TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ESQUEMAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

El presente trabajo de investigación es de corte cualitativo, en él se emplea el método de análisis documental, y se estudian algunos de los aportes investigativos realizados en **Francia, Italia, Alemania, España, Japón, Estados Unidos, México, Brasil y Colombia** en torno a los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas.

Se presenta un estudio de las definiciones y categorías propuestas en cada país sobre el razonamiento empleado por los estudiantes; realizándose interpretaciones sobre los aportes de las investigaciones en cuanto al estudiante y al desarrollo de los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación; al docente en los contextos implícitos en la enseñanza de estos; y la geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de la argumentación y de los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación.

Nota: Se sugiere al lector que para una mejor interpretación de esta Investigación documental, ésta sea leída a la par de los anexos.

Palabras clave: Investigación Documental, Razonamiento, Argumentación, Descubrimiento, Justificación.

ABSTRACT

This research work is a qualitative approach; it uses a methodology of documentary analysis, and discusses some of the investigative contributions made in France, Italy, Germany, Spain, Japan, USA, Mexico, Brazil and Colombia around to the contexts of discovery and justification in math class.

A study of definitions and categories proposed in each country on the reasoning used by students, carried out interpretations of the research contributions regarding the student and the development of the processes of conjecture, test, demonstration and refutation, the teacher in the contexts involved in teaching these and geometry as the object of knowledge conducive to argumentation and the processes of conjecture, test, demonstration and refutation.

Note: We suggest the reader to a better understanding of this theoretical investigation; it is read in the two Annexes.

Key words: Documentary Research, Reasoning, Argumentation, Discovery, Justification.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas en el escenario de investigación en Educación Matemática autores como: Lakatos, Balacheff, Boero, Reiss, Gutiérrez, Sekiguchi, Herbst, Larios, Healy, Samper y Durango han investigado acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas, considerándolos determinantes en la comprensión y construcción de la matemática como ciencia formal.

Luego de realizar una intervención con los estudiantes de octavo a undécimo grado del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín **(ITM)**; a partir de un trabajo experimental[1] en el que se indagó sobre los errores relevantes al momento de resolver y justificar situaciones con números enteros, y en el que se evidenció que pocos de los estudiantes elaboraban procesos de conjetura y prueba frente a las proposiciones matemáticas presentadas; surgió entonces la necesidad inicial de reconocer las disposiciones del Ministerio de Educación Nacional (**MEN**) en referencia los contextos de descubrimiento y justificación, a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias (2006). Se encontró que aunque desde ambas perspectivas teóricas estos procesos y contextos son importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en tales publicaciones no se abordan ampliamente, y sólo se proponen desde la resolución de problemas y desde el

[1] Para conocer este trabajo ver memorias Asocolme 2008.

razonamiento matemático, pero no se evidencia claramente una propuesta para llevarlos al aula de clase.

Es por ello que surge la motivación por conocer algunas de las investigaciones existentes en el mundo sobre los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación en Educación Matemática. Para esto se realizó una búsqueda de fuentes especializadas, como lo son las bibliotecas, las hemerotecas y algunos referentes electrónicos como las bases de datos y las revistas electrónicas. A partir de la indagación inicial, se realizó una selección de los autores representativos en esta línea de investigación, con lo cual se establecieron rutas de búsqueda que llevaron a la selección de otros autores, y a la posterior clasificación según sus países de origen.

Gracias al contacto electrónico (mediante comunicaciones personales que en la mayoría de los casos) que se logró establecer con los autores estudiados, ha sido posible recibir sugerencias en cuanto a las producciones y paradigmas investigativos, las escuelas de investigación y los proyectos que se destacan en el campo de la Investigación Cualitativa en los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas.

Para el desarrollo de la investigación, se emplea el enfoque Cualitativo, y el método de Investigación Documental. Las discusiones grupales que tienen lugar en los diferentes espacios de conceptualización[2] han servido para reconocer algunas de las propuestas investigativas que se gestan en nueve países en torno al descubrimiento y la justificación en Educación Matemática: **Francia, Italia, Alemania** y **España** en el contexto europeo; **Japón** como un acercamiento al contexto asiático, en el escenario americano **Estados Unidos, México, Brasil** y **Colombia.**

---

[2] La Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia concibe los *espacios de conceptualización* como los diferentes escenarios educativos en los cuales se abordan conceptos propios de cada programa de formación.

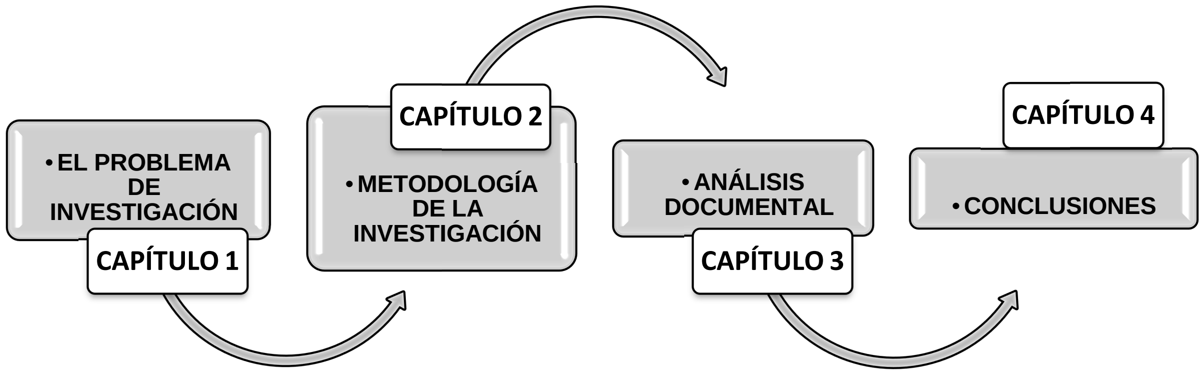
El reconocimiento, la caracterización, el análisis y la interpretación de algunos aportes en Educación Matemática desde las conjeturas, las pruebas, las demostraciones y las refutaciones, se han realizado teniendo en cuenta las metodologías empleadas en las investigaciones objeto de estudio, sus constructos teóricos y las estrategias de intervención en el aula, considerando particularmente para esta investigación:

- El estudiante en la construcción de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones: tipo de razonamiento, niveles, esquemas y fases.[3]
- El docente en las conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones: formación, instrucción y contextos de aprendizaje.
- El objeto de conocimiento propicio para la construcción de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones en los estudiantes.

En su conjunto la Investigación Documental presentada expone algunos de los aportes desarrollados en los nueve países, exponiéndose de manera rigurosa y sistemática los diferentes trabajos desarrollados por los investigadores abordados y dejándose una invitación a los docentes a profundizar mediante la investigación en el aula de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los contextos de descubrimiento y justificación matemática.

En el esquema 1 se presentan los capítulos que hacen parte de esta Investigación:

[3] El razonamiento empleado por el estudiante en la construcción de pruebas y conjeturas es categorizado y/o jerarquizado por los investigadores abordados, para ello, algunos hablan de *niveles*, con lo cual clasifican el tipo de razonamiento según su grado de formalidad; otros en cambio hablan de *fases* al describir las etapas que presenta el estudiante cuando se enfrenta a situaciones de prueba y conjetura; también se caracteriza el tipo de razonamiento proponiendo *esquemas* en los cuales se describen las acciones que realiza el estudiante en la construcción de pruebas y conjeturas.



Esquema 1. Capítulos de la Investigación.

El **primer capítulo** plantea los antecedentes del problema de investigación, el objetivo y la formulación de la pregunta de investigación.

El **segundo capítulo** expone el enfoque y la metodología empleados para el diseño de la investigación.

El **tercer capítulo** desarrolla el Análisis Documental producto de la interpretación y el análisis; presentándose el informe de las investigaciones de los nueve países seleccionados.

El **cuarto capítulo** expone las conclusiones de la investigación direccionadas desde el objetivo, el problema de investigación y el análisis documental realizado, dejando preguntas planteadas para futuras investigaciones.

Se presentan las referencias bibliográficas que incluyen los textos citados y la bibliografía que incluye las referencias adicionalmente de otros textos leídos para quienes quieran ampliar y profundizar sobre las investigaciones realizadas en cuanto al descubrimiento y la justificación en Educación Matemática.

Finalmente, se presenta un CD con los anexos, los cuales incluyen otros elementos que hacen parte de la investigación.

CAPÍTULO 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 ANTECEDENTES

La elección de la línea de investigación en torno a los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación, surgió luego de efectuar la práctica pedagógica en el **ITM**; donde se realizó un trabajo experimental de intervención diagnóstica para examinar los errores y dificultades que presentan los estudiantes de 8° a 11° cuando se enfrentan a situaciones matemáticas en las que debe descubrir, justificar y argumentar.

Tras esta intervención se detectó que los estudiantes presentan dificultades en el desarrollo de las situaciones matemáticas, evidenciando que en su mayoría ellos replican lo enseñado por el docente sin ser conscientes de los procesos que llevan a cabo; mostrando así un bajo nivel en la comprensión y elaboración de pruebas.

Tratando de ofrecer a los investigadores, docentes y estudiantes herramientas para superar estas dificultades, se recurre a la búsqueda de los documentos legales impartidos por el **MEN** y sus aportes conceptuales en esta línea.

1.1.1 Lineamientos Curriculares de Matemáticas

El razonamiento matemático es abordado en Colombia por parte del **MEN**, en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (1998) y en los Estándares

Básicos de Competencias (2006), incorporándolo como componente clave en la resolución de problemas y como un proceso que consiste en "ordenar las ideas en la mente hasta llegar a una conclusión" (**MEN**. Lineamientos Curriculares Matemáticas, 1998, p. 77). Se plantean elementos para la conceptualización del razonamiento como un eje articulador que debe tenerse en cuenta en el desarrollo de los cinco pensamientos, pero no se plantea cómo los estudiantes desarrollan los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación, ni se explicitan elementos de los que el docente pueda valerse para orientar estos procesos al interior del aula.

Desde el **MEN** en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), razonar en matemáticas tiene que ver con:

> - Dar cuenta del cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
> - Justificar las estrategias y procedimientos propuestos en acción en el tratamiento de problemas.
> - Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
> - Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
> - Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que más matemáticas, más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (p. 77)

Igualmente se menciona que el razonamiento depende de la edad y del nivel de desarrollo del estudiante, así, en los primeros grados los estudiantes razonan de manera intuitiva y en los últimos grados de su escolaridad alcanza niveles más elaborados. Se plantea como base de una estructura curricular adecuada para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes cinco procesos generales "el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos". (**MEN**. Lineamientos Curriculares Matemáticas, 1998, p. 35), dejando ver así el razonamiento como eje que debe articularse y aparecer en las actividades matemáticas de los estudiantes.

1.1.2 Estándares Básicos de Competencias

Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), son explícitos en plantear la necesidad de "usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y rechazar conjeturas y avanzar en el camino a la demostración" (p. 51); sin embargo, a la hora de plasmar esto en los ítems que se deben desarrollar en cada pensamiento y grado, se observa que se le da prioridad a la justificación y en algunos casos a la conjetura, privilegiando el desarrollo del razonamiento inductivo, pero procesos como la validación, la refutación y la demostración no son tenidos en cuenta.

Buscando ofrecer herramientas en la formación de los docentes colombianos en los procesos de enseñanza y aprendizaje del descubrimiento y la justificación en clase de matemáticas y dada la poca conceptualización de estos contextos presentada por el **MEN,** surge el interés por reconocer cómo han sido incluidos estos procesos en los currículos de diferentes países, por lo que se analizan algunos investigadores que a nivel internacional han indagado por los procesos de argumentar, conjeturar, probar, demostrar y refutar como ejes en el desarrollo del razonamiento matemático.

Para dar comienzo a esta búsqueda se procede a realizar la lectura de dos investigadores referentes en la línea de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones matemáticas y de enseñanza y aprendizaje de los mismos. Los textos leídos fueron *"Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático"* de Imre Lakatos (1978) y *"Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas"* de Nicolás Balacheff (2000).

1.1.3 Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático. Imre Lakatos.

En el texto, Imre Lakatos plantea la dialéctica de las pruebas y las refutaciones, mostrando los niveles de razonamiento, tipos de conjeturas, tipos de pruebas, tipos de refutaciones y estrategias para conjeturar, probar y refutar.

Pruebas y refutaciones es un libro matemático, filosófico, histórico, político y sociológico. En él se muestra una historia exclusivamente interna de las matemáticas, que pretende una reconstrucción racional del proceso de conjeturas, pruebas y refutaciones.

La historia que Lakatos presenta en su obra, no es una narración ni un análisis estructural sino un diálogo teatral, representado en este caso por un docente y sus estudiantes; una clase más bien aventajada, como reconoce el propio Lakatos, que son quienes escenifican en un tiempo limitado la discusión.

Lakatos (1978) realiza una crítica severa al formalismo basado en el deductivismo, por su inadecuación como modelo explicativo de la génesis del conocimiento. Resalta el aspecto heurístico, centrado en la metodología y no en la lógica. Invita al abandono de la exposición de contenidos según el rígido modelo teorema-demostración-corolario y preocuparse más bien por la incesante mejora de las conjeturas, la especulación y la crítica.

Según Lakatos (1978), las matemáticas "no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones" (p. 165).

1.1.4 Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Nicolás Balacheff.

Esta investigación fue realizada a mediados de los años ochentas por Nicolás Balacheff, en el contexto del sistema educativo francés, en ella se evidencian las concepciones de los estudiantes acerca de la prueba en matemáticas, en los primeros años de su aprendizaje. Se trata de una investigación que hace parte de un trabajo más amplio en el que se estudian los problemas del aprendizaje y la enseñanza de la demostración. Su marco teórico se elaboró con base en la teoría de situaciones didácticas en el sentido de Brousseau y en el modelo de Lakatos sobre la dialéctica de las pruebas y las refutaciones.

El estudio experimental de los estudiantes en la situación de resolución de problemas que se presenta en la investigación, permitió poner en evidencia cinco tipos principales de prueba: empiricismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico, experiencia mental y cálculo sobre enunciados.

Se muestra que esta tipología no es tanto una caracterización del *"nivel lógico"* de los estudiantes, sino de su *"economía lógica".* Esta *"economía lógica"* está determinada por la naturaleza de las interacciones sociales, el nivel de incertidumbre que se reconoce como aceptable para la situación, y el nivel de elaboración cognitivo o de lenguaje que se encuentra disponible para el problema en cuestión.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En las últimas décadas diferentes países le han dado prioridad en sus currículos al razonamiento matemático incorporando en ellos situaciones de aprendizaje que impliquen procesos de conjeturar, probar, demostrar y refutar desde los primeros años de escolaridad; pues al efectuar estos procesos sobre las posibles soluciones de un determinado problema, el estudiante pone de manifiesto sus construcciones conceptuales y procesos de razonamiento.

Partiendo de la revisión de los documentos del **MEN**, en los que se detectó que el descubrimiento y la justificación son poco abordados y conceptualizados a la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en Colombia.

Se ha desarrollado la presente Investigación Documental, dado el interés por conocer diferentes investigaciones que aborden experimental y teóricamente las conjeturas, las pruebas, las demostraciones y las refutaciones en el desarrollo del razonamiento; así como el desempeño del estudiante, el docente y el objeto de conocimiento en el desarrollo de los procesos y en la construcción y validación del conocimiento matemático. Es por ello que se parte de la siguiente pregunta:

¿Cuáles son algunos de los aportes investigativos presentados en diferentes países en los contextos de descubrimiento y justificación matemática considerando al estudiante, al docente y al objeto de conocimiento en la línea de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones?

1.3 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Analizar algunas investigaciones en torno a los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación en Educación Matemática, considerando al estudiante, al docente y al objeto de conocimiento en los contextos de descubrimiento y justificación matemática.

CAPÍTULO 2

2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 ENFOQUE CUALITATIVO

El proceso de investigación llevado a cabo en la construcción de este análisis parte del **enfoque cualitativo**, en tanto se pretende estudiar los aportes que diferentes investigadores han presentado sobre los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación en clase de matemáticas, analizando el punto de vista de los autores elegidos, en este sentido se enmarca en los parámetros que establecen Denzin & Lincoln (2000) cuando afirman que el objetivo de la investigación cualitativa es identificar la naturaleza de las realidades, su estructura, aquella que da razón plena de su comportamiento, estudiando la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando dar interpretación a los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas.

2.2 INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

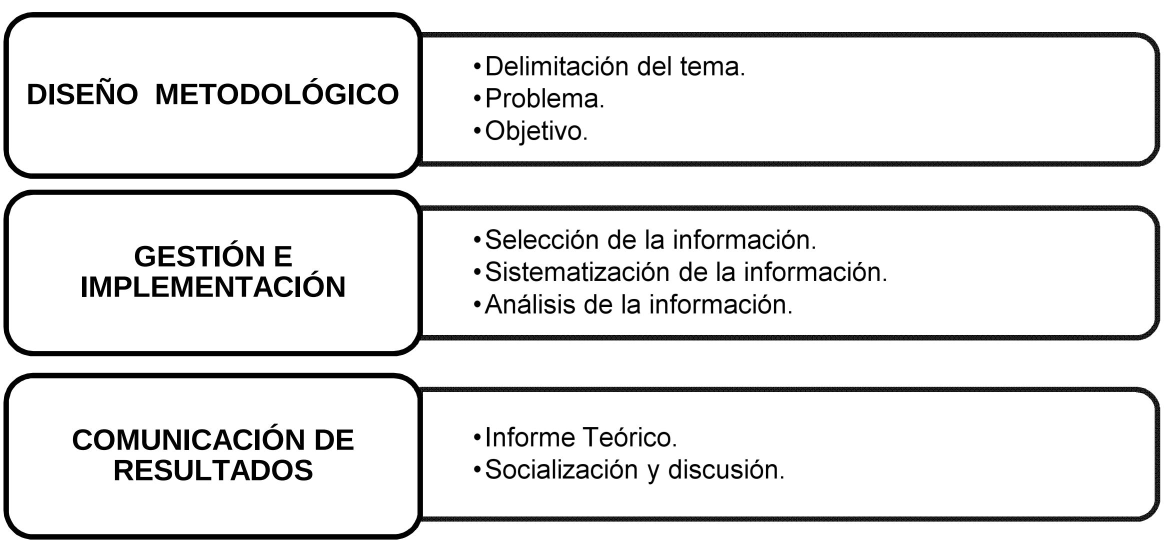
El método para la búsqueda y posterior análisis de la información se basa en la **Investigación Documental**, que según Galeano (2004) es tenida en cuenta dentro de la investigación cualitativa no sólo como técnica de recolección y validación de información, sino como una estrategia de investigación que tiene particularidades propias durante el diseño del proyecto.

La investigación documental es entendida como “la extracción y representación de los conceptos relevantes de documentos mediante términos o sintagmas para su recuperación potencial.” (García, 1995, p. 1)

En la investigación documental se realiza un estudio de desarrollo teórico, sistémico y objetivo; en el que a partir de la lectura, la síntesis de la información producida por otros y del análisis crítico se presentan nuevas teorías, conceptualizaciones o modelos interpretativos originales con el sello del autor. (Galeano, 2004)

2.2.1 Proceso Metodológico

Esta investigación se desarrolló tomando como base el esquema propuesto por Galeano (2004) sobre el proceso metodológico de la Investigación Documental; el proceso es descrito en el esquema 2.

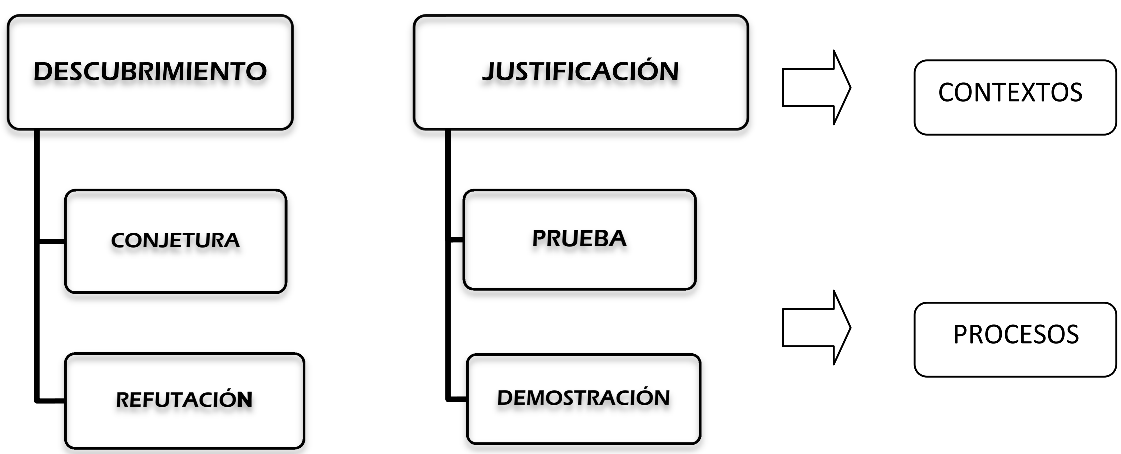


Esquema 2. Proceso metodológico de la Investigación Documental. Galeano (2004)

2.2.1.1 Diseño Metodológico

En el diseño metodológico se delimita el tema y se define el problema y el objetivo.

El tema de investigación hace referencia a s los contextos de descubrimiento y justificación, considerando los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación, partiendo de la pregunta: ¿Cuáles son algunos de los aportes investigativos presentados en diferentes países en los contextos de descubrimiento y justificación matemática, considerando al estudiante, al docente y al objeto de conocimiento en la línea de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones?



Esquema 3: Delimitación del tema de la Investigación Documental

El diseño de la investigación "implica hacer una revisión previa de estudios anteriores y de literatura relacionada que permita establecer qué se ha dicho sobre el tema propuesto, desde qué punto de vista y con qué resultados". (Galeano 2004, p. 116)

La revisión documental se realizó acudiendo a fuentes especializadas, comenzando por la revista electrónica ***Lettre de la Preuve*** que es un medio reconocido a nivel mundial en la línea de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones en Educación Matemática, también se acudió a otras fuentes como *las actas del* ***Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof***[4], *a* algunas memorias de los trabajos presentados por los autores en el ***ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education,*** y en los encuentros del ***International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).***

Para la revisión se diseñó un formato de registro, en el cual se sistematizó información en cuanto a los autores elegidos, universidad a la que pertenece y su correo electrónico. (Ver anexo A)

2.2.1.2 Gestión e implementación

La gestión e implementación requiere la búsqueda y la selección de la información, éstas se realizan a partir del análisis documental, lo cual exige el rastreo de los documentos existentes. El investigador se enfrenta a la clasificación y el análisis de los documentos.

La documentación es la materia prima de la Investigación Documental. Según Erlandson 1993 ésta es entendida como:

> La amplia gama de registros escritos y simbólicos, así como de cualquier material y datos disponibles. Los documentos incluyen prácticamente cualquier cosa existente previa a y durante la investigación: relatos históricos o periodísticos, obras de arte, fotografías, memoranda, registros de acreditación, transcripciones de televisión, periódicos, folletos, agendas y notas de reuniones, audio o videocintas, presupuestos, estados de cuenta, apuntes de estudiantes o profesores, discursos. (p. 99)

[4] Se pueden consultar dichas memorias en la página web: http://www.tpp.umassd.edu/proofcolloquium07/

La bibliografía ha sido reunida a partir del material publicado o inédito, artículos, estudios críticos, libros, tesis; obtenida desde medios electrónicos o bibliotecas, hemerotecas, tales como las bases de datos, las revistas y/o páginas web especializadas, y del contacto directo a través de correo electrónico con los autores estudiados. (Ver anexo D)

Una vez recopilada y revisada la información, los documentos deben sistematizarse y clasificarse; por tal se deben "registrar los datos en fichas bibliográficas y de contenido" (Galeano 2004, p. 120)

Las fichas bibliográficas constan de la siguiente estructura: Autor, título, lugar de la edición, número de páginas, lugar de publicación, entre otros. (Ver anexo E)

Las fichas de contenido constan de la siguiente estructura: número de ficha, tema, fecha de consulta, título del artículo, autor, correo electrónico y universidad a la que pertenece el autor, fuente de consulta, palabras clave, resumen del artículo, implicaciones didácticas en el artículo a la educación matemática en los contextos de descubrimiento y justificación, aportes de la lectura a una construcción del marco conceptual, qué conceptos creativos y nuevos nacen de esta lectura, nombre del estudiante que realiza la ficha y fecha de realización. (Ver anexo F).

La clasificación se realiza teniendo en cuenta que en este momento de la Investigación "hay que decidir si lo pertinente es hacer muestro de los materiales o, de ser necesario y posible, analizarlos todos, dependiendo de los objetivos de la investigación". (Galeano 2004, p. 117). Loa autores fueron seleccionados por ser estos los más representativos en los contextos de descubrimiento y justificación, posteriormente se clasifican estos según su país de procedencia.

Posteriormente se realiza el análisis de los documentos seleccionados, Según Galeano (2004)

> El análisis implica la lectura cuidadosa de los documentos, la elaboración de notas y memos analíticos para dar cuenta de patrones, recurrencias, vacíos, tendencias, convergencias, contradicciones, levantamiento de categorías y códigos, y lectura cruzada y comparativa de los documentos sobre los elementos de hallazgo identificados, y obtener una síntesis comprensiva de la realidad que se estudia. (p. 118)

Para esto se realiza nuevamente la lectura de los documentos seleccionados a la luz de los enfoques de investigación de los autores, los aportes teóricos y didácticos, la consideración del estudiante, el docente y el objeto de conocimiento, en los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación.

Tras la lectura se infieren los rasgos teóricos característicos de los autores, se realizan síntesis comprensivas, se construyen esquemas y tablas, que son puestos a discusión en todo momento entre los investigadores.

Este análisis se realiza tras una interpretación de los datos obtenidos y a partir de la construcción de inferencias teóricas.

Para la construcción de los apartados de cada país investigado se tienen en cuenta las metodologías empleadas, los constructos teóricos aportados, las estrategias de intervención en el aula, y el objetivo de la Investigación que es la consideración del estudiante, el docente y el objeto de conocimiento dentro del descubrimiento y la justificación matemática.

2.2.1.3 Comunicación de resultados

La comunicación de resultados consiste en mostrar los hallazgos presentando el informe teórico de la investigación.

El informe teórico es presentado desde las inferencias de las investigaciones de cada país teniendo en cuenta la coherencia para agrupar los conceptos y fenómenos desarrollados en ellas.

La comunicación de resultados incluye también la socialización y discusión de los avances o los resultaos con pares académicos y públicos interesados en la temática trabajada pues esto "permite la validación por consenso, la difusión de la investigación y la aparición de nuevas preguntas e incluso de otros proyectos" (Galeano 2004, p. 119).

Durante el proceso de investigación se han compartido los avances del trabajo en diferentes encuentros de educación matemática, posibilitando el intercambio con otros investigadores que proponen sugerencias para la continuación del trabajo. Tales encuentros son: (Ver anexo C)

- *IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa en Valledupar, Colombia. (2008)*
- *III Encuentro de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia en Medellín, Colombia. (2008)*
- *The Fifth International Congress of Qualitative Inquiry (QI2009) en University of Illinois Urbana-Champaign, Estados Unidos. (2009)*
- *X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa en Pasto, Colombia. (2009)*
- *Primer Encuentro de socialización de avances de las propuestas de investigación de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia en Medellín, Colombia. (2009)*

2.2.1.4 Confiabilidad y validez

La Investigación Documental, “como otras estrategias de investigación, tiene la finalidad de analizar los hechos, proporcionar conocimientos nuevos y ser una guía para la acción” Galeano (2004, p. 136), por esto debe garantizarse la confiabilidad y la validez del trabajo investigativo planteado. Según Galeano (2004)

> La confiabilidad indica si un instrumento mide siempre de igual manera las mismas cosas no importa quien lo utilice; esto significa que debe ser reproducible, y si otros investigadores aplican la misma técnica a los mismos datos, en distintos momentos, sus resultados deben coincidir con los que obtuvieron originalmente. Por eso, se espera que las reglas que gobiernan el análisis documental sean explicativas y aplicables para todas las unidades. (p. 136)

De otro lado, el análisis documental

> … es válido en la medida en que sus inferencias se sostengan frente a otros datos obtenidos de forma independiente. Su validez interna se basa en la fundamentación lógica del sistema de categorías construido en la investigación, que debe explicar con qué criterios se incluyeron unas categorías y se excluyeron otras, cómo se construyeron y cómo se establecieron relaciones entre ellas. Por su parte, la validez externa se basa en una relación empírica entre los datos y la realidad, o hecho social, que se analizan. (p. 137)

Para garantizar la confiabilidad y la validez se espera que las reglas que gobiernan el análisis documental sean explícitas y aplicables; y que las conclusiones se desprendan del objetivo y el desarrollo de la investigación.

Con el fin de respaldar los significados e interpretaciones presentadas en los resultados del estudio, se ha recurrido a la búsqueda de diferentes fuentes y al uso de citas textuales que han sido referenciadas desde su fuente de consulta atendiendo, las normas para la sistematización de trabajos investigativos de la Asociación Americana de Psicología (**APA**). En este sentido, es posible reconocer todas las rutas de investigación utilizadas, que van desde la lectura de libros, de documentos extraídos de las páginas web de los autores o de las universidades a las cuales pertenecen, hasta la posibilidad de obtener documentos aún no publicados directamente desde los autores, enviados por medio de correos personales.

El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar algunas investigaciones en torno a los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación en Educación Matemática, considerando el estudiante, el docente y el objeto de conocimiento en los contextos de descubrimiento y justificación matemática.

Con la indagación, selección y posterior análisis de las investigaciones abordadas, se logra la construcción del análisis documental en el que se evidencian algunas de las investigaciones en el mundo en esta línea; además al describirse las fases, niveles, categorías, y aportes a la Educación Matemática, propuestas en las investigaciones seleccionadas para la Investigación Documental, se reconoce al estudiante, al docente, y al objeto de conocimiento en las conjeturas, las pruebas, las demostraciones y las refutaciones.

CAPÍTULO 3

3. ANÁLISIS DOCUMENTAL[5]

3.1. CONTEXTO FRANCÉS: UNA COMPARACIÓN ENTRE LA ARGUMENTACIÓN Y LA DEMOSTRACIÓN.

La demostración se encuentra en el marco de una experiencia intelectual en matemáticas, implica procesos lógicos, pruebas mentales, funciones del lenguaje y procesos cognitivos y heurísticos.

En Francia la noción de demostración ocupa un lugar destacado en la enseñanza de las matemáticas. Coincidiendo en que la demostración no puede ser enseñada del mismo modo en el aula de clase que en un ambiente puramente científico; ya que ésta debe sufrir una transformación, adaptativa, o más específicamente una transposición didáctica, para convertirse así en un contenido de enseñanza. (Balacheff, 1988)

Los investigadores franceses: Nicolás Balacheff, investigador del Centre National de la Recherche Scientifique **(CNRS)** y doctor en didáctica de las matemáticas de la Universidad Josep Fourier, en Grenoble, Francia; y Raymond Duval director del

---

[5] Las fuentes de información que apoyaron la realización de este análisis documental, se evidencian en el **anexo F: fichas de contenido,** donde se ha sistematizado el título del artículo, el autor, correo electrónico y universidad a la que pertenece, la fuente de consulta, las palabras clave, el resumen del artículo, las implicaciones didácticas en los contextos de descubrimiento y justificación, y los aportes de la lectura a una construcción del marco conceptual.
Si se quiere conocer los autores abordados para este apartado y sus proyectos de investigación, así como la bibliografía, **ver anexo A: tablas de autores; anexo G autores y proyectos de investigación**; y **anexo E: fichas bibliográficas.**

Institut de l'information Scientifique et Technique **(INIST)**; se han dedicado en las últimas décadas, entre otras investigaciones, al estudio de la demostración en contextos escolares, a fin de determinar y comprender las dificultades que los estudiantes encuentran al abordar una actividad demostrativa. Para ello Balacheff asume una perspectiva cualitativa y Duval una perspectiva cognitiva.

3.1.1 Enseñanza y aprendizaje de la demostración

En vista de que en la práctica educativa, las palabras explicación, prueba y demostración, son tomadas muchas veces como sinónimos, y de que hay falta de claridad en los conceptos de razonamiento y proceso de validación, el esquema 4 da claridad a dichos términos, que están presentes en la investigación realizada por Balacheff (1988).

EXPLICACIÓN	• Establece y garantiza la validez de una proposición, para el sujeto locutor, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad.
PRUEBA	• Es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado.
DEMOSTRACIÓN	• Tipo de prueba en la cual una serie de enunciados se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas.
RAZONAMIENTO	• Designa la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información.
PROCESOS DE VALIDACIÓN	• Actividad intelectual que tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación.

Esquema 4. Definición de los términos utilizados por Balacheff.

En concordancia a lo anterior, Balacheff (1988) centra su trabajo de investigación en dos puntos centrales: de un lado lo concerniente al estudiante, "estudiado desde la perspectiva de los procedimientos que utiliza para establecer una proposición o tratar una refutación" (Balacheff, 1988, p. 21); y de otro lado lo relacionado al sistema didáctico, recurriendo para ello a la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, con fin de "plantear problemas de prueba e inducir a los estudiantes a tomar la responsabilidad de resolverlos" (Balacheff, 2000, p. 8).

El objetivo de la investigación es "dilucidar la posición y el sentido de los procesos de prueba puestos en ejecución en la solución del problema, particularmente examinando de que manera los estudiantes llegan a la convicción de la validez de la solución que se proponen". (Balacheff, 1988, p. 22, trad.)

Para cumplir con tal fin, Balacheff sugiere apoyarse en la interacción social, como motor de los procesos de validación. La interacción social entre los estudiantes, es un instrumento potente que favorece la comunicación como herramienta experimental, permitiendo el acceso eficaz a las concepciones de los estudiantes y a las que ellos utilizan.

