

**LOS MEDIOS CULTURALES SEMIÓTICOS: UNA POSIBILIDAD PARA
APROXIMARSE A LA MULTIPLICACIÓN**

JHONATHAN A. GALLEGO CERÓN

DUVAN E. RESTREPO MARTÍNEZ

SUSANA BETANCUR PELÁEZ

JESICA TAPIAS VÁSQUEZ

DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

MEDELLÍN

2013

**LOS MEDIOS CULTURALES SEMIÓTICOS: UNA POSIBILIDAD PARA
APROXIMARSE A LA MULTIPLICACIÓN**

**Trabajo de investigación para optar al título de
Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas**

JHONATHAN ALEXANDER GALLEGO CERÓN

DUVAN ERNESTO RESTREPO MARTÍNEZ

SUSANA BETANCUR PELÁEZ

JESICA TAPIAS VÁSQUEZ

ASESORES:

GILBERTO DE JESÚS OBANDO ZAPATA

MARIA DENIS VANEGAS VASCO

DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

MEDELLÍN

2013

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADOS EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**LOS MEDIOS CULTURALES SEMIÓTICOS: UNA POSIBILIDAD PARA
APROXIMARSE A LA MULTIPLICACIÓN**

Jhonathan Alexander Gallego Cerón

Duvan Ernesto Restrepo Martínez

Susana Betancur Peláez

Jesica Tapias Vásquez

Orientadores: Gilberto de Jesús Obando Zapata

Maria Denis Vanegas Vasco

Nota de aceptación

Medellín

2013

AGRADECIMIENTOS

Al dios de cada uno, al destino o a la energía cósmica en la que creemos...

A nuestras familias, que con su gran amor y su incondicional apoyo han tomado nuestras manos para avanzar en el camino...

A nuestros compañeros, quienes más que colegas han sido nuestros amigos y nos han acompañado en miles de aventuras...

Al profesor Gilberto Obando; por su importante acompañamiento.

A la profesora Denis Vanegas por su gran paciencia.

A los docentes de la Universidad de Antioquia que han aportado a nuestra formación.

A la Institución Educativa Antonio Ricaurte y a los profesores cooperadores que nos permitieron ingresar a sus aulas para realizar nuestra práctica pedagógica y el presente trabajo de investigación.

RESUMEN

Tras observar la manera en que las estudiantes resolvían tareas de tipo multiplicativo, se identificó que la vía más usada consistía en el uso de sumas abreviadas de sumandos iguales, lo cual constituye una forma válida pero no suficiente para conceptualizar la multiplicación debido a su imposibilidad para el tratamiento de cantidades continuas, así como para el establecimiento de relaciones entre dos tipos de cantidades diferentes, lo que hace manifiesta la necesidad de explorar un modelo que haga énfasis en la multiplicación como un proceso que pone en correspondencia elementos de dos familias de cantidades, es decir, un modelo centrado en la proporcionalidad directa.

Por otra parte, pudo apreciarse que en un primer contacto con las tareas planteadas las niñas presentaban dificultades en cuanto a cómo proceder, pero al discutir con maestros en formación y pares académicos las ideas que surgían alrededor de las tareas, las niñas comenzaban a identificar relaciones entre los objetos presentes allí que les permitían obtener una mejor comprensión de las tareas y formular estrategias para desarrollarlas. Las niñas utilizaban esquemas, dibujos, tablas y símbolos, pero también movimientos corporales apoyados en palabras para representar sus percepciones sobre la tarea, sobre lo que estaban pensando en ese momento; es decir, fue posible ver lo que las niñas sabían a través de lo que estaban haciendo. Este hecho fue determinante para comprender que esos Medios Culturales Semióticos instaurados en la cultura y empleados por las niñas son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas porque sirven como evidencia de los procesos de reflexión desencadenados alrededor de los objetos matemáticos, de los motivos establecidos en las tareas que involucran dichos objetos y las acciones realizadas para alcanzarlos; es decir, hacen posible la objetivación.

