

DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA RAZÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Proyecto de trabajo de grado

Margarita Álvarez Álvarez

Cristina Taborda Balbín

Asesora: Luz Marina Díaz Gaviria

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACION

DEPARTAMENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

Medellín

2009

Created with



AGRADECIMIENTOS

A María Andrea, Brandon, Gabriel y Marlon, quienes siempre estuvieron dispuestos a colaborarnos.

A nuestra asesora Luz Marina Díaz, por su adecuada orientación y valioso acompañamiento, en todo el camino recorrido.

A los profesores Fabián Posada, Gustavo Gallego, Orlando Monsalve, Dennis Vanegas, Yolanda Beltrán y Diana Jaramillo, por sus acertados consejos.

A nuestras familias por su compañía y comprensión, durante este periodo.

A nuestras compañeras Yineth y Viviana, que han luchado hombro a hombro junto a nosotras, desde el inicio de nuestro viaje hasta arribar al puerto.

EL MAESTRO Y SU OFICIO

Alonso Takahashi

El oficio del maestro es enseñar.
Enseñar es señalar, indicar la ruta.
Hay que dar a los alumnos la oportunidad de transitar su propio camino y encontrar las cosas por sí mismos.
Cada vez que entregamos a un alumno un conocimiento ya elaborado y decantado, le estamos quitando la oportunidad de descubrirlo.

Lo importante es enseñar a aprender.
En ello entra en juego la memoria y también el olvido.
A menudo el maestro debe olvidar lo que sabe para que el alumno lo descubra.
Para Heidegger enseñar es más difícil que aprender porque enseñar significa dejar aprender.
Más aún, el verdadero maestro no deja de aprender "nada más que el aprender".

Por esto también su obrar produce a menudo la impresión de que propiamente no se aprende nada de él, si por "aprender" se entiende nada más que la obtención de conocimientos útiles.
Lo esencial en el aprendizaje no es el producto sino el proceso.

Lo mismo ocurre con la creación de conocimiento.
Leibniz decía que las fuentes de la invención son más interesantes que las invenciones mismas.
Las ideas deben nacer en la mente del alumno, sostenía Sócrates.

El aprendizaje no debe ser pasivo.

CONTENIDO

RESUMEN.....	VII
INICIO DE UN VIAJE.....	8
BUSCANDO EL NORTE.....	10
LA TRIPULACIÓN.....	20
DIVISANDO EL FARO.....	31
ANÁLISIS DE LAS CATEGORÍAS.....	61
CONSTRUYENDO EL CONCEPTO DE RAZÓN.....	61
FAVORECIENDO EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL.....	70
HACIA LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA: Rupturas en la Estructura Aditiva.....	82
ARRIBANDO AL PUERTO.....	92
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95

TABLA DE FIGURAS

Figura 1.....	20
Figura 2.....	21
Figura 3.....	22
Figura 4.....	23
Figura 5.....	24
Figura 6.....	25
Figura 7.....	26
Figura 8.....	27
Figura 9.....	28
Figura 10.....	29
Figura 11.....	36
Figura 12.....	37
Figura13.....	38
Figura 14.....	40
Figura15.....	43
Figura16.....	44
Figura 17.....	57
Figura 18.....	71
Figura 19.....	72

Figura 20.....75

RESUMEN

TITULO: *DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA RAZÓN AL RAZONAMIENTO
PROPORCIONAL*

El proyecto que se presenta a continuación, se basó en una estrategia didáctica, en donde se diseñaron una serie de situaciones problema que proponen una forma de construir el concepto de razón. Partir de la exploración de este concepto, lleva al surgimiento de la pregunta: *¿Cómo la construcción del concepto de razón favorece el desarrollo del razonamiento proporcional, en los estudiantes de grado séptimo?* Se pretende con los estudiantes, que construyan el concepto de razón teniendo como eje la comprensión de las relaciones que establezcan cualitativamente, por ser un campo utilizado con menos frecuencia; ampliando y entendiendo el uso de las relaciones cuantitativas, para desarrollar el razonamiento proporcional y avanzar hacia la proporcionalidad.

Este proyecto, fue desarrollado con estudiantes del grado séptimo-dos de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, en un grupo de 41 estudiantes. La investigación llevada a cabo fue de carácter cualitativo desde una mirada fenomenológica-hermenéutica, empleando como metodología el estudio de casos único, el cual permitió realizar el análisis a través de las respuestas de cuatro estudiantes cuando resuelven situaciones que involucran el concepto de razón.

Este análisis es el resultado de un cruce dialéctico entre las voces de los estudiantes, los argumentos de las autoras de este proyecto y las ideas de los autores que validan los referentes teóricos del trabajo.

Palabras clave: razonamiento proporcional, razón, cualitativo, cuantitativo.

INICIO DE UN VIAJE

Cuando viajas, la curiosidad se vuelve continua, pues todo es nuevo y quieres conocerlo.

Aquel viaje que no ha dejado huella en tu corazón jamás fue un viaje.

Anónimo

La narración de nuestro proyecto se realiza en cinco capítulos. Pensamos que es una manera armónica de describir nuestra experiencia de práctica; haciendo referencia a una serie de sucesos maravillosos, que bajo nuestra mirada tomaron forma y se concretaron en este trabajo. Queremos mostrar de forma breve, la esencia de cada uno de los capítulos a continuación:

En el primer capítulo, *“Buscando el Norte”*, mostramos el camino que hemos seguido para la construcción del trabajo, desde las motivaciones que nos llevaron a formular la pregunta de investigación y el propósito, la estrategia metodológica empleada en el diseño de las actividades, el contexto en el que se desarrolló, hasta la metodología de investigación.

En un segundo capítulo, *“La tripulación”* presentamos los protagonistas de esta experiencia “el grupo 7-2 de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez y los protagonistas principales; considerados como fundamentales, no solo por todos los insumos que aportaron con su participación, sino también por su calidad como personas: responsables, espontáneos y dispuestos a colaborar en todo momento. También presentamos las razones por las cuales han sido elegidos para subir a esta embarcación.

“Divisando el Faro” es el nombre que recibe el tercer capítulo, donde describimos la actividad diagnóstica, cuatro situaciones problemas; en dos de ellas se empleó un juego y un cuento como mediadores, otras dos diseñadas en el contexto del día a día de los estudiantes, y una actividad final que recoge todo lo que se trabajó en todas las situaciones. Se presentan con su respectivo formato, sin realizar ningún tipo de análisis, pero detallando los propósitos e intenciones tenidos en cuenta para desarrollarlas. Relatamos además la estrategia metodológica elegida en cada una de las situaciones, así como su importancia para avanzar en nuestro proyecto.

El cuarto capítulo “*Análisis de Categorías*”, proponemos tres categorías emergentes, las cuales surgieron después de estudiar los datos que obtuvimos en la implementación de las situaciones y actividades, en las entrevistas, en los registros fotográficos y en los diarios reflexivos. En este capítulo se recoge toda la experiencia de aula:

- *Construyendo el Concepto de Razón*
- *Favoreciendo el Razonamiento Proporcional*
- *Hacia la Estructura Multiplicativa: Rupturas en la Estructura Aditiva*

Finalmente presentamos “*Arribando al Puerto*”, en éste señalamos las conclusiones, que son de vital importancia para darle fuerza a nuestro proyecto y las recomendaciones que tomadas en cuenta se convierten en una importante fuente de ideas para próximas investigaciones.



BUSCANDO EL NORTE

*En la investigación, necesitamos ir tras las huellas de... buscar pistas, crear métodos,
inventar laberintos, con-fundirnos con lo inesperado...*

Luis Guillermo Jaramillo Echeverry

Cuando comenzamos nuestra práctica pedagógica pensamos en muchos temas que podrían ser de gran importancia para desarrollar una propuesta pedagógica de carácter investigativo en el ámbito de la educación matemática. Sin conocer aún las necesidades de los estudiantes que por año y medio trabajarían con nosotras, tomamos la decisión de abordar “la proporcionalidad simple directa”. Esta temática surge después de realizar un seguimiento a los textos escolares del área de matemáticas del grado séptimo, los cuales reducen los conceptos relativos a la proporcionalidad, al manejo de fórmulas o la repetición de un modelo que privilegia la utilización de la regla de tres, presentando la razón y la proporción de forma aislada a la proporcionalidad entre magnitudes.

La proporcionalidad es uno de los conceptos básicos de la Matemática. Su estudio se inicia con el trabajo de relaciones multiplicativas y continúan con las leyes que relacionan determinadas magnitudes variables (Obando y Botero, 2006, p. 105); que permitan descubrir si dicha relación es o no directamente proporcional. Teniendo en cuenta el aporte de estos autores queremos abordar la proporcionalidad desde un aspecto dinámico, donde los estudiantes puedan dar cuenta de las relaciones que se pueden establecer entre magnitudes y de esta manera comprender la correlación que se presentan entre éstas.

Haciendo un rastreo bibliográfico encontramos algunas investigaciones referentes a la proporcionalidad, pero indagando un poco más, encontramos otras investigaciones que existen sobre el desarrollo del razonamiento proporcional, el cual es concebido por Lesh citado en Gómez, H. (1996, p. 12) *como una forma de razonamiento matemático que involucra covariedad y comparaciones múltiples, al mismo tiempo que está relacionado*

con la inferencia y la predicción e involucra métodos de pensamiento cualitativo y cuantitativo.

En el razonamiento proporcional un buen manejo de lo cualitativo es un paso previo para lograr el manejo de lo cuantitativo, lo cual observamos en la tesis doctoral *Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina*. Este trabajo es realizado por Elena Ruiz y Marta Valdemoros (2006). En esta investigación se realiza el seguimiento al caso de Paulina, una niña de 11 años, quien resolvía problemas de razón y proporción utilizando algoritmos carentes de sentido, cuando logra ampliar sus relaciones cualitativas, mejora el manejo de dichos algoritmos.

Decir que un estudiante posee un razonamiento proporcional sugiere además del manejo de la proporcionalidad, un desarrollo cualitativo y cuantitativo de la proporción. Para Piaget (1996, pp. 92-93) el razonamiento proporcional es caracterizado de acuerdo a varios momentos: Primeras etapas en las cuales el pensamiento hace uso de correspondencias y seriaciones cualitativas, etapas intermedias de compensaciones aditivas o el uso de razones y etapas avanzadas en las cuales se aplica el razonamiento proporcional sin importar los valores numéricos de los datos y las razones.

Para esto es necesario diseñar propuestas que nos permitan identificar las diferentes formas que usan los estudiantes para abordar dichas situaciones. Y muestra de ello lo podemos identificar en otras investigaciones realizadas sobre el razonamiento proporcional las cuales son:

La Tesis Doctoral de Silvia Alatorre Frenk. (Diciembre 2004) *¿A, B, o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional*. Esta Tesis Doctoral de Silvia Alatorre Frenk, se basa en la identificación de las variaciones que hay en las respuestas dadas por distintos sujetos a distintos problemas de comparación de razones o tasas.

Otras de las tesis que encontramos es la realizada por Juan González García (Diciembre 2005): *Manifestaciones de Comprensión que Reflejan Profesores y Estudiantes*

de Bachillerato en Actividades que Involucran Razonamiento Proporcional, basada en analizar el desenvolvimiento de los estudiantes en tareas que demandan razonamiento proporcional, en dos ambientes de aprendizaje diferentes, uno estático y otro dinámico.

Encontramos también “*Introducción temprana del pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría*” (2004). Tesis de Cristianne Butto- Teresa Rojano, que presenta un estudio sobre la transición de la aritmética al álgebra, incorporando fuentes de significados relacionados con el razonamiento proporcional numérico y geométrico, aspectos de la variación proporcional y procesos de generalización.

Finalmente hacemos referencia al artículo: *Razonamiento Proporcional Intuitivo en alumnos de primaria y secundaria* (“Revista Interamericana de Psicología/Interamerican Journal of Psychology 2007”). Por Juan José Díaz Díaz de León, Marco Antonio Soto Mayorga y Adriana Martínez Sánchez. En el cual se muestra, las diferencias entre el razonamiento proporcional es de tipo intuitivo y el razonamiento numérico, donde el primero se construye por medio de la relación con el contexto cotidiano, y en el segundo se presentan dificultades para establecer las relaciones de proporción entre las cantidades.

Después de reseñar algunos trabajos de investigación y confrontarlos con lo que observamos en el aula de clase, encontramos que para los estudiantes, lo importante era llegar a la respuesta, sin tener en cuenta si el procedimiento empleado era adecuado. Utilizaban pocos argumentos para explicar sus respuestas, empleando solo la vía numérica, descuidando otro tipo de representaciones como diagramas y tablas y en algunos casos en los que se aplicaban fórmulas, los estudiantes preguntaban qué debían hacer con los datos que se les entregaban. Esto debido posiblemente, a que la metodología de la clase no les permitía explorar este tipo de representaciones, las cuales deben conformar el conjunto de representaciones de la proporcionalidad (García, 1999, p. 27).

Encontramos también que al proponer problemas o situaciones que requerían de una multiplicación o una división para su solución, los estudiantes hacían uso de sumas reiteradas o resta. No percibían nociones como: “la mitad de”, “el doble de”, “la cuarta

parte”. Esto permitió evidenciar que establecían pocas relaciones entre los conceptos matemáticos como división, razón, fracción y proporción¹.

Después de estas observaciones reflexionamos sobre la apatía que presentan los estudiantes hacia la materia, lo cual nos lleva a preguntarnos: ¿puede ser causada por la metodología de la clase?, ¿será esto lo que los lleva a la desmotivación por el aprendizaje? Además, que la idea generalizada de considerar la matemática como algo inalcanzable e incomprensible, ¿será lo que los lleva a la mecanización y no a la comprensión de los conceptos?

Después de considerar todos estos elementos, tomamos la decisión de diseñar una serie de situaciones para que los estudiantes a partir de la construcción del concepto de razón favorecieran el desarrollo del razonamiento proporcional, para esto proponemos la siguiente pregunta que orientó nuestra propuesta pedagógica de carácter investigativo: *¿Cómo la construcción del concepto de razón favorece el desarrollo del razonamiento proporcional, en los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez?*, consideramos de gran importancia lo que afirman autores como Diez, Giménez y García (1998, p. 156) al considerar “el razonamiento proporcional como un procedimiento cognitivo que todas las personas utilizamos para comparar cosas a nuestro alrededor”, y es por esto que proponemos situaciones que llevan a los estudiantes a realizar acciones propias de la actividad matemática². Con el desarrollo del trabajo, pretendíamos que los estudiantes, construyan el concepto de razón teniendo como eje la comprensión de las relaciones que establezcan cualitativamente; por ser un campo utilizado con menos frecuencia y que a nuestro modo de ver coincide con la tesis de Piaget, pues estamos de

¹ Según Guacaneme (2001, p. 68) Una proporción es la igualdad de dos razones y se escribe así: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ o bien $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ donde los números α y δ se llaman extremos y los números β y α medios; el número δ se denomina también cuarta proporcional de los números α y β

² Marcela Falsetti, Mabel Rodríguez, Gustavo Carnelli, Francisco Formica(2006, p. 33) La actividad que se lleva a cabo para resolver estas situaciones–problemas, es la que podría llamarse “actividad matemática” Algunas de las acciones que intervienen en la actividad matemática, en los distintos niveles en que esta se desarrolla, son, por ejemplo: representar, comparar, resolver, estimar, operar, seleccionar, argumentar, reconocer estructuras, revertir procedimientos, razonar, simbolizar, justificar.

acuerdo al afirmar que es un paso previo para alcanzar el razonamiento proporcional cuantitativo. Para lograrlo formulamos el siguiente propósito: *Construir el concepto de razón a partir de situaciones problemas que permitan favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional.*

Para encontrar la respuesta a la pregunta mencionada en el párrafo anterior y alcanzar nuestro propósito, enmarcamos el proyecto en el enfoque de investigación cualitativa, orientada al estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social (Latorre, 1996, p. 46). La estrategia de investigación que empleamos es el estudio de casos el cual según Yin citado por La Torre (1996 p. 233) “consiste en una descripción y análisis detallado de unidades sociales o entidades educativas únicas”. El estudio de casos nos permitió estudiar cómo la construcción del concepto de razón favorece el desarrollo del razonamiento proporcional. Esta investigación la hemos abordado desde una visión fenomenológica-hermenéutica, donde nuestras capacidades reflexivas sobre el objeto de estudio, en este caso la construcción del concepto de razón que favorece el desarrollo del razonamiento proporcional, nos permite realizar un análisis cualitativo específico a partir de la comprensión de lo observado en el desarrollo de la propuesta pedagógica de carácter investigativo.

Esta experiencia es desarrollada en la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, esta se encuentra ubicada en el centro de Medellín y adscrita a los Colegios de Calidad de la ciudad de Medellín³ y presta el servicio a la comunidad en general, ya que se dedica a la educación de los más chicos hasta los adultos los cuales en su mayoría pertenecen a los estratos socio-económicos uno, dos y tres de diferentes puntos de la ciudad, permitiendo así la posibilidad de que todos puedan hacer parte del proceso educativo, por ello se le

³ Con motivo de los 50 años, Las Empresas Públicas de Medellín donaron al Municipio \$160 mil millones para construir diez escuelas de alta calidad, localizadas en zonas de baja cobertura. El valor agregado de este Proyecto consiste en que los Colegios, además de su papel educador, se convertirán en referentes urbanos, centros de congregación comunitaria y del mejoramiento en la calidad de vida de las comunidades beneficiadas.

denomina la Institución de la Inclusión⁴. El grado que hemos elegido es séptimo- dos, el cual consta de 41 estudiantes, 20 mujeres y 21 hombres y cuyas edades están entre los 11 y 17 años de edad.

Para el análisis que presentamos en este trabajo tomamos la información de cuatro estudiantes: María Andrea, Marlon, Brandon y Gabriel. Esta información fue recogida a partir de las situaciones planteadas, entrevistas y videos que nos fueron acercando al propósito.

Para el desarrollo de este proyecto pedagógico proponemos la actividad diagnóstica inicial, cuatro situaciones problema para los cuales se usan diferentes motivos⁵ como los son: los juegos, tablas de datos y cuentos, la actividad final que recopila todo lo que trabajamos en las demás situaciones. A continuación presentamos el nombre de cada una, las cuales serán descritas más adelante:

Observa, compara y crea.

