

SIGNIFICADO SOBRE PROMEDIO ARITMÉTICO DE ESTUDIANTES  
DE QUINTO GRADO

POR:  
LUIS MIGUEL MARRUGO ESCOBAR

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
MEDELLÍN  
2012

SIGNIFICADO SOBRE PROMEDIO ARITMÉTICO DE ESTUDIANTES  
DE QUINTO GRADO<sup>1</sup>

POR:  
LUIS MIGUEL MARRUGO ESCOBAR

ASESORA:  
LUCÍA ZAPATA CARDONA PhD.

Trabajo de investigación para optar al título de  
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
MEDELLÍN  
2012

---

<sup>1</sup> Trabajo auspiciado por el Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología–Colciencias– bajo el contrato 782 de 2009 Código 1115-489-25309

## **DEDICATORIA**

A mis padres y a mis hermanos, por su acompañamiento continuo y por ayudarme a crecer como persona y profesionalmente.

A Dios y a la vida por permitirme estar aquí.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al culminar este proceso investigativo, quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a COLCIENCIAS y a las personas e instituciones que apoyaron este trabajo.

A mi asesora de práctica, Lucía Zapata; por motivarme a ir más allá de las fronteras mentales que nos creamos, y sin cuya ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

Al profesor Víctor Vega, por su colaboración y apoyo incondicional en las diferentes etapas de mi práctica pedagógica.

A mis compañeros de práctica Hernán, Eder y Javier, por compartir sus conocimientos y opiniones durante el proceso.

A la Institución Educativa, donde realicé las prácticas pedagógicas; por abrirme las puertas y por la buena disposición hacia este proyecto.

Al grupo de coordinadores de la Compañía de Galletas Noel S.A.S, por brindarme los espacios para atender mis compromisos académicos.

A mis profesoras de pregrado que se tomaron el tiempo para leer muchas de las líneas que aquí se exponen y compartir sus valiosos comentarios.

Y a todas aquellas personas que aún no las menciono aquí, pero quienes hicieron posible que yo culminara esta etapa de formación académica. Gratitud por su respaldo moral, académico y económico. A todos, gracias por confiar en mí.

## Resumen

El promedio aritmético es un objeto matemático que cuenta con una definición formal en nuestros días, pero su evolución histórica ha mostrado que hay varias ideas primitivas a este; las cuales en la actualidad continúan funcionando como fundamento para la formalización de los significados sobre el concepto de promedio. En esta investigación se estudió cómo la presentación de problemas relacionados con el promedio aritmético desde un planteamiento histórico epistemológico modifica el significado y por ende la solución de dichos problemas.

Esta propuesta se desarrolló bajo el enfoque interpretativo de la investigación cualitativa. Los participantes fueron ocho estudiantes con edades entre los 9 y 12 años que cursaban el grado quinto de primaria. La información se recogió mediante entrevistas semi-estructuradas que proponían resolver dos problemas asociados con el promedio aritmético. Dichos problemas fueron formulados desde cinco perspectivas que atienden al desarrollo epistemológico del concepto de media: Promedio aritmético, valor típico, valor representativo, punto de equilibrio y reparto justo. Los problemas fueron presentados a los estudiantes empezando por el planteamiento que es, epistemológicamente, más reciente; hasta llegar al que es, epistemológicamente, más primitivo. Las entrevistas fueron grabadas en video para facilitar el análisis posterior. El análisis se llevó a cabo mediante el análisis de contenido. Los hallazgos más relevantes muestran que los estudiantes dan diferentes significados al promedio aritmético y que el planteamiento de los problemas desde la concepción más primitiva del promedio, tiene una fuerte influencia en la solución exitosa.

**Palabras claves:** Educación estadística, promedio aritmético, valor típico, valor representativo, punto de equilibrio, reparto justo.

## Tabla de contenido

Resumen .....	5
Capítulo 1	
<b>PRESENTACIÓN</b> .....	7
<b>1.1.</b> Pregunta de investigación.....	9
<b>1.2.</b> Objetivo general .....	9
Capítulo 2	
<b>MARCO TEÓRICO</b> .....	10
<b>2.1. El Promedio Aritmético</b> .....	10
<i>2.1.1. El reparto equitativo</i> .....	11
<i>2.1.2. El punto de equilibrio</i> .....	11
<i>2.1.3. El valor representativo</i> .....	12
<i>2.1.4. El valor típico</i> .....	13
<i>2.1.5. La aparición formal del concepto de promedio aritmético</i> .....	14
<b>2.2. Los significados</b> .....	15
<b>2.3. Los problemas</b> .....	17
<b>2.4. Estudios y Artículos sobre promedio aritmético</b> .....	18
Capítulo 3	
<b>METODOLOGÍA</b> .....	20
Capítulo 4	
<b>RESULTADOS</b> .....	25
4.1.1. Significados del promedio en problemas que involucran el término.....	25
4.1.2. El Promedio como Valor Típico .....	28
4.1.3. El Promedio como Valor Representativo .....	28
4.1.4. El Promedio como Punto de Equilibrio.....	30
4.1.5. El Promedio como Valor Reparto Equitativo .....	31
<b>4.2. Modificación de los significados</b> .....	33
<b>CONCLUSIONES</b> .....	35
Referencias Bibliográficas .....	38
Anexo .....	400

## Capítulo 1

### PRESENTACIÓN

Estudiar la historia de un concepto es una buena preparación para comprender las complejidades de su enseñanza. Varios autores sostienen que los obstáculos históricos en el desarrollo de ciertos conceptos pueden ser similares a los obstáculos que experimentan los estudiantes en la construcción de ellos (Bakker & Gravemeijer, 2006). En este trabajo intento tomar en cuenta el desarrollo histórico de promedio aritmético para estudiar los significados que los estudiantes asignan a este concepto.

El presente trabajo surgió como respuesta a la necesidad observada en mi centro de práctica, con respecto a la ausencia de la enseñanza del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. La población participante en el estudio pertenece a una Institución Educativa de carácter público que está ubicada en el sector de Belén Rincón (Medellín). Esta Institución atiende aproximadamente 927 estudiantes, pertenecientes en su mayoría a los estratos socio económicos 1, 2 y 3. Cuenta con 26 profesores de todas las áreas distribuidos en dos jornadas académicas (mañana y tarde).

Además de los datos demográficos de la Institución hay otros asociados a la comunidad que caracterizan el entorno social de los estudiantes y otros asociados al investigador que dan cuenta de las subjetividades puestas en escena en este estudio. La población del barrio en el que se encuentra la Institución Educativa, es afectada directamente por el conflicto armado y de orden público del sector. Cifras presentadas en uno de los principales diarios del país (El Colombiano, 2011) afirman que desde el inicio del 2011 a mayo de ese mismo año, 115 adolescentes estuvieron involucrados en el delito de porte ilegal de armas de fuego y 22 en hurto de automotores en este sector de Medellín.

Como investigador principal de este estudio debo admitir algunos aspectos de mi trayectoria académica y profesional que pueden constituir bien sea ventajas o limitaciones. Antes de ser estudiante del programa de Educación Matemática obtuve un título en Diseño Gráfico y me he desempeñado en este campo. La práctica pedagógica que desarrollé por tres semestres consecutivos fue la primera oportunidad que tuve de contacto con un grupo de estudiantes, en el que era el directo responsable del grupo. Como investigador, también debo

admitir que ésta fue mi primera experiencia en el campo de la educación y me demandó esfuerzo extra. Solo por mencionar un ejemplo, en la primera entrevista semi-estructurada que llevé a cabo, sugerí las respuestas a los participantes. Me tomó un buen tiempo aprender a hacer una entrevista. Además de ser estudiante de medio tiempo en un programa de formación de maestros, laboro tiempo completo para una compañía en el área de Producción, y esto me aleja la mayor parte del día del trabajo educativo.

Una vez establecidas las características de la Institución y del investigador, describiré en qué consistió este trabajo: Se estudió el desarrollo histórico del promedio aritmético, se diseñaron problemas asociados al promedio aritmético, fundamentados en ese desarrollo histórico, y se indagó cómo se modifican los significados y las soluciones que dan los estudiantes en la entrevista, basada en dichos problemas con cinco estructuras diferentes de pregunta.

El estudio del promedio aritmético y de los significados de estudiantes es un aporte importante a la literatura en Educación Matemática. Una de las razones para emprender este estudio está relacionada con las exigencias de las políticas públicas emitidas por el Ministerio de Educación Nacional, pues en los estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el grado quinto se contempla el estudio del promedio (MEN, 2006). De igual manera, el promedio aritmético, se encuentra explicitado en el plan de estudio de la institución educativa, en donde realicé la práctica pedagógica.

