza del currículo en las instituciones educativas.

El trabajo que se desarrolla en los Lineamientos Curriculares en cuanto al pensamiento métrico es muy general, ya que se habla de la construcción de magnitud, el desarrollo del proceso de conservación, la estimación, la selección de unidades, la apreciación del rango de las magnitudes y el trasfondo social de la medida como tal, sin nombrar la forma como se debe llevar a cabo la enseñanza de las magnitudes volumen y capacidad, sin embargo dichos aspectos son considerados como procesos fundamentales para que el maestro construya cualquier tipo de magnitud.

Para lograr un trabajo más específico de las magnitudes volumen y capacidad en la escuela, se debe considerar lo planteado en los Estándares Básicos de Matemáticas, los cuales dan a conocer las metas, que deben lograr los estudiantes en esta área, fundamentales para el desarrollo en un contexto social.

Conforme a lo que se muestra en el currículo desarrollado, son pocas las instituciones educativas que orientan su trabajo bajo los parámetros planteados por el Ministerio de Educación Nacional, en lo que se refiere al diseño y desarrollo del currículo, especialmente lo relacionado con el pensamiento métrico y las magnitudes volumen y capacidad. Dicha falencia se debe a que algunos docentes remiten su trabajo hacia diseños instruccionales presentados en los textos, creando únicas metodologías de trabajo poco significativas para el proceso de aprendizaje del alumno.

Lo anterior se verifica en lo observado y analizado en los textos “Matemática Experimental 6º”, “Inteligencia Lógico Matemática 6º”, “Matemáticas con Énfasis en Competencias 7º”, “Pensamiento Matemático 8º” y “Matemática experimental 9º” en los cuales se puede ver como el tratamiento dado al pensamiento métrico es muy limitado, ya que se centra en la aplicación de fórmulas y algoritmos para el desarrollo de las diversas magnitudes. En lo relacionado con el volumen y la capacidad, es poco el contenido que se presenta en estos textos.

En dichos textos se da una confusión entre la unidad y el patrón de medida, cuando afirman que un centímetro cúbico es un cubo de un centímetro de arista, estarían excluyendo otro tipo de cuerpos que pueden poseer un centímetro cúbico de volumen, como por ejemplo esferas, pirámides, prismas, entre otros. Del mismo modo, no se evidencian actividades intuitivas que permitan la construcción de los conceptos: unidad y patrón sino que se limitan a darles un tratamiento formal desde sus respectivas unidades de medida (litro y metro cúbico).

Otra de las falencias que se encuentran dentro de los contenidos y procesos relativos a la medida, es la forma como se le entregan al alumno fórmulas para que sean aplicadas directamente en un determinado ejercicio, sin desarrollar una construcción de estas a partir de situaciones problema que lleven al alumno a descubrir las diversas relaciones que se establecen entre ellas. En algunos ejercicios de aplicación se limitan a la conversión de unidades de medida sin identificar relaciones de equivalencia, solo se les enseña a aplicar un algoritmo, ya sea multiplicando o dividiendo, según sea el caso; con el fin de obtener datos exactos a partir de la aplicación de operaciones.

De igual forma, el trabajo de los docentes presenta falencias similares en cuanto a la manera como se enseñan los contenidos relacionados con las magnitudes volumen y capacidad, ya que según las respuestas dadas por estos a la encuesta realizada, se pudo notar cómo los maestros se basan en los textos a la hora de planear las actividades que se llevan al aula.

Los docentes no presentan situaciones que requieren del desarrollo del pensamiento métrico, sino ejercicios que involucran solamente una asignación numérica dentro del trabajo con las magnitudes abordadas; lo que implica que las nociones del alumno sean más abstractas de lo que son, pues la medición se ha reducido al puro cálculo, olvidando procesos importantes como la estimación, la aproximación y la comparación, entre otros, que le permiten al estudiante dar un mayor sentido a los conceptos adquiridos.

Por ello, los alumnos no comprenden realmente el sentido de las magnitudes debido a que no se realiza una adecuada construcción del concepto de volumen y capacidad, sino que se reduce al planteamiento de fórmulas para aplicar algoritmos que éstas involucran, a la conversión de unidades según la unidad de medida fundamental (litro y metro cúbico) y la solución de ejercicios a partir de datos conocidos.

Así mismo, como se muestra en los cuadernos analizados, se puede decir que los alumnos no interiorizan ni comprenden qué es lo que aplican al momento de resolver situaciones que involucren estas magnitudes en determinados contextos, puesto que, se limitan a memorizar lo que aprenden sin utilizar otro tipo de estrategias que le permitan una mayor comprensión de lo abordado. Además, los contenidos para estas magnitudes son insuficientes y en algunos casos no se lleva acabo ningún tipo de trabajo que de cuenta del desarrollo de éstos conceptos.

Por lo tanto, el trabajo con estas magnitudes en la escuela, debe ser pensado, partiendo de la estimación de medidas, del orden y rango de las unidades, que lleven al estudiante a apropiarse mejor de los conceptos y a reconocer éste pensamiento (métrico) como una rama de las matemáticas asociada al pensamiento geométrico.

Por otro lado, es importante considerar como las pruebas TIMSS, SABER e ICFES han dejado una fuente de datos importantes para investigar los principales factores causantes del bajo rendimiento y eficiencia que presentan los estudiantes en las preguntas relacionadas con las magnitudes volumen y capacidad; igualmente estos datos o resultados son bases significativas para la reflexión y la introducción de cambios, que permitan darle una nueva mirada al problema educativo pensando en mejorar más la calidad.

A partir del análisis de resultados de las pruebas evaluativas, es posible pensar en promover una educación por competencias, que no se haga el mayor énfasis de la enseñanza de los contenidos, sino que haya una permanente motivación por parte del docente para que los alumnos desarrollen actitudes y aptitudes que enriquezcan su formación y les sea útil para su vida diaria.

Por todo lo anterior, es importante que la escuela replantee la forma como se enseñan las matemáticas y más aún los contenidos que se llevan al aula para ser desarrollados, ya que según el análisis realizado se evidencia el poco trabajo que se le da al pensamiento métrico y al manejo de situaciones problema que posibiliten una adecuada conceptualización. Para ello, una posible alternativa, es conocer y aplicar los parámetros establecidos en los Lineamientos Curriculares y en los Estándares Básicos para el área de Matemáticas, lo cual permite el mejoramiento de la calidad de la educación y mayores avances en niveles de competencia matemática.

1.1.4 Buscando alternativas en la enseñanza. Todo lo planteado hasta el momento, en relación al componente didáctico, muestra como consecuencia un bajo rendimiento por parte de los alumnos a la hora de interpretar, resolver y formular problemas que requieren de la compresión y el manejo del pensamiento métrico, lo cual se evidencia en el análisis realizado a las pruebas de evaluación de la calidad de la educación, en las que se reflejan los vacíos conceptuales de los estudiantes a la hora de enfrentarse a diferentes situaciones y relacionarlas con su entorno.

En este sentido se propone una alternativa metodológica a partir del planteamiento de situaciones problema según la metodología de investigación "Ingeniería Didáctica", para estudiantes de grado noveno de educación básica, la cual busca que éstos sean capaces de relacionar las magnitudes volumen y capacidad con diversas actividades de tipo económico y cotidiano. Con el fin de ayudar al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos relativos al pensamiento métrico, específicamente las magnitudes volumen y capacidad.

1.2 COMPONENTE HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

Dentro de este componente se muestra el papel que juegan las unidades de medida en las diferentes culturas a través de la historia y cómo el cambio de estas unidades y la fijación de un sistema de medida estándar crearon obstáculos en cuanto al desarrollo de las sociedades, quienes tenían sus propias unidades de medida dependiendo de sus necesidades como cultura.

Los componentes culturales de cada período histórico se configuraron siguiendo necesidades y cambios en las ideas, rompiendo con órdenes establecidos, buscando desde la razón la forma de entender el mundo que rodeaba al hombre.

Realizar un análisis histórico y epistemológico es importante para el desarrollo de este trabajo porque permite encontrar en el avance de la historia cómo se han establecido las ideas alrededor del pensamiento matemático, de manera especial, el pensamiento métrico, pues el estudio de las condiciones en las que surge una magnitud como el volumen, brinda las herramientas iniciales para construir su desarrollo histórico y epistemológico, dando a conocer diferentes conceptos que se encuentran asociados a la medida.

En los diferentes relatos de la historia es posible encontrar obstáculos epistemológicos, estos son dificultades intrínsecas de los conocimientos, ideas que se arraigan al pensamiento y pueden ser aproximaciones a una teoría en construcción que no permiten que se acceda a otras concepciones. Para el desarrollo de este trabajo es fundamental este concepto, pues permite decidir sobre ¿cuáles pueden (o deben) evitarse?, ¿cuáles no deben evitarse?, y en consecuencia ¿cómo serán superados? Estos son de gran valor para el aprendizaje de las matemáticas y para el enfoque metodológico de esta investigación "Ingeniaría Didáctica", ya que presentan las raíces iniciales de la Didáctica.

Un aporte importante que se introdujo a la didáctica, fue dado por Brousseau en 1976, cuando dio a conocer la noción de obstáculo epistemológico como un medio para cambiar el status del error; así fue posible mostrar que el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que incluso habiendo sido exitoso se presenta como falso o inadaptado.

Por lo tanto, se describe a nivel general, la época y los hechos más significativos en la historia de la medida, así como los obstáculos que se pueden observar en el desarrollo de un conocimiento.

a. La Matemática en la Prehistoria (2000 al 900 a C).

b. La Matemática en la Época Esclavista (aproximadamente del 800 a C. al 600 d. C).
c. La Matemática en la Edad Media (siglo VI al siglo XV).
d. La Matemática en el siglo XVI al siglo XIX.

a. La matemática en la Prehistoria (2000 al 900 a C): En esta época, el hombre primitivo se ocupaba de la elaboración de utensilios del hogar y de armas para la caza, el cultivo de plantas y la domesticación de animales. En la elaboración de sus utensilios utilizaba propiedades de las figuras geométricas[1], también en las construcciones de sus hogares, sepulturas, armas, tejidos y cerámicas.

Además de la utilización de las figuras geométricas se puede percibir un manejo inicial del conteo, empleaban números de hasta dos cifras y ocasionalmente los usaban en relación directa con los objetos contados, de forma que a las cantidades se les hacía corresponder un signo. Este primario sistema de numeración les permitió medir sus campos, construir almacenes, muros de contención de los ríos, entre otros. Sin embargo, el reducido sistema numérico no permitía que el hombre realizara conteos superiores, lo que de algún modo se convirtió en un obstáculo para el desarrollo del pensamiento métrico, pues los conceptos de número y conteo se encuentran estrechamente ligados a los procesos de medida.

b. La matemática en la época Esclavista (aproximadamente del 800 a C. al 600 d. C): En esta época, se levantaron grandes civilizaciones del antiguo mundo, en especial (ubicadas en el territorio europeo y asiático), las cuales tenían un sistema social que respondía a la estructura de amos y esclavos. Por este tipo de organización los amos tenían el acceso al conocimiento, en tanto los esclavos se dedicaban a ejecutar las órdenes y eran la mano de obra en las construcciones.

[1] Ver HOFMANN JOSEPH. Historia de la matemática. Editorial LIMUSA. NORIEGA Editores. México. 2002.

Entre las civilizaciones más destacadas en la historia de la matemática encontramos: Mesopotamia, Egipto, Grecia, India y China.

● Mesopatamia: Los babilonios crearon un sistema de numeración de 1 a 59 con escritura cuneiforme permitiendo desarrollar potencias en base de 60 para realizar conteos precarios. Se preocuparon también por la utilización de medidas empíricas aplicadas a la astronomía, al levantamiento de planos y a la ingeniería. Estas medidas empíricas les permitían encontrar estimaciones de áreas de cualquier rectángulo, triángulo rectángulo e isósceles, trapezoide con un lado perpendicular a la base y volúmenes de algunos cuerpos; también servía para la solución de problemas numéricos bastante complicados.

Aunque las fórmulas para medir el volumen (tronco de pirámide de base cuadrada) eran erróneas, la solución de problemas numéricos era bastante firme; sin embargo, se puede notar en los babilonios un buen conocimiento de las matemáticas elementales[2].

Para medir longitudes, áreas y volúmenes los babilonios elaboraron un sistema-patrón de medida que duró aproximadamente dos siglos y medio. Para las longitudes se tenía:

Dedo (0.0165 metros)
Cuerda de agrimensor (120 codos)
Mano de albañil (10 dedos)
Mano abierta (15 dedos)
Pie (20 dedos)
Codo (30 dedos)
Cana (6 codos)

---

[2] BELL, Eric Temple. **Historia de las matemáticas.** Fondo de Cultura Económica. México. 2002.

Poste (12 codos)
Semicuerda (60 codos)
Legua (180 cuerdas)

Para el área se tenía:

Grano (0.1960 m^2)
Sexantena (0.5580 m^2)
Campo (35.2836 m^2)
Fanega (35.2836 áreas)
Bur (6.351048 hectáreas)

Para el volumen se tenía como unidad 1/12 de poste cúbico y para la capacidad el Silo = 1/144 del codo cúbico (equivale a 8.42 decilitros).

No obstante, este sistema patrón de medida no fue adoptado por todas las culturas, pues cada una se ajustaba a sus necesidades, impidiendo que hubiese un sistema estándar.

● Egipto: En Egipto la historia de la medida tiene sus inicios en los desastres naturales, tal como las inundaciones del río Nilo, pues debido a su desborde barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada miembro de la comunidad.

> "La tierra se distribuía entre los egipcios en terrenos rectangulares iguales, por lo que pagaban un impuesto anual, y cuando el río inundaba parte de su tierra, el dueño pedía una deducción proporcional en el impuesto y los agrimensores de aquel tiempo tenían que certificar que tal fracción de la tierra había sido inundada". (Citado por Filloy Yagüe en Didáctica e Historia de la Geometría, 1998, Pág. 1).

Adicionalmente se preocupaban por elaborar grandes construcciones sin basarse en la aplicación de las reglas, sino en la utilización de la mano de obra esclava en cantidad ilimitada. Para elaborar tales construcciones y solucionar problemas prácticos de la vida cotidiana, el pueblo egipcio, elaboró ciertas normas operativas sin buscar simplificarlas o perfeccionarlas. Estas preocupaciones se reactivaron con los griegos y su interés por descubrir las características y composiciones de los adelantos matemáticos de la cultura egipcia.

El pensamiento matemático egipcio tuvo grandes avances, sin embargo establecieron fórmulas según sus necesidades y no profundizaron en su desarrollo o perfeccionamiento, por ello no se presentaban como exactas al ser generalizadas a otro tipos de situaciones, convirtiéndose en obstáculos para el desarrollo del pensamiento. No obstante, sus elaboraciones dieron luces a estudiosos como el pueblo griego.