Tiro al blanco.

Analistas de campeonato de fútbol.

Día de mercado.

Los viajes de Gulliver.

El juego de la escalera.

⁴ PEI. Misión: Somos una institución educativa que propicia la formación integral de los y las estudiantes desde los principios y los valores abadistas, generadora de procesos de inclusión y orientada a la construcción de la nueva ciudadanía que demanda la sociedad actual.

⁵ Obando y Múnera(2003, p. 9) El motivo es la excusa, la oportunidad, el evento, la ocasión, el acontecimiento, la coyuntura, o el suceso, que puede ser aprovechado para generar una situación problema en el aula de clase. Su elección es muy importante, pues determina en gran medida las posibilidades de comprensión de la situación por parte de los estudiantes, y por ende, el que la situación pueda constituirse en un verdadero problema.

Estas situaciones, contienen los siguientes elementos: justificación, un propósito general, propósitos específicos, estándares, recursos utilizados, conocimientos básicos inmersos en dicha situación, metodología, y bibliografía. Para su diseño, tuvimos en cuenta lo propuesto por algunos autores como: Lesh y Cramer (1996, p. 94) al considerar “las situaciones de tipo cualitativo como favorecedora del razonamiento proporcional”. Esto se evidencia en el tipo de preguntas que se hizo a los estudiantes cuando se les pide relacionar las magnitudes, sin tener en cuenta su valor y que están en juego en todas las actividades, claro está que no se puede perder de vista que siempre pretendíamos que llegaran a lo cuantitativo.

Consideramos lo propuesto por Lesh y otros (1998,2003, p. 80) al identificar cinco fases en el proceso de construcción de este tipo de razonamiento:

1. El estudiante, ante una situación problema centra su atención en una parte de la información relevante del problema, es decir, sólo considera una variable a la vez y por lo tanto, su análisis de la situación es parcial.

2. Se identifican las variables del problema, y su correlación, pero se establecen de manera cualitativa de tal forma que situaciones que implican tratamiento numérico quedan por fuera del alcance de las posibilidades de solución. Este tipo de análisis es importante pues dan herramientas de control sobre los procesos cuantitativos propios de la fase siguiente.

3. Esta fase se caracteriza por el uso de estrategias centradas en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades, pero desde una perspectiva aditiva, más que multiplicativa. En esta fase se utilizan reglas que permiten comparar, incrementar, decrecer, o hacer relaciones parte todo.

4. En esta fase se reconocen estructuras y relaciones que coordinan la variación de dos cantidades, fundamentalmente a partir de estrategias de reconocimiento de coordinación, de regularidades decrecientes y decrecientes.

5. Comprensión de la relación de la proporcionalidad a partir del establecimiento de la constante de proporcionalidad como una razón que relaciona cualquier par de valores correspondientes a cada uno de las cantidades que se comparan.

También tuvimos en cuenta, lo propuesto por el autor Salvador Llinares (2003 pp. 196-197) el cual expone que un número racional tiene múltiples interpretaciones, cuyas conexiones entre ellas favorecen las representaciones internas las cuales ayudan a la comprensión de estos números. Entre estas representaciones encontramos la razón, la que más exploramos, definida “como una comparación de dos cantidades, de igual o diferente magnitud”. Estas comparaciones pueden ser parte-parte o parte-todo en un conjunto.

Nos apoyamos además en lo que dice Vergnaud (1996, p. 117):

“Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones y una situación no se analiza con un solo concepto”. Destaca además dos ideas principales en una situación: La variedad y la historia. Esto es, en un cierto campo conceptual existe una gran variedad de situaciones y los conocimientos de los alumnos son moldeados por las situaciones que encuentran y progresivamente dominan. Tratamos de realizar situaciones variadas, en las cuales los estudiantes interactuaran con el concepto de razón de una forma dinámica, para que logaran un mejor dominio de dicho concepto.

Para sintetizar recogimos en momentos el camino que hemos recorrido, los cuales presentamos a continuación:

Observación: Este momento corresponde al ingreso a la Institución (inicio de la práctica), donde asistíamos a las clases que eran dirigidas por las maestras cooperadoras, en esta obtuvimos información referente al contexto escolar y socio cultural de la Institución intervenida, a través del diálogo con docentes del área de matemáticas en el grado donde se llevó a cabo la intervención pedagógica de los maestros en formación y también por medio de nuestras propias observaciones. En esta fase, observamos una serie de dificultades presentes en los estudiantes cuando se enfrentaban a diferentes situaciones y que han sido mencionadas con anterioridad.

Diagnóstico: conociendo un poco la dinámica de los grupos y las estrategias que usaban los estudiantes para dar solución a determinadas situaciones, diseñamos una actividad diagnóstica inicial. Con esta pretendíamos, indagar el nivel en que se encontraban los estudiantes respecto al razonamiento cualitativo⁶, cuando resolvían tareas que requerían de la proporcionalidad que a su vez, identificar los conocimientos previos, los niveles de razonamiento, la forma de argumentar, y como los estudiantes comunican los conceptos matemáticos adquiridos.

Intervención: El análisis realizado a la actividad diagnóstica nos dio elementos para el diseño y aplicación una serie de situaciones problemas, que permitían construir el concepto de razón para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes. En cuanto al diseño de una nueva situación, se tenían en cuenta las reflexiones de los estudiantes, para potenciar conceptos que aún no habían sido asimilados, o para avanzar en la construcción del concepto de razón con un mayor grado de dificultad, que les favorecía aún más el razonamiento proporcional.

Análisis: es considerado por Da Ponte (p. 200) como un conjunto de manipulaciones, transformaciones, operaciones, reflexiones, comprobaciones que se realizan sobre los datos con el fin de extraer significado relevante en relación a un problema de investigación. Los datos que hemos tenido en cuenta los hemos obtenido de la observación directa de las clases y de los registros escritos, entrevistas; donde de acuerdo con Patton, 1980, citado por Bonilla & Rodríguez, (1997, p. 93) son consideradas como aquellas que permiten conocer la perspectiva y el marco de referencia a partir del cual las personas organizan su entorno y organizan su comportamiento, las soluciones realizadas en las situaciones problema, algunos videos, registros fotográficos y diarios reflexivos; que en concordancia con lo considerado por Jaramillo (2003, p.6) son registros elaborados sistemáticamente por el futuro profesor después de cada clase. En estos registros

⁶ Piaget define lo cualitativo a través de categorías o clases de palabras; de esta forma, se apoya en reconocimientos lingüísticos, creando categorías de comparación. (Vínculo entre el Pensamiento Proporcional Cualitativo y Cuantitativo: el caso de Paulina, página 301)

el profesor describe y analiza hechos y detalles de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y de la práctica pedagógica en general.

Teniendo en cuenta los anteriores referentes, las lecturas y reflexiones realizadas, presentamos los resultados a partir de una triangulación⁷, donde emergen las siguientes categorías:

- *Hacia la Estructura Multiplicativa: Rupturas en la Estructura Aditiva:* Mostramos en esta categoría cómo los y las estudiantes han avanzado hacia la competencia multiplicativa, para lo cual se hace necesario que atraviesen por algunas rupturas en la estructura aditiva, mediante las cuales puede considerarse si efectivamente el estudiante ha desarrollado, la antes mencionada competencia. En esta categoría nos apoyamos en lo que propone Gloria García, referente a las rupturas en la estructura aditiva y en Vergnaud acerca de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división.
- *Construyendo el concepto de razón:* damos a conocer los niveles en los que se encuentran los estudiantes referentes al concepto de razón, mostrando cómo van construyendo dicho concepto, a partir de las múltiples relaciones y comparaciones que realizan en las diversas situaciones. Para este análisis nos apoyamos en la definición de razón propuesta por Freudenthal.
- *Favoreciendo el desarrollo del razonamiento proporcional:* en esta categoría contamos cómo la construcción del concepto de razón favorece el desarrollo del razonamiento proporcional, basándonos en las clases de problemas propuestos por Freudenthal, los cuales permiten desarrollar dicho razonamiento.

⁷ Citado por Cisterna (2005, p.68) La triangulación es la acción de reunión y cruce dialéctico de toda la información pertinente al objeto de estudio surgida en una investigación por medio de instrumentos correspondientes, y que en esencia constituyen el corpus de resultados de la investigación.

DIVISANDO EL FARO

Relatando Las Situaciones

"Nadie ignora todo, nadie sabe todo.

Todos sabemos algo. Todos ignoramos algo.

Por eso, siempre aprendemos"

Paulo Freire

Después de conocer un poco las bases sobre las cuales se construyó nuestra propuesta, presentamos a continuación cada una de las situaciones que desarrollamos, las cuales permitieron recoger la experiencia de los estudiantes. El número de situaciones desarrolladas no es muy amplio, debido a que la Institución, se estaba reorganizando internamente en todos los aspectos, lo cual implicaba construir el camino para constituirse como una Institución de Calidad.

Cada una de las situaciones tiene una intención relacionada con lo que queríamos lograr en los estudiantes. La estrategia metodológica, utilizada en esta experiencia de aula fue la situación problema, ya que como lo señalan Obando y Múnera (2003, p. 1):

“Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación”.

Algunas de estas situaciones fueron diseñadas en el contexto cotidiano de los estudiantes, apoyadas en lo que dice Vygotsky citado por Gómez (1999, p. 43) al considerar la matemática como “una construcción social, en la que se reconoce como una situación humana, implicada en la solución de problemas donde los objetos matemáticos son concebidos como entidades culturales socialmente compartidos. En la cual lo individual emerge de lo

colectivo; es decir, el desarrollo de las funciones cognoscitivas del niño tiene lugar en la interacción con los demás y con los expertos de su cultura”.

Con estas situaciones, pretendíamos “dinamizar la enseñanza y el aprendizaje”, a partir del trabajo en equipo el cual les permitía a los estudiantes encontrar soluciones a las situaciones propuestas, sin sentirse presionados por lo que pensaban los demás compañeros, conocer el punto de vista y comprender mejor los temas propuestos ya que no les daba pena preguntar en su equipo de trabajo¹. Contaban también con nuestro acompañamiento, porque cuando realizábamos las situaciones en el aula de clase estábamos siempre las dos profesoras en formación para que los estudiantes experimentaran una forma diferente de acercarse al conocimiento².

Al respecto, Múnera (2006, p. 1) aclara: Los estudiantes al incursionar en las situaciones problema, desarrollan niveles amplios de participación, ponen en juego su saber previo, para reorganizar con ayuda de sus compañeros y el docente una red dinámica de relaciones, en función de la nueva información. De esta manera, se asume la situación problema como la sugiere este autor “un instrumento de enseñanza y aprendizaje que propicia niveles de conceptualización, de manera progresiva hacia la significación matemática” (Múnera, 2006, p. 3).

La dinámica para la aplicación de cada una de ellas, consistía en presentar a los estudiantes la situación; éstas se realizaban durante dos horas de clases y en algunas ocasiones requería más tiempo, por lo tanto la situación se terminaba en la clase siguiente. Una de las partes más importantes en el desarrollo de la situación es la socialización, donde podemos evidenciar, analizar y confrontar los diferentes procesos y procedimientos realizados por los estudiantes, ya que como lo dicen Múnera y Obando (2003, p. 17):

La institucionalización permite a los alumnos una mejor aproximación y toma de conciencia de los aspectos conceptuales que ellos deben aprender, y que la situación

¹ Lo han expresado los estudiantes en las entrevistas.

² Hace referencia a que todo el tiempo estábamos atentas a dar explicaciones a los estudiantes y revisar el trabajo que realizaban.

les permite generalizar. A través de la socialización, se logra que cada alumno aprenda de los demás, tanto al realizar aportes del trabajo de sus compañeros y de igual manera al recibirlos.

A continuación presentamos cada una de las situaciones, en algunas utilizamos como mediadores³ juegos y cuentos, escogidos pensando en el contexto de los estudiantes y en que se convirtieran en motivadores para su aprendizaje. Realizamos una breve descripción de las mismas en el orden en que fueron propuestas a los estudiantes.

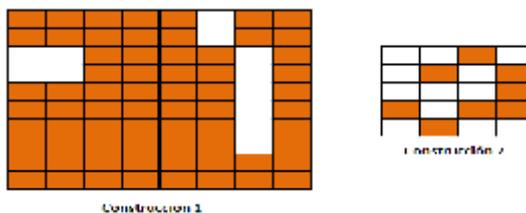
Actividad Diagnóstica	Observa, compara y crea
Situación I	Tiro al blanco
Situación II	Analistas de Campeonato de microfútbol.
Situación III	Día de Mercado
Situación IV	Los viajes de Gulliver
Situación V	Juego de la escalera

A continuación presentaremos la actividad "Observa, compara y crea ", correspondiente al diagnóstico que realizamos con los y las estudiantes:

³ Obando y Múnera (2003, p. 11), definen un mediador como un medio que permite el desarrollo de la actividad matemática del alumno.

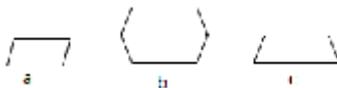
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
 FACULTAD DE EDUCACIÓN
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA HÉCTOR ABAD GÓMEZ “LA
 INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN”
 OBSERVA, CREA Y COMPARA

1. Don Pedro es uno de los mejores albañiles del barrio y por estos días en los que se encontraba sin trabajo, es contratado por el Sr. Alberto para terminar de pegar algunos adobes que le hacen falta a dos de las construcciones que dejó iniciado el albañil anterior, el Sr. Alberto le dice que observe las construcciones y que empiece por la construcción que requiera menos tiempo para ser terminada. Don Pedro no sabe por cual empezar, necesita que observes las figuras y le aconsejes con cual debe empezar y que le expliques las razones que tienes para tomar esta decisión



2. Observa las figuras y escoge la mejor opción para que ambos lados de la igualdad sean equivalentes. Explica tu respuesta.

$$\frac{\triangle}{\triangle} = \frac{\triangle \triangle}{\triangle}$$



3. En una familia compuesta por 5 integrantes gastan en el desayuno del domingo: 5 arepas, un cuarto de panela, 2 pastas de chocolate y 4 huevos, si cada integrante de la familia lleva un invitado el domingo a la hora del desayuno: ¿qué cantidad de panela, chocolate y huevos tienen que gastar para que alcance para todos el desayuno? Explica cómo encontraste la respuesta.

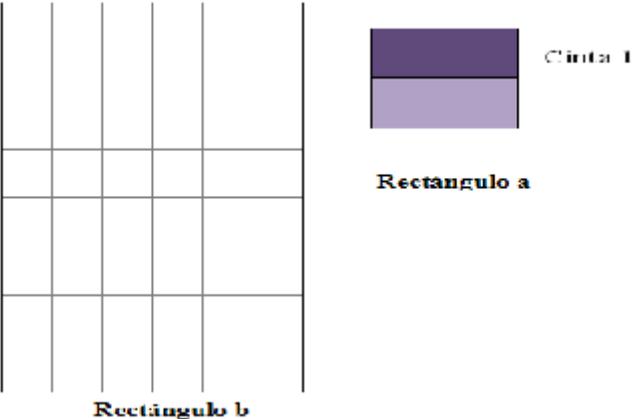
Ahora responde:

- ¿Alcanza un paquete de arepas para el desayuno de todos?
- Con una canasta de 12 huevos, ¿Alcanzan los huevos? ¿Cuántos sobran?

Created with

c. Si compran un paquete que tiene 4 panelitas¹ pequeñas, ¿crees que alcanza para todos el día que hay invitados? Si tu respuesta es afirmativa, ¿Cuántas panelitas sobran?

4. El rectángulo **a** se puede cubrir con 3 tiras de papel de igual tamaño, ¿cuántas tiras crees que necesitas para cubrir el rectángulo **b**? Explica cómo encontraste tu respuesta



a. ¿Qué parte del rectángulo **b** es el rectángulo **a**?

b. La cinta **1**, ¿qué parte es del rectángulo **a**?

c. ¿Cuántas veces la cinta **1** cabe en el rectángulo **b**?

d. Teniendo en cuenta la pregunta anterior, ¿qué parte del rectángulo **b** es la cinta **1**?

¹Al hablar de panelitas nos referimos a la panela que venden en algunas tiendas donde las empaican por cuartos.

La actividad Diagnóstica "*Observa, compara y crea*", tenía como propósito: Identificar las formas de razonamiento que utilizaron los estudiantes para resolver situaciones que incluyan la proporcionalidad. Pretendíamos, indagar el nivel en el que se encontraban respecto al razonamiento cualitativo, cuando resuelven tareas que requieren de la proporcionalidad.

En esta actividad, los estudiantes trabajaron en equipos, contaban con una guía escrita, para cada punto se les entregó material concreto que les permitía explorar sus respuestas. Lo que queríamos observar era qué tipo de relaciones podían realizar los estudiantes teniendo en cuenta, el material que les habíamos entregado o si simplemente respondían las preguntas sin hacer ningún tipo de comparación. Cada punto de la actividad tenía una intención enunciadas a continuación:

El primer punto de la guía tenía por intención: identificar relaciones de proporcionalidad a partir de semejanzas de figuras. Aquí se pretendía que los estudiantes compararan dos figuras (construcción **a** y construcción **b**) de diferentes tamaño, pero de lados proporcionales, con el apoyo del material concreto: rectángulos que hacen las veces de los ladrillos que faltan en las construcciones, y que les permitiera tomar la decisión adecuada: ¿cuál de las dos construcciones es más fácil de construir?

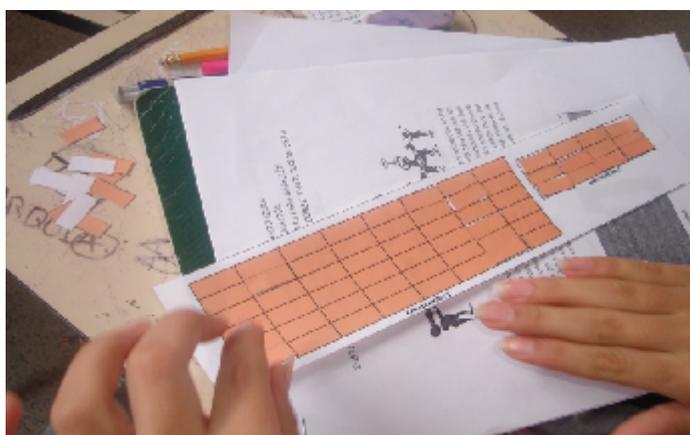


Figura 11. Utilizando material concreto. Actividad Diagnóstica.