La *interacción social* es considerada como la mejor respuesta a los problemas planteados, lleva a los estudiantes a realizar discusiones de su conducta para convencerse unos a otros de los argumentos de cada uno. Los estudiantes se comprometen en la construcción de una demostración cuando toman una decisión a propósito de la veracidad de un enunciado, la interacción social permite tomar esta decisión, pudiendo pasar así a la validación del enunciado en juego.

Además de la interacción social, es importante señalar la naturaleza de los conocimientos de los estudiantes y la manera como éstos son llevados a la práctica.

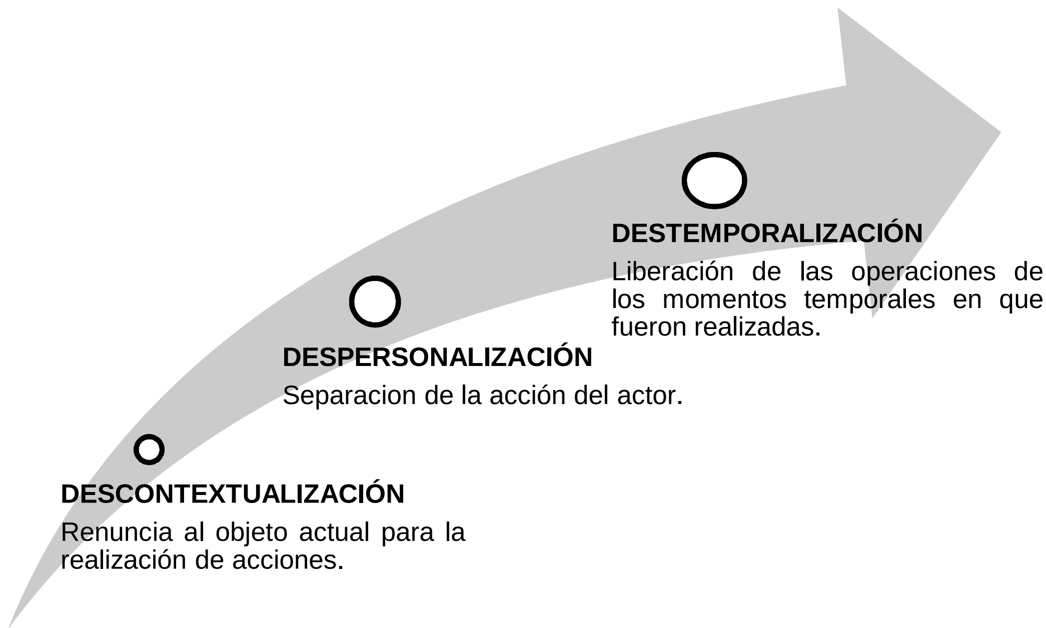
Según Balacheff (2000) la demostración es una herramienta de prueba reconocida, pero antes de que el estudiante logre dominar la demostración, se encuentran una serie de pruebas que ellos mismos producen. Es así como postula dos tipos de pruebas, con el fin de conocer y comprender la naturaleza de las mismas: *las pruebas pragmáticas* y *las pruebas intelectuales*, que han sido evidenciadas en el trabajo experimental con sus estudiantes.

Se denominan "pruebas pragmáticas aquellas que recurren a la acción o a la ostensión y pruebas intelectuales aquellas que separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y en sus relaciones". (Balacheff, 1988, p. 45, trad.). Las pruebas pragmáticas son las pruebas para decidir, referidas a hechos en sí y las pruebas intelectuales son las pruebas para saber, movilizan significaciones, pertinencias o racionalidades unas contra otras.

Según Balacheff (1991) en el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales se da una especie de *"confrontación entre la eficiencia y el rigor"* a un nivel conceptual mediante la toma de conciencia de los casos genéricos inmersos en el enunciado a probar.

El desarrollo de las pruebas intelectuales, exige al estudiante un manejo diferente del lenguaje, no sólo como medio de comunicación sino como herramienta para el cálculo lógico.

Balacheff (2000), señala que la elaboración de este lenguaje requiere en particular de una descontextualización, una despersonalización y una destemporalización. El esquema 5 define cada uno de estos conceptos.



Esquema 5. Elementos centrales en el lenguaje del estudiante. Balacheff (1988)

Balacheff (2000) distingue cinco tipos de prueba que tienen lugar en la génesis de la demostración, en los cuales interesan aquellos procedimientos que los estudiantes consideran significativos, la posición de cada tipo de prueba está determinada por su nivel de exigencia de generalidad, y por su nivel de conceptualización de los conocimientos que exige:

- **Empiricismo ingenuo:** Es una prueba pragmática, usada para denominar los procedimientos marcados por la ausencia de índices de procesos de validación, donde las conjeturas se obtienen del examen de pocos casos y el problema de su validez no es abordada. Los estudiantes se basan en sus afirmaciones o declaraciones para mostrar una validez.
- **Experiencia crucial:** Es una prueba pragmática, enmarcada por una voluntad deliberada de someter a prueba una proposición aplicándola a una nueva. En contraposición al caso del empiricismo ingenuo, el problema de la generalización es tenido en cuenta, además es tratado, aunque permanezca fundamentalmente en un marco de procedimientos fundados en la práctica y la experiencia.

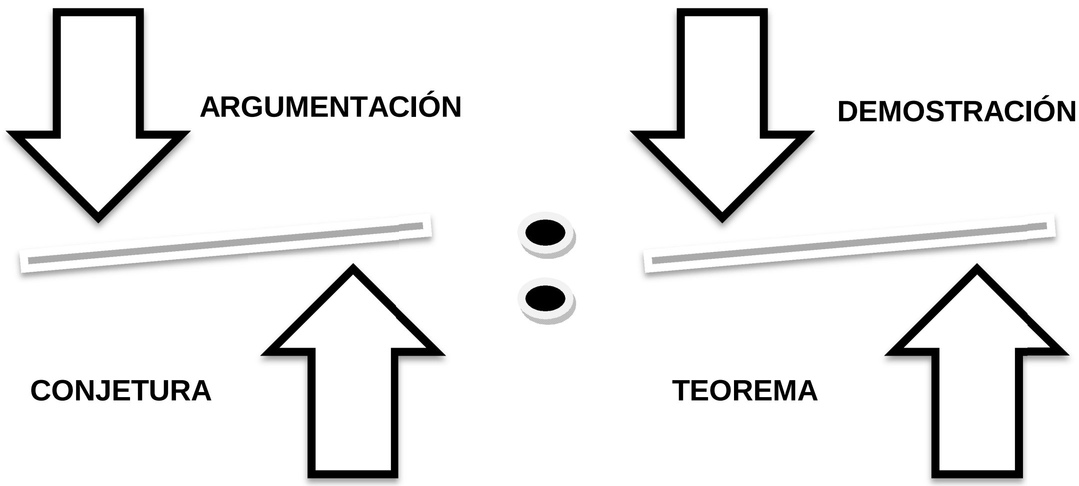
- **Ejemplo genérico:** Es una prueba pragmática, en donde el procedimiento de prueba fue aplicado con el fin de extraer las razones de la validez de una aserción o conjetura, basándose en la representación de un ejemplo particular. El carácter genérico del ejemplo utilizado está relacionado con el hecho de que, en el procedimiento de los estudiantes, el ejemplo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura.
- **Experiencia mental:** Es una prueba intelectual, utilizada para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación. Se libera de las situaciones particulares, presentándose una descontextualización como proceso esencial de la generalización. Los conceptos implícitos están esencialmente basados en la experiencia perceptiva y en la acción. Además, las razones desarrolladas están ligadas a acciones, eventualmente interiorizadas. Por ende, la expresión de una experiencia mental requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas.
- **Cálculo sobre enunciados:** Es una prueba intelectual, basada en teorías formalizadas o explícitas de las nociones en juego en la solución de un problema. Estas pruebas aparecen como el resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamenta en definiciones o en propiedades características explícitas. La evolución de esta prueba se da mediante un proceso simultáneo de construcción lingüística y cognitiva: la construcción cognitiva consiste esencialmente en la elaboración de proposiciones necesarias para el cálculo, y la construcción lingüística permite apartarse de lo particular.

No obstante, la elaboración de pruebas es sólo uno de los aspectos en el proceso de validación. Balacheff (1988) señala como el análisis crítico de las pruebas también hace parte de estos aspectos. No se puede excluir al estudiante del manejo de los contraejemplos, es decir el docente debe permitir al estudiante que se enfrente al problema de la contradicción en sus pruebas, para permitir así que este internalice de tal forma el concepto y que adquiera habilidades argumentativas para lograr cuestionarse de la pertinencia o no de un contraejemplo, en las conjeturas propuestas.

De esta forma se pueden mencionar los siguientes tipos de comportamientos en los estudiantes, cuando se encuentran ante la presencia de un contraejemplo, identificados por Balacheff, en el proceso experimental de los años ochentas:

- **Abandono de la conjetura:** Los estudiantes renuncian a su conjetura, ya sea para abandonar la resolución del problema, o para intentar la solución del problema en otra dirección.
- **Modificación de la conjetura:** Corresponde a un nuevo análisis de la situación.
- **Modificación *ad hoc* de la conjetura:** Modificación de la conjetura al hacer una relación entre el resultado calculado y el resultado observado.
- **Introducción de una condición:** Modificación de la conjetura basada en el análisis de su dominio de validez.
- **Anotación de una excepción:** El contraejemplo se incorpora de alguna manera a la conjetura al asignarle un tratamiento específico.
- **Regreso a la definición:** La producción del contraejemplo conduce a los estudiantes a volver a considerar explícitamente sus concepciones.
- **Rechazo del contraejemplo:** Los estudiantes apartan el contraejemplo al no reconocerlo como aceptable.

En cuanto a la argumentación, Balacheff (1999) no la considera un camino directo hacia la construcción de la demostración, puesto que tienen objetivos diferentes. La argumentación tiene el objetivo de obtener acuerdos entre estudiantes, más que de establecer la verdad de un enunciado, ya que, dado el carácter de la prueba matemática, la demostración implica construir una relación particular al conocimiento como aquello que está en juego en una construcción teórica, y por lo tanto implica renunciar a las libertades que se podrían tomar personalmente en el juego de la argumentación. El esquema 6, sintetiza en una analogía, el lugar de la argumentación en matemáticas.



Esquema 6. Analogía para ubicar el lugar de la argumentación en matemáticas.

Finalmente, en relación al trabajo del docente, Balacheff afirma que no se debe limitar el tratamiento de la amplia, compleja y difícil temática del aprendizaje de las demostraciones a un momento particular de la vida escolar de los estudiantes, sino por el contrario, de iniciarlo desde los primeros años de la escuela.

3.1.2. La relación entre argumentación y demostración desde un enfoque cognitivo.

Duval (1995) afirma que un análisis didáctico sobre las relaciones entre argumentación y demostración en matemáticas necesita un análisis cognitivo, porque éste podría permitir la identificación de características comunes, u opuestas de la argumentación y de la demostración.

Duval desarrolla su investigación según la hipótesis: "Un aprendizaje a los aspectos superficiales de la expresión del razonamiento deductivo o a sus aspectos heurísticos están condenados al fracaso, porque él no reconoce la complejidad del funcionamiento cognitivo subyacente al razonamiento". (Duval, 1995, p. 303, trad.)

En la clase el aprendizaje de la demostración revela una actividad cognitiva específica, mientras que la argumentación utiliza las reglas de la comunicación. En su trabajo, Duval (1995) hace evidentes las diferencias subyacentes a estos dos procesos a fin de determinar y comprender las dificultades que los estudiantes encuentran al abordar una actividad demostrativa.

El análisis de Duval (1995) sobre la argumentación, muestra una relación entre ésta y la deducción matemática; tanto argumentación como deducción son dos formas de razonamiento que movilizan las proposiciones. No obstante la distinción entre ambas se sostiene desde dos análisis: análisis funcional y análisis estructural del razonamiento. En otras palabras desde la distinción entre razonamiento argumentativo y razonamiento deductivo. Esta distancia puede explicar la dificultad que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la demostración.

El análisis funcional, tiene en cuenta la distinción entre el valor epistémico y el valor lógico de una proposición. (Duval, 1995)

- **Valor epistémico:** Es el grado de confiabilidad que posee lo que se afirma en la proposición.
- **Valor lógico:** Es el valor de verdad de una proposición.

Sin embargo, una proposición no se caracteriza solo por sus valores epistémico y lógico, sino también del estatus que depende del contexto, Duval (1999) distingue dos estatutos: el teórico y el operativo.

- **El estatuto teórico:** Determina la organización y la posibilidad de desarrollar una proposición al interior de un contexto teórico, puede tener el estatus de definición, axioma o regla.

- **El estatuto operativo:** Determina la organización interna y la posibilidad del funcionamiento de una proposición, puede tener el estatus de premisa, conclusión.

Las argumentaciones, además deben contar con dos características para ser aceptadas:

i. Pasar por un examen de pertinencia, que se hace en relación al contenido de la afirmación y el argumento que lo justifica, es decir, los contenidos semánticos tanto del enunciado como del argumento deben sobreponerse.
ii. Resistir a las objeciones y tener un valor epistémico positivo para ser un argumento fuerte.

Las argumentaciones están ligadas con las explicaciones, que Duval maneja como producción de razones que "(...) da una o más razones para volver comprensible un dato. (...) Estas razones propuestas tienen en realidad una función casi descriptiva". (Duval, 1999, p. 9)

Por otro lado, las demostraciones están ligadas al razonamiento, el cual produce razones pero, a diferencia de las explicaciones, estas razones tienen un papel que es el de "(...) comunicar su fuerza de argumento a las afirmaciones que se deben justificar" (Duval, 1999, p. 11). El razonamiento busca modificar el valor epistémico de un enunciado; la afirmación que se justifica, y determinar su valor de verdad bajo ciertas condiciones de organización.

Mientras que la demostración es un razonamiento válido, la argumentación no tiene esos vínculos de validez, sino de pertinencia, es decir, la demostración busca la validez de un enunciado y la argumentación su pertinencia.

Duval concluye que para:

> Pasar de la argumentación a un razonamiento válido implica un descentramiento específico que no se favorece por la discusión o por la interiorización de una discusión. (...) El desarrollo de la argumentación incluso en sus formas más elaboradas no abre una vía de acceso a la demostración. Un aprendizaje específico e independiente se hace necesario en lo que respecta al razonamiento deductivo. (...) Esto no significa que la argumentación no tenga algún lugar en la enseñanza de las matemáticas. Por el contrario, debe ser tratada de la misma forma, precisamente para desarrollar las capacidades frente a la argumentación misma. (...) Este problema no interesa sólo al maestro de matemáticas, sino también al de lenguaje. (Duval, 1999, p. 44-45)

Teniendo en cuenta lo anterior, se podría afirmar que el paso de la argumentación a la demostración está obstaculizado por una ruptura cognitiva. Duval (1999) afirma que los estudiantes deben llevar a cabo actividades que les permitan usar y percibir el estatuto operativo de las proposiciones que utilizan y no solo trabajar en función del contenido, este paso es el punto de ruptura, y para ello se hace necesario que el estudiante logre articular lingüísticamente utilizando un lenguaje acorde, como es el caso de la lógica, y no únicamente con el lenguaje natural.

Desde la perspectiva de Balacheff y Duval, argumentar y demostrar tienen diferencias marcadas, pero coinciden en que la argumentación no siempre abre una vía de acceso a la demostración, además ésta puede ser un obstáculo, en algunos casos, para enseñar a demostrar. Igualmente se debe tener en cuenta que tanto argumentar como demostrar están delimitados por el lenguaje formal o familiar.

Por tanto, según Balacheff (1991), para enseñar la demostración tiene que existir una negociación a fin de que se dé la aceptación por parte de los estudiantes de nuevas reglas, esta negociación es la clave del proceso por dos razones:

i. Porque la situación de enseñanza no puede ser entregada "abierta" a los estudiantes; es decir, no se les puede dejar en completa libertad y sin ninguna dirección por parte del docente. Algunos de los estudiantes no sabrían qué hacer o no entenderían y se confundirían.
ii. Porque las reglas a seguir no pueden ser declaradas explícitamente, pues de otro modo, algunos estudiantes las discutirían o las evadirían, como ocurre con las leyes.

Comprender la demostración demanda una relación particular con el conocimiento, como aquello que está en juego en una construcción teórica, y por lo tanto implica renunciar a las libertades que se podrían tomar personalmente en el juego de la argumentación.

3.2 CONTEXTO ITALIANO: LA UNIDAD COGNITIVA DE TEOREMAS: VÍNCULO ENTRE LOS PROCESOS DE CONJETURA Y PRUEBA.

El trabajo conjunto del equipo italiano de las dos últimas décadas en relación a los procesos de conjetura y prueba, busca alejarse del enfoque tradicional de teoremas en la escuela secundaria, que con la famosa frase *"Demuestre que..."*, limita la tarea de producción de conjeturas en el estudiante, impidiéndosele la propia inserción al conocimiento y al trabajo argumentativo y demostrativo; y más bien se propende por pasar a un enfoque donde se evalúen los avances de procedimientos y declaraciones, utilizados por el estudiante más que los productos acabados. Ello se ha permeado por la utilización de campos de experiencia adecuados y de la apropiada orientación y mediación del docente. Además, es tenida en cuenta la *Unidad Cognitiva de Teoremas*, como constructo teórico, elaborado a partir del trabajo experimental, en el cual se evidencia el fuerte vínculo entre los procesos de conjetura y prueba.

3.2.1 El valor actual de los procesos de conjetura y prueba

Algunos investigadores de Italia, se han encargado de desarrollar nuevas perspectivas de enseñanza que extienden y fortalecen la cultura de la conjetura y la prueba dentro del contexto escolar, contribuciones que eran impensables décadas atrás.

Desde este punto de vista, se tiene la plena convicción de que la conjetura y la prueba, no pueden ser eliminadas del plan de estudios, pues como lo cita Hanna (2007) se privaría al estudiante del reto que significa "reconocer y producir argumentos matemáticamente validos". Además, éstas constituyen un objetivo central en la formación, el cual apunta a la adquisición de destrezas y habilidades en el estudiante, encaminadas a la comprensión y la verificación de los conocimientos matemáticos.

Atendiendo a esta reconsideración, Boero (2007) describe los cambios en las orientaciones del currículo, específicamente en el campo norteamericano, y que de cierta forma involucra a un gran número de países alrededor de los cinco continentes, debido a los alcances que desde el punto educativo logran tener. Es el caso de los estándares del National Council of Teachers of Mathematics **(NCTM),** publicados en el año 2000, donde se explicita la preponderante función de la exploración, la justificación, el razonamiento, la prueba y el uso de conjeturas, dentro del quehacer matemático en el ámbito educativo. Dichos estándares recomiendan la inserción de experiencias que desarrollen el razonamiento matemático, desde diferentes contextos y desde los primeros grados, incluyendo cada uno de los grados del escenario educativo (preescolar a grado 12).

Se ha pretendido entonces, desde el enfoque italiano plantear una teoría innovadora, que intenta contrarrestar y alejar antiguos modelos de enseñanza basados en el aprendizaje a través de la repetición; el estudiante aprende teoremas que otros produjeron, siguiendo la estructura del libro de texto, los cuales no se ajustan a sus necesidades.

El enfoque acoge las dimensiones: histórica-epistemológica, cognitiva y didáctica.

Se recurre a una dimensión histórica-epistemológica, en tanto es necesario un marco que acoja las diferentes “prácticas de enseñanza de la prueba, para identificar los aspectos más sobresalientes de la “cultura de la prueba” que se investiga teórica y experimentalmente; y para orientar la innovación en la enseñanza” (Mariotti & Cerulli, 2001, p. 227). Además de ello, esta dimensión ofrece sugerencias didácticas para planificar actividades accesibles a los estudiantes.

El aspecto cognitivo es importante, como señala Boero (2007) para evitar los enfoques didácticos no apropiados en cuanto a las necesidades y potencialidades de los estudiantes; es necesario comprender esta dimensión en un sentido amplio, que abarque tanto la cognición individual como social en pro de la construcción o transmisión del conocimiento en el aula de clase.

Finalmente, considerar el aspecto didáctico es primordial, puesto que es necesario llevar a la práctica los experimentos de enseñanza y proyectos desarrollados teóricamente, mostrando "como propuestas educativas apropiadas dentro de contextos educativos adecuados pueden hacer juego con las grandes potencialidades de los estudiantes en el enfoque de teoremas y pruebas en la escuela". (Boero, 2007, p. 28)

3.2.2 Antecedentes del estudio italiano

Dentro del contexto italiano se pueden mencionar cuatro equipos de investigación, que han hecho frente a nuevas tendencias y que, desde antes de la publicación de los estándares del **NCTM**, ya venían realizando estudios independientes desde los inicios de los años noventa (90), liderados, en primera instancia, por Paolo Boero de la Universidad de Génova, reconocido investigador italiano en innovaciones didácticas, a la par por Rosella Garutti y Laura Parenti, dentro del mismo claustro educativo. Otros equipos de investigación son los de María Bartolini Bussi, adscrita a la Universidad de Módena; además del de María Alessandra Mariotti, de la Universidad de Pisa; y finalmente el equipo de Ferdinando Arzarello y Ornella Robutti, de la Universidad de Turín.

En Italia algunos grupos de investigación se caracterizan por la estrecha colaboración de los docentes e investigadores en la planificación y la realización de estudios de educación. "Esto contribuye a hacer la relación entre la teoría y la práctica menos problemática que en otros países". (Furinghetti, 2006, s.p)

Los equipos de investigación resaltados, no son ajenos a ello, razón por la cual, desde hace dos décadas, se ha pasado a un trabajo en conjunto, direccionado por

Paolo Boero, en donde cada investigador aporta e imprime un toque especial y particular al trabajo.

> … aunque el logro de los objetivos específicos de estos proyectos difiere, si comparten algunas características comunes, tales como objetivos generales, metodología de la investigación, el análisis epistemológico, cultural y cognitivo. Un marco común surgió como resultado de una larga discusión dialéctica que se remonta a la concepción de la enseñanza de nuestros experimentos: este marco ha puesto de manifiesto algunas de las más profundas motivaciones comunes y perspectivas teóricas de nuestros diseños de investigación independiente. (Mariotti et al, 1997, p. 180, trad.*)*

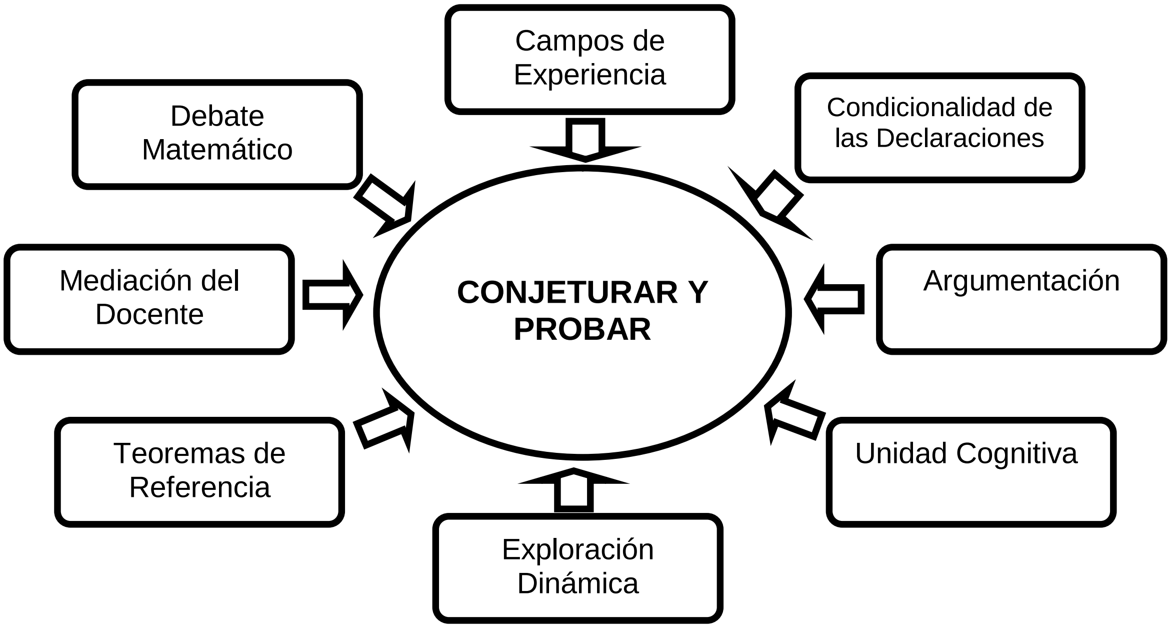
Dentro de estos estudios han participado estudiantes de diferentes edades, específicamente de grado 5 a 12, en grupos de 16 a 20 estudiantes en promedio, y dentro de diferentes contextos temáticos, que de acuerdo con un legado de la tradición italiana, se presta atención; pero no da exclusividad, a los teoremas de geometría.

La metodología de la investigación es de corte cualitativo-longitudinal, que consiste en la observación de las aulas durante varios meses; incluso años, mediante la recopilación de cada uno de los textos y las transcripciones de los debates colectivos, junto con los informes del docente.

En particular, estos equipos de investigación abordan tres cuestiones, a saber:

i. Las dificultades de los estudiantes en la construcción de pruebas.
ii. La imagen de prueba que debe ser transmitida al docente en formación.
iii. Las opciones educativas y culturales necesarias a fin de hacer los procesos de conjetura y prueba accesibles a los estudiantes.

Las investigaciones se centran en las cuestiones presentadas en el esquema 7.



Esquema 7. Elementos centrales para desarrollar los procesos de conjetura y prueba en el aula.

Los estudios que se han realizado y que aún continúan tienen en cuenta otras investigaciones y teorizaciones actuales por fuera de Italia, realizadas durante las dos últimas décadas, entre ellas las de Hanna, Maher, Balacheff, Duval, Harel y Sowder, Simon, Goldenberg y Cuoco, Laborde y De Villiers.

3.2.3 Bases del trabajo de investigación en el equipo italiano

Con el fin de planificar, analizar y verificar los experimentos de enseñanza y de aprendizaje (encaminados a fortalecer la producción de conjeturas y pruebas, e identificar las dificultades de los estudiantes y la mediación del docente) se realizan por el equipo de trabajo de Génova una serie de estudios exploratorios en geometría y aritmética en los grados sexto y séptimo entre 1994 y 1996.

Dichos estudios o experimentos de enseñanza, fueron concebidos desde el juego de ecos y voces (*voices and echoes game*), el cual consiste en la activación de ecos en los estudiantes a través de tareas específicas con preguntas motivadoras, como por ejemplo, *¿qué analogías y diferencias pueden encontrarse entre lo que dice tu compañero y lo que lees… apoya tu hipótesis?*, podría decirse que éste juego advierte cómo el estudiante a través del desempeño adecuado de las tareas propuestas por el docente, puede tratar de hacer la conexión entre la "*voz*"; del docente, y sus propias interpretaciones, concepciones, experiencias, y producir un "*eco*", es decir un vínculo explícito con la voz a través del discurso.

En síntesis, podría asegurarse cómo estos experimentos de enseñanza, pretenden acercarse a los conocimientos matemáticos de una manera que resulte productiva para el estudiante y gratificante para el docente, y que con el debido tratamiento y ejecución de ellos, se logra concebir un aprendizaje alejado del enfoque tradicional, donde las teorías son sólo herramientas de ejercitación, y no hay exigencia de forma alguna de razonamiento y justificación en el estudiante.

Asimismo, asegura Boero (2000) las actividades realizadas durante los experimentos de enseñanza representan una primera aproximación y un punto de partida a los teoremas matemáticos, a la construcción de "*teorema*" como "*declaración, prueba y teoría de referencia*". Los estudiantes deben ser introducidos gradualmente a la **cultura de teoremas**[6], logrando desarrollar la producción de conjeturas en relación a una teoría de referencia, encadenando argumentos deductivos hasta llegar a argumentos socialmente aceptables.

3.2.4 Argumentación y demostración: una relación compleja

Según Boero (1999) ingresar a una **cultura de teoremas** significa desarrollar competencias inherentes a la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas producidas mediante la toma de elementos del saber teórico; donde además, probar (*proving*) es visto como proceso, la prueba (*proof*) como producto y la aproximación a la demostración pertenece a una forma general del aprendizaje (*apprenticeship*). Se necesitan además, análisis epistemológicos y cognitivos para elegir elementos esenciales para la producción y prueba de conjeturas; así, el ingreso a la cultura de teoremas será accesible y significativo para los estudiantes.

Con base en lo anterior, se requiere el uso de elementos que apoyen este proceso, como por ejemplo el papel de la exploración dinámica; referida a la representación mental/dinámica utilizada por el estudiante para encontrar soluciones a las situaciones problema planteadas, a través de la observación de la realidad y del mundo visible, la continuidad posible entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba, Unidad Cognitiva de Teoremas, y el hecho de que los teoremas pertenecen a la cultura científica. Conjuntamente a éstos, se demanda una mediación apropiada por parte del docente para aquellos aspectos en los cuales hay una ruptura con la cotidianidad de la cultura escolar.

Dentro de este marco, cuando se trata el rol de la argumentación en una determinada actividad de índole matemática, se consideran aspectos; fases de

[6] La *cultura de teoremas*, es entendida en Italia como el ambiente de aula propicio para insertar a los estudiantes en los procesos de conjetura y prueba, que incluyen la construcción de teoremas.

construcción de teoremas y construcción de conocimiento matemático por parte de un matemático profesional, (ver Boero 1999):

- **Producción de conjeturas:** Incluye la identificación de regularidades; por parte del estudiante, la caracterización de argumentos para la credibilidad de la conjetura producida, esta fase pertenece a la esfera privada del trabajo del matemático.
- **Formulación del enunciado:** De acuerdo con convenciones culturales compartidas.
- **Exploración del contenido y límites de validez de la conjetura:** Incluye las elaboraciones heurísticas y semánticas acerca de las relaciones entre la hipótesis y la tesis; además la identificación de argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia.
- **Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva:** Bajo la guía de analogías o casos específicos.
- **Organización de la cadena de argumentos:** En la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes. Ésta conduce a la producción de un texto para su publicación.
- **Aproximación a la prueba formal:** Esta fase puede faltar en los teoremas matemáticos, pues las pruebas formales están fuera de alcance y son en su mayoría irrelevantes, ya que existen procesos humanos para controlar la validez matemática.

En contraste al razonamiento hecho por un matemático, se encuentra el razonamiento de un estudiante de escuela, pues mientras el matemático es capaz de jugar libremente con la argumentación y con las restricciones que van apareciendo, al estudiante le causa dificultad dicho juego, debido a que usa argumentos empíricos como: evidencias visuales, ejemplos táctiles, que aunque útiles y válidos, van perdiendo aceptabilidad en la medida que se exige rigor.

Igualmente, la naturaleza de los argumentos a los que los estudiantes se refieren no depende solamente de la cultura de teoremas desarrollada en clase, sino también de la naturaleza de la tarea; es decir, por su propia naturaleza, algunas tareas inducen a los estudiantes a producir argumentos empíricos, tales como mediciones, evidencia visual. De esta forma el estudiante, bajo la guía del docente, va a aprender a utilizar argumentos que pertenezcan a un conjunto de enunciados formales, cercanos a los del matemático profesional.

3.2.5 Construcción de la unidad cognitiva de teoremas

Ahora bien, luego de hacer un rastreo por toda la fase experimental, es pertinente presentar detalladamente los conceptos que han sido creados y acuñados, a fin de generar la construcción de un marco teórico, que facilite la interpretación del comportamiento del estudiante, el análisis y la predicción de sus dificultades.

Inicialmente, deben mencionarse dos conceptos a construir a partir de los estudios de investigación: el campo de experiencia *(field of experience)* y el debate matemático *(mathematical discussion),* como elementos diferenciadores y que marcarán la pauta dentro de la estrategia de intervención en el aula de clase.

Un campo de experiencia puede ser definido, según Boero (2002) como un sistema evolutivo de tres contextos: el contexto externo, caracterizado por la presencia de referentes semánticamente significativos, éste permite la internalización del campo visual donde el experimento de dinámica mental es llevado cabo; el contexto interno del estudiante, arraigado en la exploración dinámica, y finalmente el contexto interno del docente, distinguido por sus concepciones y objetivos de enseñanza. Un campo de experiencia en una actividad de clase puede tener diferentes objetivos, pero debido al alcance y el propósito de la investigación, sólo se tiene en cuenta el acercamiento a los teoremas.

El propósito del campo de experiencia dentro del marco de investigación italiano, es la generación de un contexto adecuado, haciendo del ambiente de clase un espacio propicio para la generación de un aprendizaje significativo y de construcción autónoma por parte del estudiante.

De otro lado, en lo que respecta al debate matemático, Bartolini Bussi (citado por Mariotti et al 1997) lo define como "una polifonía de voces articuladas en un objeto matemático, que es uno de los objetivos de la actividad de enseñanza-aprendizaje" (p. 180). El debate matemático, es gestionado cuidadosamente por el docente, con el objetivo específico de la construcción social del sentido y valor de un teorema, ya que es el motivo del debate. Luego, la complejidad de los procesos de conjeturar, argumentar, demostrar y sistematizar las pruebas relacionadas con una situación problema, quedará mediada por la correcta ejecución y puesta en práctica del debate en clase; donde el estudiante consiga avanzar y progresar en la prueba matemática que intenta construir.

Con referencia a este marco, son presentados dos constructos teóricos: el teorema matemático y la unidad cognitiva, que pueden ser usados para ayudar en la gestión del trabajo de teoremas en clase, el funcionamiento de la solución de situaciones problemas.

En primera instancia, la existencia de una teoría de referencia con un sistema de principios y normas establecidas, es necesaria, si el propósito es tratar la prueba en un sentido matemático.