Además, en la sociedad actual el ciudadano común está expuesto a una cantidad de información estadística que es necesario que aprenda a leer e interpretar para la toma de decisiones, y uno de los conceptos útiles para este fin es el promedio aritmético. También, el carácter práctico del concepto estudiado es importante en la vida diaria de un ciudadano, ya que es una medida resumen. Por ejemplo, es mucho más práctico y abreviado decir que la edad promedio de los estudiantes del grado quinto es 10 años a tener que dar una por una las edades de todos los estudiantes que cursan quinto grado.

Siguiendo con las razones que motivan este estudio, es de gran importancia estudiar la influencia del desarrollo histórico epistemológico sobre la solución exitosa de problemas estadísticos y sobre el significado que dan los estudiantes de quinto grado al promedio aritmético, pues conocer esta influencia aportará bases para orientar las complejidades de la instrucción y el diseño de material didáctico.

Por último y no menos importante, la literatura en nuestro país con respecto a esta temática, es poca. La mayoría de investigaciones llevadas a cabo en este campo se han enfocado en estudiantes de secundaria y muy pocos en básica primaria. El ser este un estudio enfocado en el promedio aritmético en estudiantes de primaria puede constituirse en un aporte importante a la literatura en Educación Matemática y Educación Estadística.

Las razones establecidas previamente me permiten plantear la siguiente pregunta de investigación.

### **1.1. Pregunta de Investigación**

¿Cómo se modifica el significado y la solución de problemas relacionados con el promedio aritmético en estudiantes del grado quinto, cuando la formulación de estos problemas atiende al desarrollo histórico epistemológico del concepto?

### **1.2. Objetivo General**

Investigar cómo se modifica el significado y la solución de problemas relacionados con el promedio aritmético en estudiantes del grado quinto cuando la formulación de estos problemas sigue la ruta del desarrollo histórico epistemológico del concepto.

## Capítulo 2

### MARCO TEÓRICO

En este apartado discutiré algunas ideas que han sido fundamentales para el desarrollo de este estudio. Trataré los conceptos de: Promedio aritmético, significado y problema. Además, realizo una revisión de literatura acerca de estudios y artículos llevados a cabo sobre promedio aritmético en diversas partes del mundo.

#### 2.1. El Promedio Aritmético

Para llevar a cabo un estudio del promedio aritmético es necesario realizar una indagación histórica epistemológica de este concepto. Freudenthal (1983, citado en Bakker & Gravemeijer, 2006) propone la “fenomenología histórica” para guiar el proceso de aprendizaje. Se trata de un estudio de la evolución histórica de un concepto en relación con los fenómenos que condujeron a la génesis de ese concepto, en cuyo objetivo está identificar tanto las situaciones problemáticas que han creado la necesidad de organizar ciertos fenómenos, y los conceptos precursores que se han generado.

En las siguientes líneas resalto algunos de los hechos más sobresalientes en el desarrollo histórico-epistemológico del concepto de promedio. Estos acontecimientos fueron seleccionados, pues representan los conceptos precursores del promedio. Se sigue esta línea hasta llegar a la definición formal sobre el promedio. Aunque se trató de ser lo más exhaustivo posible, algunos de los hechos en ese desarrollo histórico como la predicción y la compensación a partir de la media, se omiten en esta descripción por no apoyar los propósitos de este trabajo de investigación. El nivel de abstracción que se necesita para resolver los problemas que involucran predicción y compensación tienen una naturaleza diferente en comparación con las cuatro ideas precursoras que sustentan este trabajo.

Seguido a ese desarrollo histórico-epistemológico, se presentan las interpretaciones actuales de estos conceptos precursores y el papel que juegan en la interpretación de lo que hoy se conoce como promedio aritmético.

### **2.1.1. El reparto equitativo**

La información que se tiene con respecto a la aparición del reparto justo en la vida del hombre, expone que uno de los primeros orígenes del término promedio se deriva de las leyes marítimas, en relación con el seguro y la cuota justa de pérdidas y ganancias.

Simpson y Weiner (1989, citado en Bakker & Gravemeijer, 2006) encontraron que uno de los significados de promedio en el derecho marítimo es “la distribución equitativa de los gastos o pérdidas, con la incidencia general, entre todas las partes interesadas, en proporción a sus múltiples intereses”. Una distribución general de las desigualdades (en cantidad, calidad, intensidad, etc.) de una serie de cosas entre todos los miembros de la serie, con el fin de igualarlo.

Algunos autores como Franklin (2008), exponen que los estudiantes tienen la noción de *parte justa* mucho antes de la escolarización; incluso personas que no han sido escolarizadas parecen tener la noción de reparto justo. Por ejemplo, si una clase tiene 25 estudiantes y hay 50 caramelos en una bolsa, la *parte justa* para cada estudiante es de dos piezas de dulces. Los niños aún en edad preescolar tienen una noción desarrollada y coherente de lo que es el reparto justo.

Los niños de preescolar son exitosos al repartir equitativamente. Por ejemplo, si se les pide repartir 18 galletas entre cuatro niños. Ellos incluso alcanzarían el detalle en el nivel de reparto hasta las cuatro galletas y media. La noción de justa está relacionada con la media aritmética de datos con cantidades discretas. Bajo la idea de reparto justo, la media sería el valor que se conseguiría si todos los datos son agrupados y redistribuidos de forma que el valor de cada grupo sea el mismo.

### **2.1.2. El punto de equilibrio**

El siguiente término precursor del promedio es el punto de equilibrio. Los griegos, en el tiempo de Pitágoras, alrededor del 500 A.C., trabajaron con tres valores medios que se conocen como: La media armónica, geométrica y aritmética. Desde la definición griega de la media aritmética, se dice lo siguiente: El número medio  $B$  entre  $A$  y  $C$  se llama la media aritmética si y sólo si  $A - B = B - C$  (Bakker & Gravemeijer, 2006). En la Figura 1, encontramos una representación gráfica de esta definición.

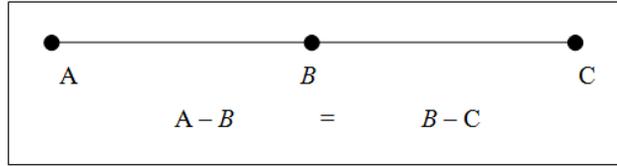


Figura 1. Representación gráfica de la media para los griegos.

Esta mirada asume la media en el punto central de la distribución lo que la hace bastante difícil de generalizar si las distribuciones no son simétricas. Sin embargo, esta postura es un vestigio de la concepción de promedio como el punto de equilibrio en la distribución de los datos.

Otro acercamiento que nos puede ayudar a comprender la idea de punto de equilibrio es el siguiente. Si se tomaran todas las observaciones de una muestra (o una población) y se graficaran en un diagrama de puntos como el mostrado en la Figura 2, entonces la media representaría ese punto pivote en el que el eje horizontal se balanceará (se equilibrará). El punto pivote es la media y es asociada con el punto de equilibrio.

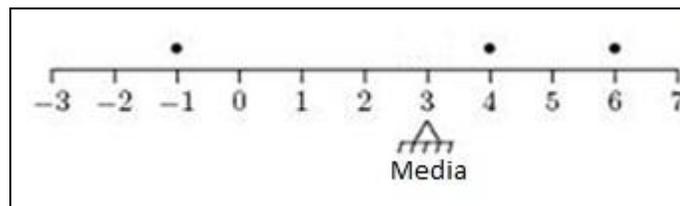


Figura 2. Representación gráfica de la media como punto pivote de balanceo.

El estudio del promedio aritmético como el de punto de equilibrio en niveles más avanzados puede dar origen al estudio de la desviación estándar. Pues en esta desviación se asume que la suma de las distancias que hay del punto de equilibrio a todos los valores que están por encima de éste y se deben anular con la suma de las distancias que hay por debajo de del mismo.

### 2.1.3. El valor representativo

Desde la historia del hombre, uno de los primeros acercamientos que se dan en torno al promedio aritmético es su uso para calcular un total, y tiene que ver con la estimación de los grandes números. En Bakker y Gravemeijer (2006), se muestran problemas que ejemplifican este uso:

En una antigua historia india, que fue escrita en el siglo IV d C, el protagonista Rtuplestima estimó el número de hojas y frutos en dos grandes ramas de un árbol frondoso . Se estima el número de hojas y frutos sobre la base de una sola rama, y se multiplica por el número de ramas en el árbol. El número 2.095, después de una noche de recuento, resultó ser muy cercano al número real. Aunque no se sabe en la historia de cómo Rtuplestima eligió la rama, parece que debe de haber elegido un "tamaño medio" (de rama), ya que daría lugar a una buena estimación (p. 152).

Esta solución ejemplifica la utilización de la media como *el valor representativo* de un conjunto de datos: la rama que eligió deberá representar a todas las otras. La elección de esta rama debió involucrar cuestiones como la representatividad. Se utilizó como un valor que permite resumir los datos de la distribución sin tener que darlos uno a uno.