La intención del segundo punto era establecer relaciones de equivalencia a partir de fracciones compuestas por figuras geométricas. En esta actividad elaborada en el contexto de lo geométrico, los y las estudiantes manipularon figuras hechas en papel de colores: tres

triángulos, dos trapecios, un paralelogramo y un hexágono, se pretendía que hallaran la cuarta proporcional para encontrar la equivalencia y lograr la proporción. A su vez, se pretendía que los y las estudiantes evidenciaran un razonamiento cualitativo, observando qué características de las figuras geométricas tenían en cuenta para elegir la correcta.



Figura 12. Establecer relaciones.

El propósito del punto tres era establecer relaciones de parte todo y parte- parte, este punto es diseñado en el contexto de lo cotidiano, buscaba que los estudiantes realizaran comparaciones entre la parte y el todo, cuando se enfrentaban a una actividad donde cambia la información de inicio. Así por ejemplo, en el caso: “cuando hay invitados a comer”, ¿cómo disminuye la cantidad de alimento en relación con las personas que se inviten? Se pretendía además apreciar cómo es el lenguaje matemático que los estudiantes utilizaron, a partir de la comunicación que tuvieran en su cotidianidad.

El punto cuatro es diseñado para establecer relaciones de parte todo y parte- parte. Se buscaba que los estudiantes establecieran comparaciones en situaciones de variabilidad, permitiéndoles así, reconocer el cambio implicado.

El material utilizado fue dos rectángulos: rectángulo **a** y rectángulo **b**, donde el rectángulo **a** formado por tres cintas iguales, cabía nueve veces exactas en el rectángulo **b**.

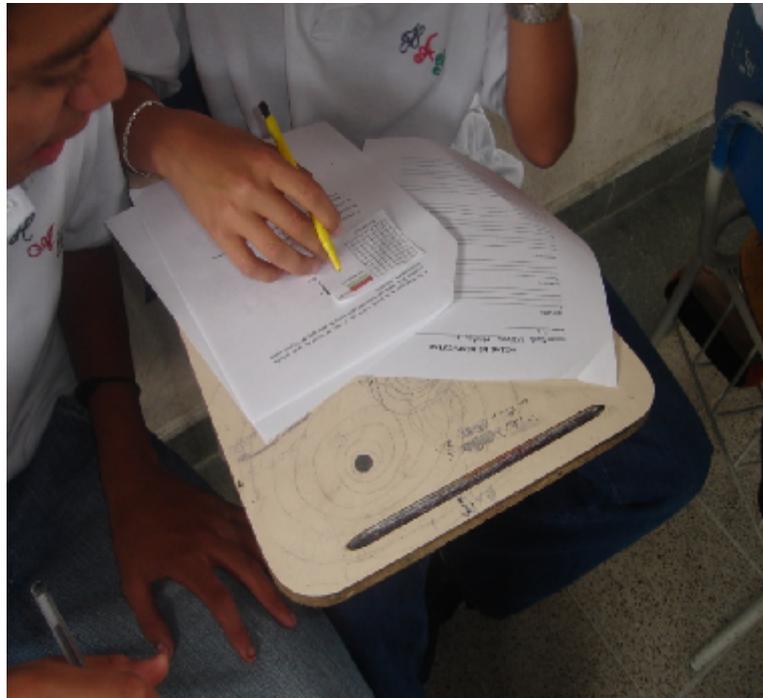


Figura 13. Establecer comparaciones.

Después de terminar la situación diagnóstica continuamos con la primera situación problema “Tiro al blanco”.

El propósito de esta situación era: Iniciar la construcción del concepto de razón a partir de las comparaciones y las diferentes formas de representación. Pretendíamos que los estudiantes a través de diferentes formas de representación (comparaciones entre números de aciertos y número total de tiros, de forma escrita y expresiones matemáticas), se acercaran al concepto de razón.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ "INSTITUCIÓN DE
LA INCLUSIÓN"

TIRO AL BLANCO

1. Juega con tus compañeros al tiro al blanco y consigna en la siguiente tabla los aciertos que tuvo cada uno de los jugadores, colocando una **X** en la celda que le corresponda a cada tiro. Si no aciertas deja la casilla en blanco. (Un acierto es cuando el tiro queda en cualquiera de los dos círculos del centro).

TIROS	JUG (1)	JUG(2)	JUG(3)	JUG(4)	JUG(5)

2. Ahora expresen con palabras cuántos puntos acertaron los jugadores del total de tiros que hizo cada uno.

3. Responde las siguientes preguntas: Se va a suponer que:

➤ Hay un jugador A que acierta los 10 tiros. ¿Cómo podrían expresar este resultado?

➤ Si un jugador D acertó la mitad de los tiros, ¿cómo se expresaría la afirmación anterior?

➤ Si en una segunda ronda, el número de tiros se duplica y hay un jugador B que los acierta todos, ¿Cuántos tiros acierta?

➤ El jugador A y el jugador B, ¿hicieron el mismo juego? Explica tu respuesta.

- ¿Hacen el mismo juego? Explica tu respuesta.

- ¿Cuál de los dos jugadores tuvo un mejor juego? ¿Por qué?

➤ Un jugador C, acierta 6 de los 10 tiros. ¿Cómo se podría expresar matemáticamente la afirmación anterior? ¿Qué significa decir que un jugador obtuvo un puntaje de dos a cinco?

Para el desarrollo de esta situación, los estudiantes trabajaron en equipos donde cada equipo recibió el juego del tiro al blanco y cada integrante una guía, la cual respondieron en el desarrollo del trabajo.



Figura 14. Juego “Tiro al Blanco”, utilizado como mediador en la primera situación problema

Cada uno de los puntos que conforman esta situación estaba acompañado por unos propósitos, los cuales son:

En el primer punto era mencionar brevemente la historia del juego tiro al blanco y hacer un juego libre, pretendiendo un acercamiento de los estudiantes con la situación que desarrollaron, a partir de una “ruleta” del tiro al blanco y unos dardos imantados, para explorar las ideas de razón que tenían los estudiantes.

En el punto dos, pretendíamos recolectar información y establecer comparaciones entre las magnitudes⁴ aciertos y total de tiros. En esta situación, los estudiantes a partir del reconocimiento de sus resultados, registraron la información en una tabla, en la cual consignaban el nombre de cada uno de los jugadores del grupo y marcaban sólo sus

⁴ García y Serano (1999, p 18) Espacios de medida diferentes o espacios donde las unidades de medida son diferentes.

aciertos⁵, para que los relacionaran y conectaran con el concepto de razón, a partir de la relación que establecieran entre los aciertos que obtuvieron y los tiros que realizaron.

En el punto tres pretendíamos establecer comparaciones entre la parte y el todo. Se buscaba por lo tanto, una forma de representación (expresiones escritas) en donde los estudiantes iniciaran el concepto de razón, al establecer relaciones parte-todo, comparando el número de aciertos con el número total de tiros que han realizado.

El punto cuatro tenía como propósito establecer relaciones ligadas a las nociones: “el doble de” y “un medio de”. Aspirábamos a que los estudiantes relacionaran dichas nociones para encontrar razones, teniendo en cuenta que las condiciones cambian cuando los tiros son “el doble de” o “la mitad de” que la del inicio del juego, o cuando se compara el juego entre dos participantes. Esta situación también buscaba, explorar las diferentes representaciones para favorecer la construcción del lenguaje matemático, por medio de representaciones escritas y matemáticas que continuaran llevando al estudiante al concepto de razón.

La Situación II "*Analistas de campeonato de microfútbol*", se enmarcó en el contexto de la Institución sobre el campeonato de microfútbol. Hemos modificado algunos datos, para que figure como equipo campeón el grupo 7-2. Para el desarrollo de esta situación, los estudiantes trabajaron en equipos y recibieron, las tablas donde se suministraba la información del campeonato y una guía escrita la cual debían completar a partir de la lectura de las tablas.

A continuación presentamos la situación problema dirigida a los estudiantes. La primera parte corresponde a la descripción del campeonato, los resultados obtenidos los cuales se presentan en tablas y finalmente la guía con las preguntas.

⁵ Un acierto significa que el dardo quede en cualquiera de los dos círculos centrales.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
 FACULTAD DE EDUCACIÓN
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ
 “INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN”

ANALISTAS DE CAMPEONATO DE MICROFÚTBOL

En la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, cada año se realiza el campeonato de microfútbol interno donde participan los equipos conformados por los estudiantes de los diferentes grados. Se llevan a cabo dos campeonatos, en uno se enfrentan los estudiantes de sexto a octavo y en el otro, los estudiantes de grado noveno al grado undécimo.

A continuación haremos una breve descripción del campeonato que se disputó el año pasado en los grados de sexto a octavo. El campeonato inició el 18 de febrero, con doce equipos inscritos uno por grupo y en total 4 por grado. Los organizadores del campeonato (estudiantes del grado once), realizaron un sorteo con el capitán de cada equipo para; organizar los grupos, dar a conocer las fechas y los equipos que se enfrentan en las primeras rondas. Después de la reunión de capitanes se informó que el grupo A estaba conformado por los grupos: 6-1, 6-3, 7-2, 7-3, 8-2, 8-3; y el grupo B por los grupos: 6-2, 6-4, 7-1, 7-4, 8-1, 8-4.

El campeonato se disputó en tres rondas, las cuales se describen a continuación:

- *Primera ronda:* Se realizó el sorteo para determinar cómo se enfrentarían los diferentes equipos, donde concluyeron que cada equipo jugaría cuatro partidos.
- *Segunda ronda:* los tres equipos de cada grupo que obtuvieron mayor puntaje pasaron a la segunda ronda, y continuaron en el mismo grupo. Los cuales se enfrentaron todos contra todos. En este caso cada equipo jugó 2 partidos.
- *Tercera ronda:* El equipo que obtuvo mayor puntaje de cada grupo se enfrentó para disputar la final y finalmente determinaron cual fue el campeón y el subcampeón.

Ahora necesitamos de tu ayuda para encontrar las respuestas a las siguientes preguntas, teniendo en cuenta la información suministrada en las tablas de resumen.

TABLAS RESUMEN DEL CAMPEONATO

EQUIPOS PARTICIPANTES	
GRUPO A	GRUPO B
6-1	6-2
6-3	6-4
7-2	7-1
7-3	7-4
8-2	8-1
8-3	8-4

PRIMERA RONDA

TABLA DE RESULTADOS GRUPO A			
EQUIPO	MARCADOR		
6-1 VS 6-3	6-1=3	6-3=1	
6-1 VS 8-3	6-1=1	8-3=1	
6-3 VS 7-2	6-3=1	7-2=3	
6-3 VS 7-3	6-3=1	7-3=1	
7-2 VS 6-3	7-2=3	6-3=2	
7-2 VS 8-2	7-2=2	8-2=1	
7-3 VS 8-3	7-3=0	8-3=3	
7-3 VS 6-1	7-3=1	6-1=2	
8-2 VS 6-1	8-2=2	6-1=1	
8-2 VS 7-2	8-2=2	7-2=2	
8-3 VS 8-2	8-3=1	8-2=1	
8-3 VS 7-3	8-3=2	7-3=4	

RESUMEN DE LA PRIMERA RONDA. GRUPO "A"	
EQUIPO	PUNTOS
6-1	7
6-2	5
7-2	10
7-3	6
8-2	6
8-3	7

TABLA DE RESULTADOS GRUPO B			
EQUIPO	MARCADOR		
6-2 VS 6-4	6-2=0	6-4=1	
6-2 VS 8-4	6-2=0	8-4=3	
6-4 VS 7-4	6-4=1	7-4=2	
6-4 VS 7-4	6-4=1	7-1=3	
7-1 VS 6-4	7-1=3	6-4=1	
7-1 VS 8-1	7-1=4	8-1=2	
7-4 VS 8-4	7-4=3	8-4=3	
7-4 VS 6-2	7-4=3	6-2=1	
8-1 VS 6-2	8-1=2	6-2=1	
8-1 VS 7-1	8-1=1	7-1=2	
8-4 VS 8-1	8-4=3	8-1=2	
8-4 VS 7-4	8-4=2	7-4=0	

RESUMEN DE LA PRIMERA RONDA. GRUPO "B"	
EQUIPO	PUNTOS
6-2	2
6-4	4
7-1	12
7-4	10
8-1	7
8-4	11

Figura 15. Tablas resumen utilizadas en la Situación:
"Analistas de Campeonato de Microfútbol"

SEGUNDA RONDA

TABLA DE RESULTADOS GRUPO A		
EQUIPO	MARCADOR	
6-1 VS 7-2	6-1=2	7-2=3
7-2 VS 8-3	7-2=2	8-3=2
8-3 VS 6-1	8-3=2	6-1=1

RESUMEN DE LA SEGUNDA RONDA. GRUPO "A"	
EQUIPO	PUNTOS
6-1	3
7-2	5
8-3	4

TABLA DE RESULTADOS GRUPO B		
EQUIPO	MARCADOR	
7-1 VS 7-4	7-1=0	7-4=2
7-1 VS 8-4	7-1=1	8-4=3
7-4 VS 8-4	7-4=2	8-4=2

RESUMEN DE LA SEGUNDA RONDA. GRUPO "B"	
EQUIPO	PUNTOS
7-1	1
7-4	4
8-4	5

TERCERA RONDA

GRUPO A	
FINALISTA:	7-2
SEMIFINALISTA:	8-3

FINAL		
EQUIPO	MARCADOR	
7-2 VS 8-4	7-2=2	8-4=1

GRUPO B	
FINALISTA:	8-4
SEMIFINALISTA:	7-4

CAMPEON: 7-2
SUBCAMPEON: 8-4

Figura 16. Tablas resumen utilizadas en la Situación:
"Analistas de Campeonato de Microfútbol"

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ “INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN”

ANALISTAS DE CAMPEONATOS DE MICROFÚTBOL

PREGUNTAS

1. Observa la información de la primera ronda y responde:
 - ¿Cuántos goles en total marcó el grupo A en la primera ronda?
 - Representa la relación entre el total de goles marcados por el grupo A y los goles marcados por el grupo 7-2.
 - Representa la relación de goles marcados por el grupo 8-3 y el total de goles marcados en el grupo A.
 - Representa la relación de goles marcados por el grupo 7-1 y el total de goles marcados en el grupo B.
 - ¿Cómo puedes explicar la relación de goles marcados por el grupo 7-4 y 8-2 en la primera ronda? ¿Cuál obtuvo mejor rendimiento?

2. Ahora observa la tabla de resumen de la primera, segunda y tercera ronda y responde:
 - ¿Qué grupo marcó más goles en la primera ronda? Explica tu respuesta.
¿Cuál fue la cantidad de goles que se marcó en todo el campeonato? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál fue el equipo de mayor rendimiento? Explica tu respuesta.
¿Cuál fue el equipo de menor rendimiento? Explica tu respuesta.
 - ¿Cómo se puede representar la relación entre el equipo de mayor rendimiento con el equipo de menor rendimiento? Explica tu respuesta.
 - Utiliza formas diferentes de representar la relación entre la cantidad de goles marcados por el grupo 7-4 y el total de goles marcados en el campeonato

3. Teniendo en cuenta la información suministrada en las tablas, responde:

En el partido de 8-3 Vs 7-3 de la primera ronda, ¿qué significa decir que el marcador

fue: $\frac{4}{2}$?

▪ En el partido 7-4 Vs 8-4 de la segunda ronda, ¿qué significa decir que el marcador fue:

$\frac{2}{2}$?

4. Si en la primera ronda el grupo 7-2 triplica la cantidad de goles marcados y el grupo 8-4 reduce a la mitad los goles marcados, ¿qué ocurre en el campeonato?

5. Utiliza las tablas de resultados del grupo A y el grupo B para contestar las siguientes preguntas:

▪ Si el marcador es $\frac{2}{2}$ ¿cuáles equipos estarían dentro de ese rango?

▪ Si el marcador es $\frac{1}{2}$ ¿cuáles equipos estarían dentro de ese rango?

Esta situación tenía como propósito general consolidar en los estudiantes el concepto de razón, por medio de información suministrada en tablas en las que se encontraban los marcadores de todos los equipos que participaron en el torneo y una serie de preguntas cuyas respuestas se derivaban de la información que el estudiante pudiera observar y deducir de dichas tablas.

El propósito de los dos primeros puntos de la situación era manipular la información que suministran las tablas para que los estudiantes representaran razones, al relacionar el total de goles en cada ronda (la situación uno en la tabla de la primera ronda y la situación 2 en las tablas resumen) con los goles hechos por cada equipo; también al relacionar los goles marcados por los diferentes equipos para deducir cuál de ellos obtuvo un mejor rendimiento.

El punto tres tenía como intención establecer comparaciones cuando la razón está representada como un cociente de la forma $\frac{a}{b}$. Se busca otra forma de representación de razón (expresiones escritas) en donde los estudiantes continúen avanzando en relación con lo que han trabajado anteriormente sobre el concepto de razón, al establecer relaciones parte-parte, comparando el número de goles de un equipo con los goles hechos por otro.

En el punto cuatro, se pretendía establecer relaciones ligadas a las nociones: “el triple de” y “la mitad de”, que relacionen dichas nociones para encontrar la razón. También se esperaba que los estudiantes utilizaran diferentes formas de representar la comparación propuesta.

El último punto de esta situación tenía como propósito, establecer relaciones entre razones equivalentes. Se esperaba que identificaran los marcadores de cada partido y los relacionaran entre sí, estableciendo que cada uno de estos marcadores es equivalente con otro, aunque no tuvieran el mismo resultado.