- Grecia: Los conocimientos matemáticos del pueblo griego, tienen su origen en el intercambio cultural con el pueblo egipcio, creando comunidades de intelectuales que se convirtieron en escuelas para profundizar y sistematizar los conocimientos matemáticos. Gran parte de estos intelectuales eran filósofos, entre ellos se encuentran algunos estudiosos de problemas métricos, ellos fueron:

- *Demócrito:* Se dedicó a la enseñanza del atomismo de la materia y en sus estudios logró calcular el volumen de la pirámide y del cono (quizás dividiéndolo en secciones infinitesimales, aunque sin demostración exacta). Estudió la música y estableció una métrica en forma de intervalos, de tal forma que los números enteros podrían considerarse como la medida de todas las cosas.
- *Pitágoras:* Tenía conocimientos matemáticos no sistematizados, sin embargo, creó un teorema que es la base de la geometría métrica en el espacio euclidiano.

- *Euclides:* Mostró rigurosamente la correspondencia entre polígonos y círculos con figuras tridimensionales en su libro de los elementos compuesto por 13 libros. El número XII contiene la determinación de volúmenes y áreas; sin llegar a niveles de generalización.

En el siglo V a.de.C. se dio en Grecia un gran aporte a la aritmética y al concepto de número de la época: la existencia de magnitudes inconmensurables. Los números naturales no bastaban ya para cuantificar y medir los segmentos de recta que producen las construcciones geométricas, por tanto, el gran matemático Eudoxo desarrolló toda una teoría de las proporciones y propuso el método de exhausión para trabajar sobre procesos infinitos. Con este método se trabajó por reducción al absurdo, muy enfocado al estudio del infinito; sin embargo, el concepto de infinito fue vetado por el filósofo Aristóteles como algo extraño, imperfecto e indeterminado.

El destierro del concepto "infinito" no coartó las preocupaciones de los pensadores, por el contrario se convirtió en el tema del desarrollo de razonamientos para sus demostraciones de partes siempre finitas. Los griegos se negaron a aceptar el infinito, tenía un sentido despectivo, era un defecto, una carencia, una imperfección. Para hacer a un lado este concepto crearon el método de exhausión, con el que probaron que dos magnitudes son conmensurables, evitando el paso al límite y al nacimiento del cálculo. Este rechazo al concepto de infinito, perduró por varios años, sin embargo, con el desarrollo de los sistemas numéricos y la definición del número racional, se abrió paso a este concepto.

- China: La civilización China resume su trabajo matemático en nueve libros que plantean problemas prácticos sobre agricultura, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de triángulos rectángulos.

No se puede decir que la geometría fuese el punto fuerte de la cultura china, limitándose principalmente a la resolución de problemas sobre distancias y semejanzas de cuerpos.

- India: La civilización India, se centró en aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos y también parece evidente que desde tiempos remotos utilizaron un sistema de numeración posicional y decimal. Fue, sin embargo, entre los siglos V-XII d.C. cuando la contribución a la evolución de las matemáticas se hizo especialmente interesante. La característica principal del desarrollo matemático en esta cultura, fue el predominio de las reglas aritméticas de cálculo, se destaca la correcta aplicación de los números negativos y la introducción del cero, llegando incluso a aceptar como números validos los números irracionales.

c. La matemática en la Edad Media (siglo VI al siglo XV): La edad media se caracterizó principalmente por el predominio de las ideas de la Iglesia Católica, esta tenía tierras, poder económico y moral sobre los pobladores, además de que poseía el conocimiento y las técnicas de la época, como por ejemplo dos valiosos tesoros culturales: la lectura y la escritura. Sólo los miembros de la iglesia accedían al conocimiento, y los adelantos en las ciencias eran restringidos a las sociedades ocultas, pues las discusiones giraban en torno al tema de la fe y la razón.

San Agustín asoció la teología con las ideas griegas, retomó el concepto de infinito y lo expresó como una característica del Dios cristiano. Las ideas de San Agustín relacionaban la existencia de números finitos cuando se hablaba de singularidades, pero que al tenerlos todos juntos eran infinitos y por tanto Dios los conocía todos. A pesar de que las discusiones sobre la fe eran el tema de la época, los intelectuales dedicaban su tiempo a traducir textos de los matemáticos y filósofos árabes, se reproducen conocimientos antiguos como el contenido de los agrimensores romanos, se centra el estudio en las áreas del cálculo, la trigonometría, la geometría y la astronomía. Estos conocimientos matemáticos eran utilizados especialmente en el sistema comercial, además, para dar instrucciones a los toneleros y determinar el volumen de las vasijas.

No obstante, la gran discusión se da alrededor del infinito, éste tema capturó por varios años los razonamientos, impidiendo el desarrollo de otros temas asociados al pensamiento matemático, entre ellos el desarrollo de la medida y por ende, el desarrollo de magnitudes como el volumen y la capacidad.

Finalizando este largo período, hubo un momento en el cual, esos conocimientos ocultos por mucho tiempo vuelven a ser tratados en espacios diferentes a los monasterios, es la época del renacer de las ciencias y la propagación de los mismos a través de la enseñanza.

d. La matemática en el siglo XVI al siglo XIX: Después de haber estado sometida a una época oscura, la matemática ve su renacimiento con el paso a la Edad Moderna. Aunque se sigue tratando el tema del infinito, paralelo a este concepto, se desarrollaron otros aspectos: la matemática se oficializó e ingresó a los programas educativos constituyéndose en disciplina obligada para todos los estratos de la educación.

En el siglo XVIII, apareció el sistema social capitalista como organización socioeconómica. En esta época se observaron los nuevos conceptos matemáticos y el establecimiento de parámetros generales como el sistema internacional de medidas, que inicialmente tenía su base por la elección arbitraria de las medidas según su necesidad, pero que se debía generalizar para establecer las relaciones más que todo a nivel comercial entre los modelos matemáticos de diferentes civilizaciones.

Durante este período, brillan las ideas de René Descartes, pero no se desarrollaron más pensamientos, ni razonamientos en torno al pensamiento métrico como tal, y de manera particular sobre las magnitudes volumen y capacidad.

En este acercamiento a la historia de la medida se puede observar que su desarrollo ha sido truncado por el descubrimiento de otros conceptos como “el infinito” y los números racionales, conceptos que se encuentran asociados al conocimiento matemático. Para el desarrollo de esta investigación, aportan una visión general que permite establecer la importancia de rastrear a través de la historia un concepto al interior de toda una ciencia, en este caso se hace referencia a las magnitudes volumen y capacidad y a los elementos a tener en cuenta en el desarrollo de su conceptualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje con los estudiantes, para no repetir los eventos que puede narrar la historia que luego podrán representar obstáculos para su desarrollo, es decir, no establecer sólo el enfoque práctico de la magnitud, sino también conceptualizar su definición desde diferentes contextos.

1.3 COMPONENTE TEÓRICO

El proceso de medir genera diversas interacciones entre el individuo y el entorno, puesto que en muchos casos, se realizan acciones condicionadas por alguna medida; por ejemplo recorrer distancias (de la casa al trabajo, al colegio, etc.), comprar en el supermercado (peso de los alimentos, comparación entre cantidades y precios, etc.) o cuando se presentan situaciones como lectura de mapas y construcciones.

Es así como las magnitudes influyen en la vida del hombre pues este debe expresarse en unos valores y mediante unas unidades coherentes, por esto es necesario que el sujeto comprenda y reconozca tanto el significado como el uso que tienen las magnitudes y su medida en el entorno.

Por tal motivo, en el siguiente marco teórico se muestran los conceptos y procesos fundamentales relacionados con el pensamiento métrico como son: magnitud, tipos de magnitudes, estimación, unidades de medida y patrones de medida; todos estos relacionados específicamente con las magnitudes volumen y capacidad, ya que el propósito a lo largo de este trabajo se centra en el desarrollo de dichas magnitudes.

Existen diferentes definiciones para el concepto de magnitud, según la disciplina en la que se trabaje; sin embargo, dentro de este marco teórico se definen los conceptos desde la física, la matemática, la didáctica y la intuición puesto que proporcionan elementos importantes para el desarrollo del mismo.
Según Juan D. Godino:

> "En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales, se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos."
> "…atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.,) o también de manera discreta (p.e. "el número de personas")"

Otras definiciones importantes del concepto de magnitud, desde la matemática y la física respectivamente son:

> "Una magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado formado por clases de equivalencia que son sus cantidades" (GODINO. 2OO2. pág., 18)

Esto quiere decir que cumple con las siguientes condiciones:

- La colección contiene al conjunto, es cerrada bajo uniones contables y bajo complementos.
- La función es no negativa.
- El valor de la función para el conjunto vacío es cero.
- La unión de una sucesión de elementos disjuntos del conjunto es igual a la suma de valores de la función para cada uno de los elementos.
- Debe cumplir con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

> **"**Una magnitud casi siempre responde a una característica física, a un atributo observable de los objetos (longitud, masa, capacidad, etc.). Se clasifican los objetos con respecto a esa característica, esto es, se define una relación de equivalencia que proporcionará dicha clasificación. Todas las magnitudes están directamente relacionadas con la cantidad puesto que ésta proporciona el valor que puede tomar dicha magnitud." (BELMONTE. 1994. Pág. 131)

La medida de una magnitud es un proceso que "*se inicia con la construcción de la magnitud y se completa con la medida y la estimación de la misma*" (DEL OLMO.

1993). Una de las dificultades que se presentan en la medida es la de la "*comunicación a otras personas separadas en el espacio o en el tiempo, de cuántas cosas tenemos, o de cuál es el tamaño (dimensiones) de los objetos y cómo cambian las cantidades como consecuencia de ciertas transformaciones" (D. GODINO. 2002 Pág. 11).* De allí la necesidad de tomar un objeto de referencia, que se pueda trasladar o reproducir. Dichos objetos son las unidades o patrones de medida.

La diferencia entre la unidad de medida y el patrón de medida, es que la unidad puede cambiarse según lo requiera la situación, mientras que el patrón de medida, no varía su valor. El patrón debe estar ligado en lo posible a una unidad, mientras que la unidad no necesariamente tiene que estar ligada a un patrón determinado.

El patrón de medida es un hecho aislado y conocido que sirve como fundamento para crear una unidad de medida. Muchas unidades tiene patrones, pero en el *sistema métrico* solo las unidades básicas tiene patrones de medida**.** Esto indica que para medir se puede utilizar cualquier objeto como unidad sobre la magnitud trabajada, pero a la hora de efectuar una medición más exacta, es necesario tomar como referencia un patrón de medida, el cual ha sido aceptado como estandarizado.

Existen unidades de medida que son proporciones equivalentes de una sola unidad, estas unidades son múltiplos y submúltiplos de la unidad inicial, en el caso específico del volumen la unidad de medida es el m^3, los múltiplos son el kilómetro cúbico (10^9), hectómetro cúbico (10^6) y decímetro cúbico (10^3); como submúltiplos se tiene el decímetro cúbico (10^{-3}), centímetro cúbico (10^{-6}) y el milímetro cúbico (10^{-9}). Para el caso de la magnitud capacidad, los múltiplos de la unidad de medida que es el litro son: kilolitro, hectolitro, decalitro; y los submúltiplos decilitro, centilitro, mililitro.

Otro aspecto esencial a la hora de abordar la magnitud volumen es reconocer la importancia y la necesidad de usar unidades de medida que permitan asignar una cantidad respectiva según el rango de la magnitud. Estas unidades pueden ser convencionales o no convencionales. Las primeras se refieren a un sistema común y universalmente aceptado, que permite comunicar los resultados de las medidas a cualquier parte, sin necesidad de llevar consigo las unidades adoptadas por una determinada sociedad, por el contrario, las segundas son aquellas que no permiten comunicar los resultados de las medidas en cualquier lugar. El trabajo con dichas unidades de medida permitirá que el alumno tenga la posibilidad de iniciarse en el desarrollo del proceso de medida, como también que sea capaz de medir precisa y consistentemente cualquiera de las magnitudes.

1.3.1 Magnitudes fundamentales y derivadas. Existen varios tipos de magnitudes físicas que se adoptan por convención como las fundamentales, que pueden ser medidas de forma directa, es decir, usando los instrumentos de medida y aplicando las unidades respectivas reiteradamente. Las magnitudes que no forman parte de las fundamentales son llamadas magnitudes derivadas, las cuales pueden ser medidas de forma indirecta, es decir, mediante la aplicación de operaciones aritméticas sobre objetos que pueden descomponerse en partes o secciones cuya medida se conoce; sus unidades de medida se establecen fijando los valores numéricos de los coeficientes que figuran en las expresiones matemáticas que relacionan estas magnitudes con las fundamentales.

1.3.2 Volumen y capacidad. El volumen y la capacidad son magnitudes que expresan la medida del tamaño de cuerpos o regiones tridimensionales. La comprensión de estas magnitudes implica la realización de actividades que requieren de comparaciones tanto indirectas como directas.

La medida directa de estas magnitudes es compleja de realizar en la mayor parte de los casos, por lo tanto para calcularla se hace necesario el desarrollo de fórmulas; estas magnitudes deben ser construidas mediante actividades significativas que comprometan al estudiante con su aprendizaje.

Las medidas de volumen se utilizan para objetos de tres dimensiones que permiten medir linealmente cada una de ellas, sin embargo es bastante frecuente utilizar medidas de volumen para medir capacidades o contenidos.

> “El volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada; cuya unidad principal es el metro cúbico” (GODINO. 2002; Pág.16)

> “... puede llamar la atención el hecho de que el volumen y la capacidad parezcan sinónimos, cuando usualmente se suelen entender el volumen como el espacio ocupado y la capacidad como espacio vacío con posibilidad de ser llenado” (Del OLMO y otros.1993. Pág. 98).

Según Vergnaud, el volumen es una magnitud que es susceptible de dos tratamientos, uno como magnitud unidimensional, que puede ser comparada, medida, evaluada, aproximada, sumada, restada, etc., en función de ella misma, y otro como magnitud tridimensional, que permite medirla en función de otra magnitud (la longitud). El segundo tratamiento del volumen corresponde a modelos multiplicativos que se pueden ver obstaculizados por modelos aditivos que anteriormente ha desarrollado el niño y puede conducirlo a errores.

Las medidas de capacidad se usan para hablar de la cantidad de líquido que cabe en un determinado recipiente, a pesar de no tener ningún modelo matemático, se recurre al volumen para trabajarla matemáticamente.

> “se usa la palabra capacidad para designar la cualidad de ciertos objetos (recipientes) de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, cereales, etc.)...
> La capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa, el volumen de un cuerpo coincide con la capacidad de un recipiente que envolviera completamente a dicho cuerpo.”(GODINO, 2002. Pág. 16)

1.3.3 Procesos para medir

1.3.3.1 Medida del volumen: Los procedimientos a seguir para medir el **volumen** de un objeto, dependen del estado en que se encuentre: gaseoso, líquido o sólido.