En el siglo XIX, Quetelet, famoso por ser el inventor de l'homme moyen (el hombre medio u hombre tipo), fue uno de los primeros científicos en usar la media como *valor representativo* de un aspecto de una población. Esta transición de partir del valor real a un valor representativo como un constructo estadístico fue un importante cambio conceptual (Porter, 1986 citado en Doval, 2004). Un ejemplo de esto fue pensar que *un hombre medio* de una población determinada se podía casar 1.22 veces y tener 3.7 hijos. Para Quetelet el "hombre medio" o el "hombre tipo" hablaba de las características de un pueblo o de una nación como tipo racial. Si antes se definía a una nación por su lugar geográfico, su historia, su lengua o su cultura; ahora habría que agregarles las características antropométricas (talla, peso, complexión, etc.) y de comportamiento social (delitos, suicidios, duración de matrimonios, etc.); que compendiarían a esa nación. (Hacking, 1995 citado en Doval, 2004).

Pensemos por ejemplo en la siguiente situación, si tenemos cinco niños con diferente cantidad de lápices, uno con 25, otro 24, otro con 21, otro con 23 y otro con 22, y nos preguntaran ¿Cuál de estos datos podría representar la cantidad de lápices por niño?, el valor que mejor lo hace es el 23, puesto que a partir de este valor podemos construir los cinco datos de los niños que nos faltan. El promedio aritmético concebido como valor representativo puede ser usado para reemplazar un conjunto completo de datos con un solo dato.

#### **2.1.4. El Valor típico**

Este es uno de los preconceptos más abstractos y su rastreo literario es complejo puesto que las referencias explícitas sobre éste son escasas. El *Valor típico* de una serie de datos puede ser entendido como una medida que caracteriza al grupo de observaciones, no a cada

observación de forma individual. Autores como La Russel y Mokros (1991, citados por Batanero, 2000), resaltan la implicación de tres tipos diferentes de capacidades para tomar un valor como típico:

- Dado un conjunto de datos, comprender la necesidad de emplear un valor central, y éste debe ser el más adecuado.
- Construir un conjunto de datos a partir de un dato dado
- Comprender el efecto que, sobre dicho dato, tiene un cambio en todos los datos o parte de ellos.

Lo típico en una determinada situación es dado por lo más usual que se encontraría. Pensemos en la siguiente situación, si tenemos cinco familias una con dos hijos, otra con tres, otra con uno, otra con cuatro y otra con cinco. Y nos preguntaran por cuál sería el número de hijos típico en estas familias, tendríamos que pensar primero que no se repite ningún número, y que es necesario buscar un número que me permita hacer una buena aproximación a ese número de hijos. En este caso sería el número 3, pues me permitiría construir alrededor de éste los diferentes valores del número de hijos (2, 1, 4 y 5). Lo que se traduciría como el número típico de hijos de estas familias es 3.

#### **2.1.5. Promedio aritmético.**

La aparición formal del concepto de promedio aritmético se atribuye a los astrónomos babilónicos, quienes resolvieron el problema de determinar, a partir de un conjunto de medidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la mejor estimación posible del verdadero valor  $X$  desconocido por medio de la suma del total de las observaciones y dividiendo por el número de datos (Batanero, 2000). Esta es una práctica que aún se conserva y es el germen de la aparición progresiva del concepto de *promedio aritmético*.

La aparición del sistema decimal en 1585, en los cálculos, facilitó tal división. Este procedimiento demostró ser útil para los astrónomos que querían conocer un *verdadero* valor, como la posición de un planeta o el diámetro de la luna. Utilizando la media de varios valores de medición, los científicos asumieron que la suma de los errores tiende a un número relativamente pequeño si se compara con el total de todos los valores medidos. Este método de

toma de la media para reducir los errores de observación se desarrolló principalmente en la astronomía (Bakker & Gravemeijer, 2006).

Como lo he descrito, el concepto de promedio aritmético ha evolucionado desde ideas como reparto justo, punto de equilibrio, valor representativo, valor típico, hasta la definición formal que se conoce hoy en día: Un valor generado a partir de un conjunto de datos y que se usa como herramienta de análisis para la toma de decisiones en cierto tipo de problemas, el cual es calculado al sumar todos los datos del conjunto y dividir esta suma por la cantidad total de datos.

El promedio aritmético como concepto fundamental para el desarrollo de análisis básico de datos y la comprensión estadística es bastante simple desde el punto de vista del algoritmo, pero es un concepto muy complejo de entender. Se han realizado estudios para examinar cómo mejorar la forma de llevar a los niños a comprenderlo o estudiar los significados que tienen en la actualidad sobre el concepto. Autores como Godino y Batanero (1994), en sus estudios sostienen que la comprensión conceptual del promedio implica la comprensión tanto de una idea estadística para describir y dar sentido a los conjuntos de datos, como también, el algoritmo de cálculo para resolver problemas.

Por lo tanto, investigadores como profesores no sólo debemos tomar todas las oportunidades que tenemos a animar a los estudiantes a utilizar diferentes estrategias de solución y representaciones (del promedio medio), sino también para discutir ideas acerca de las variables, ecuaciones y resolución de ecuaciones utilizando el método algebraico. Esto debido a que, mediante el uso de diversas estrategias de solución y de las representaciones, los estudiantes tienen diferentes escenarios y pueden establecer conexiones respecto del promedio en las matemáticas.

## **2.2. Los Significados**

Una de las primeras asociaciones que se da cuando se habla de significado, es la de *comprensión* de un objeto y el *significado* de éste. Para Cobo y Batanero (2004) cuando surge la preocupación por el *significado* y *comprensión* de los términos y conceptos matemáticos en los sujetos, se debe llevar a cabo primero una indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos; segundo, una reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático; y por último, se debe encontrar la mutua interdependencia entre

estas dos. Cobo y Batanero (2004) asumen que detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos.

Para Godino (1980) la comprensión personal de un concepto es la *captación* del significado de dicho concepto. Ahora bien, puesto que el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino compuesta y relativa a los contextos institucionales, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la adquisición de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes. Indica Godino (1980), que la comprensión deja de ser meramente un proceso mental y se convierte en un proceso social, ya que se puede considerar que un alumno *comprende* suficientemente los promedios desde el punto de vista de la enseñanza secundaria y que no lo comprende desde el punto de vista de unos estudios superiores.

Para muchos autores, afirma Gallardo (2004) en su intento por identificar las relaciones entre comprensión y significado, traen a colación la postura de Sierpiska (1990) quien indica que es el significado el que debe ser explicado a través de la comprensión y no al revés. Así, el significado de algo será una cierta forma de comprender ese algo, una clase de comprensión, puesto que se necesita al menos alguna comprensión de un objeto para comenzar a tener un significado de él. Señala Sierpiska que “[...] Explicar el significado por la comprensión es también característico de la filosofía hermenéutica, en la que la comprensión es una interpretación de aquello a lo que el pensamiento está siendo dirigido en un acto intencional.” (p. 55).

Desde la perspectiva psicológica de Genovard, Gallardo (2004) extrae la siguiente caracterización de la comprensión: “Experiencia, conocimiento o entendimiento de un objeto, acontecimiento, idea o situación e incluso experiencia verbal.|| Proceso de aprender o captar un significado” (p.86). La comprensión es considerada como ese método con el que se puede hallar las estructuras mentales del sujeto, tiene la cualidad de ordenar las experiencias de los sujetos y está ligada a lo significativo.

Desde la perspectiva de la comprensión como objetivo fundamental en la educación matemática, tenemos autores como English y Halford (1995, citado por Gallardo, 2004) que

señalan: “Un beneficio de la comprensión es que puede guiar el desarrollo de estrategias y procedimientos apropiados” (p. 43)

Tras el análisis de los trabajos de los autores antes mencionados, para el desarrollo de esta investigación se debe asumir una posición que confirme o refute las distintas hipótesis de las investigaciones planteadas, sobre lo que se debe entender por *significado*, y como éste permea mi objeto matemático de interés, el promedio aritmético. Se entenderá que el significado está relacionado con interpretación y la estructura mental que posee el sujeto sobre dicho objeto; que incluye todas las relaciones esenciales del objeto, al menos en el dominio que es utilizado; que es construido por la manipulación y experimentación con éste y que por ende, implica, el desarrollo de la capacidad de explicar el procedimiento que subyace en el mismo. Es por esto que, el hecho que un objeto posea significado para el participante se ve reflejado en lo elaborado de las nociones que expone sobre dicho objeto, y en la facilidad para conectar las operaciones básicas que permean dicho objeto, en pro de dar una mejor aplicación de éste.

### **2.3. Los Problemas**

Con respecto a lo que se entiende por *problema*, Polya (1981) propone que un problema es una situación nueva o diferente de lo ya aprendido, que requiere utilizar de modo estratégico técnicas ya conocidas y toma de decisiones; supone para el alumno una demanda cognitiva y motivacional. Otros autores citados por Alfaro y Barrantes (2008), exponen que un problema es una tarea para la que el individuo que se enfrenta a su solución no dispone de una estrategia inmediata y eficaz que le permita encontrarla.