La Situación III "*Día de mercado*", se desarrolló teniendo en cuenta el contexto social de los estudiantes, ya que la gran mayoría salen a merchar con sus padres en las tiendas del barrio o en algunas ocasiones compran el diario. Esta situación la realizamos en

forma individual, a cada estudiante le entregamos la guía escrita que desarrollaba según la información suministrada. Inicialmente se encuentra la descripción de la situación y la lista de mercado que compran en una familia y la cantidad de dinero que debe invertir. La situación problema es la siguiente:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
 FACULTAD DE EDUCACIÓN
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA HECTOR ABAD GOMEZ
 “INSTITUCIÓN DE LA INCLUSIÓN”

DÍA DE MERCADO

Aníbal es un estudiante de grado séptimo de la Institución Educativa Héctor Abad Gómez, vive con su padre, su mamá y su hermana de 10 años, quien también estudia en la misma Institución. Los primeros domingos de cada mes sale toda la familia a comprar el mercado para todo el mes, cerca de la plaza de flores, ya que por este lugar se encuentran varias tiendas donde venden a muy buenos precios, dice su padre. En la Familia de Aníbal son muy pocas las visitas que reciben ya que sus padres son nuevos en la ciudad y la mayoría de los familiares viven en Yarumal Antioquia.

A continuación te contaremos acerca de algunos de los productos que compra la familia de Aníbal para todo el mes:

PRODUCTOS DEL MERCADO		
Producto	Cantidad	Precio
Aroz	15 libras	18000
Lentejas	1kilo	3200
Frijoles	3 kilos	14400
Azúcar	6 T.b	4500
Mantequilla	2 lb	3200
Panela	7,5 kilos	20500
Aceite	4000 cm ³	16700
Arveja	2lb	2400
Papa	30 lb	21000
Jabón	640gr	6400

Ahora observa la información suministrada y completa la siguiente tabla:

PRODUCTOS DEL MERCADO			
Producto	Cantidad en kl	Cantidad en lb	Precio
Arroz		15 libras	18000
Lenteja	1kilo		3200
Frijoles	3 kilos		14400
Azúcar		6 Lb	4500
Mantequilla	1,5 kilos		6600
Panela	7,5 kilos		20500
Aceite	4000 cm ³		16700
Arveja		2lb	2400
Papa		30 lb	21000
Jabón		640gr	6400

1. Con la información facilitada en la tabla anterior, encuentra la respuesta a las siguientes preguntas:

1.1 ¿Cuál es la cantidad de arroz que consume la familia diariamente?

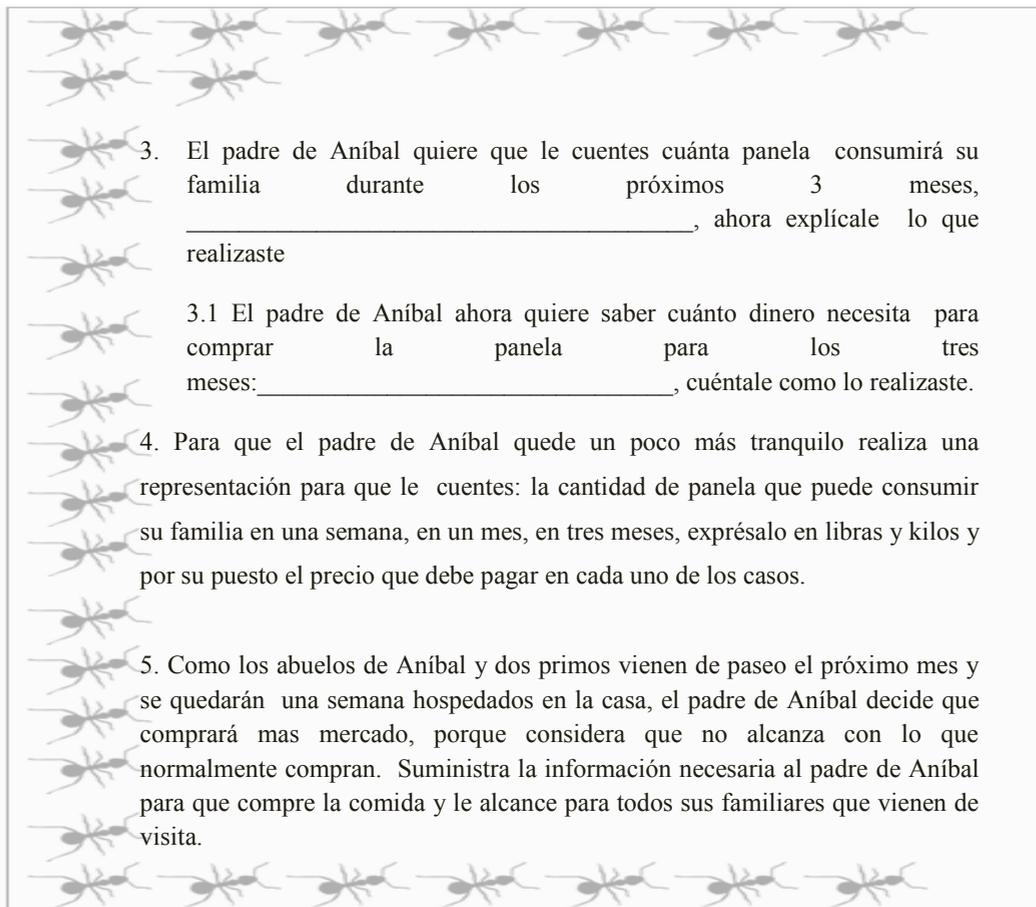
1.2 ¿Cuántos kilos de arroz consume la familia en un día? Explica tu respuesta.

1.3 ¿Cuánto dinero cuesta el arroz que se consume en un día?

1.4 ¿Representa la relación entre la cantidad de libras de arroz que consume la familia de Aníbal en un día y la cantidad de libras arroz que consume en un mes? Explica tu respuesta.

1.5 ¿Cómo puedes representar la relación entre la cantidad de Kilos de arroz que consume la familia en un día y la cantidad de Kilos de arroz que consume en un mes? Explica tu respuesta.

2. Compara las situaciones 1.4 y 1.5, ¿en cuál caso la familia consume más arroz? ¿Qué puedes concluir?



3. El padre de Aníbal quiere que le cuentes cuánta panela consumirá su familia durante los próximos 3 meses, _____, ahora explícale lo que realizaste

3.1 El padre de Aníbal ahora quiere saber cuánto dinero necesita para comprar la panela para los tres meses: _____, cuéntale como lo realizaste.

4. Para que el padre de Aníbal quede un poco más tranquilo realiza una representación para que le cuentes: la cantidad de panela que puede consumir su familia en una semana, en un mes, en tres meses, exprésalo en libras y kilos y por su puesto el precio que debe pagar en cada uno de los casos.

5. Como los abuelos de Aníbal y dos primos vienen de paseo el próximo mes y se quedarán una semana hospedados en la casa, el padre de Aníbal decide que comprará mas mercado, porque considera que no alcanza con lo que normalmente compran. Suministra la información necesaria al padre de Aníbal para que compre la comida y le alcance para todos sus familiares que vienen de visita.

El propósito de esta situación es consolidar en los y las estudiantes el concepto de razón, por medio de múltiples situaciones de la vida diaria⁶. Lo que se pretendía en cada una de las situaciones propuestas, es que continúen utilizando la información por medio de tablas, con el fin de que a partir del análisis que hagan de los datos, que están basados en su cotidianidad, logran consolidar dicho concepto.

La intención en el punto uno, era que los estudiantes representaran el concepto de razón como el cociente de dos números o dos medidas de la misma magnitud, realizaran conversiones y avanzaran a un nivel de mayor complejidad donde deben tener en cuenta el número de días para encontrar la razón pedida.

En el punto dos se pretendía comparar razones relacionando cantidades, aquí debían realizar una comparación entre la cantidad de libras de arroz consumidas en un día y en un mes y la cantidad de kilos de arroz consumidos en un día y en un mes, para comprobar qué

⁶ Esta situación, es un caso hipotético, donde el consumo diario es igual y siempre comen en casa.

han avanzado en la construcción del concepto de razón, debido que el nivel de complejidad de este punto es mayor, porque aquí la comparación era entre razones.

El punto tres pretendía lograr estimaciones de los gastos que pueden surgir en un determinado tiempo, comparando magnitudes diferentes. Los estudiantes realizarían cálculos que les permitieran dar una estimación de lo que el padre de familia se puede gastar en tres meses con respecto a un producto y con respecto al dinero. Buscando de esta forma observar cómo representan las relaciones cuaternarias.

El propósito del punto cuatro, era representar razones por medio de las comparaciones de una magnitud con respecto a otra. Buscando que los estudiantes continúen realizando representaciones de lo que es una razón, tomando un mismo producto, pero ahora teniendo en cuenta que el periodo de tiempo es diferente en cada situación.

Finalmente en el punto cinco pretendíamos identificar relaciones multiplicativas por medio de comparaciones para solucionar una situación determinada. Por ejemplo al aumentar los integrantes de la familia, y cómo este aumento influye respecto a los productos y al dinero.

La Situación IV "*Los viajes de Gulliver*⁷", es diseñada usando como mediador una parte del cuento los viajes de Gulliver con algunas adaptaciones. La situación presenta el cuento y posteriormente las preguntas a las que deben dar respuesta. Para realizar esta situación inicialmente los estudiantes realizaron una lectura previa, posteriormente realizamos la socialización para retomar algunos aspectos importantes. Esta situación se solucionó en forma individual, a cada estudiante le entregamos la guía escrita que desarrollaba según la información suministrada en el cuento y posteriormente realizamos la socialización. La presentamos a continuación:

⁷ Adaptación del cuento *Los Viajes de Gulliver*, de Jonathan Swift.

Los Viajes de Gulliver

Durante muchos días, el hermoso velero en el que viajaba Gulliver había navegado plácidamente hasta que, al aventurarse por las aguas de las Indias Orientales, una violentísima tempestad empezó a zarandear el barco como si fuera una cáscara de nuez. Impresionantes olas barrían la cubierta y abatían los mástiles con sus velas. Al llegar la noche, una gigantesca ola levantó el barco por la parte de popa y lo lanzó de proa contra el hirviente remolino entre un espantoso crujir de maderas y los gritos de los hombres.

-¡Sálvese quien pueda! - Gritó el capitán.

No hubo ni tiempo de arrojar los botes al agua y cada uno trató de ponerse a salvo alejándose del barco que se hundía por momentos.

Empujado por el viento, cegado por la espuma, Gulliver nadaba en medio de las tinieblas. Pasaba el tiempo y la fatiga hacía presa en él.

"Mis fuerzas se agotan", pensaba; "no podré resistir mucho"

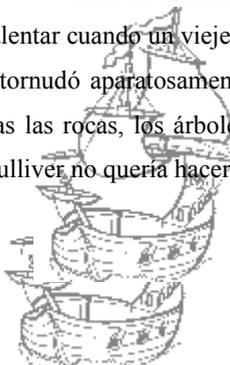
De pronto, notó que su pie chocaba contra algo firme. Unas brazadas más y se encontró en una playa.

- ¡Estoy salvado! - murmuró con sus últimas fuerzas, antes de dejarse caer sobre la arena. Al punto, se quedó profunda y plácidamente dormido.

Justo al empezar sus aventuras, Samuel Gulliver llega a Liliput. Él no podía saber que había llegado allí, al país donde los hombres, los animales y las plantas eran diminutos. En este país, se encuentra con la sorpresa de que todos sus habitantes son 12 veces más pequeños que él. Además, existe una exacta proporción entre los demás animales y las plantas, así un buey mide unos 12cm de altura, una oveja 4cm y una gallina 2cm.

Los vigías de ese reino al verlo, corrieron a la ciudad para dar la voz de alarma: ¡Ha llegado un gigante!

Inmediatamente todas las gentes de Liliput se encaminaron hacia la playa, el sol había empezado a calentar cuando un viejecito que se apoyaba en un diminuto bastón, tocó sin querer la nariz del prisionero, que estornudó aparatosamente. Al despertarse Gulliver, los liliputienses muertos de miedo fueron a esconderse tras las rocas, los árboles o en las madrigueras, otros emprendieron la huida. Cuando se dieron cuenta que Gulliver no quería hacerles daño, comenzaron a avanzar hacia él.



Pero el náufrago estaba hambriento y, con su mejor sonrisa, dijo: - “Amigos, os agradecería que me trajerais algo de comer”

Con gran presteza le presentaron una gran comida. Claro que los bueyes de Liliput eran como gorriones para el visitante y necesitó unos pocos para saciar su apetito. En cuanto a los barriles de vino, se le antojaban dedales e iba despachando cuantos le servían con la mayor facilidad.

Mientras comía, supo el viajero que por aquellos días se hallaban en guerra con los enanos del país vecino y que esta situación les afligía mucho. Entonces Gulliver prometió defenderlos de sus enemigos.

Cuando vinieron a atacarlos, Gulliver entró al agua y fue apoderándose de los barcos enemigos con sus enormes manos. Enseguida empezó a repartir los barcos por sus ropas, como si fueran avellanas, con sus guerreros dentro.

Los enemigos de Liliput se rindieron con un solo hombre.

Todos gritaban entusiasmados: - ¡Viva el gran héroe Gulliver! Él nos ha salvado.

Honrado, aclamado y querido, Gulliver pasó en Liliput varios años. El pueblo entero había colaborado en construirle una gran casa con todas las comodidades. Sin embargo, el viajero sentía nostalgia de su patria y de su familia. Por otra parte, comprendía que con él allí, las provisiones de los liliputienses corrían el peligro de acabarse, pues comía él solo tanto como el país entero.

Con frecuencia atisbaba el horizonte desde un montículo y cierto día apareció el ansiado barco no lejos de la costa y el viajero le hizo señales para que se aproximara. El velero se acercó a la playa y Gulliver se despidió de sus amigos.

Con verdadero afecto estuvieron en la playa, agitando sus manos, hasta que vieron la silueta graciosa del velero perderse en la lejana bruma.

En un segundo viaje, Gulliver naufraga de nuevo y aparece en las costas de Brobdingnag. En este país pasa exactamente al revés, Gulliver es un enano. Es 12 veces menor que un habitante de este país.

Pero esta es otra historia que se contará en otra ocasión...

Si han estado atentos a la lectura del cuento, responderán las siguientes preguntas:

1. Si Gulliver mide 180 cm, ¿cuál será su medida en Liliput?
2. Y si Gulliver mide la mitad de la estatura anterior, ¿cuál será la nueva medida de su estatura en Liliput?
3. Si Gulliver se encuentra en Brobdingnag, ¿cuál será la medida de su estatura?

4. Consigna los datos que obtuviste en la siguiente tabla y completa los datos que falten:

Estatura persona normal	Medida de la estatura en Liliput	Medida de la estatura en Brobdingnag
180 cm		
144 cm		
	1 cm	
		432 cm
		1728 cm
	6 cm	

5. Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la razón entre la medida de la estatura normal de una persona y la medida de su estatura en Liliput?
- ¿Cuál es la razón entre la medida normal de la estatura de una persona y la medida de la estatura de un habitante en Brobdingnag?
- ¿Cuál es la razón entre la medida de la estatura de una persona en Liliput y la medida de una persona en Brobdingnag?
- ¿Cuál es la razón entre la medida de la estatura de una persona en Brobdingnag y la medida de la estatura de una persona normal?
- ¿Cuál es la razón entre la medida de la estatura de una persona en Liliput y la medida de la estatura de una persona normal?

6. Si en promedio una persona como Gulliver come 1200 calorías al día, ¿es válida la frase del cuento que dice: “pues comía él solo tanto como el país entero”? Explica tu respuesta.

7. ¿Cuántos bueyes necesitó Gulliver para completar sus calorías? Y si en vez de haber comido bueyes hubiera comido gallinas, ¿cuántas habría necesitado para completar sus calorías?

El propósito general de la situación era: establecer razones que acercaran al estudiante al concepto de proporción utilizando como mediador de la situación un cuento, en el cual sus personajes, poseían medidas proporcionales.

Los primeros puntos apuntan a comparar magnitudes que aumentan o disminuyen de manera proporcional. En éstos, se buscaba realizar conversiones entre la estatura de una persona en nuestro mundo y esta misma estatura en otros lugares, donde según el cuento, estas personas guardaban una proporción.

Con el punto cuatro pretendíamos que los las estudiantes hicieran las respectivas comparaciones entre magnitudes con mayor facilidad. A partir de la información suministrada en tablas debían consignar los datos hallados, (la estatura en nuestro mundo, en Liliput y en Brobdingnag), esto con el fin de que al realizar las respectivas comparaciones entre las magnitudes, la información se encontrara de forma más ordenada y concisa facilitando el análisis para hallar la constante de proporcionalidad.

El propósito del punto cinco, era encontrar las razones por medio de la comparación entre magnitudes. Los estudiantes debían continuar afianzando la noción de razón, por medio de las comparaciones entre las estaturas en nuestro mundo, en Liliput y en Brobdingnag que habían encontrado en el punto anterior.

Con los puntos seis, siete y ocho se pretendía establecer relaciones multiplicativas entre las variables que intervienen en la situación para encontrar las proporciones solicitadas, para ello interesaba que los estudiantes establecieran relaciones entre la estatura de una persona con las calorías que consume al día, tanto en el mundo nuestro como en los demás que menciona el cuento.

En el punto nueve pretendíamos que los estudiantes tuvieran en cuenta todas las comparaciones y las relaciones que han realizado en el transcurso de toda la situación, a partir de la conversión de su propia estatura en los dos países: Liliput y Brobdingnag, dando cuenta del nivel de comprensión.

EL JUEGO DE LA ESCALERA

En esta actividad se utilizó el juego de la escalera⁸ como mediador. El juego consistía en tirar un dado e ir avanzando hacia una casilla, la mayoría de estas posiciones estaban marcadas con problemas⁹ que incluían los conceptos desarrollados en las intervenciones anteriores, que se habían ido desarrollando en cada una de las situaciones anteriores, pero que se caracterizaban por poseer un mayor nivel de complejidad.

Esta situación se realizó grupalmente y un aspecto importante en ella es que permitía realizar la socialización al mismo tiempo que el estudiante podía jugar.

Esta actividad tenía como propósito general: en primer lugar observar en los estudiantes como razonaban frente a diversos problemas, los cuales requieren de un nivel de razonamiento proporcional que va de lo cualitativo hasta lo cuantitativo.