Boero (2002) hace alusión a que los principios y las normas de deducción están íntimamente interrelacionadas a fin de que lo que caracteriza a un teorema matemático es el sistema de declaración, la prueba de referencia y la teoría; al mismo tiempo un análisis histórico-epistemológico pone de manifiesto aspectos de este complejo enlace y muestra la forma en que ha evolucionado a lo largo de los siglos, el punto histórico a partir del significado de las matemáticas dado por

Euclides, y el punto epistemológico y educativo desarrollado por una perspectiva desde la investigación y desarrollo educativo.

Al tener en cuenta estas posiciones contrastantes, es válido trabajar dentro de una perspectiva coherente pero no formalista, cercana a la comprensión y a las concepciones del estudiante.

Así mismo, considerando un análisis epistemológico del trabajo realizado en el pasado y aún en el presente por los geómetras y la evidencia empírica obtenida de los citados experimentos de enseñanza con estudiantes del nivel medio en Italia, se ha observado una continuidad entre el proceso de producción de conjeturas y la construcción de su prueba, *"*reconocible en la estrecha correspondencia entre la naturaleza y los objetos de las actividades mentales involucradas, expresa un fenómeno cognitivo, que en lo sucesivo se denominará Unidad Cognitiva de Teoremas*".* (Boero, 2002, p. 250, trad.)

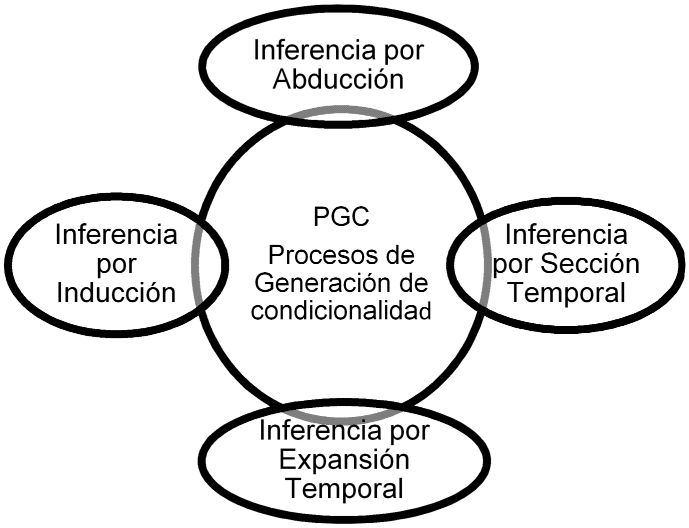
La **Unidad Cognitiva de Teoremas**, puede caracterizarse como una situación peculiar en la que algunos argumentos, producidos en la fase de construcción de conjeturas, se convierten en ingredientes para la construcción de la prueba. Garuti et al (1998) plantean que durante la producción de conjeturas, el estudiante trabaja progresivamente su declaración a través de una intensa actividad argumentativa y que después, durante la fase de construcción de la prueba, el estudiante hace enlaces coherentes, organizando algunos de los argumentos anteriormente producidos de acuerdo con una cadena lógica. Si esta unidad se rompe, como cuando se presenta al estudiante la tarea con el encabezado "*demuestre que…",* se pierde la continuidad y sólo se recupera cuando existe la re-apropiación de la declaración a través de un nuevo proceso de exploración, es decir, la reconstrucción del ciclo: explorar, conjeturar, explorar y reorganizar una nueva demostración.

Este ciclo se divide en dos fases:

i. Producción de las conjeturas.
ii. Construcción de la prueba.

En ambos casos se inicia con una exploración dinámica. Para la primera fase la exploración es sobre la situación problema, a fin de generar un espacio de posibles configuraciones y así trabajar después en la producción de la conjetura. Esta exploración dinámica tiene una importancia fundamental, pues provee al estudiante no sólo de la declaración que después validará: conjetura, sino también de argumentos que pueden ser utilizados posteriormente. Este razonamiento argumentativo permite a los estudiantes la exploración consciente de alternativas y el acercamiento progresivo al establecimiento de declaraciones, así como la justificación de la plausibilidad de las conjeturas producidas.

En conjunto a los constructos teóricos mencionados, cabe señalar el vínculo de la generación de la condicionalidad de las declaraciones durante el proceso de conjeturas, con el proceso de probar, esto no es más que el hecho de presentar las declaraciones en forma condicional: *“si a entonces b”.* Durante la caracterización de algunos componentes presentes en la mencionada condicionalidad, se pudieron identificar cuatro tipos de inferencia, que intervienen solos o combinados (Boero et al, 1999). El esquema 8 sintetiza los tipos de inferencia.



Esquema 8. Tipos de inferencia que intervienen en los procesos de generación de condicionalidad.

La implicación inmediata a la enseñanza es que los análisis a priori y a posteriori deben permitir la creación de tareas adecuadas para la activación de los distintos tipos de inferencia, a fin de que puedan experimentar procesos relevantes en las actividades encaminadas a los teoremas matemáticos.

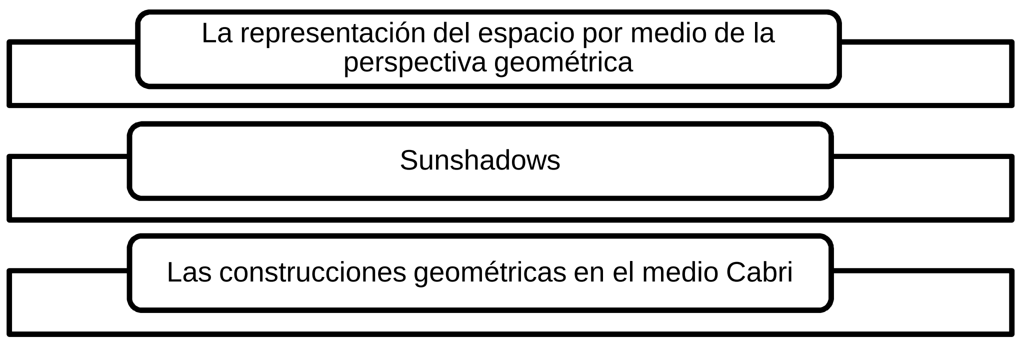
3.2.6 Fase experimental: de la teoría a la práctica

Según el marco teórico esbozado en al apartado anterior, se identifican dos elementos cruciales en la enseñanza: la función de un determinado campo de experiencia y el papel del docente como mediador cultural. El primero debe cumplir con la tarea de promover la unidad cognitiva y el segundo es el responsable de introducir a los estudiantes en una perspectiva teórica, fundamentada en una visión sistémica de las matemáticas.

Los experimentos de enseñanza llevados a cabo, esta vez por los grupos de trabajo abordados, están orientados a afianzar los siguientes objetivos:

i. Adquirir conciencia de la existencia de la dinámica mental para aprender a gestionarla.
ii. Producir declaraciones escritas para ser expresadas en forma condicional.
iii. Acercar a un proceso de "*construcción de teoría*"; a los teoremas y a la plantilla para la elaboración de su prueba.

Igualmente, estos experimentos de enseñanza se refieren al enfoque de teoremas de geometría; la producción de las declaraciones y la construcción de pruebas, entre campos de experiencia (citados por Mariotti et al 1997). Ver esquema 9.



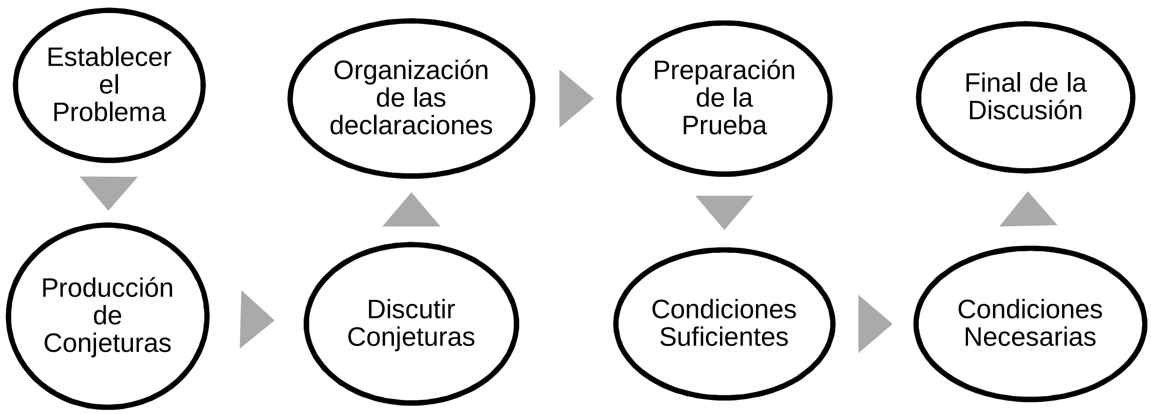
Esquema 9. Campos de experiencia utilizados en el estudio

3.2.7 La representación del espacio por medio de la perspectiva geométrica

Con el fin de introducir una primera idea de teorema a los estudiantes jóvenes; grados quinto y sexto, este campo de experiencia consiste en proponer experiencias de observación de objetos, dibujos y/o fotos, variando el punto de vista del observador.

3.2.8 Sunshadows

"El campo de experiencia de sunshadows es un contexto en el que, naturalmente, los estudiantes pueden explorar situaciones problemáticas en los diferentes medios dinámicos" (Boero et al, 1996, p. 121), ofrece la posibilidad de producir en sesión pública la resolución de situaciones problema, conjeturas que son significativas desde el punto de vista geométrico y que no son fáciles de ser probadas. Este campo de experiencia se organiza de acuerdo a una serie de etapas, como lo ilustra el esquema 10.



Esquema 10. Etapas para desarrollar el pensamiento conjetural a partir del campo de experiencia Sunshadows.

3.2.9 Las construcciones geométricas en Cabri

Este campo de experiencia pretende potencializar la búsqueda de conjeturas con el computador como mediador semiótico (ver Mariotti & Cerulli, 2001), a partir de programas especializados; como el Cabri, el estudiante dibuja figuras a través de comandos disponibles en el menú, integrada a la función de arrastra, viene la necesidad de justificar y validar la propia construcción, el punto clave es que lo que debe ser validado es la corrección de la construcción, es decir, no es el producto de un procedimiento lo que debe ser validado, sino el procedimiento como tal. (Mariotti, 2008)

El trabajo del equipo italiano ofrece herramientas interesantes a la enseñanza y de gran trascendencia para investigaciones futuras, en lo concerniente a la inserción de los teoremas en secundaria. Cabe mencionar la minuciosidad con la que han sido evaluados cada uno de los resultados de las experiencias, y cómo a partir de éstos se ha creado una teorización novedosa, que inserta constructos y estrategias a la línea de pruebas y conjeturas en la clase de matemáticas. En síntesis podrían mencionarse los siguientes puntos como elementos que aportarían a la evolución de la Educación Matemática:

i. La intencionalidad específica en la planeación de actividades y/o situaciones problema.
ii. La creación de contextos adecuados que fomenten el espacio para la discusión, el intercambio de ideas y la interacción entre pares.
iii. La incorporación de TIC[7] en el aula de clase como herramienta novedosa que favorezca la manipulación directa con el conocimiento.
iv. La continuidad en el aprendizaje que conlleve a una cultura de clase, previendo grandes desarrollos a futuro.
v. El pensar no tanto en productos acabados, sino en la mejoría del proceso y del procedimiento para conseguirlos.

[7] Las *TIC* se definen como: Tecnologías de la información y la comunicación.

3.3 CONTEXTO ALEMÁN: LA COMPETENCIA DEMOSTRATIVA: ARGUMENTAR, JUSTIFICAR Y CONJETURAR DESDE LA BÁSICA PRIMARIA.

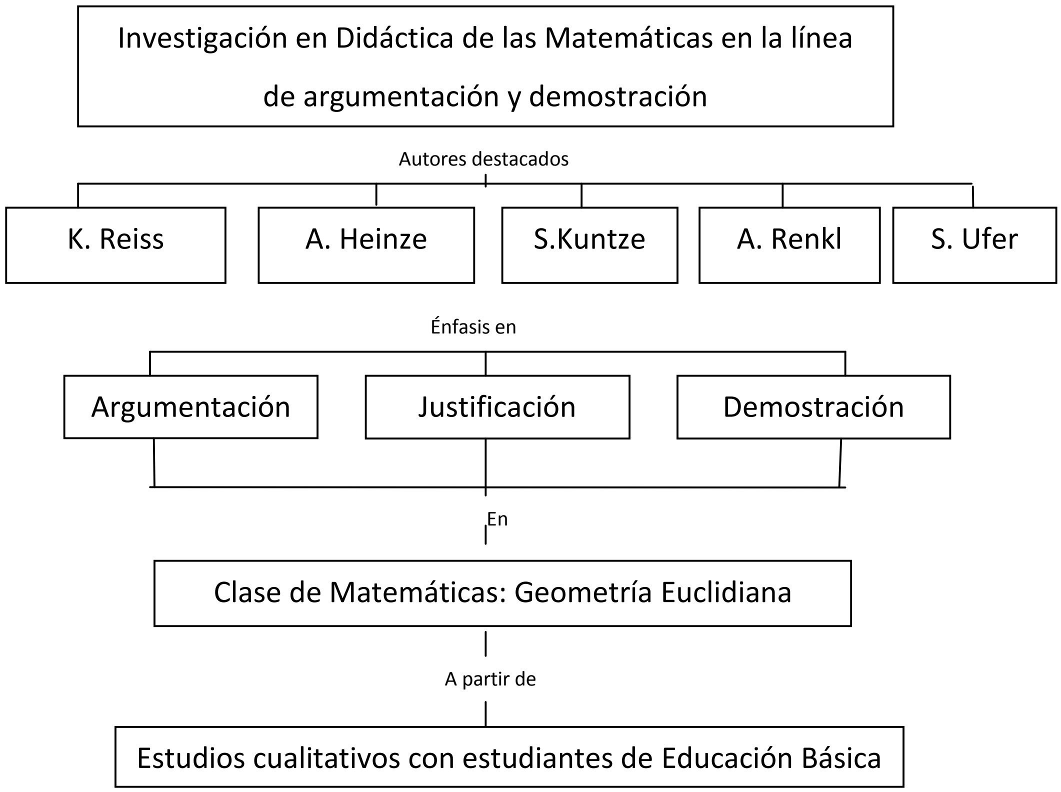
La competencia demostrativa es la capacidad que desarrollan los estudiantes para aplicar diferentes tipos de razonamiento y plantear argumentos y justificaciones en la actividad demostrativa. Su desarrollo comienza en la educación básica promoviendo un ambiente de aprendizaje en el cual los procesos de argumentación y justificación hacen parte de la clase de matemáticas.

Se pretende en este apartado retomar aportes que al respecto ha realizado el grupo de investigación en didáctica de las matemáticas de la Universidad *Ludwig–Maximilians-Universität* de Múnich-Alemania, liderado por Kristina Reiss.

3.3.1 Investigación cualitativa en didáctica de las matemáticas: contexto alemán

El grupo de investigación en didáctica de las matemáticas llamado *Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik*[8]; Cátedra para la didáctica de las matemáticas, al cual pertenece Kristina Reiss, ha dedicado gran parte de sus estudios a investigar la actividad matemática desde un contexto educativo y didáctico, dando énfasis a los estudios cualitativos con la población de estudiantes de básica secundaria de diferentes colegios de Alemania. Su trabajo se ha centrado en el análisis de los procesos de argumentación, justificación y demostración en la clase de matemáticas, particularmente en lo concerniente al aprendizaje de la geometría euclidiana. El esquema 11 caracteriza la línea de investigación que ha seguido este grupo.

[8] La dirección electrónica de este grupo es: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~didaktik/



Esquema 11. Investigación cualitativa en argumentación y demostración: contexto alemán

3.3.2 Clase de matemáticas en el contexto alemán

3.3.2.1 Una perspectiva desde los estándares de educación

Antes de analizar los aportes que han realizado los autores abordados en cuanto a la línea de demostración matemática, resulta pertinente caracterizar la educación matemática en el contexto alemán, y resaltar lo que se propone en los estándares de educación alemana en cuanto a la competencia demostrativa. Para ello se retoman algunos de sus aportes:

En los estándares alemanes de educación matemática se habla de las competencias matemáticas generales *(allgemeine matematische Kompetenzen),* como la capacidad que deben adquirir los estudiantes para aplicar competentemente procesos de razonamiento en contextos matemáticos y no matemáticos. (Lehrpläne und Rahmenrichlinien für Mathematikunterricht, 2008).

Las competencias matemáticas en Alemania se presentan en la tabla 1.

Tareas de la asignatura de Matemáticas en la Básica Primaria
Competencias matemáticas generales
• Resolución de problemas. • Comunicación. • Argumentación. • Modelación. • Representación.

Tabla 1. Competencias matemáticas generales: contexto alemán

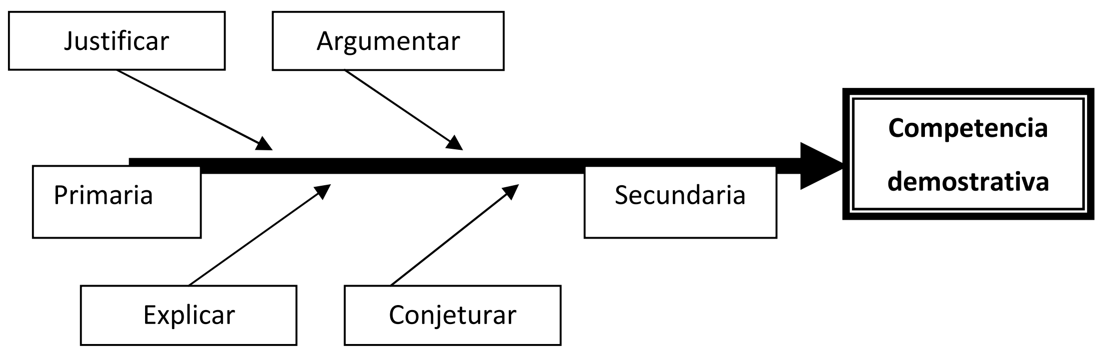
Se proponen diez (10) estándares, tanto de contenido matemático como de orientación metodológica, que se espera sean desarrollados a lo largo de la educación primaria y secundaria. Estos se muestran en la tabla 2.

ESTÁNDARES GENERALES DE MATEMÁTICAS	
1. Números y operaciones. 2. Modelos, funciones y álgebra. 3. Geometría y orientación espacial. 4. Medidas. 5. Análisis de datos, estadística y probabilidad.	Categorías de contenido matemático.
6. Resolución de problemas. 7. Argumentar y Demostrar. 8. Comunicar. 9. Relacionar. 10. Representar.	Categorías de orientación metodológica.

Tabla 2. Estándares generales de matemáticas: contexto alemán

En el contexto alemán, es relevante el proceso de *argumentación* desde la educación básica. Los investigadores alemanes coinciden en promover la argumentación y la justificación en el ambiente de clase, así como los procesos de explicar y conjeturar a partir de situaciones cotidianas llevadas al aula. Al respecto Reiss (2007) propone que "uno de los anteriores estándares de orientación metodológica lleva el título de argumentar y demostrar. Éste debería jugar un rol esencial en todos los niveles desde la educación básica primaria hasta los siguientes niveles escolares". (p. 5, trad.)

En la medida en que estos procesos sean promovidos constantemente y hagan parte de las rutinas de aprendizaje, el estudiante podrá desarrollar la *competencia demostrativa* en los niveles de educación secundaria una vez se enfrente a otro tipo de situaciones abstractas como los teoremas y los problemas propios de la geometría euclidiana. Mediante el diagrama causa y efecto puede entenderse la relación presentada en el esquema 12.



Esquema 12. Bases de la competencia demostrativa

3.3.2.2 Una perspectiva desde el contexto escolar

El Gimnasio Ernst Moritz Arnold, ubicado en la ciudad de Bonn, Alemania, sirvió de escenario educativo para observar algunas de las clases de matemáticas dictadas a los estudiantes de octavo grado[9]. A continuación se caracterizan las fases en las que se abordó el concepto de función lineal.

La enseñanza y el aprendizaje de las pruebas en el aula de matemáticas en Alemania están dominados por un enfoque que puede ser caracterizada por una especie de "*diálogo socrático*", en donde el docente plantea preguntas enmarcadas en situaciones y los estudiantes proponen diferentes hipótesis dependiendo de la profundidad conceptual que posean (Reiss et al, 2006). En la observación realizada, fue posible comprobar esta caracterización.

En una ***primera fase***, la docente pregunta a sus estudiantes si tienen dudas sobre una tarea propuesta en la clase anterior.

---

[9] Uno de los autores de este análisis documental, estuvo en la ciudad de Bonn, Alemania durante los meses de septiembre a diciembre de 2008 y tuvo la oportunidad de visitar el colegio "Gimnasio Ernst Moritz Arnold "para observar algunas clases de matemáticas con estudiantes de octavo grado. (Ver anexo G)

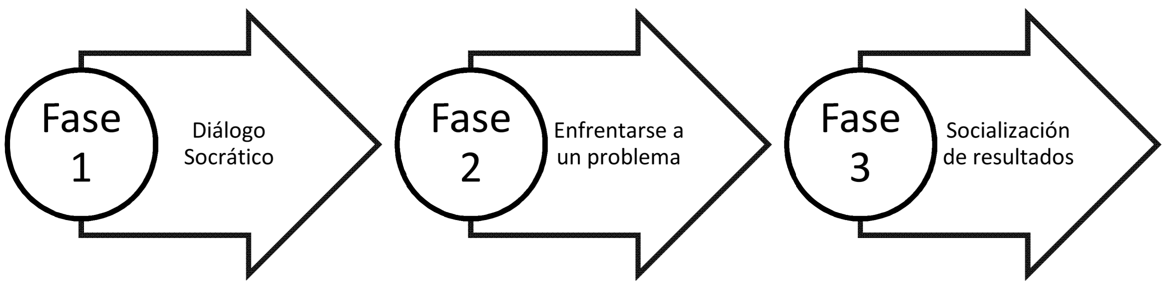
Algunos estudiantes realizan preguntas y la docente propicia un diálogo en el que otros estudiantes participan para resolver las inquietudes. Posteriormente la docente plantea preguntas para introducir el tema de la función lineal y sus posibles usos en la cotidianidad. Se genera una discusión que dura aproximadamente diez minutos en la cual algunos estudiantes se notan más involucrados en el diálogo que otros. En consecuencia, surge la pregunta por estrategias eficientes para que los estudiantes se involucren en el proceso de construcción de un concepto. Al respecto, Reiss et al (2006) reconocen que en este diálogo, el docente no sólo determina quién está autorizado a contribuir, sino que la mayoría de las contribuciones verbales parten de él mismo. Muchos estudiantes, por lo tanto, no podrán participar activamente en este proceso y sólo ven la demostración válida en el tablero o en el libro de texto, pero no pueden describir la forma cómo se llegó a ésta.

En una ***segunda fase***, los estudiantes se enfrentan a un problema de aplicación del concepto de función lineal, en el cual es necesario encontrar valores; coordenadas, construir una gráfica y posteriormente hallar la pendiente de la misma.

El concepto de pendiente aún no ha sido explicado en clase, y el procedimiento algebraico para hallarla también es desconocido para los estudiantes. Es así como se enfrentan a un reto en el cual deben hacer uso de saberes previos y conjeturar acerca de posibles soluciones. Para ello los estudiantes trabajan individualmente o en pequeños grupos, a los cuales la docente acude constantemente para resolver inquietudes, pero en especial, para hacer preguntas. Son preguntas orientadoras con las que se pretende que los estudiantes lleguen a conjeturas que luego validarán o descartarán.

En una ***tercera fase*** algunos estudiantes comparten sus soluciones con el resto del grupo saliendo al tablero para realizar allí los cálculos y la gráfica. Los demás estudiantes participan para aprobar o desaprobar los procedimientos y las respuestas a las que llegaron sus compañeros.

En este momento de la clase, la docente interviene poco, su función es coordinar a los estudiantes para que participen organizadamente, pero en cuanto a la corrección de las soluciones, prefiere esperar a que sean los estudiantes quienes identifiquen si la solución es válida. (Ver Anexo G). El esquema 13 presenta las fases observadas durante la clase.



Esquema 13. Fases de una clase de matemáticas. (Observación en el contexto Alemán)

3.3.3 Argumentos y niveles de competencia.

La demostración en la educación alemana ha sido considerada como una parte importante en la clase de matemáticas y como un aspecto esencial de la competencia matemática. En este sentido, la demostración no sólo es vista como la prueba oficial que cumpla las exigencias de la disciplina científica. Demostrar en el aula, abarca una amplia gama de argumentos formales e informales que van surgiendo en la medida en que la competencia demostrativa se va desarrollando. (Reiss et al, 2001)

En los estudios cualitativos que han hecho investigadores como Reiss et al (2001), Reiss (2007) y Ufer (2008) es recurrente el concepto de **Competencia Demostrativa** (*die Beweiskompetenz),* que se define como la capacidad que desarrollan los estudiantes para aplicar diferentes formas de razonamiento y plantear argumentos y justificaciones en la actividad demostrativa. Ufer (2008) define la **Competencia Demostrativa en Geometría** como la capacidad específica para la comprensión y resolución de problemas demostrativos propios de la geometría elemental.

Al respecto Reiss (2007) propone un modelo de Competencia Demostrativa categorizado en tres niveles.

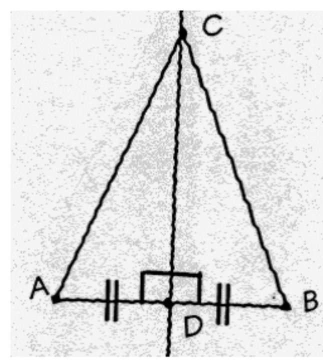
- **Primer nivel:** En él los estudiantes no aplican un razonamiento matemático elaborado, pero se requiere del uso de conceptos y reglas elementales de operatividad.
- **Segundo nivel:** En él se presupone el conocimiento de hechos y conceptos geométricos. Además, los estudiantes de este nivel de competencia están en capacidad de proporcionar la justificación problemas geométricos.
- **Tercer nivel:** En él se pide a los estudiantes encontrar argumentos suficientes para demostrar ciertos teoremas. Un requisito previo para ello es el razonamiento autónomo y la solución creativa de problemas. Ver tabla 3:

Modelo de competencia demostrativa		
Nivel I	**Nivel II**	**Nivel III**
Simple aplicación de reglas operativas y razonamiento elemental.	Argumentación y justificación simple, presentada en un paso.	Argumentos y justificaciones presentadas en varios pasos.

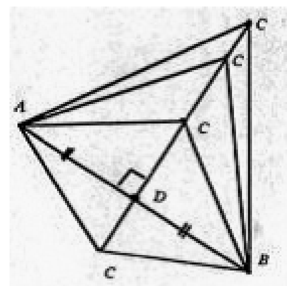
Tabla 3. Modelo de competencia demostrativa

Ufer (2008) afirma que, un **paso demostrativo** es una acción deductiva argumentativa en la cual el estudiante tiene que hacer uso de una proposición matemática conocida.

Reiss (2007) propone una categorización en cuanto a los tipos de argumentos que presentan los estudiantes en la actividad demostrativa. A continuación se describen tales argumentos en los esquemas 14, 15, 16, 17 y 18 retomando la traducción de algunos de los ejemplos que propone la investigadora.

Problem: *In der nebenstehenden Abbildung ist **C** irgendein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke **AB**.* *Jens, Meike, Sylvia und Frank haben versucht, folgende Aussage zu beweisen:* *Das Dreieck **ABC** ist stets gleichschenklig.* *(Reiss, 2007, p.28)*	**Problema:** En la imagen del la derecha, **C** es un punto cualquiera de la mediatriz de **AB**. Jens, Meike, Syilvia y Frank intentaron demostrar la siguiente afirmación: El triángulo **ABC** es Isósceles.	

Esquema 14. Situación demostrativa

Argumentación empírica El estudiante utiliza un argumento basado en casos particulares para demostrar la tesis.		
Frank antwortet so: Ich habe C auf der Mittelsenkrechten verschoben und jeweils die Strecke und gemessen. Sie waren immer gleich lang. Also waren die Dreiecke gleichschenklig. Die Behauptung ist daher wahr. (Reiss, 2007, p.28)	Frank respondió así: Ubiqué **C** en diferentes lugares de la mediatriz y luego medí los lados. Éstos medían siempre lo mismo, entonces los triángulos eran isósceles. Por lo tanto la afirmación es verdadera.	

Esquema 15. Argumentación empírica

Argumentación circular El estudiante recurre a la tesis para demostrar la misma.	
Afirmación: Ángulo **ADC = 90°**. Ángulo **BDC = 90°**. Ángulo **CAB =** Ángulo **CBA**. Por lo tanto: **AC=BC**. La afirmación es verdadera.	**Justificación:** Línea perpendicular. Línea perpendicular. Los ángulos de la base de un **triángulo isósceles** son siempre iguales.

Esquema 16. Argumentación circular

<table>
<tr><td colspan="2">Argumentación Formal
El estudiante realiza pasos demostrativos recurriendo a teoremas o axiomas aprendidos anteriormente. Encadena estos pasos aplicando reglas de inferencia lógica.</td></tr>
<tr><td>Afirmación:
AD=BD.
Ángulo ADC=90°.
Ángulo BCD=90°.
DC=CD.
El triángulo ADC y triángulo BDC son congruentes.
Por lo tanto: AC =BC.
La afirmación es verdadera.</td><td>Justificación:
La mediatriz divide AB en segmentos iguales.
Línea perpendicular.
Línea perpendicular.
El mismo segmento.
Los dos lados del ángulo incluido son iguales.</td></tr>
</table>

Esquema 17. Argumentación formal

<table>
<tr><td colspan="2">Argumentación Narrativa
El estudiante explica sus justificaciones de manera narrativa, enlaza sus argumentos sin, necesariamente, aplicar reglas de inferencia.</td></tr>
<tr><td>Weil die Strecke im rechten Winkel schneidet, ist B der Spiegelpunkt von A. Das Dreieck besteht also aus zwei rechtwinkligen Dreiecken, die Spiegelbilder voneinander sind. Daher haben und dieselbe Länge.

Die Behauptung ist also wahr.
(Reiss, 2007, p.29)</td><td>B es un punto reflejo de A porque CD corta al segmento AB en ángulos rectos. Entonces el triángulo ABC está conformado por dos triángulos rectángulos, los cuales son imagen reflejo uno del otro. Por lo tanto los lados AC y BC tienen el mismo largo.

La afirmación es verdadera.</td></tr>
</table>

Esquema 18. Argumentación narrativa

3.3.3.1 Conocimiento metodológico en el desarrollo de la competencia demostrativa

El conocimiento de conceptos y normas (o teoremas) no es suficiente para realizar las pruebas matemáticas. Además de esto, la comprensión y el uso de los procedimientos de demostración matemática son requisitos previos necesarios. Este conocimiento metodológico consta de tres aspectos, que son independientes uno de otro: el rigor de la prueba, la estructura de la prueba y la cadena lógica. (Reiss & Heinze, 2003)

- **Rigor de la prueba:** Una prueba matemática debe ser un patrón de razonamiento deductivo que consta de argumentos; pues otro tipo de argumentos empírico-inductivos, o la referencia a una autoridad superior, o de percepción no son argumentos suficientes para una demostración en el seno de la comunidad matemática.
- **Estructura de la prueba:** La prueba comienza en una suposición o en un argumento conocido y termina en una afirmación, la cual se demuestra si los argumentos son válidos desde un punto de vista matemático. Por otra parte, los baches que aparezcan en la estructura de la argumentación no son aceptadas como parte de una prueba matemática.
- **Cadena lógica:** Cada paso de una prueba está ligado al anterior de manera lógica; es decir, se puede justificar cada uno recurriendo a los pasos anteriores.

3.3.3.2 La solución heurística de ejemplos en el desarrollo de la competencia demostrativa

Autores como Reiss & Renkl (2002) y Reiss & Renkl (2005) indagan cómo incide en los estudiantes los procedimientos heurísticos propuestos por los docentes a la hora de plantear la solución de ciertas tareas como ejemplos claves para el desarrollo de la competencia demostrativa en geometría. La aplicación de la heurística en la solución de ejemplos requiere:

i. Que cada ejemplo se involucre en una situación hipotética, pero con una aplicación en el mundo real que conduzcan al problema matemático.
ii. Que el conocimiento geométrico que podría ser útil para la solución es ampliamente discutido. En ocasiones hay partes del conocimiento que resultan ser superfluos en el proceso de probar. Sin embargo, los estudiantes deben darse cuenta de qué es importante y qué no para una solución.
iii. Que se presente la solución de la prueba sólo después de que los estudiantes han sido estimulados a encontrar sus propias fórmulas y conjeturas. Por lo tanto, no sólo lograrán comprender qué tipo de argumento se utiliza, sino por qué se utiliza.

Estos aportes que se destacan desde el contexto alemán, permiten extraer algunas conclusiones pertinentes para la Educación Matemática.

La exploración y la búsqueda de conjeturas son esenciales para que los estudiantes logren darle sentido a la demostración matemática y que puedan potencializar su competencia demostrativa en geometría. Conjuntamente, es necesario un ambiente de clase en el cual se promuevan el razonamiento y la argumentación. Para lograr esto, el docente debe reconocer las variables que pueden fomentar la comprensión de la demostración por parte de los estudiantes de secundaria. Ellas pueden ser individuales o relativas a la clase y se caracterizan así:

i. Existen variables individuales, ya sea cognitivas o no cognitivas, que influyen en la competencia demostrativa de los estudiantes.
ii. Los diferentes estilos que caracterizan una clase de matemáticas, influyen directamente en que se dé o no, el desarrollo de la competencia

demostrativa. Al respecto, los investigadores presentan una propuesta de solución heurística de ejemplos, donde el docente brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar, reconocer y utilizar explícitamente las diferentes fases requeridas en la realización de una prueba.

iii. Las variables sujetas a los estilos de la clase y las variables que tienen que ver con los procesos individuales que desarrolla el estudiante, están relacionadas de manera interdependiente. Se destaca la importancia de la comprensión de conceptos matemáticos para que el estudiante pueda desarrollar la competencia demostrativa, la cual no se puede asumir como un aspecto independiente de las bases conceptuales.