Para este estudio siguiendo con lo expuesto en Alfaro y Barrantes (2008), se asume un *problema* como toda situación para la cual el sujeto que intenta resolverla no tiene una estrategia directa y segura que le ayude a encontrar la solución. Además, el problema es relativo al sujeto que lo resuelve, ya que lo que para un sujeto puede ser un problema para otro no lo es; esto dependerá de las interacciones que éste haya tenido con dicho concepto y de su actitud frente al problema.

## 2.4. Estudios y Artículos Sobre Promedio Aritmético

El énfasis que se le ha dado a algunos de los trabajos sobre promedio aritmético que se han realizado en otras partes del mundo, como Estados Unidos, España y México, se dirige más a estudiantes con edades entre los 8 a 18 años y en niveles académicos de secundaria y formación universitaria. Por ejemplo, Mayén, Cobo, Batanero, y Balderas, (2007) estudiaron la comprensión de los estudiantes mexicanos de bachillerato sobre las medidas de posición central, y compararon estos resultados con los de estudiantes españoles de edades menores y usando el mismo cuestionario. El resultado arrojó dificultades compartidas por los dos grupos, uno de los hallazgos estuvo relacionado con la aplicación del algoritmo de la media aritmética, el que es fácilmente utilizado, pero se presenta gran dificultad cuando se pide hallar y definir la media ponderada. Otro hallazgo, fue la dificultad para reconocer la sensibilidad de la media frente a valores atípicos, la presencia del cero, y que la suma de las desviaciones por encima y por debajo de la media, se compensan.

En otro estudio, Móchon y Tlachy (2003) estudiaron la interpretación y comprensión de cada una de las propiedades del promedio descritas por Strauss y Bichler (1988). Dicho trabajo arrojó como resultados que los estudiantes aplicaron lo que los autores llaman *formulas falsas* para hallar el promedio, como es el caso de solo sumar y concepciones donde el promedio es asociado como el resultado de una suma. La comprensión por parte de los dos grupos sobre el promedio resultó ser bastante deficiente y reflejó el desconocimiento por parte de los estudiantes de dichas propiedades.

En un artículo escrito por Franklin (2008), en el que dio algunas recomendaciones para la enseñanza del promedio aritmético, Los problemas propuestos se basaron en ideas desarrolladas en el nivel A<sup>2</sup> de comprensión. En dicho artículo se propone estudiar la distribución de un conjunto de datos y las formas de representar y resumir dicha distribución; La indagación del concepto de *reparto justo* como el valor medio de un conjunto de datos

---

<sup>2</sup> En 2007, la American Statistical Association publicó un informe titulado Guía para la evaluación y la enseñanza de la Educación Estadística (GAISE). Dicho informe proporciona trayectorias de aprendizaje para las ideas clave de la estadística organizadas en tres niveles de desarrollo, A, B y C (siendo “A” el nivel más básico). Estos tres niveles pueden ser paralelos al nivel de grado de los estudiantes (primarios, intermedios y secundarios); Se basan en las experiencias de los estudiantes con los términos estadística. Para nivel A, se trabaja la media como reparto equitativo de las cantidades, el principio del reparto justo; para el nivel B, la media como el punto balance de la distribución, se parte de la ubicación central y la extensión (grado de variabilidad) de los datos; y para un nivel C, se espera que los alumnos logren hacer inferencias sobre la muestra a partir de la media, como valor representativo (Franklin, 2008).

numéricos; el acercamiento a un algoritmo y la noción de número de pasos para obtener el reparto justo. En el nivel A, los estudiantes aprenden a encontrar la *cuota justa*, un valor al *redistribuir* los datos.

En otro artículo, Kader y Mamer (2008) partieron del nivel B de comprensión. Los ejemplos se basaron en las ideas de las medidas de tendencia central para ampliar la noción de la media. Se incluyó el concepto de *punto de equilibrio* para la distribución de los datos y se desarrolló una medida alternativa de variación respecto a la media. Estos autores partieron de la interpretación de la representación gráfica y señalaron que los estudiantes por lo general tienen dificultades para interpretar diagramas de puntos y que se debe promover el razonamiento proporcional en este nivel. Los autores además plantearon que los encuentros de estudiantes con la estadística en los grados intermedios deben basarse en sus experiencias fundacionales de los grados de primaria.

Además de estas investigaciones en Batanero (2001), se presenta una indagación más exhaustiva sobre los diferentes estudios que se han realizado sobre el promedio aritmético, desde la capacidad de cálculo y la comprensión de algoritmos; problemas que implican la utilización de las propiedades de éste; la identificación de los campos de sus problemas; y por último, la comprensión de sus representaciones y capacidad de argumentación de los procedimientos. Algunas de las principales conclusiones a las que llegaron los autores rastreados por Batanero fueron las siguientes:

- El reparto justo se introduce desde edades muy tempranas en los niños
- A la mayoría de estudiantes, incluyendo los de primeros grados universitarios, se les dificulta realizar interpretaciones con la media, fuera de la aplicación del algoritmo.
- La utilización de cantidades discretas facilitan la resolución de los problemas
- Los estudiantes de grados superiores muestran más facilidad para trabajar con datos agrupados, mientras que los de grados medios les va mejor en el trabajo con datos desagrupados.
- Los resultados más exitosos en la solución se presentaron cuando los estudiantes estaban familiarizados con el problema y donde además el promedio hacía referencia a repartos equitativos, valores representativos y punto de equilibrio.

## Capítulo 3

### METODOLOGÍA

El presente estudio se desarrolló bajo el enfoque interpretativo de la investigación cualitativa según es propuesto por Latorre, Del Rincón y Arnal (1996) puesto que este enfoque se interesa por los significados e intenciones de las acciones humanas, se centra en las personas y analiza las interpretaciones que hacen del mundo que los rodea y su relación con el mismo (Denzin, 1989). En consecuencia, el investigador se interesa por la comprensión global de las situaciones y las personas utilizando la vía inductiva, los conceptos, comprensiones e interpretaciones que se elaboran a partir de los datos. El investigador crea un marco de referencia adecuado para que las personas puedan responder fielmente sobre el mundo según sus experiencias y vivencias; tiene en cuenta la idiosincrasia de los fenómenos y contextualiza las situaciones. Entre tanto, la realidad sólo puede estudiarse recurriendo a los puntos de vista de los sujetos implicados en las situaciones educativas.

Para este enfoque, el proceso educativo tiene un carácter subjetivo y por esto es necesaria la experiencia directa de las personas en contextos educativos específicos. Se estudian aspectos de la educación como la motivación, intenciones, acciones, y significados difícilmente observables y cuantificables. Tiende a utilizar técnicas cualitativas, como la observación participante, entrevistas, notas de campo y relatos.

Este enfoque fue apropiado porque mi propósito era estudiar cómo se modifica la interpretación y solución de problemas relacionados con promedio aritmético en estudiantes del grado quinto cuando la formulación de los problemas atiende al desarrollo histórico epistemológico del concepto. Esto implica estudiar los recursos cognitivos que los estudiantes despliegan cuando se enfrentan a la solución de problemas en torno al promedio aritmético.

Los *participantes* de este estudio fueron ocho estudiantes (cuatro mujeres y cuatro hombres) del grado quinto de primaria, con edades entre los 9 a 12 años. El tipo de muestreo utilizado fue por selección intencionada o muestreo de conveniencia, ya que era necesario que los participantes tuvieran capacidad comunicativa, facilidad para expresar sus razonamientos, e interés hacia el tema. Tanto a los estudiantes seleccionados para el estudio, como a los

padres de familia, se les informó acerca del proyecto y se solicitó el respectivo permiso por escrito (Anexo). De igual modo se les explicó sobre las funciones de los investigadores, de los instrumentos para registrar la información, de los beneficios y riesgos de participar, de la condición de vínculo voluntario y de la posibilidad de dejar de participar en cualquier momento.

