RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO QUINTO

MARÍA ELENA HENAO CEBALLOS
WILSON BOSCO MARÍN FRANCO
DANIEL FERNANDO MONTOYA ESCOBAR
JOHAN SEBASTIÁN RESTREPO TANGARIFE

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
MEDELLIN
2012

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO QUINTO

MARÍA ELENA HENAO CEBALLOS
WILSON BOSCO MARÍN FRANCO
DANIEL FERNANDO MONTOYA ESCOBAR
JOHAN SEBASTIÁN RESTREPO TANGARIFE

Trabajo de investigación para optar al título de
Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

ASESOR:

Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
MEDELLIN
2012

Agradecimientos

Dios es nuestra fortaleza y nuestro escudo; en Él está toda nuestra confianza, a Él damos toda la gloria y la gratitud.

A nuestras familias que son el motor y la razón de seguir siempre adelante.

A la Institución Educativa República de Uruguay por brindarnos su confianza y apoyo durante el desarrollo de nuestra investigación. De manera muy cariñosa y especial agradecemos a los niños que participaron en nuestra investigación, por compartir con nosotros su saber y por estar siempre dispuestos a brindarnos sus valiosos aportes.

Un agradecimiento muy especial a nuestro asesor Jhony Alexander Villa Ochoa por su calidad humana, serenidad y apoyo incondicional durante todo el proceso de la investigación. Así mismo, a todos los profesores que de una u otra forma influyeron en la construcción de nuestro conocimiento y formación académica.

Tabla de contenido

Tabla de ilustraciones

INTRODUCCIÓN

El estudio de los procesos de variación y el cambio desde los primeros grados de escolaridad, es un tema que ha sido sugerido por el Ministerio de Educación Nacional a través de la publicación del documento Lineamientos Curriculares, como una manera de construir cimientos que permitan acceder comprensivamente a los conceptos propios del álgebra y del cálculo en grados superiores (Colombia, 1998).

Tanto a nivel nacional como internacional se han encontrado diferentes producciones académicas que coinciden en la necesidad de que los estudiantes se acerquen a la comprensión de los procesos variacionales que se encuentran inmersos en los conceptos de función, razón, pendiente, límite, constante, variable, entre otros; y así puedan darle más sentido al fenómeno estudiado, evitando la solución de actividades y ejercicios de manera repetitiva desarticulada de cualquier contexto.

Sin embargo, en la revisión de literatura realizada en el marco de la presente investigación, se encontró que la mayoría de los estudios han sido desarrollados con estudiantes de secundaria y universitarios, posiblemente debido a la relación que tiene el pensamiento variacional con los procesos algebraicos. En ese sentido, esta investigación pretende aportar elementos que contribuyan al desarrollo de este pensamiento con estudiantes de Básica Primaria, teniendo en cuenta las distintas maneras en que los niños perciben la covariación entre dos magnitudes correlacionadas.

Para la presentación del trabajo investigativo, se consideraron seis capítulos. El primero de ellos, se ocupa de presentar los antecedentes que dieron lugar al problema de investigación, teniendo en cuenta lo observado en la clase, los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional, así como los principales elementos que desde la literatura son relevantes en la discusión sobre el pensamiento variacional.

En el segundo capítulo, se desarrollan los principales elementos teóricos que sustentan la presente investigación en lo referido a la variación y covariación de cantidades, teniendo como referentes conceptuales los planteamientos de Vasco (2006, 2009); Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003) y Johnson, (2012)

El tercer capítulo, está destinado a presentar el diseño metodológico utilizado en la investigación, la cual se desarrolló bajo el enfoque cualitativo, mediante un estudio de casos de tipo instrumental colectivo, que pretendía identificar las características del razonamiento covariacional en cuatro estudiantes de grado quinto de la I.E República de Uruguay, a partir de situaciones de tipo variacional que permitían identificar las relaciones entre dos magnitudes que covarían. Así mismo, se pretendió identificar las maneras en que los estudiantes reconocían algunos significados de la razón de cambio y su *comprensión* como una *comparación* entre dos cantidades o como una *tercera cantidad,* que aporta al entendimiento de la manera como covarían las cantidades.

Los resultados de la investigación son descritos en los capítulos cuatro y cinco, en los cuales se analizan los razonamientos, procedimientos y justificaciones que los estudiantes brindaron durante la ejecución de las diferentes situaciones, confrontados a la luz de los referentes teóricos y las observaciones realizadas.

Finalmente, en el capítulo seis, se describen las conclusiones y recomendaciones de esta investigación, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. También se deja a consideración para estudios futuros, algunos aspectos observados durante la investigación, los cuales aportan a las formas de razonar de los jóvenes frente a la función constante, en el caso en que el punto de referencia es cero y cuando es diferente de cero.

Es pues, una invitación a conocer los resultados de una investigación realizada con entrega y dedicación, en la que se creyó desde el primer momento y a partir de la cual, tanto estudiantes como investigadores obtuvieron valiosos aprendizajes.

Capítulo 1

1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el problema que dio origen a la investigación, el cual se sustenta desde algunas de las observaciones realizadas en el contexto de la actividad del docente en el aula de clase; de igual manera, se consideraron los planteamientos propuestos por los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998); así como los elementos producidos desde una revisión bibliográfica concerniente al pensamiento variacional y al razonamiento covariacional, lo cual fundamenta la conveniencia y pertinencia de abordar este problema con el fin de aportar a los procesos de aprendizaje en los estudiantes.

1.1 Desde el aula de clase

En el proceso de formación como futuros profesores de matemáticas, se observó la necesidad de establecer algunas reflexiones desde los elementos teóricos en los diferentes cursos de la carrera y los escenarios educativos. En este caso, tales reflexiones fueron construidas en la práctica pedagógica, desarrollada en la Institución Educativa República de Uruguay, en la que se intervinieron cuatro grupos de grado quinto.

Desde la clase de matemáticas se observó un escenario en el cual predominaban prácticas de tipo expositivo, es decir, actividades centradas en enunciar una temática con su respectiva conceptualización, acompañada de algunos ejemplos que presentaban la misma estructura y por tanto, un mismo grado de dificultad, los cuales eran solucionados por parte del docente en el tablero. Como muestra de este hecho se exhibe el siguiente episodio, retomado del diario de campo, con fecha del 4 de abril de 2011:

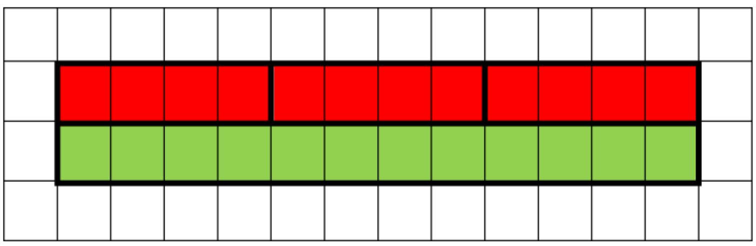
…el maestro inició con la historia de las regletas de Coussinaire, haciendo énfasis en la memorización de los autores y año de creación de las mismas. Luego, las dibujó en el tablero relacionando el color con su equivalencia numérica. Finalmente, cogió varias regletas y de forma expositiva mostró cómo realizar las cuatro operaciones básicas de la aritmética con dicha herramienta. Es importante mencionar que durante el desarrollo de la clase, los estudiantes no manipularon dichas regletas.

A continuación, el profesor mostró la forma de realizar una multiplicación con las regletas, haciendo una representación gráfica en el tablero. El docente dijo:

> "…vamos a multiplicar tres por dos, o sea tres veces la regleta dos, que es la roja. Para que el dibujo no les quede muy pequeño, cada cuadrito mío en el tablero, son dos en el cuaderno de ustedes"

Dibujo del profesor en el tablero

Dibujo del estudiante en su cuaderno



Para encontrar el resultado, el profesor, acudiendo a la multiplicación como suma reiterada, ubicó en una fila tantas regletas (del mismo tamaño) como indicara el producto. Así, para el ejemplo propuesto, puso 3 rojas (porque es tres veces dos, o sea, tres veces la regleta roja). Luego, buscó una regleta que tuviera la misma medida, que en este caso era la regleta verde claro (que equivale a seis unidades) y, de acuerdo al valor de dicha regleta se determinó el resultado.

En el momento en que el maestro le preguntó a los estudiantes, "entonces, ¿Cuánto es 3x2?", ellos respondieron que 6, pero al revisar su dibujo se confundieron porque les daba 12. Decían: "…profe, pero a mí me da 12".

Ilustración 1: Diario de campo sobre actividad en el aula de clase

Finalmente, es preciso mencionar que en las sesiones de clase posteriores, se observó características similares en la metodología implementada por el profesor. En un primer momento de la clase, conceptualizaba la temática; luego realizaba y explicaba algunos ejercicios buscando con esto que los estudiantes comprendieran con mayor facilidad el concepto trabajado; por último, el maestro ordenaba que escribieran la conceptualización de la temática y los ejemplos expuestos en su respectivo cuaderno.

De acuerdo a lo observado, se considera que se pudo haber realizado un trabajo más enriquecedor con las regletas de Coussinaire encaminados a promover el estudio de algunos aspectos variacionales. Es decir, se pudo haber iniciado con un acercamiento directo al material concreto, que posibilitara en los estudiantes el reconocimiento de las diferentes longitudes de las regletas, realizar comparaciones y construir relaciones entre una regleta y las demás.

También es viable pensar en proponer actividades encaminadas a identificar cómo varían las áreas de figuras construidas a partir de una cantidad determinada de regletas; qué relación de dependencia hay entre el volumen de cada figura y el área de la misma; cómo lograr con un número específico de regletas la mínima y máxima área con relación a las posibles figuras que se pueden construir con tales regletas, entre otras.

Adicional a lo anterior, se observa que es pertinente complementar el trabajo en el aula por medio de preguntas que contribuyan a que el estudiante realice conjeturas y conclusiones del porqué varía el área de una figura con relación a la forma como se construye ésta (posición en que está cada regleta), cómo está cambiando, de qué dependen estos cambios, etc.

De esta forma, las regletas de Cuisenaire pudieron haber sido utilizadas como mediadoras en situaciones que favorezcan el pensamiento variacional, tales como: construir relaciones, observar cambios, encontrar regularidades, detectar reglas de formación en diferentes secuencias, reconocer e identificar patrones que se repiten constantemente, con el fin de favorecer la introducción de nociones y cimientos claves en el desarrollo de este pensamiento desde los primeros grados de escolaridad.
En cuanto al pensamiento variacional, éste es descrito por el MEN (2006) como aquel que

> […] tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p. 66).

Por otra parte, se elaboraron algunas actividades y preguntas encaminadas a desarrollar y fortalecer el pensamiento variacional en los niños (ver anexo 1). A continuación, se presenta una de estas actividades (en este caso con las regletas de Cuisenaire, con el fin de mostrar que aunque éstas sean un material estático, permiten el trabajo de aspectos variacionales).

Actividad 1: Completar la siguiente tabla con todas las regletas de Cuisenaire.

Regleta	Número de unidades cúbicas	Área superficial (en unidades cuadradas)
	1	6
	2	10
	3	
		
		
…..		

Ilustración 2: Tabla actividad 1

En esta actividad, la misma construcción de la regleta, esto es, agregar una unidad cúbica a una regleta para encontrar la siguiente, da la idea intuitiva que dado un natural n, siempre se puede obtener el siguiente (n+1). Además, se puede establecer una relación de variación con respecto al área superficial dirigiendo preguntas encaminadas a identificar los cambios en el número de unidades cúbicas y los cambios en el área superficial, así:

- ✓ El número de unidades cúbicas, ¿está aumentando o disminuyendo? ¿En cuánto lo está haciendo?
- ✓ El área superficial, ¿está aumentando o disminuyendo? ¿En cuánto lo está haciendo?
- ✓ ¿En cuántas unidades cuadradas cambia el área superficial, cada vez que se le agrega un cubo a la regleta?

- ✓ ¿Cuál es el área superficial de una regleta que tenga 10 unidades cúbicas?

Así, desde lo observado en el aula de clase y el interés de esta investigación con relación al pensamiento variacional, se consideró conveniente dar cuenta de algunos elementos teóricos que sustentan -desde los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas- dicho pensamiento, con miras al desarrollo de diversas situaciones vinculadas a los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional.

En coherencia con lo mencionado, se presenta el siguiente apartado, el cual muestra algunos de los planteamientos propuestos por el MEN, en lo que respecta al pensamiento variacional.

1.2 Pensamiento variacional desde los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Desde los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares Básicos en Competencias para el área de Matemáticas (MEN, 2006) planteados por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia, se propone la iniciación del estudio de la variación desde los primeros grados de la Educación Básica, como una manera de construir caminos y cimientos para acceder comprensivamente a los conceptos propios del álgebra, del cálculo y de todas aquellas situaciones que impliquen pensar variacionalmente. Según el MEN (2006), es importante que los estudiantes al enfrentarse en grados superiores a conceptos como razón, límite, derivada, integral, variable, constante, entre otros, puedan acercarse a la comprensión de los procesos variacionales que están allí inmersos, evitando la solución de actividades y ejercicios de manera repetitiva, entendiendo lo repetitivo, como el resolver un gran número de ecuaciones, límites y derivadas, desarticuladas de cualquier contexto.

Así, el significado y sentido acerca de la variación pueden establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean referidos a fenómenos de cambio y variación. Desde esta perspectiva, se pone en evidencia la necesidad de vincular a los estudiantes con situaciones donde el estudio de fenómenos y conceptos que impliquen variación no se presente de una manera estática, sino como un conjunto de interrelaciones entre los elementos involucrados.

El MEN (1998) a través de su documento Lineamientos Curriculares, señala que las relaciones de tipo variacional promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático. Desde este punto de vista, se observa cómo el estudio de la variación toma sentido en situaciones donde las relaciones entre dos objetos (cantidades y magnitudes) se dan a partir de una dependencia y una relación de cambio, en la cual el estudiante pueda hacer conjeturas, conclusiones, afirmaciones y modelación de situaciones.

Retomando algunos de los planteamientos del MEN (2006), el desarrollo del pensamiento variacional se puede iniciar con el estudio del cambio, el cual puede darse a través del análisis de fenómenos de variación representados en gráficas y tablas, en las cuales se logre *"identificar la variación que ocurre y, en algunos casos, llegar a precisar la magnitud de los cambios y aun la tasa de cambio en relación con el tiempo"* (p.67).

Además, con el fortalecimiento de este tipo de pensamiento, se posibilita el desarrollo de los demás pensamientos: aleatorio, numérico, geométrico y métrico, debido a la relación que se puede generar entre estos.

De esta forma, se espera que el trabajo realizado en la Educación Básica Primaria, no sólo favorezca un mejor desempeño de los estudiantes en estudios posteriores en lo que respecta a la derivada y a otros conceptos propios del cálculo diferencial e integral, sino que podrá fortalecer su forma de pensar y razonar en el momento de enfrentarse a un problema de la vida cotidiana.

Es preciso entonces, entrar a detallar sobre algunas producciones de autores que a nivel local e internacional destacan la importancia y pertinencia de hacer énfasis en lo referido al pensamiento variacional, como una forma de aportar a los procesos de aprendizaje de los estudiantes tanto en la Educación Básica como en grados superiores.

1.3 Revisión de literatura

En la revisión de literatura realizada, se encontraron diferentes autores que abordan el pensamiento variacional en Educación Básica y en estudiantes que ya habían tomado un curso de cálculo, cada uno de ellos haciendo énfasis en un enfoque determinado, que en aras de sintetizar y obtener una mejor visualización, se hizo una clasificación en varios enfoques, a saber: situaciones de variación y cambio, el enfoque socioepistemológico y el enfoque funcional, que serán descritos a continuación.

1.3.1 Pensamiento variacional a partir de las situaciones de variación

Con respecto a este enfoque, Benjumea, Gallego, Miranda, Montoya y Ocampo (2007), abordan el pensamiento variacional a partir de la formulación de problemas desde la estructura aditiva, la estructura multiplicativa y la proporcionalidad directa, intentando hacer

> […] énfasis en el trabajo sobre la estructura multiplicativa teniendo en cuenta que al interior de ésta subyace un problema de variación entre dos cantidades que covarían simultáneamente y que no solo es una suma de sumandos iguales o suma reiterada, luego esto daría la posibilidad de pasar a la proporcionalidad simple directa y en grados superiores al concepto de función lineal (p. 88.)

Dentro de esta misma línea, se puede ubicar algunos materiales que evidencian el interés por el desarrollo del pensamiento variacional en Colombia, y cómo ha venido fortaleciéndose a nivel local. Entre éstos se encuentran las producciones de Posada, (ed, 2005), Posada, (2006), Henao (2007), Castaño, García, Luján, Medina, Ruiz y Trejos (2008).

Particularmente Posada (2006), establece la diferencia entre dicho pensamiento y el *razonamiento algebraico*, en donde indica que el pensamiento variacional alude más a una "*forma específica de pensar matemáticamente orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio" (p. 16)*, y el razonamiento algebraico atañe "*al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional*" (*p.16*). Es decir, el pensamiento variacional se desarrolla sobre las bases del razonamiento algebraico, que involucra elementos fundamentales de la actividad matemática como la generalización, la simbolización y la formalización.

Similarmente, Henao (2007), propone una serie de situaciones pensadas para ser abordadas desde el grado preescolar hasta el grado once, las cuales tienen como propósito brindar herramientas a los profesores de Preescolar, Básica y Media, acerca del cómo fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

Estas situaciones comprenden varios momentos, en los cuales se plantean diversas estrategias y actividades relacionadas con algunos conceptos (patrones y regularidades, ecuaciones, constantes, variables, representaciones algebraicas, entre otros) que buscan potenciar el desarrollo del pensamiento variacional.

En lo referido al trabajo realizado por Posada (ed, 2005), se rescata el esfuerzo de La Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, con la cooperación de la Universidad de Antioquia y la Red de Mesas de Matemáticas por promover acciones encaminadas a la transformación de las prácticas pedagógicas de los profesores y así, brindar elementos encaminados a mejorar la calidad de la educación matemática en los jóvenes. En el desarrollo de esta producción, se presentan propuestas de reconceptualización, interpretación e implementación del proceso de enseñanza y aprendizaje en los cinco pensamientos, articulado a lo planteado en los Lineamientos y Estándares Curriculares.

En cuanto al pensamiento variacional, los autores con base en una interpretación de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, dan a conocer una reorganización de éstos a través de una estructura conceptual. Esta estructura está dividida en tres ejes conceptuales: patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones que en sí recogen los estándares para cada grupo de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9 y 10 a 11).

Finalmente, Posada y sus cooperadores (2005), ilustran cómo se podría hacer la planeación curricular del área de matemáticas. Para esto, presentan tres situaciones problema –a modo de ejemplo-con diferentes niveles de dificultad de acuerdo al grupo de grados en los cuales se van a implementar y que permiten encontrar relaciones con algunos estándares propios del pensamiento variacional, así como con aquellos que hacen parte de los otros tipos de pensamiento.

En la tesis realizada por Castaño, García, Luján, Medina, Ruiz y Trejos (2008) se plantea trabajar desde los primeros grados de escolaridad situaciones problema que permitan que el estudiante relacione los saberes matemáticos con su vida cotidiana. Además, se busca que los problemas propuestos se desarrollen a partir de un proceso de análisis, más allá de la mecanización y memorización de fórmulas.

De esta manera se pretende que el estudiante pueda reconocer elementos tales como: "*procesos de cambio, conceptos de variable, el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio, relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas, modelos matemáticos*" (Castaño et al. 2008, p. 24) los cuales contribuirán a comprender conocimientos de otras áreas del conocimiento con el objetivo de que haya un aprendizaje interdisciplinar.

También se expone que el pensamiento variacional es el que "*le da sentido a las funciones numéricas para manejarlas en forma flexible y creativa, y poder así entender y modelar situaciones de cambio con el propósito de analizarlas y transformarlas*" (Castaño et al. 2008, p. 24).

Bajo este mismo enfoque, Castaño y sus colegas, toman como línea de trabajo los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas que Gerard Vergnaud aborda en su teoría del aprendizaje de las matemáticas. Se propone que las estructuras multiplicativas pueden ser analizadas a la luz del concepto proporción simple o múltiple, donde se requiere por lo general el uso de una división, multiplicación o la combinación de ambas operaciones, donde de igual forma, se pueden trabajar conceptos como el de función lineal, multiplicación, razón, tasa y demás conceptos estructurantes que se relacionan con el pensamiento variacional.

1.3.2 Enfoque socioepistemológico

En lo que concierne a este enfoque, se encuentran las producciones escritas de Cantoral y Farfán (1998), quienes realizan un estudio de la variación y el cambio bajo un programa llamado *el pensamiento y lenguaje variacional*. Este programa busca realizar conexiones entre *"la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos*" (p. 4).

Dicho programa de investigación, está fundamentado en la socioepistemología, entendiendo ésta como:

> Una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004, p. 1).

Cantoral (2004), menciona que esta mirada es reciente y "*revolucionaria*", puesto que generó "*una verdadera ruptura al plantearse una descentración del objeto de estudio como prerrequisito de la acción teórica" (p. 2).* Este autor, cuestiona las tradiciones formalistas y constructivistas, en las que prevalece la enseñanza de una serie de conocimientos matemáticos, más no el proporcionar herramientas a los estudiantes para entender mejor las matemáticas ni el cómo las puede usar en su vida diaria.

En ese sentido, Cantoral propone el estudio de la variación desde "*el uso social y la funcionalidad asociada"* (2004, p. 7). De igual forma, indica que el pensamiento y lenguaje variacional, "*estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social*" (2004, p. 8).

Este mismo autor, también ha producido otros textos junto con otros compañeros como Luis Cabrera Chim (El pensamiento y lenguaje variacional como eje para el desarrollo de competencias. Estudio socioepistemológico en el marco de la RIEMS) y Rosa María Farfán en *Matemática Educativa: una visión de su evolución*.

Dentro de este mismo enfoque socioepistemológico, se destaca también, otro artículo producido por Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006), en el cual se discute la noción de práctica social en la construcción del conocimiento matemático y cómo se articula con procesos de representación.

Este artículo centra su atención en prácticas más que en objetos. Dentro de los ejemplos planteados se resalta el propuesto a un grupo de estudiantes para localizar puntos en el plano que pertenecen a la gráfica de la función 2^x. En esta actividad, se observó mediante un dibujo, que los estudiantes ya tenían una noción acerca de la representación gráfica de dicha función y asociaban a la expresión 2^x diferentes valores a la *x.*

Los autores plantean que la realización de una gráfica con gran exactitud, no garantiza una comprensión de la trama interna de la misma y de lo que la función en sí involucra, [...] "*es hasta que se agregue una acción, una práctica concreta, proveniente del cúmulo de experiencias de los alumnos durante su vida*" (p. 88), lo que inicialmente permite comprender la naturaleza del crecimiento de la función.