Por ejemplo en el caso de nubes gaseosas el volumen varía considerablemente según la temperatura y la presión; también depende de si está o no contenido en un recipiente y, si lo está, adoptará la forma y el tamaño de dicho recipiente. Si la masa gaseosa está disuelta en la atmósfera, es difícil precisar qué se entiende por volumen.

Para medir el volumen de un líquido, se emplean diversos recipientes graduados, dependiendo de la exactitud con la que se desee conocer dicho volumen.

Algunos sólidos tienen formas sencillas y su volumen puede calcularse con base en la geometría clásica; por ejemplo, el volumen de un sólido puede calcularse aplicando conocimientos que provienen de la geometría, midiendo sus dimensiones, y aplicando una fórmula adecuada, se puede determinar su volumen.

1.3.3.2 La estimación. Uno de los procesos que componen o intervienen en el proceso de medición es la estimación, que es el mecanismo por el cual se obtiene una medida sin usar los instrumentos, realizando una apreciación subjetiva sobre las medidas de un objeto; es un proceso mental, que involucra aspectos visuales y concretos.

Godino al respecto dice que estimar una cantidad es el proceso de obtener una medida sin la ayuda de instrumentos; es la medida realizada “a ojo” de la cualidad de un objeto, es un proceso muy común, frecuente y útil en las actividades que se realizan en la cotidianidad.

Según el informe de Cockcroft[3] se afirma que la estimación es útil solo en situaciones en que la medición efectiva resulta difícil o molesta, en las que es posible el ensayo error, o en las que admiten amplios márgenes de tolerancia.

Hildreth (1983) indica que desarrollar este proceso involucra habilidades como comprender el concepto de unidad, habilidad de comparar objetos según el atributo que se va a medir, habilidad de seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones y habilidad para verificar la adecuación de la estimación.

Las habilidades de estimación se desarrollan a partir de la práctica, por medio de actividades que involucran este proceso, éstas son poco trabajadas o no se desarrollan en los currículos escolares, debido a que los profesores no se sienten competentes para enseñar este aspecto. Se nota en los escolares un alto grado de dificultad al momento de realizar estimaciones; para enfrentar estas falencias se pueden diseñar una serie de actividades que involucren este proceso como son: indicar a que distancia se encuentra un objeto, la pintura necesaria para pintar una casa, la cosecha esperada para una temporada, la cantidad de ingredientes necesarios para realizar una comida, entre otros.

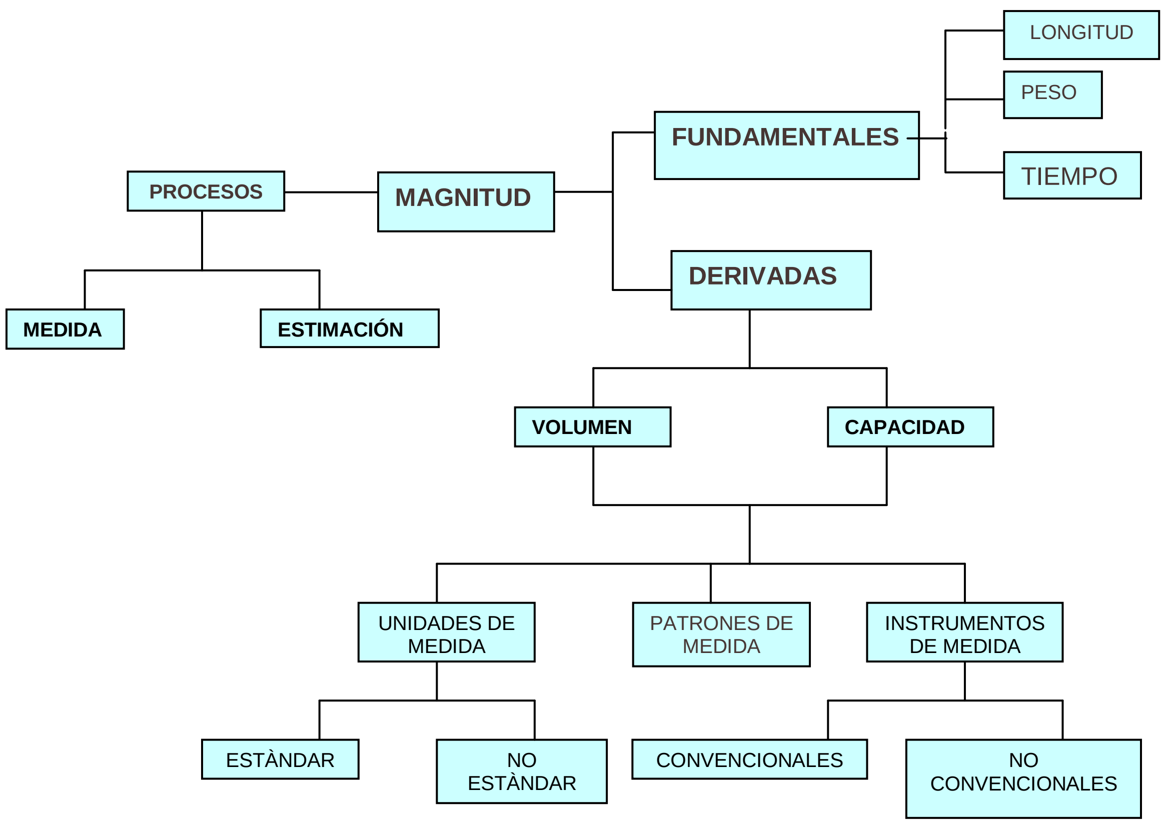
Es importante desarrollar la estimación para establecer un marco de referencia frente a los tamaños de las unidades de medida relacionándolas entre si y con otros objetos, estableciendo las propiedades básicas de la medida y enfrentando situaciones prácticas donde haya que conjeturar la medida, cambiar unidades para un mismo atributo y mantener las habilidades ya adquiridas.

---

[3]COCKCROFT, W.H., y otros (1985): “Las matemáticas si cuentan. Informe Cockcroft”, M.E.C., Madrid.

Tanto los conceptos como los procesos descritos anteriormente se ponen en juego a lo largo de esta intervención didáctica, y son importantes para la construcción del pensamiento métrico y por ende para la construcción de la magnitudes volumen y capacidad. Estos se constituyen como el punto de referencia para la elaboración y desarrollo de conceptos relacionados con dichas magnitudes a través de la aplicación de situaciones problema dentro del aula, las cuales se convierten en una herramienta importante para dar solución al problema de investigación.

A continuación se muestra un esquema conceptual que resume los conceptos fundamentales del marco teórico y las diferentes relaciones que dan entre ellos.



1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿QUÉ SITUACIONES PROBLEMA PUEDEN APLICARSE EN EL AULA PARA QUE LOS ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA, DESARROLLEN EL CONCEPTO DE VOLUMEN Y LO APLIQUEN EN CONTEXTOS ECONÓMICOS?

1.4.1 Objetivos

1.4.1.1 Objetivo General. Desarrollar el concepto de la magnitud volumen, relacionándolo en contextos económicos a través de la adaptación y diseño de situaciones problema, para estudiantes del grado noveno de educación básica.

1.4.1.2 Objetivos Específicos

- Abordar la resolución de problemas como punto de partida para la construcción de conceptos como el volumen y la capacidad.

- Diseñar situaciones problema que permitan desarrollar procesos de medición y estimación de las magnitudes volumen y capacidad.

- Explorar lo medible y no medible de los cuerpos y objetos observables de la cotidianidad, en relación con las magnitudes volumen y capacidad.

1.4.2 Hipótesis

- El uso de unidades convencionales y no convencionales permite una mejor aproximación al concepto de volumen.

- Los procesos de medición facilitan la comprensión de las magnitudes volumen y capacidad.

- El uso de estrategias de estimación permite que los alumnos realicen una mejor medida de las magnitudes volumen y la capacidad.

1.4.2.1 Variables

- Unidades de medida.
- Medición.
- Estimación.

▪ **Valores de las variables**

- Unidades estándar y no estándar.
- Medida entera y no entera.
- Estimación con unidades conmensurables y no conmensurables con el objeto de medida.

1.4.3 Justificación. La necesidad de medir surge de la interacción constante del individuo con los diversos elementos de su entorno, como también de los problemas de tipo económico a los que éste se enfrenta. De aquí la importancia de introducir al estudiante de forma significativa en el tratamiento y uso de las magnitudes, dando a entender la relación que éstas tienen con el entorno.

Por ello, es necesario que el estudiante conozca el significado de las magnitudes y a su vez interactúe con la medida de éstas a partir del reconocimiento de unidades y las diversas relaciones que se pueden establecer entre las cantidades, con el fin, de que el estudiante sea capaz de enfrentar algunos problemas especialmente de tipo económico.

Con este trabajo se pretende que el alumno pueda entender el trasfondo social que encierran las magnitudes volumen y capacidad a partir de situaciones problema, que puedan ser implementadas por el docente en un ambiente de aprendizaje.

Para ello es necesario que el maestro proporcione herramientas que ayuden al alumno a la adquisición y apropiación de los conceptos, buscando que éste pueda establecer equivalencias, realizar estimaciones, utilizar diferentes instrumentos de medida e identificar los patrones de medida en cada magnitud, que lo lleven a tomar decisiones dentro de situaciones cotidianas.

Es así como este trabajo se desarrolla mediante la búsqueda, adaptación y construcción de situaciones problema relacionadas con las magnitudes volumen y capacidad, a partir de la "Ingeniería Didáctica" como metodología de investigación.

De este modo se hace pertinente la realización del trabajo, puesto que proporciona bases y herramientas a los docentes para el proceso de enseñanza y aprendizaje del pensamiento métrico, cuyo tratamiento no es adecuado en la escuela, y al mismo tiempo es poco manejado e investigado por parte de los educadores, pues se trabaja sin ser asociado a los demás pensamientos matemáticos, lo cual es importante para trabajar algoritmos, representaciones gráficas de las dimensiones, construcción algebraica de fórmulas, etc.

2. EXPERIMENTACIÓN, CONCEPCIÓN Y ANALISIS A PRIORI

2.1 REFERENTE METODOLÓGICO

Dentro de esta fase se realiza una breve descripción de la metodología de investigación (Ingeniería Didáctica) y se desarrolla una estrategia de intervención didáctica mediante los planteamientos de los autores Orlando Mesa, Gilberto Obando, John Jairo Múnera y Guy Broseau en relación con el diseño de situaciones problema. Dichas situaciones se basan en la caracterización realizada a estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa La Paz, como también en la manipulación de los elementos que se ponen en juego dentro de las variables de investigación, las cuales se relacionan con las magnitudes volumen y capacidad. Del mismo modo, se describe los resultados esperados y obtenidos por los estudiantes con relación a las situaciones aplicadas dentro del aula.

2.1.1 Ingeniería didáctica. La ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza “por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” de clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Ingeniería didáctica. Artigue, Michéle). En esta metodología se distinguen dos niveles, el de micro-ingeniería y macro-ingeniería, dependiendo de la investigación a realizar.

También se caracteriza por el registro en el cual se ubica la investigación y por las formas de validación a las que está asociada. Esta metodología se ubica en el registro de los estudios de casos cuya validación es interna, basándose en el análisis a priori y a posteriori.

El análisis de la ingeniería didáctica es singular por las características del funcionamiento metodológico que presenta, es así como las investigaciones realizadas bajo esta metodología tienen gran amplitud de realizaciones didácticas y son de mucha importancia para el aporte teórico.

Esta metodología encierra un conjunto de secuencias concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo, con el fin de desarrollar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos, se considera que es el resultado de un análisis a priori.

La metodología de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases que son: los análisis preliminares, la concepción y el análisis a priori de las situaciones didácticas, la fase de experimentación y la de análisis a posteriori y evaluación. La teoría didáctica que se constituye a partir de estas fases son un apoyo que el investigador utiliza, como lo haría un ingeniero.

Los análisis preliminares están conformados por un marco teórico didáctico general y por los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el estudio, además por otros análisis preliminares como: análisis epistemológico de los contenidos de la enseñanza, análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que determinan su evolución ; pero hay que resaltar que este análisis se realiza con base en los objetivos de la investigación.

En la concepción y el análisis a priori se toma la decisión sobre las variables pertinentes para abordar el problema seleccionado, en este aspecto existen dos tipos de variables las macro-didácticas y las micro-didácticas. Las primeras hacen referencia a la organización global de la ingeniería, mientras las segundas son locales y se especializan en la organización de una fase o secuencia de enseñanza. Desde esta fase de concepción se empieza el proceso de validación por medio del análisis a priori de las situaciones problema, el objetivo de este análisis es determinar el control sobre los comportamientos de los estudiantes y su significado, así como describir las características que se desprenden de la situación problema y analizar qué está en juego en el desarrollo de dicha situación.

El análisis a posteriori se basa en los datos recogidos (resultados) después de la experimentación, es decir, de la realización de la situación didáctica, como también después de las observaciones realizadas. Cuando se confrontan los datos recopilados en el análisis a priori y en el análisis a posteriori, se comienza con la validación de las hipótesis formuladas.

El presente trabajo se realiza bajo la metodología de ingeniería didáctica, está distribuido u organizado en tres fases las cuales son: los análisis preliminares; la experimentación, concepción y el análisis a priori; como también el análisis a posteriori y resultados. Cada una de estas encierra una serie de concepciones que permiten desarrollar la presente investigación.

Dentro del análisis preliminar se realizan una serie de indagaciones sobre tres componentes: el componente didáctico basado en los planteamientos del currículo propuesto, el currículo desarrollado y el currículo logrado; el componente histórico-epistemológico donde se realiza un análisis acerca de la medida de las magnitudes volumen y capacidad, además, de los obstáculos epistemológicos que se han aparecido a través de la historia humana frente al desarrollo de estas magnitudes; y el componente teórico a partir del cual se muestran los conceptos y procesos importantes relacionados con las magnitudes volumen y capacidad. Del mismo modo en el desarrollo de este análisis se describe el planteamiento del problema como base para la construcción y aplicación de situaciones problema.

La segunda fase, denominada Experimentación, concepción y análisis a priori, se realiza a partir de un referente metodológico donde se describe la metodología de investigación (Ingeniería Didáctica), algunas concepciones establecidas por diferentes autores sobre las situaciones problema, y tanto los resultados esperados como obtenidos dentro de la aplicación de situaciones problema relacionadas con las magnitudes volumen y capacidad.

Por ultimo, el análisis a posteriori y resultados, muestra el análisis de los resultados obtenidos luego de desarrollar las situaciones problema, así como las conclusiones ofrecidas luego de comparar las concepciones de los alumnos antes y después de la aplicación de situaciones relacionadas con las magnitudes trabajadas.

2.1.2 Estrategia de intervención didáctica. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática deben permitir la participación activa del estudiante dentro de un determinado contexto, a través de situaciones significativas propuestas por el docente como puede ser el diseño e implementación de las **situaciones problema**, que facilitan la construcción del conocimiento.