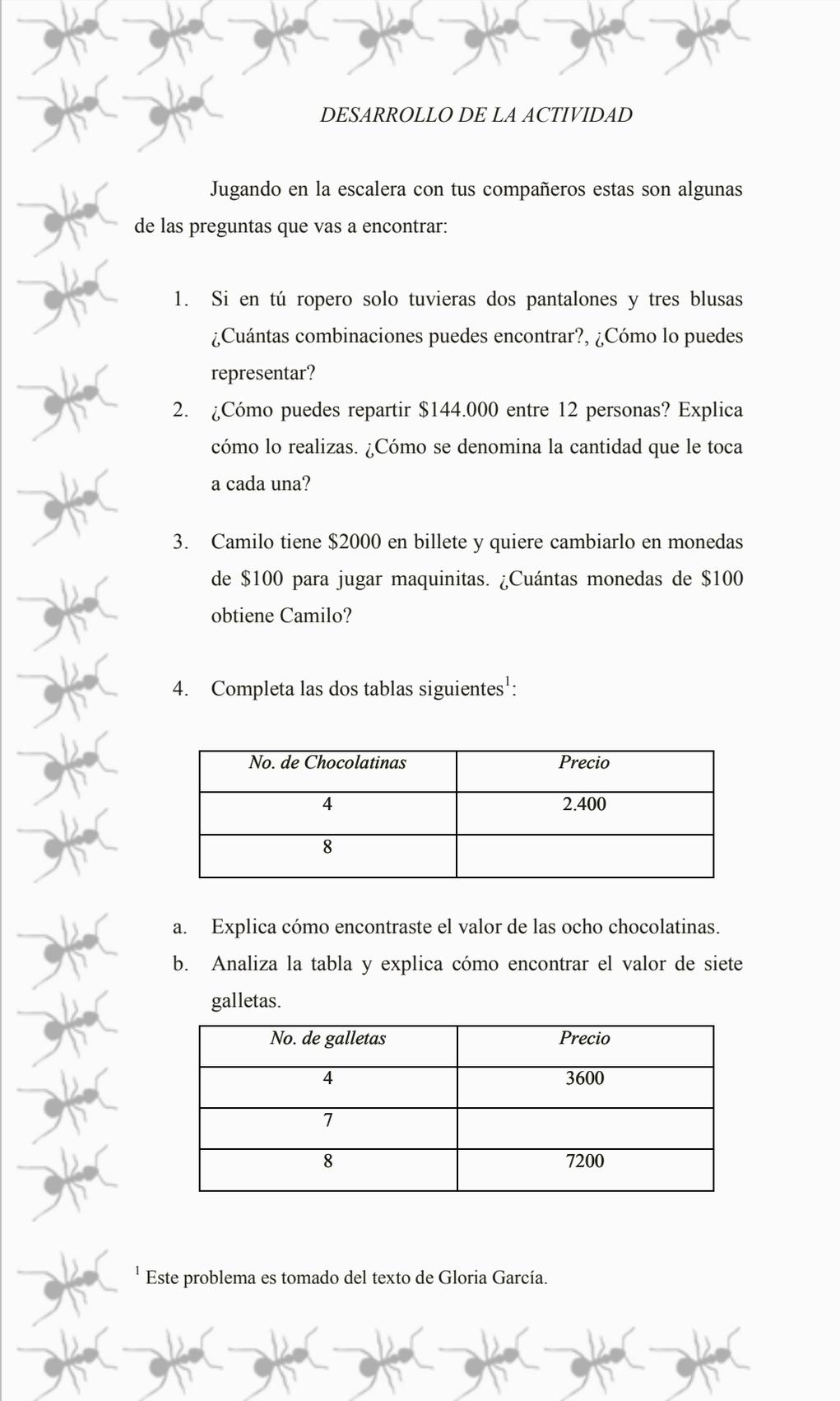
En segundo lugar, resolver problemas a partir de la relación de equivalencia entre razones, para dar sentido a la proporción.



Figura 17. Estudiantes jugando “Escalera”, utilizada como mediador en la última situación problema.

⁸ Adaptación del juego tradicional conocido como juego de la escalera.

⁹ Específicamente el razonamiento proporcional está relacionado con la resolución de problemas cuya estructura matemática corresponde a la estructura de proporcionalidad. (Gómez y Serrano, 1999, p. 32)



DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Jugando en la escalera con tus compañeros estas son algunas de las preguntas que vas a encontrar:

- Si en tú ropero solo tuvieras dos pantalones y tres blusas ¿Cuántas combinaciones puedes encontrar?, ¿Cómo lo puedes representar?
- ¿Cómo puedes repartir \$144.000 entre 12 personas? Explica cómo lo realizas. ¿Cómo se denomina la cantidad que le toca a cada una?
- Camilo tiene \$2000 en billete y quiere cambiarlo en monedas de \$100 para jugar maquinitas. ¿Cuántas monedas de \$100 obtiene Camilo?
- Completa las dos tablas siguientes¹:

<i>No. de Chocolatinas</i>	<i>Precio</i>
4	2.400
8	

- Explica cómo encontraste el valor de las ocho chocolatinas.
- Analiza la tabla y explica cómo encontrar el valor de siete galletas.

<i>No. de galletas</i>	<i>Precio</i>
4	3600
7	
8	7200

¹ Este problema es tomado del texto de Gloria García.



a. ¿Qué magnitudes intervienen en cada una en el caso *a* y *b*?,
¿Cómo se relacionan?



5. Encuentra las razones:



a. Si un estudiante permanece despierto 16 horas, de las cuales dedica 8 a estudiar, ¿cuál es la razón entre las horas que permanece despierto y las que se dedica al estudio?



b. Si con 8 limones se prepara un litro de limonada, ¿cuál es la razón entre la cantidad de limonada y los limones utilizados en su preparación?



c. Analiza las magnitudes que se relacionan en el caso *a* y en el caso *b*, ¿Qué puedes concluir?



6. Inventa un problema relacionado con los datos que se te proporcionan en cada caso y resuélvelo:



a. $15 \times 5 = 75$



b. $1200 \div 10 = 120$



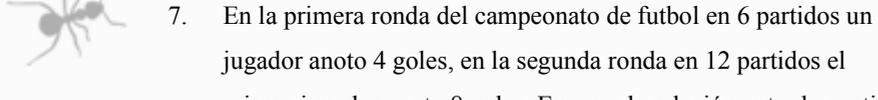
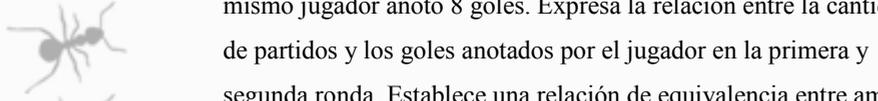
7. En la primera ronda del campeonato de futbol en 6 partidos un jugador anoto 4 goles, en la segunda ronda en 12 partidos el mismo jugador anoto 8 goles. Expresa la relación entre la cantidad de partidos y los goles anotados por el jugador en la primera y segunda ronda. Establece una relación de equivalencia entre ambas razones.

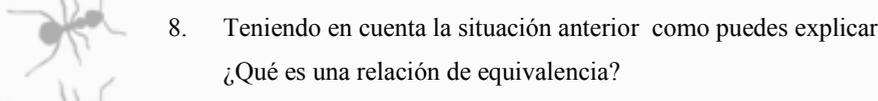
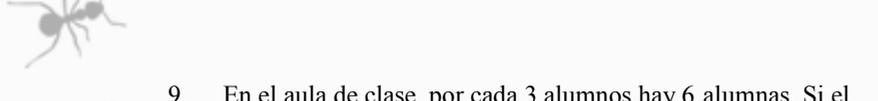
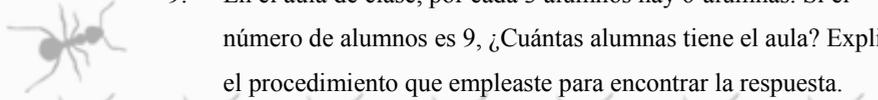


8. Teniendo en cuenta la situación anterior como puedes explicar ¿Qué es una relación de equivalencia?

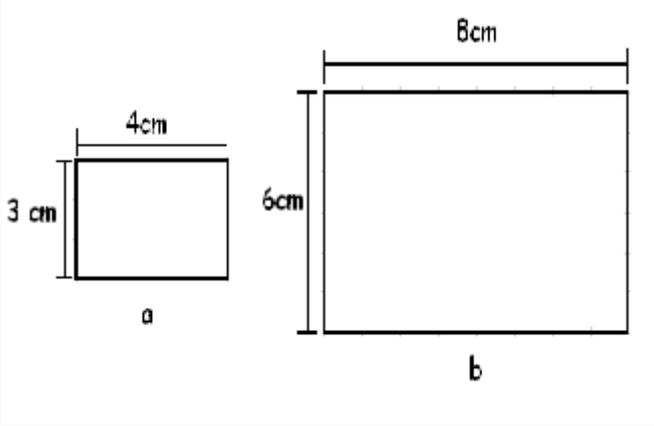


9. En el aula de clase, por cada 3 alumnos hay 6 alumnas. Si el número de alumnos es 9, ¿Cuántas alumnas tiene el aula? Explica el procedimiento que empleaste para encontrar la respuesta.


10. Observa los siguientes rectángulos:



En la figura *a*: establece la relación entre el largo y el ancho.

En la figura *b*: establece la relación entre el largo y el ancho

Establece una relación de equivalencia entre ambas razones.

Con esta situación pretendíamos que los estudiantes dieran cuenta de que han construido el concepto de razón y que se aproximan a la construcción del concepto de la proporción, a través de las diferentes representaciones y argumentaciones que realizan para cada uno de los problemas propuestos.

ANÁLISIS DE LAS CATEGORÍAS

Para realizar el análisis de los datos, los agrupamos en varias categorías que emergen de acuerdo con características comunes encontradas en las respuestas de los estudiantes, a través del desarrollo de las situaciones, evidencias escritas, entrevistas, material fotográfico y diarios reflexivos. Realizamos unidades de análisis, para luego estructurarlas, teniendo en cuenta las características ya mencionadas, los referentes teóricos y nuestras reflexiones.

CONSTRUYENDO EL CONCEPTO DE RAZÓN

El concepto de razón es un concepto básico, al estar relacionado con la mayoría de los contenidos en Matemáticas además, señala Orton (pag. 28), porque es una herramienta útil en la resolución de problemas. Por lo tanto, su aprendizaje se torna relevante, así como el diseño y aplicación de situaciones que tengan como propósito su enseñanza. Al respecto, dicen García y Serrano (1999, pag 12): “Su función más importante es juntar y separar, establecer relaciones recíprocas, para crear con base en una jerarquía de razones y de relaciones, estructuras verdaderas”.

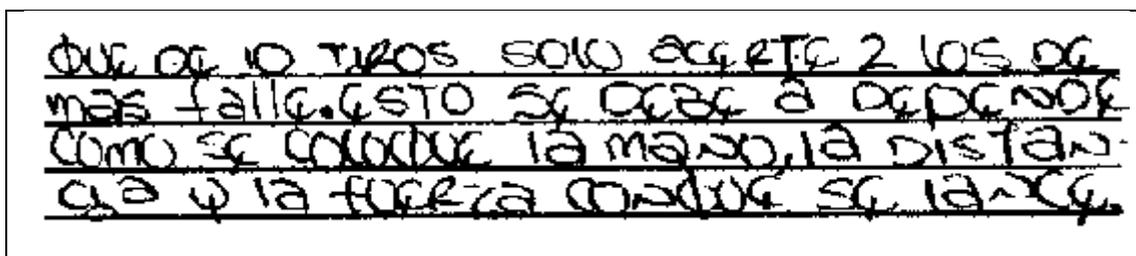
Antes de iniciar este análisis, hacemos mención nuevamente de la pregunta que señaló nuestro norte: ¿Cómo la construcción del concepto de la razón favorece el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes del grado séptimo? En la actividad diagnóstica por ejemplo, pudimos observar que los estudiantes daban sus respuestas teniendo en cuenta solo una parte de la situación, lo cual los guiaba hacia una argumentación que contradecía su respuesta, sin embargo, aunque ellos se daban cuenta que podían tener algún error, no trataban de corregirlo. Así, ante la situación de completar dos construcciones desiguales en tamaño, pero de lados proporcionales, donde la cantidad de material que necesitaban para cubrirlas era la misma, los estudiantes tomaban la decisión de comenzar por la construcción más pequeña argumentando que aunque les faltaba la

misma cantidad de ladrillos, el obrero debería comenzar por la más pequeña ya que se demoraría menos.

A continuación presentamos como los estudiantes del grado séptimo construyeron el concepto de razón a lo largo del desarrollo de cada una de las situaciones; en las cuales tuvimos en cuenta tanto la parte teórica referente a la razón, como las respuestas dadas por los estudiantes.

La primera situación propuesta a los estudiantes del grado séptimo fue “*Tiro al blanco*”, donde en un primer momento, debían comparar la cantidad de lanzamientos con la cantidad de tiros acertados. A lo cual María Andrea da como respuesta:

“Que de 10 tiros solo acerté 2, los demás fallé”. Podemos observar como la estudiante realiza una comparación teniendo en cuenta primero la cantidad de tiros realizados y posteriormente los tiros acertados.



QUE DE 10 TIROS SOLO ACERTE 2 LOS DE
MAS FALLE. ESTO SE DEBE A DEPENDER
COMO SE COLOCA LA MANO, LA DISTAN-
CIA Y LA FUERZA CON LA QUE SE LANZA.

(Situación problema uno, 5 de agosto 2008)

Para el mismo caso Marlon y Brandon responden: “0 de 15”, queriendo expresar que no realizaron ningún acierto de los 15 lanzamientos que hicieron.

(Situación problema uno, 5 de agosto 2008)

En el punto siguiente, les proponemos que relacionen los tiros acertados con la cantidad de tiros lanzados y posteriormente los comparen con los resultados obtenidos en el punto anterior. Ante esta pregunta María Andrea responde:

ME PARECE QUE ES LO MISMO PORQUE
AGUAL LOS RESULTADOS NO CAMBIAN

(Situación problema uno, 5 de agosto 2008)

Ella tuvo en cuenta que las cantidades no cambiaban, pero no que la forma como eran nombradas ya no eran los mismos en esta comparación. Esta pregunta la consideramos importante, ya que da elementos donde se evidencia el proceso de la reversibilidad¹, relevante en la construcción del concepto de razón.

Aunque inicialmente los estudiantes realizaban comparaciones entre los aciertos y los lanzamientos, una nueva situación planteada, consistía en que dos jugadores hacen diferentes tiros y lanzamientos, uno $\frac{4}{10}$ y el otro $\frac{14}{20}$, se pregunta cuál de ellos realiza el mejor juego, Marlon contesta: “El jugador 2 hace mayor puntaje porque 14 de 20 es más que 4 de 10”.

(Entrevista situación problema uno, 5 de agosto 2008)

Se puede observar que el estudiante compara tanto el antecedente como el consecuente, para realizar su respuesta.

María Andrea responde: “Si hacen el mismo juego, porque a cada uno le quedan faltando 6 tiros”. Ante esta respuesta, podemos observar que la estudiante ve la razón como una relación numérica entre el antecedente y el consecuente, ya que al preguntarle por qué considera que realizan el mismo juego ella justifica diciendo que realiza una resta ($10-4=6$ y $20-14=6$) y que como le da el mismo resultado por eso considera que es el mismo juego.

Indagando un poco más le preguntamos cómo entiende la expresión $\frac{4}{10}$, a lo ella responde que esto significa que de 10 tiros acertó cuatro, también le preguntamos por lo que entiende por la expresión $\frac{14}{20}$, dando como respuesta que de 20 tiros acertó 14, posteriormente le preguntamos si ella consideraba que ambos habían hecho el mismo juego, dando por respuesta que no, que uno de ellos había acertado mas tiros que el otro jugador y que los

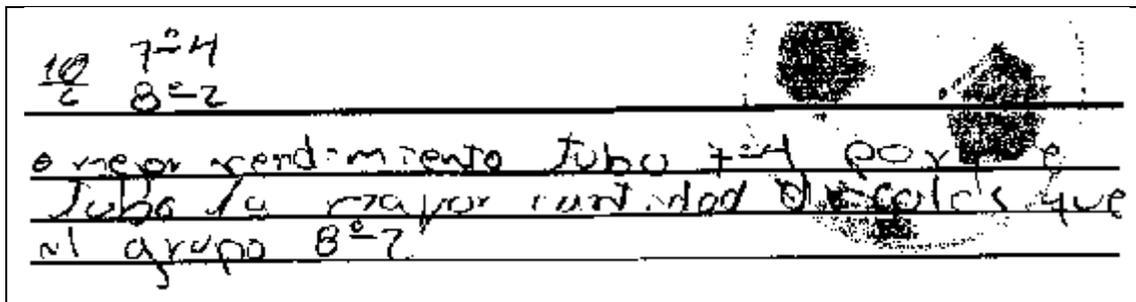
¹ Para Piaget, es la posibilidad de concebir simultáneamente dos relaciones inversas.

dos habían fallado en la misma cantidad de tiros. Vergnaud, citado en Gómez y Serrano (1999, p. 21), señala que este carácter de la razón, determina dos sentidos de la misma en problemas de comparación, puesto que una cosa es comparar razones y otra establecer la proporción entre dos o más magnitudes.

Otras de las situaciones que desarrollaron los estudiantes fue “Analistas de campeonato de fútbol”, la cual está enmarcada en el contexto de la Institución. Para esta situación presentamos a los estudiantes la información suministrada en tablas ya que como lo dice Linares (2003, p. 213) “las tablas son un instrumento que facilita la comunicación y explicación de las estrategias empleadas por los estudiantes”.