Se hallan diferencias en cuanto a las *competencias básicas* y a *las competencias demostrativas*. Las competencias básicas se basan en el uso de declaraciones o de conceptos básicos, como simetría o la suma de ángulos. Con lo que respecta a las competencias demostrativas, que exigen de argumentación o demostración, pueden clasificarse en dos tipos: las tareas que exigen de la argumentación sencilla recurriendo a una idea previamente aprendida; y las que requieren de una cadena argumentativa haciendo uso de reglas de inferencia lógica.

Con relación a lo anterior, se establecen niveles de competencia. El primer nivel de competencia no tendrá que ser el razonamiento matemático, pero requiere de la aplicación de conceptos, las normas elementales y conclusiones sin argumentación. El segundo nivel presupone el conocimiento de hechos y conceptos geométricos. Además, los estudiantes de este nivel de competencia deben ser capaces de proporcionar la justificación simple de los problemas geométricos y encontrar una notación para ello. El tercer nivel de la competencia pide a los estudiantes encontrar argumentos suficientes para demostrar una tarea. Un requisito previo para ello es la solución autónoma y creativa de problemas.

3.4 CONTEXTO ESPAÑOL: RAZONAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA DEMOSTRACIÓN: UN RETO EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES.

Una reflexión profunda en la labor docente, particularmente en el uso de la demostración en la formación de los estudiantes, pondrá en evidencia que a través de su valoración como componente clave en el cuestionamiento objetivo del conocimiento matemático, es posible promover la comprensión matemática. Los procesos de argumentación y justificación contribuyen al desarrollo de operaciones mentales tales como abstraer, analizar, sintetizar, comparar, clasificar y particularizar.

Las pruebas están íntimamente conectadas con la construcción de las ideas matemáticas y por tal deberían ser una actividad tan natural, como definir, modelar, representar o resolver problemas.

Pero no todos los estudiantes pueden sacarle partido a la demostración, en vista de que no comprenden qué es, cuál es su función, dónde reside su fuerza y utilidad, y lo que puede ser peor, es algo de lo que el docente no es consciente. (Lupiañez & Codina. 1999)

Los investigadores: Ángel Gutiérrez Rodríguez, Ramón Marrades, Juan Díaz Godino, Ángel Martínez Recio, Marcelino Ibañes, Tomás Ortega, José Luis Lupiañez y Enrique de la Torre, han realizado en España investigaciones sobre la problemática de la demostración matemática en contextos escolares y su papel en el razonamiento matemático.

En estas investigaciones se ha evidenciado el bajo nivel de razonamiento matemático que muestran los estudiantes en la elaboración y comprensión de pruebas, y como los estudiantes conciben la demostración como “un ritual inútil en el que se les obliga a seguir modelos predeterminados por el docente”. (Lupiañez & Codina. 1999, p. 8)

Este *"bajo nivel"* puede ser originado por la concepción extremadamente formalista que se tiene de la demostración en el aula de clase de matemática. Por lo que el docente no debe frenar los intentos de los estudiantes de justificar a su modo los enunciados matemáticos, hay que aprovechar esas aproximaciones hasta llegar a argumentos deductivos formales.

Se evidencia también, la necesidad de incluir procesos de justificación desde los primeros años de enseñanza, así como la consideración de diferentes significaciones y esquemas de prueba producidas por los estudiantes, en aras de crear cultura argumentativa que genere en los estudiantes conciencia sobre el por qué y para qué demostrar, y que conciban la prueba como parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Al respecto Ángel Gutiérrez afirma:

> (…) No podemos esperar al bachillerato para enseñar a los estudiantes a razonar y demostrar formalmente, sino que esta formación debe iniciarse desde el primer momento de la enseñanza obligatoria (…) (de esta manera) (…) los estudiantes practicarán las matemáticas de forma creativa (…) y entenderán el razonamiento como herramienta del razonamiento riguroso, que les será útil en cualquier contexto docente, familiar, laboral. (Gutiérrez, 2007, p. 2-22)

Buscando mejoras en la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento, específicamente en la demostración, así como la superación de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al resolver problemas y situaciones de demostración, los investigadores españoles plantean analizar los procesos, problemas, ventajas y dificultades que aparecen en la enseñanza y aprendizaje de la demostración; pues lo fundamental en el aula de clase es que se considere la demostración como un medio de validación. Se trata de fortalecer la demostración matemática, permitiendo que los estudiantes logren encontrarle utilidad al proceso, y puedan producir pruebas con sentido de los enunciados presentados por el docente.

Este análisis implica cambiar radicalmente el carácter formalista dado a la demostración, esto significa analizarla como parte esencial del razonamiento, compararla con otros procesos como la justificación, la explicación y la argumentación; así como replantear y analizar las funciones, fuentes de convicción, significados, esquemas y tipos de demostración en los estudiantes.

De otro lado, analizar el cómo se está llevando este proceso al aula de clase deja ver la necesidad de incorporar nuevos métodos, para lo cual los autores proponen un acercamiento a la demostración desde los primeros años de la educación, considerando la epistemología y utilizando los Software de Geometría Dinámica **(SGD)** entendidos "como herramientas para mejorar la comprensión de la naturaleza de la demostración matemática y destrezas de demostración". (Gutiérrez, 2007, p. 21)

Los investigadores en España proponen introducir el proceso de demostración matemática al aula de clase, asumiendo la epistemología y los **SGD** como fuentes para potencializar su desarrollo. Se pretende además, que los docentes reestructuren la noción que tienen de demostración y esto implica revisar el carácter formalista que se le atribuye a ésta en el aula, considerándola como un proceso largo en el que se inicia con pruebas empíricas-inductivas, hasta llegar a las pruebas formales y valorando sus distintas funciones, fuentes de convicción de los estudiantes y diversos significados en contextos institucionales y personales.

3.4.1 Hacia la reestructuración del proceso de demostración

3.4.1.1 Revisión del carácter formalista de la demostración en el ámbito escolar

Llevar al aula de clase la demostración en su sentido lógico formal crea en los estudiantes dificultades haciendo que la conciban como un producto acabado y repetitivo en el que no hay que realizar aportes, sino repetir lo ya dicho y hecho por otros, lo anterior priva a los estudiantes del proceso de razonamiento argumentativo y demostrativo y de enfrentarse a contextos de justificación de sus ideas y de enunciados y proposiciones matemáticas, al respecto Recio (2001), sostiene que al interior del aula de clase es necesario

> (…) ampliar el estricto sentido formalista que la interpretación dominante en la institución matemática atribuye a la demostración matemática y considerar que tanto la argumentación intuitiva, como la prueba empírico-inductiva, como la demostración deductiva formal e informal constituyen aspectos complementarios de la demostración matemática. (p.36)

Esta ampliación permitirá que los estudiantes poco a poco efectúen procesos de razonamiento matemático.

Desde el Ministerio de Educación y Ciencia Español, en conjunto con los estándares del **NCTM** (2000), se plantea también la valoración de los procesos empírico-inductivos como pioneros en el proceso de construcción del razonamiento deductivo:

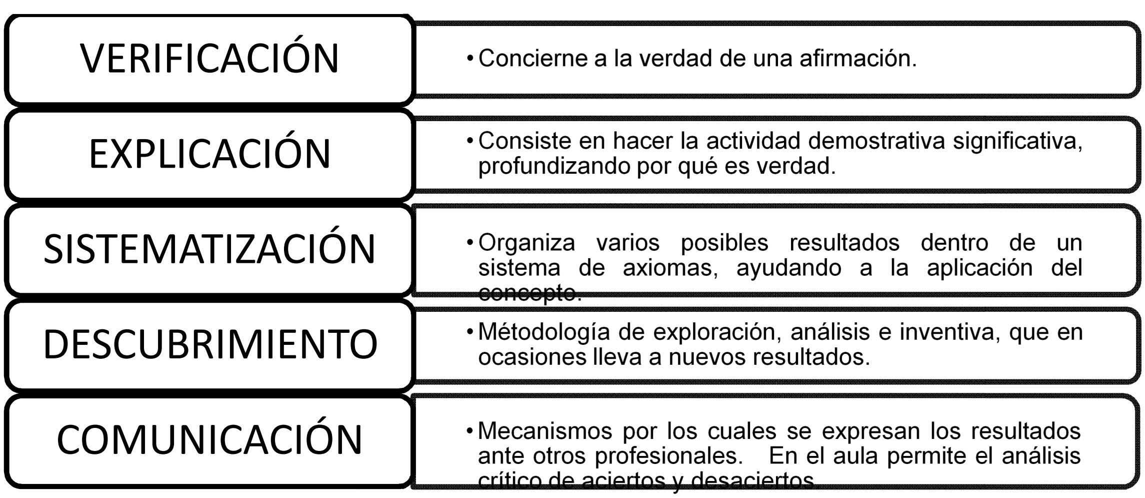
> (…) Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento matemático va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior, esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático. (MEC, 1991, p.72)

El carácter formalista, asumido al interior del aula, puede superarse en gran medida, si desde la educación básica se crea una cultura argumentativa, convirtiendo la prueba en parte del proceso de resolución de problemas, logrando que los estudiantes mezclen la deducción con la experimentación.

En aras de la flexibilización del carácter formal de demostración en el aula de clase, los autores españoles proponen la consideración de otras funciones de ésta, para así replantear y analizar significados, esquemas y tipos de demostraciones producidas por los estudiantes.

3.4.1.1.1 Funciones de la demostración

En lugar de caer en formalismos, que habitualmente los estudiantes no comprenden, la demostración debe asumirse como una noción que tiene diferentes funciones, y que debe convertirse para ellos en una actividad significativa y necesaria a partir de la cual puedan interpretar, validar, valorar y comprender situaciones, enunciados, proposiciones y contenidos matemáticos. Al respecto en el esquema 19, basado en Bell y De Villiers; Ibañes (2001a) se exhiben diferentes funciones de demostración.



Esquema 19. Funciones de la demostración.

3.4.1.1.2 Fuentes de convicción de los estudiantes

En la enseñanza de los procesos de conjetura y prueba, no es suficiente detenerse a analizar los procesos implícitos y las dificultades existentes al momento de realizar una demostración, es necesario también considerar las creencias que tienen los estudiantes, identificando qué los convence y qué no para orientar los procesos. En la mayoría de los casos los estudiantes no quedan convencidos de los argumentos dados en el aula y requieren de otras comprobaciones. "El progreso en la habilidad de los estudiantes para hacer demostraciones cada vez más deductivas, abstractas y formales debe ir precedido de un cambio en sus creencias sobre qué demostraciones son válidas o y cuáles no lo son". (Gutiérrez. 2000, p. 588)

Gutiérrez (2000), retomando a De Villiers, exhibe cómo algunos estudiantes se convencen de la veracidad de un enunciado matemático, porque confían en fuentes de información externas a ellos, estas fuentes pueden ser:

- **Convicción autoritaria:** Los estudiantes basan sus explicaciones en lo que representa autoridad para ellos. Puede ser un libro de texto, el docente u otro estudiante.
- **Convicción ritual:** Los estudiantes asumen sólo las demostraciones que están en el estilo verbal o escrito, dependiendo del que se haya manejado convencionalmente en clase (verbal, a dos columnas, diagramas).
- **Convicción simbólica:** Los estudiantes aceptan sólo las transformaciones simbólicas sobre los enunciados matemáticos.

3.4.1.1.3 Significados de la demostración matemática

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, y en la producción de pruebas, no sólo intervienen las fuentes de convicción, sino también los diversos significados que se le da a la demostración, desde el punto de vista subjetivo en diversos contextos, ya que ellos permean las pruebas realizadas.

Godino & Recio (1998) y Recio (1999), analizan la noción de demostración en cinco contextos:

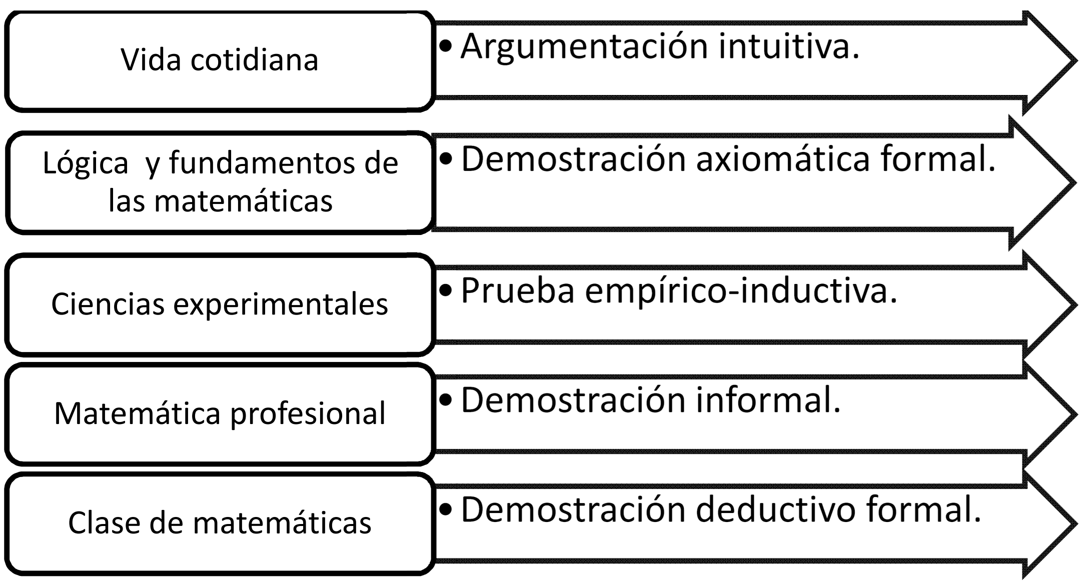
- **Vida cotidiana:** La demostración es de carácter informal, es dependiente del contexto del individuo y de su situación emocional, se apoya en el lenguaje natural.
- **Lógica y fundamentos de las matemáticas:** La demostración es una derivación simbólica, sintáctica, realizada de acuerdo a reglas preestablecidas de transformación de expresiones, sin apelación alguna a la intuición.
- **Matemática profesional:** La demostración es de carácter empírico-inductiva, comprobación en casos particulares como medio de validación de los teoremas.
- **Ciencias experimentales:** La demostración se basa en prácticas argumentativas sustanciales empírico-inductivas y analogías.
- **Clase de matemáticas:** Los teoremas matemáticos son necesariamente verdaderos, la verdad general no se pone en duda. Los argumentos que establecen la verdad son contaminados de las diferentes significaciones de demostración matemática que los estudiantes y el docente encuentren en los diversos contextos.

Según esas significaciones llevadas por el docente y dependiendo de la forma en que los estudiantes incorporen e interioricen dichos contextos a la clase de matemáticas, construirán diferentes significaciones personales de demostración.

Los diversos significados personales o esquemas de prueba, permiten a los docentes y a los estudiantes conocer no sólo los resultados acabados, sino también, dar cuenta de los procesos implícitos en sus prácticas argumentativas, para así trabajar sobre los errores y dificultades existentes en ellos.

La valoración de los esquemas personales de demostración, desde la individualidad de los estudiantes, permite comprender la demostración y llegar a otros significados del mismo, más informales, cercanos a sus prácticas habituales.

Como resultado de la investigación realizada en 2001, Recio, siguiendo a Harel & Sowder y a Godino & Batanero, plantea cuatro tipos básicos de esquemas personales de demostración en relación con los diferentes contextos institucionales. Estos se muestran en el esquema 20.



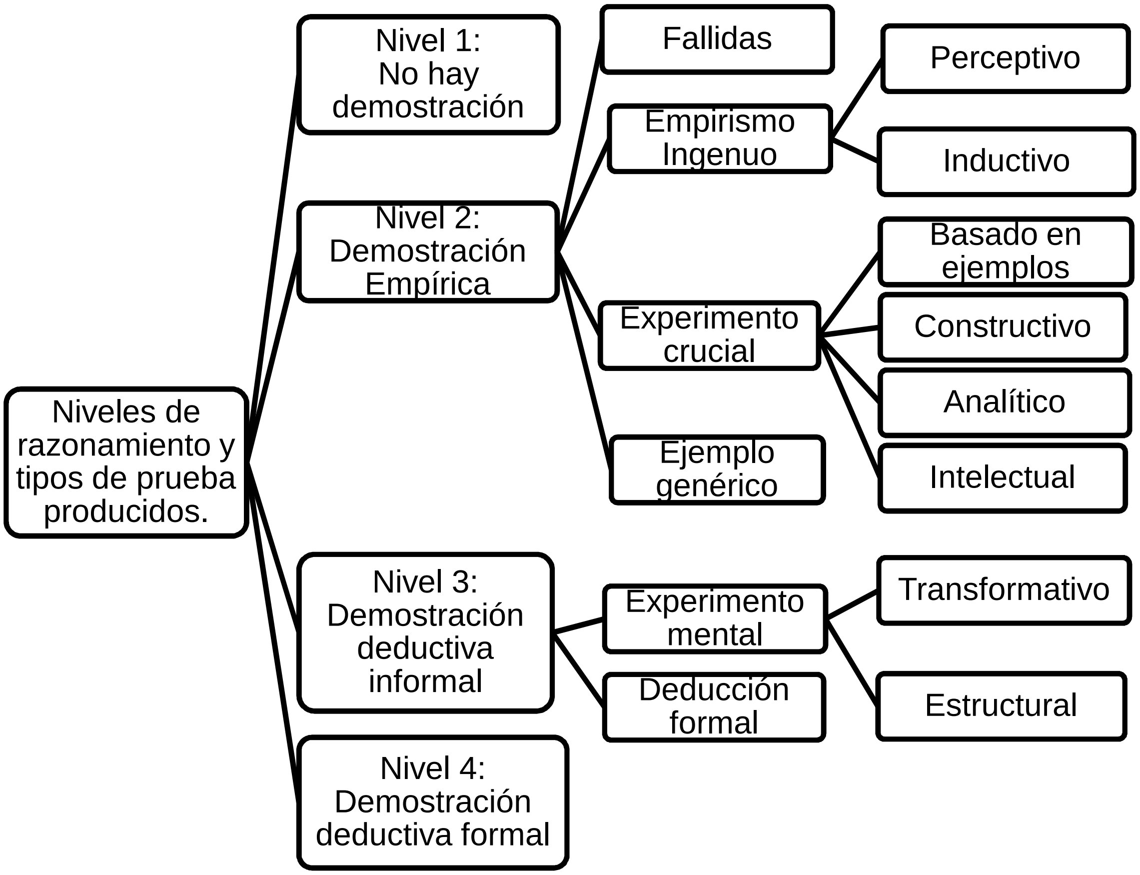
Esquema 20. Esquemas de prueba en diferentes contextos institucionales

Por su parte Marcelino Ibáñes & Tomás Ortega (2001 b), retomando a Harel & Sowder, proponen, realizar el análisis sobre los resultados de los estudiantes a problemas de justificación, según los siguientes esquemas de prueba. Ver esquema 21.

Esquema 21. Esquemas de prueba

Basados en Bell, Van Hiele y Balacheff; Marrades & Gutiérrez (2000), realizan una adaptación del modelo de Van Hiele a la habilidad de demostración, mostrando los tipos de prueba producidas por los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de demostración.

Las pruebas producidas por los estudiantes en relación con el nivel de razonamiento en el que se encuentren, se muestran en el esquema 22.



Esquema 22. Niveles de razonamiento y tipos de prueba producidos.

3.4.2 La demostración en el aula de clase: Cambio en los procesos educativos

3.4.2.1 Aproximación epistemológica

Desde el enfoque de investigación se realiza un análisis de los diferentes significados y formas de presentar la demostración y los cambios o consecuencias que estos usos generan en la enseñanza de la demostración. Los cambios en la noción matemática de demostración han implicado replantear la forma, estilo y técnica en que ésta es llevada al aula de clase.

El proceso de demostración de los estudiantes puede compararse con el de los matemáticos al momento de la apropiación del saber matemático. Al principio no hay definiciones, no está claro lo que hay que probar; la prueba sirve para comprobar la credibilidad o lo apropiado de una suposición, más que para establecer la verdad del enunciado. Los estudiantes solamente pueden validar cuando se hayan apropiado de los conocimientos matemáticos.

Los autores españoles, consideran que presentar la demostración tal y como ocurrió en la historia, permitirá superar algunas de las dificultades existentes en su enseñanza y aprendizaje, logrando que los estudiantes modifiquen poco a poco su concepción de demostración, mejorando así sus técnicas demostrativas.

3.4.2.2 Aproximación a la demostración con los Software de Geometría dinámica (SGD)

Los **SGD**, son un medio eficaz para ayudar a los estudiantes a afianzar el proceso de demostración, pues a través de ellos pueden transformar las construcciones que han realizado con facilidad y rapidez, logrando una modificación en sus conjeturas y proposiciones argumentativas.

Los **SGD** ayudan a los estudiantes a entender la necesidad de las justificaciones abstractas y las demostraciones deductivas en matemáticas. Permiten realizar exploraciones empíricas; experimentar, observar la permanencia de las propiedades tras la realización de transformaciones y verificar conjeturas.

Desde la perspectiva de Gutiérrez (2007) los **SGD**, "pueden ser una excelente ayuda para representar fácilmente un problema, para observar regularidades, para añadir o quitar elementos auxiliares, para verificar conjeturas". (p. 22)

Aunque las investigaciones españolas evidencian los **SGD** como mediadores en el desarrollo de las demostraciones, dejan claro que ellos sólo son un medio para llegar a las pruebas formales, pero que por sí mismos no realizan pruebas formales. "La manipulación del ordenador será, en todo caso, paralela al uso del razonamiento formal (…) de modo que los ordenadores se quedarán parados cuando los estudiantes empiecen a escribir la demostración formal de la conjetura que han encontrado y enunciado". (Gutiérrez 2007, p. 12)

Luego de reconocer algunos de los aportes de los investigadores abordados, es preciso concluir que para lograr verdaderos procesos de razonamiento matemático, deben considerarse las dificultades que tienen los estudiantes para elaborar demostraciones formales, realizando a partir de ellas intervenciones que les permitan dejar de comprender la demostración como mecánica, y como réplica de lo enseñado por el docente, concientizándose de los procesos que llevan a cabo y del por qué los realizan.

En consecuencia debe considerarse, por parte de los docentes, los distintos significados de prueba y los esquemas informales que presentan los estudiantes, en aras de desarrollar progresivamente en ellos las habilidades necesarias para la apropiación y dominio de las prácticas argumentativas matemáticas.

3.5 CONTEXTO JAPONÉS: DEL PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Los aspectos sociales y científicos de la educación sirven a la sociedad para proporcionar conocimientos que les permitan a sus estudiantes generar progreso y bienestar.

En Educación Matemática, es ampliamente valorado a nivel mundial el avance que ha tenido la educación japonesa, debido a sus sobresalientes resultados, en las pruebas Trends in International Mathematics and Science Study **(TIMSS)** Esto se demuestra con la adopción de métodos de enseñanza aplicados en Japón durante décadas, por algunos países en el mundo y bajo la asesoría de docentes matemáticos japoneses.

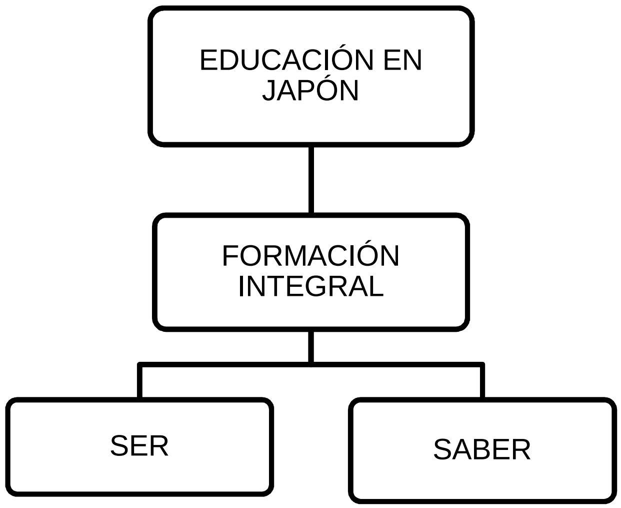
En este apartado se hace un análisis de los procesos de conjetura y justificación en la educación matemática japonesa, con el fin de que se evidencie la viabilidad de la utilización de sus métodos en países culturalmente distintos.

3.5.1 Sistema educativo japonés

La educación en Japón puede ser particular u oficial, provee un alto nivel académico y gratuita a jóvenes de 6 a 15 años; a nivel secundario se ofrece una formación entre los 15 y los 18 años de tipo obligatorio hasta el grado noveno, los demás estudios son opcionales. Se lucha constantemente en contra del analfabetismo.

La educación en Japón pretende alcanzar una formación integral, por lo que se hace énfasis en los valores con el fin de formar ciudadanos en el ser y el saber, motivo por el cual sus docentes están en constante preparación y evaluación de sus metodologías de enseñanza.

El objetivo al interior del aula de clase es que los estudiantes construyan el conocimiento a partir del trabajo en grupo y dirigido por el educador. Este es sintetizado en el esquema 23.



Esquema 23. Educación y formación integral en Japón

3.5.2 Educación matemática en Japón

Con respecto a la enseñanza de las matemáticas en Japón, se aborda el *Estudio de clases*, "proceso mediante el cual los profesores se empeñan en mejorar progresivamente sus métodos de enseñanza, trabajando con otros profesores para examinarse y criticarse mutuamente las técnicas de enseñanza" (Baba, 2007, p. 26), fundamentado en criterios y métodos de preparación, clase a investigar y sesión de revisión, que permite no sólo el aprendizaje y mejoramiento de las habilidades y conocimientos matemáticos en los estudiantes, sino también en los docentes.

Según Yasuhiro Hosomizu (2007), el aprendizaje de las matemáticas en Japón se fundamenta en tres bases que, de forma articulada, se aplican al sistema educativo. En este sentido se debe tomar en cuenta la formulación de hipótesis en el proceso de construir el conocimiento como objetivo principal a partir de la prueba y la conjetura.

i. **Un modelo de resolución de problemas**, centrado en el proceso y no en el resultado.
ii. **La elaboración de los textos de estudio**, cuyo contenido incluye el modelo de resolución de problemas. Estos textos están complementados con guías desarrolladas para que los docentes, que no son exclusivamente del área de matemáticas, también tengan acceso a este modelo.
iii. **El “análisis de clases” como una metodología**, que supone la observación rigurosa y el registro de los sucesos que se dan al interior de la clase de matemáticas, con el objeto de actualizar constantemente los métodos y currículos empleados.

Se trata de un sistema de enseñanza en el que la calidad de los docentes debe ser alta, esencialmente cuando se refiere de la formación de estudiantes de los primeros grados, prestándose especial importancia a los estudiantes con mayores dificultades conceptuales. También se destina tiempo a la retroalimentación de los docentes en torno a las experiencias vividas en el aula.

Las actividades planteadas, deben permitir al estudiante tomar la iniciativa en su aprendizaje, para el cual el docente facilita los procesos. Así mismo deberán motivar en el estudiante, la búsqueda de regularidades posibles, las cuales serán explicadas a partir de la formulación de preguntas. Más que el hecho de hallar dichas regularidades, es importante el esfuerzo que realizan los estudiantes para encontrarlas.

Cuando se está en las clases de matemáticas se busca evitar la mecanización sin sentido de los contenidos y conceptos, pero en cambio se promueve la comprensión.

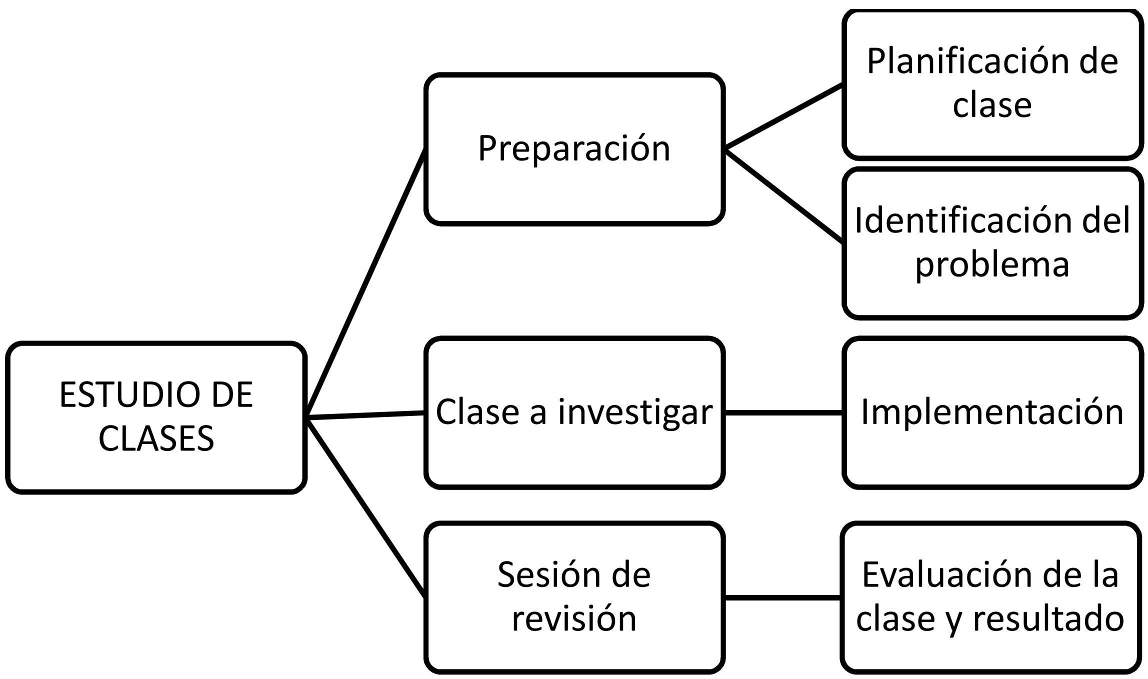
3.5.3 El estudio de clases

El *Estudio de Clases* consta de tres aspectos con los cuales se pretende mejorar la ejecución de los programas y el plan de estudio, que se realizan con reiteración, buscando mejorar progresivamente los diseños y ejecución de los programas académicos.

- El primero es ***kyozai kenkyu*,** que consiste en una forma de "preparación", en la que se pretende transformar un proyecto de currículo, trabajando colaborativamente. Los docentes buscan y seleccionan materiales relevantes para el propósito de la clase, refinan un primer diseño de acuerdo a las necesidades de los estudiantes, y reuniendo esto en un plan de clase, por medio del cual se pretende lograr habilidad de comprensión y de razonamiento creativo, en la medida que se disfruta del aprendizaje.
- El segundo es ***kenkyu jyugyo***, también llamada koukai jyugyo; una clase de estudio o de investigación, que se enseña, y a la cual asiste una cantidad variable de docentes, a quienes a menudo se suman instructores universitarios y supervisores.
- Finalmente, está la ***jyugyo kentoukai***, sesión de revisión con los observadores. Esta comienza con un breve preámbulo en que el docente que impartió la clase explica su propósito. Sobre la base del plan de enseñanza distribuido de antemano, se explicitan conceptos acerca de los materiales pedagógicos y característicos o estatus de los estudiantes de acuerdo a cada etapa de la clase, así como los propósitos de cada problema y actividad realizados en ella. Luego, cada participante expresa opiniones y pregunta acerca de los problemas dados en la clase y el rol formativo del docente, también se discute acerca de las expresiones y actividades de aprendizaje de los estudiantes. (Hosomizu & Yamamoto, 2007)

Desde la perspectiva de Yasuhiro Hosomizu (2007), mediante la metodología de Estudio de clases, los procesos prácticos en los diferentes contenidos se hacen a través de situaciones problema que atraen la atención del estudiante y a partir de las cuales se cultiva el pensamiento inductivo, de manera que surgirán preguntas como *¿por qué esto es verdad?, ¿estas regularidades funcionan siempre?*, las cuales tratarán de responder; es así como el docente ayuda al estudiante a construir el razonamiento matemático.

Esta metodología es descrita en el esquema 24.



Esquema 24. Estudio de clases en Japón

3.5.4 Argumentación y demostración en Japón

Con base en los autores Yasuhiro Sekiguchi y Mikio Miyazaki se hará un análisis sobre la relación entre la argumentación y la prueba matemática, desde el punto de vista cultural japonés.

La cultura como un rasgo particular de una región, refleja todas las condiciones en las que se desempeñan actividades como el estudio y la educación. A su vez cada cultura adopta un sistema de comunicación propio, el cual tiende a difundirse o a cambiar, conforme se propagan dichos métodos de comunicación o se recibe influencia de otras culturas.

Se toma entonces, desde el concepto universal de lo que es la comunicación, las siguientes afirmaciones:

- La argumentación es un tipo de comunicación verbal.
- La prueba es un componente de la comunicación dentro de la comunidad matemática.
- La comunicación es uno de los tópicos principales dentro de los estudios culturales.

Con relación a lo anterior, Barnlund (1989), expresa que la comunicación verbal no siempre tiene relevancia en la cultura japonesa y que el objeto es lograr la armonía, tendiendo a eliminar expresiones de desacuerdo y valorando la cooperación que la competencia. También cobra especial relevancia el cumplimiento de los deberes sociales de la comunidad. En definitiva, la parte cultural de una sociedad define las formas en las que se abordan los conocimientos, incluyendo el ámbito académico y a su vez, los aspectos lógicos y argumentativos de las matemáticas.

3.5.4.1 Prueba y argumentación en los salones de clase japoneses

En japonés, la expresión *"shoumei"* se refiere a la demostración matemática. En las escuelas japonesas, los procesos que se desarrollan en el salón de clases contienen oportunidades de comunicación tanto formal como informal, en sentido general en la cultura japonesa.