El desarrollo del referente didáctico tiene como base los planteamientos y teorías, que enmarcan una situación problema, desde diferentes autores como: Gilberto Obando, Jhon Jairo Munera, Moreno y Waldegg, de los cuales se retoma la definición e importancia de las situaciones problema y los elementos que la conforman.

2.1.2.1 ¿Qué es una situación problema? En una primera aproximación frente a este cuestionamiento Gilberto Obando y Jhon Jairo Múnera la definen como:

> "… un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, donde los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos y con el profesor, a través del objeto

> de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos" (Obando, Munera. 2003)

Las situaciones didácticas constituyen el punto de partida de la situación problema. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito los conocimientos que el alumno debe aprender.

Dentro de estas se reconocen las siguientes características:

- Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
- Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.
- Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.
- Debe contener su propia validación.

Estas situaciones son importantes en la medida que logran en los estudiantes un desarrollo autónomo de los procesos de exploración (formulación de hipótesis, validación, reformulación), dando lugar a que el individuo participe activamente en la elaboración teórica. En este caso, la elaboración de situaciones problema que apunten hacia el desarrollo del concepto de la magnitud volumen, buscan que el estudiante comprenda, adquiera y aplique el significado e importancia de esta magnitud en diferentes contextos sociales.

2.1.2.2 Elementos que componen una situación problema. Para diseñar una situación problema se debe tener en cuenta ciertos elementos característicos:

- **Red Conceptual:** La red conceptual es una malla de relaciones donde los nudos son el centro de encuentro entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite desarrollar. La red conceptual permite que el proceso de exploración y sistematización genere cada vez, más significados entre los conceptos y que las relaciones entre éstos no se agoten. Este elemento es de gran importancia, pues permite tomar decisiones sobre los medios y los mediadores a utilizar; además, qué tipo de actividades se puede proponer al estudiante.

- **Motivo:** El motivo se presenta como la excusa, la oportunidad, el evento, la ocasión, el acontecimiento, la coyuntura, o el suceso, que permitirá generar una situación problema en el aula de clase. Debe ser elegido con cuidado, pues de ello depende que la situación sea apropiada por los estudiantes. El motivo debe generar un contexto que sea significativo para el alumno y que despliegue sus habilidades matemáticas.

- **Medio:** Los medios son soportes materiales sobre los cuales se estructura la situación problema. Ellos pueden ser materiales físicos para manipular, instrumentos u objetos abstractos que permiten llegar al conocimiento matemático.

- **Mediadores:** Se considera mediador, específicamente, a un medio que permite el desarrollo de la actividad matemática del alumno. Para que un medio se convierta en mediador es necesario analizar la red conceptual y los elementos que están estructurados en ella, con el fin de establecer a través de qué medio, el pensamiento matemático podrá ser mediado para lograr su construcción conceptual.

- **Estrategias:** Son las tareas que presenta la situación problema de forma visible permitiendo desarrollar la actividad matemática por parte del estudiante. Es así como las estrategias o actividades permiten en el alumno:

> "la búsqueda de diferentes respuestas, relaciones, maneras de explicación y representación, formulación de conjeturas y problemas a partir de los interrogantes. Por eso las preguntas planteadas durante la intervención deben guardar una estrecha relación con la selección de los contenidos y deben ser de todo tipo cerradas y abiertas con el fin de promover la reflexión, la creatividad, la investigación" (Munera 1998).

- **Evaluación:** La situación problema tiene implícito un mecanismo de evaluación o de validación del trabajo, que le den al alumno herramientas de confrontación clara de lo realizado con lo esperado, que le ayuden a pensar como seguirá en el desarrollo de la solución del problema. La argumentación entra a ser parte importante de la validación.

> "La evaluación empieza a tomar cuerpo de las mismas situaciones diseñadas, de manera tal, que el término "evaluación" empiece a hacerse "invisible", en la medida que no perdamos de vista que las aproximaciones a las soluciones (no respuestas) acertadas o con errores son canalizadoras del aprendizaje y a la vez para que den luz verde a los procesos en los que se tienen en cuentan aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales." (Obando, Munera)

La evaluación dentro de una situación problema respeta los ritmos de aprendizaje y canaliza los errores presentes en las respuestas como agentes mediadores para provocar cambios conceptuales en los alumnos.

2.1.3 Diseño de las situaciones problema

2.1.3.1 Caracterización y diagnóstico del grupo. La Institución Educativa la Paz, es una institución de carácter público, ubicada en el barrio la Paz del municipio de Envigado, donde se atienden diariamente alumnos provenientes en su mayoría de sectores cercanos como el Dorado y Trianón y en su minoría de barrios un poco más alejados e incluso de otros municipios.

Está formada por cuatro secciones, tres de ellas dedicadas a la educación básica primaria como lo son la sección Jhon F Kennedy, sección la Paz y sección el Trianón, y una de ellas (Liceo la Paz) que ofrece la Educación Básica Secundaria y la Educación Media, ya sea técnica o académica. El Liceo la Paz cuenta con 1324 alumnos, 45 profesores y 32 grupos de aproximadamente 43 estudiantes repartidos en dos jornadas y por grados.

El grupo en el que se aplica la investigación es 9º5, conformado por 40 estudiantes de los cuales 19 son hombres y 21 son mujeres, entre las edades de 15,16 y 17 años.

Para el desarrollo de cada situación se divide el grupo en 8 subgrupos de 5 estudiantes cada uno; los cuales constituyen el equipo de trabajo para abordar las tres situaciones propuestas, esto con el fin de evidenciar por medio de las soluciones que se obtengan, el progreso de los estudiantes en cuanto a los conceptos relacionados con las magnitudes volumen y capacidad.

2.1.3.2 Cronograma: En el siguiente cronograma se presenta una descripción general de las actividades desarrolladas durante la práctica profesional

FECHA	ACTIVIDADES	TIEMPO DE DURACIÓN
Enero 24 a Marzo 25	Diagnóstico	3 meses
Marzo 26 a Noviembre 01	Investigación, realización de entrevistas, análisis preliminares, diseño de las situaciones problemas.	8 meses
02 Noviembre de 2005	Situación 1: Oferta de refrescos Supermercado La Excelencia	15:00 a 17:00 2 horas
11 Noviembre de 2005	Situación 2: Lanzamiento de una nueva presentación de azúcar al mercado	17:00 a 19:00 2 horas
16 Noviembre de 2005	Situación 3: Relaciones entre las magnitudes capacidad y volumen.	15:00 a 17:00 2 horas

2.1.3.3 Situaciones problema. Las situaciones que se muestran a continuación son diseñadas a partir de las variables de investigación y ponen en juego los siguientes elementos:

- Medida de la capacidad y estimación de dicha medida, haciendo uso de unidades convencionales y no convencionales.
- Medida del volumen y estimación de dicha medida, haciendo uso de unidades convencionales y no convencionales.
- Relaciones de equivalencia entre el volumen y la capacidad.

Es importante tener en cuenta que estas situaciones se trabajan no sólo a partir de los procesos de medición y estimación como elementos fundamentales que conllevan hacia la construcción del concepto de volumen y capacidad, sino que también se tienen en cuenta contextos económicos en donde los alumnos deben tomar decisiones acerca de la conveniencia de llevar un artículo dependiendo del costo y de la cantidad. Esto permite que de una u otra manera el alumno, al acercarse por ejemplo al supermercado sea capaz de cuestionarse al comprar un producto donde se mide la capacidad o el volumen de este.

- **Situación 1.** Oferta de refrescos Supermercado La Excelencia **(Ver anexo A)**

Objetivo: Medir diferentes capacidades con instrumentos de medida no estandarizados, utilizando varias unidades de medida.

Descripción de la situación: En los diversos contextos económicos pueden encontrarse relaciones directas entre la medida de un producto y el valor del mismo, lo cual constituye un elemento importante a la hora de diseñar y aplicar situaciones problema.

Con el desarrollo de esta situación se pretende que el alumno compare diferentes capacidades por medio de algunos recipientes (botellas y vasos) y sea capaz de establecer relaciones y diferencias entre estos y sus precios.

Motivo: Una visita al Supermercado “La Excelencia”

Medios: Los medios físicos que se utilizan para el desarrollo de esta situación son: agua, vasos desechables, botellas de refresco de diferentes tamaños con marcas específicas, papel y lápiz.

Los medios abstractos que se utilizan para el desarrollo de esta situación son: el concepto de capacidad, la conversión de unidades a partir de unidades convencionales y no convencionales, además de los procesos de medición y estimación relacionados con la magnitud capacidad.

Mediadores: Los anteriores medios físicos y abstractos se convierten en mediadores cuando el alumno puede utilizarlos para resolver las actividades y a través de ellos establecer generalidades, efectuando diferentes comparaciones entre las capacidades y las unidades de medida.

El estudiante debe explorar, comparar, relacionar y encontrar equivalencias entre las diferentes unidades de medida, que se trabajan en toda la situación.

Estándares relacionados: Los estándares del pensamiento métrico y sistemas de medida relacionados en esta situación son:

De octavo a noveno:

- Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados

Los estándares del pensamiento numérico y sistemas numéricos relacionados en esta situación son:

- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

Red conceptual: Se realiza una red conceptual en la que están involucrados los conceptos del pensamiento métrico y se resaltan aquellos que se ponen en juego en la situación problema. **(Ver anexo B)**

Rol del Maestro: Durante el desarrollo de esta situación el maestro debe proporcionar al estudiante los medios adecuados y suficientes para la solución de todas las actividades. Este debe observar los diferentes procesos, con el fin de determinar qué estrategias utiliza el estudiante al construir los conocimientos. Además debe proponer nuevos cuestionamientos cuando se requiera, para ayudar y facilitar la adquisición de los conceptos que se pretenden enseñar con la situación.

También hace parte del rol del maestro, brindar un contexto y un ambiente de aprendizaje adecuado para que no sean un obstáculo, e influencien de manera negativa la comprensión y el desarrollo de las situaciones.

Rol del alumno: El alumno debe ser parte activa del trabajo, ser creativo y ejecutar las acciones necesarias para dar solución a cada actividad. También debe proponer nuevos cuestionamientos que lo motiven a desarrollar la situación mediante la manipulación del material concreto, la formulación y comprobación de hipótesis.

De la misma manera el estudiante debe movilizar sus conocimientos, para que le sea posible construir y adquirir nuevos conceptos a través del desarrollo de las actividades, argumentando cada una de sus respuestas.

Validación: En este momento de la validación se socializan las respuestas obtenidas por cada uno de los grupos en las actividades realizadas en la situación. Cada equipo debe exponer los resultados y conceptos nuevos aprendidos, además deben comparar las respuestas con las de los otros grupos, con el fin de argumentar sus propias respuestas o aceptar las de los otros compañeros. También se introducen los conceptos de capacidad, de medida, de unidades de medida no estandarizadas y de conversión de unidades, con los que se desarrolla toda la situación.

Evaluación: Para la evaluación se recoge información sobre las dudas y cuestionamientos que presentan los estudiantes al momento de resolver la situación, además de las guías resueltas por ellos, en donde se dan a conocer datos y respuestas necesarias a la hora de realizar los análisis.

- **Resultados esperados (Situación problema No.1).** Entre los diferentes productos que se ofrecen en el supermercado, una de las compras más comunes que se realiza son los refrescos, jugos, yogurt, gaseosa, agua, etc. Los cuales se miden a partir de las unidades propias de la capacidad que llenan un determinado empaque.

A partir de esta situación se pretende que el estudiante sea capaz de elegir la forma más conveniente de comprar dichos productos en cuanto a precio y cantidad; esto a partir de la manipulación de unidades de medida no convencionales y de la comparación entre diferentes capacidades, donde se establezcan relaciones y diferencias con el concepto de volumen.

Durante el desarrollo de las actividades debe tenerse en cuenta que existe poca exactitud (depende de quien mide) y poca precisión (depende del instrumento) al realizar las medidas, generada por la acción de llenar un vaso de agua y vaciarlo en una botella o viceversa, al regarse el agua o al llenar los recipientes (botellas y vasos) más o menos de la marca que tienen los mismos, al igual que si tienen una superficie plana para apoyarlos o por el contrario los observan cuando se mueve el agua

Actividad 1: En esta actividad el alumno debe realizar comparaciones entre la cantidad de agua que llena el vaso A con respecto al vaso B, siendo aproximadamente medio vaso, y la cantidad de agua que llena el vaso B con respecto al vaso A, que es dos vasos y medio. Se espera que el estudiante encuentre la relación entre las capacidades de los vasos y determine que comprar la gaseosa contenida en el vaso B es más económico que comprar la contenida en el vaso A; ya que tres vasos B de gaseosa llenan completamente un vaso A, sobrando líquido y además el costo de los tres vasos B ($762) es menor que el costo de un vaso A ($797).

Actividad 2: En esta actividad se espera que el estudiante mida la capacidad de un mismo recipiente (botella de 1 ¼ litros) con dos unidades de medida diferentes (vasos A y B), para luego determinar con cuál de las dos unidades utilizadas es más precisa la medida de la capacidad del recipiente. El estudiante debe darse cuenta que es más fácil llenar la botella de 1 ¼ litros con el vaso A, puesto que contiene más agua y se llena más rápido, pero es más preciso llenar la botella de

1 ¼ con el vaso B, pues proporciona una medida más aproximada, ya que contiene menos agua.

Del mismo modo el estudiante debe encontrar que es más económico comprar la cantidad de vasos B que llenan la botella de 1 ¼ litros (12 vasos y medio), ya que comprará más cantidad por un menor precio: $3586.5. Además la diferencia de los precios ($411) al llenar la botella de 1 ¼ litros con vasos A y al llenarla con vasos B, permite establecer la relación entre las cantidades y los precios.

Actividad 3: En esta actividad el estudiante debe comparar el contenido de una botella (1 ¼ litros) con el contenido de otra (2 litros), en este caso debe identificar la equivalencia de la cantidad de contenido entre los vasos (A y B) y las botellas (1 ¼ y 2 litros) en casos específicos. Se espera que las respuestas de los estudiantes no sean las mismas, ya que dependiendo de las respuestas anteriores se obtiene la solución de ésta actividad. Lo que más interesa son los procedimientos y las medidas realizadas, es decir, observar y determinar si confunden las diferentes unidades de medidas y si se opera (suman, restan) con ellas indistintamente.

Actividad 4: En esta actividad al igual que en la segunda, se espera que el estudiante mida la capacidad de un mismo recipiente (botella de 2 litros) con dos unidades de medida diferentes (vasos A y B), para luego determinar con cuál de las dos unidades es más económico comprar el contenido de 2 litros. El estudiante debe establecer relaciones entre diferentes unidades de medida utilizadas durante la situación, como onzas y litros, mediante proporciones directas y la conversión de dichas unidades.