Con respecto a los *instrumentos*, se diseñó una entrevista semi-estructurada con dos problemas asociados a promedio aritmético que los participantes debían resolver de manera individual. Los problemas fueron presentados a los estudiantes usando diferente redacción, pero asociada con las ideas primitivas (*conceptos precursores*) en el desarrollo epistemológico del promedio aritmético. La entrevista inició presentándoles a los participantes un problema y a continuación se les pidió que encontraran el valor del promedio aritmético. Esta pregunta fue intencionada para rastrear las ideas de promedio aritmético desde un punto de vista formal. Las siguientes cuatro preguntas estaban asociadas con ideas primitivas del promedio aritmético y se presentaban desde la menos primitiva hasta la más primitiva: El valor típico, el valor representativo, el punto de equilibrio y el valor de reparto equitativo. Esta forma de preguntar (desde la menos primitiva a la más primitiva) se utilizó para indagar el nivel de interpretación y solución de los problemas propuestos a los estudiantes. En todo momento se evitó cualquier tipo de entrenamiento por parte del participante a medida que se le realizaban las preguntas. Algunos de los resultados de los pilotajes hechos con anterioridad y en los que se preguntaba en el sentido de la más primitiva a menos primitiva, se observó que los participantes daban una respuesta acertada en los problemas, en los que se utilizaba la palabra promedio, y al momento de pedirles una explicación se apoyaban en el procedimiento de los problemas anteriores, en los cuales se usaban los términos de valor típico, valor representativo, punto de equilibrio o valor reparto equitativo. Los siguientes son los dos problemas incluidos en el instrumento:

**Problema 1 (Pimpones):** Tienes cinco bolsas cada una con diferente cantidad de pimpones, en una hay cinco pimpones, en otra uno, en otra cuatro, en otra dos y en otra tres:

Preguntas:

1. ¿Cuál crees que es el promedio de pimpones en las bolsas?
2. ¿Cuál crees que es el valor típico de la cantidad de pimpones en las bolsas?

3. ¿Cuál crees que es el valor representativo de la cantidad de pimpones en las bolsas?
4. ¿Cuál crees que es el punto de equilibrio de la cantidad de pimpones en las bolsas?
5. ¿Cuál crees que es el valor del reparto justo de pimpones en las bolsas?
6. ¿Cuál crees que debe ser la cantidad pimpones de cada bolsa si estas estuvieran repartidos equitativamente?

Con este problema se pretendía indagar las nociones de promedio aritmético de los participantes desde la idea más formal a la más primitiva. Se presentó la idea más formal, primero (promedio aritmético) por medio de una pregunta y luego se continuó indagando acerca de las ideas más primitivas. Se creía que si un participante tenía como recurso la idea de promedio aritmético tendría mucha facilidad en resolver las últimas preguntas asociadas al problema, pero no había seguridad del desempeño en las preguntas si en la primera no era exitoso. Para este problema se utilizaron pimpones en físico y bolsas plásticas transparentes, para que el material real ayudara a visualizar las acciones de los participantes. Se pensó que la cantidad de pimpones en las bolsas debía permitir una rápida operación y por eso se escogió un número fácil de manipular y que se pudiera dividir exactamente en el número de bolsas (15 pimpones y 5 bolsas). Finalmente, se usó cantidades discretas, porque desde las primeras nociones históricas sobre el concepto de promedio el trabajo con variables continuas es mucho más dispendioso que con variables discretas

**Problema 2 (Cubos):** Se tienen grupos formados por cubitos de madera en cantidades de 10, cuatro, ocho y dos unidades de longitud (como se presenta en la Figura 4):

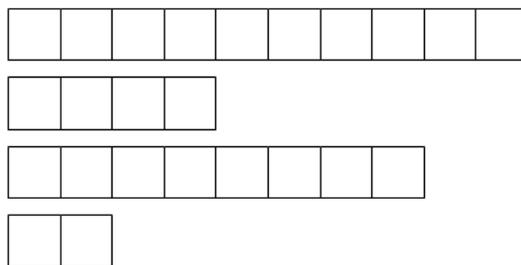


Figura 4. Representación gráfica de la disposición de los cubos.

Preguntas:

1. ¿Cuál crees que es el valor promedio de estas longitudes?
2. ¿Cuál crees que es el valor típico de estas longitudes?
3. ¿Cuál crees que es el valor representativo de estas longitudes?
4. ¿Cuál crees que es el valor del punto de equilibrio de estas longitudes?
5. ¿Cuál crees que es el valor reparto equitativo en estas longitudes?
6. ¿Cuál crees que debe ser la cantidad de cubos de cada longitud si estas estuvieran repartidos equitativamente?

Para este problema se tuvo en cuenta las mismas características y directrices del primer problema, generar un valor a partir de una colección de datos. El fin de presentar un problema siendo de la misma naturaleza fue mirar si las interpretaciones y estrategias utilizadas por los participantes en el primer problema se mantenían.

En términos de los *procedimientos*, los participantes fueron entrevistados individualmente por periodos de veinte minutos aproximadamente, y en espacios en donde estuvieran libres de distracciones. Se le presentó uno a uno los problemas diseñados en el protocolo. Se ofreció, además del material tangible, hojas de papel y lápices en caso de necesitar apoyo escrito. Se le pidió a cada estudiante que fuera verbalizando la solución del problema, para poder rastrear en detalle sus interpretaciones y soluciones en problemas que involucran el promedio aritmético. Las preguntas adicionales que se hicieron a los estudiantes estuvieron fundamentadas en las respuestas dadas por ellos. Las entrevistas fueron grabadas en video y transcritas palabra por palabra para facilitar su análisis. En total se realizaron 96 entrevistas (12 por estudiante).

El *análisis* de la información se llevó a cabo mediante el análisis de contenido según es sugerido por Porta y Silva (2003). Este análisis se configura como una técnica objetiva, sistemática, cualitativa y cuantitativa. Busca medir la frecuencia de aparición de ciertas características de contenido en las respuestas de los participantes en las entrevistas (estrategias, conceptos, definiciones, etc.), trabaja con materiales representativos, marcada por la exhaustividad y con posibilidades de generalización. Los resultados obtenidos pueden ser susceptibles de verificación por otros estudios distintos y se debe dar prioridad a lo cualitativo sobre lo cuantitativo.

Para el análisis se tuvo en cuenta las respuestas de los estudiantes en ambos problemas, los que fueron revisados varias veces con la ayuda de la grabación realizada y de las transcripciones. Se buscó identificar patrones que permitieran describir los diferentes significados que tienen los estudiantes sobre el promedio y las aproximaciones a la solución. La información fue confrontada por medio de debates y reflexiones en un seminario de investigación conformado por otros estudiantes de último semestre que también cursaban su práctica docente y por la asesora.

## Capítulo 4

### RESULTADOS

A continuación describo primero los significados más relevantes observados durante la revisión exhaustiva de las entrevistas; y segundo las transformaciones de estos significados a medida que las preguntas asociadas con el problema se modificaron siguiendo el sentido inverso al desarrollo histórico epistemológico del concepto. El análisis se hizo a partir de las respuestas que los participantes dieron en cada una de las preguntas de los dos problemas.

#### 4.1.1. Significados del promedio en problemas que involucra este término

En este apartado presento los significados y las soluciones de los estudiantes a las preguntas en las que se les pidió explícitamente encontrar el promedio aritmético de ciertas cantidades. Es necesario recordar que la pregunta por el promedio aritmético fue la primera pregunta en cada problema. Es inevitable tener en cuenta que las respuestas a las preguntas posteriores pudieron haber sido influenciado por la primera pregunta.

4.1.1.1. *El resultado de una suma.* Uno de los significados encontrados en los participantes es interpretar el término promedio como *el resultado de una suma*. Es decir, los participantes suman las cantidades del enunciado del problema. Hay varios episodios que evidencian este significado:

Por ejemplo, en el problema de los *Pimpones* (Problema 1) el estudiante Carlos<sup>3</sup> asoció el promedio con la cantidad total de pimpones que había en el enunciado del problema. Sucedió similar con Amelia, Susana y Juan Pablo, quienes llegaron a la misma conclusión y sumaron la cantidad de pimpones de cada bolsa para conseguir el valor de 15. El siguiente aparte de la entrevista ilustra este hallazgo:

Entrevistador: (*El entrevistador entrega a Carlos las bolsas una por una y menciona la cantidad de pimpones dentro de cada bolsa*). Carlos, si yo te preguntara; ¿Cuál crees que es el promedio de la cantidad de bolas en las bolsas? ¿Tú qué me dirías?

---

<sup>3</sup> Los nombres son seudónimos para proteger la identidad de los menores

**Carlos:** El promedio de las bolas que hay en las bolsas son [es] quince.

Entrevistador: ¿Por qué crees que es quince?

**Carlos:** Porque cinco más cuatro, nueve; más dos once; más tres catorce; más una quince.

Este fragmento indica que Carlos sumó la cantidad de pimpones de las bolsas para encontrar el promedio. Esta acción me lleva a pensar que uno de los significados del promedio expuestos es el promedio como el resultado de una suma. Este aparte también parece indicar que el concepto de promedio, como una cantidad ponderada del número de elementos en el número de grupos, aun no está desarrollado en algunos de estos participantes y es necesario continuar con la indagación fundamentada en ideas mucho más primitivas del promedio aritmético.