Según Stigler & Hiebert (citado por Sekiguchi & Miyazaki, 2000), las lecciones de matemáticas en las escuelas japonesas enfatizan el "wakaru" (comprensión) de ideas matemáticas, sin acudir a la memorización como método. Se enfatiza en la importancia de preguntar por qué, para buscar el "origen" (causas o premisas básicas) del fenómeno en cuestión y la descripción de un camino causal o lógico que lleva del origen al fenómeno. Las respuestas a la pregunta por qué son o bien "wake" (explicaciones) o "riyu" (razones). Las actividades para encontrar y explicar sus argumentos incluyen descripciones sobre resolución de problemas y justificación de los pasos utilizados en esos procesos.

En el ciclo básico de la escuela secundaria, el explicar (*wake*) o el dar razones (*riyu*) es frecuentemente llamado "setsumei". Las actividades que hacen "setsumei" se realizan normalmente antes de presentar la noción de demostración matemática (*shoumei*). Los términos "wake", "riyu" y "setsumei" son comúnmente utilizados en la vida diaria de los estudiantes. En contraste, el término "shoumei" aparece raras veces en la vida diaria, por lo que se presenta primero a los estudiantes en las lecciones de geometría de octavo grado de matemáticas. Este término se define usualmente como un acto que muestra lógicamente la veracidad de una conclusión. Bajo este modelo, "shoumei" debe deducir la conclusión declarada siguiendo las premisas aceptadas. Esto corresponde bien a la idea de "cumplir con las obligaciones sociales de la comunidad" (Sekiguchi & Miyazaki, 2000, sp.) Por ello el modelo de grupo de la comunicación japonesa en público parece cumplir bien el proceso de producción de pruebas.

3.5.4.2 Argumentación en los salones de clase de matemáticas

En Japón, la oposición es expresada de una manera indirecta. Sin embargo, en la escuela los estudiantes no están aún socializados en la cultura de los adultos. Algunas veces expresan oposición o desacuerdo en las conversaciones en el salón de clases y pueden poner en peligro la armonía de esa comunidad. Aquí el docente juega un papel importante, ya que expresa respeto por las ideas individuales, sean estas correctas o incorrectas, tratando de aprovechar sus diferencias argumentales para profundizar en ellos la comprensión del concepto en cuestión, recuperando la armonía en la comunidad del salón de clase, mediante la búsqueda colaborativa de una solución.

Los docentes japoneses inician sus clases planteando un problema Stigler & Hiebert (citado por Sekiguchi & Miyazaki, 2000). Animando al estudiante a presentar sus ideas para resolver el problema. Durante la lección el docente pide reflexionar en pequeños grupos "hanashi-ai", o en la clase completa como un solo grupo. Debido a que el problema es arduo, los estudiantes frecuentemente formulan conjeturas e ideas erróneas o cometen errores de procedimiento. También, debido a que el problema es frecuentemente abierto, pueden dar varias soluciones diferentes. El docente los invita a comparar entre ellos ideas y soluciones. En esas ocasiones pueden encontrarse contra-ejemplos y pueden presentarse contra-argumentos. El docente utiliza intencionalmente esas oportunidades para estimular el razonamiento en los estudiantes.

Lewis (citado por Sekiguchi & Miyazaki, 2000), sostiene que la disciplina o moral tradicional japonesa pone un gran énfasis en reflexionar ("hansei") sobre los errores propios y en apreciar la contribución de otros, lo cual fomenta la cooperación entre los estudiantes. Aunque el "hanashi-ai" puede finalmente concluir estableciendo cuál solución es adecuada, eficiente o elegante, la competitividad entre los estudiantes no tiene espacio; por ello, en principio, no existen ganadores ni perdedores en "hanashi-ai", contrario a lo que sucede en la argumentación según el estilo occidental (Sekiguchi & Miyazaki, 2000).

3.6 CONTEXTO ESTADOUNIDENSE: LA INSTRUCCIÓN Y LA PRUEBA MATEMÁTICA

3.6.1 Los trabajos investigativos de Patricio Herbst en Michigan University

El objetivo del estudio de las investigaciones realizadas por Patricio Herbst en Michigan University hacen alusión a las recomendaciones que el investigador Nicolás Balacheff dio mediante una comunicación personal, en donde es claro que Patricio Herbst es uno de los principales investigadores en Estados Unidos en torno al estudio de las pruebas matemáticas realizadas por los estudiantes en la clase de matemáticas.

Las investigaciones de Patricio Herbst en Michigan University están genealógicamente enmarcadas a nivel teórico por las teorías de: Imre Lakatos, Nicolás Balacheff, contrato didáctico de Brousseau, las transacciones de la instrucción, la noción de habitus de Bourdieu, el Frame Analysis de Goffman, la Etnometodología de Garfinkel, Deborah Ball y Magdalene Lampert, y la Sociología de la prueba desde las concepciones de Eric Livingston.

Algunos de los trabajos de Patricio Herbst están enfocados a investigar los procesos de instrucción en las clases de matemática y las implicaciones que éstos tienen sobre las concepciones propias del aula en cuanto a la prueba.

Exclusivamente dentro del paradigma de investigación que adopta Herbst en el estudio de las pruebas matemáticas, él atiende a:

i. Las aulas de clase de matemáticas como comunidades sociales y la concepción de prueba que mejor se adapta a éstas.
ii. La función que desempeña la prueba en el proceso de desarrollo del conocimiento público en las aulas de clase.

iii. La comprensión de las pruebas, que se obtienen en un salón de clase, en los diferentes campos conceptuales en referencia a la enseñanza de la matemática

En la ilustración 1 se muestra la conceptualización de la clase de matemáticas, según Herbst.

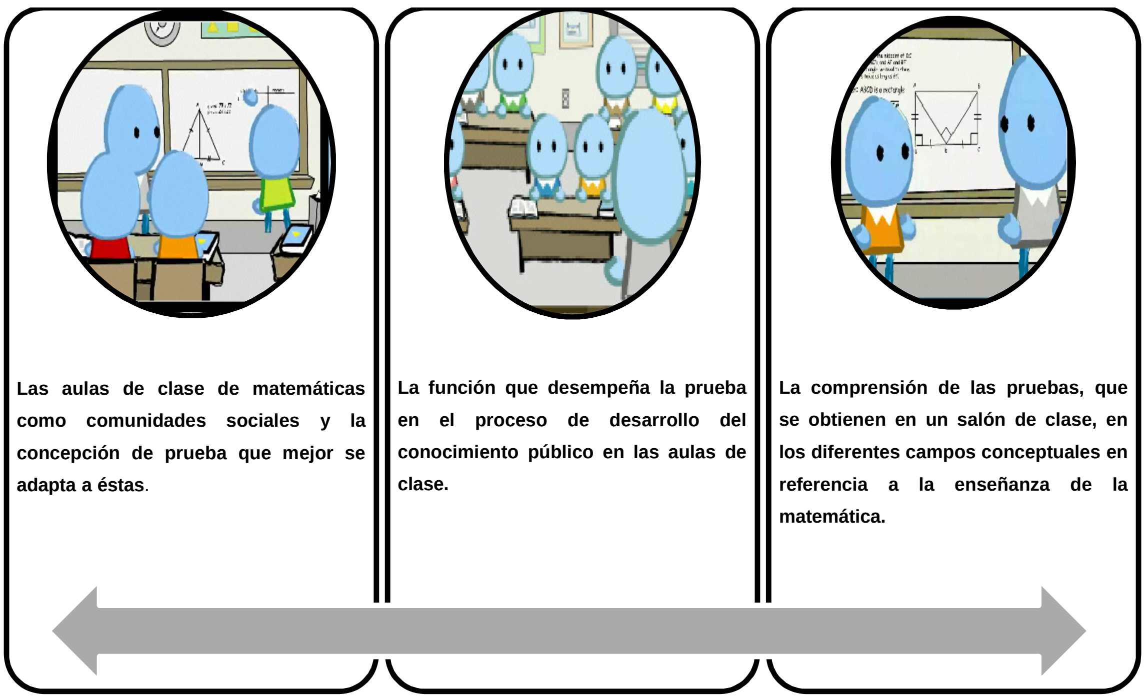
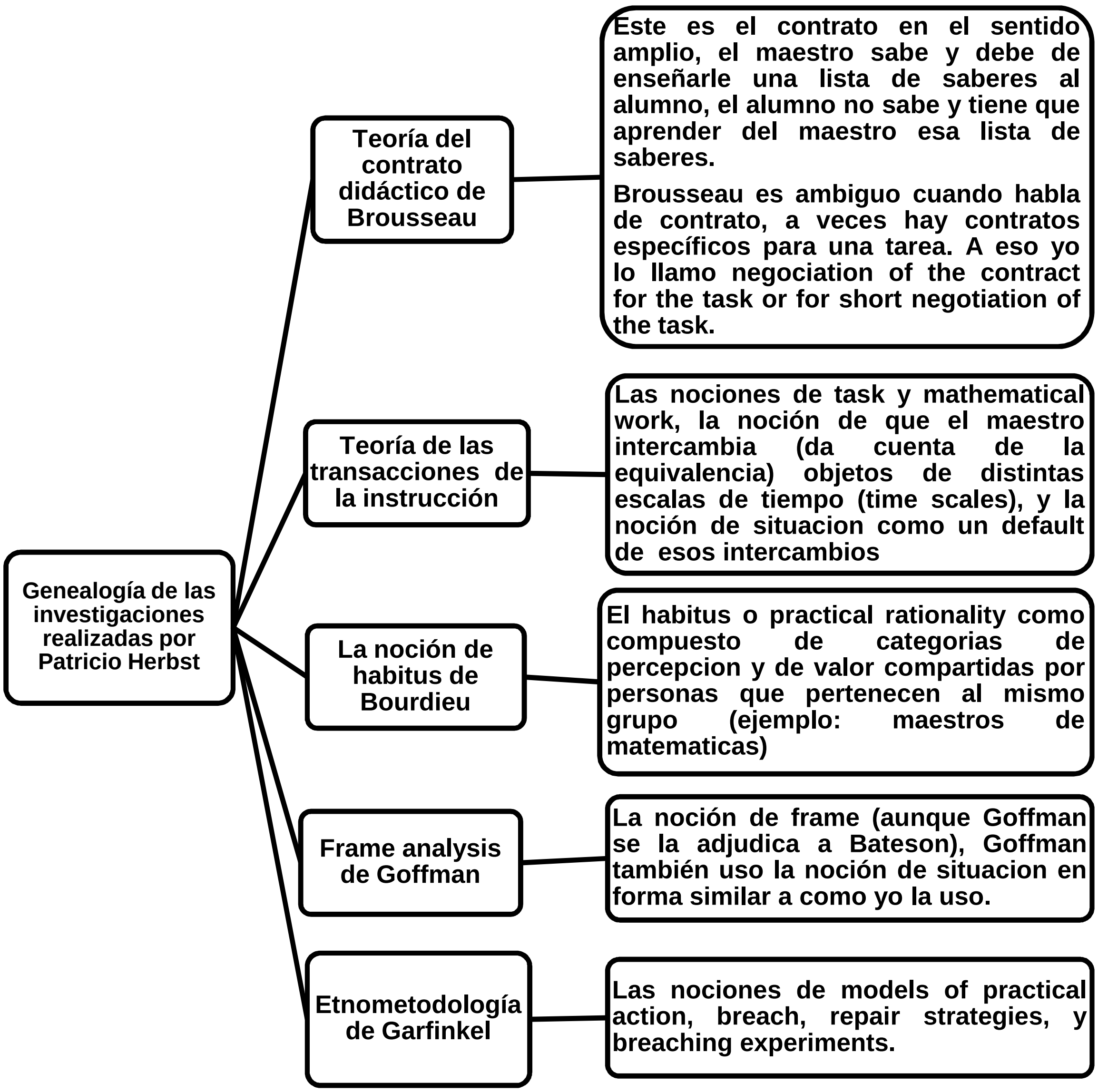


Ilustración 1. Conceptualización según Herbst.

Patricio Herbst en su investigación (Herbst, 1999) hace una crítica en cuanto a los formatos de pruebas a dos columnas, en donde propone que algunas de las desventajas en este tipo de formato son la economía en la comunicación y la rigidez estructural, particularmente en cuanto al razonamiento matemático abordado en éste.

Herbst ha estudiado preferentemente la sociología de la prueba y no solamente ceñida a la elaboración de ésta en un texto; como lo exige el formato de pruebas a dos columnas, ya que los esquemas de prueba están asociados a las clases de razonamiento, a los materiales y a los medios y formatos comunicativos que se tengan presente al momento de socializar una prueba y poner en debate su validez. La genealogía de las investigaciones realizadas por Herbst se muestran en el esquema 25.



- **Esquema 25. Genealogía de las investigaciones realizadas por Patricio Herbst**

3.6.2 Formato escrito de las pruebas a dos columnas

El proponer en este apartado referentes teóricos de las pruebas a dos columnas, se debe a que es uno de los formatos comunes en los procesos de escritura de las pruebas matemáticas en los espacios de clase de matemática en Colombia. También trabajar con pruebas empleando el formato a dos columnas ha permitido durante algún tiempo un acercamiento por parte de los docentes a los razonamientos deductivos de los estudiantes y el poder detectar las dificultades presentadas por los estudiantes, con miras a fortalecer los procesos comprensivos, desde estudiantes de educación media, de transición de educación media a la universitaria y la universitaria propiamente dicha.

Los formatos de pruebas a dos columnas han sido empleadas en la enseñanza de la demostración en geometría básicamente, en algunos casos de manera inconsciente y con bajos niveles de comprensión y que pocas veces trasciende a niveles más altos de comprensión, quedándose solamente en el nivel más intuitivo; pero también han sido fuertemente criticadas y según los **NCTM** (1989), se recomienda que se dé importancia y atención en la enseñanza de pruebas a "argumentos deductivos expresados oralmente y en párrafos" y que se dé menos atención a las pruebas a dos columnas". (p. 126-127)

Una de las ventajas de las pruebas a dos columnas; aún cuando el docente no es consciente en la clase de matemáticas de controlar los procesos de prueba y demostración, es que permiten un acercamiento lógico a las justificaciones y demostraciones, también permitiendo "*controles de manejo*" del razonamiento deductivo.

3.6.2.1 Definición de una prueba a dos columnas

El estilo escrito de pruebas a dos columnas permite un acercamiento a la elaboración escritural consciente de las pruebas matemáticas, pero abandonando otros procesos de razonamientos en los cuales el docente deberá poner atención y no descuidar.

En las investigaciones realizadas por Herbst (1999), él narra que en uno de los estudios etnográficos de un curso de geometría de Sekiguchi define el estilo de prueba a dos columnas como sigue:

> Uno traza una línea horizontal y otra vertical desde el punto medio de la primera hacia abajo de tal manera que se forme una letra T, creando así dos columnas bajo la línea horizontal. En la columna de la izquierda, uno escribe una cadena deductiva de enunciados que converjan a la proposición a probar, asignándole un número de orden a cada enunciado. Para cada paso de la deducción, uno debe anotar la razón de la misma en la columna de la derecha bajo el correspondiente número de orden. (p. 78-79)

En las ilustraciones 2 y 3 se muestran ejemplos de pruebas escritas a dos columnas.

Demostrar que si: A, B y C son conjuntos tal que:

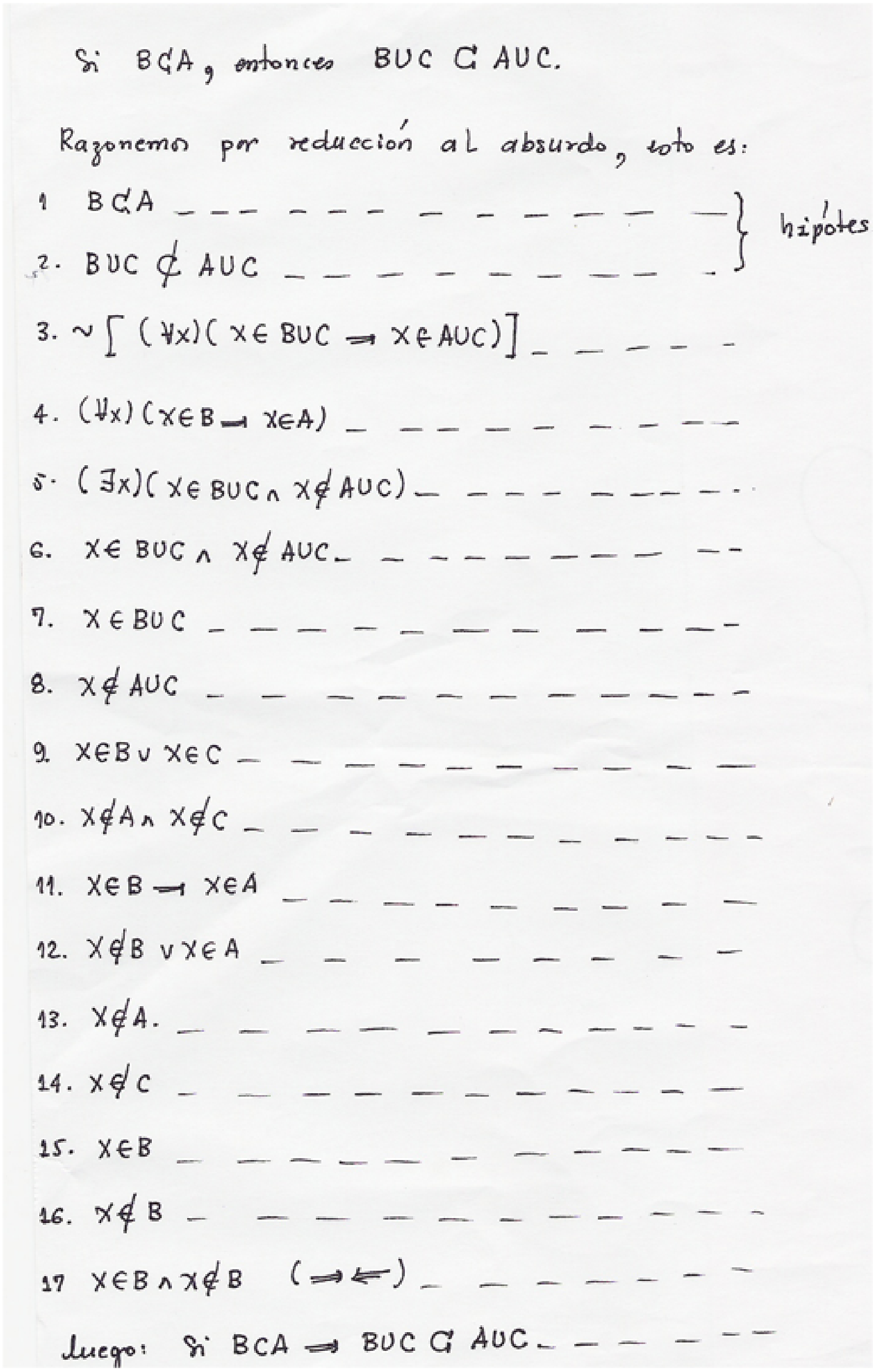
Si $B \subset A$, entonces: $B \cup C \subseteq A \cup C$

Razonemos por reducción al absurdo, esto es:

1 $B \subset A$	hipótesis
2 $B \cup C \not\subseteq A \cup C$	hipótesis
3 $\sim[(\forall x)(x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup C)]$	Negación de inclusión en 2
4 $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$	Definición de inclusión en 1
5 $(\exists x)(x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C)$	Equivalencia, negación. 3
6 $x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C$	Particularización existencial 5
7 $x \in B \cup C$	Simplificación conjunción 6
8 $x \notin A \cup C$	Simplificación conjunción 6
9 $x \in B \vee x \in C$	Definición de unión en 7
10 $x \notin A \wedge x \notin C$	Consecuencia de la negación unión 8
11 $x \in B \Rightarrow x \in A$	Particularización universal 4
12 $x \notin B \vee x \in A$	Definición de condicional en 11
13 $x \notin A$	Simplificación en la conjunción 10
14 $x \notin C$	
15 $x \in B$	M.T.P entre 9 y 14
16 $x \notin B$	M.T.T entre 11 y 13
17 $x \in B \wedge x \notin B$	Conjunción 15 y 16. $(\Rightarrow \Leftarrow)$.

Luego: Si $B \subset A$, entonces: $B \cup C \subseteq A \cup C$

Ilustración 2. Ejemplo de una prueba a dos columnas



Si $B \subseteq A$, entonces $B \cup C \subseteq A \cup C$.

Razonemos por reducción al absurdo, esto es:

1 $B \subseteq A$ — hipótes
2. $B \cup C \not\subseteq A \cup C$ — hipótes
3. $\sim [(\forall x)(x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup C)]$
4. $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$
5. $(\exists x)(x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C)$
6. $x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C$
7. $x \in B \cup C$
8. $x \notin A \cup C$
9. $x \in B \vee x \in C$
10. $x \notin A \wedge x \notin C$
11. $x \in B \Rightarrow x \in A$
12. $x \notin B \vee x \in A$
13. $x \notin A$.
14. $x \notin C$
15. $x \in B$
16. $x \notin B$
17 $x \in B \wedge x \notin B$ $(\Rightarrow \Leftarrow)$

Luego: Si $B \subset A \Rightarrow B \cup C \subseteq A \cup C$

Ilustración 3. Prueba a dos columnas que sólo exhibe la cadena deductiva de enunciados y no presenta las razones.

Por su riqueza en estructura rígida se puede notar que en un formato de pruebas a dos columnas se pierden los procesos heurísticos que permitieron al estudiante o docente construir y llegar a la validez de la veracidad de la proposición a probar.

3.6.3 La clase de matemáticas, el conocimiento público y la definición de prueba según Herbst

Para Patricio Herbst (2000) las investigaciones giran en torno a la instrucción y la concepción de clase de matemáticas, ya que él conceptúa que la clase es un locus cognitivo: Una especie de ecosistema que produce sus propios objetos de conocimiento y, uno puede suponer, sus propios códigos comunicativos, formas de argumentación, teorías, y dispositivos de registro y de memoria.

Y por tanto atiende y acuña concepciones de prueba como la de Balacheff o a la de Harel y Sowder en cuanto a:

> La prueba como aquellas estrategias mediante las cuales los alumnos se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la validez de sus afirmaciones matemáticas (véase por ejemplo Harel y Sowder, 1998). Herbst reconoce que la prueba depende del contrato didáctico de la clase así como también de su carácter social.

Herbst acuña la siguiente definición de prueba matemática atendiendo a la de Balacheff (1988):

> Una prueba es una explicación de la verdad de una proposición aceptada por una comunidad dada en un momento de tiempo dado. La decisión de aceptarla puede ser el objeto de un debate cuyo objetivo principal es el de determinar un sistema de validación común para los participantes. (Citado por Herbst, 2000, p. 147)

3.6.4 Esquemas de pruebas encontrados en estudiantes y propuestos por Harel y Sowder

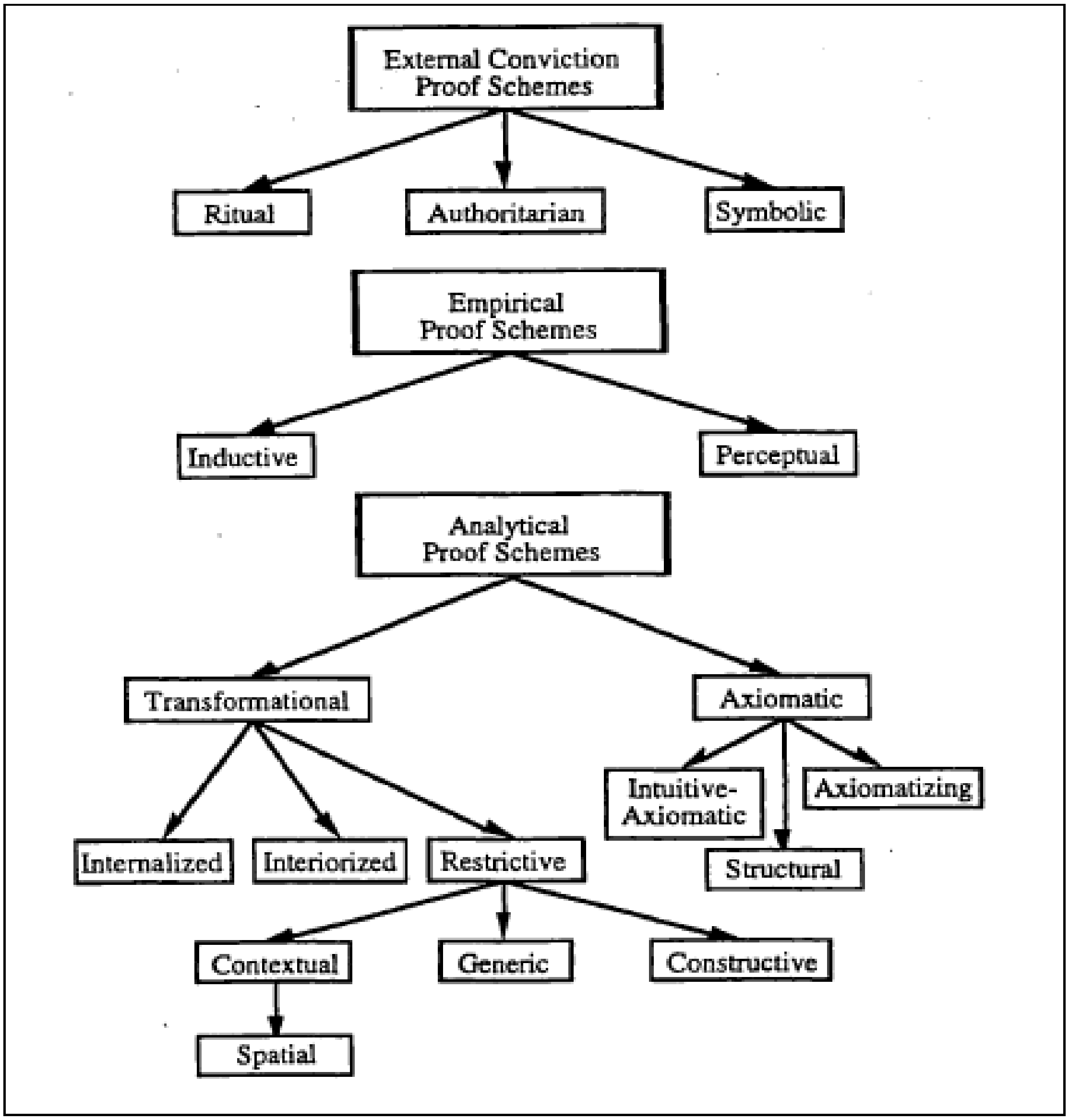
En una de las investigaciones realizadas por Harel & Sowder (1994) y citados en el trabajo de Ibañes (2001b, p. 13), se presentan los siguientes esquemas de pruebas encontrados en sus estudiantes. Ver tabla 4

ESQUEMAS DE PRUEBA		
De convicción externa	**Empíricos**	**Analíticos**
Rituales **Autoritarios** **Simbólicos**	**Inductivos** **Perceptuales**	**Transformacionales** **Axiomáticos**

Tabla 4. Esquemas de pruebas de Harel & Sowder (1994)

Algunos de estos esquemas de prueba pueden detectarse fácilmente en nuestras clases de matemáticas en Colombia.

El esquema 26, muestra las subcategorías que presenta Harel y Sowder respeto de los esquemas analíticos de pruebas, que no se presentan en los trabajos de Ibañes (2001b).



Esquema 26. Esquemas originales propuestos por Harel & Sowder

Se puede observar una equivalencia entre los esquemas de prueba de Harel & Sowder (esquema 19), y los propuestos por Balacheff (2000). Ya que los esquemas de prueba que Harel & Sowder llaman empíricos, Balacheff los nombra como pruebas pragmáticas y ostensivas; y los llamados esquemas analíticos de prueba, hacen alusión a las pruebas intelectuales en la teoría de Balacheff.

<table>
<tr><th colspan="5">ESQUEMAS DE PRUEBA</th></tr>
<tr><td rowspan="7">De convicción externa</td><td colspan="2">Empírico</td><td colspan="2">Analíticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experimentales</td><td colspan="2">Transformacionales</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos</td><td>Particulares</td><td>Generales</td></tr>
<tr><td>Falsos</td><td>Auténticos</td><td>Incompletos</td><td>Completos</td></tr>
<tr><td>De un caso</td><td>De varios casos</td><td colspan="2" rowspan="2">Intuitivo-Axiomático</td></tr>
<tr><td>No sistemático</td><td>Sistemáticos</td></tr>
</table>

Tabla 5. Categorización de tipos de prueba por Ibañes. (2001b)

En esta categorización de los esquemas de prueba (tabla 5) se debe resaltar que los esquemas empíricos son experimentales e inductivos y están relacionados con los tipos de prueba encontrados por Balacheff (2000).

3.7 CONTEXTO MEXICANO: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN CAMINO HACIA LA CONJETURA Y LA DEMOSTRACIÓN

En la realización de este apartado se han tenido en cuenta algunos artículos y libros escritos por el docente mexicano Víctor Larios Osorio, mostrando como sus investigaciones sobre la resolución de problemas, conjetura y demostración en la escuela básica media han ayudado en el fortalecimiento de éstos.

El trabajo realizado por Larios se basa en el desarrollo que tienen los estudiantes con los diferentes tipos de pruebas, las cuales permiten de una manera natural conjeturar y demostrar.

Larios ha utilizado para la elaboración y desarrollo de su investigación una metodología cualitativa que intenta ser naturalista; es decir, no fija su atención en la cantidad de respuestas por parte del estudiante, sino en la forma como estos las resuelven, en los comentarios y las conductas al contestar. Mientras los estudiantes trabajan, el docente realiza procesos de observación. Aunque podría ser aún más participativa, no lo es por la diferencia de nivel y edad; es decir, no trabaja con una misma población de estudiantes, sino que es una triangulación transversal en diferentes momentos, en determinado momento se hace un corte y se ven los resultados que obtiene en su desarrollo.

El trabajo realizado por Larios en México, se expondrá de la siguiente manera:

i. Educación en el contexto mexicano, abordándose la Secretaría de Educación Pública **(SEP).**
ii. Planteamiento de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, mostrando la problemática que se origina en el área de la educación, especialmente con los docentes, debido al poco conocimiento que se tiene con respecto al manejo de los problemas matemáticos en el aula de clase. En este punto se trabajarán autores citados por Larios (2006)

como Polya Fredericksen, Shoenfeld, Bartolache y Friedmman quienes con sus investigaciones sobre el tema ayudan a aclarar las características de lo que se entiende por problema matemático.

iii. Papel de las conjeturas y la demostración en el momento de resolver problemas en el aula de clase y los beneficios que trae en el desarrollo de conocimientos matemáticos en los estudiantes.

3.7.1 La educación en el contexto mexicano

La **SEP** es la encargada de organizar, vigilar y desarrollar en las escuelas oficiales, incorporadas o reconocidas, ésta Secretaría, a través de la llamada Subsecretaría de Educación Básica, emite por ley los programas de estudio de los niveles; preescolar, 3-5 años de edad, con tres ciclos lectivos; primaria; 6-11 años de edad, con seis ciclos lectivos; secundaria o media básica, 12-14 años de edad, con tres ciclos lectivos; medio superior o bachillerato, 15-17 años de edad, con tres ciclos lectivos; y el superior y posgrado. La **SEP** supervisa los últimos niveles pero, salvo algunos casos, no los controla totalmente.

En México no hay estándares curriculares ni de evaluación; como el de los Estados Unidos y Colombia, sólo hay un documento emitido por la **SEP**, y algunos intentos de hacer evaluaciones estandarizadas; la más reciente se llama *Prueba Enlace*, cuya información está en la página de la **SEP**[10] y hay dos instituciones relacionadas: el Centro Nacional para la Evaluación de la Educación Superior **(CENEVAL)** y el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa **(INEE)**.

Algunas de las escuelas particulares tienen que adoptar un currículo ya autorizado por la **SEP** y desarrollado por alguna institución existente; **SEP** o universidad, para que así las certificaciones que ofrecen sean legales. En general, hay más de ochenta (80) currículos diferentes para bachillerato en el país.

---

[10] La dirección electrónica es: www.enlace.sep.gob.mx

Para el caso del nivel superior; licenciatura, especialidad, maestría y doctorado, ocurre algo similar: La **SEP** controla algunas instituciones o bien supervisa y establece parámetros; que más que académicos, son de tipo organizativo y administrativo.

Entre ese otro tipo de instituciones están las Universidades públicas, las cuales son autónomas en su gobierno, son las que tienen el derecho de plantear sus propios programas de estudio. En cuanto a las instituciones privadas si quieren que les reconozcan los estudios deben ponerse bajo la supervisión de las públicas y de la **SEP** para poder diseñar sus planes de estudio.

En la **SEP** se plantea que los estudiantes deben desarrollar capacidades de argumentación con el fin de poder exponer y defender sus ideas y resultados, suponiendo que dichas capacidades favorecerán en el futuro los procesos de demostración matemática. De hecho, la comunicación verbal actualmente se retoma, como una de las competencias básicas que deben desarrollar todos los estudiantes a lo largo de sus estudios hasta el nivel bachillerato. (**SEP**, 2007) Haciendo de esta manera hincapié en la argumentación para lograr un proceso de demostración matemática en el aula de clase.

3.7.2 Planteamiento de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, problemática que se origina en el área de la educación

La Dirección General de Bachillerato **(DGB)** de la SEP, se sometió a una reforma realizada en el año 2004, la cual fundamenta la enseñanza de un curso dedicado al estudio de las Matemáticas, “La metodología a aplicar debe estar enfocada al planteamiento de problemas precisos que surgen de situaciones de interés para los alumnos” (Larios, 2006, p. 6) Se propuso la enseñanza de las matemáticas como una ciencia viva y en evolución, la cual incluye este aprendizaje por medio de la resolución de problemas.