De acuerdo a lo anterior, se evidencia la naturaleza del enfoque socioepistemológico abordado por Cantoral y sus colegas, en el que hacen hincapié en las prácticas sociales y culturales que subyacen en la construcción del conocimiento matemático y en el estudio de la variación.

1.3.3 Enfoque funcional

Desde el enfoque funcional, Camargo, Guzmán, (2005), desarrollan una propuesta didáctica, producto de una investigación inspirada en un vacío curricular en el área de matemáticas de la Educación Básica Secundaria Colombiana. Dicho vacío hace referencia al aspecto variacional que se encuentra implícito en el concepto de pendiente, y proponen un tratamiento de ésta, como una relación entre las variables relacionadas, de una manera dinámica, que vaya más allá del trabajo geométrico y algebraico, en el que los estudiantes puedan analizar la relación de dependencia entre los cambios de una variable con respecto a los cambios de otra variable, esto es, ver la pendiente como la expresión de una razón de cambio.

De esta manera, proponen hacer un acercamiento conceptual de la pendiente desde un *perfil funcional*, definido por Azcárate (citado en Camargo y Guzmán, 2005), como aquel que se da "*cuando la pendiente se conceptualiza como una razón constante de incrementos entre variables" (p. 16*).

Además, estas autoras afirman que desde esta mirada del concepto de pendiente, se contribuye al estudio de fenómenos de variación y cambio, así como a la aprehensión -en grados más avanzados- de los conceptos del cálculo y su aplicación comprensiva en la resolución de problemas de velocidad instantánea y rapidez de cambio, entre otros.

Como resultado de este proyecto de investigación, las autoras brindan elementos claves a aquellos interesados en investigar sobre la metodología de la ingeniería didáctica y, para los que están relacionados con el trabajo de aula, presentan tres situaciones problema encaminadas a que los docentes mejoren su práctica, brindándoles a sus estudiantes un ambiente más dinámico, en el cual sean partícipes en la construcción de su conocimiento.

En esta misma línea, se ubica el trabajo investigativo realizado por Botero (2006), en el que la autora toma algunos elementos propuestos por Gerard Vergnaud, según el cual, dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas se encuentran todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples, las cuales involucran conceptos como el de función lineal, función no lineal, fracción, razón, tasa, multiplicación y división, entre otros.

Lo anterior, es desarrollado por la autora a través de situaciones de proporcionalidad, que buscan la enseñanza de los conceptos relacionados con el pensamiento multiplicativo, a través del análisis por parte de los estudiantes de la relación proporcional que implica un problema de multiplicación, más allá de que el alumno realice solo la adición repetitiva de una cantidad.

Además, dentro de la investigación se esboza cómo en muchas ocasiones los problemas de proporción son trabajados en la escuela con poca profundidad, pues su estudio se limita al estudio de la denominada regla de tres, desde una perspectiva en la cual, en palabras de la autora, sólo se determina un valor desconocido dados tres valores conocidos, y no se aborda a partir de un análisis funcional, centrado en el análisis de la variación entre magnitudes, en el que dicha regla adquiere sentido y significado.

Dentro de este mismo enfoque, Dolores y Salgado (2009), presentan un método de graficación covariacional de funciones, a partir de una crítica hecha a los métodos de graficación tradicionales (tabulación), en donde muestran que dichos métodos se basan en el trazado de la gráfica de una función de acuerdo a un conjunto de puntos; dejan en un segundo plano la correlación causal entre las variables; no enfatizan la naturaleza de lo que cambia; se representan las x y las y como entes abstractos, y los valores que adquieren, dependen del arbitrio del profesor; se usa fundamentalmente la fórmula de la función para calcular las coordenadas de los puntos; sólo se unen puntos consecutivos sin cuestionarse sobre su significado variacional y por último, no se discute el cómo y cuánto cambian las variables.

Teniendo en cuenta estos análisis, los autores proponen este método de graficación que retoma elementos determinantes para la comprensión y análisis de gráficas de funciones y su respectivo comportamiento como: la representación de los cambios de cada variable, la correlación entre cambios de las variables, el comportamiento de la variación en razón de magnitud y dirección y las razones entre los cambios. Así pues, el elemento central de la graficación covariacional es el cambio y no sólo el ubicar puntos en el plano cartesiano.

En ese sentido, Dolores y Salgado (2009), fundamentan su propuesta bajo tres elementos teóricos: el pensamiento y lenguaje variacional de Cantoral y Farfán (2000), las acciones mentales y niveles del razonamiento covariacional presentado por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003) y por último, la idea leibniziana de curva definida por L’Hospital (1696), para definir la graficación covariacional como “*las actividades de representación gráfica en las que se involucra la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo a las formas en que cambia una con respecto a la otra”.(p. 66).*

En esta misma línea, Carlson et al. (2003) desarrollan la noción de *razonamiento covariacional* a partir de un estudio realizado con estudiantes sobresalientes de segundo semestre de cálculo. Carlson, et al. (2003) expresan que se hace necesario desarrollar en los educandos la habilidad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable, para comprender los conceptos principales del cálculo. También, enfatizan la importancia de fortalecer tal razonamiento, debido a que una de las dificultades para comprender tanto el concepto de límite como el teorema fundamental del cálculo, se presenta por la ausencia o poco tratamiento de habilidades propias del razonamiento covariacional.

En su investigación, Carlson et al (2003) definen el razonamiento covariacional como “*las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*” (p. 124), y desarrollan un marco conceptual compuesto por cinco acciones mentales con sus respectivos comportamientos y cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional. Este marco de la covariación, proporciona una herramienta para evaluar, clasificar y describir las habilidades generales de razonamiento covariacional que presenta un estudiante en el contexto de un problema o tarea específica de tipo covariacional.

Por su parte, Johnson (2012) realizó una investigación con estudiantes de secundaria antes de que iniciaran sus estudios de cálculo. Este estudio tenía como objetivo identificar cómo los estudiantes podían razonar acerca de cantidades involucradas en una razón de cambio constante y variante. Para la identificación de estos razonamientos se implementaron un conjunto de tareas, que involucraban situaciones de covariación en diferentes sistemas de representación (tablas de valores, representación gráfica cartesiana dinámica, representación gráfica cartesiana estática, etc.).

Dentro de este trabajo, Johnson, se fundamenta en algunos de los planteamientos de Thompson (1993, 1994a, 1994b), Piaget (1970, 1980), Clement (1989), Confrey y Smith (1994), Carlson et al. (2002), entre otros; a partir de los cuales presenta los siguientes referentes conceptuales: cantidad y razonamiento cuantitativo relacionado con la razón de cambio, perspectivas estáticas y dinámicas de la covariación, covariación y función, razonamiento covariacional y razonamiento transformacional.

Algunos de los resultados de este estudio, evidenciaron cómo los razonamientos de los estudiantes mostraron una comprensión de la covariación de cantidades involucradas en la razón de cambio de forma numérica y no numérica.

Además, una de las grandes contribuciones de este estudio está referida al hecho de que los estudiantes de secundaria (sin haber tenido una instrucción formal del cálculo) pueden construir una noción de la razón de cambio como una tercera cantidad que surge de la comparación de los cambios en dos cantidades que covarían.

A continuación se presenta un cuadro para ilustrar la revisión de literatura:

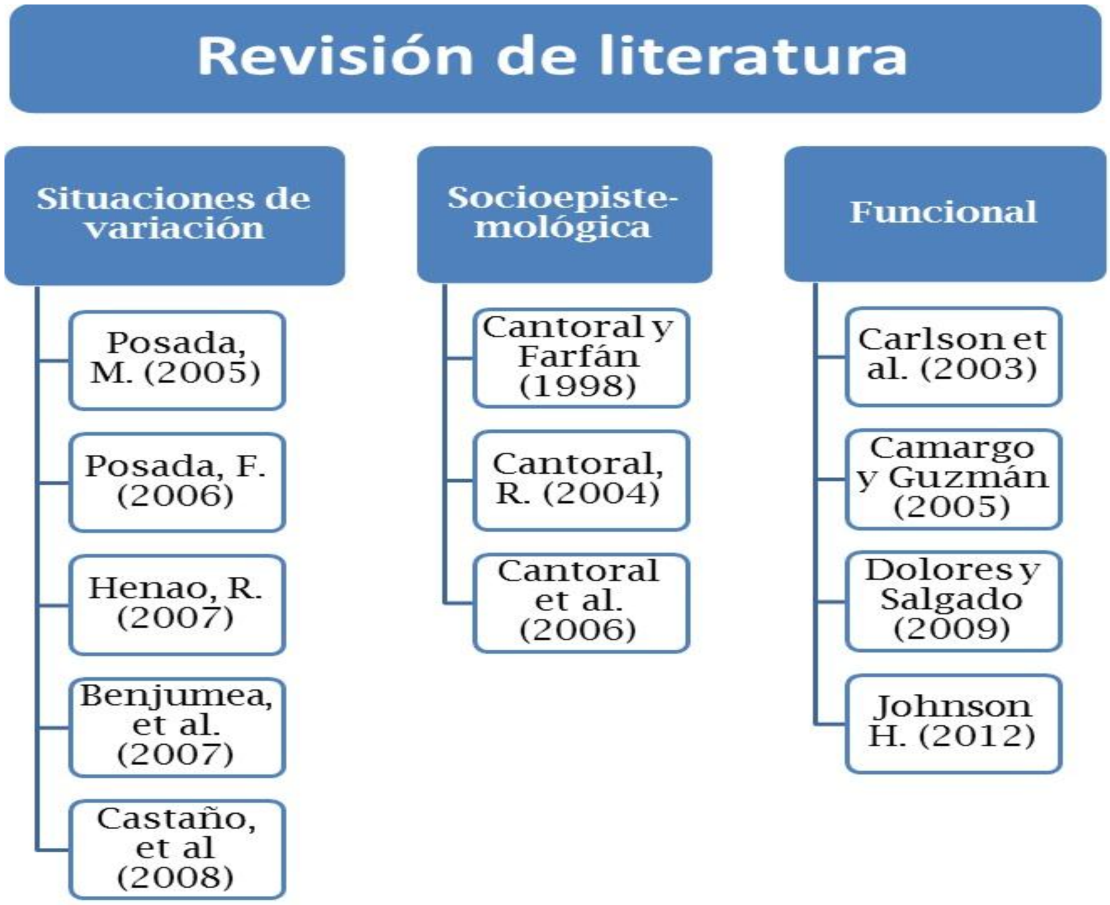


Ilustración 3: Enfoques revisión de literatura

Así, después de hacer una revisión de las producciones anteriormente descritas y con el firme convencimiento de trabajar la covariación entre cantidades, se puede constatar que la mayoría de éstas, se han centrado en realizar estudios en secundaria o en estudiantes que ya han recibido un estudio de cálculo. En ese sentido, esta investigación aporta a la investigación en matemática en tanto está centrada en identificar las características del razonamiento covariacional desde los primeros grados de escolaridad, a partir de actividades encaminadas a fortalecer y desarrollar el pensamiento variacional.

Finalmente, en ese ir y venir entre las prácticas profesionales y la revisión de literatura realizada hasta el momento, surgieron muchos interrogantes; sin embargo, hubo un elemento que atrajo mayor interés, inspirador de esta investigación y que se indica en el siguiente apartado.

1.4 Planteamiento del problema

De acuerdo a lo observado en el aula de clases y algunas producciones teóricas formuladas a nivel nacional e internacional, en las que se destacan las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional y el marco conceptual planteado por Carlson y sus colegas (2003), como también Johnson (2012), se pretende llevar a cabo una propuesta encaminada a brindar elementos que aporten al desarrollo del pensamiento variacional a partir de los razonamientos de los niños; por lo tanto, se planteó la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son algunas características del razonamiento covariacional en niños de grado quinto de la I.E. República de Uruguay?

1.5 Objetivos

- Identificar algunos comportamientos que caracterizan el razonamiento covariacional en niños de grado quinto de la IE República de Uruguay a través de situaciones que impliquen fenómenos de cambio, con el fin de fortalecer y desarrollar el pensamiento variacional.

- Identificar las diferentes maneras en que los estudiantes reconocen algunos significados de la razón de cambio como un elemento que aporta al entendimiento de cómo covarían las magnitudes.

Capítulo 2

2. COVARIACIÓN Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL COMO REFERENTES TEÓRICOS

Conforme se ha venido mencionando en los capítulos anteriores, esta investigación está centrada en identificar las características del razonamiento covariacional en estudiantes de grado quinto, cuando se enfrentan a situaciones que permiten la covariación de cantidades, como una manera de aportar elementos al desarrollo del pensamiento variacional. Este interés, llevó a los investigadores a ahondar un poco en los trabajos que se han realizado en lo referido a la variación, que aunque es un término asociado al cambio, amerita un estudio particular con el ánimo de entender un poco lo que todo este proceso conlleva.

Inicialmente, se presentan los referentes teóricos referidos al desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros grados de escolaridad, sugerido por los documentos oficiales del MEN; luego, se realiza una descripción de algunos de los marcos teóricos que han desarrollado la covariación y el razonamiento covariacional, centrando la atención en lo planteado por Carlson et al. (2003) y Johnson (2012). Finalmente, se presentan algunos trabajos en los cuales se han aplicado el marco conceptual de Carlson y sus colaboradores, con miras a fortalecer la mirada funcional de las representaciones tabulares, gráficas, entre otras.

2.1 El pensamiento variacional

Conforme se mencionó en el capítulo anterior, el pensamiento variacional ha sido tema de discusión y estudio por diferentes autores e investigadores. Una prueba de ello, son los documentos oficiales del MEN (1998, 2006) en los que se deja plasmado que

> […] uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos

> significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (2006, p. 66).

De esta manera, se hace necesario el desarrollar estrategias desde los primeros grados de escolaridad, encaminadas a potenciar dicho pensamiento puesto que es una manera de desarrollar habilidades en pro de aportar a la apropiación de conceptos propios del álgebra y del cálculo en grados superiores.

Por otra parte, respecto al pensamiento variacional, Vasco (2006) señala que es:

> Una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

En esta descripción brindada por Vasco, se presenta lo que significa el adjetivo variacional y no lo que es pensamiento en sí mismo, esto es, todas aquellas actividades cognitivas que implican pensar variacionalmente. De igual manera, se deja ver la implicación que tiene la variación en la covariación, ante lo cual este mismo autor menciona:

> El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (2003, p. 68).

De esta manera, se observa que la idea de Vasco está centrada en una covariación entre magnitudes, lo que de una u otra forma articula el pensamiento variacional con la modelación matemática, proceso considerado *fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional* (Posada, Villa-Ochoa. 2006, p. 86).

Tanto en Vasco (2006) como en el MEN (2006) aparece el término "*covariación*" refiriéndose a la importancia de *co-relacionar* las cantidades de magnitudes presentes en un determinado fenómeno; es decir, en el estudio de una situación particular en el que están presentes diferentes cantidades de magnitudes es importante analizar las variaciones de una de ellas con respecto a variaciones de la otra, con el fin de comprender y ver de una manera más dinámica el fenómeno estudiado.

Vasco (2009, p.70) en un trabajo posterior, deja claro la diferencia entre *variación* y *covariación*, diciendo: "una *cosa es una cantidad variable en el tiempo; otra cosa es una cantidad que varía si varía otra (sería mejor llamarlas "covariables", o mejor todavía "variables covariantes")"*

De esta manera, se habla de variación cuando se evidencian cambios en cierta magnitud sin atender a otros actores de los cuales pueda depender a medida que transcurre el tiempo, sin hacer una comparación con otra cantidad variable. Y se entiende por covariación al análisis de los cambios de una magnitud que varía con respecto a los cambios en otra magnitud. En el siguiente apartado se presenta de manera más detallada en qué consiste la covariación y cómo ha sido abordada por los autores que la han trabajado:

2.2 La Covariación

Los referentes principales que contribuyen a la comprensión de la noción de covariación están centrados en el trabajo de Saldanha y Thompson (1998, citado en Carlson, et al. 2003), quienes describen la covariación como *"mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)"* (p.123). Esto es, ser capaz de advertir los cambios de una cantidad con respecto a otra y formar una sola imagen en la cual estos dos valores persisten en el tiempo. Desde esta perspectiva, se observa cómo la noción de *imagen* cobra gran importancia al momento de formar una idea de covariación, pero no desde algo estático, quieto, sino desde una visión dinámica a través de la cual se ponen de manifiesto las operaciones mentales que realiza un individuo.

Thompson (1994, citado en Carlson et al., 2003), describe el concepto de *imagen* como: *"dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales"(124),* y que de acuerdo a Vinner y Dreyfus (1989, citado en Carlson et al., 2003) tiene que ver con todas aquellas representaciones visuales, cuadros mentales, experiencias propiedades e impresiones que un individuo relaciona con el nombre de un concepto. De acuerdo a esta definición, la imagen es concebida como una representación de los procesos mentales que ocurren al interior de la mente de un individuo y se convierte en la única manera de exteriorizar los pensamientos y razonamientos de alguien frente a una situación cualquiera.

Un elemento central en el desarrollo de la comprensión de la covariación es la construcción de una imagen de los cambios que ocurren de manera simultánea en dos cantidades. De acuerdo con Carlson, y sus colegas (2003) la comprensión de la covariación es un proceso que se desarrolla y tal desarrollo, pasa de la coordinación de dos cantidades a las imágenes de la coordinación continua de ambas cantidades para un lapso determinado. De esta manera, el proceso de comprensión de la covariación implica inicialmente, la *coordinación* de dos valores de cantidades, es decir, primero pensar en los valores de una cantidad, luego en los valores de la otra; posteriormente, relacionar cómo cambios en una cantidad producen cambios en otra y finalmente, formarse una sola imagen de los cambios continuos y simultáneos que ocurren en las dos cantidades.

En esta misma línea, Confrey y Smith (1994, citado por Johnson, 2012) provee dos perspectivas de covariación, las cuales reflejan las distintas maneras en que un individuo puede percibir una relación entre cantidades covariantes involucradas en una situación dada, que serán detalladas a continuación:

2.2.1 Covariación estática

De acuerdo a Confrey y Smith (1989, citado en Johnson 2012), la covariación puede ser percibida como *estática* cuando la covariación involucra la coordinación del movimiento entre valores sucesivos en una cantidad, con el movimiento entre valores asociados en otra cantidad. Para dar mayor claridad sobre esta perspectiva, (Johnson, 2012, traducción de los autores) presentan el siguiente ejemplo: "*Cuando la longitud del lado de un cuadrado se mueve de 2cm a 3cm, el área del cuadrado se movió de 4cm² a 9 cm²" (p. 315).*Esto es, advertir que cuando una cantidad se mueve de un valor a otro, la otra cantidad también se mueve de un valor a otro, manteniendo asociados dichos movimientos entre las cantidades involucradas.

2.2.2 Covariación dinámica

Clement (1989, citado por Johnson, 2012, traducción de los autores) menciona que este tipo de covariación ocurre cuando cambios en una cantidad son asociados con cambios en otra cantidad.; y las clasifica en *covariación dinámica discreta* y *covariación dinámica continua.* Una perspectiva *dinámica discreta* de *covariación, "involucra la coordinación de aumentos particulares de cambio en una cantidad con aumentos particulares de cambio en otra cantidad*" Johnson (2012, traducción de los autores), y presenta el siguiente ejemplo para brindar una mayor claridad: "*Cuando la longitud del lado de un cuadrado se incrementa en 1cm², el área del cuadrado se incrementa en 2cm²*" (p.315).

Por otro lado, la perspectiva *dinámica continua* de *covariación*, involucra la coordinación de los cambios continuos en una cantidad, con los cambios continuos en otra cantidad. Para proveer una mejor comprensión de este tipo de covariación, Johnson, (2012, traducción de los autores), la ejemplifica así: "*Como la longitud del lado de un cuadrado incrementa continuamente, el incremento en el área del cuadrado incrementa a una razón constante*" (p. 315).

En ese orden de ideas, se puede afirmar que la covariación dinámica discreta ocurre entre datos discretos y la dinámica continua entre datos continuos.

2.3 Razonamiento covariacional

Según lo presentado en el primer capítulo de este documento, el razonamiento covariacional, está definido como *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra."(*Carlson, et al. 2003, p.124) Estos autores, desarrollan un marco conceptual compuesto por cinco acciones mentales con sus respectivos comportamientos y cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional. Este marco de la covariación, proporciona una herramienta para evaluar, clasificar y describir las habilidades generales de razonamiento covariacional que presenta un estudiante en el contexto de un problema o tarea específica de tipo covariacional.

2.3.1 Las Acciones mentales

Son imágenes de la covariación que proveen un medio para clasificar los comportamientos que un estudiante o individuo exhibe en el momento de enfrentarse a tareas que implican covariación. De acuerdo a esto, un estudiante que presenta determinado comportamiento debe acompañarlo de una acción específica que dé cuenta de la comprensión necesaria para desempeñar tal comportamiento. La siguiente tabla describe las acciones mentales acompañadas de los comportamientos respectivos:

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Ilustración 4: Acciones mentales del marco conceptual para la covariación (Carlson et al 2003, pág. 128).

2.3.2 Los niveles

Los niveles del razonamiento covariacional, describen el desarrollo, la habilidad o madurez del razonamiento covariacional como tal, y permiten clasificar la imagen global que sustenta a las varias acciones mentales que un individuo exhibe en el contexto de un problema o tarea. De esta manera, para que un estudiante sea clasificado en determinado nivel, debe dar cuenta de la acción mental implicada en ese nivel y de las acciones mentales de los niveles que le preceden.

En la siguiente tabla se describen los cinco niveles del razonamiento covariacional:

Niveles del razonamiento covariacional El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea
En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Ilustración 5: Marco conceptual para los niveles de la covariación (Carlson et al 2003, pág. 129).

2.4 Algunas aplicaciones del marco conceptual

Se han encontrado estudios recientes en los cuales diversos investigadores, han implementado el marco conceptual desarrollado por Carlson et al. (2003) para identificar el razonamiento implementado por algunos individuos en el momento de enfrentarse a situaciones y problemas que involucren las funciones y otros conceptos propios del cálculo.

Entre estos estudios, se encuentra el trabajo de Strom (2006) en el cual se realiza un estudio con 25 profesores de ciencias, experimentados y destacados por su saber, con el objetivo de identificar cómo estaban razonando covariacionalmente de acuerdo al modelo teórico de Carlson, cuando eran involucrados en tareas que representaban situaciones de la vida cotidiana, de las ciencias y las matemáticas, en las cuales estaba inmersa la función exponencial.