Comparando este resultado con los encontrados por Móchon y Tlachy (2003), al parecer los participantes de este estudio utilizan también las llamadas *formulas falsas* al resolver problemas que involucran el concepto de promedio aritmético. Como es el caso de solo sumar y concepciones en las que el promedio es asociado al resultado de una suma. Es importante resaltar que los participantes de mi estudio tienden a exponer un significado igual a los estudiantes del estudio de Móchon y Tlachy (2003), aún cuando estos últimos ya habían tenido algún tipo de instrucción previa sobre el concepto de promedio.

4.1.1.2. *La cantidad mayor del enunciado del problema.* Otro de los significados encontrados en los participantes es *el promedio como la cantidad de mayor valor en el enunciado del problema*. Para este caso el estudiante busca un número que represente la cantidad mayor enunciada en los datos del problema. El siguiente fragmento de entrevista con Jorge en torno al problema de los *Pimpones* ilustra este hallazgo:

Entrevistador: ¿Cuál crees que es el promedio de bolas en estas bolsas?

**Jorge:** El promedio en las bolsas... la cinco

Entrevistador: ¿La de cinco? ¿Por qué crees que es la de cinco?

**Jorge:** Porque es la que tiene más bolas...

El fragmento sugiere que Jorge seleccionó una sola cantidad de las presentadas para indicar el promedio. Esta cantidad fue seleccionada de bolsas que contenían cinco, uno, cuatro, dos y tres pimpones. Así, cinco fue la cantidad mayor disponible. Esto lleva a pensar que un significado para el promedio es la cantidad mayor de los datos dados en el problema.

4.1.1.3. *Una cantidad cercana a la mitad.* Este es un significado interesante y está relacionado con asociar el promedio con *una cantidad cerca de la mitad*. Considero éste como uno de los significados más sofisticados que desplegaron los participantes en términos de la funcionalidad del promedio. Se nota que este significado se acerca a la concepción epistemológica del promedio como punto de equilibrio. Para esta categoría en particular, el contexto del problema ayudó al estudiante a pensar en un dato que se acerca a la mitad de la suma total de los valores. Este hallazgo se ilustra con un fragmento de la entrevista de José solucionando el problema de los *Pimpones*.

Entrevistador: ¿Cuál crees que es el promedio de bolas en estas bolsas?

**José:** Ocho

Entrevistador: ¿Por qué piensas que es ocho?

**José:** Porque como.....como usted me dijo...es el promedio

Entrevistador: ¿Qué entiendes cuando yo te digo promedio?

**José:** Como un poquito más acá de la mitad

Entrevistador: ¿A qué mitad te refieres?

**José:** De todo junto

En este fragmento infero que José sumó la cantidad total de los pimpones para obtener quince y luego calculó la mitad de esta cantidad. Como esta mitad no era un número entero, José aproximó el valor al siguiente número entero obteniendo ocho. Surge así el significado de promedio como una *cantidad cercana a la mitad*. También pienso que la respuesta de José pudo estar influenciada por la etimología de la palabra promedio que sugiere *mitad*.

Las respuestas dadas por los estudiantes a esta primera pregunta, en la que se usó la expresión promedio, revelan diversidad de significados que dan al promedio: La suma de los valores del enunciado, el valor mayor en el enunciado y la cantidad cercana a la mitad. Estos significados variados me llevan a inferir que los estudiantes dan al promedio significados que no están asociados directamente a la definición formal que se tiene de promedio aritmético, pero si están asociados con ideas epistemológicas precursoras del concepto, como el punto de equilibrio. Es necesario indicar que en las respuestas a esta pregunta ningún estudiante intentó aplicar el algoritmo para encontrar el promedio aritmético.

#### **4.1.2. El promedio como Valor típico**

Cuando la pregunta se transforma y se usa la expresión *valor típico* a cambio de *promedio aritmético*, las respuestas de los estudiantes no difieren de las respuestas dadas a la pregunta por el promedio aritmético. Una explicación podría ser que los estudiantes no encuentran diferencia entre las preguntas, pero también podría ser que los estudiantes fueron influenciados por sus propias respuestas en la primera pregunta. Los significados que más se encontraron en los estudiantes al responder la pregunta sobre el valor típico son los siguientes:

*4.1.2.1. El resultado de una suma.* Este es un significado similar al encontrado cuando se preguntó en términos del promedio aritmético. Los estudiantes suman todas las cantidades que se le presentan en el problema. Este hallazgo se evidenció en la entrevista con varios participantes. Esto podría significar dos asuntos: Primero, que los significados que los estudiantes dan al promedio aritmético son consistentes si se pregunta bien sea por el valor promedio o por el valor típico. Segundo, que las respuestas de los estudiantes a la pregunta del valor típico pudo haber estado influenciada por las respuestas a la primera pregunta que indagaba sobre el valor promedio.

*4.1.2.2. La cantidad mayor del enunciado del problema.* Un significado dado al promedio como *Valor típico* es el valor mayor entre todas las cantidades del problema. Al igual que en la pregunta que indagaba por el valor promedio, los estudiantes eligieron la bolsa con más pimpones o el grupo con más cubos como los valores típicos.

#### **4.1.3. Promedio como Valor Representativo**

Al utilizar el término valor representativo, los estudiantes asociaron su respuesta con valores que no resumían el colectivo de datos. También podría interpretarse que las respuestas de los estudiantes a la pregunta del promedio como valor representativo pudieron haber estado influenciadas por las respuestas a las preguntas previas que indagaban sobre el valor promedio y el valor típico. A continuación se exponen los significados dados por los participantes a la pregunta referida al valor representativo.

4.1.3.1. *El resultado de una suma.* Un significado encontrado es el tomar el valor representativo como la cantidad total de elementos en el problema. Similar a como sucedió cuando se preguntó por el valor promedio y por el valor típico. Esto representa que los significados que los estudiantes dan al promedio aritmético son consistentes si se pregunta bien sea por valor promedio, valor típico o valor representativo, ya que los entienden como valores que se generan de la misma forma.

4.1.3.2. *Cada una de las cantidades de problema.* Este significado apareció en varios episodios, en los cuales los participantes nombraron cada dato del enunciado como valor representativo. Este significado se evidenció en la entrevista con Amelia al solucionar el problema de los pimpones:

Entrevistador: ¿Cuál crees que es el valor representativo de la cantidad de bolas en estas bolsas?

**Amelia:** Varios, que en una bolsa hay una en otra dos, tres así...

Para Amelia el valor representativo es la cantidad de bolas que había en cada una de las bolsas. No usó un valor que representara todas las bolsas, sino que dió un valor para cada bolsa.

4.1.3.3. *El valor que represente todas las cantidades.* Los participantes asociaron el valor representativo con un número que pudiera representar a todas las cantidades dadas en el problema. La entrevista con José mientras resolvía el problema de los cubos ilustra este significado.

*Entrevistador:* Se tienen grupos formados por cubitos de madera en cantidades de diez, cuatro, ocho y dos unidades de longitud. Si yo te preguntara ¿Cuál es el valor representativo de estas longitudes? Tú ¿Qué me dirías?

**José:** El dos

*Entrevistador:* ¿Por qué dirías que es el dos?

**José:** lo veo como si fuera el representativo de todas.

No es claro lo que José quiso expresar en el fragmento, pero parece que él eligió un valor para representar todas las cantidades del problema. Se interpreta que buscó características comunes en los valores, en este caso el número dos podría formar y dividir en

porciones enteras las otras tres longitudes, o al ser la longitud más pequeña podría estar dentro de cualquiera de las otras longitudes.

Si se retoma las apreciaciones hechas por Porter (1986, citado en Doval, 2004) sobre la utilización de la media como ese valor que representa un aspecto de una población, es de tener claro que dicho valor deberá hablar de la población en general, y al parecer los significados que los participantes asocian con las preguntas que involucran el concepto de valor representativo están más asociados con la cantidad de elementos en cada conjunto por separado y no en un valor que intenten representar todos grupos.

#### **4.1.4. El promedio como punto de equilibrio**

Cuando se le preguntó a los participantes con respecto al punto de equilibrio de las cantidades, la mayoría de ellos dijeron no entender la pregunta o no saber qué es el punto de equilibrio. Sin embargo, algunos intentaron realizar interpretaciones como las que se enuncian a continuación:

*4.1.4.1. La cantidad mayor del enunciado del problema.* Este significado se caracteriza, porque los participantes asocian el punto de equilibrio con el valor mayor de los datos del problema. Asumieron que el más equilibrado es el que mayor cantidad tenga. Los siguientes fragmentos ilustran este hallazgo:

En problema de los cubos (problema 2):

*Entrevistador:* ¿Cual crees que es punto de equilibrio de estas cantidades?

**José:** diez

*Entrevistador:* Sería el 10... nuevamente... ¿Por qué el 10?

**José:** Porque es el que está más equilibrado

*Entrevistador:* Esta más equilibrado... ¿Qué piensas cuando me dices equilibrado?

**José:** Es el que tiene más

En el problema de los pimpones (problema 1):

*Entrevistador:* ¿Cuál crees que es el punto de equilibrio de la cantidad de pimpones en estas bolsas?