> Consideramos que una de las maneras más accesibles para que los estudiantes de este nivel se adentren en los campos de las matemáticas, incluyendo el desarrollo de habilidades relacionadas, es a través de enfrentarlos a problemas, llevándolos a resolverlos. Con ello no queremos decir que únicamente hay que resolver problemas y encontrar sus soluciones, sino que se debe llegar a una sistematización del conocimiento a través de una reflexión del estudiante, muy probablemente guiada por el docente. (…) Consideremos que de esta manera no sólo se presenta un panorama más real de crear las matemáticas, es decir sobre el quehacer del matemático, sino también se muestra a esta ciencia como parte activa de la sociedad, promoviendo así actitudes positivas en el estudiante y eliminando mitos sobre la inmutabilidad de las matemáticas y sobre la rigidez de sus métodos, entre otros. (Díaz-Barriga et al, 2001)

En el ámbito docente, es común encontrar diferencias respecto a la forma de enseñar y aún más de ponerse de acuerdo en la manera de enfocar los conocimientos. Es importante reconocer que según el docente debe hacer un paralelo entre los conocimientos y la experiencia de la cual dependerá el panorama que se logre desarrollar en la clase.

En consecuencia se puede generar la falta de comprensión de algunas características del problema matemático, lo cual conlleva a que algunos docentes confundan el problema matemático con el ejercicio, y para clarificar esto es necesario mencionar que el carácter del *problema* en el ámbito matemático es utilizarlo como medio para el aprendizaje matemático, en cambio el ejercicio es una actividad que, mal orientada, pude llevar a incurrir en procesos mecanicistas.

Alan Schoenfeld (1985) (citado por Larios 2006, p. 17), argumenta que según el individuo y su grado de conocimientos podrá o no tomar una tarea como un problema. De otro lado José Ignacio Bartolache (1769) (citado por Larios 2006, p. 17), reconoce la importancia de los problemas prácticos y el uso de éstos como medio para al aprendizaje matemático.

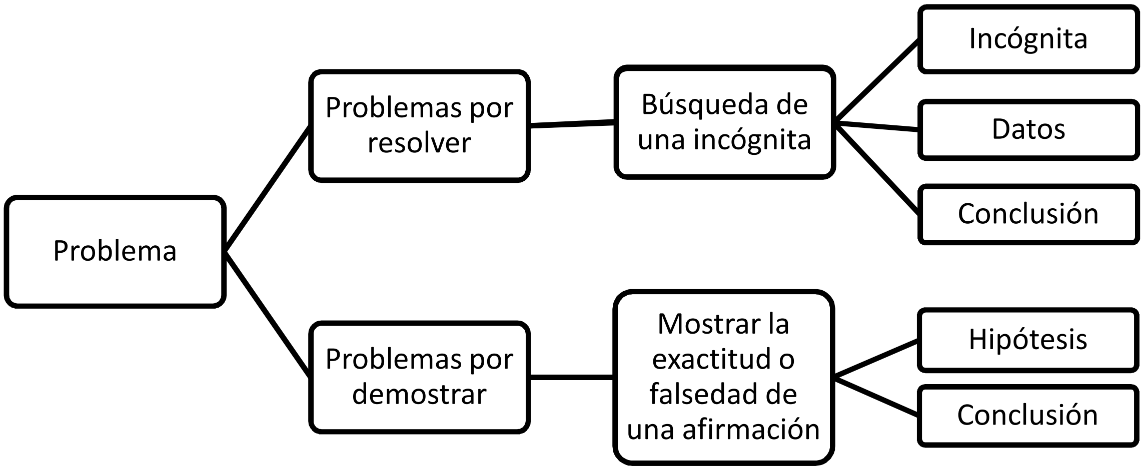
A continuación se mostrarán algunas de las definiciones propuestas por los autores, en lo referente al tema problema matemático:

> Las mismas tareas que exigen esfuerzos significativos para algunos estudiantes pueden muy bien ser ejercicios rutinarios para otros (…). De esta manera ser un “problema” no es una propiedad inherente a una tarea matemática. Más bien, es una relación particular entre el individuo y la tarea lo que hace a la tarea un problema para esa persona. (Alan Schoenfeld, 1985, citado por Larios, 2006, p. 17)

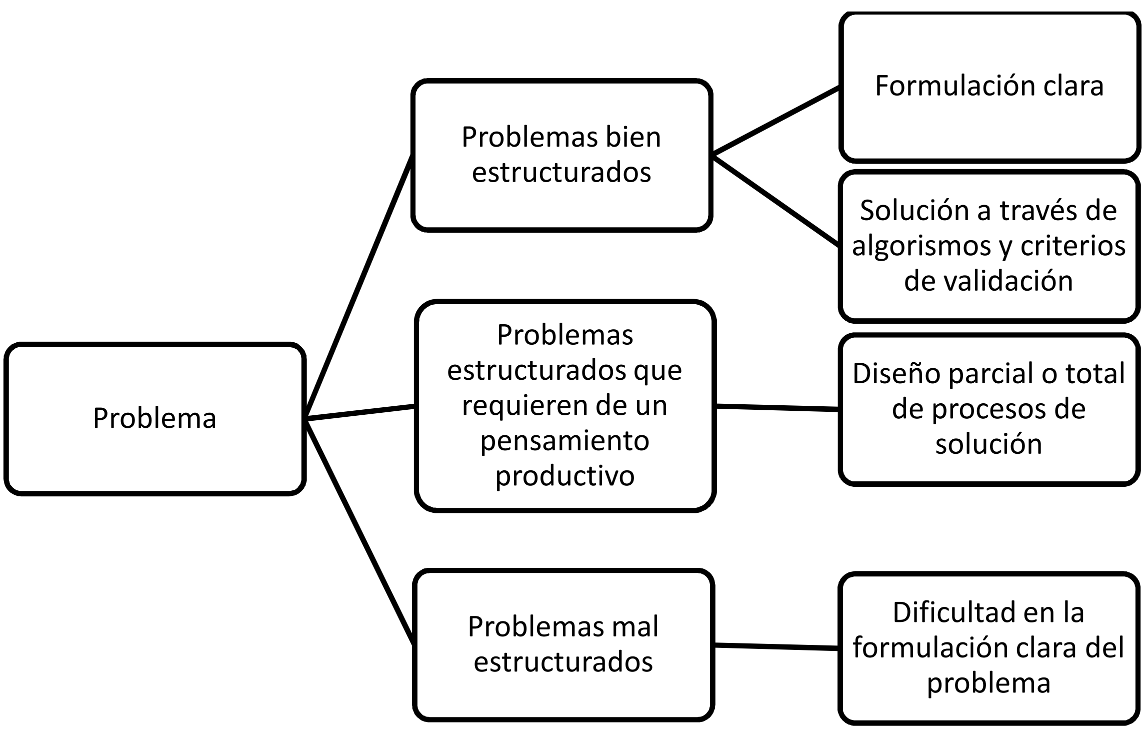
Es una proposición práctica, en que se manda hacer una cosa, suponiendo ya sabidas otras, que se requieren para su ejecución.

> Todo problema es práctico, y en tanto se distingue del teorema, y otras especies de proposiciones, en que sólo se cumpla la verdad de las cosas, afirmando o negando unos atributos de otros. (…) Es regular que los problemas tengan cierta correspondencia con los teoremas, de suerte que aquéllos tienen su origen y se fundan en éstos. Y la razón es que una práctica es el fruto de una verdadera teoría. (*José Ignacio Bartolache*, 1769, citado por Larios, 2006, p. 17).

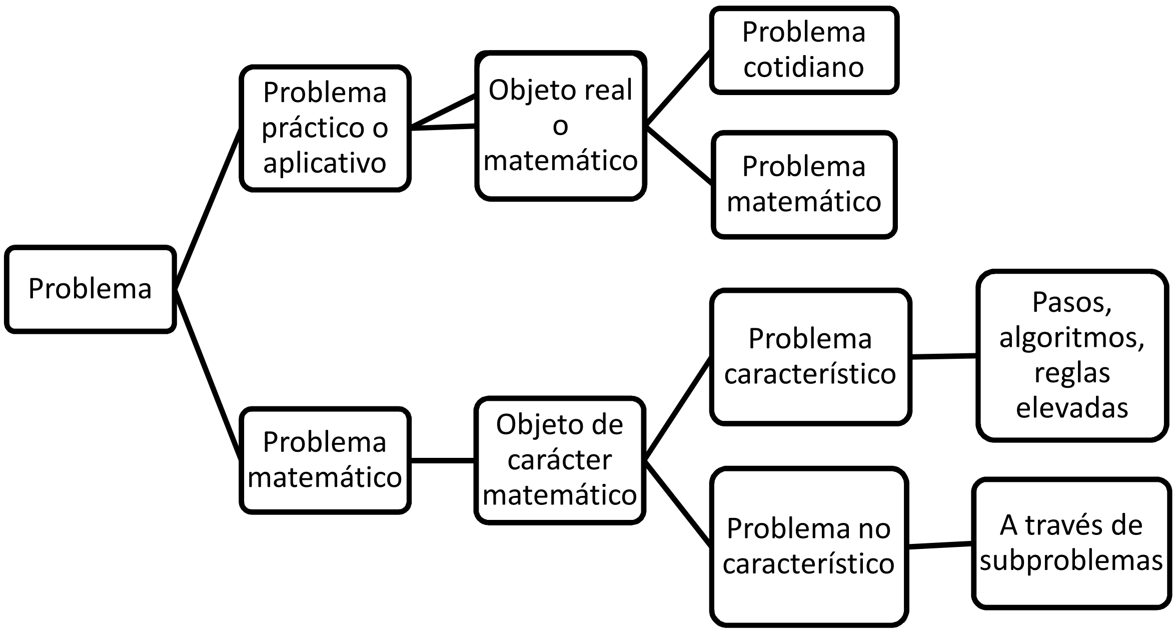
Luego de estas definiciones es necesario analizar algunas clasificaciones sobre problemas; expuestas en los esquemas 27, 28 y 29 que hacen autores como Polya, Fredericksen y Fridman en los cuales se pondrá en evidencia los conceptos que tengan en común y los nuevos que cada uno presenta para de esta manera ampliar el horizonte sobre el análisis que se está tratando.



Esquema 27. Definición de problema según Polya (1969) citado por Larios 2006



Esquema 28. Definición de problema según Fredericksen (1984) citado por Larios 2006



Esquema 29. Definición de problema según Lev Fridman (1995) citado por Larios 2006

3.7.3 Papel de las conjeturas y la demostración

3.7.3.1 La exploración, observación y formulación de conjeturas como bases para la resolución de problemas

El uso de las conjeturas es indispensable para la resolución de problemas en matemáticas, particularmente en lo relacionado con la demostración, ambos procesos están directamente relacionados, de tal manera que "si no se logra conjeturar, entonces no se puede esperar que se valide" (Larios, 2006, pág. 2)

Los problemas matemáticos son la parte central en el aprendizaje de las matemáticas por la misma concepción que se tiene de ella, citada por Larios (2006) en uno de sus textos afirma:

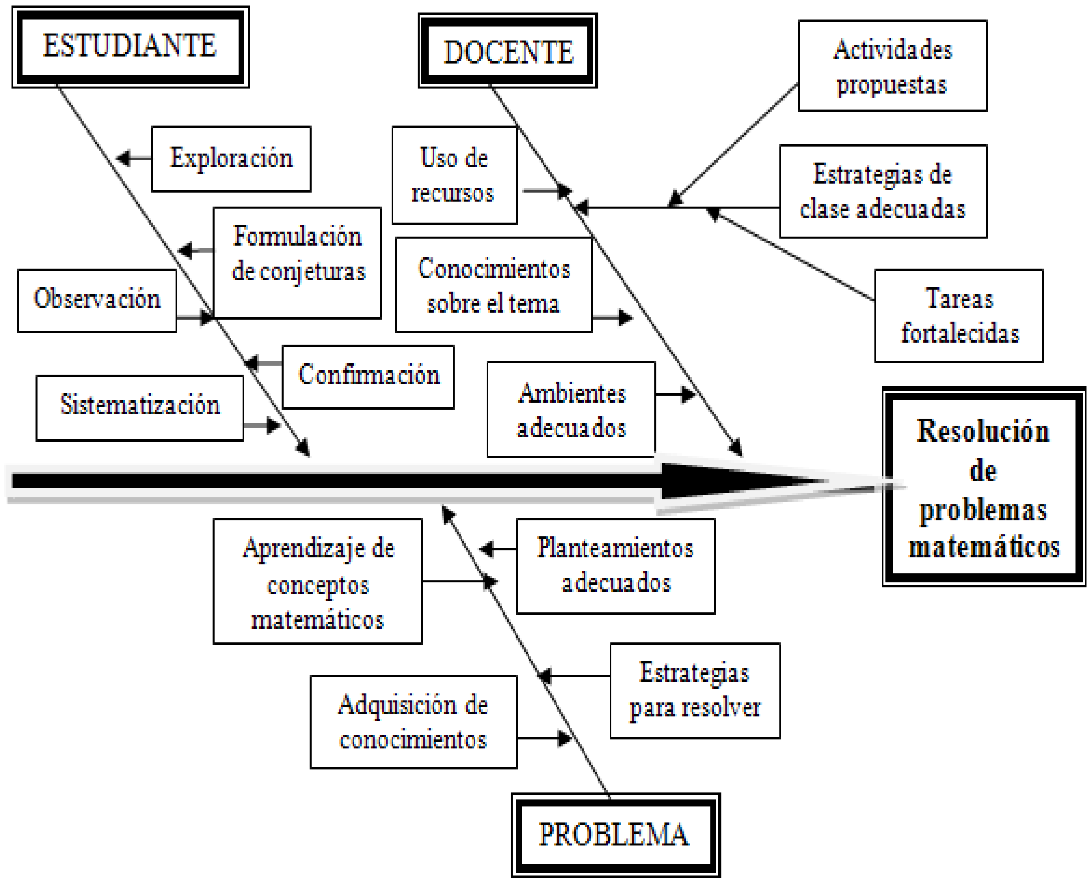
> Es muy importante que el estudiante esté consciente que saber Matemática implica saber resolver problemas. […] La parte formativa de la Matemática,

> en el sujeto que la estudia, es el generar estrategias que le sirvan para resolver problemas en su entorno, de su vida y de su profesión. Los problemas que el docente elija para trabajar en su grupo deben propiciar la adquisición significativa del conocimiento sin buscar el nivel de profesionalización del estudiante en la matemática misma. (UAQ[11], 2003, p. 126-127)

La estrategia que debe tomar el docente para propiciar en los estudiantes el aprendizaje significativo de las matemáticas, es llevarlos a enfrentarse a los problemas y dirigirlos a su resolución, pero dejándoles claro que no todos los problemas tienen solución, sino que lo importante es la sistematización del conocimiento.

La experiencia directa se logra por parte del docente cuando logra crear ambientes adecuados para el aprendizaje de la demostración matemática, logrando que ésta se dé paso por paso como la exploración, observación y formulación de conjeturas. De esta manera las conjeturas le permiten al estudiante obtener un conocimiento que luego sistematizará y finalmente confirmará. Para entender los anteriores pasos, en relación con la demostración matemática, se plantea el esquema 30.

[11] Esta sigla significa: Universidad Autónoma de Queretaro.



Esquema 30. Pasos en la resolución de problemas matemáticos

En el momento en que el estudiante se enfrenta a un problema matemático, debe encontrar estrategias que lo lleven a su resolución, y es de esta manera como las conjeturas ayudan a la posible solución. Allí el estudiante se encontrará reflexionando sobre sus propios procesos de aprendizaje, en este caso se podría hablar de demostración, ya que según Larios (2006) la demostración no es solamente una técnica, sino un proceso de validación del conocimiento, que se ratifica a través de los proceso de aprendizaje que tiene el estudiante.

3.8 CONTEXTO BRASILERO: LOS PROCESOS DE PRUEBA Y CONJETURA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS Y LA FORMACIÓN DE DOCENTES

En este apartado se describirán algunos resultados de investigaciones que vienen siendo desarrollados en Brasil, relacionados con los procesos de prueba en la formación inicial y continuada de docentes, proporcionando conocimientos que destacan la importancia de los argumentos y las pruebas para hacer eficaz la enseñanza de las matemáticas.

La formación de docentes entendida como una continua profesionalización, en el que ellos analizan continuamente sus prácticas, investigan y reflexionan, y contrastan sus creencias y actitudes como estrategias que posibilitan mejorar su desempeño como docentes, ha sido un tema de constante preocupación por parte de diferentes investigaciones en educación. Por su parte algunos investigadores en Educación Matemática, en particular en los contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas se han propuesto la tarea de trabajar en la búsqueda de herramientas que posibiliten la apropiación de los procesos de prueba por parte de los docentes.

Específicamente en Brasil los Parámetros Curriculares Nacionales plantean la necesidad de que "los currículos de matemáticas incluyan actividades y experiencias que permitan el desarrollo y la comunicación efectiva por parte de los estudiantes de argumentos matemáticamente válidos" (Brasil, Ministério da educação e do Desporto 1998, p. 53)

Para lograr este objetivo es esencial el rol del docente. Es por esto que universidades como la Pontificia Universidad Católica de São Pablo **(PUC-SP)** y la Universidad Bandeirante **(UNIBAN)**, a través de sus grupos de investigación y de sus facultades de educación, destinan parte de sus esfuerzos al estudio de los procesos de prueba incorporando el trabajo con los docentes en formación, así como con docentes de educación básica y media.

Algunas de estas investigaciones son:

i. **APROVAME**; Argumentación y prueba en la Matemática Escolar.
ii. El razonamiento deductivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Escuela.
iii. (Re) significar la demostración en los currículos de educación básica y de la formación de profesores de Matemática.

3.8.1 APROVAME. (Argumentación y prueba en la Matemática Escolar)

Esta investigación se realizó entre los años 2005 y 2007 en la universidad **UNIBAN** de educação, con la coordinación de Lulu Healy, así como con la participación de docentes y estudiantes de escuelas públicas del Estado de São Pablo. Fue financiada por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, y en ella se tuvo la intención de investigar en qué medida la participación de los docentes en grupos de colaboración, y el diseño de situaciones de demostración matemática, ofrecen condiciones para la aplicación efectiva de éstas en el salón de clases. Para ello se llevó a cabo una investigación cualitativa, en la cual se realizan diagnósticos por pruebas, entrevistas individuales y de observación.

Algunas tendencias investigativas en torno a la prueba son los aspectos conceptuales y epistemológicos relativos a procesos como probar, argumentar y demostrar; abordados por autores como Balacheff y Lakatos; y la utilización de la prueba como herramienta que posibilita la construcción de conceptos y el desarrollo de habilidades matemáticas en el aula de clase; desarrollado por autores como Boero, Larios y Harel & Sowder. De manera complementaria, en este proyecto se plantea que:

> Un enfoque adecuado para la enseñanza de la prueba en las matemáticas no sólo incluye las situaciones de aprendizaje innovadoras, la exploración de nuevos contextos y nuevas herramientas, sino que también requiere la aceptación y apropiación de ellos por parte de los docentes (Healy & Jahn, 2007, p. 1)

Es por esto que el proyecto fue realizado con docentes, de tal manera que pudieran relacionar sus situaciones de aprendizaje desarrolladas en el proyecto, con su práctica en el aula.

Según Healy & Jahn (2007), la elaboración de dichas situaciones y su puesta en práctica generarán diferentes estrategias para mediar en la transición de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales a través de tres escenarios, a saber:

- **Producción de ejemplos genéricos**: Mediante el diseño y evaluación de actividades que motiven a los estudiantes a que expliquen por qué la validez de un enunciado no se restringe a la presentación de algunos casos verdaderos.
- **Oportunidades:** Para pasar de argumentos expresados mediante el lenguaje natural a la expresión de argumentos matemáticos, dando importancia al papel de la explicación y de la argumentación.
- **Explicación de la estructura:** De las pruebas formales instando a los estudiantes a organizar los argumentos teniendo en cuenta la lógica formal.

El desarrollo e implementación del proceso de argumentación y prueba en las matemáticas escolares por parte de los docentes, es pues indispensable, ya que

> …. en el pasado, había poco énfasis en la experimentación, en la explicación y la comunicación de conjeturas matemáticas, y quizá demasiado hincapié en la presentación oficial. Ahora este énfasis puede haber oscilado demasiado lejos en la dirección opuesta. El reto actual es crear un equilibrio entre los dos extremos, buscando un resultado en el que

los estudiantes realicen una conexión de sus competencias en el lenguaje informal, con la argumentación más rigurosa y las pruebas formales, a lo largo de su carrera matemática. (Healy & Hoyles, 1999, p. 1, trad.)

De acuerdo con lo planteado en este proyecto, se puede evidenciar que mediante la creación de estructuras para la formación de docentes en diseño e implementación de propuestas que incorporen el trabajo con pruebas y conjeturas en el interior del aula de clase, no sólo se resignifica la concepción que el docente tiene de su rol, sino que se favorece la comprensión del papel de las pruebas en el aprendizaje de las matemáticas.

3.8.2 El razonamiento deductivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Escuela

Es un estudio realizado por el grupo de investigación denominado Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática **(PEA-MAT)** de la **PUC-SP**, financiada por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Cuyo investigador principal es Saddo Ag Almouluod y su objetivo es “indagar las representaciones de los docentes sobre el razonamiento deductivo de los estudiantes en las aulas”. (Almouloud, 2007. p.1)

En el proyecto denominado “*razonamiento deductivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Escuela”,* se han desarrollado actividades en las que los docentes comprendan la necesidad de la enseñanza de los procesos de prueba en la educación básica, en la cual según los Parámetros Curriculares Nacionales de Brasil (1998) es necesario "iniciar un trabajo con algunas demostraciones, para mostrar su fuerza y su significado, sin embargo también es conveniente no abandonar los controles empíricos, ya que pueden producir conjeturas y ampliar el nivel de comprensión de conceptos".

La propuesta de investigación es, crear las condiciones que promuevan cambios en el pensamiento y los conocimientos de los docentes acerca de las pruebas y demostraciones, así como en el lenguaje que utilizan al momento de propiciar en sus estudiantes los procesos de argumentar, probar y demostrar. Con el fin de lograr estos objetivos se recurre a un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje, para el desarrollo de la comunicación y la reflexión de las acciones y concepciones de los docentes en el proceso de formación, así como en la construcción de pruebas por parte de los estudiantes.

3.8.3 (Re) significar la demostración en los currículos de educación básica y de la formación de profesores de Matemática.

Ruy César Pietropaolo, presenta en el año 2005 su tesis de doctorado *“(Re) significar la demostración en los currículos de educación básica y de la formación de profesores de Matemática”*. Dicha tesis es una propuesta innovadora que pretende mostrar la necesidad de la implementación de las pruebas en el interior del aula y en la formación de profesores. En este aspecto es significativo resaltar que el estudio de los procesos de prueba, por parte de los docentes, se debe implementar desde los cursos de licenciatura y debe ser continuo incluyendo a los docentes que se encuentran desempeñando su labor en instituciones de educación básica.

Esta tesis que fue recomendada por dos de los investigadores brasileros a través de comunicaciones personales: Ag Almouloud, S. (comunicación personal, 9 de noviembre de 2008) y Bolite, J. (comunicación personal, 4 de diciembre de 2008), y plantea que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, el docente debe disponer de una gama suficiente de conocimientos, lo que le da autonomía intelectual. Para ello, necesita ser mediador entre el conocimiento producido históricamente y el que debe ser apropiado por los estudiantes. Es por ello que se hace necesario que los docentes estén capacitándose continuamente y que la formación inicial sea adecuada para este fin.

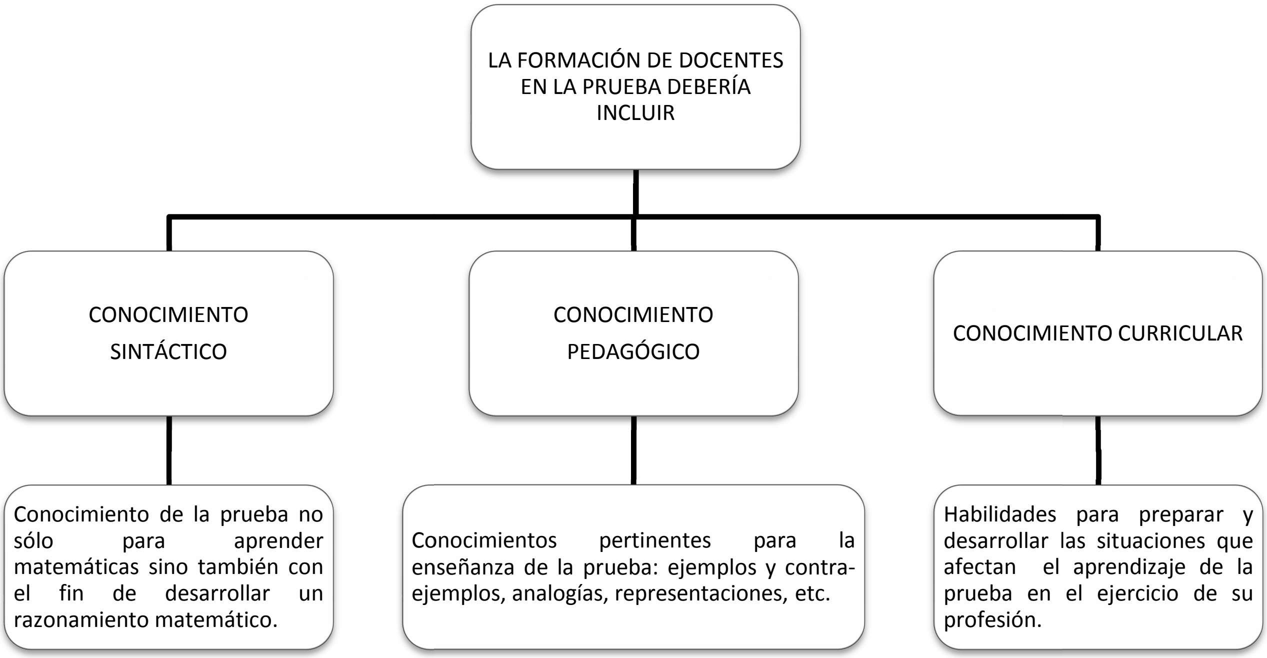
Para mostrar la importancia de este tipo de formación en los docentes brasileros; específicamente en la prueba y la demostración, Ruy Pietropaolo realizó una investigación cualitativa. Como el propósito era obtener conclusiones que tuvieran la colaboración de varias fuentes, se utilizó la Investigación Bibliográfica y Documental, y la realización de entrevistas con investigadores en educación matemática y con docentes de educación básica cuya práctica docente incluye algún tipo de trabajo con pruebas.

De la parte de este trabajo relacionada con la formación de docentes se llegó a dos conclusiones:

i. Se observa en los docentes entrevistados una tensión al analizar las pruebas producidas por los estudiantes, pues oscilan entre aceptar y clasificar como buena y creativa una "**evidencia empírica**" y la no aceptación de ésta, porque no es, de hecho, una prueba matemática, es decir, no es una prueba rigurosa.

   Estos docentes no creen por ejemplo, que el proceso de enseñanza de las pruebas puede ser un medio rico para hacer matemáticas en el aula, porque esa labor se limita a unos pocos estudiantes. Sin embargo, proponen caminos para llegar a las demostraciones formales en la escuela. (Pietropaolo, 2005, p. 219)

ii. En los cursos de formación de docentes en Brasil, es trascendental darle importancia a las demostraciones considerando la prueba desde el punto de vista sintáctico, pedagógico y curricular. Esta segunda conclusión se sintetiza en el esquema 31.



Esquema 31. La formación de docentes en la prueba

Con base en los resultados de estas investigaciones, se hace necesaria la reflexión acerca de la formación inicial y continuada de docentes específicamente en la línea de pruebas y conjeturas, pues en la medida en que los docentes se hagan conscientes de la importancia de los procesos de prueba, y tengan las herramientas suficientes para su aplicación dentro del aula, se mejorará su desempeño, lo que conlleva al aprendizaje de conceptos por parte de los estudiantes.

También surge la reflexión de que se siga trabajando en la línea de conjeturas y pruebas en la clase de matemáticas en otras investigaciones; con el fin de que se promueva una revisión de los aspectos relacionados con el razonamiento y los procesos de prueba en la educación básica. Así se ofrecerá una visión que posibilite crear una verdadera estructura de formación de docentes de matemáticas en la cual ellos comprendan el potencial que tiene el trabajo con pruebas en el aula y lo conviertan en una práctica cotidiana en sus clases.

3.9 CONTEXTO COLOMBIANO: ARGUMENTAR Y VALIDAR EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

A partir de la construcción histórica de las matemáticas, se dieron complicaciones en el modo de justificar resultados y también en su veracidad, como parte de esta preocupación los griegos optaron por transformar las actividades demostrativas en validación deductiva, con la cual se sentaron las bases para la demostración formal. Pero ésta, no fue sencilla de enseñar, puesto que, fueron muy pocas las ideas, condiciones de enseñanza y práctica en los estudiantes de edad escolar, así que hicieron de la demostración una fuente para la comprensión de las matemáticas, y esto condujo a la negación en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

Pero, *¿por qué es importante la demostración de las matemáticas en la escuela?* Según Camargo et al (2006) "el aprendizaje de la demostración favorece procesos que focalizan la atención de los estudiantes en hechos particulares de los cuales van emergiendo las conjeturas y los elementos para realizar una demostración" (p. 43).

La motivación para incluir las demostraciones entre las tareas importantes para los estudiantes se da porque las pruebas están íntimamente conectadas con la construcción de las ideas matemáticas, aunque demostrar es tan sólo una de las formas de justificación, quizá la más sofisticada y a la que no necesariamente todos los estudiantes tienen que llegar. Lo anterior leva a que los investigadores Samper y Camargo se cuestiones sobre el *¿por qué en las aulas es difícil encontrar estudiantes que produzcan argumentos y pruebas, que hagan e investiguen conjeturas y que reconozcan la prueba y el razonamiento como aspectos fundamentales de la matemática?*

En el contexto colombiano, se hace evidente como los estudiantes hacen la demostración de una prueba, priorizando el contexto de aprendizaje, puesto que, es elemento esencial para la construcción social del conocimiento, y se enfocan a un objeto de estudio que en este caso es la geometría, y el proceso de validar sus axiomas y teoremas, lleva a la producción de conjeturas, a la experimentación, la inducción, las hipótesis, la simbolización y la abstracción, por lo cual se convierte en una herramienta necesaria para dicho proceso.

Los docentes se preocupan por realizar innovaciones en el aula de clase donde los estudiantes participen activamente con su razonamiento, para crear generalizaciones y justificaciones adecuadas para la solución de los problemas. Camargo et al (2006), basados en los estándares del **NCTM** (2000), incluyen la expectativa de que los estudiantes de todos los niveles se involucren con el razonamiento y la prueba, con el fin de que sean capaces de comprender y producir pruebas matemáticas, validar resultados y entender por qué son válidos.

En Colombia, algunos investigadores han trabajado en línea de conjeturas y pruebas, como las profesoras Olga Lucia León Corredor y Dora Inés Calderón, de la Universidad del Valle, integrantes del Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje de las Matemáticas; Carmen Samper y Leonor Camargo, que pertenecen a la Universidad Pedagógica Nacional; y John Henry Durango Urrego de la Universidad de Antioquia, integrante del grupo de investigación en Educación Matemática e Historia de la Universidad de Antioquia y Eafit.

Las investigadoras Carmen Samper y Leonor Camargo se basan en la interacción en grupos para observar y analizar las situaciones, donde se desarrollan procesos de exposición y debate. Para ello, el trabajo se centra en investigaciones sobre las actividades demostrativas como argumentar y validar en la formación inicial del profesor de matemáticas y en el cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría.

Por su parte John Henry Durango basa su trabajo en las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentarse a actividades de validación, realiza además un trabajo sobre los tipos de conjeturas producidos por los estudiantes.

En este apartado se dará a conocer la reflexión que se presenta en tales investigaciones, acerca del papel fundamental que juega la elaboración de argumentos y conjeturas y el desarrollo del pensamiento argumentativo en las etapas del trabajo matemático. De igual manera se plantea como problemática la escasez de espacios que permitan al estudiante desarrollar el razonamiento conjetural, para lo cual, la implementación de la geometría dinámica puede ayudar a contrarrestar tal situación.

En lo referente a los procesos de argumentación y validación en el aula de matemáticas, se trabaja sobre un significado de referencia ya construido; es decir, a partir de demostraciones presentadas en textos. Al respecto, Samper & Camargo (2003) plantean que los docentes pueden generar en sus estudiantes razonamiento demostrativo, a partir de los libros de texto que actualmente emplean, pero que depende de la orientación metodológica con que se aborden.

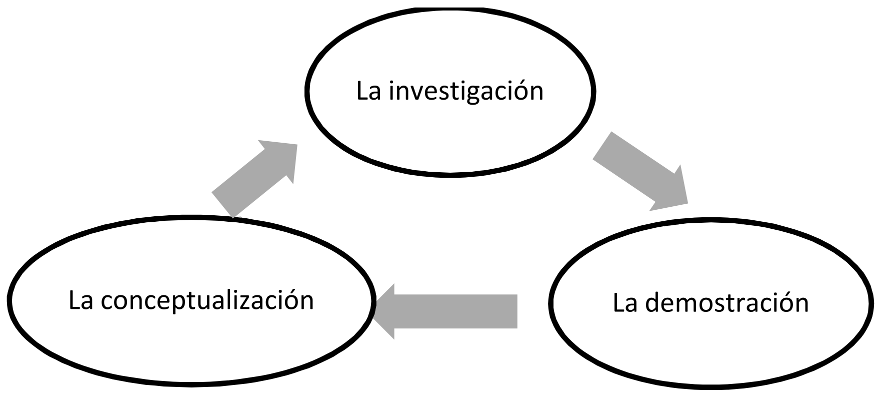
Desde la observación y el análisis paulatino de los procesos de comunicación y de elaboración de sentido en clase de matemáticas, y desde el diseño didáctico motivado por la investigación se podría construir espacios para la comprensión de las estructuras de comunicación matemática presentes en situaciones de argumentación y validación. En este sentido, Samper & Camargo (2003), distinguen tres actividades que favorecen el razonamiento a través de la geometría: la conceptualización, la investigación y la demostración.