Al final del estudio, Strom observa que los maestros no usan el análisis covariacional como herramienta para comprender las funciones exponenciales y, por tanto, la ejecución de las tareas asignadas se remite a la presentación de la solución en términos algebraicos o a través de gráficas, sin el respectivo análisis de lo que estos dos sistemas de representación dicen del problema.

Por tanto, Strom, considera que se debe generar en el aula escolar

> […] la construcción de una capacidad de covariación multidireccional (por ejemplo, interpretar gráficos de derecha a izquierda, así como de izquierda a derecha), donde los profesores y los estudiantes pueden describir el comportamiento de la función cuando x aumenta y cuando x disminuye, podría proporcionar un mecanismo poderoso para aumentar la capacidad de razonar a través del comportamiento de la función exponencial (2006, traducción de los autores, p. 630).

Así mismo, menciona la importancia de promulgar una enseñanza de las funciones exponenciales desde un enfoque mucho más centrado en el análisis covariacional en el que se tenga en cuenta la coordinación de los cambios de las dos cantidades involucradas, como una herramienta clave en la comprensión de la complejidad y comportamiento de este tipo de funciones.

Por su parte, Dolores, y Salgado (2009) basados en el marco conceptual de Carlson y sus colaboradores (2003), desarrollan una propuesta para la graficación de funciones, denominada graficación covariacional. En esta propuesta realizan una crítica al método tradicional de graficación de funciones, donde indican que dicha técnica se fundamenta en definir qué es una función, hacer una tabla con un conjunto de parejas ordenadas, y seguidamente, ubicarlas en el plano cartesiano.

Dolores, y Salgado (2009), mencionan que la variación está ligada al proceso de medición del cambio, y es por medio de la graficación covariacional que se pueden representar dichos cambios. Los autores señalan que en este método de graficación predomina la comprensión de lo que sucede entre los puntos, la construcción de la gráfica de la función y el análisis del comportamiento variacional, en el que prevalece cuestionamientos como: ¿Qué cambia? ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia? ¿A qué razón cambia? y ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?

Por otro lado, Villa-Ochoa (2011, 2012) realiza un estudio en el cual buscó describir la manera como los estudiantes razonan al momento de abordar situaciones de variación asociadas a la función cuadrática. Para esto, el autor se basa en el marco conceptual propuesto por Carlson et al., con el fin de identificar los comportamientos y niveles del razonamiento covariacional.

En dicho estudio encontró que el estudiante no puede ser clasificado en el nivel 5 por no haber desarrollado el concepto de tasa de cambio instantánea. Además, identificó que el estudiante puede establecer una relación inversa entre la tasa de variación y la función, aspecto que no se encuentra descrito en el marco conceptual de Carlson y sus colegas.

Ante esto, Villa-Ochoa sugiere la existencia de otro posible nivel previo a la comprensión de la tasa de variación instantánea y por lo tanto, recomienda un estudio más profundo de las acciones mentales que describen la relación entre la tasa de variación y la concavidad de la gráfica. Este autor también menciona que en pocas ocasiones en el aula de clase se inicia un estudio de la función cuadrática desde una mirada covariacional.

Como se pudo evidenciar, ha habido un mayor interés en los diferentes trabajos por abordar el marco conceptual del razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al (2003) con estudiantes de secundaria y de universidad; en ese sentido, esta investigación es pertinente puesto que pretende aportar elementos que contribuyan al desarrollo del razonamiento covariacional desde los primeros grados de escolaridad.

Capítulo 3

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En la investigación científica han surgido fundamentalmente dos paradigmas o enfoques que la direccionan: el cualitativo y el cuantitativo. Aunque también existe un tercer enfoque denominado mixto, el cual se compone de los dos anteriores. “La investigación científica se concibe como un conjunto de procesos sistemáticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno (Hernández, Fernández y Baptista (2006, p. xxxix).

En ese sentido, en la primera parte de este capítulo se detallan las razones por las cuales se eligió un enfoque tipo cualitativo, desde las orientaciones de Hernández, Fernández, y Baptista (2006). En la segunda parte se presenta el estudio de casos como método de estudio abordado desde los planteamientos de Stake (2007). Y por último, se presenta lo concerniente al diseño, los alcances y limitaciones de la investigación.

3.1 El enfoque metodológico

De acuerdo a lo expresado en los capítulos anteriores acerca de los inicios del estudio de la variación en los primeros grados de la educación básica y lo relacionado al razonamiento covariacional, surgió la necesidad de ahondar en las características de tal razonamiento en estudiantes de grado quinto. Ello implicó observarlos, colocando especial atención a las maneras como los estudiantes razonaron al momento de enfrentarse a una situación que permitiera establecer relaciones entre magnitudes cambiantes. Por tal razón, se asumió un enfoque de tipo cualitativo, ya que según Bogdan y Biklen (1994), la investigación desde un abordaje cualitativo implica:

- Que la fuente directa de datos sea el ambiente natural;
- Que la investigación tenga un fuerte componente descriptivo;
- Que los investigadores se preocupen más por los procesos que por los resultados;
- Una tendencia a analizar los datos de forma inductiva;
- Y el significado se convierte en un elemento de importancia capital dentro de la investigación.

Así mismo, en palabras de Hernández, Fernández, y Baptista, "*la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas*" (2006, p. 21). Además definen este enfoque, como

> […] Un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia a los objetos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en términos de los significados que las personas les otorguen) (p. 9).

En este sentido, esta interpretación requirió de un proceso de observación, interacción entre los diferentes actores involucrados en el acto educativo, así como de la descripción y análisis de las observaciones y recolección de los datos, confrontados con los referentes teóricos que sustentan el presente trabajo.

Un aspecto clave que se tuvo en cuenta en el momento de elegir la metodología fue la coherencia con el problema y los objetivos, ya que la pregunta que convocó este trabajo fue: ¿Cuáles son algunas características del razonamiento covariacional en estudiantes de grado quinto de la IE República de Uruguay? Esta pregunta se concibió desde una perspectiva abierta, libre y flexible, a todo aquello que pudiera emerger –del contacto entre estudiantes, maestro cooperador e investigadores frente a situaciones de variación que permitieran identificar las características de dicho razonamiento– a medida que se iba nutriendo de las observaciones, los datos obtenidos de las experiencias con los estudiantes, así como de la interpretación que se hizo de éstos. Hernández et al. (2006), al respecto señalan:

> […] el proceso de indagación es flexible y se mueve entre los eventos y su interpretación, entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. Su propósito consiste en "reconstruir" la realidad, tal como la observan los actores de un sistema social previamente definido (p. 9).

En ese orden de ideas, un primer elemento que se observó en el proceso investigativo con relación al enfoque cualitativo alude a la pregunta problematizadora y objetivos a alcanzar, dado que estuvieron mediados por la participación activa de los investigadores y docente cooperador, por los estudiantes involucrados en el proceso de intervención pedagógica y los demás agentes educativos, como los padres de familia, amigos y la comunidad. Según Hernández et al. (2006, p. 14), "*el investigador comienza a aprender por observación y descripciones de los participantes y concibe formas para registrar los datos que van refinándose conforme avanza la investigación*".

Es pertinente mencionar que tanto investigadores como estudiantes mantuvieron una relación de constante interacción, diálogo, construcción compartida y participación, en la que prevalecieron las experiencias individuales y grupales de los estudiantes frente a diferentes actividades que implicaban razonamiento covariacional, y ante las cuales los investigadores estuvieron atentos.

Cabe señalar la importancia que tuvo para los investigadores, el inferir algunas conclusiones temporales que en el desarrollo de la investigación se modificaron, a partir de las actitudes, respuestas, comportamientos y registros constantes de cada acontecer en el aula, relacionadas con la manera de pensar y razonar de los estudiantes; así como la forma en que éstos justificaron, argumentaron o dieron cuenta de sus procedimientos y soluciones frente a determinado problema o situación.

De esta manera, se consideró el estudio de casos como el método que más se ajustaba a las necesidades y requerimientos del problema de investigación. A continuación, y con la firme intención de ahondar un poco sobre este método, se presenta en el siguiente apartado algunas de las características que fueron cruciales al momento de hacer dicha elección.

3.2 Método

Esta investigación pretendió identificar la manera como los estudiantes razonaron covariacionalmente en el momento de enfrentarse a tareas que implicaran fenómenos de variación, a partir de un proceso de observación, descripción, interpretación y análisis.

Para dar cuenta de los procesos mencionados fue necesaria la inmersión en el campo por parte de los investigadores, de manera que pudieran realizar un estudio detallado de las características del razonamiento covariacional en los estudiantes que hicieron parte de la investigación. Dicho estudio implicó, además de la observación y descripción, una interpretación de cada uno de los datos recolectados, entre los cuales se puede mencionar las formas de razonar, procedimientos realizados, y en sí, la información percibida en cada uno de los estudiantes. Al respecto Stake (2007) menciona:

> […] destacamos la presencia de un intérprete en el campo para que observe el desarrollo del caso, alguien que recoja con objetividad todo lo que está ocurriendo, y que a la vez examine su significado y reoriente la observación para precisar o sustanciar esos significados (p. 21).

Por consiguiente, se optó por el estudio de casos como método de investigación, el cual se fundamentó bajo la perspectiva de Stake, quien lo define como *"el estudio de la particularidad y de la complejidad de un* *caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes"* (2007, p. 11). La particularidad se refiere a la unicidad del caso, a lo distintivo, que lo hace único e importante, que sólo puede ser entendido por las personas cercanas a él y que lo diferencia de los otros casos. Por su parte, la complejidad alude a todo el entramado de interrelaciones personales y sociales que ocurren en determinado espacio y tiempo y que afectan de manera significativa el contexto en el cual tiene lugar el caso.

En esta misma línea y parafraseando a Hernández y sus colegas (2006), un estudio de caso es precisamente el análisis o el mismo estudio de un caso particular, sobre el cual se desea determinar y precisar características, pero con profundidad, buscando calidad en las interpretaciones, debido a que no se pretende generalizar atendiendo a criterios estadísticos.

Así, la investigación se inclinó por un estudio de casos sin buscar explicaciones de tipo causa-efecto frente a diversos acontecimientos relacionados ya sea con la enseñanza o con el aprendizaje, sino por el contrario, la investigación se centró en la comprensión de un fenómeno propio de las matemáticas escolares, buscando identificar las características del razonamiento covariacional en un determinado momento, un determinado grupo.

Además, se decidió elegir un total de cuatro estudiantes, estableciendo al razonamiento de cada uno como unidad de análisis. Cada caso fue un instrumento para aprender sobre las formas de razonar covariacionalmente de los estudiantes de este grado. Se escogieron varios casos articulados, porque se asumió que entendiendo mejor la particularidad (singularidad) de cada caso sobre una colección de casos y coordinando los análisis realizados en cada uno de ellos, se podría obtener una mayor riqueza en los datos y una mejor comprensión del fenómeno estudiado.

Los planteamientos anteriormente presentados permiten clasificar este estudio como de tipo *instrumental colectivo;* ya que según Stake (2007) un estudio de caso instrumental pretende comprender determinado fenómeno más allá del sujeto en sí mismo, es decir, éste representa para los investigadores un papel secundario, su interés radica en que es un *instrumento* o un *facilitador* en el propósito de avanzar en el entendimiento de otros intereses. Y es colectivo, porque se considera oportuna la elección de varios casos articulados y coordinados, en pro de obtener mejores resultados a niveles más amplios.

En el siguiente apartado se presenta el diseño que guió todo el desarrollo del trabajo de investigación, referido al contexto en que tuvo lugar el estudio, la selección de los participantes, las fuentes de recolección de datos, así como los criterios a tener en cuenta en el momento de interpretar y analizar la información obtenida.

3.3 El diseño

El diseño del estudio de casos debe tener un hilo articulador que lo amarre y le dé coherencia, de tal forma que éste pueda cobrar pertinencia en la recolección de datos y exprese de forma ordenada y concisa las interpretaciones realizadas al analizar los diferentes casos, frente a lo cual Stake (2007) indica:

> El diseño de toda investigación requiere una organización conceptual, ideas que expresen la comprensión que se necesita, puentes conceptuales que arranquen de lo que ya se conoce, estructuras cognitivas que guíen la recogida de datos, y esquemas para presentar las interpretaciones a otras personas (p.25).

En ese sentido, el desarrollo de esta investigación está guiado en las orientaciones presentadas por Stake (2007) en cuanto a las etapas que la conforman, que a continuación se definirán:

1. Etapa a priori.
2. Definición y acceso al contexto.
3. Fuentes de recolección de datos: entrevistas, documentos, sesiones de clase, diarios de campo.
4. Inmersión en el campo: dividida en dos fases
5. Análisis e interpretación de los datos: categorización emergente.
6. Validez y credibilidad de la investigación.

3.3.1 Etapa a priori

Esta etapa tiene que ver con cuatro momentos que dieron origen al problema de investigación. Un primer momento, hace referencia a las observaciones realizadas en el aula de clases, que llevaron a los investigadores a cuestionarse y a buscar estrategias en pro de fomentar los procesos de aula en cuanto al pensamiento variacional. Un segundo momento, está dado por la revisión de literatura, en la cual se tuvieron en cuenta los aportes de diferentes autores que han abordado dicho pensamiento. Un tercer momento, fue aquel en el que se confrontaron algunos aspectos a mejorar en el aula de clases, con los referentes teóricos. Finalmente, se planteó la pregunta de investigación y con ella, los objetivos propuestos que guiaron todo el proceso investigativo.

3.3.2 Definición y acceso al contexto

En lo que se refiere al contexto, Stake (2007) propone describir bien el entorno físico, como lugares de acceso, habitaciones, el paisaje, situación en el plano y decoración, con la intención de que el lector se haga una idea o imagen mental del lugar en el cual acontece la investigación. Sin embargo, este mismo autor deja claro que de acuerdo al tipo de caso el contexto tendrá un mayor o menor interés para el estudio. En ese sentido, en esta investigación no fue determinante realizar dichas descripciones del entorno físico de una manera exhaustiva, dado que el interés radicaba propiamente en los razonamientos de los estudiantes.

En ese orden de ideas, el trabajo de campo se desarrolló en la Institución Educativa República de Uruguay, ubicada en el barrio Alfonso López perteneciente a la comuna 5, sector noroccidental del Municipio de Medellín, que atiende a 2200 estudiantes cuyas familias pertenecen a los estratos uno, dos y tres.

La Institución presta su servicio en dos jornadas escolares: mañana y tarde. En la mañana acuden los estudiantes de Educación Básica Secundaria y Media Técnica; en el horario de la tarde, asiste el personal de la Básica Primaria.

> El estilo de vida de las familias lleva a los padres o responsables de los niños y jóvenes, a dedicar más tiempo a labores de trabajo que a la formación de sus hijos; de acá que ellos se encuentren muy solos y tengan la posibilidad de encontrarse con el mundo de la droga, lo cual daría como consecuencia, la adicción, el robo y el sicariato. Motivo por el cual se crearon estrategias mancomunadas con la familia, la acción comunal, el centro de salud, la escuela de música y otras organizaciones para presentar alternativas formativas, pedagógicas y lúdicas a nuestros niños y jóvenes. (Tomado del PEI de la Institución).

Los integrantes del estudio de casos fueron cuatro estudiantes del grado quinto de la básica primaria, con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, los cuales se eligieron por sus habilidades comunicativas y el interés mismo de ser partícipes de la investigación, después de aplicado el primer instrumento.

Por principios éticos, no se reveló la identidad de los estudiantes y se contó con permisos escritos (ver anexo 2) por parte de los padres de familia debido a que eran menores de edad. Stake (2007, p. 58) indica que es “fundamental obtener un permiso escrito especial de los padres cuando se trate de atender personalmente a niños concretos”. En lo concerniente a los parámetros que se deben tener en cuenta a la hora de solicitar dicha autorización, añade:

> "[…] se debe dar a conocer la naturaleza del estudio de casos, el patrocinador, la actividad que se pretende llevar a cabo, los temas principales, el tiempo que se va a necesitar y la carga que va a suponer para las diversas partes (p.58)".

3.3.3 Fuentes de recolección de datos

Los instrumentos son aquellos medios que facilitarán a los investigadores la recogida de datos; para tal proceso Stake (2007) recomienda tener en cuenta aspectos como: la observación, descripción de contextos, la entrevista y la revisión de documentos.

- **La observación**

Como esta investigación es de tipo cualitativo demanda una mirada atenta y preparada a imprevistos por parte de los investigadores, ya que la observación conduce hacia una mejor comprensión del caso; a localizar exactamente el lugar o punto crucial para la obtención de datos y escoger aquello que enriquecerá la interpretación del fenómeno, que evidencie, su particularidad y complejidad que ameritó el estudio.

En ese sentido, la observación por parte de los investigadores fue un factor importante, dado que durante las cuatro situaciones se prestó atención a los movimientos, gestos y expresiones orales y escritas de los estudiantes, que daban cuenta de sus razonamientos.

La observación también fue un elemento clave en el momento de iniciar los análisis de los datos recogidos, puesto que era necesario centrar la atención en los elementos que le aportaran al objeto de esta investigación: razonamiento covariacional.

- **La Entrevista**

Desde la perspectiva de Stake (2007*), "la entrevista es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples"* (p. 63), es decir, por medio de la entrevista se puede acceder a información que no se obtiene con la observación directa de los investigadores, ya que no todos ven el caso de la misma forma. Los investigadores adquieren una forma particular de acceder a las interpretaciones de acuerdo a la mirada o lente con que se observen.

Es pertinente aclarar que la elección del entrevistado no es el fin, sino lograr una buena entrevista; para alcanzarlo Stake (2007, p. 64) sugiere:

- El entrevistador debe contar con una lista corta de preguntas orientadas a los temas.
- Evitar respuestas simples sí o no.
- Conseguir una descripción de un episodio, una relación o una explicación.
- El entrevistador debe escuchar, tomar notas según lo requiera, sin dejar de controlar la recogida de datos.
- Evitar grabar o escribir desaforadamente.
- Tener en mente preguntas principales.
- No distraerse pensando en cómo quedará la forma escrita de la recolección de datos
- El entrevistador debe disfrutar la encuesta.
- El entrevistador debe ser neutro para con sus opiniones personales, para evitar llenar los datos recolectados con datos erróneos y caprichos personales.
- El entrevistador debe reconstruir bien la narración y presentarla al entrevistado para asegurar la exactitud.
- Controlar lo que observa.

– Entre los investigadores debe existir cierto grado de confianza para aprobar las observaciones que realizan cada uno, teniendo en cuenta que el tiempo es limitado.

En la entrevista realizada a los estudiantes fue de tipo semiestructurada que permitiera generar un diálogo continuo y fluido; para tal fin, se elaboraron algunas preguntas por cada situación, que fueran abiertas y permitieran generar más cuestionamientos a medida que los estudiantes elaboraban sus respuestas.

- **Documentos**

De acuerdo a Stake (2007), se considera como documentos aquellos escritos como periódicos, informes, correspondencias, actas y lo relacionado como notas, escritos o registros de actividades. El autor mencionado propone también que la recolección de datos mediante documentos exige el mismo esquema de razonamiento que la observación o la entrevista, mediante preguntas bien elaboradas y buena distribución del tiempo.

Por ende se asumió como documentos los registros escritos que elaboraron los estudiantes, en el momento de tomar datos en las diferentes situaciones y en las diferentes respuestas que brindaron. También se consideraron como documentos los diarios de campo elaborados por los investigadores en cada sesión trabajada con los estudiantes.

3.3.4 Inmersión en el campo

En este apartado se describe cómo se realizó el trabajo de campo de esta investigación, el cual se desarrolló en dos fases: la primera para seleccionar a los cuatro estudiantes y la segunda fase, para realizar las tres situaciones de intervención con los cuatro estudiantes escogidos.

La primera fase fue designada para observar y escoger a los estudiantes de la investigación, teniendo en cuenta las siguientes pautas para la selección: interés en participar en la investigación y habilidades comunicativas en la justificación de los diferentes procedimientos. En esta fase se desarrolló una situación de intervención denominada *Las regletas*, que será descrita a continuación.

Situación uno: Las regletas

Objetivo: Identificar las habilidades comunicativas (oral, gestual y escrita) de los estudiantes que harán parte del estudio de casos, al momento de justificar sus diferentes procedimientos y razonamientos, durante el desarrollo de una actividad que permitiera establecer relaciones covariacionales.

Descripción de la actividad

La actividad se implementó en cuatro grupos de grado quinto de la I. E República de Uruguay, cada uno con un promedio de 40 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre los 10 y 11 años.

Las observaciones obtenidas durante esta actividad se registraron en audio, escritos de los estudiantes en los que dan cuenta de sus procesos y razonamientos, y el diario de campo de los investigadores de todas aquellas justificaciones orales que algunos de los estudiantes hicieron de sus procedimientos, así como de lo observado durante la actividad.

En cada grupo se formaron ocho equipos con cinco estudiantes respectivamente, en los que intervinieron los cuatro investigadores (dos grupos para cada investigador). En dichos grupos se realizó la siguiente actividad que consta de tres momentos que serán descritos a continuación.

Primer momento

Los estudiantes formaron grupos de cinco integrantes, a los cuales se les entregó un juego de las regletas de Cuisenaire. Luego, se les explicó que la actividad consistía en observar y establecer las relaciones que podían encontrar entre el volumen de las regletas y el área superficial de éstas. De igual manera, se realizó un ejercicio previo acompañado de un ejemplo en el cual se les explicaba cómo identificar la idea de volumen y cómo éste se podía asociar al número de cubitos unidad; en cuanto al área superficial, ésta se identificaría con el número de cuadrados (con respecto al cuadrado de la regleta unidad) que conforman la superficie de la regleta.

Segundo momento

Se les presentó la siguiente tabla para que cada estudiante la completara con todas las regletas de Cuisenaire, tratando de ir observando lo que pasa a medida que se agrega una unidad cúbica (un cubito unidad)

Regleta	Volumen	Área superficial
	1	6
	2	
	3	
		
		
…..		

Ilustración 6: Tabla actividad 1

Tercer momento

Los cuatro entrevistadores interactuaron con cada grupo de estudiantes preguntándoles en cada caso, acerca de los procedimientos realizados para completar la tabla, así como de las observaciones detectadas en el volumen y el área superficial, cada vez que se agregaba un cubo unidad; de acuerdo a sus respuestas emergían nuevos interrogantes que permitían una conversación fluida, tranquila y abierta, con el ánimo de no sólo quedarse con la primera respuesta entregada por los estudiantes, sino de profundizar en las relaciones que pudieron establecer entre dichas magnitudes.