**Cristian:** La que más tiene

Al igual que en las preguntas que indagan por el promedio aritmético y valor típico, la cantidad mayor del enunciado toma el papel del valor esperado como respuesta de los participantes.

La pregunta referida al punto de equilibrio fue una de las que más causó dificultades en la respuesta de los estudiantes. Muchos manifestaron no saber y cuando se les pidió dar algún tipo de interpretación del problema o del término, nuevamente expresaban no entender o no haberlo escuchado antes. Al igual que con la pregunta por el valor típico, muchos de los estudiantes parecen no desplegar significados con respecto al punto de equilibrio.

#### **4.1.5. El promedio como valor de reparto equitativo.**

Para indagar por la idea de reparto equitativo se usaron dos preguntas. La pregunta cinco que preguntaba por un valor específico como respuesta y la pregunta seis que sugería al estudiante realizar una acción. Con la pregunta cinco todos los participantes dieron significados similares, mientras que con la pregunta seis sus respuestas fueron diferentes. En la pregunta seis los participantes intuitivamente comenzaban a manipular el material y empezaban a formar grupos.

*4.1.5.1. El resultado de una suma.* Cuando se les preguntó a los estudiantes cuál debería ser el valor de reparto justo de las cantidades, la respuesta de todos ellos fue nuevamente sumar todas las cantidades del enunciado del problema, al igual que en las respuestas cuando se les indagaba por los otros preconceptos. Se puede pensar que los participantes asociaron las ideas precursoras del promedio y la idea de promedio a la acción de sumar.

*4.1.5.2. Estrategias desarrolladas cuando la pregunta lleva implícita una acción:* Cuando a los participantes se les presentó por la sexta pregunta: ¿Cuál debe ser la cantidad (pimpones y cubos) de cada grupo si estos estuvieran repartidos equitativamente? de manera espontánea los participantes comenzaron a manipular y reorganizar los elementos dentro de los diferentes grupos (bolsas o longitudes), lo que lleva a pensar que este tipo de pregunta lleva implícito para los participantes realizar alguna acción con el material. Las dos estrategias que expusieron los participantes a esta pregunta son las siguientes:

*4.1.5.2.1. No conservación del número de grupos.* Los estudiantes asociaron el valor del reparto equitativo a grupos de cantidades iguales. En esta estrategia de solución algunos

participantes repartieron las cantidades en partes iguales con algunos criterios. Algunos no tuvieron en cuenta la cantidad total de bolsas o la cantidad total de cubos.

Los participantes intentaron hacer grupos que tuvieran igual cantidad de elementos, pero no conservaron el número de grupos propuestos en el enunciado del problema. Esta acción se evidenció en casi la mitad los participantes. Por ejemplo, en la entrevista con Carlos al solucionar el problema de los pimpones, él repartió equitativamente todos los pimpones pero solo en tres de las cinco bolsas disponibles. En tres de las bolsas quedaron cinco pimpones y las dos restantes quedaron vacías. Carlos, después de esta acción, afirmó que el valor del reparto equitativo era cinco. De forma similar ocurrió al solucionar el problema de los cubos. Es interesante notar que aunque los participantes parecen tener un buen indicio del reparto equitativo no tuvieron en cuenta que se les debe asignar elementos del conjunto a cada uno de los grupos.

*4.1.5.2.2. Conservación del número de grupos.* Al igual que en la estrategia de solución anterior los estudiantes buscaron obtener igual cantidad de elementos en los diferentes grupos que se les presentaron. Los participantes no dejaron por fuera ningún grupo. Fueron exitosos al tomar todos los elementos y distribuirlos equitativamente en cada grupo. Esta acción se presentó con Amelia y Pedro.

Amelia, por ejemplo, tomó las cantidades mayores y comenzó a pasar unidades a los grupos que tenían menor cantidad. Después de un momento, encontró que el valor de reparto equitativo para el problema de los cubos era seis, y tres en el problema de los pimpones.

Pedro, en contraste, contó primero todos los cubos y después comenzó a repartir las unidades de los grupos más grandes a los más pequeños. Así sucesivamente hasta completar los cuatro grupos de a seis cubos. Estos dos participantes fueron exitosos en la solución y sus respuestas mostraron indicios acertados hacia lo que es repartir equitativamente.

Todos los participantes al preguntarles por la cantidad o valor de reparto equitativo, asumieron dar un valor después de realizar un procedimiento y es la única parte de la entrevista en la que los estudiantes tienen la iniciativa de manipular los objetos en los diferentes grupos de bolsas o de cubos.

#### 4.2. *Modificaciones en los significados.*

Teniendo en cuenta los diferentes significados que los participantes dieron al promedio y a sus conceptos precursores, dedico la siguiente parte del análisis a mirar cómo evolucionaron las repuestas de los estudiantes en el camino trazado por las preguntas en el sentido inverso del desarrollo epistemológico. Se presentan tres de los estudiantes por la claridad en sus respuestas y lo exitoso de algunos de sus procedimientos. Además porque son tres casos que ilustran la modificación de los significados.

El primero de ellos es *Carlos*. Cuando el problema propuesto involucró el término promedio, valor típico y valor reparto justo, Carlos asoció los tres términos con una suma. Se puede sospechar que la pregunta que indagaba por el promedio aritmético pudo haber influenciado las respuestas a las posteriores preguntas. Cuando se le preguntó por el Valor de punto de equilibrio, tanto en el problema de los pimpones como en el de las longitudes, Carlos expresó desconocer el término y no asoció ningún significado. Al llegar al problema del reparto equitativo, cuando se le preguntó por *el valor de reparto equitativo de las cantidades*, respondió nuevamente que es el resultado de sumar todas las cantidades. Realizando la misma asociación que en los tres primeros conceptos, una suma total. Cuando se le preguntó por *cuál debe ser la cantidad (pimpones o cubos) de cada grupo (bolsas o longitudes) si estos estuvieran repartidos equitativamente*, Carlos automáticamente se dispuso a acomodar los elementos entre los diferentes grupos, obteniendo así grupos con igual número de elementos, pero sin conservar la cantidad inicial de grupos. Observé que esta última pregunta para este participante evocaba realizar algún tipo de reorganización y manipulación de los elementos. De alguna forma lo invitó a realizar un proceso, a diferencia de las preguntas anteriores. Carlos fue muy acertado al obtener un reparto equitativo con grupos de igual cantidad.

Con el tipo de significados que Carlos dio durante toda la entrevista bajo la utilización de los conceptos precursores del promedio, se observó que para él todos los términos que se exponían se generaban de la misma forma o representaban la misma cantidad. Solo hasta cuando se le pide la cantidad para un reparto equitativo de los elementos, se logra el mayor acercamiento hacia lo que es el concepto de promedio aritmético. Con estas respuestas se observa que los significados que Carlos asoció sobre el promedio son bastantes primitivos y

que el mejor acercamiento se logró al indagarse sobre el reparto equitativo que es epistemológicamente la noción precursora de promedio aritmético más antigua.

El siguiente participante que describe una modificación de significados es **Amelia**. En los problemas que involucraron el término *promedio*, Amelia, asumió el promedio como ese valor resultado de sumar todos los datos. Cuando se le preguntó por el valor típico, primero expresó no conocer el término y después afirmó que era la suma de todos los valores. Para el valor representativo, realizó una asociación con el valor que había en cada grupo, por ejemplo, que en una bolsa habían dos pimpones, en otra tres y así sucesivamente, lo mismo que con el problema de los cubos. Cuando se le habló del valor del punto de equilibrio, Amelia no expresó un significado claro. Ella lo asoció con el incremento de unidades entre un grupo y el inmediatamente siguiente, después de una organización de menor a mayor.

Desde los significados que Amelia dio para el reparto equitativo, se observó que cuando se le pidió *un valor de reparto justo para un grupo de cantidades*, expresó ese valor como la sumatoria de todas las cantidades. Esta respuesta es igual a la que dio para el valor promedio y valor típico. Cuando se le preguntó, *cuál debe ser la cantidad (pimpones o cubos) de cada grupo (bolsas o longitudes) si estos estuvieran repartidos equitativamente*, Amelia intuitivamente empezó a trasladar los elementos de los grupos más grandes hacia los más pequeños, hasta formar grupos de cantidades iguales. Amelia fue consistente en el número de grupos iniciales y la cantidad de elementos, manteniendo siempre la coordinación. Esta consistencia se vio reflejada tanto en la solución del problema de los pimpones (conservando la cantidad inicial de bolsas [5], sin desaparecer u omitir alguna de ellas, y conservando el número de pimpones) como también en la solución del problema de las longitudes. Amelia es una de los tres participantes que fue exitosa en la solución de los problemas que involucraron el reparto equitativo y a diferencia de las soluciones dadas en las preguntas anteriores, la pregunta seis la llevó a realizar un manipulación del material.