Se debe aclarar que las onzas son unidades de masa en el sistema inglés de unidades, aunque a nivel nacional son utilizadas para medir capacidades y se presenta la siguiente equivalencia: $1dm^3 = 1l = 35.27$onzas.

En ésta actividad también se propone un problema en el que se deben relacionar la cantidad de vasos (A y B), con los diferentes costos para hallar la cantidad desconocida de acuerdo a los precios.

Para finalizar la situación se proponen dos interrogantes en los que el estudiante al llenar los vasos de agua debe darse cuenta que el vaso A tiene mayor capacidad que el vaso B y a su vez debe determinar que el volumen y la capacidad no dependen de la forma del recipiente sino de la cantidad de líquido que éste contiene.

- **Resultados obtenidos.** El siguiente cuadro muestra los resultados obtenidos en cada una de las actividades propuestas según el tipo de respuesta dado por cada grupo.

Horizontalmente, se tienen cuatro categorías de respuestas, entre acertadas, aproximadas, no aproximadas y las que no obtuvieron respuesta. Verticalmente, se nombra cada actividad y cada pregunta (P 1, P 2, P 3,…). La relación entre estos aspectos son analizados según el número de grupos que se encuentran en cada categoría de respuesta. Por ejemplo **3** (2, 4, 5) quiere decir, que **3** equipos respondieron acertadamente, y corresponden al equipo #2, al equipo #4 y al equipo #5.

TABULACIÓN DE RESPUESTAS

Categoría de respuesta	***Acertada***			***Aproximada***			***No aproximada***			***No responde***		
	grupos	**# estud.**	%	**grupos**	**# estud.**	**%**	**grupos**	**# estud**	**%**	**grupos**	**# estud.**	**%**
						Actividad 1						
P 1	**3** (2,4,5)	15	37.5	**4**(1,3,6,7)	20	50.0	**1**(8)	5	12.5	**0**	0	0.0
P 2	**0**	0	0.0	**5**(1,2,3,6,8)	25	62.5	**3**(4,5,7)	15	37.5	**0**	0	0.0
P 3	**7**(1,3,4, 5,6,7,8)	35	87.5	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0	**1**(2)	5	12.5

Actividad 2												
P 1	**3** (3,6,7)	20	50.0	**4**(1,2,4,5)	20	50.0	**1** (8)	5	12.5	**0**	0	0.0
P 2	**0**	5	12.5	**1**(4)	5	12.5	**7**(1,2,3,5,6,7,8)	35	87.5	**0**	0	0.0
P 3	**6**(1,3,4,5,6,7)	0	0.0	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0	**2**(2,8)	10	25.0
P 4	**8**(1,2,3,4,5,6,7,8)	0	0.0	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0
P 5	**0**	15	37.5	**3**(1,2,5)	15	37.5	**5**(3,4,6,7,8)	25	62.5	**0**	0	0.0
Actividad 3												
P 1	**3**(6,7,8)	25	62.5	**5**(1,2,3,4,5)	25	62.5	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0
P 2	**0**	20	50.0	**4**(4,5,6,7)	20	50.0	**4**(1,2,3,8)	20	50.0	**0**	0	0.0
P 3	**0**	20	50.0	**4**(2,6,7,8)	20	50.0	**2**(1,4)	10	25.0	**2**(3,5)	10	25.0
Actividad 4												
P 1	**4**(3,6,7,8)	15	37.5	**3**(1,3,4)	15	37.5	**0**	0	0.0	**1**(5)	5	12.5
P 2	**6**(1,2,3,4,5,6)	0	0.0	**0**	0	0.0	**1**(8)	5	12.5	**1**(7)	5	12.5
P 3	**7**(1,2,4,5,6,7,8)	0	0.0	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0	**1**(3)	5	12.5
P 4	**0**	25	62.5	**5**(1,2,3,4,5)	25	62.5	**3**(6,7,8)	15	37.5	**0**	0	0.0
P 5	**6**(1,2,3,5,6,8)	10	25.0	**2**(4,7)	10	25.0	**0**	0	0.0	**0**	0	0.0

- **Análisis de los resultados.**

Actividad 1: En ésta actividad el 87.5% de los estudiantes dieron respuestas acertadas y aproximadas, no tuvieron ningún problema al solucionar la actividad, hicieron uso de las fracciones, al dividir aproximadamente los vasos en mitades y terceras partes. La diferencia entre las respuestas de ésta actividad tuvo que ver con la utilización de los fraccionarios en las medidas no exactas, aunque cuando las medidas fueron exactas no se presentó ninguna dificultad. Las unidades de medida que utilizaron no sólo fueron los vasos, sino también las onzas que contenían dichos vasos. Expresando las respuestas en éstas dos unidades. Además fueron necesarias la comparación entre las capacidades con los precios y la conversión de unidades, al momento de dar sus respuestas. En esta actividad, los estudiantes se acercaron al concepto de unidades de medidas no estandarizadas.

Actividad 2: Todos los grupos midieron la capacidad de un mismo recipiente con las dos unidades de medida propuestas, determinaron cuál de las unidades era la más fácil de usar y cuál la más precisa, por lo que encuentran la necesidad de una unidad de medida estándar, con la que se pueda medir y calcular exactamente la capacidad, ya que no siempre la unidad con la que es más fácil medir, resulta ser la más precisa o la más exacta, en la obtención de una medida. El 75% de los estudiantes, establecieron con cuál de las unidades de medida (vasos A y B) se lograba un menor costo al comprar una cantidad de líquido determinado.

La dificultad que se evidenció durante la actividad fue el trabajo con cantidades no exactas, ya que los estudiantes realizaron aproximaciones de los resultados al medir la capacidad con la unidad de medida no convencional. Lo que se observa a partir de las diferencias encontradas en las respuestas de comparación entre los costos y las unidades. Como ejemplo, se tienen las respuestas dadas por el grupo #8 quienes aproximan los decimales a números enteros, con los cuales establecen una mayor diferencia entre los costos y las cantidades obtenidas por los otros grupos. En esta actividad los estudiantes se acercaron al concepto de medida de capacidades, con diferentes unidades de medida no estandarizadas.

En cuanto a la utilización de las unidades de medida no estandarizadas no hay dificultad para identificar cuál material representa la unidad de medida y cuál el de la magnitud a medir; la dificultad tiene que ver con las respuestas, no son capaces de expresar una medida decimal, pues se les hace necesario expresarlo como una medida entera.

En los procesos de solución observados, se encontró una gran confusión que presentan los estudiantes: no reconocen la tridimensionalidad de los objetos y utilizan medidas de una dimensión para hallar capacidades, por ejemplo para medir la capacidad de un envase de 1 litro y ¼ de litro con el vaso de 3.5 onzas, se obtuvo respuestas como que 11 vasos y 1/5 llenan el envase, y el 1/5 no está representando vasos, sino una medida de longitud, pues a partir de donde llegaba el contenido de los 11 vasos de agua, midieron con una regla la longitud de lo que faltaba para completar el litro y ¼ de litro. Algunos de los estudiantes no tienen en cuenta ni la forma ni el tamaño de los envases para medir su capacidad.

Actividad 3: En la comparación entre las capacidades de las dos botellas dadas (1 ¼ y 2 litros) sólo el 37.5% (tres grupos #6, #7 y #8) dieron la respuesta correcta, por medio de la conversión de unidades y el trabajo con las fracciones, los otros grupos (62.5%) no hicieron uso de la conversión, sino de la aproximación y del ensayo-error con el material físico. Los resultados fueron los esperados, pues los grupos tenían diferentes respuestas en las actividades anteriores, con las que debían solucionar esta actividad.

El 50% de los estudiantes presenta dificultades para expresar las cantidades en diferentes unidades de medida, por ejemplo no supieron decir que cantidad de líquido estaba contenido en 25 vasos de 3.5 onzas o de 9 onzas. En esta actividad los estudiantes se acercaron al trabajo con la conversión de unidades no estandarizadas.

Actividad 4: Ninguno de los grupos siguió el proceso para dar la respuesta correcta a los interrogantes, aunque se acercaron bastante al momento de expresar una unidad determinada en otra; realizaron una buena equivalencia entre las unidades. Se aproximaron a la equivalencia adecuada entre litros y onzas. Con respecto a los precios de las gaseosas en diferentes presentaciones, pudieron identificar la cantidad de determinada presentación cuando se daba el precio total y la cantidad de otra presentación. En esta actividad los estudiantes encontraron la relación de equivalencia entre diferentes unidades de medida. Y midieron capacidades.

- **Situación 2.** Lanzamiento de una nueva presentación de azúcar al mercado. **(Ver anexo C)**

Objetivo: Comparar el volumen de diversos empaques utilizando instrumentos de medida convencionales y no convencionales.

Descripción de la situación: Con esta situación problema se pretende que el estudiante mida el volumen de los diversos empaques que se le entreguen, utilizando medidas convencionales y no convencionales, como también haciendo uso de lo procesos de estimación propios dentro de la medida de dicha magnitud, esto debido a que algunas unidades de medida no son conmensurables con el objeto a medir y se hace necesario una medida aproximada del volumen de los empaques.

Motivo: Lanzamiento de un nuevo empaque de azúcar en diferentes presentaciones.

Medios: Los medios que se utilizan para el desarrollo de esta situación son:

Cajas de diferentes dimensiones.
Vasos
Canicas
Regletas de un centímetro cúbico y dos centímetros cúbicos.
Papel y lápiz

Mediadores: Estos medios se convierten en mediadores cuando el alumno los utiliza para efectuar diferentes comparaciones entre el volumen de los diferentes empaques y desde que los alumnos comienzan a resolver los interrogantes planteados de manera significativa para encontrar las posibles soluciones, además cuando el alumno puede comparar y relacionar los diversos conceptos que se trabajan a lo largo de la situación; así como cuando es capaz de justificar y argumentar a sus compañeros el por qué de su actividad matemática y los procedimientos empleados para llegar a sus respuestas.

Estándares relacionados: Los estándares del pensamiento métrico y sistemas de medida relacionados en esta situación son:

De octavo a noveno:

- Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados

Red conceptual: Se realiza la red conceptual en la que están involucrados los conceptos del pensamiento métrico y se resaltan aquellos que se colocan en juego en la situación problema. **(Ver anexo B)**

Rol del maestro: El papel del maestro debe ser el de motivador e iniciador para el desarrollo de las actividades propuestas. Debe estar en constante interacción con los alumnos, con el fin de observar y establecer que tipo de procesos esta utilizando el alumno para construir el conocimiento y que tipo de preguntas se pueden presentar para la adquisición de este.

También debe proporcionar a sus alumnos los medios necesarios para que se pueda desarrollar la situación e introducirlo hacia el aprendizaje significativo mediante la socialización de las diferentes actividades.

Rol del alumno: El alumno debe desarrollar la parte más activa del trabajo, mediante la formulación y la socialización de ideas entre sus grupos, el buen empleo de los implementos, la puesta en escena de sus conocimientos, en sí, a través de la construcción del aprendizaje.

Es necesario que el alumno se interrogue constantemente y que sea capaz de resolver adecuadamente con la ayuda del profesor todos los interrogantes planteados, para que pueda adquirir bases sólidas que lo lleven hacia una correcta socialización de su trabajo y una buena adquisición de los conceptos que se involucran en la situación problema.

Validación: Para llevar a cabo la validación pertinente se realiza la socialización de las respuestas en cada uno de los grupos de las actividades planteadas. Cada equipo se encarga de dar a conocer los conceptos adquiridos y las dudas o inquietudes que surgen durante la aplicación de la situación, luego se comparan los resultados de todos los grupos, con el fin de afianzar o corregir los conocimientos adquiridos. Además se introduce el concepto de medida del volumen de diferentes objetos utilizando diferentes unidades de medida.

Evaluación: La evaluación se realiza a partir de la participación, los cuestionamientos y las dudas que se presentan durante la socialización de las actividades de la situación, además se revisan las guías entregadas por los equipos de trabajo con los datos y las respuestas a cada una de las preguntas de dicha situación para realizar el respectivo análisis.

- **Resultados esperados (Situación 2)**. Al realizar compras en el supermercado son muchas las presentaciones de diversos productos que se ofrecen, algunos vienen en forma líquida o sólida, otros vienen en forma redonda o poliédrica, etc.; lo importante es determinar la cantidad de producto obtenido y estipular la forma mas económica de adquirirlo.

Con el desarrollo de esta situación se busca que el alumno se aproxime hacia el concepto de volumen y hacia las medidas de este a través de la utilización de diversas unidades de medida (convencionales y no-convencionales) sobre objetos concretos como lo son: cajas y vasos. También se pretende que bajo el conocimiento de este concepto el sujeto este en la capacidad de establecer comparaciones de tipo económico que lo lleven a tomar decisiones a lo hora de realizar una compra.

Actividad 1: En la actividad 1 se pretende que el alumno tome cada una de las unidades de las que dispone (cubo, esfera y alargada) y realice una medida directa o indirecta sobre el volumen total de los empaques de azúcar, ya sea mediante el llenado completo de estas o a través de la implementación de una estrategia que le permita calcular el número de unidades cúbicas que llenan cada uno de los empaques. Es importante que dicha información sea consignada en la siguiente tabla y arroje los siguientes resultados aproximadamente:

Tipo de Empaque / Presentación del azúcar	CAJA A	CAJA B	CAJA C
Esfera	**115-120**	**18**	54-55
Cubito	**360**	**40**	125-127
Alargada	180	20	63-65

Con la información anterior el alumno se dará cuenta que al llenar la cajas con cubitos y alargadas es más preciso medir el volumen de dichos empaques, pues no quedarán muchos huecos entre una unidad con otro; mientras que al llenar las cajas con esfera habrán más espacios que corresponden a una parte del volumen que queda sin llenar. Sin embargo es importante que el estudiante llegue a la conclusión de que ninguna de las presentaciones de azúcar llenan completamente el volumen de los empaques pues los espacios que quedan después del llenado pueden cubrirse utilizando por ejemplo arena o agua.

Actividad 2: Con la segunda actividad se busca que el alumno relacione los precios de cada presentación de azúcar con los diferentes empaques de los que dispone (Caja A, Caja B y Vaso C), obteniendo los siguientes resultados:

Precio al llenar / Presentación del azúcar	Caja A	Caja B	Vaso C
Esfera	**$4370 - $4560**	**$684**	$2052- $2090
Cubito	**$16200**	**$1800**	$5625- $5715
Alargada	$13140	$1460	$4599- $4745

Ante la pregunta: ¿cuánto cuesta la caja B con la presentación de azúcar cubito? Se espera que el alumno determine un costo de $1800.

También, si al dirigirse al supermercado se observan las tres presentaciones de azúcar en la caja A, el alumno se dará cuenta que es más conveniente adquirir la caja A de azúcar con la presentación en forma de esfera, pero lleva más azúcar si adquiere la caja A en cubitos. Si la presentación de azúcar viene en el vaso C la forma más conveniente de adquirirla es en esfera, pero llevaría más cantidad con los cubitos.