De acuerdo a lo anterior, las preguntas más recurrentes durante la interacción investigadores y estudiantes, estuvieron centradas básicamente en tres, las cuales fueron consideradas como puntos de partida al momento de indagar por los procedimientos y razonamientos realizados. Estas preguntas serán descritas a continuación, junto con otras que emergieron a raíz de las respuestas brindadas por los estudiantes durante el diálogo:

1. ¿Qué observas en la columna del volumen? De acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes, surgieron las siguientes preguntas:

- ¿Cómo está cambiando?
- ¿En cuánto está cambiando?
- ¿Qué puedes concluir?
- Si tengo la regleta roja y la duplico, ¿Qué sucede con el volumen? ¿Por qué?

2. ¿Cómo hiciste para hallar el área superficial? Aquí los estudiantes daban cuenta de sus diferentes procedimientos aritméticos para contar las caras de la regleta. De acuerdo a ello emergieron las siguientes preguntas:

- ¿Existirá otro procedimiento para hallar el área superficial? ¿Cuál es?
- ¿Qué se necesita para que el área superficial vaya aumentando?
- ¿Qué podríamos hacer para que el área superficial disminuya?

3. Si a la regleta verde le agrego un cubo, ¿Qué sucede con el área superficial? De acuerdo a las respuestas de los estudiantes, surgieron las siguientes preguntas:

– ¿Cómo está cambiando?
– ¿En cuánto está aumentando?
– Y si a la regleta roja le agrego un cubo ¿Qué sucede con el área superficial? Así sucesivamente, se hacía lo mismo con las regletas violeta, amarilla, etc.
– ¿Qué puedes concluir?

Y si a la regleta verde le agrego dos cubos, ¿Qué sucede con el área superficial? ¿Por qué?

En lo que respecta a la segunda fase, se desarrollaron tres situaciones con las cuales se pretendió encontrar mayores evidencias acerca de las características del razonamiento covariacional en los estudiantes, haciendo énfasis en las maneras como los estudiantes reconocen algunos significados de la tasa de variación.

Las situaciones se formularon teniendo en cuenta las orientaciones dadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) frente al pensamiento variacional; y el marco teórico presentado por Carlson y sus colaboradores (2003), en las cuales prevalece el movimiento debido a que este posibilita el estudio de la variación. En particular, Vasco (2003, p. 23) señala:

> El movimiento es uno de los ejemplos más representativos y contundentes de variación, siendo éste el cambio de posición con respecto al transcurso del tiempo. Este contexto se convierte así en una fuente inagotable de actividades y problemas que permitiría el desarrollo del pensamiento variacional.

Además, las situaciones hicieron parte de la entrevista semiestructurada que fue direccionada con algunas preguntas que permitieron un diálogo con los estudiantes. Estas tres situaciones serán descritas a continuación.

Situación dos: Salgamos a la cancha

Objetivos:

- Identificar las diferentes relaciones que los estudiantes establecen entre dos magnitudes que covarían a partir de una situación real.

- Reconocer la manera como los estudiantes identifican la tasa de variación entre dos magnitudes que covarían a partir de una situación vivenciada por los estudiantes.

Descripción

En esta situación los estudiantes se reunieron en parejas y se dirigieron a la cancha. Allí, cada grupo designó las funciones de cada integrante: *caminante* quien se encargó de realizar los tres estados (permanecer quieto, caminar a un mismo ritmo lento y caminar a un mismo ritmo rápido) y *registrador* quien era el encargado de cronometrar el tiempo y registrar los datos en una tabla. (Ambos roles fueron efectuados por los dos estudiantes).

El *caminante* se queda quieto en el punto de partida mientras el *registrador* cronometra 5, 10, 15 y 20 segundos, marcando el lugar en el que se encontraba cuando cronometró cada intervalo de tiempo. Hecho esto, miden las distancias marcadas, a la vez que registran sus respectivos tiempos en una tabla.

Luego, el caminante recorre una línea recta, a una velocidad menor, (caminar despacio) tratando de mantener un mismo ritmo. El registrador debe ir cronometrando 5, 10, 15 y 20 segundos, marcando el lugar donde se encontraba cuando cronometró cada intervalo de tiempo. Después deberán medir el recorrido, a la vez que registran cada dato en una tabla.

Finalmente, el caminante se mueve en línea recta tratando de mantener el mismo ritmo, pero esta vez con una velocidad mayor que la anterior. El registrador debe ir cronometrando cada intervalo de tiempo, 5, 10, 15 y 20 segundos, marcando para cada uno el lugar donde se encontraba al momento de parar el cronómetro. Después, deben medir el recorrido, a la vez que registran cada dato en una tabla (ver ilustración 7).

ESTADO QUIETO

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

ESTADO: RITMO LENTO

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

ESTADO: RITMO RÁPIDO

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

Ilustración 7: tablas ritmo quieto, lento y rápido

Seguidamente, los investigadores interactuaron con los estudiantes a través de un diálogo en el que se les hace una serie de preguntas que generaron ciertas respuestas y razonamientos por parte de los estudiantes, y que a su vez, permitieron el surgimiento de nuevos interrogantes. Algunas de las preguntas que se suscitaron en dicha interacción son:

1- Realiza una descripción de lo que está sucediendo entre los datos registrados en las tres tablas.
2- ¿Qué sucede en la distancia a medida que pasa el tiempo en los tres estados?
3- ¿Qué está variando o cambiando?, ¿Cómo está variando o cambiando?, ¿En cuánto?
4- De acuerdo a los datos obtenidos, ¿Cuánto recorrerá en 25, 30 y 40 segundos en cada estado?
5- Aproximadamente, ¿Cuánto recorrerá en 1 segundo? ¿Qué puedes concluir?
6- Compara la distancia recorrida en los tres estados a los diez segundos, ¿Por qué para el mismo tiempo tenemos diferentes distancias?
7- Si quisieras recorrer una distancia en menos tiempo, ¿Cuál estado escogerías? ¿Por qué? ¿Qué puedes concluir?
8- Representa mediante una gráfica, dibujo o lo que quieras la situación del movimiento en cada uno de los estados.

En lo que respecta al reconocimiento de la tasa de variación, en esta situación se presentó una dificultad por parte de los estudiantes, ya que los datos tomados dependían tanto del que caminaba como del que registraba el tiempo, por ende, las variaciones entre las distancias correspondientes a la variaciones en el tiempo no resultaron constantes. Lo cual dio pie para elaborar una tercera situación con datos idealizados, en la que la tasa de variación fuera constante, y que se describe a continuación.

Situación tres: Miremos como caminan otros compañeros

Objetivo: reconocer las maneras como los estudiantes identifican la tasa de variación a partir de una situación idealizada.

Descripción:

En esta situación se les entregó a los estudiantes las mismas tablas de la situación anterior pero estaban con algunos datos que simulaban el caminar de otros estudiantes (ver ilustración 8).

Tiempo (en segundos)	Distancia (en centímetros)
5	120
10	240
15	360
20	480

Tiempo (en segundos)	Distancia (en centímetros)
5	140
10	280
15	420
20	560

Tiempo (en segundos)	Distancia (en centímetros)
5	100
10	250
15	410
20	590

Ilustración 8: tabla simulación ritmo quieto, lento y rápido.

Consecuentemente, se realiza un diálogo basado en las siguientes preguntas:

1- Realiza una descripción de lo que está sucediendo entre los datos registraos en las tres tablas.

2- ¿Cómo tendría que caminar la pareja uno para alcanzar a la pareja dos? ¿Qué tan rápido? ¿Qué tan lento?
3- ¿Cuál será la distancia recorrida a los 25 segundos? ¿a los 30 segundos?
4- ¿Cuál será la distancia recorrida en un segundo? ¿qué puedes concluir?
5- ¿Qué crees que sucedió en la tabla 3, que las distancias cada cinco segundos cambiaron?
6- Observa la tabla 3, ¿se podría saber la distancia recorrida a los 30 segundos?

Situación 4: La rana saltarina

Objetivo: Identificar las diferentes observaciones y análisis que los estudiantes realizan ante una situación, en la cual está dada previamente la tasa de variación.

Descripción

El estudiante simuló el recorrido de una rana que se está desplazando por un camino el cual fue dividido por señales con una misma medida, siguiendo las indicaciones dadas por el investigador.

Recorrido 1

El niño 1 se desplaza dos señales por cada indicación, la cual es dada por el investigador. El niño 2 se desplaza 3 señales por cada indicación. Tanto el niño 1 como el niño 2 deben hacer el recorrido en el mismo tiempo por cada indicación. Esto es, a la señal del investigador tanto el niño 1 como el niño 2 deben partir y deben llegar en el mismo tiempo al lugar correspondiente.

Al finalizar este recorrido se generó un diálogo con los estudiantes a partir de las siguientes preguntas:

1- Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño.

2- ¿Cómo fue el ritmo en cada niño?
3- ¿Qué tan rápido era el desplazamiento del niño 1 y del niño 2?
4- ¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó?
5- ¿Cuánto más está andando el niño 2 con respecto al niño 1?

Recorrido 2

El niño 1 se desplaza dos señales por cada indicación y el niño 2 se desplaza 3 señales por cada indicación, durante las diez primeras indicaciones.

Luego, el niño 1 se desplaza tres señales por indicación, y el niño 2 se desplaza dos señales cada indicación, en las diez siguientes indicaciones.

Finalizando este recorrido suscitó un diálogo con los estudiantes direccionado con las siguientes preguntas:

1- Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño
2- Después de la quinta indicación, ¿Qué observas en los desplazamientos?
3- ¿Qué tan rápido o qué tan lento iban los niños?
4- ¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó?

Recorrido 3

El niño 1 se desplaza dos señales por indicación, y el niño 2 lo hace a tres señales por cada indicación, durante las cinco primeras indicaciones.

En las siguientes cinco indicaciones, el niño 1 se desplaza a tres señales por indicación, mientras que el niño 2 se desplaza a una señal por cada indicación.

Al terminar este recorrido nuevamente se originó un diálogo con los estudiantes encaminado con las siguientes preguntas:

1- Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño

2- Después de la décima indicación, ¿Qué observas en los desplazamientos?
3- ¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó?

3.3.5 Análisis e interpretación de los datos

Una vez llevada a cabo la recolección de los datos, se hace necesario empezar a determinar qué momentos o datos son más significativos que otros en tanto le aportan mayor información a la investigación como tal, para lo cual, es preciso realizar un proceso de análisis e interpretación de los datos.

Según Stake (2007), el análisis de los datos no tiene un momento determinado, es decir, no hay un punto de partida en el cual los investigadores inicien dicho proceso, dado que éste, puede ocurrir durante la misma recolección de los datos. El análisis se refiere a aquellos momentos en los que se empieza a dar sentido a las experiencias vividas por los investigadores, y requiere momentos oportunos, adecuados y de profunda reflexión e interpretación para revelarlas al lector.

Para realizar el análisis de la información, Stake (2007) sugiere tres estrategias, de las cuales en esta investigación se optó por realizar dicho proceso bajo la suma categórica o interpretación directa, la cual se abordará a continuación.

- **Suma categórica o interpretación directa**

En cuanto a la suma categórica Stake (2007), la define como un cúmulo de datos, una suma de interpretaciones o un repetido comportamiento para establecer una conclusión sobre ellos.

En esta investigación se utilizó la suma categórica en el momento de observar razonamientos comunes que se evidenciaron en los estudiantes, a partir de los cuales se pudo establecer las dos categorías emergentes que surgieron después de los primeros análisis e interpretaciones elaboradas por los investigadores.

Por su parte, la interpretación directa según Stake (2007), es aquella que puede establecerse inmediatamente a partir de ejemplos individuales; no necesita de una suma de ejemplos individuales para elaborar una conclusión.

En la investigación la interpretación directa se evidenció en el momento de realizar una primera lectura de los datos recogidos. En esa primera lectura se pretendía identificar aquellos razonamientos relacionados con la covariación y la razón de cambio, puesto que se identificaron también otros tipos de razonamientos vinculados al pensamiento aditivo y multiplicativo, pero para efectos de la investigación no fueron tenidos en cuenta.

Cuando un estudiante señalaba: "*cuando el tiempo aumenta, la distancia aumenta*", es un razonamiento sobre el cual se puede afirmar inmediatamente que da cuenta de que el estudiante esta razonando covariacionalmente, puesto que percibe los cambios simultáneos entre las dos magnitudes (tiempo y distancia).

3.4 Validez y credibilidad de la investigación

Durante la investigación con estudio de casos surgen continuamente inquietudes acerca de la veracidad de las interpretaciones que se están realizando, para reducir al mínimo las falsas interpretaciones. Stake (2007) menciona que "*no sólo es necesario ser exacto en la medición de las cosas, sino también lógico en la interpretación del significado de esas mediciones*" (p. 94). En ese sentido, la validez de las interpretaciones de los datos recogidos se realizó mediante un proceso de triangulación de la información.

Frente a la Triangulación Hernández, et al. (2006, p. 666) indican que es una "*medida para incrementar la credibilidad*". En ese orden de ideas, durante la investigación se presentó una interacción entre el proceso de análisis y validación de la información, puesto que a medida que los investigadores realizaban sus respectivos análisis se iban validando dichas interpretaciones.

En el proceso de análisis, cada investigador empezó a revisar las situaciones dos, tres y cuatro. Cada uno se fue percatando poco a poco de algunos razonamientos que daban cuenta del razonamiento covariacional. Posteriormente, se realizó un debate entre los investigadores acerca de los razonamientos obtenidos, donde surgieron muchas dudas e inquietudes. Frente a lo cual se efectúo otro momento de discusión junto con el asesor de la investigación.

En dicha reunión se plantearon dos categorías emergentes denominadas de la siguiente forma:

- La razón de cambio como comparación entre dos cantidades.
- Coexistencia de tres cantidades.

Dichas categorías surgieron por la diversidad de razonamientos que se evidenciaron en los estudiantes. Por ejemplo, se observó que algunos estudiantes parecían estar construyendo la razón de cambio como una tercera cantidad, pero al detallar un poco más sus razonamientos, se descubrió que estaban elaborando la tasa de variación como comparación entre dos cantidades.

Además de estas dos categorías, también se optó por dedicar un capítulo aparte a los resultados obtenidos en la actividad de "*Las regletas",* debido a la riqueza en aspectos covariacionales observados en ella.

Al finalizar esta sesión, se asignó a uno de los investigadores la descripción de las maneras como los estudiantes resolvieron la situación de las *regletas,* haciendo énfasis en los aspectos covariacionales; a otro investigador la primera categoría emergente y a los otros dos investigadores la segunda categoría emergente. Durante dicho proceso de interpretación se presentó continuamente la discusión entre investigadores y el asesor, acerca de las interpretaciones obtenidas.

Este último proceso entre investigadores y asesor, es lo que se mencionó antes a cerca de la triangulación de la información, donde se cruzan los datos obtenidos, las interpretaciones logradas junto con los referentes teóricos. Déniz (1984, citado por Stake R., 2007), aconseja la triangulación entre investigadores, la cual consiste fundamentalmente en que otros investigadores observen las interpretaciones obtenidas, con el fin de refutarlas, modificarlas o confirmarlas.

3.5 Alcances y limitaciones de este estudio

Dado que esta investigación estuvo centrada en un estudio de caso de corte cualitativo, que permitió el análisis particular del objeto de estudio, en este caso, el razonamiento covariacional de los estudiantes de grado quinto de la I. E República de Uruguay, se considera que los resultados no deben ser generalizables a otros contextos.

Sin embargo, teniendo en cuenta que su interés estuvo centrado en observar y dar más claridad frente a lo que ocurre en las maneras de razonar de los estudiantes cuando se les asignan tareas que involucran fenómenos de variación teniendo como marco de referencia el constructo teórico desarrollado por Johnson (2012) y Carlson et al. (2003) sobre las diferentes formas en que se puede evidenciar la covariación y el razonamiento covariacional respectivamente, es preciso decir que estas características presentadas por estos estudiantes, pueden ser comunes en un contexto similar.

Capítulo 4

4. LA ACTIVIDAD DE LAS REGLETAS: UN PRIMER ACERCAMIENTO A LAS MANERAS DE RAZONAR COVARIACIONALMENTE DE LOS ESTUDIANTES

Como se mencionó en apartados anteriores, la actividad 1, denominada *las regletas,* fue realizada con 160 estudiantes que conforman los grupos del grado quinto de la IE. República de Uruguay, con el objetivo de seleccionar aquellos estudiantes que serían parte del estudio de casos.

No obstante, en vista de la gran la riqueza de procedimientos, justificaciones y razonamientos allí evidenciados, se decidió realizar un análisis de los elementos que arrojó dicha actividad, haciendo mayor énfasis en todas aquellas producciones en las cuales se observaron características que aportaban en gran medida al presente trabajo de investigación.

En ese orden de ideas, en el presente capítulo se describirán los resultados de esta primera parte del estudio en cuanto a los procedimientos y razonamientos evidenciados en dichos estudiantes durante la ejecución de la actividad con las regletas de Coussinaire.

Es importante mencionar que en algunos estudiantes no se observó un compromiso suficiente con la actividad propuesta que permitiera dar cuenta de los distintos procedimientos utilizados para encontrar el área superficial de cada regleta a medida que aumentaban su volumen, así como de los razonamientos frente a las relaciones que pudieran establecer. Esto pudo obedecer a diversos factores que tuvieron que ver con la falta de atención e interés, indisciplina y algunas dificultades referidas a las habilidades comunicativas de los jóvenes (gestos, movimientos corporales, registros orales, registros escritos, entre otros); y que aunque pudieron haber realizado diferentes razonamientos muy rescatables al momento de desarrollar la actividad, no fue posible advertirlos por parte de los investigadores, en tanto no los manifestaron desde su expresión corporal, oral o escrita.

Así, durante la ejecución de la actividad y el posterior análisis de los diferentes razonamientos y producciones observadas en los estudiantes, se establecieron unas características presentes en dichos razonamientos, las cuales permitieron hacer una diferenciación y selección –sin pretender clasificar ni ubicar en una categoría específica– de acuerdo a las maneras en que los estudiantes resolvieron la actividad propuesta. En el siguiente diagrama, se presentan algunas características de dichos razonamientos.

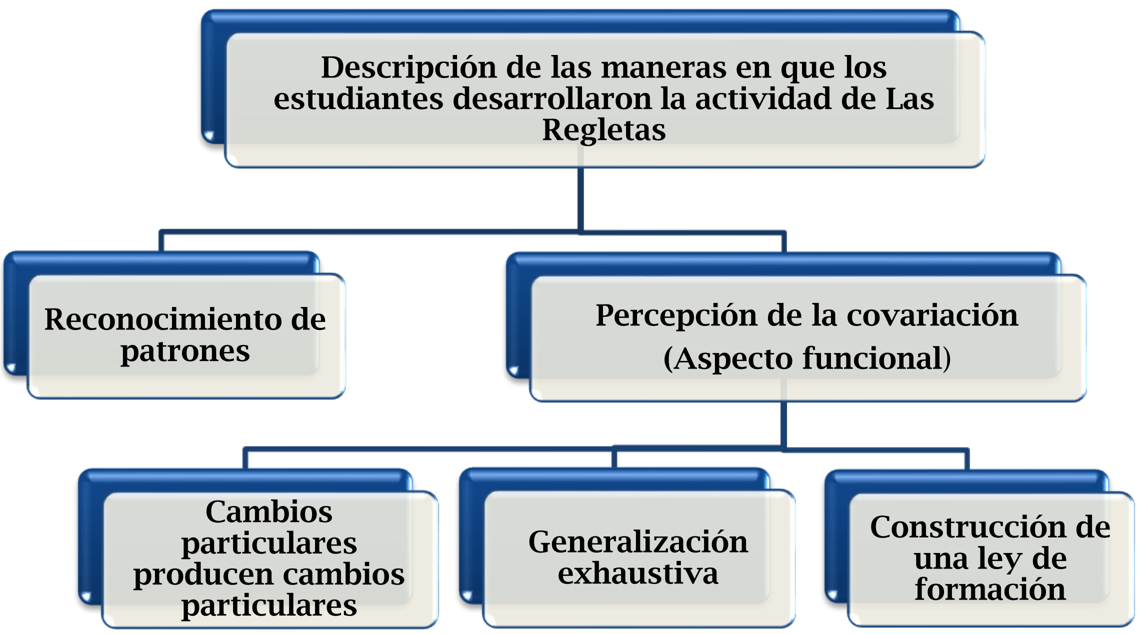


Ilustración 9: diagrama sobre las maneras en que los estudiantes desarrollaron la actividad de *Las regletas*

4.1 Reconocimiento de patrones

En algunos estudiantes se observaron *comportamientos* que daban la impresión de estar comprometidos en un razonamiento covariacional. Esto es, llenaron la tabla del volumen y del área superficial sin dificultad alguna y con esto dieron una primera impresión de haber establecido algunas relaciones de tipo *covariacional* entre estas magnitudes. No obstante, al ser confrontados por el investigador en cuanto al procedimiento utilizado para completar la tabla, los estudiantes justificaron sus respuestas con expresiones tales como:

> *"Estoy notando que el volumen cada vez aumenta uno* [un] *número y el área aumenta 4 números"*
>
> *"Sumé en el volumen de 1 en 1 como en el procedimiento".*
>
> *"Yo me di cuenta a medida sumándole de 4 en 4".*
>
> *"Yo lo hice porque conté en 4 en 4 hasta terminar".*
>
> *"Yo me di cuenta porque cuanto le falta a 6 para llegar a 10 le falta 4 desde ahí me di de cuenta".*
>
> *"Conté los cuadritos pequeños [cuadrado de la regleta unidad] en cada una de las regletas".*
>
> *Yo montaba los cuadritos más pequeños [cuadrado de la regleta unidad] en cada una regleta y los contaba".*
>
> *"Yo observé que aquí [señalando la columna del volumen] van aumentando los números de uno [el volumen está aumentando de a 1 unidad cúbica]."*
>
> *"Yo observé que cada regleta aumenta de a cuatro"*

La indagación posterior reveló que la respuesta de estos estudiantes, expresaba una opinión acerca del cómo estaba cambiando cada columna (cambiaba de 1 en 1 para el caso del volumen, y de 4 en 4 en el área superficial); tal como se puede evidenciar en el siguiente diálogo:

Investigador	*¿Cómo hiciste para hallar el área superficial de las regletas?*
Estudiante	*Yo vi que era 1, 2, 3 [en la columna del volumen] y entonces me imaginé que era 4 y 5 y 6 y 7; y también vi que aquí era 6, 10 [señalando la columna del área superficial] y sumé 4 entonces 14, 18 y así seguí.*
Investigador	*¿Qué pasaba con el área superficial cuando el volumen de la regleta* *aumentaba?*
Estudiante	*¿Con el área superficial? Eeee el volumen va de uno en uno y el área superficial de cuatro en cuatro.*
Investigador	*¿Observas algún cambio con el área superficial cuando aumentas una unidad de volumen?*
Estudiante	Mmmmmm…. *Si. Es que ésta [señalando la columna del volumen] aumenta uno, vea aquí uno, aquí uno, [haciendo una lectura vertical en los valores del volumen] en todos uno. Y aquí [señalando la columna del área superficial] aumenta cuatro.*

La anterior justificación brindada por el estudiante, da cuenta de cómo en un primer momento, en la columna del volumen, observó un dato inicial (1), luego el dato siguiente (2), y a continuación el que le sigue (3), detectando así, que cada dato aumenta en una unidad con respecto al dato anterior, lo que le permitió completar la tabla. Para el caso del área superficial, el dato inicial es 6, el valor siguiente es 10 y con ello, notó que el 10 se obtuvo al agregarle 4 al 6 (4+6=10). Acto seguido halló el número siguiente que es 10 + 4= 14. Y así sucesivamente completó la tabla con los datos correspondientes a esta columna.