La siguiente participante quien mostró modificación en sus significados es **Catalina**. En la pregunta que involucró el término promedio, al igual que en las que aparecieron las idea de valor representativo y punto de equilibrio, Catalina afirmó no estar familiarizada con los tres términos. Sin embargo, cuando se le pidió el valor típico de un conjunto de datos, lo

asoció con la sumatoria total de las cantidades en cada grupo. De forma similar ocurrió cuando se le indagó por el valor de reparto equitativo.

En la última pregunta referente a *cuál debe ser la cantidad (pimpones o cubos) de cada grupo (bolsas o longitudes) si estos estuvieran repartidos equitativamente*, Catalina primero contó la cantidad total de elementos y comenzó a desplazarlos entre los grupos hasta obtener igual cantidad de elementos en algunos de los grupos. Los grupos que quedaron sin elementos los eliminó automáticamente y cuando se le interrogó por esos conjuntos eliminados afirmó que por quedar sin elementos desaparecieron de la respuesta. Catalina fue muy acertada en cuanto al significado que le dio a un reparto equitativo, aún cuando no coordinó la cantidad de grupos iniciales y los finales. Para Catalina, fue más familiar hablar de reparto equitativo que de cualquiera de las otras ideas precursoras de promedio aritmético. Su respuesta a la última pregunta evidenció nuevamente que esta pregunta sugiere una acción para los participantes.

Estos tres casos ilustran la modificación de los significados con respecto a las diferentes preguntas. Algunos de los significados expresados por los participantes fueron más elaborados que otros y esto se dio por la estructura y orden de las preguntas asociadas a conceptos predecesores de promedio. Aunque no en todos los estudiantes se observó una clara evolución en los diferentes significados, si se observó como esa transformación de las preguntas de términos formales a los más primitivos favoreció la modificación de los significados. Además la última pregunta por reparto equitativo generó respuestas exitosas en los participantes. En esta pregunta los estudiantes se alejaron de cualquier significado y pusieron en marcha un plan de reorganización y estructuración de los elementos y dieron respuestas muy cercanas a los que se entiende por promedio.

## CONCLUSIONES

Al terminar este estudio se encontraron diversas comprensiones sobre promedio aritmético en algunos estudiantes de quinto grado. Algunos de esos significados parecen ser más primitivos que otros. Por ejemplo, algunos estudiantes asocian el promedio con la suma de las cantidades mencionadas en el enunciado del problema, mientras que otros lo asocian con un dato dado en el problema.

Parece ser que la concepción de promedio aritmético es compleja para los escolares de grado quinto. Aunque este es un término sugerido desde los estándares de calidad para la básica primaria, no parece que siga un desarrollo espontáneo. Teniendo en cuenta que la investigación en Educación Estadística en Colombia es escasa y que los estudios en la básica primaria son limitados, consideramos que es necesario continuar con el estudio de los significados de los educandos acerca de esta medida de tendencia central. Particularmente, esto tiene sentido porque éste análisis usó un número pequeño de participantes de un determinado contexto sociocultural. Los resultados pueden diferir si el número de participantes es mayor y se lleva a cabo en otros contextos socioculturales. A su vez, si se plantean nuevos problemas en los que no se mencione directamente la palabra promedio, si no referidos al valor típico, valor más representativo, centro de los datos o reparto justo, se puede conseguir una visión más clara con respecto al nivel de comprensión de los niños hacia lo que se entiende como promedio aritmético y los significados que asocian a este.

La utilización de estos conceptos precursores surgidos en el desarrollo histórico-epistemológico, permitió observar que sí hay significados claros sobre el promedio aritmético como un reparto equitativo; Al parecer la compensación de todas las cantidades es algo propio de los niños y son estos significados un muy buen inicio para la introducción progresiva del promedio. Por otro lado, se observó que se presenta gran confusión en los participantes cuando el problema atiende los términos de valor típico y punto de equilibrio.

El introducir los conceptos precursores del más abstracto al más primitivo, permitió observar que si hay ideas claras sobre el promedio sin la necesidad de realizar un entrenamiento o instrucción previa. Además, estos resultados parecen sugerir que la ruta seguida en esta indagación es una buena base para diseñar la instrucción en el aula. Este diseño podría iniciar con presentación de problemas en los que se indague primero por el

valor del reparto justo, después por el valor punto de equilibrio, más adelante por el valor representativo y valor típico y por último los problemas relacionados con el valor promedio. Una vez introducido el término promedio podría empezarse la formalización en el aula de clases.

Mantener la misma estructura de pregunta para orientar toda la entrevista y solo cambiar el nombre del concepto por el que se preguntaba, ayudó a que los participantes pensarán en un valor numérico específico como respuesta a los problemas. Además, se evitó de algún modo sugerir al participante cómo resolver el problema o incitarlo a efectuar algún tipo específico de procedimiento. Sin embargo, las preguntas que invitaron a desarrollar algún tipo de proceso, como fue el caso de la pregunta número seis sobre el reparto equitativo, llevaron al participante a movilizar estrategias de solución más elaboradas y acertadas.

Los resultados de esta propuesta evidencian que los estudiantes si tiene significados acertados sobre el promedio desde la mirada del promedio como reparto equitativo. Algo que no se había evidenciado en los pilotajes que se realizaron, donde solo se preguntaba por el promedio aritmético.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alfaro, C., & Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* , 3 (4), 83-98.
- Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of Mean and Median. *Educational Studies in Mathematics*,62 (2), 149-168.
- Batanero, C. (2001). Investigaciones sobre la comprensión de las medidas de posición central. En C. Batanero, *Didáctica de la Estadística* (págs. 83-90). Granada: Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias-Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno* (25), 41-58.
- Cobo, B., & Batanero, C. (2004). Significado de las media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias* , 22(1), 5 -18.
- Denzin, N. (1989). *Qualitative research methods serie*. Newbury Park, California: SAGE Publications.
- Doval, H. (2004). La “distribución normal” de Gauss y el “hombre tipo”. *Revista Argentina de Cardiología*, 72(3), 239-241.
- El Colombiano, R. (10 de Mayo de 2011). Autoridades frustran ataque en Belén Rincón. *Periodico El Colombiano* .
- Franklin, C. (2008). Contemporary curriculum issues: Statistics in the elementary grades: Exploring distributions of date. *Teaching Children Mathematics* ,14(1), 10-16.
- Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y comprensión del conocimiento Matemático*. Málaga: Universidad de Málaga.
- Godino, J. (1980). *Significado y comprensión de los conceptos*. Barcelona: Grijalbo.
- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 14 (3), 325-355.
- Kader, G., & Mamer, J. (2008). Contemporary curriculum issues: Statistics in the middle grades: Understanding center and spread. *Mathematics Teaching in the Middle School* , 14(1) 38-43.

Latore, A., del Rincón, D., & Arnal, J. (1996). Naturaleza de la investigación educativa. En A. Latore, D. del Rincón, & J. & Arnal, *Bases metodológicas de la investigación educativa* (págs. 24-50). Barcelona: GR92.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C., & Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(9), 187-201.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Matemáticas. Santa fé de Bogota: Centro de Pedagogía Participativa.

Móchon, S., & Tlachy, M. (2003). Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos. *Educación Matemática*, 15 (3), 5-28.

Porta, L., & Silva, M. (2003). "La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación educativa" [en línea]. <http://www.uccor.edu.ar/paginas/REDUC/porta.pdf>, 18.

Polya, G. (1981). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.

## Anexo

### Consentimiento de Participación

Yo \_\_\_\_\_ estoy de acuerdo en permitir a mi hijo (a) participar en la investigación titulada “Concepciones sobre promedio aritmético de estudiantes de quinto grado” que es conducida por el practicante Luis Miguel Marrugo Escobar estudiante de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Entiendo que la participación de mi hijo (a) es voluntaria y puedo decidir permitirle: (a) no participar o (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi hijo (a) sea regresada a mi o sea destruida.

*Propósito de la investigación:* El propósito de este estudio es: Investigar cómo los alumnos de quinto grado conciben el promedio aritmético, a partir de la resolución de problemas.

*Beneficios:* El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Estadística, fortalecer sus habilidades comunicativas y nociones sobre promedio aritmético.

*Procedimiento:* Como participante en este estudio, mi hijo (a) será observado en clase, algunas veces podría ser video grabado y de ser necesario podría ser entrevistado.

*Riesgos:* No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

*Confidencialidad:* Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información tendrá acceso limitado, será bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

*Preguntas posteriores:* Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, en persona o por teléfono:

*Consentimiento:* Entiendo que firmando este documento estoy autorizando la participación de mi hijo (a). \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Nombre del investigador 1

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Fecha

\_\_\_\_\_  
Nombre de padre o acudiente

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Fecha

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede ser discutida con la asesora Lucia Zapata en el teléfono 2195727 de la Universidad de Antioquia.