Con la ***conceptualización***, se pretende orientar la necesidad de fijar representaciones acerca de un objeto o relación geométrica, para acercar las imágenes conceptuales de éste a la definición construida por la comunidad matemática; el desarrollo del razonamiento se favorece en el momento que se tienen las figuras geométricas buscando la solución de un problema mediante métodos no rigurosos donde se tenga en cuenta un proceso de análisis y síntesis que permiten la producción de información geométrica nueva y útil para la resolución de problemas.

La ***investigación***, permite favorecer el razonamiento de tipo conjetural exponiendo una perspectiva poco explotada de la actividad matemática en la escuela, al proponer a los estudiantes actividades de indagación en la búsqueda de relaciones geométricas; los teoremas obtienen significado al reformularse, para ser presentados a los estudiantes, como enunciados que cuestionan la relación geométrica en juego e incitan a descubrirla.

La ***demostración***, es vista desde un aspecto amplio en el contexto escolar, que contiene procesos de validación como la explicación y la prueba; el razonamiento se favorece no sólo en términos del impulso que se da a procesos en el momento de deducir algo que buscan con la validación, sino a través de la argumentación informal por medio de la cual se pretende convencer a otros de la autenticidad de una afirmación, donde se negocian afirmaciones y se busca la aprobación.

El esquema 32 sintetiza las actividades que favorecen el razonamiento a través de la geometría.



Esquema 32. Actividades que favorecen el razonamiento a través de la geometría

A medida que el estudiante establece relaciones entre conceptos geométricos, y esté apto para argumentar con razones instauradas acerca de una propiedad geométrica, puede dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos, expresando de forma convincente los resultados que obtuvo en investigaciones en geometría; argumenta y convence a otros sobre sus puntos de vista en cualquier contexto, y entiende los elementos que satisfacen una teoría geométrica. En consecuencia, el papel de la geometría en la escuela es propicio para el desarrollo del razonamiento. Al respecto, Durango (2009) reconoce los aportes de la geometría y ejemplifica una situación propicia para el desarrollo de la argumentación.

> "La búsqueda de regularidades geométricas**:** Establecer regularidades en las figuras geométricas establecidas. En algunos casos las regularidades se establecen mediante comparaciones. El uso de regularidades ayuda a extrapolar y averiguar información de datos que no se pueden tener en la mano". (p. 148).

Con actividades de este estilo, el estudiante se acerca a la noción de demostración, mediante procesos previos como la explicación y la prueba.

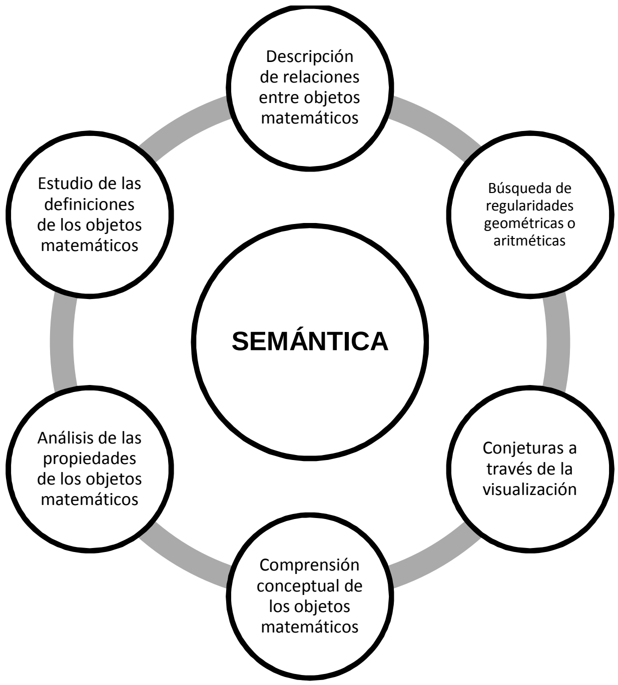
Sobre las dificultades de los estudiantes en los contextos de justificación y de descubrimiento, Durango (2009) afirma que son:

> … aquellos obstáculos conceptuales derivados de la ruptura epistemológica en la historia de la matemática, en cuanto al razonamiento deductivo, de aplicación de conceptos, de escritura y estilos de pruebas y justificaciones, de construcción y creatividad, de modos conscientes de razonamientos inductivos, deductivos o conjeturales, de validación consciente y de enlace entre razonamientos matemáticos que no permiten el acceso a la comprensión y elaboración o bien de una prueba o justificación, o de una conjetura. (p. 140)

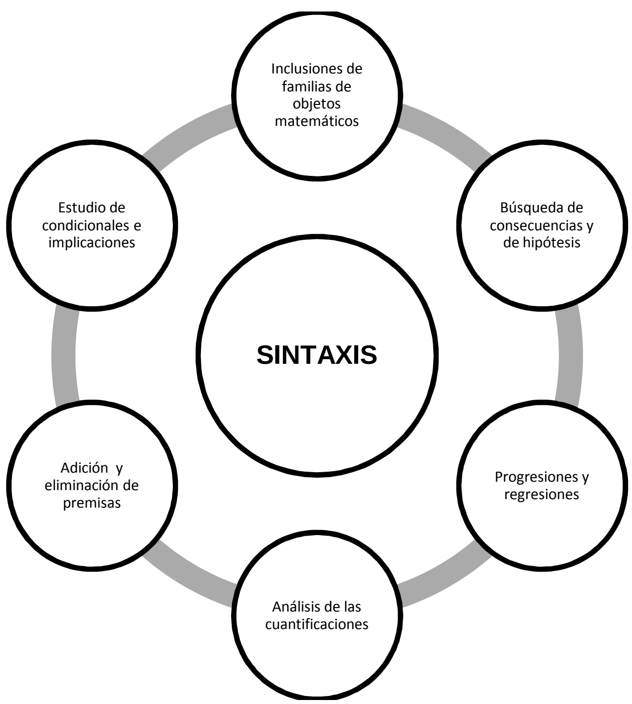
En el trabajo realizado se proponen dos tipos de conjeturas realizadas por los estudiantes en clase de matemáticas, a saber:

- **Conjetura Temporal:** Es un buen enunciado en su construcción semántica y sintáctica. Los estudiantes lo construyen frente a una actividad y se puede comprobar su validez, mediante razonamientos inductivos y/o razonamientos deductivos en el transcurso de la clase.
- **Conjetura Omnitemporal**: Es un buen enunciado en su construcción semántica y sintáctica, del cual es imposible realizar su validez y verificar su valor de verdad, mediante razonamientos inductivos y/o deductivos o medios tecnológicos avanzados en el transcurso de la clase, e incluso pueden perdurar como conjeturas en matemáticas, tal es el caso del problema de los cuatro colores.

En su investigación Durango (2009) caracteriza dos tipos de estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas, considerándolas como habilidades, destrezas, procesos de razonamientos matemáticos conscientes, que se emplean para analizar, buscar, estudiar, mejorar, comprender, describir, refutar y realizar cambios de registros y representaciones de enunciados matemáticos desde su semántica o su sintaxis. Los esquemas 33 y 34 muestran las estrategias al conjeturar que tienen que ver con la semántica y la sintáctica.



Esquema 33. Estrategias que tienen que ver con la semántica del enunciado



Esquema 34. Estrategias que tienen que ver con la sintaxis del enunciado

CAPÍTULO 4

4. CONCLUSIONES

El punto de partida de esta investigación es indagar teóricamente sobre los aportes investigativos presentados en algunos países en los contextos de descubrimiento y justificación matemática, en cuanto al desempeño del estudiante, el docente y el objeto de conocimiento dentro de dichos contextos.

Para responder a esta cuestión se realiza un análisis de algunas investigaciones, dentro del metodo de investigación documental, en torno a los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación en educación matemática, considerando al estudiante, al docente y al objeto de conocimiento dentro de dichos contextos.

4.1 APORTES TRAS LA INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

A continuación se presentan los elementos y resultados que recogen los propósitos iniciales, consecuencia del análisis de algunas de las investigaciones realizadas en **Francia, Italia, Alemania, España, Japón, Estados Unidos, México, Brasil y Colombia** extrayéndose aportes para ampliar la perspectiva que se tiene en Educación Matemática en el campo colombiano, en cuanto a dichos contextos.

Para los investigadores es evidente la utilización de la prueba como herramienta que posibilita la construcción de conceptos y el desarrollo de habilidades matemáticas en el aula de clase.

Por esto en todas las investigaciones se plantean propuestas para llevar al aula la demostración considerándola como proceso, analizando las fases por las que pasan los estudiantes, teniendo en cuenta los aspectos didácticos y cognitivos.

Según las investigaciones el desarrollo de las situaciones de demostración, debe comenzar en la educación básica, promoviendo un ambiente de aprendizaje en el cual los procesos de argumentación y justificación hacen parte de la clase de matemáticas, creándose así una cultura argumentativa y demostrativa.

Dado que los estudiantes frecuentemente formulan conjeturas, pruebas y refutaciones, deben considerarse las diferentes significaciones, tipos y esquemas de prueba producidas por los estudiantes.

No obstante, el trabajo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones debe iniciarse con docentes, resignificando la concepción que estos tienen de su desempeño y favoreciendo la comprensión del papel de las pruebas en el aprendizaje de las matemáticas.

En la tabla 6 se exhiben los conceptos destacados, los procesos privilegiados y el tipo de razonamiento explorado en los estudiantes en las investigaciones analizadas.

	Proceso privilegiado en sus investigaciones					Conceptos destacados	Razonamiento	
	Argumentación	Conjetura	Prueba	Demostración	Refutación		Inductivo	Deductivo
FRANCIA	**X**		**X**	**X**	**X**	Tipos de prueba. Interacción Social.	**X**	
ITALIA		**X**	**X**			Cultura de teoremas. Unidad cognitiva de teoremas. Campos de experiencia		**X**
ALEMANIA	**X**			**X**		Competencia demostrativa. Tipos de argumentación	**X**	**X**
ESPAÑA	**X**		**X**	**X**		Funciones y significados de la prueba. Esquemas de prueba. S.G.D.	**X**	
JAPÓN	**X**			**X**		Argumentación. Resolución de problemas.	**X**	
ESTADOS UNIDOS			**X**			Instrucción. Sociología de la prueba.		**X**
MÉXICO		**X**		**X**		Resolución de problemas. Exploración, observación y formulación de conjeturas.	**X**	
BRASIL			**X**			Formación del profesorado. Conocimiento: Sintáctico Pedagógico Curricular		**X**
COLOMBIA	**X**	**X**	**X**			Dificultad en el contexto de justificación y descubrimiento. Camino a la argumentación. Tipos de conjetura.	**X**	

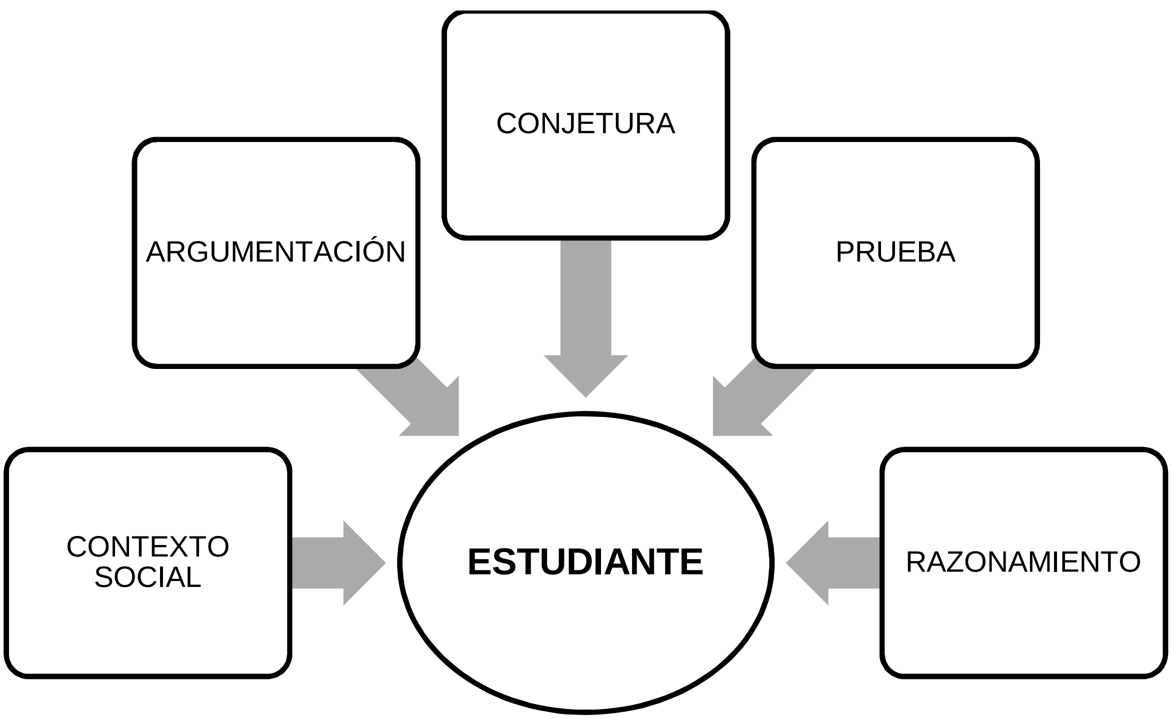
Tabla 6. Síntesis Investigación documental por países

4.2 EL ESTUDIANTE, EL DOCENTE Y EL OBJETO DE CONOCIMIENTO EN LOS CONTEXTOS DE DESCUBRIMIENTO Y JUSTIFICACIÓN.

El análisis realizado permite evidenciar además, el desempeño del estudiante, del docente y del objeto de conocimiento -que en este caso es la geometría- en el desarrollo de los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación en clase de matemáticas.

4.2.1 El estudiante en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones: tipo de razonamiento, niveles, esquemas y fases.

El esquema 35 evidencia lo encontrado en las investigaciones en cuanto al estudiante en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.



Esquema 35. El estudiante en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.

El estudiante es el centro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, es quien pone de manifiesto su razonamiento matemático en la medida que evidencia sus habilidades al enfrentarse a la actividad demostrativa.

Desde los Parámetros Curriculares Nacionales (Brasil, Ministerio da educação edo Desporto 1998) el estudiante juega un rol importante, pues se espera que sea activo, que no se satisfaga sólo con la producción de preguntas y respuestas, sino que asuma una actitud de justificación, para ir desarrollando su razonamiento y de esta manera, hacer de la argumentación un camino que conduzca a la demostración. Así gradualmente irá comprendiendo la importancia de la demostración en matemática y empezará a utilizar los principios de la lógica formal.

Como sujeto social el estudiante explora, explica, analiza, verifica, conjetura, argumenta, justifica, refuta las acciones propias de la práctica en la actividad demostrativa al intentar convencer a los demás de la veracidad de ellas, mostrando toda su creatividad y capacidad argumentativa al enfrentarse a situaciones y problemas de demostración.

Según Nicolás Balacheff las acciones de la actividad demostrativa se potencializan desde la interacción social, la cual es un instrumento que favorece la comunicación entre estudiantes, ya que los conlleva a asumir una posición donde deben convencerse unos a otros de los argumentos producidos por cada uno.

En la interacción social los estudiantes están comprometidos en la búsqueda de una solución común a un problema dado, y al ser un comportamiento social un proceso abierto, permite el uso de cualquier tipo de medio para explicar y justificar decisiones. No se puede esperar, que con la interacción social, los estudiantes se inicien en un "*debate matemático*"[12] y, finalmente, produzcan una demostración

[12] En este contexto, se entiende el *debate matemático* como la confrontación mediada por argumentos formales, a la que llegan los estudiantes cundo se dan a la tarea de validar un enunciado o proposición matemática.

matemática. Algunos de los estudiantes no actúan como expertos-teóricos, sino como aprendices. Su tarea es dar una solución al problema que el profesor les ha dado, una solución que sea aceptable con respecto a la situación en el aula. Eso significa que más allá de las características sociales de la situación de la enseñanza, es preciso analizar la naturaleza del objetivo que se propone. Si los estudiantes ven el objetivo de "*hacer*", más que "*saber*", entonces su debate se centrará en la eficiencia y fiabilidad, que en el rigor y la seguridad.

Según Víctor Larios, el estudiante debe comprender que el aprender matemáticas implica resolver problemas, y esta noción debe ser comprensible tanto para él como para el docente; el desempeño del estudiante debe ser transversal a los procesos de exploración, observación y formulación de conjeturas, en tanto le permiten acceder de manera significativa a la resolución de problemas.

El estudiante debe enfrentarse a la resolución de problemas que lo lleven a ver la necesidad de demostrar y argumentar, ya que, por medio de éstos se desarrollan estrategias para el análisis de los efectos discursivos de los registros y recursos para la argumentación, tanto en el interlocutor, como en la elaboración del conocimiento en construcción.

Desde la perspectiva de algunas de las investigaciones, entre ellas las de Balacheff, las de Ángel Gutiérrez y las de Reiss & Heinze, el estudiante es quien evidencia su razonamiento, al mostrar sus habilidades para enfrentarse a situaciones argumentativas. La forma en que presenta sus pruebas varía según las prácticas educativas y los diversos significados de demostración que se tiene en los diferentes contextos.

Al verse enfrentados a problemas de demostración, los estudiantes realizan diferentes producciones en las que se hace evidente parte de su razonamiento. Ala respecto Balacheff propone una clasificación de los tipos de prueba, que atienden al nivel de razonamiento, y a la forma de proceder al momento de realizar una prueba.

En las investigaciones analizadas es evidente que los estudiantes de educación básica producen pruebas empíricas y hacen uso más del razonamiento inductivo que del deductivo.

Muestran además, que según el tipo de razonamiento se presenta un avance en la competencia demostrativa y argumentativa y en la habilidad conjetural y que es a través de la apropiación de la cultura de teoremas que los estudiantes producen cada vez pruebas con mayor rigor.
En los diferentes países se muestran categorizaciones sobre los tipos de prueba, de argumentación, y las fases en la actividad de conjeturar, probar y refutar.

Reiss y Heinze, muestran los tipos de razonamiento a los que llegan los estudiantes, dependiendo de la comprensión que tengan de los objetos de conocimiento y el uso de teoremas y axiomas. El tipo de razonamiento del estudiante, es presentado a partir de una estructura, que consta de tres niveles en los cuales se diferencian los pasos o acciones que secuencian los estudiantes hasta llegar a una demostración de la tarea propuesta.

Desde la perspectiva de Gutiérrez y otros (2000), las demostraciones producidas por los estudiantes dependen del nivel de razonamiento en el que se encuentran y según el avance que tengan en la comprensión de la demostración matemática; por esto destacan las características de los niveles de Van Hiele que tienen que ver específicamente con la habilidad de demostración. En el nivel 1 el estudiante no realiza demostración alguna; en el nivel 2 la demostración es empírica, en el nivel 3 se realiza una demostración deductiva formal y finalmente, en el nivel 4 la demostración es deductiva formal.

Finalmente, desde una perspectiva Italiana se busca que el estudiante desarrolle su habilidad conjetural a partir de una serie de fases, dentro del contexto específico de sunshadows; campo de experiencia para el trabajo de conjeturas y pruebas en el aula, el cual está enmarcado mediante una serie de fases.

Además de estas fases, durante la producción de conjeturas, el estudiante trabaja progresivamente en pro de su declaración a través de una intensa actividad argumental, alternada con la justificación de la validez de su elección.

Durante la posterior declaración en la fase de construcción de la prueba, el estudiante se conecta con este proceso de una manera coherente, organizando las justificaciones de acuerdo a una cadena lógica. En cuanto a la producción de la declaración, el razonamiento argumental cumple una función fundamenta, la cual es, permitir a los estudiantes explorar diferentes alternativas conscientemente.

Las tablas 7 y 8 sintetizan los aportes de las investigaciones de cada país sobre el estudiante en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.

	FRANCIA	ITALIA	ALEMANIA	ESPAÑA	JAPÓN
SOCIAL					
Proposición de estrategias	X		X		X
Búsqueda de solución	X				X
Comunicación	X	X	X	X	X
Debate	X	X			
ARGUMENTACIÓN					
Constante	X	X	X	X	X
Contraargumentos	X		X		X
Tipos de argumentos			X	X	
CONJETURA					
Explora	X	X	X	X	

Observa		X			
Formula hipótesis		X	X	X	
PRUEBA					
Verifica	X	X		X	
Explica	X	X	X	X	X
Produce diferentes tipos	X			X	
RAZONAMIENTO EMPLEADO					
Inductivo	X	X	X	X	X
Deductivo		X			

Tabla 7. El estudiante en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones. Síntesis por país

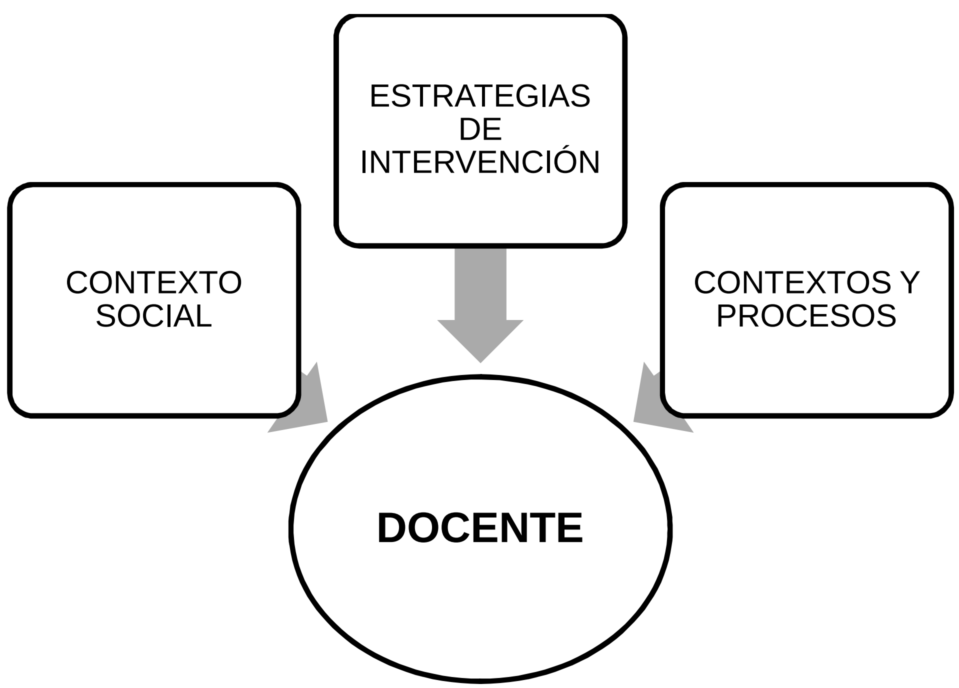
	ESTADOS UNIDOS	MÉXICO	BRASIL	COLOMBIA
SOCIAL				
Proposición de estrategias	X	X		
Búsqueda de solución				
Comunicación	X	X	X	X
Debate	X			
ARGUMENTACIÓN				
Constante	X		X	X
Contraargumentos				
Tipos de argumentos				X
CONJETURA				
Explora		X		X
Observa		X		X
Formula hipótesis		X		X
PRUEBA				
Verifica	X		X	X

Explica	X		X	
Produce diferentes tipos	X			
RAZONAMIENTO EMPLEADO				
Inductivo		X		X
Deductivo	X		X	X

Tabla 8. El estudiante en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones. Síntesis por país

4.2.2 El docente en las conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones: formación, instrucción y contextos.

El esquema 36 muestra lo encontrado en las investigaciones en cuanto al docente en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.



Esquema 36. El docente en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.

El docente aparece como mediador, orientador, investigador de diferentes estrategias de intervención; genera un clima de clase en el que se promueve en los estudiantes la conjeturación, la confrontación, y la exploración.

Toma los procesos como herramientas que movilizan el razonamiento matemático y la construcción de los conceptos matemáticos, genera capacidad de análisis y crítica ante las diversas situaciones argumentativas y demostrativas de la escuela y de la vida en general.

Promueve la discusión matemática entre sus estudiantes, reconoce las necesidades cognitivas de ellos e incluye los procesos desde la básica primaria.

Reconoce las pequeñas justificaciones de los estudiantes, valorando los tipos de razonamiento y proponiendo situaciones experimentales cercanas a los contextos del estudiante de tal manera que éste avance hacia el rigor matemático aprovechando las diferencias argumentales.

Para algunos estudiantes de educación básica secundaria el reconocer las reglas matemáticas y hacer uso de ellas en situaciones demostrativas representa un problema, puesto que a lo largo de su formación han tenido poco contacto con los procesos de justificación, argumentación y demostración matemáticas. Para el docente se convierte en un reto metodológico y didáctico el desarrollo de tales competencias. La construcción de una demostración basada en argumentos lógicos y justificaciones fundamentadas no se consigue sólo con el uso de la lógica cotidiana, sino que se requiere del aprendizaje de ciertas reglas de inferencia, que se deben construir conjuntamente con los estudiantes. (Reiss, 2007).

El docente aparece como mediador, orientador, investigador de diferentes estrategias de intervención; genera un clima de clase en el que se promueve en los estudiantes la conjeturación, la confrontación, y la exploración.

Es importante que el docente promueva desde los primeros cursos de enseñanza los procesos de conjeturar y demostrar; ofreciendo a sus estudiantes actividades y problemas en los que el razonamiento matemático sea un componente para analizar información, establecer conjeturas y demostrarlas. De esta manera se logrará en los estudiantes el desarrollo del razonamiento deductivo y que pasen de la realización de pruebas empíricas e inductivas a la construcción de pruebas formales.

Según Víctor Larios (2006) el docente debe asumir los problemas como parte medular de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Es por este motivo que el docente debe elegir problemas que propicien la adquisición significativa del conocimiento, desarrollando conjuntamente estrategias que les faciliten la implementación de los problemas matemáticos en el aula de clase, teniendo contacto con el contexto.

Se insiste en la necesidad de que los docentes utilicen problemas matemáticos como fuente de aprendizaje, promoviendo en los estudiantes el quehacer matemático a través de su resolución. En el momento de resolver problemas el estudiante plantea estrategias y conjetura sobre posibles soluciones o incluso conjetura sobre la estrategia, es decir sobre su pertinencia o eficacia. Cuando el estudiante conjetura reflexiona sobre sus procesos mentales y evalúa sus procesos de aprendizaje, de esta manera logra que interactuar con los problemas y no los toma simplemente como una tarea aislada a la que no le encuentra un propósito claro.

Desde las investigaciones realizadas en Colombia, los docentes deben procurar que los estudiantes introduzcan en su educación matemática el razonamiento, y que éste se evidencie en las pruebas, las demostraciones y justificaciones para la solución de problemas. Para que los estudiantes puedan producir pruebas, dando a conocer éstas como una herramienta indispensable de la matemática.

Los docentes deben asumir la tarea de impulsar el desarrollo de la aptitud demostrativa en los estudiantes. Deben ser investigadores dentro del aula de clase para observar directa y paulatinamente los procesos de sus estudiantes. En este sentido el conjeturar, justificar y validar permite darle sentido a la demostración y reconocer el papel que ésta juega en la construcción de conocimiento matemático.

Para ello, los docentes deben plantearse un reto investigativo, con el fin de identificar y caracterizar la competencia argumentativa para impactar las instancias cognitiva y discursiva de los estudiantes.

Así mismo, dentro del marco italiano de pruebas y conjeturas, se plantea la presencia de un docente como mediador de la cultura del conocimiento matemático, que sea capaz de innovar en el aula, a partir de la utilización de situaciones problema, acordes con la realidad del estudiante y con la teoría de referencia que se quiere enseñar.

Dicha concepción de docente no es fácil de construir desde un enfoque constructivista y difícil de mediar a través de un enfoque tradicional, ya que no es sólo tarea del estudiante o del docente, es la construcción del estudiante mediado por el discurso del docente.

Es de esta forma como el docente tiene la responsabilidad tanto de coordinar, como de reforzar la discusión matemática, ya que es el encargado de ayudar al estudiante a reconocer y organizar los errores conceptuales presentes en las conjeturas propuestas durante una primera fase, para luego lograr construir una prueba estructurada en forma condicional y a favor de la teoría matemática.

Las mediaciones hechas por el docente deben tener en cuenta además, las necesidades cognitivas de los estudiantes, que se manifiestan a través de sus producciones y los bienes culturales y cognitivos que estos productos tienen;

identificando así las fortalezas y dificultades de los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones que involucren la producción de conjeturas y pruebas.

En la búsqueda de la formación integral del estudiante, el docente deberá estar capacitado tanto en el ser como en el saber matemático, motivo por el cual los docentes en el contexto japonés están en constante preparación y evaluación de sus metodologías de enseñanza.

Tratando de inducir al estudiante en los procesos de prueba y conjetura, el docente es un *"orientador"* al interior del aula de clase, con el fin de que los estudiantes construyan el conocimiento a partir del trabajo en grupo, de este modo el docente presenta al inicio de la clase una situación problema; cuya solución implique retomar conceptos antes vistos, en grupo o de forma individual; el docente confía en que los estudiantes tienen algo que decir, por eso espera las respuestas y argumentos a cada pregunta, sin presionar, dando tiempo y recogiendo cada aporte por insignificante que parezca; finalmente el estudiante presenta diversas hipótesis a dicho problema en el proceso de construir el conocimiento a partir de la prueba y la conjetura.

Independientemente del análisis de los estudiantes, el docente expresa respeto por las ideas individuales, tratando de aprovechar las diferencias argumentales de los estudiantes para motivar en ellos la reflexión sobre los errores propios y la contribución del otro, pretendiendo a su vez profundizar en ellos la comprensión del tema en cuestión, mediante la búsqueda colaborativa de una solución.

Las investigaciones de Brasil, por otro lado, centran su atención en la formación de los docentes. Se pretende que mediante diferentes estrategias como: la investigación cooperativa, la utilización de entornos dinámicos, la enseñanza formulada y puestas en práctica por los docentes, estos comprendan la necesidad de enseñar los procesos de prueba en la educación básica, de tal manera que sean conscientes de que el conocimiento de la prueba no sólo es necesario para aprender matemáticas sino también para desarrollar un razonamiento matemático en sus estudiantes.

Las estrategias de enseñanza formuladas y puestas en práctica por los docentes para exponer conceptos que imparten en una clase o a lo largo de un período académico, son un factor determinante para la asimilación y comprensión por parte de los estudiantes. Por esta razón se pretende que los docentes puedan relacionar las situaciones de aprendizaje desarrolladas en sus investigaciones con la práctica en el aula. Para ello continuamente se trabaja en los conocimientos pertinentes para la enseñanza de la prueba como ejemplos y contra-ejemplos, analogías, conjeturas, representaciones, entre otros.

Los investigadores y docentes concluyen que existe la necesidad de seguir realizando estudios sobre las formas en que los estudiantes asumen la producción de argumentaciones, conjeturas y pruebas, además de estudios cuyo objetivo sean la investigación de progresos de estudiantes de educación básica en el desarrollo del razonamiento deductivo.

Las tablas 9 y 10 sintetizan los aportes de las investigaciones de cada país sobre el docente en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.

	FRANCIA	ITALIA	ALEMANIA	ESPAÑA	JAPÓN
EN LO SOCIAL					
Mediador	X	X			
Orientador				X	X
Organizador					
Promotor de discusión	X	X			
Promotor de los procesos	X	X	X	X	X
ESTRATEGIAS DE INTERVENCIÓN					
Situaciones problema					X
Instrucción					

Situaciones experimentales de validación	X	X	X	X	
Estudio de clases					X
CONTENIDOS A ENSEÑAR					
Razonamiento				X	X
Argumentación	X		X	X	X
Conjetura		X			
Prueba	X	X		X	
Demostración	X			X	
Refutación	X				X
RAZONAMIENTO EMPLEADO					
Inductivo	X		X	X	X
Deductivo		X			

Tabla 9. El docente en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones. Síntesis por país

	ESTADOS UNIDOS	MÉXICO	BRASIL	COLOMBIA
EN LO SOCIAL				
Mediador				X
Orientador		X	X	
Organizador	X			
Promotor de discusión				
Promotor de los procesos	X	X	X	X
ESTRATEGIAS DE INTERVENCIÓN				
Situaciones problema		X	X	
Instrucción	X			
Situaciones experimentales de validación				X
Estudio de clases				
CONTENIDOS A ENSEÑAR				
Razonamiento			X	X
Argumentación				X

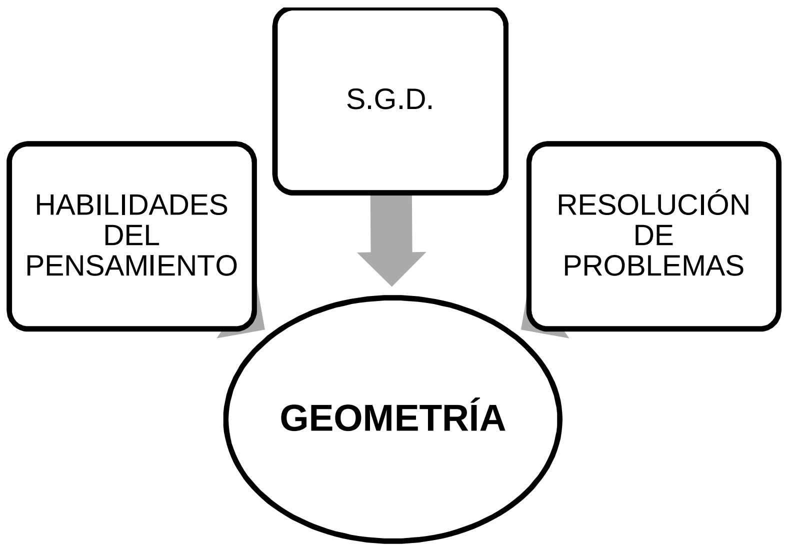
Conjetura		X		X
Prueba	X		X	
Demostración				
Refutación		X		
RAZONAMIENTO EMPLEADO				
Inductivo		X	X	X
Deductivo	X			X

Tabla 10. El docente en el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones. Síntesis por país

4.2.3 La geometría como objeto de conocimiento propicio para la construcción de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones en los estudiantes.