Las dos ideas presentadas sugieren que los Medios Culturales Semióticos pueden ser una potente herramienta para aproximarse a la multiplicación desde una perspectiva de proporcionalidad directa. Así, surge la pregunta orientadora: *¿Cómo intervienen los Medios Culturales Semióticos en la objetivación de procesos relativos a la multiplicación?* De la cual se desprende el objetivo: *Analizar el papel que desempeñan los Medios Culturales Semióticos en la objetivación de procesos relativos a la multiplicación.*

Para dar respuesta a la pregunta y cumplimiento al objetivo, se diseñaron varias tareas conceptualizadas desde la multiplicación como proporcionalidad directa, que abrían espacio además para analizar la influencia de los Medios Culturales Semióticos en la forma de resolverlas, específicamente, en la manera en que las niñas reconocían relaciones multiplicativas. Al analizar lo sucedido, se estableció que fueron dos las tareas que más elementos aportaron para responder la pregunta orientadora: Las monedas de oro y Golosinas para la fiesta.

La actividad desencadenada a partir de estas tareas se analizó desde dos miradas; una sociocultural, centrada en la Teoría de la Actividad y asumiendo como referentes teóricos trabajos realizados por Radford (2000; 2003; 2005; 2006; 2010), Daniels (2001), Kozulin (1988). Por otra parte, una segunda mirada concerniente a la multiplicación retomando autores como Torres (2013), Obando y Botero (2006), Obando, Arboleda y Vasco (2013), y Santafe & Triana (2010). Esto permitió visualizar cuatro categorías emergentes: Instrumentos para la acción, Interacciones verbales, De lo cualitativo a lo cuantitativo y Relaciones multiplicativas.

Lo anterior hizo posible comprender que cuando se proponen tareas a las estudiantes, ellas establecen motivos diferentes a los pensados por el docente a la hora de plantearlas. Para la consecución de dichos motivos, las niñas emplean instrumentos a través de los cuales desarrollan acciones; especialmente se valen de interacciones verbales para discutir, analizar y comprender las relaciones multiplicativas presentes allí, expresándolas en un principio de forma cualitativa y posteriormente

cuantitativamente. En otras palabras, las estudiantes objetivan los procesos relativos a la multiplicación gracias a Medios Culturales Semióticos.

Palabras clave. Medios Culturales Semióticos; enfoque sociocultural; Teoría de la Actividad; multiplicación, proporcionalidad directa.

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE ILUSTRACIONES	
1. ASÍ SUCEDIERON LAS COSAS...	10
1.1 El centro de práctica pedagógica	10
1.2 El proceso desde el inicio	14
1.3 Delimitación del problema	19
1.4 Aspectos metodológicos	21
1.5 Las tareas	23
1.5.1 Las monedas de oro	24
1.5.2 Golosinas para la fiesta	25
2. SOPORTES TEÓRICOS	27
2.1 El enfoque sociocultural	27
2.1.1 ¿Por qué abordar la semiótica?	28
2.1.2 La Actividad	30
2.1.3 La objetivación	31
2.1.4 Saber, conocimiento y pensamiento	33
2.2 La multiplicación	35
2.2.1 Suma de sumandos iguales	35
2.2.2 La multiplicación como proporcionalidad directa	38
3. PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN	41
3.1 ¿Qué sucedió con las tareas?	41
3.2 Categorías emergentes	58
3.2.1 De lo cualitativo a lo cuantitativo	61
3.2.2 Instrumentos para la acción	62
3.2.3 Interacciones verbales	64
3.2.4 Establecimiento de relaciones multiplicativas	65
4. CONCLUSIONES	67
5. ANEXOS	70
6. REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS	102