En esta situación inicialmente los estudiantes establecen las relaciones entre la cantidad de goles anotados por un equipo y la cantidad de goles anotados en la primera ronda en el grupo A, en este caso todos presentan diferentes formas de explicarlo, Gabriel lo manifiesta, expresándolo como un cociente explicándolo así:

- 41 Goles marcados por el grupo A
10 Goles marcados por 7-2



(Situación problema “Analistas de Campeonato”, 26 de agosto 2008)

Cabe anotar, que los estudiantes mostraron gran interés por desarrollar esta situación, ya que los niños disfrutaban de las situaciones recreativas en la Institución y en especial esta donde los campeones son el grupo 7-2 y es por esta razón que Marlon responde diciendo: “El mejor grupo que es 7-2, marcó 10 de 41”. Al respecto, señalan García y Serrano (1999, p. 27): “Conviene tener presente qué contextos (familiares, científicos y abstractos), y qué representaciones es conveniente utilizar en los distintos

niveles escolares, pues cada uno de ellos ofrece al estudiante la posibilidad de avanzar a diferente ritmo en el dominio de competencias en el campo de la proporcionalidad”.

El mejor grupo que...

(Situación problema “Analistas de Campeonato”, 26 de agosto 2008)

En otros de los puntos de la situación ya no les preguntamos a los estudiantes por la relación que pueden establecer entre dos datos, sino que les damos la relación entre dos datos para que ellos nos cuenten o nos expliquen qué significado le dan, veamos:

En el partido de 8-3 Vs 7-3 de la primera ronda, ¿qué significa decir que el marcador fue $\frac{4}{2}$?

Para dar respuesta a esta pregunta Marlon responde: “Que 8-3 marcó 4 goles y 7-3, 2 goles”. Él se apoya en los datos suministrados en la tabla.

que 8-3 marco 2 goles y 7-3 4 goles en el partido.

(Situación problema dos, 26 de agosto 2008)

Revisando las respuesta obtenida por Gabriel, dice: “Que el partido quedó 4 a 2 ganando 7-3”.

que el partido queda 4 a 2 ganando 7-3

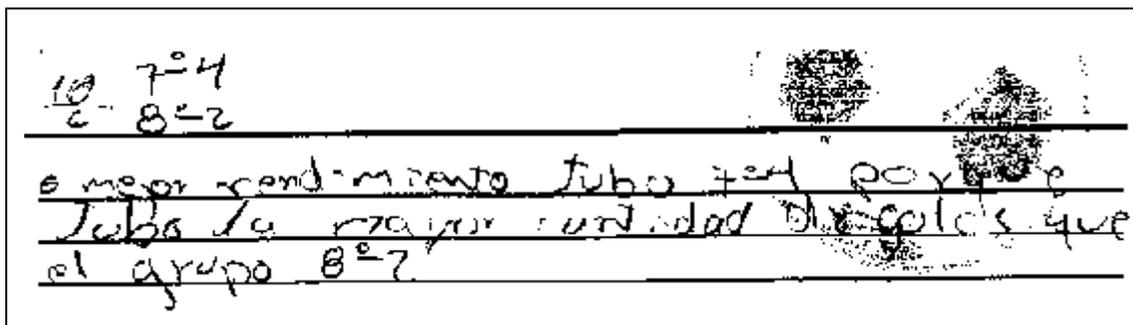
(Situación problema dos, 26 de agosto 2008)

Realizando una reflexión sobre las respuestas obtenidas por los estudiantes consideramos que iniciaban un acercamiento hacia la construcción del concepto de razón, por tal motivo consideramos necesario retomar la definición del concepto de razón en las que nos apoyamos para dar validez a las respuestas de nuestros estudiantes, partiendo de la definición de los autores: Freudenthal (1983), García, (1945,1995 y 1996)

La razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de las cantidades, expresa una comparación entre dos magnitudes relativas.

Para Freudenthal (1983 pp.6-7) pueden interpretarse como cocientes donde las razones formadas dentro de un mismo sistema son razones internas y son un número, las cuales las observamos en las primeras situaciones “Tiro al Blanco” y “analistas de campeonato de fútbol”, ya que los estudiantes establecen comparaciones entre tiros y tiros, goles y goles en la misma situación. Esto también se puede evidenciar en las siguientes respuestas:

Un ejemplo claro fueron las respuestas de Gabriel en la situación de analistas de campeonato de fútbol, al preguntarle por la relación que podía establecer entre los goles marcados por el grupo 7-4 y el grupo 8-2 en la primera ronda, dando como respuesta la siguiente expresión: $\frac{10}{6}$ y lo cual explicó diciendo que de diez goles anotados por el grupo 7-4, el grupo 8-2 realizó seis.



(Situación problema dos, 26 de agosto 2008)

Aquí Gabriel expresa la relación como un cociente en un mismo sistema, es decir la relación la establece entre cantidades. En este caso, él tiene en cuenta la cantidad de goles

anotados por los dos equipos en el campeonato y lo representa en el sistema de representación simbólico².

Para Llinares (2003, p. 203) Las representaciones son instrumentos para comunicar, pensar, calcular y compartir información, donde las actividades que están vinculadas con éstas son las de construir e interpretar.

Consideramos que esto no es suficiente para dar por hecho que los estudiantes han construido el concepto de razón, porque además de las relaciones que deben establecer, deben en primer lugar identificar cada una de estas relaciones de manera cualitativa (García y Serrano 1999, pag. 25). Lo cual fue posible observar en la situación: “día de mercado”, diseñada y pensada en el contexto del día a día de los estudiantes.

En esta situación encontramos como los estudiantes aplican el concepto de razón para establecer relaciones entre la cantidad de libras de arroz que consume la familia en un día con la cantidad de libras que consume en un mes, encontramos que Brandon establece la relación representándola como un cociente $\frac{15}{0.5}$, donde argumenta en la entrevista que el 15 corresponde a la cantidad de libras en un mes y 0.5 a la cantidad de libras consumida en un día.

La representación que obtenemos da cuenta de una relación que se establece entre las mismas magnitudes (libras-libras) la cual corresponde a una razón interna.

Pero en esta situación encontramos que los estudiantes también construyeron razones externas, las cuales son consideradas por Freudenthal (1983, pp. 6-7) como un cociente expresado entre dos sistemas diferentes (entre dos magnitudes) y el cual es considerado como una magnitud, estas las evidenciamos cuando los estudiantes establecen comparaciones entre la cantidad y el tiempo. En una de las situaciones debían encontrar

² Posada y Villa (2006, p. 133) En el registro simbólico los objetos son símbolos que generalmente pertenecen a nuestro alfabeto, en ocasiones al alfabeto griego, los números indo-arábigos, los signos de las operaciones y relaciones aritméticas y signos de agrupación.

cuánta panela consumirá la familia en los próximos tres meses, para encontrar la respuesta a esta situación el estudiante parte de conocer la cantidad para un mes, Gabriel propone: “como ya sabemos cuánto cuesta la panela para un mes lo multiplicamos por 3 y encontramos el resultado”.

3. El padre de Anibal quiere que le cuentes cuánta panela consumirá su familia durante los próximos 3 meses, el padre consumirá 45 libras ahora explícale lo que realizaste. multiplique porque si consumir 15 libras en un mes entonces en 3 meses consumirá 45 libras.

(Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Las situaciones los viajes de Gulliver y el juego de la escalera nos permitieron verificar que los estudiantes habían construido el concepto razón, ya que en preguntas como: Cuál es la razón entre la medida de la estatura normal de una persona y la medida de su estatura en Liliput?, Brandon responde: una razón es una comparación y lo puedo representar así: $\frac{180cm}{15cm}$, donde la estatura de la persona normal es 180cm y la de una persona en Liliput es 15 cm.

$$\frac{180}{15}$$

(Situación problema cuatro , 23 de septiembre 2008)

En el juego de la escalera presentamos el siguiente problema: Si con 8 limones se prepara un litro de limonada, ¿cuál es la razón entre la cantidad de limonada y los limones utilizados en su preparación?

Para este problema los estudiantes utilizan la representación de la razón como un cociente: $\frac{1l}{8}$, donde comparan los litros con la cantidad de limones.

Podemos evidenciar como en todas las situaciones problemas, el concepto de razón se abordó desde diferentes contextos permitiendo a los estudiantes la construcción del concepto. Muestra de esta construcción, es que tienen en cuenta las magnitudes, las unidades de medida y relacionan tanto razones internas como externas.

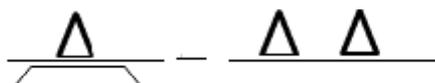
FAVORECIENDO EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Partir de la construcción del concepto de *razón*, era una base que queríamos utilizar para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional. Este, es considerado por Lesh(1988 .p1) como una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariedad y de comparaciones múltiples, así como la habilidad de acumular y procesar mentalmente varios fragmentos de información, se encuentra muy relacionado con la inferencia y la predicción e involucra ambos métodos de pensamiento: el cualitativo y el cuantitativo.

Este razonamiento matemático, es considerado por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, (2007 p. 77) como el razonamiento relacionado con la manera como los estudiantes dan cuenta del *cómo* y el *por qué* de los procesos que siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos en el tratamiento de problemas, formular hipótesis, hacer conjeturas y expresar matemáticamente los patrones encontrados, utilizar argumentos propios para exponer ideas.

Para lograr el razonamiento proporcional Freudenthal, citado por Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto y Miller. (1998, p. 3), propone tres tipos de tareas: Una de ellas, lleva al estudiante a solucionar problemas de predicción cualitativa y comparativa, que requieren de comparaciones independientes de valores numéricos.

Este tipo de problemas no requieren de valores para comprender lo que ocurre, la solución está basada en comparaciones. Al plantearles una equivalencia de tipo gráfico en el contexto de lo geométrico, en la que debía comparar la fracción inicial, para llegar a completarla, los estudiantes nos cuentan cual es la figura adecuada correcta que cumple la equivalencia.



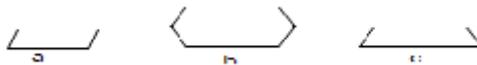
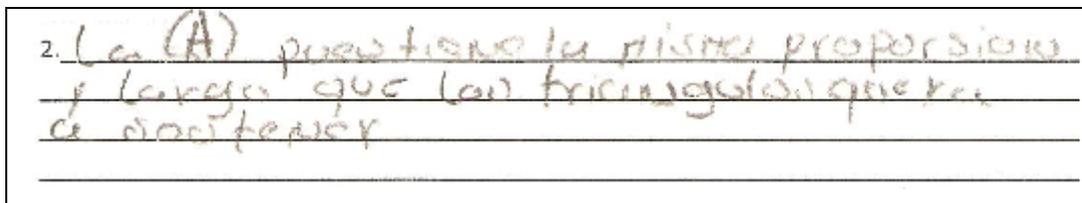


Figura 18. Actividad diagnóstica punto 2, 22 de julio 2008

En las respuestas que encontramos, optaban por elegir la opción “a”, porque consideraban que correspondía a dos triángulos y que formaban la misma figura. Es el caso de Marlon, quien da por respuesta: la figura “a” argumentando que tiene la misma porción y el mismo largo de los triángulos posicionados encima.



(Actividad diagnóstica, 22 de julio 2008)

Indagando por otras respuestas consideramos la expuesta por Kevin: La figura “a” argumentando que esta era la mejor opción por la cantidad de espacio que ocupa, ya que de igual forma ocupa los dos triángulos.

(Entrevista actividad diagnóstica, 22 de julio 2008)

Pretendíamos que los estudiantes encontraran la solución estableciendo relaciones de equivalencia, manipulando las figuras hechas con papel para encontrar la figura adecuada. Encontramos que para la solución centraron su atención solo en los triángulos, no consideran el concepto de equivalencia y no tienen en cuenta la relación inicial que se da entre dos figuras diferentes en forma: un triángulo y un trapecio y solo realizan un análisis parcial de la situación, considerando aspectos como la cantidad de figuras o el espacio ocupado por la figura.

Para encontrar la respuesta, fue necesario en la socialización explicar a los estudiantes que se trataba de una relación de equivalencia e indagar un poco más por este concepto, para finalmente encontrar la opción que cumplía la relación de equivalencia. Al abordar nuevamente este concepto, también hicimos de énfasis en la comprensión del

significado del símbolo “igual”, ya que los estudiantes consideraban que lo que estaba en un lado era igual a lo del otro lado. .

En la actividad diagnóstica ellos debían encontrar la cantidad de tiras necesarias que formaban el rectángulo “a” para cubrir el rectángulo “b”³.

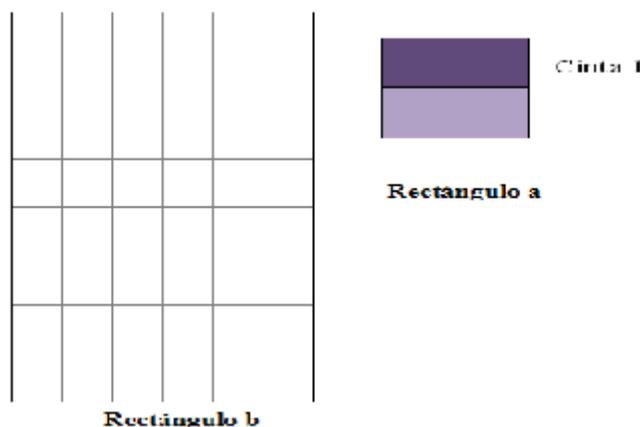


Figura 19. Actividad diagnóstica punto cuatro

Los estudiantes María Andrea y Marlon llegan a la respuesta usando diferentes estrategias

En las siguientes respuestas, se evidencian diferentes formas de llegar a la solución: María Andrea y Brandon responden:

“para saber cuántas tiras necesito, calculo los cuadraditos que tapaba cada cinta y continúo sobreponiendo la cinta en el rectángulo “b” hasta que quedara totalmente cubierto”.

(Entrevista actividad diagnostica, 22 de Julio 2008)

Marlon justifica: necesito 20 tiras, porque cada tira del rectángulo “a” cubre cuatro espacios del rectángulo “b”, esto lo comprendí porque empecé cubriendo el rectángulo “b” con dos, conté cuantas casilla me faltaban por cubrir, entonces multipliqué las dos cintas por los cajones que me faltaba por cubrir.

³ El rectángulo “b” estaba diseñado de tal forma que la cantidad de tiras que formaban el rectángulo “a”, cabían un número exacto de veces.

Finalmente Kevin responde: multipliqué los espacios del cuadrado “b”, por la cantidad de cintas, (o sea dos). Colocando cada cinta sobre el rectángulo “b”, me di cuenta que me cubría 4 cuadraditos del rectángulo “b”, entonces las dos cintas me cubrían 8 y contando pude determinar cuántas cintas necesitaba para cubrir todo el rectángulo “b”.

Podemos ver como cada uno de ellos la estrategia principal que emplearon fue la de tomar cada una de las tiras y compararlas con el rectángulo “b” para encontrar cuantas tiras necesitaban para cubrirlo totalmente. Evidenciamos entonces como la percepción espacial, considerada por Feria (2006) como la destreza para determinar las relaciones presentes en dos o más objetos, fue la estrategia más utilizada por los estudiantes, para encontrar soluciones a este punto cuatro. Este tipo de comparación utilizada por los estudiantes, hace parte del razonamiento intuitivo, por ser una estrategia que utilizan para llegar a la solución de esta situación, sin tener en cuenta premisas anteriores.

Continuando con lo propuesto por Freudenthal, otra tarea que logra el razonamiento proporcional en los estudiantes, son los problemas de comparación numérica, donde se dan dos razones completas y no se pide una respuesta numérica sino comparar las razones. En las situaciones tiro al blanco y analistas de campeonato de fútbol observamos como los estudiantes al realizar comparaciones se iban acercando al concepto de razón, pero en el caso de los viajes de Gulliver, establecían la razón entre la medida dos estaturas (la de una persona normal y la medida de la estatura de la misma persona en Brobdingnag). Para dar respuesta a esta situación ellos, realizaban una comparación entre la medida de las dos estaturas, para concluir que la razón es $\frac{180}{2160}$, lo cual es explicado por Marlon como:

“la razón entre la medida de la estatura normal de una persona y la medida de la estatura de una persona en Liliput es de 180cm a 2160cm”.

(Situación problema cuatro , 23 de septiembre 2008)

Respecto a la pregunta: “Si un estudiante permanece 16 horas despierto y dedica 8 horas a estudiar, encuentra la razón entre la cantidad de horas que permanece despierto y la

cantidad de horas que se dedica a estudiar”, establecieron comparaciones entre las magnitudes dadas, para dar como respuesta que la razón era: $\frac{16}{8}$.

Brandon nos explicó que “la razón es de 16 horas que permanece despierto y 8 horas las dedica a estudiar”.

(Entrevista: Juego de la escalera, 24 de octubre)

Cabe anotar, que en ambas situaciones los estudiantes no utilizan unidades para expresar las relaciones, en las entrevistas ellos sustentan que no escriben las unidades porque no lo tuvieron en cuenta. En concordancia con lo que propone Chamorro (2003, p. 236) consideramos que es este uno de los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes en el ámbito de la medida, “el olvido” a la hora de expresar una medición, de la o las unidades es decir de aquello que es básico para la determinación de la aplicación medida. Continúa diciendo, que para la constitución de la unidad, se distinguen ciertos pasos, para sustentar las respuestas de los estudiantes, sólo hacemos mención de uno de ellos: “Ausencia de la unidad, considerado como una medida puramente visual y comparativa”.

Los estudiantes están comparando estas relaciones entre sí, pero si introducen un tercer objeto, en este caso las unidades, dicha comparación se complica.

Lesh y otros, citados por Botero y Obando (2006. P80) consideran que, las situaciones que generalmente implican razonamiento proporcional son aquellas en las que se encuentran productos, razones y proporciones tales como: equivalencias entre fracciones, porcentajes, conversiones de medidas, velocidades, razones de cambio, funciones, entre otras.

A lo largo de la sistematización de nuestra propuesta pedagógica pudimos evidenciar, otras situaciones donde los estudiantes debían realizar conversiones de medida realizando multiplicaciones o divisiones, abordadas en la situación del día de mercado. Realizamos paso a paso el seguimiento para comprender cómo encontraban los datos que

hacían falta en la tabla, en la cual estaban la cantidad de los productos que consumía la familia, expresados en kilos o libras. Al primer producto que debían hacer dicha conversión era el arroz, donde conocían la cantidad en libras.

Marlon responde: “las 15 lb de arroz corresponden 7.5 k”

Kevin da como respuesta: “para encontrar la cantidad de arroz expresada en kl, solo se rebaja la mitad de las libras de arroz,”

María Andrea agrega: “si son dos libras para encontrar los kilos se le quitan la mitad y si son kilos para encontrar las libras se le suma la misma cantidad”.