Se pudo percibir entonces, que el estudiante asumió la actividad como dos tareas a resolver de manera separada. Inicialmente, al observar la columna del volumen, identificó un aumento de una unidad en los datos dados, y a partir de éstos diligenció la columna; de manera análoga, procedió para el caso de la columna del área superficial identificando un aumento de cuatro unidades en los datos dados, lo que le permite terminar la tabla. De esta forma, el joven encuentra los diferentes valores de las columnas, *independientemente* la una de la otra, sin establecer *relaciones* entre ambas magnitudes.

Lo anterior, da cuenta de cómo los estudiantes hicieron un reconocimiento de patrones aritméticos estableciendo algunas asociaciones espontáneas y naturales, lo que los llevó a identificar los cambios generados en cada columna, como fenómenos separados, posiblemente sin advertir la relación existente o los cambios que se generaban en el área superficial cada vez que se le agregaba una unidad cúbica al volumen.

En el presente gráfico se muestra la manera de razonar descrita anteriormente con el fin de dar mayor claridad:

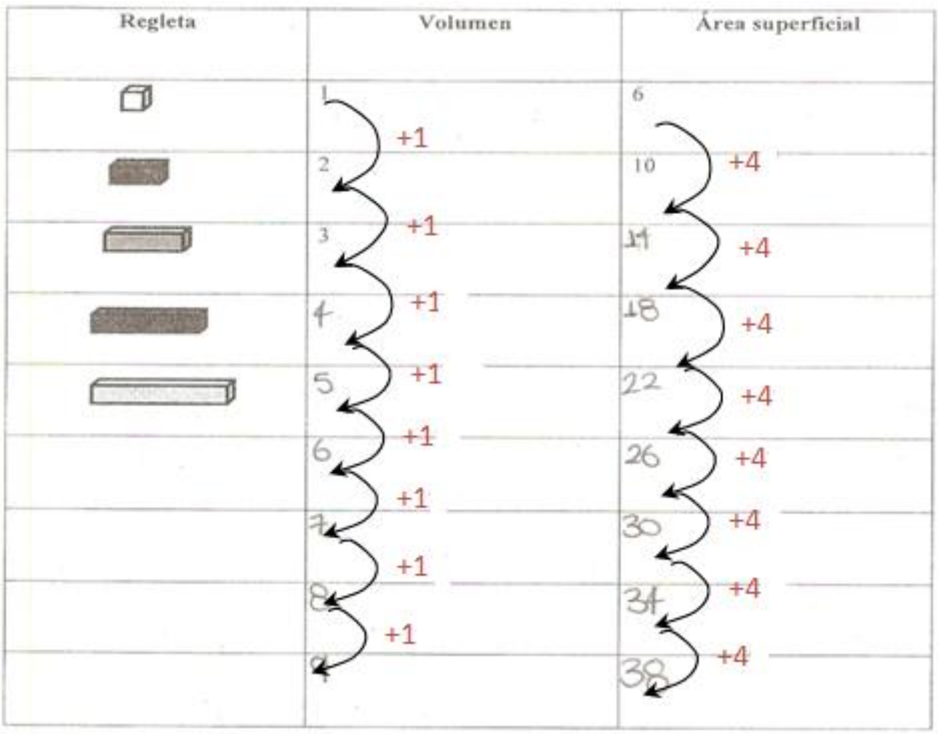


Ilustración 10: Gráfico reconocimiento de patrones aritméticos

Si bien es cierto que el investigador puede advertir una *covariación* implícita dentro de una misma columna, (que no responde al objetivo de la actividad como tal, pero que de igual manera es un razonamiento válido), en la cual se atienda a los *cambios simultáneos* de los valores de una magnitud por cada renglón y formarse una imagen de la variación conjunta y simultánea de ambas, -para el caso del área superficial sería cuatro unidades por renglón-, las descripciones que los estudiantes hicieron de su solución, revelaron que éstos no se percataron de tal covariación, si no que más bien atendían a la *variación* de las cantidades en una misma columna.

Al respecto, Dolores (2009) menciona:

> […] el término variación está estrechamente ligado al proceso de medición del cambio. El cambio se produce cuando se pasa de un estado inicial a un estado final; por tanto, para medir el cambio de una variable basta restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial; entonces el cambio se mide por la diferencia: $xf - xi = \Delta x$. (p.103)

Las anteriores evidencias permiten afirmar que los estudiantes se centraron básicamente en la variación de las magnitudes en cada columna, más que en hallar o encontrar una relación entre dichas magnitudes, que permitiera dar cuenta de una covariación entre el área superficial y el volumen, en tanto no advirtieron una simultaneidad e interrelación entre estas magnitudes o en el caso que se pudo haber dado, que sería cuatro unidades por cada renglón (para el caso del área superficial), o una unidad por cada renglón (en el caso del volumen).

4.2. Percepción de la covariación (Aspecto funcional)

En algunos de los razonamientos de los estudiantes, se evidenciaron elementos que daban cuenta de haberle dado a la actividad una mirada más allá del reconocimiento de una variación en cada magnitud y se detuvieron a analizar el comportamiento del área superficial cuando aumentaban una unidad de volumen, lo que llevó a establecer relaciones de tipo covariacional entre las magnitudes implicadas en la actividad.

Al respecto, Saldanha y Thompson (Citado por Carlson, et al 2003) describen la covariación como "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)" (p. 123); además, señala que es una actividad mental en la cual uno le hace un seguimiento al valor de una cantidad y logra percibir que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante.
De esta manera, se pudo observar que los niños establecieron relaciones de tipo covariacional entre las magnitudes implicadas en la actividad. En algunos casos, advertían que cambios en valores particulares del área superficial de las regletas, eran producidos por cambios particulares en el volumen de éstas; en otros, daban cuenta de percibir el comportamiento general de las magnitudes y, para encontrar un área superficial cualquiera, recurrían al cálculo de todos los datos anteriores hasta encontrar la pedida. Por último, están aquellos casos en los cuales los estudiantes, después de hacerse una idea del comportamiento global de las magnitudes, construyeron una ley de formación en términos aritméticos, y a partir de ésta, encontraban cualquier área superficial.

A continuación, se describirán con detalle diversas maneras en que se evidenciaron aspectos covariacionales en los razonamientos de los estudiantes.

4.2.1. Cambios en valores particulares producen cambios en valores particulares

En esta percepción de la covariación, se destacan los razonamientos de aquellos estudiantes que encontraron una relación entre un cambio en valores particulares en el volumen y sus respectivos cambios en valores particulares en el área superficial, estableciendo una lectura tanto vertical como horizontal en ambas columnas. El siguiente apartado ejemplifica un poco más la manera de proceder de estos estudiantes:

Entrevistador	*¿Qué puedes concluir de lo que observaste con el área superficial y el volumen?*
Estudiante	*Lo que yo entendí fue que cuando tengo 2 cubos [cuando aumento 2 unidades de volumen] el área se sube a 8 [aumenta 8], si tengo 3 [si aumenta 3 unidades de volumen], se sube a 12 [aumenta 12], si tengo 4 [si aumenta 4 unidades de volumen] se sube a 16 [aumenta 16].*

Para ilustrar un poco la descripción brindada anteriormente por el estudiante, se presenta el siguiente gráfico:

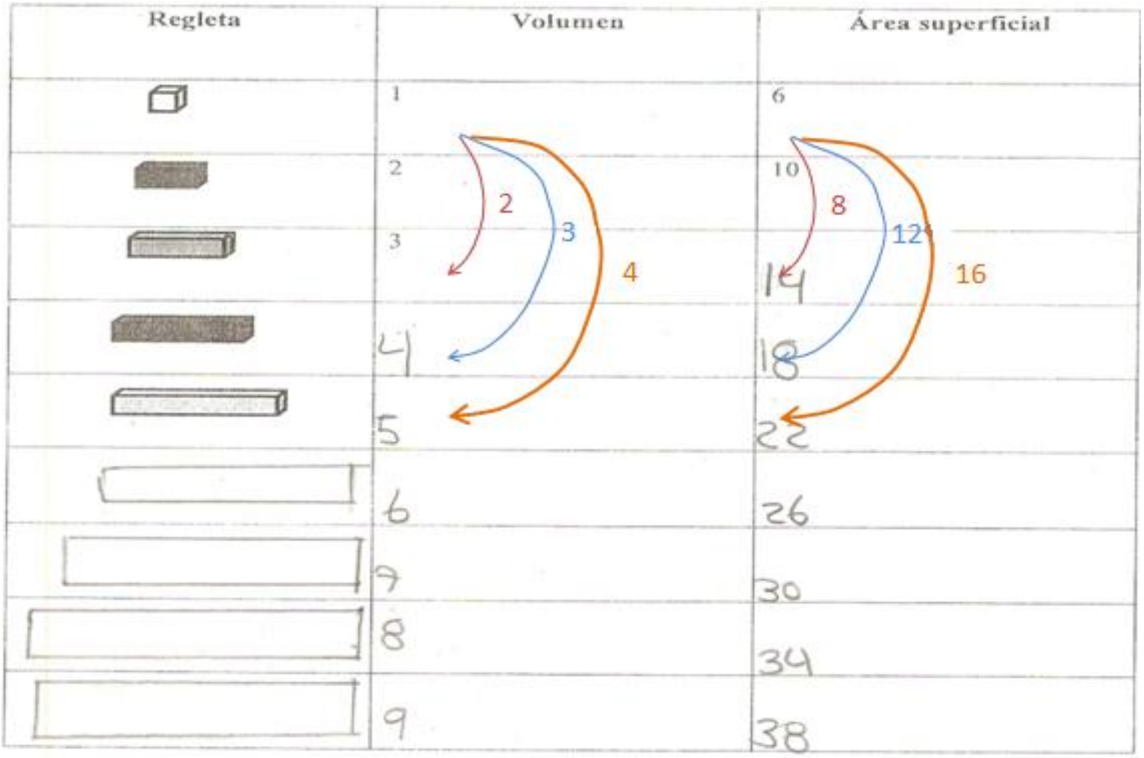


Ilustración 11: Relación cambios entre el volumen y el área superficial

Se puede observar que el niño establece una lectura vertical de unos aumentos particulares en el volumen (2, 3, 4, etc.) y asocia estos aumentos particulares, a sus respectivos aumentos en el área superficial (8,12, 16).

Clement (Citado por Johnson, 2012), brindó una perspectiva *dinámica discreta* de covariación que involucra la *coordinación* de aumentos particulares de cambio en una cantidad con aumentos particulares de cambio en otra cantidad; y ejemplifica diciendo: Como la longitud del lado de un cuadrado incrementa en 1 cm, el incremento en el área de un cuadrado incrementa en 2 cm^2 (p. 315, traducción por los autores).

Aquí el estudiante, a partir de la regleta de volumen uno, realiza unos incrementos en ésta. Primero observa que cuando el volumen aumenta en dos unidades cúbicas (se mueve de 1 a 3), el área superficial aumenta 8 unidades cuadradas (se mueve de 6 a 14). Después realiza un aumento de 3 unidades cúbicas (el volumen se mueve de 1 a 4) y observa que el área aumenta 12 unidades cuadradas.

En estas expresiones se puede observar cómo los estudiantes podían asociar un incremento entre valores específicos del volumen, con un incremento entre valores específicos en el área superficial, advirtiendo la presencia de dos magnitudes que están estrechamente relacionadas. Esto es, el niño se percata de que unos aumentos verticales en datos particulares del volumen producen unos aumentos específicos en la columna del área superficial, vinculando así, ambas magnitudes.

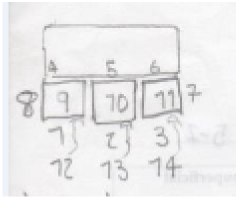
Es de anotar que el joven antes de llegar a este razonamiento realizó todo un proceso de observación, comparación, de análisis, de cálculos aritméticos, etc., y a partir de esto, hizo una lectura tanto vertical como horizontal de la tabla.

4.2.2 Generalización exhaustiva

Un segundo aspecto en el cual se evidenció una percepción de la covariación está referido a aquellos razonamientos en los cuales los estudiantes hicieron -de manera cualitativa-, un intento de generalización para el área superficial de cualquier regleta, relacionándola con el volumen. No obstante, aunque tuvieran una imagen global del comportamiento de las magnitudes en esta situación, al preguntárseles por el área superficial para un volumen determinado, los niños acudían a hallar todas las áreas hasta llegar a la regleta que tuviera el volumen pedido. El siguiente diálogo ilustra algunas de las maneras en que los estudiantes razonaron:

Investigador *¿Cómo hiciste para hallar el área superficial de cada regleta?*

Estudiante *Yo conté con mi compañero, si era la regleta tres [de volumen 3 unidades cúbicas] contaba las caras [teniendo en cuenta la cara de la regleta unidad] y ya.*



Investigador *¿Y cuál sería el área superficial de la regleta que tiene un volumen de 9 unidades cúbicas?*

Estudiante *Mmmmm pues cuento las caras. Eeeee vea… (busca la regleta de volumen 7 y empieza a señalar cada carita a medida que cuenta) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29,30*

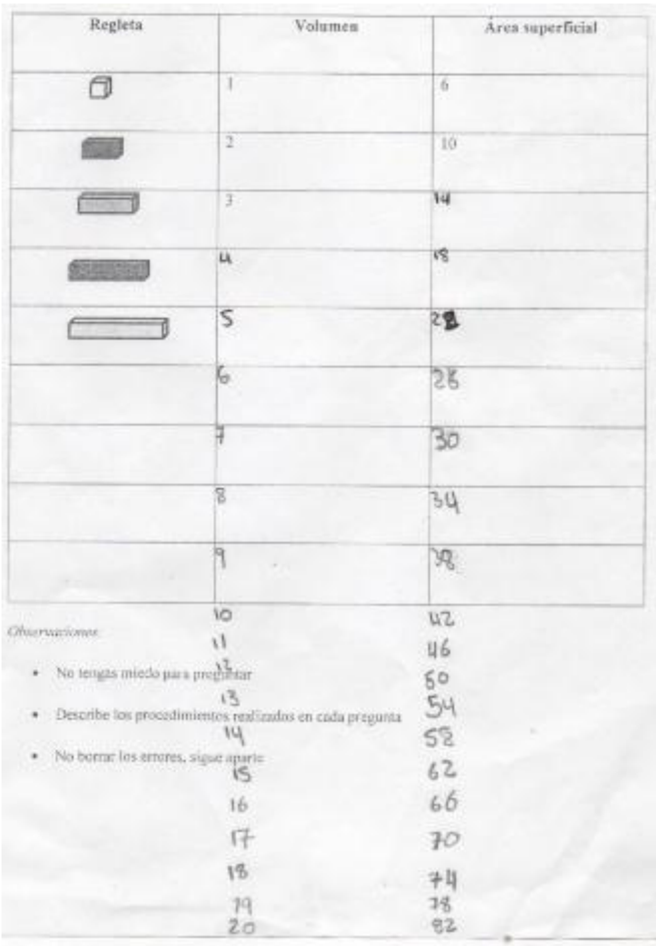
Después de realizar el ejercicio de hallar varias áreas superficiales para determinados volúmenes de algunas regletas, el estudiante se percata de que la columna del volumen está aumentando en una unidad cúbica y el área superficial en cuatro unidades cuadradas. Así que el estudiante, ya no recurre al conteo sino que continúa sumando de a uno en el volumen y de a cuatro en el área superficial. El investigador le pide al estudiante una conclusión de lo observado durante la actividad, ante lo cual él responde de la siguiente manera:

Investigador *¿Qué puedes concluir de lo que observaste con el área superficial y el volumen?*

Estudiante *Que cada vez que aumentamos una regleta de uno [cada vez que el volumen aumenta una unidad cúbica] se va aumentando el número de caras [el área superficial] el volumen aumenta 1 y el área superficial de a 4".*

Investigador	*¿Y si te pidiera que halles el área superficial de la regleta cuyo volumen es 20 unidades cúbicas?*
Estudiante	*(Después de hacer varios cálculos) el área es 82.*
Investigador	*¿Cómo hiciste para hallarla?*
Estudiante	*Llegué al 82 [al área de la regleta de volumen 20 unidades cúbicas] porque la de 10 [de volumen 10] tiene 42 [42 unidades cuadradas de área superficial], la de 11, 46; la de 12, 50; la de 13, 54; la de 14, 58; la de 15, 62; la de 16, 66; la de 17, 70; la de 18, 74; la de 19, 78; Sumo de 4 en 4 cada vez que aumento uno, entonces, 78 + 4=82*

Para ejemplificar la descripción brindada anteriormente por el estudiante se presenta a continuación una de sus producciones:



Regleta	Volumen	Área superficial
	1	6
	2	10
	3	14
	4	18
	5	22
	6	26
	7	30
	8	34
	9	38
	10	42
	11	46
	12	50
	13	54
	14	58
	15	62
	16	66
	17	70
	18	74
	19	78
	20	82

Observaciones

- No tengas miedo para preguntar
- Describe los procedimientos realizados en cada pregunta
- No borrar los errores, sigue aparte

Ilustración 12: Escrito de un estudiante

Se puede observar en estos razonamientos, que el estudiante percibe el comportamiento global de las magnitudes implicadas. Esto es, tiene una idea general de lo que sucede siempre en el área superficial cada vez que la regleta aumenta en una unidad cúbica.

Si bien es cierto que el niño opta por terminar cada columna sumándole una unidad al dato anterior del volumen y cuatro unidades al dato anterior del área superficial, (que podría dar la sensación de advertir la variación en cada columna) es claro que hay una percepción -por parte del estudiante- de la *covariación dinámica discreta* proporcionada por Clement (Citado por Johnson, 2012), descrita en la sección 2.1, dado que el estudiante mantiene vinculados los aumentos particulares de cambio en el volumen (1 unidad cúbica), con aumentos particulares de cambio en el área superficial (4 unidades cuadradas) y manifiesta en sus diferentes razonamientos que un cambio en una magnitud, implica un cambio en la otra.

4.2.3 Construcción de una ley de formación

Dentro de esta percepción de la covariación, se destacan aquellos razonamientos de los estudiantes en los cuales se evidenciaron los cambios simultáneos e interrelacionados entre las diferentes magnitudes (quienes están cambiando, cómo están cambiando, relaciones de dependencia e independencia, qué permanece constante, implicaciones de un cambio en una magnitud con respecto a la otra, entre otras); además que construyeron una expresión que les permitió hallar el área superficial de cualquier regleta.

El siguiente episodio, pretende ilustrar la *percepción de la covariación* intentando establecer *algunas relaciones entre las cantidades de una manera más general*:

Investigador *¿Cómo hiciste para hallar el área superficial de cada*

	regleta?
Estudiante	*Yo primero sumé las caras de cada regleta [los cuadrados que componen las caras de la regleta usando como medida el cuadrado de la regleta unidad]. Si la suma era cinco, sumaba 5+5+5+5 y más uno de este lado y uno de este otro lado [aquí el estudiante señalaba las dos caras extremas de cada regleta]. Luego me di cuenta que era multiplicando por cuatro y sumándole estos dos. (Ver ilustración 13)*
Investigador	*¿Qué es lo que multiplicas por cuatro?*
Estudiante	*La regleta que me piden. Si es la catorce, multiplico 14 x4 más estos dos. Si es la diez, igual y la cien también.*
Investigador	*¿Qué puedes concluir de lo que has observado en el área superficial cuando aumentábamos el volumen de las regletas?*
Estudiante:	*Entre más cubos más aumenta el área si le quitan cubos disminuye el área. Para saber cuánto tiene de volumen [área superficial] se multiplican todas las caras [el número de caras laterales de la regleta] por cuatro y a lo último se le suman las caras de los lados.*

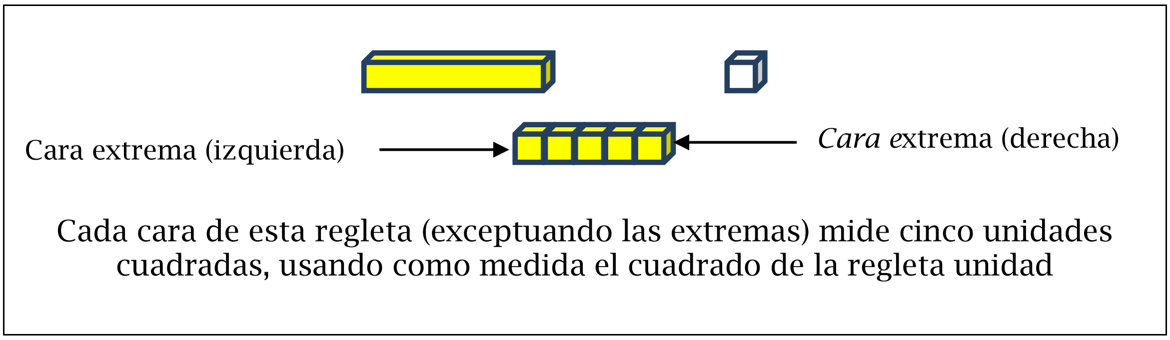


Ilustración 13: Descripción de un estudiante

En este episodio se observa que el estudiante está asignando un nombre a la regleta de acuerdo al volumen que posee; de esa manera, la regleta compuesta por 15 cubitos, la llama “regleta quince”. Si bien es cierto que al final del anterior diálogo, se observa una aparente “confusión” entre el volumen y el área superficial, es importante aclarar que este hecho parece obedecer a una "ligereza en el lenguaje", más que a un error conceptual o procedimental. Lo anterior se confirma cuando el estudiante proporcionó la siguiente expresión para hallar el área superficial de la regleta treinta y cinco (compuesta de 35 cubitos unidad)

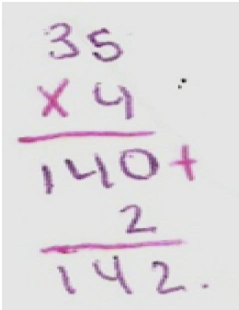


Ilustración 14: expresión para hallar el área superficial

En la expresión brindada por el estudiante se puede observar un reconocimiento de una *correlación directa entre las cantidades volumen y área superficial* (crecimiento/ decrecimiento en una cantidad, genera el mismo efecto en la otra cantidad). Asimismo, se reconoce que el estudiante determina dicha relación en forma verbal y la ejemplifica aritméticamente.