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1-Sumas reiteradas	15
Ilustración 2-Tarea: Fábrica de osos	16
Ilustración 3-Tarea: Caja de caramelos.....	17
Ilustración 4-Tabla de registro "Monedas de oro"	25
Ilustración 5-Mapa conceptual: Enfoque sociocultural	28
Ilustración 6-Representación geométrica de proporción	39
Ilustración 7-Reorganización de artefactos e instrumentos.....	43
Ilustración 8-Representación de monedas encontradas	45
Ilustración 9-Tabla re registro 1 de monedas encontradas	46
Ilustración 10-Tabla re registro 2 de monedas encontradas	46
Ilustración 11-Reconocimiento de familias de cantidades	48
Ilustración 12- Tabla re registro 3 de monedas encontradas	48
Ilustración 13-Organización de información sin tablas de registro	50
Ilustración 14-Presupuesto al detal	53
Ilustración 15-Presupuesto menor al detal.....	53
Ilustración 16-Sumas iteradas.....	54
Ilustración 17-Relación aditiva familias de cantidades.....	55
Ilustración 18-Relación multiplicativa de dos familias de cantidades	55
Ilustración 19-Presupuesto "al por mayor"	56
Ilustración 20-Arrego de precios para completar \$1.000	57
Ilustración 21-Categorías emergentes	59
Ilustración 22-Tabla de registro individual, El juego de las ranas.....	74
Ilustración 23-Tabla de registro grupal, El juego de la rana	75
Ilustración 24-Planeación tarea Caja de caramelos.....	77
Ilustración 25-Guía de trabajo, El juego del parqués.....	81
Ilustración 26-Guía de reflexión, El juego del parqués	81
Ilustración 27-Tratamiento de familias de cantidades 1	84
Ilustración 28-Tratamiento de familias de cantidades 2	84
Ilustración 29-Tratamiento de familias de cantidades 3	85
Ilustración 30-Tratamiento de familias de cantidades 4	85
Ilustración 31-Tratamiento de familias de cantidades 5	86
Ilustración 32-Tratamiento de una familia de cantidades.....	86
Ilustración 33-Tablas de registro.....	88
Ilustración 34-Planeación tarea Fábrica de osos	91
Ilustración 35-Solución tarea Fábrica de osos 1	92
Ilustración 36-Solución tarea Fábrica de osos 2	92

Ilustración 37-Planteamiento tarea Caja de caramelos.....	93
Ilustración 38-Solución tarea Caja de caramelos 1.....	94
Ilustración 39-Solución tarea Caja de caramelos 2.....	94
Ilustración 40-Solución tarea Caja de caramelos 3.....	95
Ilustración 41-Tabla de registro, El juego del parqués 1.....	98
Ilustración 42-Tabla de registro, El juego del parqués 2.....	99
Ilustración 43-Representaciones gráficas, El juego del parqués	100
Ilustración 44-Procedimiento para encontrar soluciones	101

1. ASÍ SUCEDIERON LAS COSAS

1.1 El centro de práctica pedagógica

El centro de nuestra práctica pedagógica fue la Institución Educativa Antonio Ricaurte, localizada al sur-occidente de la ciudad de Medellín en la comuna 16, Barrio Belén Rincón. Es una institución de carácter oficial que ofrece los niveles de Preescolar, Básica Primaria y Secundaria, y Media Académica. Atiende una población mixta en la Secundaria (506 estudiantes) y femenina en la Primaria (536 estudiantes), ubicada entre estratos socioeconómicos 1, 2 y 3.

El barrio Belén Rincón hace parte de la comuna 16. Su nombre se debe a que literalmente se encuentra en un rincón de la ciudad y a pesar de ser uno de los barrios más antiguos de la ciudad, Belén Rincón no ha tenido un significativo proceso de modernización como el de otros barrios cercanos a él con su misma antigüedad. Su limitado desarrollo se ha logrado gracias al trabajo conjunto de la comunidad y las organizaciones de la Junta de Acción Comunal, quienes se encargaron de promover actividades económicas que permitieran recoger fondos para construir la escuela con el fin de contribuir al desarrollo de la comunidad.

Actualmente Belén Rincón adelanta un acelerado proceso de desarrollo en materia de infraestructura gracias a la construcción de numerosas urbanizaciones. Esto ha generado varios contrastes sociales reflejados no sólo en las construcciones sino también en la vida de las personas, debido a las marcadas delimitaciones entre los distintos estratos socioeconómicos y al desplazamiento de una considerable porción de la comunidad hacia las partes más altas y rurales

del sector como consecuencia de la compra de sus predios para la construcción de las nuevas edificaciones.

Por otro lado, Belén Rincón no es ajeno a los problemas sociales y económicos que atraviesan tantos barrios y ciudades de nuestro país. En la actualidad dos bandas al margen de la ley se disputan el control territorial a través de prácticas de extorción y microtráfico que generan serios problemas sociales en la comunidad. Así por ejemplo, la Institución educativa Antonio Ricaurte se encuentra ubicada en una “frontera invisible” que divide el territorio de las bandas. Debido a esto la institución tiene dos puertas por la cuales entran y salen estudiantes de diferentes sectores del barrio. Esta disputa genera “esporádicos brotes de conflicto” (PEI, 2004), que ocasionan graves problemas de inseguridad, así como desplazamientos individuales y familiares, y que incluso llegan a ser mortales.