En esta investigación es asumida la geometría como objeto de conocimiento propicio para la construcción de demostraciones matemáticas, por ser esta el área de la matemática utilizada en los trabajos experimentales de las investigaciones abordadas en los diferentes países.

El esquema 37 muestra lo encontrado en las investigaciones en cuanto a la geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.



Esquema 37. La geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.

En las investigaciones analizadas se asume la geometría porque ayuda a los estudiantes a desarrollar su razonamiento matemático y específicamente a mejorar sus habilidades demostrativas pues es un motor para el desarrollo de las competencias demostrativa y argumentativa.

La realización de actividades geométricas de demostración ayuda a los estudiantes a ser más competentes en la resolución de problemas del contexto real y escolar, además este tipo de actividades promueve la observación, la experimentación, la visualización, el descubrimiento, la manipulación, la exploración y la modelización.

La geometría representa una dualidad, en tanto crea relaciones con el espacio físico y porque sobrepasa el mundo empírico, permitiendo su consolidación con el mundo abstracto; objetos y sus propiedades, esto permite darle sentido a la demostración, puesto que el estudiante debe aprender a diferenciarlos y generar una relación interactiva entre ellos.

En el momento de buscar una justificación se logra que el estudiante se involucre en actividades de investigación, donde éstas suministran medios para una explicación de la prueba y así poder llegar a la demostración formal. Es así como se exige una postura discursiva que le permitirá entrar a un juego argumentativo, donde se evidencien justificaciones y narraciones, lo cual deriva en el desarrollo de su competencia argumentativa. El trabajo de producir una justificación por medio de explicaciones, pruebas o demostraciones formales permite al estudiante ir y venir de la geometría empírica a la teórica.

La realización de problemas geométricos de demostración ayuda a los estudiantes a descubrir relaciones y tornarse competentes en la solución de problemas, pues apoyados en la búsqueda y exploración, descubren, comprenden y explican aspectos y situaciones cotidianas.

Buscando los avances en la presentación de problemas de demostración geométricos, tradicionales y estáticos, se plantea la utilización de los **SGD**, como un soporte para el desarrollo de habilidades formales e informales, que sirve de apoyo al estudiante en la construcción de conjeturas y en la producción de pruebas formales. La implementacion de los **SGD** permite al estudiante observar características de las figuras que muchas veces no se pueden ver a simple vista en el papel. Así mimo se llega a la interiorizacion de las propiedades de las figuras.

No sólo se hace necesario investigar los conocimientos, creencias y actitudes que tienen los docentes de matemáticas en cuanto a su trabajo de enseñanza de la prueba, sino también indagar el impacto que al respecto generan los distintos enfoques metodológicos implementados en el aula.

En el contexto brasilero se hace énfasis en la geometría como herramienta importante en el proceso de construcción de pruebas, y se promueve la comprensión de la naturaleza hipotético-deductiva de la geometría, para ayudar a comprender los resultados clásicos de la geometría de manera eficiente mediante el uso de entornos dinámicos.

En el aprendizaje de la geometría, uno de los retos es la comprensión de las habilidades cognitivas necesarias para producir argumentos deductivos. En este sentido los investigadores brasileros coinciden en mostrar por medio de sus estudios los efectos positivos causados por el uso de entornos de geometría dinámica.

Por otra parte la demostración geométrica permite la comunicación como base para la interacción social; ya que un dibujo o un esquema pueden ser un argumento para validar una teoría, aunque éste no sea adecuado desde el punto de vista de pruebas intelectuales, es muy utilizado por los estudiantes para la demostración.

La demostración dentro de la geometría permite utilizar diferentes herramientas como medios de argumentación a la hora de una prueba y no se ciñe en un solo método de razonamiento, igualmente ayuda a evidenciar cuándo un argumento es inválido puesto que solamente el dibujo no basta para validar o convencer al otro par.

Las tablas 11 y 12 sintetizan los aportes de las investigaciones de cada país sobre la geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones.

	FRANCIA	ITALIA	ALEMANIA	ESPAÑA	JAPÓN
HABILIDADES					
Abstracción		X		X	
Explicación					
Argumentación	X		X	X	X
Razonamiento	X	X	X	X	X

Inductivo Deductivo	X X	X		X	
Exploración	X	X		X	
Observación		X		X	X
Formulación de conjeturas		X		X	X
Resolución de problemas				X	X
Experimentación				X	
Manipulación				X	
Modelación	X				
Representación	X	X			
Comunicación	X	X	X	X	X
SGD					
Ambiente de experimentación		X		X	
Verificación de construcciones		X		X	
Promotores de discusión				X	
Observación de características invariables				X	

Tabla 11. La geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones. Síntesis por país.

	JAPÓN	USA	MÉXICO	BRASIL	COLOMBIA
HABILIDADES					
Abstracción					X
Explicación					X
Argumentación	X				X
Razonamiento Inductivo Deductivo	X	X X	X	X X	X X
Exploración			X		
Observación	X		X		
Formulación de conjeturas	X		X		X
Resolución de problemas	X		X	X	

Experimentación					
Manipulación					
Modelación					
Representación					
Comunicación	X	X	X	X	X
SGD					
Ambiente de experimentación			X	X	X
Verificación de construcciones			X	X	
Promotores de discusión		X	X	X	
Observación de características invariables			X	X	X

Tabla 12. La geometría como objeto de conocimiento propicio para el desarrollo de conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones. Síntesis por país.

4.3 PREGUNTAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Como resultado de la Investigación Documental realizada se proponen tres preguntas a ser desarrolladas en futuras investigaciones:

- ¿Qué aportes surgen a partir de esta Investigación Documental para realizar una propuesta de trabajo experimental en el aula?
- ¿Qué contribuciones pueden hacerse a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas colombianos a partir de esta Investigación Documental?
- ¿Qué influencia tiene el contexto social en el desarrollo de los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almouloud, S. A. (2007). Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. Extraído el 9 de noviembre de 2008 desde http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-2957--Int.pdf

Baba, T. (2007). La educación japonesa y el Estudio de Clases: una mirada de conjunto. Cómo se implementa el Estudio de Clases. En: Isoda M., Arcavi A. & Mena A. Chile.

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège. Thèse d'état. Université Joseph Fourier. Grenoble, 1-50. Extraído el 22 de octubre de 2009 desde: http://tel.archives-cuvertes-fr/docs/00/32/26/PDF/Balacheff. Nicolas_1 988_these_vol_1_et_2.pdf

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof, 2-20 Extraído 24 de agosto del 2009 desde http://wwwdidactique.imag.fr/preuve/Resumes/Balacheff/Balacheff91a

Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate, s. p. Extraído 15 de noviembre del 2008 desde: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: Una empresa docente, 1-32

Barnlund D. C. (1989) Communicative styles of Japanese and Americans: Images and realities. Belmont, CA: Wadsworth Publishing.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. Proceedings of PME-XX. Valencia, Spain, 121-128. Extraído el 5 de septiembre de 2008 desde: http: //www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96.html.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education, 7/8. Extraído el 15 de Agosto de 2008 desde: http://www-didactique.imag.fr/ preuve/Newsletter/ 990708Theme/990708ThemeES.html

Boero, P.; Garuti, R. & Lemut, E. (1999). About the Generation of Conditionality of Statements and its Links whit proving. Proceedings of PME-XXIII. Haifa, Israel. Extraído el 14 de Febrero de 2009 desde: http://www-didactique. imag.fr/preuve/ Resumes/Boero/Boero99.html

Boero, P. (2000). Approaching Mathematical Theories in Junior High School. Proceedings of Ninth International Congress on Mathematical Education ICME-9. Tokyo/Makuhari, Japan. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde: http// academic.sun.ac.za/mathed/ICME/Boero.htm

Boero, P. (2002). The approach to conjecturing and proving: cultural and educational choices. Proceedings of International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand 248-254. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde: http: //www.math.ntnu.edu.tw/.../mathedu/ me1/me1_2002_1/paoloboero.doc

Boero, P. (2007) Theorems in school: From history and epistemology to cognition. Netherlands. Ed. Sense Publishers, 19-28.

Brasil, Ministério da Educação e do Desporto, (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasilia. Extraído el 10 de diciembre de 2008 desde: http://mecsrv04.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf

Camargo, L., Samper C.,Perrey, P. y Rojas, C. (2006). Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. 35-75

Denzin, N. y Lincoln, Y (2000). Handbook of qualitative research. Thousands Oaks: Sage. 178-256

Diaz-Barriga, C., Larios, Victor y otros (2001). Hacia las aplicaciones de las Matemáticas en la escuela medi superior de Mexico. En J.E Sagula y O.L Isnardi (eds). Memorias del III Simposio de Educacion Matematica. Chivilcoy, Argentina: UNLu.

Durango, J.H. (2009) La comprensión en los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales en la clase de matemática: el contexto de justificación y descubrimiento. Tesis de maestría. Medellín: Universidad de Antioquia. 1-150.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine, 300-315. Extraído el 22 de octubre de 2009 desde: http://books.google.com/books?id=iUdiAAAAMAAJ&q=S%C3%A9miosis+et+pens%C3%A9e+humaine.&dq=S%C3%A9miosis+et+pens%C3%A9e+humaine.&ei=x27kSoa8O5WczgSYlZyqDA

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación, 9-50. Extraído el 28 de agosto de 2008 desde http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Erlandson, David y otros (1993). Doing naturalistic inquirí. Aguide to methods. P. 131-162.

Furinghetti, F. (2006). Not out of the blue: Historical roots of mathematics education in Italy, 99-103. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde: http: //www.math.umt.edu/ TMME/vol3no1/TMMEv3n1a6.pdf

Galeano, M. (2004). Estrategias de investigación social cialitativa. El giro en la Mirada.

García, a. (1995). metodología de validación del análisis documental y de los lenguajes documentales en el discurso periodístico.

Garuti, R., Boero, P. & Lemut, E.(1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof. Proceedings of PME-XXII. Stellenbosch, Sudáfrica. Extraído el 5 de Septiembre de 2008 desde: http: //www.lettredelapreuve.it/ Resumes/Garuti/ Garuti98.html.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1998). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Gutiérrez A. (2000). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. En Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética.

Gutiérrez, A. (2007). *Geometría, demostración y ordenadores*. Texto de la ponencia en las 13as JAEM (pendiente de publicación en las actas del congreso) junto con los archivos de Cabri II+ descritos (Granada).

Hanna, G. (2007). The Ongoing Value of Proof. En Ed. Sense Publishers. Theorems in school: From history and epistemology to cognition, 3-18.

Harel, G., & Sowder, L. (1994). Students' Proof Shemes: Results from Exploratory Studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, T. P, E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, & T. P (Edits.), Research in Collegiate Mathematics Education VII (págs. 234-277). Providence: AMS Bookstore, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. & Hoyles, C. (1999). Can they prove it?. *Mathematics In School, Essex*. Obtenido en la base de datos Wilsonweb el 20 de noviembre de 2.008

Healy L. & Jahn, A. P. (2007). Argumentação e prova na sala de aula de matemática: design colaborativo de cenários de aprendizagem. Extraído el 6 de febrero de 2009 http://www.anped.org.br/reunioes/31ra/1trabalho/GT19-4607--Int.pdf

Herbst, P. G. (1999). Acerca de la demostración y la lógica de la práctica en la Enseñanza de la Geometría: observaciones sobre la forma de prueba a dos columnas. La Letre de la Preuve

Herbst, P. (2000). Articulación y estructuración de las concepciones en la clase de matemáticas: Argumentos y conocimiento público. La Lettre de la Preuve .

Hosomizu, Y. (2007). Métodos y tipos de Estudio de Clases: Preparación de las clases. En: Isoda M., Arcavi A. & Mena A. Chile.

Hosomizu, Y. & Yamamoto, Y. (2007). Métodos y Tipos de Estudio de clases. En Ed. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. El Estudio de Clases Japoneses en Matemáticas, 102-159.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001 a) Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. 5º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM 5). Almería, septiembre, 2001

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001 b). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. Barcelona. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Larios, V. (2006) Demostrar es un problema o el problema es demostrar. Libro enviado por Víctor Larios al correo personal el 14 de Octubre de 2008.

Lakatos, Imre. (1978) Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza. 1-197

Lehrplänen und Ramenrichtlinien (2008). 1-36. Extraído el 2 de septiembre de 2008 desde http://www.rahmenrichtlinien.bildung-lsa.de/faecher/mathe.html

Lupiañez, J. L. Codina, A., (1999). El Razonamiento Matemático: Argumentación y Demostración. Trabajo presentado en XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Guadalajara

M.E.C. (1991). Currículo de Educación Secundaria. Madrid. Ministerio de Educación y Cultura.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Franca, F. & Garutti, R. (1997). Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. Proceedings of PME XX. Lahti, Finlandia, 180-195. Extraído el

18 de marzo de 2009 desde: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes /Mariotti/Mariotti97.html

Mariotti, M. A. & Cerulli, M. (2001). Semiotic Mediation for algebra teaching and learning. Proceedings of PME- XV. Utrecht, Países Bajos, 225-232. Extraído el 17 de Marzo de 2009 desde: http//hal.archives-overtres.fr/docs/00/19/05/12/PDF/ Mariotti-M-A-Cerulli-2001.pdf

Mariotti, M. A. (2008). Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics. Obtenido el 17 de marzo de 2009 desde la base de datos Springer Link

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44.1/2, 87–125.

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (1998). Lineamientos Curriculares de matemáticas. Bogotá: Magisterio. 8-25

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM (1989) Curriculum and Evaluation Standards, generally known as the “NCTM Standards”. Extraído el 28 de octubre de 2008 desde http://standards.nctm.org

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Extraído el 3 de noviembre de 2008 desde http/: www.standards.nctm.org

Pietropaolo R. C. (2005). (Re) Significar a demonstração no currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática. 218-226. Tesis de Doctorado otorgada por la PUC-SP. Extraída el 9 de noviembre de 2008 desde: www.pucsp.br/pos/edmat

Recio, A.M. (1999). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. Universidad de Córdoba. Artículo enviado correo personal el 7 de abril de 2009

Recio, A.M. (2001). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Servicio de Publicaciones. Universidad de Córdoba. Artículo enviado por correo personal el 7 de abril de 2009

Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, M. (2001) Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. 1-23. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. 1-19. Extraído el 28 de septiembre de 2008 desde:http://subs.emis.de/ journals/ZDM/zdm021a4.pdf

Reiss, K. & Heinze, A. (2003). Reasoning and proof: methodological knowledge as a component of proof competence. 1-21. Extraído el 15 de septiembre de 2008 desde: http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf

Reiss, K., & Renkl, A (2005). Begründen und Beweisen in der Geometrie Bedingungen des Wissensaufbaus bei Schülerinnen und Schülern der

Sekundarstufe. 1-24. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Fostering Argumentation and Proof Competencies in the Mathematics Classroom. 1-16. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K. (2007) Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. 1-38. Extraído el 9 de septiembre de 2008 desde: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/59/beweis.pdf

Samper, C. & Camargo, L. (2003). Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la Geometría. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

Sekiguchi, Y & Miyazaki, M. (2000). Argumentación y Demostración en Japón. Extraído el 25 de noviembre de 2008 desde: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/000102Theme/000102ThemeES.html

SEP (2007). Plan de Estudios 2006. Secretaría de Educación Pública, México.

Ufer, S. (2008). Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in der Sekundarstufe. 1-14. Extraído el 21 de septiembre de 2008 desde: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_UFER_Stefan.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Aguirre, M., Codina, A., Lupiañez, J. L. (2000). El papel de la tecnología en la demostración matemática. Memorias del II Simposio de Educación Matemática Chivilcoy: Argentina. Universidad de Lujan. 1-7 de septiembre.

Alagia, H. (2005). Razonamiento y demostración. Artículo de la conferencia anual de la UMA/REM. Septiembre: Salta. Extraído el 17 de julio de 2009 desde www.union-matematica.org.ar/.../Conferencia%20_Alagia.doc

Almouloud, S. A. (2007). Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. Extraído el 9 de noviembre de 2008 desde http://www.anped.org.br/reunioes/ 30ra/trabalhos/GT19-2957--Int.pdf

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège. Thèse d’état. Université Joseph Fourier. Grenoble. Extraído el 22 de octubre de 2009 desde: http://tel.archives-cuvertes-fr/docs/00/32/26/PDF/Balacheff. Nicolas_1 988_these_vol_1_et_2.pdf

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. Extraído 24 de agosto del 2009 desde http://wwwdidactique.imag.fr/preuve/Resumes/Balacheff/Balacheff91a

Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate. Extraído 15 de noviembre del 2008 desde: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: Una empresa docente.

Bartolini, M. G. (1998). Italian Research in Innovation: Towards a New Paradigm? Proceedings of The International Commission on Mathematical Instruction ICMI Bulletin No. 45. Extraído el 11 de abril de 2009 desde http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/45/ ItalianResearch.html

Boero, P. Garuti, R. & Sibilla, A. (1994). Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements. Proceedings of PME XVII. Tsukuba, Japan. Extraído el 30 de Agosto de 2008 desde http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero94.html

Boero, P. & Garuti, R. (1995). Towards Statements and Proofs in Elementary Arithmetic: An Exploratory Study about the Role of Teachers and the Behavior of Students. Proceedings of PME-XIX. Lisbon, Portugal. Extraído el 30 de Agosto de 2008 desde http: //www.lettredelapreuve.it/ Resumes/Boero/Boero95.html

Boero, P. Dapueto, C. & Parenti, L. (1996). Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers. En Ed. Kluwer Academic Publishers. International Handbook of Mathematics Education. 1097-1121.

Boero, P. Garuti, R. & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. Proceedings of PME-XX. Valencia, Spain. Extraído el 5 de septiembre de 2008 desde http: //www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96.html

Boero, P. Garuti, R. Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. Proceedings of PME-XX. Valencia, Spain. Extraído el 30 de Agosto de 2008 desde http: //www.lettredelapreuve.it/ Resumes /Boero /Boero96a.html

Boero, P. Pedemonte, B. & Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective. Proceedings of PME XXI Lahti, Finland. Extraído el 30 de Septiembre de 2008 desde http: //www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/ Boero/Boero97.html

Boero, P. Garuti, R. & Lemut, E. (1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof. Proceedings of PME-XXII. Stellenbosch, Sudáfrica. Extraído el 5 de Septiembre de 2008 desde http: //www.lettredelapreuve.it/ Resumes/Garuti/ Garuti98.html

Boero, P. Garuti, R. & Lemut, E. (1999). About the Generation of Conditionality of Statements and its Links whit proving. Proceedings of PME-XXIII. Haifa, Israel. Extraído el 14 de Febrero de 2009 desde http://www-didactique.imag.fr/preuve/ Resumes/Boero/Boero99.html

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. Extraído el 15 de Agosto de 2008 desde http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/ 990708Theme/990708ThemeES.html

Boero, P.(2000). Approaching Mathematical Theories in Junior High School. Proceedings of Ninth International Congress on Mathematical Education ICME-9. Tokyo/Makuhari, Japan. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde http// academic.sun.ac.za/mathed/ICME/Boero.htm

Boero, P. (2002). The approach to conjecturing and proving: cultural and educational choices. Proceedings of International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde http: //www.math.ntnu.edu.tw/.../ mathedu/ me1/ me1_2002_1/paoloboero.doc

Boero, P. (2002a). Cognitive unity of theorems and the approach to proof. First Joint International Meeting. Pisa, Italy. June 12-16. Extraído el 11 de Noviembre de 2008 desde http: //www.dm.unipi.it/~meet2002/italiano /abstracts/session11boero.doc

Boero, P. Douek, N. & Garuti, R. (2003). Children's Conceptions of Infinity of Numbers in a Fifth Grade Classroom Discussion Context. Proceedings of PME-XXVII. Hawaii, USA. Extraído el 16 de Septiembre de 2008 desde http:// www.lettredelapreuve.it/PME/PME27/RR_boero.pdf

Boero, P. (2007a). Theorems in school: From history and epistemology to cognition. Netherlands. Ed. Sense Publishers.

Boero, P. (2007b). Conjecturing and proving as rational behaviors. Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof Colloquium. October 4-5. Providence, Rhode Island. Extraído el 15 de Agosto de 2008 desde http://www.tpp.umassd.edu/proofcolloquium07/summaries/boero_summary. pdf

Bolite F. J. y Rabello de C. M. (2000). Proofs in Geometry: Different concepts build upon very different cognitive mechanisms. Extraido el 19 de enero de 2009 http://www.didactique.imag.fr/preuve/ICME9TG12/ICME9TG12Contributions /BoliteFrantICME00t.html

Brasil, Ministério da Educação e do Desporto, (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasilia. Extraído el 10 de diciembre de 2008 desde: http://mecsrv04.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf

Brousseau G. (1983). Les Obstacles Epistemologiques et les Problemes en Mathematiques, Recherches en didactique des mathematiques. Vol.4, N° 2 Traducción al castellano: César Delgado G

Camargo, L., Samper C.,Perrey, P. y Rojas, C. (2006). Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

Codina, A., Lupiañez, J. L. (1999). El Razonamiento Matemático: Argumentación y Demostración. Trabajo presentado en XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Guadalajara

Codina, A., Lupiáñez, J. L. (2000a). The Calculator as an Instrument of Validation of Mathematical Knowledge: A Case Study. Documento no publicado. México: Comunicación presentada en el PME-NA 22 de Tucson, AR. Octubre 2000. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Codina, A., Lupiañez, J. L. (2000b). Validación del conocimiento matemático con el uso de tecnología.

Denzin, N. y Lincoln, Y (2000). Handbook of qualitative research. Thousands Oaks: Sage.

Diaz-Barriga, C., Larios, Victor y otros (2001). Hacia las aplicaciones de las Matemáticas en la escuela medi superior de Mexico. En J.E Sagula y O.L

Isnardi (eds). Memorias del III Simposio de Educacion Matematica. Chivilcoy, Argentina: UNLu.

Durango, J.H. (2009) La comprensión en los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales en la clase de matemática: el contexto de justificación y descubrimiento. Tesis de maestría. Medellín: Universidad de Antioquia.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Extraído el 22 de octubre de 2009 desdehttp://books.google.com/books?id=iUdiAAAAMAAJ&q=S%C3%A9miosis+et+pens%C3%A9e+humaine.&dq=S%C3%A9miosis+et+pens%C3%A9e+humaine.&ei=x27kSoa8O5WczgSYlZyqDA

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. Extraído el 28 de agosto de 2008 http://wwwdidactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Fiallo, J., Gutiérrez, A. (2006). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Fiallo, J., Gutiérrez, A. (2007a). Analysis of conjectures and proofs produced when learning trigonometry, en la 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5). Larnaca (Chipre). 22-26 de febrero.

Fiallo, J.,Gutiérrez, A. (2007b).Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander (Colombia), 11º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM 11). Universidad de La Laguna. La Laguna, Tenerife, 1-7 de septiembre.

Furinghetti, F.(2006). Not out of the blue: Historical roots of mathematics education in Italy. Extraído el 7 de Noviembre de 2008 desde http: //www.math.umt.edu/ TMME/vol3no1/TMMEv3n1a6.pdf

Gardner, Howard. La Inteligencia reformulada. Las inteligencias múltiples en el Siglo XXI. Paidós: Barcelona.

Garuti, R. & Boero, P.(2002). Interiorisation of forms of argumentation: a case study. Proceedings of PME XXVI. Norwich, Reino Unido. Extraído el 5 de Septiembre de 2008 desde http: //www.lettredelapreuve.it/PME/PME26 /RRGaruti.pdf

Garuti, R., Boero, P. & Lemut, E.(1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof. Proceedings of PME-XXII. Stellenbosch, Sudáfrica. Extraído el 5 de Septiembre de 2008 desde: http: //www.lettredelapreuve.it/ Resumes/Garuti/ Garuti98.html.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1998). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Guba, E. y Lincoln, Y. (1981) Effective evaluation: improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches. San Francisco: Jossey-Bass

Guba, E. y Lincoln, Y. (1991). Investigación naturalista y racionalista. En Husén, T. y Postlethwaite, T.N. Enciclopedia Internacional de la Educación. Barcelona: Vicens-Vives- M.E.C.

Gutiérrez A. (2000). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. En Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Gutiérrez, A. (2007). *Geometría, demostración y ordenadores*. Texto de la ponencia en las 13as JAEM (pendiente de publicación en las actas del congreso) junto con los archivos de Cabri II+ descritos (Granada).

Gutiérrez, A., Pegg, J. y Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry, Proceedings of the 28th P.M.E. Conference 2.

Hanna, G. (2007). The Ongoing Value of Proof. En Ed. Sense Publishers. Theorems in school: From history and epistemology to cognition.

Harel, G. & Sowder, L. (1994). Students' Proof Shemes: Results from Exploratory Studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, T. P, E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, & T. P (Edits.), Research in Collegiate Mathematics Education VII (págs. 234-277). Providence: AMS Bookstore, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies. En J. Shonfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky, Issues in Mathematics Education (Vols. 7, 234-282). Research in collegiate mathematics education III.

Healy, L. & Hoyles, C. (1999a). Can they prove it?. *Mathematics In School, Essex*. Obtenido en la base de datos Wilsonweb el 20 de noviembre de 2008

Healy, L. & Hoyles, C. (1999b). Linking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teachning experiments. International News Lwtter On The Teaching And Learning Of Mathematical Proof. Obtenido en la base de datos Wilsonweb el 20 de noviembre de 2008

Healy, L; & Hoyles, C. (1999c) Students'views of proof .Mathematics In School, Essex. Obtenido en la base de datos Wilsonweb el 20 de noviembre de 2008.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. Journal For Research In Mathematics Education, 31(4), 396-428. Obtenido en la base de datos Wilsonweb el 20 de noviembre de 2008

Herbst, P. (13 de Marzo de 2009). Comunicación Personal. (J. H. Durango, Trad.) Michigan University, Michigan, Estados Unidos

Herbst, P. (21 de Agosto de 2009). Comunicación Personal. (J. H. Durango, Trad.) Michigan University, Michigan, Estados Unidos.

Herbst, P. (2000). Articulación y estructuración de las concepciones en la clase de matemáticas: Argumentos y conocimiento público. La Lettre de la Preuve.

Hernández A. (2006) Metodología de la investigación. México: Mc.Graw-Hill

Hosomizu, Y & Yamamoto, Y (2007). Métodos y Tipos de Estudio de clases. En Ed. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. El Estudio de Clases Japoneses en Matemáticas.

Ibañes, M. (2001a) Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. 5º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM 5). Almería, septiembre, 2001.

Ibañes, M. (2001b). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. Barcelona. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002). La demostración en el currículum: una perspectiva histórica. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004a). Textos argumentativos. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004b). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. Números. La Laguna, España. Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004c) Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato Artículo enviado al correo personal el 24 de junio de 2009

Jahn, A. P. & Healy L. (2007). Argumentação e prova na sala de aula de matemática: design colaborativo de cenários de aprendizagem. Extraído el 6 de febrero de 2009 desde
http://www.anped.org.br /reunioes /31ra/1trabalho/GT19-4607--Int.pdf

Jahn, A. P. Healy L. & Coelho, S. P. (2007). Concepções de professores de Matemática sobre prova e seu ensino: Mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. Trabajo presentado en la 30a. Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação em Educação (ANPed), 2007, Caxambu. Extraído el 23 de octubre de 2008 desde: http://www.anped.org.br/reunioes/ 30ra/trabalhos/GT19-3614.

Lakatos, Irme. (1978) Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Alianza: Madrid.

Larios, V. (2006) Demostrar es un problema o el problema es demostrar. Libro enviado por Víctor Larios al correo personal el 14 de Octubre de 2008.

Larios, V. (2001) Demostraciones y conjeturas en la escuela media. Extraído el 12 de septiembre de 2008 desde http://www.uaq.mx/matematicas/redm/ art/a0703.pdf

Larios, V. (2000) Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática. Extraído el 12 de septiembre de 2008 desde http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.html

Larios, V. (2003) Si no demuestro…¿enseño matemáticas?. Extraído el 12 de septiembre de 2008 desde http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ ArtPdfRed.jsp?iCve=40515207

Lehrplänen und Ramenrichtlinien (2008) Extraído el 2 de septiembre de 2008 desde http://www.rahmenrichtlinien.bildung-lsa.de/faecher/mathe.html

León, O. y Calderón, I. (2003). Argumentar y validar en matemáticas: ¿una relación necesaria? Hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas. Colciencias: Colombia.

M.E.C. (1991). Currículo de Educación Secundaria. Madrid. Ministerio de Educación y Cultura.

Mariotti, M. A. Bartolini, B. M. G. Boero, P. Franca, F. & Garutti, R. (1997). Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. Proceedings of PME XX. Lahti, Finlandia. . Extraído el 18 de marzo de 2009 desde http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes /Mariotti/Mariotti97.html

Mariotti, M. A. & Cerulli, M. (2001). Semiotic Mediation for algebra teaching and learning. Proceedings of PME- XV. Utrecht, Países Bajos. Extraído el 17 de Marzo de 2009 desde http//hal.archives-overtres.fr/docs/00/19/05/12/PDF/ Mariotti-M-A-Cerulli-2001.pdf

Mariotti, M. A. (2001). Algunos pensamientos luego de ICME 9. Una entrevista con Paolo Boero. La lettre de la Preuve. ISSN 1292-8763. Traducido por Patricio Herbst. Extraído el 22 de Agosto de 2008 desde http://www.lettredela preuve.it/Newsletter/01Hiver/01HiverThemeES.html

Mariotti, M. A. (2001a). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 25–53. Obtenido el 5 de Septiembre, 2008 de la base de datos Springer Link.

Mariotti, M. A. (2002). La preuve en mathématique. ZDM Mathematics Education. Vol. 34. 132-145. Obtenido el 3 de Octubre, 2008 de la base de datos Springer Link.

Mariotti, M. A. & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. ZDM Mathematics Education. Vol. 40. 341–344. Obtenido el 3 de Octubre, 2008 de la base de datos Springer Link.

Mariotti, M. A. (2008). Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics. Obtenido el 17 de marzo, 2009 desde la base de datos Springer Link.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44.1/2, 87–125.

Mathematics, N. C. (1989). Curriculum and evaluation standards for school. Reston, VA: NCTM.

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (1998). Lineamientos Curriculares de matemáticas.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof In Lower Secondary School Mathematics. Extraído el 15 de octubre de 2008 desde: www.springerlink.com/index/L005828657745543.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Extraído el 3 de noviembre de 2008 desde http/: www.standards.nctm.org

Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. Thèse du doctorat. Université J. Fourier. Grenoble.

Pietropaolo R. C. (2005). (Re) Significar a demonstração no currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática. 218-226. Tesis de Doctorado otorgada por la PUC-SP. Extraída el 9 de noviembre de 2008 desde: www.pucsp.br/pos/edmat

Pietropaolo R. C. & Campos T. (2008). Considerations about proof in school mathematics and in teacher development programmes. Extraído el 26 de Enero de 2009 desde http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8/paper/view/982

Recio, A.M. (1999). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. Universidad de Córdoba. Artículo enviado correo personal el 7 de abril de 2009

Recio, A.M. (2000). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Servicio de Publicaciones. Universidad de Córdoba. Artículo enviado por correo personal el 7 de abril de 2009

Reiss, K. & Heinze, A. (2001). Reasoning and proof in the mathematics classroom. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. Extraído el 28 de septiembre de 2008 desde: http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm021a4.pdf

Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, M. (2001) Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K. & Heinze, A. (2003). Reasoning and proof: methodological knowledge as a component of proof competence. Extraído el 15 de septiembre de 2008 desd http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf

Reiss, K., & Renkl, A (2005). Begründen und Beweisen in der Geometrie Bedingungen des Wissensaufbaus bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Fostering Argumentation and Proof Competencies in the Mathematics Classroom. Artículo enviado por Kristina Reiss al correo personal el 10 de marzo de 2009.

Reiss, K. (2007) Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Extraído el 9 de septiembre de 2008 desde: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/59/beweis.pdf

Rodríguez, F., Gutiérrez, A. (2006). Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software, *Proceedings of the 30th P.M.E. Conference* 4.

Rodríguez, F., Gutiérrez, A. (2007). Análisis de demostraciones en entornos de Lápiz y Papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, 11º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM 11). Universidad de La Laguna. La Laguna, Tenerife.

Samper, C. y Camargo, L. (2003). Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la Geometría. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

Sekiguchi, Y. Miyazaki, M. (2000).Argumentación y Demostración en Japón. Extraidom el 25 de noviembre de 2008 desde: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/000102Theme/000102ThemeES.html

SEP (2007). Plan de Estudios 2006. Secretaría de Educación Pública, México.

Strauss A. y Corbin J. (2002) Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

Ufer, S. (2008). Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in der Sekundarstufe. Extraído el 21 de septiembre de 2008 desde: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_UFER_Stefan.pdf

Universidad Autónoma de Querétaro (2003). Programa de estudios de la escuela de bachilleres. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.

University of Michigan. (2003). Comparison of Hong Kong and United States Schools. Extraído el 5 de diciembre de 2008 desde: sitemaker.umich.edu/li.356/math_education

ANEXOS

Los anexos de esta investigación, se presentan en el CD adjunto al final de este trabajo. Dichos anexos son:

ANEXO A: Investigadores abordados

ANEXO B: Glosario de palabras.

ANEXO C: Participación en eventos académicos.

ANEXO D: Comunicaciones personales con la mayoría de los investigadores abordados

ANEXO E: Fichas bibliográficas.

ANEXO F: Fichas de contenido.

ANEXO G: Observación de una clase de matemáticas en el colegio Gimnasio Ernst Moritz Arnold de la ciudad de Bonn, Alemania.

ANEXO H: Entrevista a docentes Japoneses.