(Entrevista: situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Para realizar las demás conversiones los estudiantes recurrieron a la misma estrategia para pasar de libras a kilos: le quitaban la mitad a las libras y para pasar de kilos a libras le sumaban la mitad de lo que tenían.

PRODUCTOS DEL MERCADO			
Producto	Cantidad en kl	Cantidad en gr	Precio
Arroz		15 libras	18000
Lenteja	1 kilo		3200
Frijoles	3 kilos		14400
Azúcar		6 Lb	1500
Mantequilla	1,5 kilos		6600
Panela	7,5 kilos		20500
Aceite	4000 cc		22000
alverja		2lb	2400
Papa		30 lb	21000
jabón	640gr		6400

Figura 20. Tabla situación Día de Mercado

Podemos evidenciar cómo algunos de los procedimientos empleados en esta situación por los estudiantes son de tipo aditivo, pues no utilizaban la multiplicación o la división sino que recurrían a sumas en el caso de la multiplicación y restas en el caso de la división.

Hallar la solución de las situaciones mediante sumas reiteradas, es un procedimiento recurrente en los estudiantes, que analizaremos más adelante en la categoría: “*Hacia la Estructura multiplicativa: Rupturas en la Estructura Aditiva*”.

La última de las tareas propuestas por Freudenthal para alcanzar el razonamiento proporcional, son los problemas donde se dan tres datos y la tarea consiste en encontrar el cuarto, estos problemas también llevan al estudiante a comparar magnitudes entre diferentes cantidades. Otra de las situaciones que abordaron los estudiantes donde falta el cuarto dato, se refiere a encontrar la cantidad de arroz que debe consumir “la familia de Aníbal” en un día, a la que responden:

Gabriel razona así: “ $\frac{1}{2}$ libra porque son 15 libras y un mes trae 30 días, entonces 15 libras los dividimos a la mitad”.

María Andrea: razona de forma similar sólo que enfatiza en que divide por dos: “Consumo media libra diariamente porque son 15 libras y 30 días, entonces se divide en dos”.

Marlon: por su parte habla de gramos “250 gramos que equivalen a media libra, porque si consumen 1 libra por día solo alcanzaría para 15 días, entonces tienen que doblar la cantidad para que alcance para los 30 días. Es decir repartir una libra para dos días.”

De igual forma preguntamos a los estudiantes por la cantidad de dinero que deben pagar “la familia de Aníbal” por la cantidad de arroz que consume en un día. A lo que responde:

María Andrea: “600 \$, porque divido el total por 30 días”.

Gabriel: “600 \$, para un día les cuesta el arroz”.

Marlon: “Como diariamente se comen media libra de arroz, entonces se puede encontrar el precio de una libra y se divide por dos para encontrar el precio de un día”.

(Entrevista: situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Vemos ante la respuesta de Marlon, que él comprende la multiplicación como una relación entre las cantidades involucradas en la situación.

Estos problemas son considerados por Vergnaud (1983, p54) como problemas de estructura multiplicativas los cuales se clasifican en la categoría de isomorfismos de medidas en la subclase de división que lleva al estudiante a encontrar el valor de la unidad, conociendo la cantidad de arroz consumida en un mes.

Podemos evidenciar como los estudiantes encuentran el valor unitario el cual recobra gran importancia en el estudio de la proporcionalidad ya que éste se convierte en la constante de la proporcionalidad, ya que como lo citan Botero y Obando (2006. P84)

...al establecer una razón constante que determina la dependencia funcional de un espacio de medida con respecto al otro, expresa la cantidad de unidades que se debe tener en uno de los espacios, por cada unidad tomada en el otro.

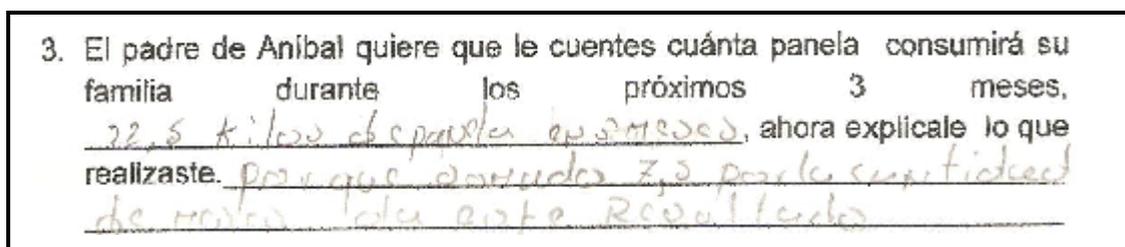
Para la situación propuesta a los estudiantes la media libra de arroz significa que es lo que consume la familia de Aníbal en un día y que se puede evidenciar en la respuesta de María Andrea al considerar que son 15 lb para 30 días, y que media libra es lo que se consume por día. Este tipo de razonamiento es un proceso básico de la fase 4 según lo propuesto por Lesh y otros. Éstas también se evidencia en la situación donde los estudiantes encontraron la cantidad de panela que consumirá la familia durante los próximos tres meses utilizando la multiplicación:

Gabriel argumenta que: “como ya sabemos cuánto cuesta la panela para un mes lo multiplicamos por 3 y encontramos el resultado. Multipliqué, porque si consume 15 libras en un mes, entonces en tres meses consumirá 45 libras.

3. El padre de Aníbal quiere que le cuentes cuánta panela consumirá su familia durante los próximos 3 meses, el padre consume 15 libras, ahora explícale lo que realizaste. multipliqué porque si consume 15 libras en un mes entonces en 3 meses consumirá 45 libras.

(Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Marlon: 22.5 kilos de panela en 3 meses. Porque sumando 7.5 por la cantidad de meses da este resultado.



(Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Podemos ver como el resultado lo expresan en diferentes unidades de medidas. Este problema también pertenece a los problemas de subclase de multiplicación. Además, cuando el estudiante razona sobre situaciones que ponen en juego relaciones de proporcionalidad, es importante pensar que en las relaciones aditivas y multiplicativas hay cambios absolutos y cambios relativos, estos últimos están vinculados con el razonamiento proporcional y el concepto de razón como índice comparativo entre dos cantidades, lo fundamenta.

Llinares aclara: “Una de las características en las que se den relaciones de proporcionalidad, es la capacidad para analizar cambios relativos y absolutos, que están vinculados a realizar comparaciones aditivas y multiplicativas”. Pero como habíamos mencionado anteriormente, el análisis de este aspecto, también se hará de manera detallada en la siguiente categoría.

En el “juego de la escalera” que era una situación donde se incluían conceptos trabajados en las anteriores situaciones, los estudiantes debían encontrar el precio de 8 chocolatinas, relacionando entre sí los valores de medidas pero en este caso los datos estaban suministrados en la tabla como se muestran a continuación:

a. Explica cómo encontraste el valor de las ocho chocolatinas.

No. De Chocolatinas	Precio
4	2.400
8	

“La representación tabular permite a los estudiantes identificar la relación cuaternaria, entre los espacios de medidas y les facilita encontrar el valor que hace falta”. (García, 2005 p. 56)

Para esto Gabriel responde: “4800, porque si cuatro son 2400, las 8 son el doble. Brandon acierta diciendo que el precio son 4800, ya que 8 son el doble de las 4 que ya conoce el precio”.

(Entrevista: Juego de la escalera, 24 de octubre)

A partir de este tipo de representación, se manifiestan dos procedimientos⁴ para hallar el segundo valor. En la respuesta que da Gabriel podemos observar, que su lectura de la tabla es comparativa, por medio de esta comparación él relaciona las secuencias numéricas 4 y 8, la vuelve una unidad compuesta múltiple 4×2.400 , para interpretar la situación en términos de esta unidad.

Para que los estudiantes avancen hacia la multiplicación, se les propone que aborden una nueva situación donde debían encontrar el valor de siete galletas, con el fin de que verificaran si la estrategia anterior servía en la siguiente, para esto los estudiantes responden:

No. De Galletas	Precio
4	3600
7	
8	7200

⁴ El primero es determinar dentro de un mismo espacio de medida el factor que opera, sobre el primer valor del espacio, para producir otro.

Marlon: “una de las formas más fácil es conocer el valor de cada galleta, este lo puedo encontrar dividiendo 3600 por 4 y encuentro el valor de las siete”.

(Entrevista: Juego de la escalera, 24 de octubre)

Considerando nuevamente los problemas que favorecen el razonamiento proporcional: “*aquellos de comparaciones numéricas, donde se dan dos razones completas y no se pide una respuesta numérica sino compararlas*”; podemos encontrarlos, en la situación “*Día de Mercado*”, donde los estudiantes realizaron una comparación de las razones que establecían entre la cantidad de libras de arroz que consumía una familia al día y la cantidad de arroz que consumía en un mes, con la razón que establecieron entre la cantidad de Kilos de arroz que consume la familia en un día y la cantidad de Kilos de arroz que consume en un mes.

Evidenciamos algunas dificultades para llegar a conclusiones a partir de la comparación de estas dos razones ya que los estudiantes las veían de forma aislada, comprendían ambas relaciones, pero no consideraban que se trataban de las mismas cantidades, porque las encontraban expresadas en unidades diferentes. Después de realizar discusiones en torno a lo que representaban, concluimos finalmente que se trataba de la misma cantidad, solo que se expresaba en diferentes unidades.

Aunque conocíamos que el nivel de complejidad era bastante alto, pretendíamos que ellos avanzaran hacia el concepto de proporción, partiendo en un primer lugar de las relaciones que hicieran entre las razones, para llegar a dicho concepto.

Consideramos que los estudiantes no establecían relaciones entre las unidades de medidas, lo cual puede estar ligado a la forma como se ha abordado el tema en las anteriores clases de matemáticas, ya que como lo considera Chamorro (2003.p 230) “...abordar el sistema métrico decimal sin haber tratado previamente el cambio de unidades no convencionales, dificulta, y puede llegar a imposibilitar, la comprensión de las regularidades propias del mismo”.

Una de las formas de representación que los estudiantes emplearon fueron:

- para la primera relación: $\frac{250\text{gramos}}{15\text{libras}}$
- para la segunda relación: $\frac{\frac{1}{4}\text{dekilo}}{7.5\text{kilos}}$

(Entrevista: situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Después de contemplar estas evidencias construidas por los estudiantes podemos considerar cómo avanzaron en el desarrollo del razonamiento proporcional al enfrentarse con diferentes situaciones que requerían de un razonamiento cualitativo hasta avanzar a un razonamiento cuantitativo, lo cual estuvo mediado por la construcción del concepto de razón, que es abordada desde diferentes contextos y de una forma dinámica; esto se puede evidenciar en las diferentes situaciones como son el día de mercado, los viajes de Gulliver y el juego de la escalera, llevándolos a establecer relaciones y comparaciones entre las magnitudes, donde los y las estudiantes en las diferentes situaciones identifican las variables, las relaciones de variación que se establecen entre ellas, y relaciones de igualdad, es decir de equivalencia entre las razones, al ser la razón el paso previo al concepto de proporcionalidad. Por lo tanto las relaciones multiplicativas representan gran importancia en el desarrollo del razonamiento proporcional, ya que permiten el tratamiento de la variación.

HACIA LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA: Rupturas en la Estructura Aditiva

En la solución de situaciones de tipo multiplicativo, la mayoría de los estudiantes no utilizaron la multiplicación, sino que emplearon la suma reiterada para resolverlas. Un aspecto que debe tenerse en cuenta, es que este procedimiento de sumas reiteradas, en el grado séptimo tendría que haber sido ya superado por dos razones: la edad y el recorrido académico⁵.

Aunque sea una forma natural que utilizaron y no lo consideramos como un procedimiento errado, es necesario que superen dichos procedimientos aditivos y aprendan los multiplicativos, con el fin de avanzar hacia la proporcionalidad, porque todas las situaciones típicas de la multiplicación son en sí mismas, situaciones de proporcionalidad directa, citado por Obando y Botero, (2006, p.78).

Señalan además Obando y Botero (2006, p. 79), que desde el punto de vista cognitivo, las relaciones aditivas se identifican con el conjunto de procesos que permite el tratamiento secuencial de las variaciones posibles en una determinada clase, mientras que las relaciones multiplicativas están determinadas por los procesos que permiten el tratamiento simultáneo de la variación de diferentes clases correlacionadas entre sí. Es así como argumentan que el razonamiento proporcional implica el tratamiento de relaciones de covariación⁶ entre variables y por lo tanto, está en estrecha relación con las relaciones multiplicativas antes que con las aditivas.

⁵ Recordemos que los esquemas operatorios formales aparecen alrededor de los 12 años, cuyo análisis implica un sistema de cuatro transformaciones, aunque el sujeto no tenga conciencia de que exista esa estructura como tal. (Dcto: Psicología del Niño, p. 140)

⁶ Dos o más variables relacionadas de tal forma que el cambio en una determina cambios en la restante. (Obando y Botero, p. 81)

Otro aspecto a tener en cuenta, y que menciona Vergnaud (2003, p. 197), es el referente a las relaciones que comportan una multiplicación, siendo las más importantes las relaciones cuaternarias. Argumenta dicho autor, que la primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo.

De acuerdo con esta última idea, presentamos algunas preguntas hechas en las diferentes situaciones⁷ y que son ejemplo de este tipo de relación:

- El padre de Aníbal quiere que le cuentes cuánta panela consumirá su familia durante los próximos 3 meses.
- Ahora él quiere saber, cuánto dinero necesita para comprar la panela para los próximos tres meses.
- Camilo tiene \$2000 en billetes y quiere tenerlo en monedas de \$100, para jugar maquinas. ¿Cuántas monedas de \$100 necesita Camilo?
- En el aula de clase, por cada 3 alumnos hay 6 alumnas. Si el número de alumnos es 9, ¿Cuántas alumnas tiene el aula?

Siguiendo con el análisis que hace Vergnaud (2003, pp. 197 y 209) de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división, él muestra que los problemas “simples” de este tipo, se sitúan en el marco de dos grandes categorías:

- Isomorfismo de Medida
- Producto de Medida

El Isomorfismo de medidas es una estructura que engloba a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. Para representar de forma cómoda esta estructura Vergnaud utiliza las tablas de correspondencia:

⁷ Cada pregunta pertenece a una situación diferente, por lo consiguiente su nivel de complejidad iba aumentando a medida que se abordaba una nueva situación.

$$\begin{array}{l} M_1 \text{-----} M_2 \\ x \text{-----} y = f(x) \\ x' \text{-----} y' = f(x') \end{array}$$

Al darles una tabla donde se daban algunos datos para que los estudiantes la completaran se les hace diferentes preguntas, con el propósito de que logran hacer las conversiones de una unidad a otra diferente.

PRODUCTOS DEL MERCADO			
Producto	Cantidad en l	Cantidad en gr /lb	Precio
Arroz		15 libras	18000
Lenteja	1 kilo		3200
Frijoles	3 kilos		14400
Azúcar		6 lb	4500
Mantequilla	1,5 kilos		6600
Panela	7,5 kilos		20.500
Aceite	4000 cm ³		16700
Arveja		2lb	2400
Papa		30 lb	21000
Tabón		6400gr	6400

Ante la pregunta: “El padre de Aníbal ahora quiere saber cuánto dinero necesita, para comprar la panela que utilizará en los próximos tres meses”.

Brandon, María Andrea y Marlon coinciden en responder: “sumamos lo de un mes, tres veces”.

(Entrevista: situación problema tres , 23 de septiembre 2008)

A partir de esta respuesta, observamos que resuelven la pregunta utilizando sumas reiteradas. Al sumar ese número varias veces, ellos lo manejan como un cardinal. Estos estudiantes, siguen un procedimiento aditivo, que son típicos de la tercera fase identificada por Lesh, referente al razonamiento proporcional: “Esta fase se caracteriza por el uso de estrategias centradas en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades, pero desde una perspectiva aditiva” (Obando y Botero, 2006 p.80)

Retomando la pregunta realizada anteriormente, en la respuesta de Gabriel podemos distinguir el espacio M_1 ⁸ “meses” del espacio M_2 “precio”. Él utiliza el algoritmo de la multiplicación y el operador escalar “por 3” que relaciona los dos términos en el mismo espacio de medida, en este caso “meses”, veamos:

3.1 El padre de Anibal ahora quiere saber cuánto dinero necesita para comprar la panela para los tres meses: necesitará 61.500, cuéntale como lo realizaste: multiplique porque si necesitan 20.500 para la panela de un mes

(Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Él halla el precio de la panela y argumenta que multiplicó, manejando dos valores numéricos pertenecientes a dos espacios de medida diferenciados. Los números que representan la cantidad de meses son 1 y 3, que son medidas, los números que representan el precio, 20.500 y 61.500, también lo son pero de otra naturaleza, representan la cantidad de dinero que se gastará en determinado tiempo. Esto lo podemos representar así:

$$\begin{array}{r} M_1 \text{ ————— } M_2 \\ 1 \quad 20.500 \\ 3 \text{ — } 61.500 \end{array}$$

Expresa García (2005, p. 57) que las *rupturas* entre el campo multiplicativo y el aditivo, son necesarias para poder desarrollar competencias complejas multiplicativas. Y señala como primera ruptura:

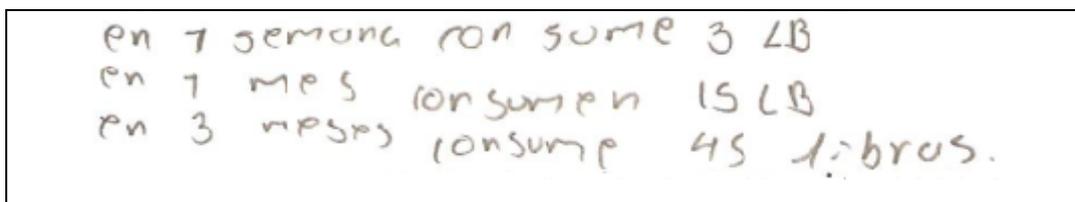
“La adición tiene que ver con situaciones que relacionan partes y un todo y en las que se unen o separan objetos o conjuntos. Mientras que las situaciones relativas a la multiplicación, tiene que ver con la relación que se debe mantener constante entre dos variables o magnitudes de diferente naturaleza”.