Los documentos institucionales

Con el objetivo de conocer la organización académica de la institución, se hizo lectura de dos de los documentos rectores: el Proyecto Educativo Institucional y el Plan de Área de Matemáticas; este último para tener una visión de los planteamientos que sobre la educación matemática se contemplan en el colegio. Como bien se sabe, ambos documentos están conformados por una amplia cantidad de componentes que describen de forma precisa los múltiples detalles que determinan la esencia de la institución educativa. Por ello en el presente texto sólo se centra la atención en algunos de dichos aspectos que resultan más significativos para conocer la idea de educación en el plantel y específicamente, la de educación matemática.

Así pues, en primer lugar es prudente mencionar que dentro del componente filosófico de la institución se plantea la adopción de un modelo pedagógico humanista-desarrollista que abre la posibilidad de favorecer por medio de dinámicas e interacciones dentro y fuera del aula, el desarrollo, la formación en valores y la autonomía de los estudiantes. Se explica también que la institución educativa es consciente que adoptar este modelo no es nada fácil, ya que ello implica considerar de una forma no tradicional elementos como el aprendizaje, las relaciones maestro-alumno, la evaluación, el currículo y los ambientes de aprendizaje; partiendo de ideas como:

- “Aprender haciendo”, es decir, la construcción del conocimiento a través de la interacción con objetos concretos.
- Considerar la motivación y el interés de los estudiantes para lograr la transformación de su tradicional rol pasivo a uno activo.
- La enseñanza pensada como un “acto puro de acción donde los estudiantes realizan actividades a través de experiencias directas y situaciones concretas” (PEI, 2004).
- Docentes abiertos a cambios pedagógicos en el aula de clase, que sean mediadores entre los alumnos y el conocimiento, y que promuevan ambientes de aprendizaje que le permitan a los estudiantes desarrollar habilidades y destrezas.

Puede apreciarse el planteamiento de un gran interés por el desarrollo de procesos de formación que consideren las características de los individuos que participen en él, donde los docentes se conciben como mediadores entre los alumnos y el conocimiento, y la enseñanza como un acto que se construyen a partir de las acciones de los estudiantes.

Ahora bien, en cuanto al Plan de Área de Matemáticas, el objetivo general planteado consiste en: Generar espacios de análisis y crítica reflexiva en el desarrollo de habilidades intelectuales, apropiándose de procesos de pensamiento, y las competencias propositiva, argumentativa e interpretativa, que generen en el estudiante autonomía frente a la solución de diferentes situaciones problema que se le presente en la vida¹.

Objetivo éste que se complementa con elementos como el interés por atender las exigencias educativas del medio para formar estudiantes con éxito en sus microempresas y negocios domésticos, concibiendo que la importancia de las matemáticas consiste en servir como herramienta conceptual que ayude a las personas a fortalecer las competencias laborales. En esta línea el conocimiento no es lineal y al estudiante se le enseña a pensar a partir de situaciones contextualizadas.

Es importante también mencionar que en dicho documento se expresa que:

“El área pretende también desde sus actividades desarrollar competencias ciudadanas puesto que las matemáticas aplicadas en otras áreas de conocimiento, cobra el valor de herramienta que posibilita comprensión y solución de problemas en el ámbito de la sociología, el derecho, la psicología, la comunicación, la economía y otras, lo que finalmente ofrece la oportunidad de insertar al estudiante un una cultura ciudadana que les aporte una visión global de su entorno local y nacional” (PEI, 2004).

Todo ello muestra un énfasis en el desarrollo de competencias ciudadanas así como en el fortalecimiento de habilidades para la solución de problemas. Finalmente, es preciso resaltar que los planteamientos institucionales hacen principal énfasis en una postura social de la educación.

¹ Tomado de Plan de Área de Matemáticas en Proyecto Educativo Institucional, Institución Educativa Antonio Ricaurte. 2004.

Luego de hacer lectura de los lineamientos rectores de la postura formativa de la institución y de su visión de la formación en matemáticas, se consideró prudente analizar si dichos planteamientos hacían parte de la realidad de las aulas. Se comenzó entonces a observar algunas clases de matemáticas del grado Cuarto B dirigidas por el docente del área. Se pudo ver que la dinámica de las clases consistía en una explicación del tema por parte del profesor, el planteamiento de ejercicios de repaso, y cuando el calendario académico lo estipulaba, una evaluación de contenidos con formato de opción múltiple sin justificación. Durante el período de observación no se logró apreciar espacios de discusión entre las estudiantes. Además, los recursos de enseñanza se limitaron al tablero, algunas copias de libros de texto de matemáticas y evaluaciones escritas. En cuanto al tratamiento de los objetos matemáticos, pudo apreciarse una inmensa tendencia hacia la aplicación de algoritmos para resolver ejercicios de repaso. Lo que se pretende explicar es que lo que ocurrió en las clases de matemáticas del grado Cuarto B durante el tiempo de observación no correspondió a lo planteado en los documentos rectores de la institución.