Sin embargo es importante que el estudiante se dé cuenta que la forma más económica de llevar la azúcar es en el vaso C y con la presentación de esfera.

Actividad 3: Según las preguntas planteadas se espera que el alumno llegue a las siguientes respuestas:

- Si una caja tiene 21 unidades de azúcar alargada y 11 unidades de azúcar cubito su costo es $2028.
- Si un empaque de azúcar cuesta $8870 puede contener aproximadamente 234 unidades de azúcar esférica ó 197 unidades de azúcar cubito.
- Si un empaque tiene 3,2cm de ancho, 4,8cm de largo y 3,2 cm. de alto, dicho empaque contiene aproximadamente 36-38 cubos de azúcar.

Para encontrar la primera y segunda respuesta el alumno simplemente debe aplicar el algoritmo de la multiplicación o la división entre el tipo de azúcar y el precio de cada una. Por el contrario para obtener la tercera respuesta es necesario que el alumno encuentre el volumen del empaque y determine el número de unidades cúbicas que llenan aproximadamente este volumen.

- **Resultados obtenidos.** Las tablas que se muestran a continuación dan a conocer la recopilación de respuestas obtenidas por los alumnos luego de aplicar la situación; dichas respuestas se organizan de acuerdo a cada actividad y según la pregunta a la que se vieron enfrentados los estudiantes. En cada una de las tablas se encontrará el número de pregunta correspondiente a cada actividad, el número de alumnos que obtuvieron respuestas correctas y el número de alumnos que obtuvieron otras respuestas.

Actividad 1

- ***Pregunta 1***

Tipo de empaque y presentación con la que fue llenada	Número de alumnos que obtuvieron la respuesta correcta.	Otras respuestas
Caja A (Esfera)	15	18
Caja A (Cubito)	19	14
Caja A (Alargada)	15	20
Caja B (Esfera)	28	5
Caja B (Cubito)	22	11

Caja B (Alargada)	33	0
Vaso C (Esfera)	25	8
Vaso C (Cubito)	14	19
Vaso C (Alargada)	10	23

Pregunta	Número de alumnos que contestaron correctamente	Número de alumnos que contestaron incorrectamente
2	9	24
3	14	19

Actividad 2

- **Pregunta 1**

Tipo de empaque y precio según la presentación	Número de alumnos que obtuvieron la respuesta correcta.	Otras respuestas
Caja A (Esfera)	10	23
Caja A (Cubito)	14	19
Caja A (Alargada)	14	19
Caja B (Esfera)	22	11
Caja B (Cubito)	22	11
Caja B (Alargada)	23	10
Vaso C (Esfera)	20	13
Vaso C (Cubito)	4	29
Vaso C (Alargada)	20	13

Pregunta	Número de alumnos que contestaron correctamente	Número de alumnos que contestaron incorrectamente
2	22	11
3	23	10
4	28	5
5	20	13

Actividad 3

Pregunta	Número de alumnos que contestaron correctamente	Número de alumnos que contestaron incorrectamente
1	28	5
2	10	23
3	9	24

- **Análisis de resultados.**

Actividad 1: Conforme a los análisis a priori y la tabulación de las respuestas obtenidas durante el desarrollo de la situación, se puede decir que frente a la pregunta número 1 correspondiente a la primera actividad la mayoría de alumnos coincidieron con la aproximación esperada de acuerdo al llenado de los diferentes empaques con las tres presentaciones. Sin embargo, se observa que al llenar la caja A con esferas, el 45% de los alumnos coinciden en que dicha caja puede ser llenada con aproximadamente 115-120 esferas, mientras que el 55% de los alumnos realizan otro tipo de aproximación. Esto se debe a que la unidad no es conmensurable con el objeto a medir y se hace imposible relacionar las partes sobrantes para completar una nueva unidad. Del mismo modo, al llenar la caja A con la a alargada el 45% de los estudiantes acertaron con la respuesta esperada, mientras que el 55% de estos presentan otro tipo de respuesta, esto debido a que muchos de los alumnos decidieron aplicar una estrategia para el número de unidades cúbicas alargadas que conforman la caja A; en la mayoría de los casos se tomaba la medida de dos dimensiones y multiplicaban dichos valores olvidando la tercera dimensión que conforma la caja.

Otra de las dificultades observadas con el llenado de los empaques fue la utilización de los cubos y alargadas como unidades para llenar el empaque C (vaso), puesto que la forma de la unidad impedía que el empaque fuese llenado totalmente. De este modo, no fue posible realizar una medida directa del volumen haciendo uso de dichas unidades, sino que era necesario efectuar estimaciones para calcular esta magnitud, pues el conteo de unidades no era suficiente para determinar este volumen. También los alumnos no pudieron emplear la misma estrategia empleada para hallar el volumen de las cajas (área de la base por la altura), ya que se dieron cuenta que para hallar el área de la base del vaso era necesario realizar otro tipo de procedimiento, pues el vaso se hacía más ancho cada vez que introducían la unidad de medida.

Frente a las preguntas 2 y 3 correspondientes a la actividad número 1 sólo el 27% de los estudiantes coincidieron en determinar que con cubitos y alargadas se podía medir con mayor precisión el volumen de las cajas, mientras que el 73% de los estudiantes pensaban que como la esfera era más grande proporcionaba una mejor medida. También, al determinar si al ser llenadas las presentaciones se medía el volumen total de estas, el 42% de los estudiantes encontró que no estaba lleno totalmente, pues existían espacios entre las unidades de medida, y el 58% de los estudiantes pensaron lo contrario.

Actividad 2: Respecto a la primera pregunta de esta actividad los alumnos no tuvieron mayor dificultad en consignar los datos requeridos en la tabla, ya que reconocieron con facilidad que el número de unidades utilizadas al llenar cada una de las presentaciones debía multiplicarse por su respectivo precio unitario. Algunas de las respuestas no acertadas se deben a que varios alumnos no realizaron adecuadamente el llenado de los empaques con las diferentes presentaciones ó a que algunos alumnos no efectuaron la operación como tal.

En cuanto a las preguntas 2, 3, 4, y 5 se observa que los alumnos se aproximaron bien a las respuestas esperadas. El 67% de los alumnos respondieron que la caja B con cubitos tiene un costo de $1800; el 70% de los alumnos respondieron que es más conveniente adquirir la caja A con presentaciones en esfera pero se lleva más azúcar en la caja A con las presentaciones en cubito; el 85% de los estudiantes estuvieron de acuerdo en que la forma más conveniente de llevar azúcar en vaso C es con la presentación esfera pero se llevaría más azúcar con los cubos y el 61% de los estudiantes concluye que la forma más conveniente de llevar el azúcar sería en el vaso y con la presentación de esfera.

El buen resultado de esta actividad se debe a que alumnos habían establecido diversas relaciones entre la unidad de medida empleada y los objetos a medir. Con la actividad número 1 los estudiantes tuvieron la oportunidad de emplear diversas estrategias para realizar el llenado de los empaques y además pudieron confrontar sus respuestas tanto con los compañeros del grupo de trabajo como con los profesores encargados del desarrollo de la situación.

Actividad 3: Frente a la pregunta 1 de esta actividad el 85% de los estudiantes concluyen que si una caja tiene 21 unidades de azúcar alargada y 11 de azúcar cubito su costo es de $2028, el cual se encuentra a través de la multiplicación entre la cantidad de unidades de las diferentes presentaciones de azúcar (alargada, cubito) por su respectivo precio.

Por el contrario, el porcentaje de alumnos que respondieron satisfactoriamente ante las preguntas 2 y 3 de esta misma actividad fue muy bajo. El 30% de los estudiantes obtuvieron una respuesta acertada para la segunda pregunta, mientras que el 70% de los estudiantes no lograron encontrar lo propuesto; esto se debe a que se les dificultó encontrar un camino adecuado para hallar la respuesta, es decir, dividir el todo (precio) con el fin de encontrar el número de partes requeridas. Del mismo modo únicamente el 27% de los alumnos acertaron al responder la pregunta 3 debido a que le fue imposible relacionar las dimensiones de la caja con el volumen de esta, para así encontrar una relación o aproximación entre dicha caja y el número de cubos que podía contener.

Luego de realizar las actividades correspondientes a esta situación, los alumnos tuvieron la oportunidad de socializar sus respuestas, con el fin de confrontar los resultados y establecer relaciones y diferencias con los demás compañeros. En general, los estudiantes mostraron interés con el desarrollo de la situación, pues encontraron en esta una forma didáctica de aprender conceptos, además se sintieron motivados con la utilización de los materiales, pues la medida directa de la magnitud volumen, se convierte en una herramienta importante a la hora de abordar dicha magnitud.

- **Situación 3.** Relaciones entre las magnitudes capacidad y volumen. **(Ver anexo D)**

Objetivo: Identificar las diferentes unidades de medida utilizadas para el volumen y la capacidad, diferenciándolas de las unidades del peso.

Descripción de la situación: Teniendo presente la ejecución de las anteriores situaciones, las cuales hacían énfasis en la medida y estimación de las magnitudes volumen y capacidad y su relación con los contextos económicos, se pretende que el estudiante a través de esta situación establezca las posibles relaciones existentes entre las magnitudes volumen y capacidad diferenciándolas, e identificándolas en diferentes contextos.

Con el desarrollo de esta situación, se espera que el estudiante tenga los conocimientos básicos para diferenciar en una situación determinada, cuando interviene la magnitud volumen, capacidad u otras magnitudes.

El material disponible para el desarrollo de esta situación permite que el estudiante exprese en términos de una magnitud, otra magnitud que tiene distinta unidad de medida.

Motivo: Relaciones entre las magnitudes volumen y capacidad.

Medios: Para abordar esta situación se debe disponer de material físico y concreto, como son:

Guía para el estudiante,

Cubos de cartulina de: uno, cinco y diez centímetros de arista.

Empaques de galletas.

Mediadores: Estos medios pueden convertirse en mediadores cuando el alumno establece relaciones de equivalencia mediante la manipulación y la medida directa del volumen de unos con otros, además cuando el estudiante puede observar la relación que existe entra las magnitudes volumen y capacidad, a través del llenado de $1dm^3$ con litro de agua.

Estándares relacionados: Los estándares del pensamiento métrico y sistemas de medida relacionados en esta situación son:

De octavo a noveno:

- Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados

Red conceptual: Se realiza una red conceptual en la que están involucrados los conceptos del pensamiento métrico y se resaltan aquellos que se ponen en juego en la situación problema **(Ver anexo B)**

Rol del Maestro: En el desarrollo de las actividades propuestas en esta situación el maestro debe tener dispuestas todas las herramientas (prácticas y conceptuales) necesarias para que el estudiante pueda llegar a la solución de cada una de ellas. Su función es permanente, debe registrar los procesos o procedimientos empleados por los estudiantes para dar respuesta a las actividades, obteniendo como resultado de esta observación las estrategias utilizadas por cada estudiante para construir la respuesta.

Cuando se presenten situaciones en las cuales el estudiante se encuentre desorientado, el maestro de proponer e insinuar aspectos que faciliten la comprensión de los temas que se encuentran asociados a la situación.

Rol del alumno: Él es el ejecutor de las actividades, pero no de manera mecánica, en cada actividad debe desplegar su ingenio y disponer su capacidad de relación para dar solución a los problemas, preguntas y ejercicios inmersos en cada actividad.

En su rol de estudiante debe interrogarse permanentemente, poner a prueba sus conocimientos y partir de la experimentación, manipulación y observación para construir los argumentos a sus respuestas. Debe ser ingenioso en las estrategias que utiliza para entender, desglosar y dar solución a las situaciones. Debe tener disposición para identificar nuevos conocimientos que ofrezca la situación e incorporarlos a los ya existentes sobre el pensamiento métrico.

Validación: Al finalizar las actividades de la situación, serán puestos en común los resultados obtenidos por cada grupo de estudiantes. Varios de ellos tendrán la posibilidad de exponer las razones por las cuales su respuesta es correcta, como también exponer las razones por las cuales no.

Se establece con ellos las semejanzas y diferencias entre las magnitudes abordadas, volumen y capacidad; adicionalmente se muestra el significado de las medidas plasmadas en algunos empaques.

Cada equipo debe expresar como se relacionan el volumen y la capacidad ejemplificando los casos en los que se habla de una u otra magnitud.

Evaluación: El proceso de evaluación es permanente, durante el desarrollo de las actividades se registran las observaciones e inquietudes que expresan los estudiantes en relación a los conceptos abordados, se registran sus intervenciones cuando se ponen en común los resultados y finalmente se reciben las guías desarrolladas con las respuestas, para establecer con estas que tanto se acercan a sus conocimientos.

En este proceso, se establecen acuerdos conjuntos sobre los conceptos que presentaban alguna inconsistencia o se presentan como errados.

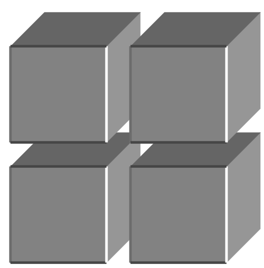
- **Resultados esperados (Situación 3).** En esta situación problema se pretende encontrar relaciones de equivalencia, que permitan al alumno identificar las unidades de volumen y capacidad en diferentes productos observados en tiendas y supermercados, como por ejemplo reconocer que las unidades de una gaseosa están en litros y de una caja de jugo esta en cm^3.. Es así, como el propósito de esta situación consiste en identificar las diferentes unidades de medida utilizadas para el volumen y la capacidad, diferenciándolas de las unidades de peso.

Actividad 1: Para esta actividad se busca que los alumnos comparen un litro de agua con un cubo de 1 dm de arista, experimentando y comprobando que dicho litro equivale a 1 dm^3, lo cual permite que los estudiantes comprendan como la capacidad y el volumen están relacionadas y cómo dichas unidades pueden estar inmersas dentro de actividades de la vida diaria.

Actividad 2: Con relación a las preguntas propuestas para esta actividad se espera que los alumnos lleguen a las siguientes soluciones: Para responder la pregunta **a**, los estudiantes deben colocar en la base de el cubo de 5 cm. de arista, cubos de 1 cm. de arista hasta cubrirla y luego multiplicar dicha medida por la altura, obteniendo como resultado 125 cubos de 1 cm. de arista o 125 cm^3.

Hay otros procesos que pueden ser realizados por los estudiantes como por ejemplo utilizar la fórmula del volumen del cubo (L^3), como también llenar totalmente el cubo de 5cm de arista con los cubos de 1cm de arista, obtenido como resultado los 125 cubos.

La pregunta **b**, es similar en su solución a la pregunta **a**, se introducen cubos de 5 cm. de arista en un 1dm^3, deduciendo que en este caben 8 cubos de 5 cm. de arista. De igual forma los alumnos pueden realizar diferentes procesos, como los anteriormente nombrados, se espera que utilicen el llenado del volumen o apliquen la fórmula requerida. La siguiente gráfica es un ejemplo de cómo los estudiantes pueden obtener la medida del volumen, llenando un cubo con la unidad de medida dada.