La segunda ruptura nombrada por García, es la relativa a los contextos donde aparecen los problemas de proporción simple o múltiple, pues obligan a establecer la relación con la conceptualización de las magnitudes y sus medidas, con un nuevo sentido del número.

⁸ Espacios de medida diferentes, o espacios donde las unidades de medida son diferentes.(García, 1999, p.18)

Al establecer estas rupturas entre los procedimientos aditivos, que permiten a los estudiantes llegar a los problemas multiplicativos, es necesario describir los cambios que se operan cuando pasan de los unos a los otros. Así por ejemplo, podemos observar como Gabriel en este momento, ha hecho una primera ruptura, ya que él multiplica dos valores numéricos de diferente tipo y maneja uno de los dos términos como operador⁹.

Debe tenerse en cuenta además, en las situaciones multiplicativas la función que relaciona las variables, por ser una relación que permite establecer que cuando el número de una cantidad aumenta y la otra también lo hace, es al mismo tiempo un nuevo significado de número debido a que en este caso se refiere a relaciones entre cantidades. (García, 2005, p. 57)



en 7 semanas	con sume	3 LB
en 7 mps	consumen	15 LB
en 3 mps	consumen	45 libras.

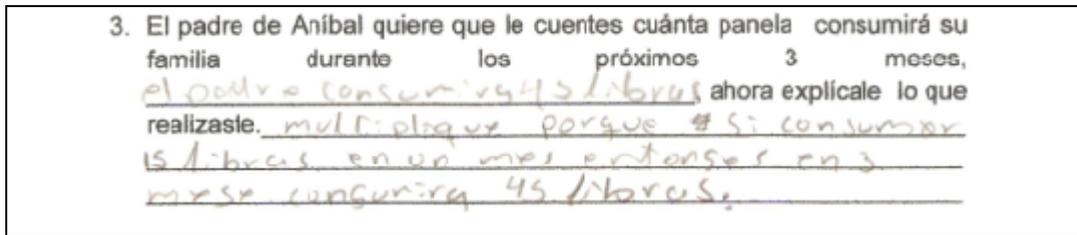
(Respuesta de Brandon, Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Uno de nuestros propósitos siempre fue, que los estudiantes establecieran relaciones, partiendo de aspectos cualitativos, para fortalecer los cuantitativos. En las primeras situaciones, las relaciones cualitativas se exploraron en gran medida. Las situaciones restantes, se centraron más en el manejo de aspectos cuantitativos, con el fin de desarrollar adecuadamente¹⁰ el razonamiento proporcional.

La respuesta dada por Gabriel evidencia el uso que él que hace de las relaciones entre cantidades:

⁹ La evidencia corresponde a la situación problema tres “día de mercado”, usada en la página anterior

¹⁰ A nuestro modo de ver esta es la forma en que se debería desarrollar dicho razonamiento.



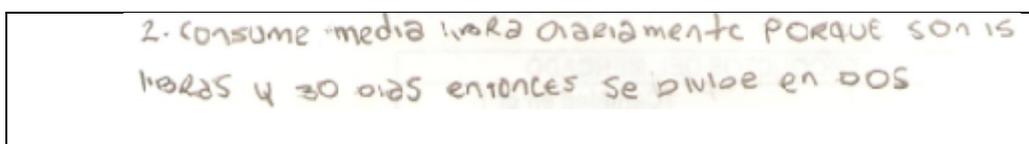
“Multipliqué, porque si consume 15 libras en un mes, entonces en tres meses consumirá 45”.

(Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

El estudiante es capaz de establecer, que cuando el número de meses aumenta, el consumo también. De acuerdo con García (2005, pp.57-58), el consumo de tres meses es una tercera variable que relaciona las otras dos, que no es real, como el número de meses o el producto. Es una relación que permite establecer que cuando el número de meses aumenta, su consumo también aumenta o viceversa y es al mismo tiempo un significado de número.

Respecto a la segunda ruptura mencionada por García y continuando en la misma situación “Día de Mercado”, ante la pregunta, “¿Cuántas libras de arroz consume la familia de Anibal en un día?”, coinciden en contestar “media libra”. Y lo sustentan de diferente forma:

María Andrea explica:



(Situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Argumenta Marlon: “250 gramos que equivalen a media libra, porque si consumen 1 libra por día solo alcanzaría para 15 días, entonces tienen que doblar la cantidad para que alcance para los 30 días. Es decir repartir una libra para dos días”.

(Entrevista: situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

Gabriel expresa: “si en un mes consumen 15 libras, por día se deben comer media libra para que alcance”.

(Entrevista: situación problema tres , 16 de septiembre 2008)

La situación muestra dos tipos de relaciones. Una relación funcional que vincula magnitudes diferentes como es consumo/día, y que refleja el sentido de la unidad de la razón, ya que $\frac{1}{2}$ es el consumo en un día. Existe también una relación entre cantidades de la misma magnitud, generando una razón escalar que es $\frac{30}{1}$ y expresa el paso de 30 días a 1 día, para encontrar el consumo diario.

El lenguaje utilizado por los estudiantes, aunque diferente en la forma de argumentar, expresa que han correlacionado las magnitudes presentes en la situación, teniendo en cuenta las relaciones entre las razones. Que un estudiante realice este tipo de rupturas entre el campo multiplicativo y aditivo, significa según García (2005, p. 57) que ha desarrollado competencias multiplicativas.

Razonar usando esas relaciones señala Llinares (2003, p. 209), tanto de manera cualitativa como cuantitativa caracteriza el razonamiento proporcional.

Después de abordar el Isomorfismo de medidas, retomamos otra de las categorías que cita Vergnaud; acerca de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división, a la que denomina “*Producto de Medida*”. Según este autor, esta forma de relación, consiste en una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es el producto de las otras dos en el plano numérico. (Vergnaud, 2003, p.211) puede ser representada como: $M_1 \times M_2 \times M_3$

Agrega Vergnaud (citado en Castro, E y Rico L, p. 57) que esta relación multiplicativa permite distinguir dos clases de problemas:

- *Multiplicación*: Encontrar la medida producto, cuando se conocen las medidas que lo componen.

➤ *División:* Encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra medida y la medida producto.

La siguiente pregunta, hizo parte de la situación “*Juego de la Escalera*” que se hizo con los estudiantes:

Si en tu ropero solo tuvieras dos pantalones y tres blusas ¿Cuántas combinaciones puedes encontrar?¹¹

Le correspondió el turno a Brandon, él hace un dibujo de las camisas y los pantalones y comienza a enlazar cada uno de los elementos, como se observa a continuación:

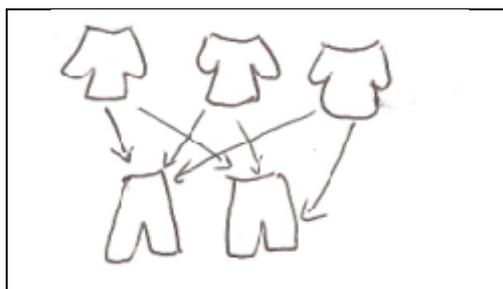


Figura 21. Socialización en la situación final el Juego de la escalera.

A partir de las parejas que forma, contesta: “son seis las combinaciones que puede hacer”.

Para el caso de los problemas de multiplicación, tenemos aquí dos conjuntos, el que corresponde a los pantalones y el que corresponde a las blusas. El tercer conjunto es el formado por las parejas¹² posibles, que es el producto cartesiano del conjunto de los pantalones por el conjunto de las blusas.

En palabras de Vergnaud, podemos decir, que los espacios de medida M_1 y M_2 se componen en un tercer espacio M_3 . Esta forma de relación consiste en una relación ternaria entre 3 cantidades de las cuales, una es el producto de las otras dos:

¹¹ En esta situación, se utilizó el juego de la escalera y por lo tanto, el jugador que quedara en una determinada casilla, era a quien le correspondía contestar la pregunta ubicada en dicha casilla, en caso de que no la contestara, quedaba a disposición de otro jugador para que la explicara.

¹² Nosotras nos referimos a la asociación de un elemento del primer conjunto con un elemento del segundo.

Número de parejas = 2 pantalones x 3 blusas

Para continuar avanzando sobre el razonamiento proporcional, era necesario seguir considerando el concepto de razón como guía, por lo tanto, los estudiantes debían continuar respondiendo otras preguntas, como las siguientes:

- a. Si con 8 limones se prepara un litro de limonada, ¿cuál es la razón entre la cantidad de limonada y los limones utilizados en su preparación?

Y escriben: $\frac{1}{8}$

- b. ¿Cuál es la razón entre la medida normal de la estatura de una persona y la medida de la estatura de un habitante en Brobdingnag?. Y escriben:

$$\frac{180}{15}$$

(Situación problema cuatro , 23 de septiembre 2008)

La respuesta, se realizaba a partir de la comparación de una tabla que los estudiantes debían completar antes de responder las preguntas. La tabla que completa Brandon es la siguiente:

Estatura persona normal	Medida de la estatura en Liliput	Medida de la estatura en Brobdingnag
180 cm	75 cm	27,6 m
144 cm	72 cm	1.728 cm.
12 cm	1 cm	744 cm
36 cm	3 m	432 cm
744 cm	72	1728 cm
2 cm	6 cm	864 cm

(Situación problema cuatro, 23 de septiembre 2008)

Pero para completarla, Brandon ha tenido que realizar la siguiente operación y luego consignarla en dicha tabla.

1. Si Gulliver mide 180 cm, ¿cuál será su medida en Liliput?

$$\begin{array}{r} 780 \\ 180 \overline{) 1360} \end{array}$$

(Situación problema cuatro, 23 de septiembre 2008)

Las respuestas da cuenta que el sentido del concepto de razón es entendido por los estudiantes, como un índice comparativo que proporciona información sobre una situación. Además vemos el avance que han tenido, cuando reconocen que en determinadas situaciones es posible aplicar este índice comparativo, lo cual permite desarrollar el razonamiento proporcional.

ARRIBANDO AL PUERTO

En este capítulo, queremos mostrar algunas conclusiones y recomendaciones que han surgido a partir de todas nuestras observaciones y se han concretado a partir del análisis de las categorías expuestas.

- ✚ La construcción del concepto de razón abordada desde aspectos cualitativos inicialmente, tales como la relación y comparación, se convierte en una forma adecuada para desarrollar el razonamiento proporcional, porque les permitió a los estudiantes partir de procedimientos usados de forma espontánea de las cualidades de las magnitudes y relacionarlas según dichas cualidades, para posteriormente abordarlas cuantitativamente, comparando las cantidades pertenecientes a cada magnitud, dando sentido a la razón y solucionando problemas de proporcionalidad, haciendo uso de comparaciones entre medidas tanto de la misma como de diferente magnitud.
- ✚ La construcción del concepto de razón permitió favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes, ya que al establecer comparaciones y relaciones entre dos o más magnitudes identificaron patrones de variación, lo cual es una característica del razonamiento proporcional. Cuando nos referimos a patrones de variación, significa que los estudiantes identificaron que cuando una magnitud aumenta o disminuye, la otra también lo hace.
- ✚ Teniendo en cuenta las fases propuestas por Lesh y otros en la construcción del razonamiento proporcional se puede evidenciar como los estudiantes avanzan en la construcción de dicho razonamiento ya que en la fase uno se hace presente en la actividad diagnóstica en los puntos: uno y dos, donde los estudiantes para su solución solo centraron su atención en una parte del problema y realizan un análisis parcial sin considerar aspectos importantes como era la relación que se presentaban entre los datos suministrados, la fase dos se hace presente en la situación tiro al

blanco y analistas de campeonato de fútbol ya que identifican en la situación tiro al blanco que la cantidad de aciertos dependen de la cantidad de lanzamientos realizados; se evidencia el avance en la fase tres en situaciones como el día de mercado donde identifican las variables, la correlación pero realizan procedimientos aditivos, lo cual se hace evidente al realizar conversiones de unidades de medida. Avanzan a la fase cuatro, ya que en situaciones como día de mercado, viajes de Gulliver y la actividad el juego de la escalera identificaron en los problemas donde intervienen cuatro datos como la variación en un espacio de medida implica cambios en otro realizando un análisis escalar y funcional. Finalmente en la fase cinco, los estudiantes realizaron comparaciones entre razones equivalentes, lo cual les permite avanzar a la comprensión de la proporcionalidad, al ser un paso previo para la identificación de la constante de proporcionalidad.

- Los estudiantes, tuvieron un acercamiento hacia la estructura multiplicativa, no solo porque en la solución de estas situaciones ya no utilizaban como estrategia las sumas reiteradas, sino también porque manejaron uno de los dos términos de la multiplicación como *operador*, pues se refirieron a las veces que el cardinal correspondiente a la primera variable, se repetía; por consiguiente, pasaron de consideraciones cualitativas a cuantitativas, porque ya no sumaron sino que utilizaron la multiplicación que es el punto de inicio de la proporcionalidad y para el caso de nuestro proyecto, la proporcionalidad simple directa.

Algunas recomendaciones:

- ✚ A pesar que desde los estándares básicos de competencias se propone el desarrollo del razonamiento proporcional a partir de gráficas, el análisis que hacemos es dirigido más hacia lo numérico y aritmético, lo cual se convierte en punto de partida para próximas investigaciones. El reto, para nosotros como profesores, es saber aprovechar esta información para desarrollar una instrucción más eficaz, insistiendo en aquellos aspectos que causan más dificultad en los estudiantes y diseñando estrategias para la facilidad de las mismas. Conceptos como la razón enfocados solo para encontrar proporciones, deben ser evaluados para ser enseñados de una manera más dinámica, logrando que el estudiantado desarrolle competencias.
- ✚ Es necesario realizar un recorrido por los diversos niveles de representación, que utilizan los estudiantes cuando aprenden el concepto de razón. Ya que a través del reconocimiento de las características de los objetos matemáticos se logra su clasificación, establecimiento de relaciones y se obtiene conocimiento. De esta manera, recomendamos la importancia de este recorrido en próximas investigaciones, donde se hagan evidentes los nombrados niveles de representación, no sólo por ser instrumentos de comunicación, sino también como lo afirma Vergnaud, por ser instrumentos de organización de experiencias y de conceptualización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alatorre Frenk. (Diciembre 2004). Tesis Doctoral de Silvia *¿A, B, o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional*

Ben, Fey, Fitzgerald, Benedetto & Miller. Tesis (1998). *El razonamiento proporcional en alumnos de 7º grado con diferentes experiencias curriculares*. Tesis

Bonilla, E & Rodriguez, P. (1997). *Más allá del dilema de los métodos. La investigación en ciencias Sociales*. Bogotá: Ediciones Uniandes-Editorial Norma

Butto- Rojano (2004). *“Introducción temprana del pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría”*

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Prentice Hall

Da Ponte, J.P. (2006). *Estudos de caso em educação matemática*. Recuperado en mayo 10, 2009 disponible en [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20\(Estudo%20caso\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf).

Diaz, Soto & Martínez (2007). *Razonamiento Proporcional Intuitivo en alumnos de primaria y secundaria*. *Revista Interamericana de Psicología/Interamerican Journal of Psychology* .

Falsetti, Rodríguez, Carnelli & Formica (2006). *Perspectiva integrada de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: una mirada al campo disciplinar de la Matemática*. *Revista Iberoamericana de educación matemática*.

Freudenthal, H. (1983). *Ratio and Proportionality*. En Didactical Phenomenology of Mathematical Structures Reidel, Dordrecht. Traducción de trabajo realizada por el profesor Luis Puig de la Universidad de Valencia (España).

García, G & Serrano, C (1999) *La Comprensión de la Proporcionalidad*, una Perspectiva Social y Cultural. Asociación de Matemática Educativa. Cuadernos de Matemática Educativa No. 3. Grupo Editorial Gaia. Bogotá.

García, Castiblanco & Vergel (2005). *Prácticas de Evaluación en las Clases de Matemáticas En La Educación Básica*. Universidad Pedagógica Nacional. Colciencias.

Gimenez, Diez, Palomar, Civil, Ambrosio, Fitzsimuns, Garcia, Lopez, Planas, Skovsmose, Valero.(2007). *Educación matemática y exclusión*. Editorial Graó, primera edición.

González García (Diciembre 2005): *Manifestaciones de Comprensión que Reflejan Profesores y Estudiantes de Bachillerato en Actividades que Involucran Razonamiento Proporcional*

Guacaneme, E. (2001). Estudio didáctico de la proporción y proporcionalidad. Una aproximación a los aspectos matemáticos. Tesis de maestría no publicada. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Jaramillo, D. (2003) Documento: *La práctica pedagógica en matemáticas: hacia la reflexión e investigación en la clase de matemáticas*. Facultad de educación universidad de Antioquia.

La torre & otros (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics

Llinares (2003) Documento: *Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional*

Múnera, J. (2006). Construcción de aprendizajes matemáticos desde el enfoque de situaciones. Revista Formándonos maestros

MEN. (2007). *Estándares curriculares en matemáticas*. Bogotá.

MEN. (1998) *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá

Moreria, M. (1999). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, enseñanza de las ciencias y la investigación en el área*. Recuperado en septiembre 3, 2007 disponible en <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf>

Obando, G. & Múnera, J. (2003). Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática. Revista educación y pedagogía.

Orton, A. (1996) “*Didáctica de las matemáticas*”. Cuarta edición. Ministerio de educación, cultura y deporte. Ediciones Morata.

Piaget, J. (1978). *Psicología del niño* (8ª ed.). Madrid: Morata

Rodríguez, A & Pérez, J. R. (2003) *La noción de proporcionalidad. Ethos educativo*. Morelia

Ruiz, E & Valdemoros, M. (2006). *Vinculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de paulina*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Recuperado en octubre 23, 2007 disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33590207.pdf>

Universidad de Antioquia y Gobernación de Antioquia (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico: Modulo 2*. Medellín: secretaria de educación para la cultura.

Vera, L. (1999) *La investigación cualitativa*. Recuperado en marzo 18, 2008 disponible en http://ponce.inter.edu/cai/reserva/lvera/INVESTIGACION_CUALITATIVA.pdf

Vergnaud, G. (2003) *El Niño y la Realidad de las matemáticas*. Editorial trillas