Al respecto, Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012), han considerado este modo de pensar y resolver tareas con expresiones numéricas, como una forma de *razonamiento algebraico elemental*, basado en un *primer proceso de generalización*, en el cual el estudiante -además de establecer unas relaciones covariacionales entre el volumen y el área superficial- presenta un acercamiento a una idea de función en tanto que el alumno construye una expresión que se aproxima a una generalización de las relaciones entre las cantidades involucradas, que aunque está en términos aritméticos, el estudiante halla con ésta, el área superficial de cualquier regleta, haciendo variar el número de la regleta o volumen y manteniendo constante el multiplicar por cuatro y sumar dos.

En lo referido al razonamiento algebraico, Godino et al (2012, p. 496) afirman que éste:

> [...] se inicia a partir de las actividades aritméticas de cuantificación de cantidades mediante los procesos de simbolización numérica. Los símbolos numéricos se organizan, desde los primeros niveles, como un sistema formado por elementos relacionados mediante ciertas operaciones; tales operaciones, que inicialmente refieren a acciones sobre cantidades, pasan a ser operaciones sobre los propios símbolos y vienen relacionadas con un sistema de propiedades estructurales.

Además, Carraher (Citado por Godino, et. Al, 2012), agrega:

> La idea clave detrás de esta nueva visión es que la aritmética es parte del álgebra, esto es, la parte que trata con los sistemas numéricos, la recta numérica, funciones simples, etc. La aritmética trata con la parte del álgebra en la que números particulares y medidas son tratados como ejemplos de otros ejemplos más generales. (p. 497)

Se puede observar pues, cómo las declaraciones del estudiante permiten inferir que su razonamiento, no estaba limitado al cálculo de algunos valores numéricos, sino que más allá de ello, la operación aritmética se convirtió en una manera de *ejemplificar* una relación más *general* establecida por el estudiante entre las dos cantidades que interviene en la situación; y esa *generalidad* se observa en la manera como el estudiante describe retóricamente el *procedimiento* para calcular el área dependiendo del volumen dado.

Capítulo 5

5. RAZONAMIENTO COVARIACIONAL Y TASA DE VARIACIÓN EN ESTUDIANTES DE GRADO QUINTO

A través de las distintas actividades realizadas con los estudiantes de grado quinto que hicieron parte del estudio, se observó que las ideas acerca de la razón de cambio son mucho más complejas de comprender para los alumnos, en tanto que se ha observado que desde las aulas escolares, se hace poco énfasis en el desarrollo de aspectos variacionales.

En esta medida, se diseñaron algunas situaciones que tuvieran relación con el contexto del educando, con el propósito de generar espacios en donde el estudiante pueda construir relaciones de tipo covariacional partiendo de las percepciones e ideas que tengan respecto al fenómeno presentado. De esta manera, el lenguaje ordinario y las descripciones desde lo cualitativo que hacen los estudiantes para explicar algún fenómeno de variación y cambio, toman gran significado para el análisis de cada uno de sus razonamientos.

5.1 La razón de cambio como comparación entre dos magnitudes

En los datos recogidos a través de las situaciones de intervención se observó cómo inicialmente los estudiantes elaboraron relaciones covariacionales, y posteriormente lo concerniente a la tasa de variación inmersa en las situaciones. Algunos de los razonamientos de los estudiantes dieron cuenta de estar percibiendo la razón de cambio a la cual se desplazaron, pero al analizar sus respuestas, éstas indicaron que ellos se percatan de la razón de cambio a través de la comparación entre las dos magnitudes desde la cuantificación.

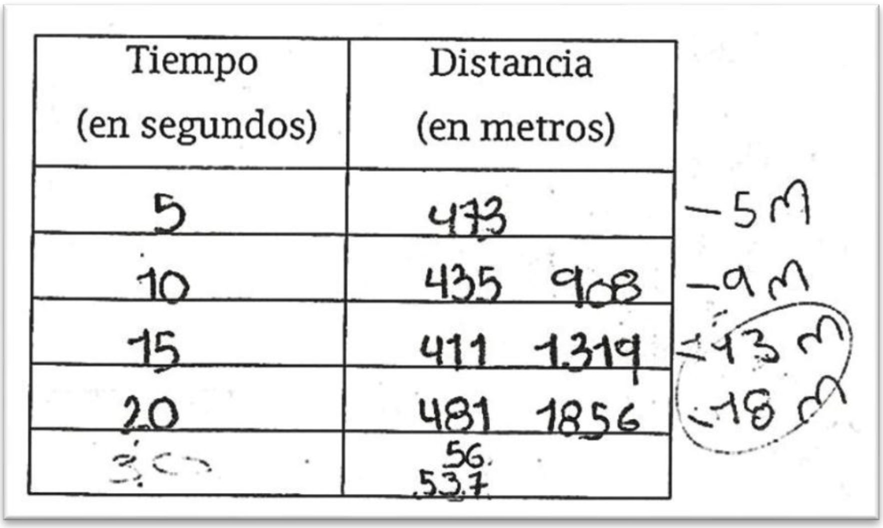
Dicha cuantificación puede equipararse con las descripciones de Carlson y sus colegas (2003) cuando plantean para el razonamiento covariacional un tercer nivel denominado "coordinación cuantitativa", caracterizado porque los estudiantes pueden "coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra" (p. 129), es decir, los estudiantes pueden cuantificar la cantidad de cambio.

Para efectos de esta investigación en estudiantes de grado quinto no se hizo énfasis en variables sino en magnitudes y cantidades, puesto que en ellos aún no se ha abordado dicha noción (ni desde lo conceptual ni desde las notaciones algebraicas).

En ese sentido, se dice que los razonamientos de los estudiantes se asemejan a lo planteado por Carlson et al. (2003), en tanto ellos cuantifican los cambios dados entre el tiempo y la distancia. Los escritos de los estudiantes sustentan dichos hallazgos.

Con respecto a la actividad dos, la cual consistía en tomar los diferentes datos de tiempo y distancia mientras los estudiantes se desplazaban durante tres ritmos diferentes (quieto, lento y rápido), la estudiante Salomé, inició sus cálculos realizando una aproximación de 473 cm a 5m, de 908 cm a 9m, de 1319 cm a 13 m y de 1856 cm a 18 m. Posteriormente calculó la diferencia entre cada distancia y obtiene que entre los intervalos de tiempo 0-5, 5-10 y 10-15 se está presentado una diferencia de 4m, a excepción del intervalo 15-20 que es de 5m (ver ilustración 15).

Es así como el investigador le preguntó a la estudiante ¿cómo están cambiando la distancia y el tiempo? Una vez terminados los cálculos anteriores, la estudiante respondió "Aumenta de a 4 metros cada 5 segundos"



Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)	
5	473	−5 m
10	435 908	−9 m
15	411 1.319	−13 m
20	481 1856	−18 m
30	56. 537	

Ilustración 15: Tabla del estado ritmo lento

De acuerdo a los datos anteriores y a su ilustración respectiva, Salomé manifestó los cambios en ambas magnitudes, aproximándolos a 4 metros cada cinco segundos. Su razonamiento dio cuenta de estar evidenciando la covariación entre las dos magnitudes puesto que ella las vinculó simultáneamente y no a cada una independientemente. Se entiende por covariación como "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)" (Saldanha y Thompson (1998), citados por Carlson et al. (2003), p.123).

En ese sentido, la estudiante parece estar percibiendo el cambio general entre el tiempo y la distancia. La palabra *cada* toma un papel crucial en su razonamiento, puesto que ella parece estar elaborando de forma *global* el comportamiento entre las dos magnitudes.

Salomé no indicó cambios particulares entre cantidades, es decir, ella no señala que para un cambio de 5 segundos hay un cambio de 4 metros, o que cuando el tiempo es 5 segundos la distancia es de 4 metros; por el contrario su expresión "aumenta de a 4 metros cada 5 segundos", se relaciona más con la percepción de la razón de cambio inmersa en la situación.

Pero esta percepción de la razón de cambio se hace más a través de la comparación entre las dos magnitudes. Esto es, al detallar un poco más los procedimientos de la estudiante, ella primero observa el tiempo y su comportamiento y luego observa la distancia, para finalmente relacionarlas.

Por su parte, la estudiante Hanna, también dio cuenta de sus razonamientos de una manera afín a la de Salomé. Ella inicialmente percibió la covariación existente entre el tiempo y la distancia, describiéndola con sus propias palabras. Acto seguido, la estudiante realizó algunos cálculos en los que empieza a cuantificar los cambios que se están presentando, dentro de los cuales advirtió que "En el ritmo rápido cada 5 segundos recorre 4 metros".

Hanna también usó el término *cada,* el empleo de dicha expresión da a entender que la estudiante aunque hace algunos cálculos para cantidades particulares, también parece estar construyendo de forma general los cambios entre las dos magnitudes, elaborando de esa manera la razón de cambio entre el tiempo y la distancia.

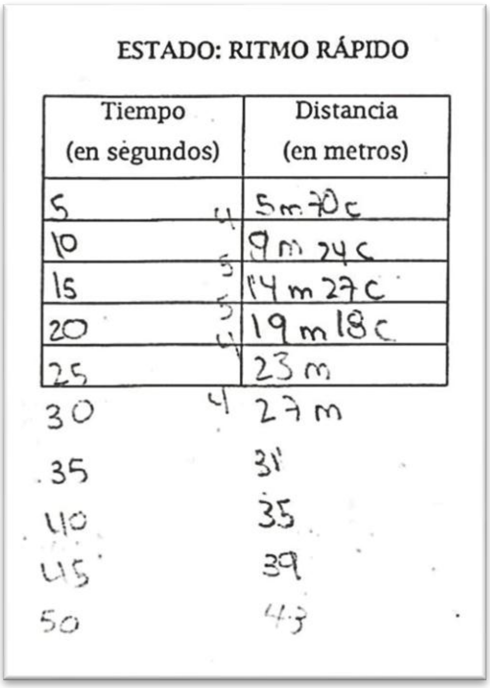
Investigador:	*¿Qué relaciones encuentras entre el tiempo y la distancia?*
Hanna:	*En el estado lento no avanzó nada porque no se movía, en el ritmo lento de 5 segundos recorrió 5m al igual que lo recorrió, en el ritmo rápido cuando fue avanzando fueron aumentando los metros porque el ritmo lento caminaba despacio.*
Investigador:	*¿Qué ocurre en la distancia a medida que pasa el tiempo?*
Hanna:	*En el estado quieto no sucede nada con la distancia porque está en el mismo lugar sin moverse. En el ritmo lento de 5 a 15 segundos fue aumentando de a 3 metros. En el ritmo rápido en 5 segundos aumento 4 metros, desde los 10 hasta 20 fue aumentando de a 5 metros.*

Investigador: *Aproximadamente, ¿Cuánto recorrerá en 1 segundo?*

Hanna: *En el ritmo rápido cada 5 segundos recorre 4 metros, entonces en 1 segundo podría aumentar 2 ó 1 metro o menos que 1 metro. [la estudiante esta tratando de realizar una proporcionalidad entre estos tiempos, esto es, como en 5 segundos recorre 4 metros, entonces en 1 segundo puede recorrer entre 1 a 2 metros. Aunque también puede ser menos dependiendo del ritmo en que lo haga]*

De acuerdo al diálogo anterior y a través de la ilustración 16, se deja ver cómo a través de los registros escritos de la estudiante, ésta establece relaciones covariacionales entre el tiempo y la distancia en cantidades particulares, pero también manifiesta para el ritmo rápido una expresión un poco más avanzada, en lo que se refiere a la tasa de variación, en donde advierte que "*cada 5 segundos recorre 4 metros".*

El proceso que ella realiza sugiere pensar que dicha construcción de la razón de cambio se hace a través de la comparación de las magnitudes. Esto es, cambios particulares en el tiempo generan cambios en la distancia: "*de 5 segundos recorrió 5m*", "*de 5 a 15 segundos fue aumentando de a 3 metros*", "*en 5 segundos aumento 4 metros*", "*desde los 10 hasta 20 fue aumentando de a 5 metros*". En general, cuando el tiempo cambia en una cantidad, la distancia cambia en otra cantidad.



ESTADO: RITMO RÁPIDO

Tiempo (en segundos)		Distancia (en metros)
5	4	5m 70c
10	5	9m 24c
15	5	14m 27c
20	4	19m 18c
25		23 m
30	4	27 m
35		31
40		35
45		39
50		43

Ilustración 16: tabla estado: ritmo rápido

Por otra parte, en la estudiante Atenas también se observó que ella logró elaborar una imagen global del cambio entre el tiempo y la distancia, pero a diferencia de las dos estudiantes anteriores, lo hace con mayor dificultad y a través de otro proceso. Atenas presentó una agilidad para realizar diversas operaciones matemáticas como la multiplicación y la división, pero en el momento de interpretar los datos obtenidos se le presentó una mayor complejidad.

Al igual que las estudiantes anteriores, Atenas inició su proceso observando y describiendo el comportamiento entre las dos magnitudes. Ella presentó los siguientes razonamientos, en el estado "ritmo lento": "*que cada vez que pasaba el tiempo, la distancia iba sumando" y en el estado ritmo rápido*: "*como el ritmo era más rápido la distancia era más*". Al verbalizar esto, la estudiante parece dar cuenta de los comportamientos mentales que están ocurriendo en la situación, lo que sugiere que la estudiante está percibiendo la covariación que subyace entre el tiempo y la distancia.

Conforme se mencionó anteriormente, la idea de covariación desde Saldanha y Thompson (1998) es entendida como “mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)” (citados por Carlson et al. (2003), p.123).

Seguidamente, esta estudiante también realizó algunos cálculos para encontrar la variación entre cada una de las magnitudes (ver ilustración 17), por medio de los cuales ella manifiesta que para hallar la distancia en el tiempo 25, no es posible porque las distancias entre cada intervalo de tiempo son diferentes.

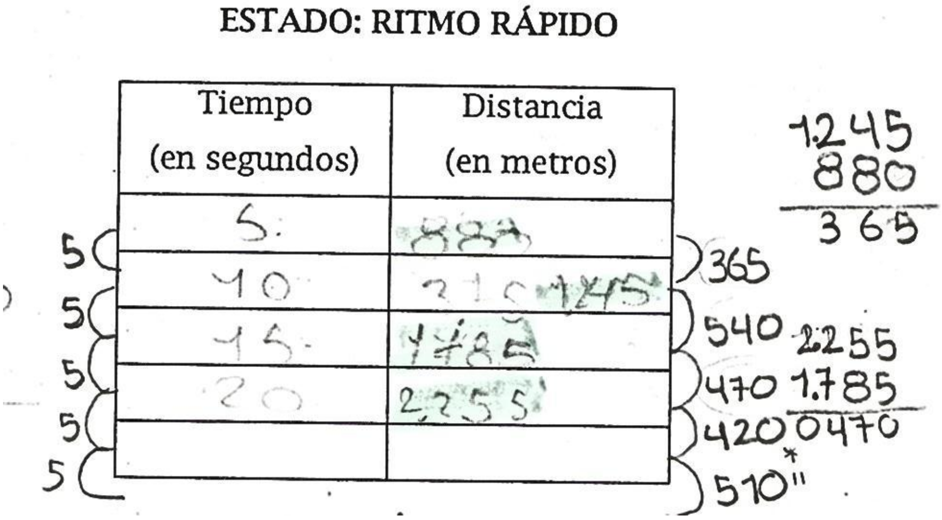


Ilustración 17: tabla estado: ritmo rápido

Investigador: *¿Cuál es la distancia si el tiempo aumentara otros 5 segundos?*

Atenas: *Si el tiempo aumentara otros 5 segundos no podíamos decir cuánto es la distancia.*
Porque en cada uno [intervalo] la distancia era diferente.

Investigador: *En 2 segundos y medio, ¿cómo se puede calcular la distancia?*

Atenas: *Trescientos sesenta y cinco dividido dos es igual a 182 cm con 5 milímetros.*
Porque si uno divide por dos le da la mitad.

Investigador: *¿Se puede en una quinta parte?*

Atenas:	*Si, dividiendo por 5, 365÷5=73*
	A no, me equivoque, es 880
	880÷2=440
	880÷5= 176
Investigador:	*¿Qué quiere decir esos datos?*
Atenas:	*Entre menos segundos menos la distancia*
Investigador:	*El mínimo es 1 segundo, y dio 176 cm, si tuviera que hallar para 10 segundos, ¿cuánto es?*
Atenas:	*Multiplicando 176 x 10 =1760*
Investigador:	*¿Y en 15 segundos?*
Atenas:	*Multiplicando 176 x 15*
Investigador:	*Ahora, si nos dicen que un carro va a 50 km/h, ¿Qué quiere decir?*
Atenas:	*Que cada hora se recorre 50 cm [km]*
Investigador:	*Con respecto a los datos hallados antes de 176 cm en un segundo, ¿qué concluyes?*
Atenas:	*Que cada segundo recorre 176 cm*

En coherencia con los razonamientos de la estudiante Atenas, se observó dificultades en una primera instancia para elaborar una imagen o representación *global* de la razón de cambio, porque las distancias recorridas entre cada intervalo de tiempo son diferentes, y es algo razonable porque los procesos de medición se realizaron en una situación que ellos mismos vivenciaron, pero como se pudo ver en las estudiantes Salomé y Hanna, también era algo similar, solo que estas dos últimas se atrevieron a hacer una aproximación a dicha razón de cambio.

En ese sentido, se buscó indagar por otro medio la percepción de la razón de cambio en la estudiante, ante lo cual se le pregunta por la distancia en un segundo. Ella consigue realizar algunas operaciones con rapidez y agilidad (multiplicación y división), y halla el valor respectivo. Pero cuando se le solicita interpretar esos datos (880÷5= 176) no logra hacerlo inmediatamente. Por el contrario su respuesta aunque también es válida, aun no da cuenta de estar percibiendo lo solicitado.

Es por eso que se acude a otra ilustración: ¿qué quiere decir que un carro va a 50 km/h? En este caso ella responde más espontáneamente y lo que emerge parece tener un poco más de coherencia: "*que cada hora se recorre 50 cm [km]*".

Particularmente en esta respuesta también aparece el término *cada* con el cual se puede pensar que ella está presentando unos indicios en la percepción de la tasa de variación, dado que en su respuesta parece estar percibiendo la tasa de cambio entre dichas cantidades.

Posteriormente también se procedió a que la estudiante a partir de este ejemplo interpretó los datos hallados anteriormente. En esta ocasión ella manifiestó que "*cada segundo recorre 176 cm*". Lo que sugiere que la estudiante está comenzando a elaborar la tasa de cambio entre las dos cantidades. Sin embargo, es pertinente señalar que reconocer la idea de razón de cambio en cantidades que covarían de una manera no constante implica el estudio del desarrollo de otras imágenes mentales más avanzadas.

Retomando, los razonamientos de esta estudiante durante el estado quieto, ella sustentó lo siguiente: "*paso el tiempo y la distancia quedo en cero porque estuve quieta*". Desde este razonamiento se puede pensar que la estudiante se está percatando de la covariación, aunque el cambio en la distancia es cero. Lo anterior es válido porque desde la misma definición de covariación se habla de valores en dos cantidades, y en esta ocasión particular, dicho valor es 0.

Investigador:	*¿Qué ocurre con la distancia a medida pasa el tiempo?*
Atenas:	*Que pasó el tiempo y la distancia quedó en cero porque estuve quieta*
Investigador:	*¿Cuál es la distancia si el tiempo aumentara otros 5 segundos?*
Atenas:	*Da cero porque se quedó en el mismo punto.*

Si el tiempo aumentara si podíamos decir cuánto es la distancia, porque es el estado quieto. Ejemplo:
Si los segundos seria tentra [treinta] la distancia seria 0 y para cuarenta cero, para cincuenta cero, para 1.000 cero.
Puede pasar todo el tiempo que sea y la distancia seria cero.

Conforme al diálogo anterior, se pueden observar varios elementos. El primero es que ella percibió la covariación y la describe con sus propias palabras. El segundo alude a la covariación entre cantidades particulares y por último, está elaborando una percepción del cambio global en la situación.

Atenas anteriormente había manifestado la dificultad que tenía porque los cambios en la distancia eran diferentes, pero en esta situación, puede percatarse del cambio *global* del tiempo y la distancia, puesto que ella misma afirma con seguridad que "*puede pasar todo el tiempo que sea y la distancia seria cero*".

En esta situación acontece algo muy particular, está referido a los datos que se dan en la distancia, lo que pudiera sugerir que inicialmente no hay covariación porque no se están dando cambios como se venían evidenciando en las situaciones anteriores, donde las cantidades eran diferentes de cero. Aunque los datos son iguales a cero, se puede también afirmar que el cambio en general es cero. Y a su vez, que existen relaciones covariacionales en tanto se pueden referenciar las dos magnitudes simultáneamente.

La razón de cambio que percibieron las estudiantes (Salomé, Hanna y Atenas) es apenas un primer acercamiento, puesto que ellas la construyen comparando lo que sucede entre el tiempo y luego con lo que pasa en la distancia. Dichos acercamientos implican reconocer inicialmente los cambios en cada una de las magnitudes y luego, vincularlos en un solo razonamiento, el cual da cuenta también de las relaciones covariacionales que se pueden establecer entre las dos magnitudes.

Por último, el estudiante Moisés estableció relaciones funcionales entre el tiempo y la distancia para casos particulares. No obstante, no se evidenció al finalizar la actividad, la construcción de relaciones covariacionales ni de la razón de cambio, puesto que el estudiante parece solo hallar un valor de la distancia para un tiempo determinado.