Para dar respuesta a la pregunta **c** se deben tener en cuenta las respuestas dadas ante las preguntas **a** y **b**, pues dicha información simplifica el proceso de medición, ya que los alumnos se darán cuenta que al multiplicar la cantidad de cubos que cubren el volumen del cubo de 5cm de arista (125 cubos) entre la cantidad de cubos de 5cm de arista que cubren el cubo de 1decímetro de arista (8 cubos) se obtiene la respuesta correcta (1000 cubos de 1cm de arista).

Los alumnos no sólo pueden utilizar este procedimiento, también pueden realizar el dibujo de los cubos, utilizar fórmulas para hallar el volumen de éste o recurrir al llenado del ancho, alto y largo del cubo.

Para obtener la respuesta a la pregunta **d** se espera que los alumnos deduzcan que al multiplicar el área de la base por la altura el volumen de un cubo de 1 m de arista corresponde a 1000 cubos de 10 cm. de arista, ya que el área de la base del cubo se llena con 100 cubos de 10 cm. de arista y su altura se llena con otros de 10 cubos de 10 cm. de arista. De igual forma los alumnos pueden recurrir a los procesos anteriormente nombrados para llegar a la respuesta.

Para esta actividad, se debe hacer un acompañamiento donde se observen los diferentes procesos que los alumnos realizan, de tal forma que éstos generalicen la fórmula del volumen del cubo, identifiquen sus dimensiones, y realicen conversión de unidades como se observa en la siguiente tabla:

Medida de la arista del cubo	Volumen en cm^3	Volumen en litros
1 cm.	1	1/1000
5 cm.	125	¼
10 cm.	1000	1

Actividad 3: En la tercera actividad los alumnos deben identificar cuerpos de diferentes formas que tengan igual volumen e igual capacidad. Por lo tanto, se espera que armen dos cuerpos con 10 cubos de 5 cm. de arista cada uno, comprobando que a pesar de su forma el volumen es igual y equivale a 1250 cm^3; del mismo modo se podrá encontrar que su capacidad es de 1 ¼ de litros. Como ejemplo de esta actividad los alumnos nombrarán objetos de igual volumen y diferente forma, como los empaques de tetrapak de jugos naturales y una botella de yogurt.

Actividad 4: En la cuarta y última actividad de esta situación problema, se quiere que los estudiantes discriminen las magnitudes peso y volumen en diferentes situaciones de la vida diaria. Esto permitirá que los alumnos identifiquen cómo en los empaques de papas, rosquitas, galletas (mecato) se trabaja con el peso y en las cajas como las de jugo, leche, crema dental, entre otras, se emplea el volumen, en su mayoría donde vienen empacados los líquidos.

Los estudiantes deben realizar comparaciones entre las envolturas que se utilizan para empacar los productos y las unidades en las que se mide, justificando por qué se mide el peso, el volumen o la capacidad. Por ejemplo, explicar que en un empaque de galletas se trabaja con el peso, ya que se mide la cantidad de masa que hay en ella.

Para esta situación problema, también se pueden agregar actividades como la de comparar las dimensiones de los empaques de los productos, la realización de un nuevo empaque para ser presentado por sus compañeros, como también las unidades que se utilizarían para el producto que se piensa envolver. De esta forma se puede observar la comprensión que obtuvieron los estudiantes en la realización de las diferentes actividades.

- **Resultados y análisis de resultados obtenidos**

Actividad 1: Al poner en práctica la situación problema Nº 3 se obtuvieron muchos de los resultados esperados. Para la primera actividad los alumnos experimentaron y comprobaron que un litro de agua cabía en $1dm^3$. Se observó comprensión y curiosidad por parte de los estudiantes los cuales entendieron que 1 litro equivale a $1dm^3$. Cada equipo realizó la actividad adecuadamente, repitiendo en algunos casos la actividad con el fin de encontrar la respuesta.

Actividad 2: Para la segunda actividad los alumnos debían responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm. de arista caben en un cubo de 5 cm. de arista?
b. ¿Cuántos cubos de 5 cm. de arista caben en el cubo de 10 cm. de arista?

c. ¿Cuántos cubos de 1 cm. de arista caben en un cubo de 10 cm. de arista?
d. ¿Cuántos cubos de 10 cm. de arista cabrán en un cubo de 1 m de arista?

Para llegar a los resultados de estas preguntas la mayoría de los grupos realizaron el proceso de cubrir la base de los cubos grandes con los cubos más pequeños, y encontraron la altura de estos para obtener su volumen mediante la multiplicación de dichas cantidades. Sin embargo, algunos alumnos midieron las tres dimensiones de los cubos haciendo uso de sus respectivas unidades, con el fin de aplicar la fórmula (L^3) para calcular la medida de esta magnitud.

En general, la respuesta de los estudiantes frente a la actividad fue acertada, aunque se observó que no todos los equipos colocaron las unidades de medida de los resultados de cada una de las preguntas, lo cual es importante a la hora de determinar la medida de una magnitud como el volumen. Por lo tanto se hace necesario mostrar una tabla de resultados que corresponde a la cantidad de equipos que tuvieron en cuenta las unidades de medida, como también aquellos equipos que no consignaron en sus resultados dichas unidades.

Respuestas	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Pregunta 4**
Respuesta correcta dada con las unidades	2 equipos	7 equipos	6 equipos	6 equipos
Respuesta correcta sin escribir las unidades	6 equipos	1 equipo	2 equipos	2 equipos

En esta actividad los estudiantes realizaron los procesos esperados, sin embargo se observó que aunque no se escribían las unidades correspondientes para expresar la medida del volumen, los alumnos sí nombraron dichas unidades durante la socialización de la actividad.

Actividad 3: Durante el desarrollo de esta actividad los estudiantes debían dar respuesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el volumen de los cuerpos formados con 10 cubos de 5 cm de arista? En cm^3 y en litros.
b. ¿Qué diferencia encuentras entre los cuerpos formados?
c. Escribe dos objetos que encuentres a tu alrededor que tengan el mismo volumen pero diferente forma.

Para llegar a la solución de las anteriores preguntas, los estudiantes construyeron dos cuerpos con los 10 cubos de 5 cm. de arista y luego los graficaron. Para esta gráfica solo dos equipos tuvieron en cuenta las tres dimensiones, mientras que el resto de estudiantes dibujaron dichos cuerpos en dos dimensiones, por lo que se les dificultaba hallar el volumen de estos. Sin embargo, los alumnos fueron capaces de diferenciar como los cuerpos formados tenían el mismo volumen ya que estaban utilizando igual cantidad de cubos para formarlos.

En la siguiente tabla se observa la cantidad de equipos que acertaron o se alejaron de las respuestas esperadas.

Respuestas	**Pregunta 1**	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**
Acertaron	1 equipo	5 equipos	2 equipos
Se acercaron	4 equipos	1 equipo	0 equipo
Se alejaron	3 equipos	1 equipo	1 equipo
No respondieron	0 equipo	1 equipo	5 equipos

Actividad 4: En esta actividad los estudiantes pudieron discutir acerca del volumen de un empaque de galletas cuando esta vacío. Algunos alumnos sustentaban que era necesario saber si el empaque tenía aire o no, ya que al no tener aire éste no poseía volumen. Sólo dos equipos reconocieron que el volumen era el peso neto que aparecía en el empaque, lo que permitió que otros

estudiantes explicaran que se estaba midiendo la masa del producto más no la cantidad de espacio en el empaque.

Las respuestas obtenidas para las preguntas a y b realizadas en esta actividad fueron:

a. ¿Qué están midiendo en los empaques de alimentos?

Medida	Cantidad de equipos que dieron la respuesta
Peso	8
Volumen	0
Área	0

b. ¿Cuál sería el volumen de un empaque de galletas cuando esta vacío?

Respuesta	Equipos
Correcta	6
Incorrecta	2

En las respuestas realizadas por los grupos a estas preguntas, los alumnos relacionaron el volumen con los objetos de la cotidianidad, aclarando que en el mercado los empaques que miden el volumen y la capacidad son, en su mayoría, los empaques que contienen líquidos, mientras que aquellos empaques que contienen sólidos miden el peso.

De esta situación se observó que los estudiantes diferenciaron las unidades de medida que se utilizan para las magnitudes volumen y capacidad, relacionándolas con las unidades que se utilizan en los empaques de los productos que se venden a diario en el mercado.

3. ANÁLISIS APOSTERIORI Y RESULTADOS

La importancia de los procesos de medición no corresponde únicamente a una necesidad propia de la enseñanza de la matemática, sino también a la necesidad misma de aprender a medir como herramienta útil para la solución de problemas en nuestro entorno. Medir se ha convertido en nuestra prioridad, pues frecuentemente nos vemos enfrentados ante situaciones como: ¿qué distancia hay entre dos lugares?, ¿qué hora muestra el reloj en un determinado momento?, ¿qué cantidad de tela debo comprar para confeccionar un vestido?, ¿cuántos adobes deben ser comprados para construir una casa?, etc.

El sentido de la medición no debe estar ligado únicamente al reconocimiento y aplicación memorística de las unidades de medida que hacen parte del sistema métrico decimal, por el contrario, debe haber una acción por parte del individuo donde éste se sienta obligado a establecer relaciones significativas y a desarrollar diversos procesos como los de estimación, comparación, aproximación, indagación, entre otros, que le lleven de una u otra forma a encontrar sentido a un proceso tan importante como es el de la medida.

De acuerdo con el desarrollo y análisis de las tres fases que conforman la metodología de investigación correspondiente a la elaboración de este trabajo de grado (Ingeniería Didáctica), puede afirmarse que el tratamiento ofrecido a las magnitudes, especialmente al volumen y la capacidad, debe ser pensado desde la implementación de situaciones problema que involucren la utilización de procesos matemáticos y por ende, la construcción adecuada de los conceptos que se ponen en juego con la ejecución de éstas.

Es bien sabido que las situaciones problema planteadas a lo largo de éste trabajo fueron enfocadas en contextos económicos, con el fin de que los alumnos pudieran relacionar las magnitudes volumen y capacidad con diversos productos que se encuentran en el mercado, comparando la medida de éstas con los precios correspondientes. De esta manera durante la aplicación de las situaciones problema se observó que:

- Con el desarrollo de situaciones problema enmarcadas en contextos económicos y en procesos de medida, los estudiantes logran acceder y desarrollar de manera más apropiada los conceptos de volumen y capacidad.

- El empleo de unidades de medida estándar y no estándar permite a los alumnos desarrollar los conceptos de capacidad y volumen, realizar estimaciones y conversiones entre las unidades de medida.

- El proceso de estimación permite que los alumnos se aproximen hacia la medida del volumen y la capacidad.

Por otro lado, puede decirse que los alumnos presentaron algunas dificultades durante la solución de las situaciones problema, debido a que no existe una adecuada construcción de los conceptos que constituyen las magnitudes capacidad y volumen. Dentro de estas dificultades se encontró que:

- Los alumnos no determinan el volumen cuando el objeto o la unidad de medida no están presentes.

- Los alumnos no utilizan las unidades de medida correspondientes a la magnitud capacidad ya que hacen uso de las unidades de longitud para calcular la capacidad sin tener en cuenta la forma y el tamaño de un recipiente.

El tipo de situaciones problema que se diseñaron y aplicaron en éste trabajo fueron adecuadas para comprender los conceptos de volumen y capacidad en los estudiantes de noveno grado, permitiendo el desarrollo de los procesos de medición, estimación, aproximación y la selección de unidades propias para el trabajo con dichas magnitudes.

De todo lo anterior se puede decir que el trabajo con las magnitudes volumen y capacidad es bastante amplio y que los aportes tanto teóricos como metodológicos ofrecidos a lo largo de esta investigación, ofrecen herramientas útiles para la enseñanza del pensamiento métrico en la escuela, brindando la posibilidad de continuar con la búsqueda de alternativas que permitan dar solución al problema que enfrentan los alumnos ante la medida de las magnitudes volumen y capacidad.

Esto implica que los maestros sientan la necesidad de indagar sobre los procesos de medir, estableciendo las múltiples relaciones que éste tiene con el entorno, mediante la implementación de situaciones problema donde los alumnos encuentren significado y uso acerca de lo que la escuela les enseña sobre la medida.

BIBLIOGRAFIA

- ARDILA GUTIERREZ, Víctor Hernando. **Olimpiadas matemáticas 6.** Editorial VOLUNTAD. Santa fe de Bogota. 1999.

- ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., GÓMEZ, P. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, "Una empresa docente".** Grupo Editorial Iberoamericana. México. 1995

- AVELLANAS, Pedro. **Algebra, magnitud, correspondencias.**

- BELL, Eric Temple. **Historia de las matemáticas.** Fondo de Cultura Económica. México. 2002.

- Biblioteca de Consulta Microsoft ® Encarta ® 2005. © 1993-2004 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

- BOURBAKI. **Eléments d'histoire des mathématiques.** Paris. 1962.

- CATALÁ Cluaudi, et al. **¿Por qué Geometría?.** Propuestas didácticas para la Escuela Secundaria Obligatoria –ESO-. Editorial Síntesis. España. 1997.

- CHAMORRO, Carmen. BELMONTE, Juan M. **El problema de la medida didáctica de las magnitudes lineales.** Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial SINTESIS. 1994. Madrid.

- DEL OLMO ROMERO, Maria Ángeles y otros. **Superficie y volumen. ¿algo más que el trabajo con fórmulas?**. Editorial SINTESIS. España.1993.

- FILLOY YAGÜE, Eugenio. **Didáctica e Historia de la Geometría.** Grupo Editorial Iberoamericana. México. 1998.

- GRAY, Jeremy. **Ideas de espacio.** Biblioteca Mondadori. España. 1992.

- GODINO, Juan D; BATANERO, Carmen; ROA, Rafael. **Medida de magnitudes y su didáctica para maestros**. Proyecto Edumat – Maestros. Febrero 2002.

- GODINO. Juan D. **Matemáticas y su didáctica para maestros. manual para el estudiante.** Proyecto Edumat-Maestros. Cáp. 1y 2. 2002.

- HOFMANN, Joseph Ehrenfried. **Historia de la Matemática.** Editorial limusa. México 2002.

- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Colombia, **Análisis de resultados de las pruebas de Matemáticas** —TIMSS— Colombia, 1997.

- ________. **Lineamientos curriculares de Matemáticas, Santa Fe de Bogotá,** 1998.

- ________. **Estándares Básicos de la Calidad de Matemáticas**, Santa fe de Bogotá, 2002.

- MONSALVE, Miguel. **Magnitudes físicas, unidades y dimensiones.** Notas de estudio. (Internet).

- MONTESINOS SIRERA, Jose. **Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria.** Editorial Síntesis. Madrid. España. 2000.

- MORENO ARMELLA, Luís. Evolución y Tecnología. En: CASTIBLANCO PAIBA, Ana Cecilia. **Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia**. CINVESTAV. México.

- MUNERA CORDOBA, John Jairo. **Las situaciones problemas como alternativa para generar procesos de aprendizaje matemático en la educación básica.** Ponencia, en Quinto encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Editorial Gaia. Memorias. Bucaramanga. 2003.

- OBANDO, Gilberto. MUNERA, John Jairo. **Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización.** En Revista Educación y Pedagogía. Nº 35. 2003.

- PADILLA CHASING, Soraya. **Matemáticas con énfasis en competencias**. Editorial HORIZONTES. Bogota. 2001.

- URIBE CALAD, Julio Alberto; ORTIZ DIEZ, Marco Tulio. **Matemática experimental 6º**. UROS Editores. 2005.

- VERA, Francisco. **Historia de la cultura científica, V. I La ciencia antigua.** Ediar. Buenos Aires. 1956.

- ________. ________, **V. II La ciencia Griega y Romana**. Ediar. Buenos Aires. 1958.
- ________. ________, V. III **La ciencia Medieval**. Ediar. Buenos Aires. 1960.

- ________. ________, V. IV **La ciencia Renacentista**. Ediar. Buenos Aires. 1962.

- WOOLLEY, Leonard. **Historia de la humanidad**. V. I. Editorial Sudamericana. Buenos Aires. 1966.

- http://es.wikipedia.org/wiki/Unidad_de_medida

- www.portalicfes.gov.co.

- www.mineducacion.gov.co/documentos/Forma_doce_mate_CAPITULO 1.pdf

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A
SITUACIÓN PROBLEMA 1
Oferta de refrescos Supermercado La Excelencia
Guía del estudiante

Nombre: ______________________________ **Grado:** ___ **Grupo:** ___
Institución: ____

El supermercado “La excelencia” ofrece al cliente gran variedad de refrescos en diferentes presentaciones y a diferentes precios. Algunas de las presentaciones de gaseosa que se encuentran en el supermercado son:

- ✓ Vaso A (9 onzas) a $797
- ✓ Vaso B (3.5 onzas) a $254
- ✓ Gaseosa de 1 ¼ Litros a $ 1600
- ✓ Gaseosa de 2 litros a $2500

Actividad 1

Uno de los clientes del supermercado decide comprar alguna de las gaseosas que se ofrece, teniendo en cuenta el precio de cada una, ayúdale a decidir cual es la compra que se ajusta a las necesidades de este.
Realiza las siguientes actividades para tal fin

Llena el vaso B con agua. Luego deposita el agua en el vaso A.
a. ¿Cuántos vasos B se requieren para llenar el vaso A?

____

____

b. ¿Qué cantidad del vaso A, llena el vaso B?

____

____

c. Compara los precios de los vasos según la cantidad de gaseosa que contiene cada una.

Si el cliente desea tomar la cantidad de gaseosa del vaso A ¿será más conveniente comprar directamente este vaso o comprar vasos B que equivalen a la misma cantidad? ¿Por qué?

____

____

Actividad 2

El cliente decide llevar una cierta cantidad de gaseosa para su casa. Ayúdale a tomar la mejor decisión.

a. ¿Cuántos vasos A hacen 1¼ litros?

____

____

b. ¿Cuántos vasos B hacen 1¼ litros?

____

____

c. ¿Con cuál vaso fue más fácil llenar 1¼ litros y con cuál es más precisa la medida? ¿Por qué?

____

____

d. ¿Qué es más económico comprar, el 1¼ litros que se llena con la cantidad del vaso A? o ¿Comprar el 1¼ litros que se llena con la cantidad del vaso B?

____

____

e. ¿Qué diferencia hay en precio, al llenar 1¼ litros de gaseosa en vasos A y al llenar en vasos B?

____

____

Actividad 3

Vierte agua en la botella de 1¼ litros pásala a la botella de 2 litros las veces que sea necesario para llenarla

a. ¿Cuántos envases de 1¼ litros necesitas para llenar el envase de 2 litros?

____

____

b. Si el cliente compra 25 vasos de tipo B, qué cantidad de gaseosa está comprando. ¿Cuál es la forma más económica de adquirirla? Y ¿Por qué?

____

____

c. Si el cliente compra 47 vasos de tipo A, qué cantidad de gaseosa está comprando. ¿Cuál es la forma más económica de adquirirla? Y ¿Por qué?

____

Actividad 4

a. Llena la botella de 2 litros con el vaso A y luego con el vaso B. ¿Con cuántos vasos de A se llena la botella y con cuántos vasos de B?

b. ¿Cuál es la forma más económica de comprar 2 litros de gaseosa, por vasos A, por vasos B, o la botella? y ¿por qué?

c. ¿Qué capacidad tienen 4 vasos A de gaseosa? Escribe la respuesta en las diferentes unidades

d. ¿Cuántos vasos B necesito para llenar 4 vasos A?

e. Si Pedro se toma 6 vasos de gaseosa de tipo B y su mejor amigo se toma algunos vasos de gaseosa de tipo A, por lo que pagaron $3915 ¿Cuántos vasos A de gaseosa se tomó el amigo de Pedro?

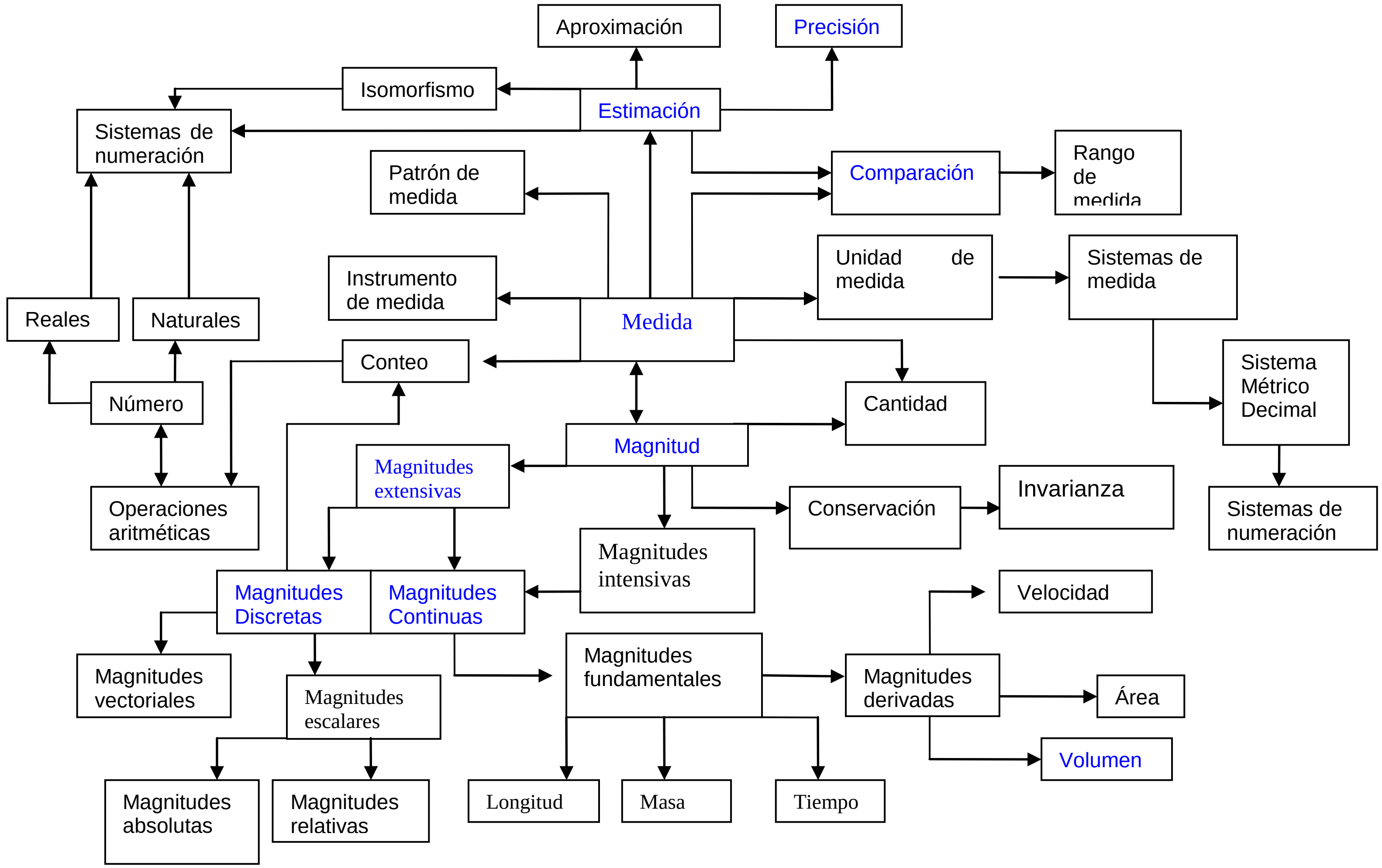
Atrévete a responder

Llena los recipientes de agua, observa detenidamente y responde:

a. ¿Cuál vaso crees que tiene más capacidad? ¿Por qué?

b. ¿El volumen y la capacidad dependen de la forma del recipiente? ¿Es igual hablar de capacidad y volumen? ¿Por qué?

ANEXO B
RED CONCEPTUAL: Pensamiento Métrico.



ANEXO C
SITUACIÓN PROBLEMA 2
Lanzamiento de una nueva presentación de azúcar al mercado.
Guía del estudiante

Nombre: _____________________________ Grado: ___ Grupo: ___
Institución: ____

Materiales
Caja A
Caja B
Vaso C
Canicas
Regletas de 1 y 2 unidades

La empresa "Dulcecitos" desea lanzar una nueva presentación de azúcar al mercado y busca determinar cuál es el mejor empaque para cada una de las tres presentaciones que se ofrecen:

- ❖ Azúcar esferita
- ❖ Azúcar cubito
- ❖ Azúcar alargada

Los empaques que se ofrecen son:

- ➢ Caja A
- ➢ Caja B
- ➢ Vaso C

Actividad 1

Toma cada uno de los recipientes y llénalos con las diferentes presentaciones de azúcar. Cuando respondas las preguntas, consigna tus datos en la siguiente tabla:

Tipo de empaque / Presentación del azúcar	**Caja A**	**Caja B**	**Vaso C**
Esfera			
Cubito			

Alargada			

a. ¿Con cuantos azúcar en esferas llenas cada una de las presentaciones: caja A, caja B y vaso C?

b. ¿Con cuantos azúcar en cubitos llenas cada una de las presentaciones: caja A, caja B y vaso C?

c. ¿Con cuál de las anteriores presentaciones fue mas preciso llenar cada uno de los empaques ¿ y ¿Por qué?

d. ¿Al llenar cada uno de los empaques con cuál de las presentaciones se llenó el volumen de estos?

Actividad 2

Consigna en la siguiente tabla los precios que corresponden a cada presentación:

- Azúcar esferita $ 38
- Azúcar cubito $45
- Azúcar alargada $ 73

Precio al llenar / Presentación del azúcar	**Caja A**	**Caja B**	**Vaso C**
Esfera			
Cubito			
Alargada			

Con la información anterior contesta los siguientes interrogantes:

a. ¿Cuánto cuesta la caja B con la presentación de azúcar cubito?

b. Si en el supermercado observaste las tres presentaciones de azúcar en la caja A ¿Cuál saldría mas económica para comprar? Y ¿Con cuál de las presentaciones llevarías más azúcar?

c. Si las presentaciones de azúcar vienen en el vaso C ¿Cuál es la más económica? Y ¿Con cuál de las presentaciones llevarías más azúcar?

¿Con cuál de las tres presentaciones puedes obtener más cantidad de azúcar por menos precio?

Actividad 3

a. Si a una caja le caben 21 unidades de azúcar alargada y 11 unidades de azúcar en cubito ¿Cuánto cuesta la caja con azúcar?

b. ¿Cuántas esferas de azúcar y cuántas azúcar en cubito caben en un recipiente si el costo es de $8.870?

c. Suponga que una caja tiene 3,2 cm. de ancho y 4.8 cm. largo y 3.2 de alto ¿Con cuántos azúcar cubito puedo cubrir el volumen de la caja?

Actividad 4

Observe cuidadosamente los empaques de presentación que lanzarán al mercado para comercializar el azúcar. Luego responde la siguiente pregunta.

a. ¿Cuánta cantidad le falta al empaque A para ser igual al empaque B o al empaque C?

ANEXO D
SITUACIÓN PROBLEMA 3
Relaciones entre las magnitudes capacidad y volumen
Guía del estudiante

Nombre: _______________________________Grado: ___ Grupo: ___
Institución: ______________________________________

Materiales
Cubos de 1 cm. de lado
Cubos de 5 cm. de lado
Cubos de 1dm de lado
Empaques vacíos de galletas

Actividad 1

De acuerdo a las dos situaciones realizadas anteriormente se hace necesario observar e identificar la relación de equivalencia entre las unidades de capacidad y las unidades de volumen

Se construye un cubo de 1 dm arista, luego se deposita en él, cierta cantidad de agua, encontrando así que en $1dm^3$ cabe 1 litro de agua.

Actividad 2

Cada uno de los grupos tendrá los siguientes materiales

- 1 Cubo de 10 cm. de arista
- 10 cubos de 5 cm. de arista
- 1 cubo de 1 cm. de arista

Y contesta los siguientes interrogantes:

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm. de arista caben en un cubo de 5 cm. de arista?

____
____

b. ¿Cuántos cubos de 5 cm. de arista caben en el cubo de 10 cm. de arista?

____
____

c. ¿Cuántos cubos de 1cm. de arista caben en el cubo de 10 cm. de arista?

d. ¿Cuántos cubos de 10 cm. de arista de cabrán en un cubo de 1 m de arista?

Actividad 3
Con todos los cubos de 5 cm. de arista, arma un cuerpo cualquiera y dibújalo. Luego arma otro cuerpo y dibújalo.

a. ¿Cuál es el volumen de cada cuerpo? En cm^3 y en litros.

b. ¿Qué diferencia encuentras entre ellas?

c. Escribe dos objetos que encuentres en tu alrededor que tengan el mismo volumen pero diferente forma.

Actividad 4
Observa el empaque que tienes:

a. Determina, según las unidades que vienen escritas en el empaque ¿qué es lo que se esta midiendo?

b. ¿Cuál sería el volumen de un empaque de galletas, cuando está vació?

Validación

Se ponen en común las respuestas de cada actividad, tratando de dar solución a los siguientes interrogantes.

- ¿Qué es el volumen?
- ¿Con qué unidades se halla el volumen?
- ¿A que equivale $1dm^3$ en unidades de capacidad?
- ¿Cuál sería el volumen de un empaque de galletas?