Investigador:	*¿Cuánto recorrió la niña en un segundo? piensa más o menos cuanto*
Moisés:	*En 2 segundos y medio, recorrerá 1 metro más o menos, esta persona puede que recorra 2 metros porque la mitad de 5 segundos es 2 y medio y entonces de 4 son 2, uno se imagina que son 2 lo que puede recorrer, entonces en 1 metro sería en 1 segundo con 15*
Investigador:	*Ahora miremos en el estado ritmo rápido aproximadamente ¿Cuánto recorrió la niña en 1 segundo?*
Moisés:	*Bueno… en 1 segundo…la mitad de 5 es 2 segundos y medio, la mitad de 9 es 4m con 50 cm, entonces si el tiempo disminuye a 1 segundo seria aquí (señalando el dato para 5 segundos) y lo que te acabo de decir seria 2m con 15 cm, perdón 25 cm, 2m con 25 cm…aja! Eso sería en un segundo de acuerdo a la gráfica.*
Investigador:	*Intentemos comprobar. Tú dices que en un segundo recorrió 2m con 25 cm, miremos si a los 5 segundos recorrió los 9m con 32cm*
Moisés:	*En 1 segundo 2m con 25 cm* *En 2 segundos 4m y 50 cm* *En 3 segundos 6m y 75 cm* *En 4 segundos 8m mentiras, serian 9 metros* *En 5 segundos 11m y 25 cm* *No me dio, hay que disminuirle 2 metros*

En los razonamientos registrados por el estudiante Moisés, se presenta continuamente la elaboración de operaciones aritméticas y relaciones funcionales entre el tiempo y la distancia. Ejemplo de ello se muestra cuando el estudiante razonó "*en 2 segundos y medio, recorrerá 1 metro más o menos*". A su vez que las relacionales covariacionales entre las dos magnitudes no se evidenciaron. Es decir, el estudiante no construyó dichas relaciones de acuerdo a los cambios presentados en el tiempo y la distancia.

Retomando la misma definición de razonamiento covariacional como "*las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*" (Carlson et al. 2003, p. 124), se observó que el estudiante empezó a establecer relaciones entre dos cantidades particulares del tiempo y la distancia, pero no las advirtió simultáneamente de acuerdo a la forma ni al cómo están cambiando.

5.2 Coexistencia de tres cantidades

Durante las distintas intervenciones se observó cómo los estudiantes por medio de sus respuestas, dieron cuenta de una manera natural e intuitiva de la existencia de una tercera cantidad (velocidad), utilizando expresiones como va más lento, más rápido, tiene más velocidad que el otro, es menos rápido, entre otras expresiones y percepciones acerca del movimiento, muy propias del contexto de los estudiantes.

A continuación se mostrarán algunos razonamientos de tipo covariacional, evidenciados por los estudiantes al momento de realizar las actividades 2, 3 y 4 que atendían no propiamente al concepto de velocidad sino a un acercamiento a partir de descripciones cualitativas de la idea de velocidad. Consecuente con cada uno de los razonamientos, se expondrán los análisis realizados por los investigadores teniendo como marco de referencia los aportes de los autores citados en el marco teórico de la presente investigación.

En esta medida, se presentarán las descripciones verbales, escritas y gráficas que realizaron cada uno de los cuatro estudiantes durante el desarrollo de la actividad 2 (implementada **Mayo 3**). Es claro tener presente, que para esta actividad, los estudiantes realizaron los respectivos registros de las distancias recorridas en unos tiempos específicos de 5, 10, 15 y 20 segundos respectivamente, en diferentes estados (quieto, lento y rápido). Después de cada recorrido en los tiempos dados, los estudiantes registraron los datos en cada una de las tablas de acuerdo al estado.

Luego de haber terminado la actividad, se le pidió a la estudiante Hanna que realizara una descripción de lo que estaba sucediendo con los datos registrados en las tablas (implementada **Mayo 3**). Ésta respondió:

> "*En el estado lento [quieto] no avanzó nada porque no se movía, En el ritmo lento de 5 segundos recorrió 5 m al igual que lo recorrió en el ritmo rápido cuando fue avanzando [el tiempo] fueron aumentando los metros por que el ritmo lento caminaba despacio y en el ritmo rápido mucho más rápido por eso fueron avanzando los metros [distancia]. En el ritmo lento se dan unos pasos más cortos que en el ritmo rápido*"

En la anterior descripción brindada por Hanna, se pudo observar que inicialmente la estudiante de acuerdo a los datos registrados en la tabla estableció relaciones particulares entre la distancia y el tiempo, además de esto identificó una *dirección* entre las cantidades, es decir, a medida que pasaba el tiempo, mayor iban a ser los metros recorridos. Dicha *dirección* hace parte de la acción mental 2 descrita por Carlson et al. (2003), según la cual el estudiante identifica que unos aumentos en una cantidad de magnitud generan aumentos en otra. En esta medida, se puede decir que Hanna en sus análisis atendía principalmente a los cambios simultáneos que se iban dando en cada una de las cantidades de magnitudes (cambios en el tiempo generan cambios en las distancias), donde al pasar un mayor tiempo implicaría lógicamente un mayor recorrido.

Dentro de este mismo razonamiento, se pudo evidenciar que Hanna percibió la existencia de tres cantidades dentro del fenómeno. Dos de ellas (tiempo y distancia) que fueron medidas directamente o aquellas cuyos valores aparecían en la tabla, y una tercera cantidad de magnitud la cual aparece implícita en las relaciones de estas dos que está referida a la velocidad, pero en términos muy cualitativos. En este sentido, Hanna reconoció implícitamente un ritmo o rapidez, el cual posiblemente resultó de la percepción que tuvo del fenómeno de movimiento realizado, más que de una relación de los cambios en las distancias respecto a los cambios en el tiempo. De igual manera se prestó atención a la relación de dependencia de la distancia respecto al ritmo, en la cual para unos ritmos mayores se determinaron unas distancias mayores; esto debido a que el cambio en el tiempo era constante, lo cual dio pie a que los razonamientos de los estudiantes se centraran en una distancia que variaba respecto a un ritmo.

De igual forma, se observó cómo debido a que la situación fue de tipo experimental, las ideas acerca de la velocidad o rapidez surgieron de una "*adjetivación del movimiento*" más que de una relación entre las distancia y el tiempo, es decir cuando el estudiante se refería a la palabra velocidad, no utilizaba esta como tal, sino que lo hacía por medio de otras palabras más cercanas a su lenguaje tales como *rapidez, ritmos rápidos o lentos, más rápido, menos rápido,* con las cuales describían la forma como se desplazaba cada estudiante durante su recorrido.

A continuación, se presentarán las descripciones verbales, escritas y gráficas que realizaron cada uno de los cuatro estudiantes durante el desarrollo de la actividad 3 (implementada **Mayo 17**). En esta actividad se le presentó a los estudiantes tres tablas similares a las de los datos registrados por ellos en la actividad 2, sólo que se les hizo la observación de que dichas tablas habían sido realizadas por estudiantes diferentes, esto con el objetivo de presentarles tablas donde la tasa de variación fuera constante en unos casos y variante en otros. (Ver ilustraciones 18 y 19, fotos 1, 2 y 3).

Cuando se confrontó al estudiante Moisés y se le pidió que explicara lo observado en los datos registrados de la tabla (ver ilustración 19, foto 3), éste pudo determinar por medio de cálculos numéricos que los cambios entre las distancias eran diferentes cada 5 segundos, como se muestra a continuación:

Investigador: *¿Qué observas en la tabla [véase foto 3]?*

Moisés: *[se queda mirando fijamente la tabla y no responde]*

Investigador: *¿Qué observas que está pasando en la columna de la distancia a medida que pasa el tiempo?*

Moisés: *[piensa un momento y luego verbalmente dice que] Ahhh en 5 segundos recorre 100 centímetros, en 10 segundos recorre 250 centímetros, en 15 segundos recorre 410 centímetros, en 20 segundos recorre 590 centímetros y en 25 segundos recorre 620 centímetros.*

Investigador: *¿Cómo son los aumentos en la distancia a medida que pasa el tiempo?*

Moisés: *[El estudiante procede a calcular las diferencias entre las distancias, tomando una distancia y la distancia obtenida anterior a esta, de acuerdo al orden de la tabla; véase foto 3; luego responde y escribe] La distancia de cada segundo no era la misma porque no caminaron al mismo ritmo.*

Investigador: *¿A qué te refieres cuando dices "a un mismo ritmo"?*

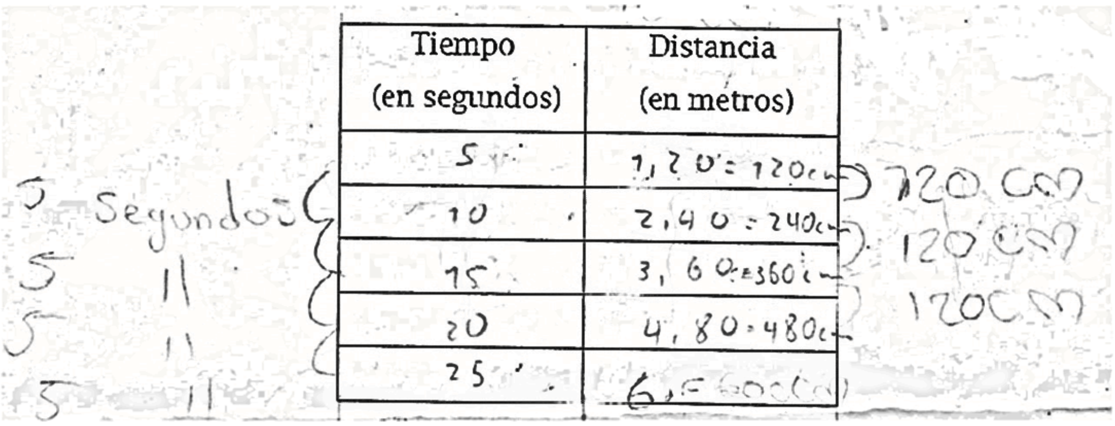
Moisés: *Mmmmmm que está caminando a un mismo paso.*

Investigador: *¿Qué observas en esta tabla que no paso en las anteriores?*

Moisés: *[Mira las tablas anteriores y señala los resultados de las diferencias en las distancias, véase foto 1].*

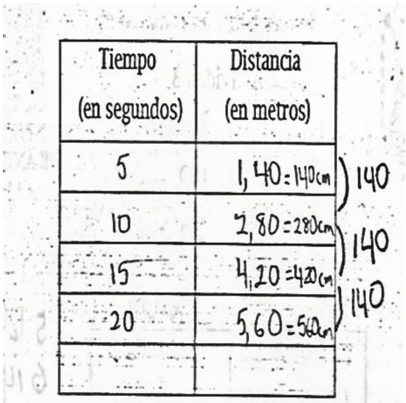
Aquí [señalando con un dedo las constantes en las diferencias,

	véase la foto 1] las distancias van de a 120, y aquí [señalando con el dedo las constantes en las diferencias, véase foto 2] van de a 140 cm, y en la última [haciendo referencia a foto 3] la distancia es diferente.
Investigador:	*¿Puedes hacerme una gráfica o dibujo con la cual puedas representar lo que está pasando en la tabla [señalando con un dedo la foto 3]*
Moisés:	*[se queda pensando un momento y empieza a realizar un dibujo]*
Investigador:	*[Después de unos instantes y de haber terminado el dibujo se le hacen unas preguntas acerca de lo que representa el dibujo]. ¿Qué quieres decir acá (señalando con el dedo el dibujo, véase la foto 4]?*
Moisés:	*Voy caminando con pereza [señalando las fotos 3 y 4, con lo cual muestra como relaciona el tener pereza con recorrer inicialmente una distancia corta], ya que aquí [señalando la foto 3] solo recorrí 150 cm, pues ande despacio.* *Después voy [realiza un movimiento agitado con las manos y gestual, con lo cual describe un aumento en la distancia para un mismo tiempo, ver foto 3] rápido porque voy para un partido.* *Luego [señala la foto 3 en la parte donde la diferencia entre las distancias es de 180, es decir sigue aumentando que cambia constantemente] voy mucho más rápido, voy alegre porque voy pa' piscina [hace un movimiento mucho más rápido y agitado con sus manos].* *Ahhh y ya en esta última parte [señalando foto 3 en la parte final de la tabla, donde la diferencia entre las distancias es de 30 cm] voy cansado, con sueño [hace gestualmente como si tuviera sueño, abriendo la boca y estirando las manos, lo cual relaciona con haber disminuido la velocidad].*



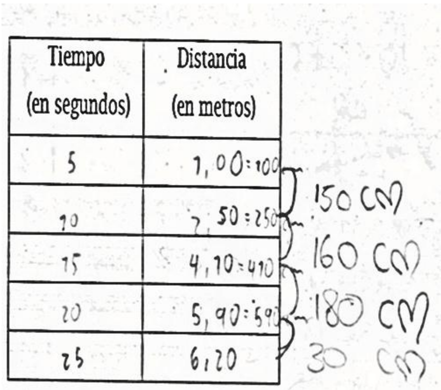
Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)
5	1,20 = 120 cm
10	2,40 = 240 cm
15	3,60 = 360 cm
20	4,80 = 480 cm
25	6,= 600cm

Ilustración 18: Foto 1



Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)
5	1,40 = 140cm
10	2,80 = 280cm
15	4,20 = 420cm
20	5,60 = 560cm

a)



Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)
5	1,00 = 100
10	2,50 = 250
15	4,10 = 410
20	5,90 = 590
25	6,20

b)

Ilustración 19: a) foto 2 b) foto 3

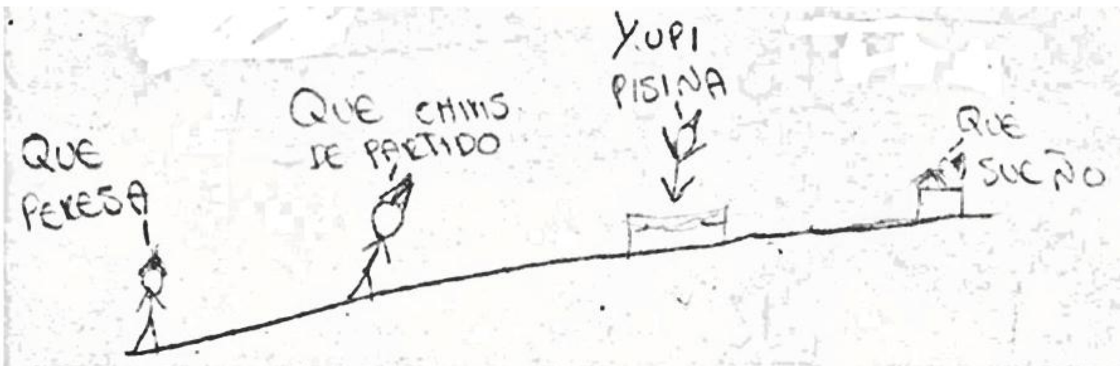


Ilustración 20: Foto 4

Atenas, en el análisis de la última tabla de la actividad 3 (ver ilustración 19, foto 3) donde la tasa de variación era constante, observó los datos y dijo: *"la distancia está avanzando descoordinadamente",* argumentando que era diferente, ya que al hallar las diferencias entre las distancias cada cinco segundos observó que no son iguales, entonces, al preguntarle a qué se debía este cambio descoordinado, ella respondió: *"Al ritmo, primero fue lento y luego rápido".*

De acuerdo al anterior razonamiento, se pudo destacar como Atenas reconoció con base a los datos de la tabla, que no había una razón constante en el aumento de la distancia con relación al tiempo como venía sucediendo en el análisis de las tablas anteriores, donde determinó por medio de cálculos numéricos que los cambios en las distancias cada cinco segundos eran iguales, afirmando consecuente a esto, que el niño iba a un mismo ritmo. Luego, para este caso en particular, se logró ver como al obtener distancias diferentes en intervalos de cinco segundos, la estudiante Atenas evidenció que esos cambios que no son constantes son generados debido a los diferentes ritmos en el recorrido (unos lentos y otros rápidos). Ahora, con relación a las descripciones y análisis realizados por Atenas y teniendo como referente el marco conceptual de Carlson et al. (2003), se puede decir que los razonamientos de la estudiante atendieron a la acción dos, ya que además de identificar que los cambios en una cantidad de magnitud generaron cambios simultáneos en la otra, también reconoció la dirección de ese cambio, que para este caso (donde no se presenta un cambio constante en los aumentos de las distancias) la relación que logró determinar es en cuanto al cambio no constante sino variante (pero en aumento) de la distancia a medida que cambia el tiempo en intervalos de cinco segundos.

Por su parte, la estudiante Salomé después de haber observado la tabla 1 de la actividad 3 (ver ilustración 18, foto 1) donde la tasa de variación era constante, y de realizar algunas operaciones numéricas, reconoció a partir de los datos de la tabla una diferencia constante en las distancias, y atendiendo a esto asoció en términos de *"un mismo ritmo"* el recorrido realizado. Posteriormente, la estudiante determinó que cuando los cambios en las distancias no eran constantes era debido a que se tuvieron diferentes ritmos en el recorrido realizado. También se observó cómo la estudiante asoció el ritmo (ya sea lento o rápido) con la distancia, es decir, hizo depender la distancia del ritmo de caminado que llevaba, como se verá en el siguiente segmento de una de las entrevistas realizadas.

Investigador: *¿Entre los cinco y los diez segundos a qué ritmo se está caminando?*

Salomé: *entre 5 y 10 camino al mismo ritmo. Porque si va a un paso o a un ritmo no puede caminar lento y luego rápido*

Investigador: *¿Puedes decirme que tan rápido o que tan lento va?*

Salomé: *Va a 120 cm y siempre se lleva de diferencia 120 cm, porque como va al mismo paso la distancia debe ser igual*

Investigador: *¿Habrá algún momento en que los cambios entre las distancias sean diferentes?*

Salomé: *Cuando camina más rápido o más lento*

Los razonamientos mostrados por Moisés, Atenas y Salomé a partir del análisis de los datos registrados en las tablas, dieron cuenta de los obstáculos que enfrentó un estudiante en el momento de identificar una tercera cantidad (rapidez o velocidad) a partir de las relaciones entre las parejas dadas, pues la rapidez no se presentó de forma "*ostensible*". Sin embargo, aunque la velocidad no se manifestó de manera directa en la tabla, los estudiantes lograron construir relaciones covariacionales entre las cantidades expuestas en los datos, lo que permitió que se percibiera la coexistencia de tres cantidades dentro del fenómeno, además de establecer relaciones cualitativas entre las cantidades.

En este sentido, el hecho de que los estudiantes se les dificultó interpretar la tasa de variación a partir de relaciones covariacionales de distancia y tiempo, pudo ser debido a factores como:

- La tabla por sí sola no representa un fenómeno de variación y cambio, es necesario hacer todo un análisis de los datos registrados en la misma, para poder comprender las relaciones entre las cantidades de magnitudes que "covariaban".
- Son pocos los espacios de diálogo entre maestro y estudiante, por medio de preguntas que induzcan al estudiante a establecer un conjunto de relaciones entre los datos registrados.
- Las actividades de variación y cambio por si solas no desarrollan pensamiento variacional, es necesario la intencionalidad del maestro.

No obstante, a medida que el estudiante estableció relaciones entre las parejas y empezó a realizar descripciones de tipo cualitativo que daban cuenta de la relación entre los datos registrados (distancia y tiempo) y el fenómeno de cambio y variación, se logró evidenciar que las ideas acerca de la velocidad o rapidez que surgen a partir de sus análisis respondieron a una "*adjetivación del movimiento*" más que a una relación matemática. Los estudiantes alcanzaron a reconocer cualitativamente la rapidez de un movimiento asociándolo a las diferencias encontradas en la tabla de la distancia (véase ilustración 19, foto 3), donde para recorridos mayores lo relacionaron con una mayor o menor velocidad, determinando por separado la variación del tiempo (véase ilustración 19, foto 3) e identificando que cambia a razón constante. Luego, las ideas acerca de la velocidad estaban atendiendo más a una descripción cualitativa de lo que era la velocidad, en términos de *ritmos lentos, rápidos, menos rápido,* que a una relación entre cambios de posición (desplazamientos) con respecto al tiempo, para ello sería necesario tener la tasa de variación explícita (ya dada).

El estudiante Moisés mostró por medio de una gráfica (ver ilustración 20 foto 4) cómo identificó el ritmo en función de la distancia; éste lo hacía partiendo de las diferencias entre las distancias (ver ilustración 19, fotos 1, 2 y 3), donde al ver que el tiempo se presentaba de manera constante (aumentaba de a cinco segundos), no lo tuvo en cuenta para describir el gráfico con el cual explicó la tabla, en donde se destacan algunas expresiones orales que mostraron cómo estaba entendiendo la tabla, "*como hay una mayor distancia va mucho más rápido, voy alegre porque voy pa' piscina*", mostrando que estableció una relación entre la distancia y la rapidez o ritmo de caminar, sin prestarle mucha atención al tiempo debido a que los cambios en éste eran constantes.

De acuerdo a lo anterior, se pudo observar entonces que, dado a que la rapidez es una cantidad *"ostensible"* , es decir que se puede percibir en el contexto, para reconocerla (desde el fenómeno en sí) no hay necesidad de identificar la relación entre la distancia y tiempo. Luego, los estudiantes comprendieron un ritmo asociado a esas formas de caminar, donde la rapidez se percibió como una cantidad "*ostensible"* y donde establecieron una relación de dependencia entre la distancia y el ritmo, es decir la distancia en función de la velocidad o rapidez.

Ahora, se presentarán las descripciones verbales, escritas y gráficas que realizaron cada uno de los cuatro estudiantes durante el desarrollo de la actividad 4. Esta actividad se realizó de manera práctica con los estudiantes, dándoles de esta forma unas instrucciones que consistían en que por cada indicación realizada con una exclamación los estudiantes debían realizar ya fuera dos saltos o un salto (de acuerdo a lo que se les haya indicado).

El estudiante Moisés, al terminar de hacer los distintos recorridos de acuerdo a las indicaciones dadas, se le pidió que describiera lo observado en el movimiento de cada uno. En esta actividad se destacó cómo Moisés asoció los saltos realizados por indicación con el término velocidad. Se observó que éste estudiante dio cuenta del cambio de los saltos por indicación, relacionándolos con la velocidad. De esta manera, se evidenció como Moisés logró construir una imagen más dinámica de la situación, donde el término velocidad surgió de manera natural y de su contexto.

Investigador: *Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño*

Moisés: *En las primeras cinco indicaciones el sujeto 1 salta 2 cuadros por indicación y el sujeto 2 salta 3 cuadros por indicación. En las otras 5 indicaciones el sujeto 1 y ya tiene mayor velocidad osea 3 saltos por indicación y el sujeto 2 ya tiene menor velocidad, osea 1 salto por indicación.*

Investigador: *¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó en los diferentes recorridos?*

Moisés: *A la velocidad o ritmo de saltos que cada uno lleva" y es diferente porque no tienen la misma velocidad, ritmo o control de saltos*

Investigador: *¿Cuánto más está andando el niño 2 con respecto al niño 1?*

Moisés: *el niño 1 no tiene misma velocidad como el sujeto 2*

Los razonamientos que se evidenciaron en las estudiantes Hanna, Atenas y Salomé respectivamente mostraron cómo la relación entre las indicaciones y el número de saltos fueron entendidas en términos de ritmos, para lo cual se construyó otro tipo de relación covariacional, ya no de acuerdo con las indicaciones y el número de saltos sino con base a la dependencia de la distancia respecto a un ritmo, ya sea lento o rápido que fue el que determinó recorridos mayores o menores para intervalos de tiempos determinados.

A Hanna, cuando se le pidió realizar una descripción de los recorridos con relación al movimiento de un niño con respecto al otro, expresó:

Investigador: *Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño*

Hanna: *El niño 2 en la quinta indicación disminuyo el ritmo y el niño 1 aumento el ritmo saltando 1 mas*

Investigador: *¿Qué tan rápido era el desplazamiento del niño 1 y del niño 2?*

Hanna: *El desplazamiento del niño 1 era mas lento que el desplazamiento del niño 2, el niño 2 iba más rápido, de a 1 distancia [pasos] más rápido que el niño 1*

Atenas, al preguntarle después de cada recorrido, ¿a qué se debía la posición en que cada niño terminó?, manifestó:

Investigador: *¿A qué se debía la posición en que cada niño terminó?*

Atenas: *A que el niño 2 va más rápido que el niño 1 para el niño alcanzar al niño 2 debe ir más rápido*
Porque ellos cambiaron de ritmo o sea que una camino más rápido que la otra

Luego, al pedirle a Salomé que describiera lo observado en los distintos recorridos, respondió:

Investigador: *Describe lo observado en el movimiento de cada niño*

Salomé: *Que un niño vas más rápido que el otro*

Investigador: *¿Cómo fue el ritmo en cada niño después de cada recorrido?*

Salomé: *Uno fue rápido y otro fue lento. Porque uno da mas saltos que otro por señal*

En la actividad de las señas, es claro tener presente que el tiempo se está *disfrazando,* ya que las señas (o marcas) se están dando en función de los pasos, de tal forma que la señal funcionó sincronizada (fue una manera de marcar tiempo), es decir por señal los estudiantes debían dar uno o dos pasos por marca, lo cual obligó a que uno acelerara su movimiento y el otro lo retrasase, de tal manera que ambos terminaran en el mismo instante (esa fue la sincronización).

La señal fue asociada al tiempo, por ende cuando se realizaba la actividad era probable que el término ritmo o velocidad apareciera, pues se estuvo haciendo una relación entre señal (en función del tiempo) y los pasos (en función de la distancia), lo cual permitió ver la tasa de variación (pasos por indicación dada) como un ritmo o velocidad.

En ese orden de ideas, cuando a Moisés, Hanna, Atenas y Salomé se les dio la tasa de variación de manera explícita (tantos pasos por señal) percibieron dicha tasa como un ritmo, o velocidad, donde lograron establecer esa tercera cantidad (ritmo o velocidad) como una relación entre las señas y el número de pasos, esto, dado a que la velocidad se presentó de forma "*ostensible*".

En general, los razonamientos de los cuatro estudiantes durante las tres actividades acerca del movimiento mostraron como las imágenes de covariación se fueron construyendo a medida que se interactuaba con el fenómeno de variación y cambio. De esta manera se logró evidenciar que el estudiante luego de comparar y reconocer que unos cambios en unas cantidades de magnitudes generaron cambios respectivos en otras (covariaban la distancia y el tiempo), lograron ver esto en términos de ritmo y establecieron una relación entre el ritmo y las distancias recorridas, donde para un mayor ritmo se recorrió una mayor distancia y para un ritmo lento la distancia fue menor (covariaban el ritmo y la distancia).

Capítulo 6

6. CONCLUSIONES

Conforme se mencionó en el capítulo anterior, y de acuerdo al objetivo planteado en la investigación, se logró identificar dos características en los razonamientos de los estudiantes en cuanto al razonamiento covariacional y la tasa de variación, dichas características atañen a las formas como los estudiantes percibieron la tasa de variación.

Inicialmente la tasa de variación se percibió como una comparación entre dos cantidades, para ello, los estudiantes primero determinaron los cambios entre cada magnitud, es decir, ellos observaron y calcularon el comportamiento general de las magnitudes: el tiempo cambia cada tantos segundos y la distancia cada tantos metros, para luego indicar en un solo razonamiento la razón de cambio existente allí. Esto es, cada tantos segundos recorre tantos metros. Dichas relaciones se establecieron en términos de una implicación lógica –causa-efecto- más que desde la elaboración de un cociente entre las cantidades de magnitudes.

Conforme se fueron implementando las situaciones, los estudiantes empezaron a percibir la tasa de variación como el surgimiento de una tercera cantidad relacionándola con términos como velocidad, rapidez, ritmo rápido, ritmo lento; dando cuenta de una coexistencia de tres cantidades que intervenían en el fenómeno, más que de una comparación multiplicativa entre la distancia y el tiempo. Esto se debió, posiblemente a que la velocidad es ostensible y por tanto puede emerger en el diálogo, puesto que hace parte del diario vivir de los estudiantes (al jugar, los videojuegos, en los juegos de carros, montando bicicleta, etc.).

A partir de las situaciones implementadas se observó que los estudiantes establecieron relaciones funcionales y covariacionales entre cantidades de magnitudes, unas un poco más refinadas que otras. Debido a que son pocos los estudiantes que logran establecer estas relaciones, es menester sugerir la importancia de generar ciertas experiencias y situaciones en el aula de clase, con el objetivo de resaltar, fortalecer y fomentar estos modos de razonar, de tal manera que en estudios posteriores de conceptos propios del cálculo como el límite sea de una mejor comprensión.

En lo referido al estudio de la variación, es importante mencionar que esta no se puede reducir al trabajo con tablas, gráficas, funciones, expresiones algebraicas, entre otros, puesto que estos, por sí solos, no desarrollan el pensamiento variacional. En ese sentido, se sugieren dos aspectos: el primero, es que a través de estos objetos matemáticos y otros más, se realice un acercamiento al estudio de la covariación, en coherencia con lo que señala Vasco (2003): "*el objeto del pensamiento variacional es la covariación entre cantidades de magnitud*" (p. 68). Es decir, ir más allá del simple reconocimiento del cambio de cantidades en una magnitud. El segundo, alude a la labor docente, debido a que es el maestro quien debe dirigir las actividades con preguntas que ayuden al estudiante a evidenciar los cambios y las relaciones covariacionales que se pueden establecer en un fenómeno determinado.

Discusión final

Cuando a los estudiantes se les presentó la tabla del estado quieto correspondiente a la situación tres, en la cual para diferentes tiempos la distancia siempre era cero (Ver anexo 3), los estudiantes hicieron una lectura de la gráfica diciendo: *"A los cinco, no recorría nada; a los diez, no recorría nada, a los quince, no recorría nada, puede pasar todo el tiempo que sea y seguiría allí, en el mismo lugar".*

Sería interesante indagar sobre las formas de razonar de los jóvenes cuando el punto de partida es diferente de cero. Es decir, presentarles una tabla en la cual al cambio del tiempo la distancia a la que se encuentre el individuo con respecto al punto de referencia sea siempre la misma y mirar la interpretación que los estudiantes le dan a esta situación. Un ejemplo podría ser:

Tiempo (s)	Distancia (m)
5	7
10	7
15	7
20	7

Ilustración 21: Tabla tiempo variable y distancia constante

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benjumea, P. A., Gallego, D. C., Miranda, N. A., Montoya, N. M., & Ocampo, A. (2007). *El desarrollo del pensamiento variacional y la formulación de problemas en los grados 2º, 3º, 4º y 9º de la Educación Básica.* Trabajo de grado, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia. Medellin.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoría e aos métodos.* (M. J. Alvarez, S. B. Santos, & T. M. Baptista, Trad.) Porto: Porto Editora.

Botero, O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de Educación Básica a partir del estudio de la variación.* Tesis de maestría.Universidad de Antioquia. Medellín.

Cabrera, L., & Cantoral, R. (2010). El Pensamiento y Lenguaje Variacional como eje para el desarrollo de Competencias. Estudio Socioepistemológico en el marco de la RIEMS. *V Congreso Internacional de Innovación Educativa*, pp. 547-552.

Camargo, L., & Guzmán, A. C. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional, relaciones entre pendiente y la razón.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 17-CHILE.*

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.* Recuperado el 23 de Agosto de 2012, de CINVESTAV: http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2000/90972_2.pdf

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y Representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime*(Número especial), pp. 83-102.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: una marco conceptual y un estudio. *EMA, 8*(2), 121-156.

Castaño, L., García, J., Luján, M., Medina, C., Ruiz, J., & Trejos, E. (2008). *Las situaciones de variación y cambio como herramienta para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático desde los primeros grados de escolaridad.* Trabajo de grado. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Medellin.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas.* Santa fe de Bogotá, D.C.: MAGISTERIO.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Imprenta Nacional de Colombia.

Dolores, C., & Salgado Beltrán, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen 72*, pp. 63-74.

Farfán, R., & Cantoral, R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa- Relime, Volumen 6*(Número 001), pp. 27-40.

Henao, R. D. (2007). *Situaciones sobre pensamiento variacional.* Módulo 7. Medellin.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta ed.). México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 313-330.

Posada, F. (ed, 2006). *Serie didáctica de las matemáticas: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico* (Vol. 2). Medellin: Artes y Letras Ltda.

Posada, F. y Villa-Ochoa, J. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín.

Posada, M. E. (ed, 2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Gobernación de Antioquia.* Medellín: Digital Express Ltda.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos* (Cuarta ed.). Madrid: Morata.

Strom, A. D. (2006). The role of covariational reasoning in learning and understanding exponential functions., *2*, pp. 264-630.

Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

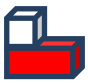
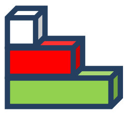
Vasco, C. E. (2009). Tres ideas fuertes del cálculo: variación, tasa y acumulación. *Memorias Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática universitaria*, *1 (3)*, pp. 62-98. Bogotá, Colombia.

Villa-Ochoa, J. A. (2011). Raciocínio "covariacional": O caso da função quadrática. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*, p.1-12. Recife, Brasil.

ANEXOS

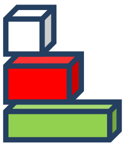
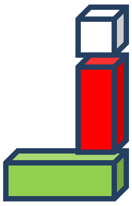
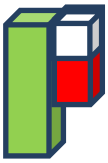
Anexo 1: Actividades propuestas para las regletas de Cuisenaire

Actividad 2: Está encaminada a aprovechar el material concreto para el trabajo con secuencias numéricas.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Fila 1								
	1	1	1	1	1			
Fila 2								
	1	2	3	4				
Fila 3								
	1	3	6	10				

En esta actividad, se presentan algunas secuencias que se pueden generar en el aula, en las cuales los estudiantes identifiquen regularidades, con las cuales puedan obtener la cantidad de unidades de las siguientes configuraciones. Posteriormente, sería interesante brindar un espacio a los estudiantes de crear su propio criterio de regularidad en determinada secuencia construida por él mismo, así como de comunicarla dando a conocer cómo la realizó.

Actividad 3: Con la cual se busca mirar la dependencia entre el área superficial y el número de caras tapadas.

Configuración (figura)	Caras tapadas (número de caras)	Área superficial (unidades cuadradas)
	6	
		
		
		

En esta actividad se presentan cuatro figuras diferentes formadas con las regletas de uno, dos y tres unidades; con dichas figuras se observa una relación entre el número de caras cubiertas y el área superficial, ya que a medida que se tapan más caras disminuye el área superficial y a medida que se cubren menos caras aumenta el área superficial de la figura obtenida.

Respecto a dicha relación se establecen las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál fue la figura con la que obtuviste la mayor área superficial?
- ✓ ¿En cuales figuras obtuviste una menor área superficial?
- ✓ ¿Cuántas caras se tapan en dichas figuras?
- ✓ ¿A medida que se aumenta el número de caras tapadas qué pasa con el área superficial?

Actividad 4: Con esta actividad, se busca evidenciar que, para un mismo número de cubos (mismo volumen) puede haber cuerpos con diferente área superficial.

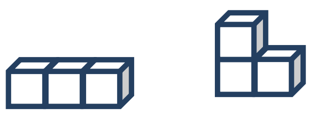
Para un mismo número de cubos, construye arreglos con la siguiente condición: cada cubo debe compartir al menos una cara con algún otro cubo. Calcula todas las posibles áreas superficiales para un mismo número de cubos y completa el cuadro con los datos obtenidos.

Ejemplo:

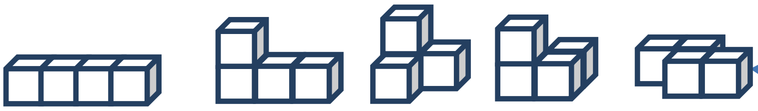
Con un cubo, sólo es posible un arreglo con área superficial 6 unidades cuadradas

Con dos cubos sólo es posible un arreglo con área superficial 10 unidades cuadradas

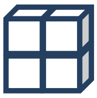
Con tres cubos es posible dos arreglos, pero ambos con la misma área superficial, 14 unidades cuadradas.



Con cuatro cubos, es posible construir diferentes arreglos, pero encontramos dos valores diferentes para el área superficial.



El área superficial para estos cinco arreglos es la misma, 18 unidades cuadradas (aún hay más arreglos con la misma área superficial)



El área superficial para este arreglo es de 16 unidades

Continúa el ejercicio, pero solamente ten en cuenta arreglos con diferentes valores para el área superficial

Número de cubos	**Posibilidades de área superficial (en unidades cuadradas)**	**Área máxima**	**Área mínima**
1	6	6	6
2	10	10	10
3	14	14	14
4	16 y 18	18	16
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Esta actividad busca identificar el establecimiento de criterios de dependencia entre varias magnitudes: el volumen, el área superficial y el número de caras comunes entre cubos.

En los arreglos con 4 cubos se mostró diferentes configuraciones con área superficial 18 unidades cuadradas, ¿qué tienen en común estos arreglos y qué los diferencia del arreglo cuya área superficial es 16 unidades cuadradas?

- ✓ ¿Con ocho cubos qué valores para el área superficial obtuviste?
- ✓ ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo?
- ✓ A partir de una configuración (un arreglo de cubos) con un área superficial mínima, ¿Cómo se obtiene un arreglo con área superficial mayor?
- ✓ ¿De qué depende, para un número de cubos, obtener un arreglo de área superficial mínima, y máxima?

Anexo 2: Solicitud permiso de los padres de familia

Medellín, 23 de Abril de 2012

Cordial saludo

La presente carta es para solicitar su autorización como padre de xxxxxx, para participar de la investigación que se llevará a cabo en la Institución Educativa República de Uruguay, dicha investigación es netamente académica y está enfocada en estudiar el razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado, lo que decir que nuestro objeto de estudio no son los estudiantes como tal, sino dicho razonamiento.

Es necesario aclarar que no publicaremos identidad de su hijo, y en caso tal que hagamos uso de videos o fotografías, siempre velaremos por proteger que sus rostros no sean publicados, con el fin de evitar alguna estigmatización o comentarios peyorativos.

Atentamente

____

____

____

___________________________ ______________________________

Anexo 3: Situaciones de intervención

Universidad de Antioquia
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Práctica profesional III
Institución Educativa República de Uruguay
Grado 5º 1, 5º2, 5º3, 5º4

Nombre: ____ grado: ________

Regleta	Volumen	Área superficial
	1	6
	2	10
	3	
		
		

Observaciones:

- No tengas miedo para preguntar
- Describe los procedimientos realizados en cada pregunta
- No borrar los errores, sigue aparte

Universidad de Antioquia

Práctica profesional III

IE República de Uruguay

Actividad 2

Nombre: __________________________________ Fecha: ___________________

Registra la distancia recorrida en 5, 10, 15 y 20 segundos desde una línea de partida, en tres estados: quieto, lento y rápido.

ESTADO QUIETO

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

ESTADO: RITMO LENTO

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

ESTADO: RITMO RÁPIDO

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

Universidad de Antioquia

Práctica profesional III

IE República de Uruguay

Actividad 3

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

Tiempo (en segundos)	Distancia (en metros)

Universidad de Antioquia
Práctica profesional III
IE República de Uruguay
Actividad 4

Nombre: ________________________________ Fecha: _______________________

Realiza el movimiento de una rana que se está desplazando por un camino que está dividido por señales con una misma medida. Reúnete con otro compañero para realizar cada recorrido.

Recorrido 1

El niño 1 se desplaza dos señales por cada indicación, dada por el profesor. El niño 2 se desplaza 3 señales por cada indicación. Tanto el niño 1 como el niño 2 deben hacerlo en el mismo tiempo y deben hacer el recorrido pasando por cada señal.

1- Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño.

2- ¿Cómo fue el ritmo en cada niño?

3- ¿Qué tan rápido era el desplazamiento del niño 1 y del niño 2?

4- ¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó?

5- ¿Cuánto demás esta andando el niño 2 del niño 1?

Recorrido 2

El niño 1 se desplaza dos señales por cada indicación y el niño 2 se desplaza 3 señales por cada indicación, durante las diez primeras indicaciones.

Luego, el niño 1 se desplaza tres señales por indicación, y el niño 2 se desplaza dos señales, en las diez siguientes indicaciones.

6- Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño

7- Después de la décima indicación, que observas en los desplazamientos

8- ¿Qué tan rápido o que tan lento iban los niños?

9- ¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó?

Recorrido 3

El niño 1 se desplaza dos señales por indicación, y el niño 2 lo hace a tres señales por cada indicación, durante las primeras indicaciones.

En las siguientes diez indicaciones, el niño 1 se desplaza a tres señales por indicación, mientras que el niño 2 se desplaza a una señal por cada indicación.

10-Describe lo que observaste en el movimiento de cada niño

11-Después de la décima indicación, que observas en los desplazamientos

12-¿A qué se debe la posición en que cada uno terminó?

Anexo 4: Ponencia IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

MARÍA ELENA HENAO

PONENTE

Dictó la ponencia: ***"Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado"***, dentro del marco del IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias básicas, realizado en la Universidad de Medellín, los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012.

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

José Alberto Rúa Vásquez
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

WILSÓN BOSCO MARÍN

PONENTE

Dictó la ponencia: ***"Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado"***, dentro del marco del IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias básicas, realizado en la Universidad de Medellín, los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012.

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

José Alberto Rúa Vásquez
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

DANIEL FERNANDO MONTOYA

PONENTE

Dictó la ponencia: ***"Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado"***, dentro del marco del IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias básicas, realizado en la Universidad de Medellín, los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012.

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

JOHAN SEBASTIÁN RESTREPO

PONENTE

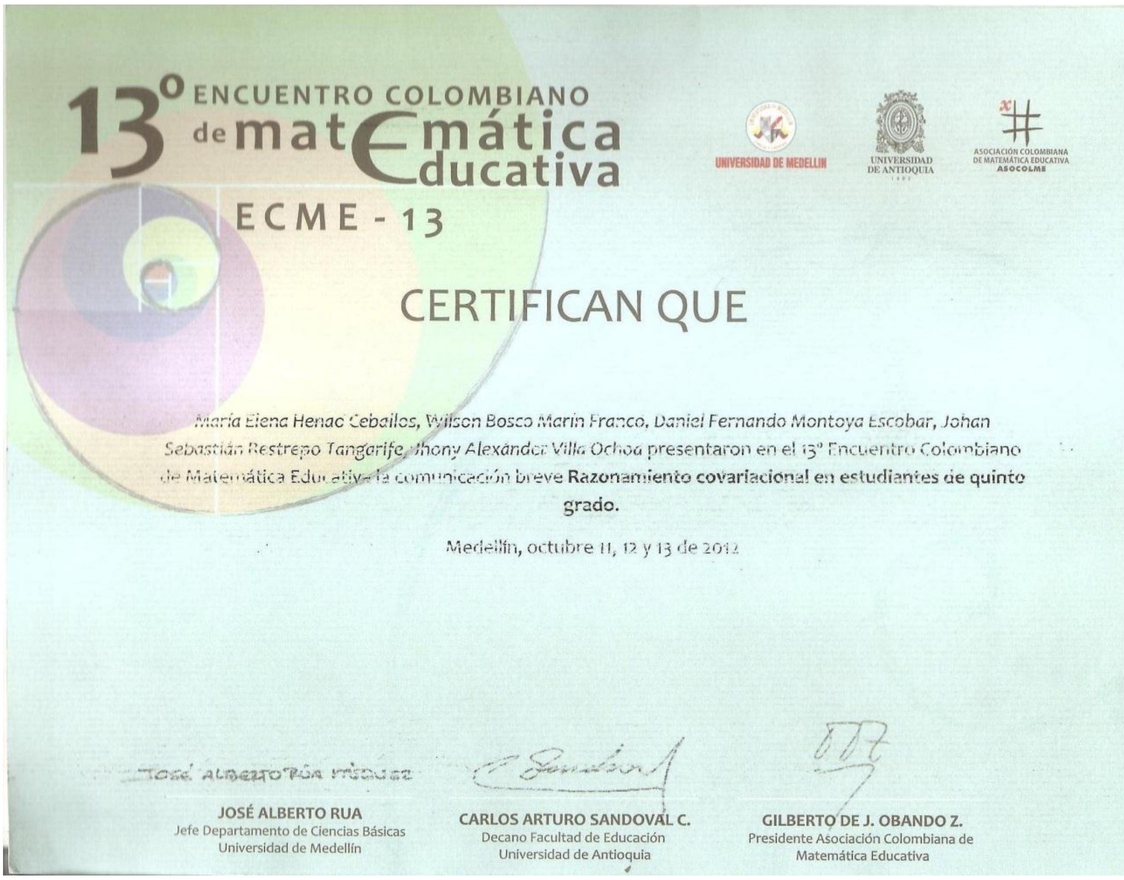
Dictó la ponencia: ***"Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado"***, dentro del marco del IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias básicas, realizado en la Universidad de Medellín, los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012.

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas

Anexo 5: Ponencia 13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.



13º ENCUENTRO COLOMBIANO de matEmática Educativa

ECME - 13

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA ASOCOLME

CERTIFICAN QUE

María Elena Henao Ceballos, Wilson Bosco Marín Franco, Daniel Fernando Montoya Escobar, Johan Sebastián Restrepo Tangarife, Jhony Alexánder Villa Ochoa presentaron en el 13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa la comunicación breve **Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado.**

Medellín, octubre 11, 12 y 13 de 2012

JOSÉ ALBERTO RUA
Jefe Departamento de Ciencias Básicas
Universidad de Medellín

CARLOS ARTURO SANDOVAL C.
Decano Facultad de Educación
Universidad de Antioquia

GILBERTO DE J. OBANDO Z.
Presidente Asociación Colombiana de Matemática Educativa