1.2 El proceso desde el inicio

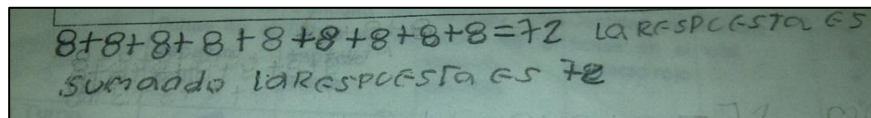
El interés de nuestro trabajo de investigación surge a partir de los elementos observados en las clases de matemáticas ofrecidas inicialmente por docentes encargados del área en los grados Tercero y Cuarto de la Institución Educativa Antonio Ricaurte, así como aquellas que estuvieron a cargo de los maestros en formación responsables del presente trabajo.

Podría decirse que en un primer momento la observación estuvo abierta a los diferentes acontecimientos que se presentaran en el aula con el fin de identificar aspectos reiterativos en las estudiantes que resultaran determinantes en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas. Esta observación estuvo apoyada en el análisis de las explicaciones docentes, las tareas propuestas y las formas en que las niñas las desarrollaban.

Dentro de los aspectos observados llamó nuestra atención las formas en que las estudiantes resolvían las tareas que involucraban la multiplicación; en primer lugar, porque estas formas se presentaban de manera recurrente, y en segundo lugar, porque los procesos que giran alrededor de la multiplicación son trascendentales para la construcción de múltiples objetos matemáticos, así como para el desarrollo del pensamiento matemático.

Observemos algunas de las acciones realizadas por las estudiantes alrededor de tareas que involucran la multiplicación.

1. Tras el planteamiento *En un partido de basquetbol cada jugador debe hacer 8 lanzamientos, si hay nueve jugadores en la cancha, ¿cuántos lanzamientos se harán en total?* Una estudiante efectuó el siguiente procedimiento:



8+8+8+8+8+8+8+8+8=72 LA RESPUESTA ES 72
SUMADO LA RESPUESTA ES 72

Ilustración 1-Sumas reiteradas

Como puede verse en la Ilustración 1, se sumó 9 veces 8. La tarea presentaba dos familias de cantidades, la de jugadores y la de lanzamientos, pero según el

procedimiento desarrollado por la niña, ella sólo reconoció una de las familias, la de lanzamientos, lo que la llevó a sumar.

Es importante mencionar que la suma de sumandos iguales es una de las estrategias más utilizada en la escuela; es una “forma cultural de hacer” que evidencia la noción de multiplicación que tienen maestros y alumnos.

2. Sabiendo que para fabricar un oso se requerían 4 patas, las estudiantes debían averiguar el número de patas necesario para hacer 5 osos.

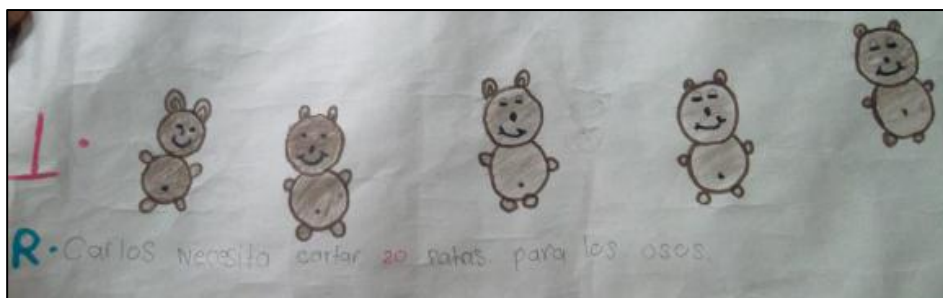


Ilustración 2-Tarea: Fábrica de osos

La opción elegida fue dibujar cada oso con sus patas y luego contar la cantidad total de éstas. Debe resaltarse que dibujar lo que se planteaba en la tarea fue la mejor vía para visualizar la solución, pues trataron de representar la realidad a través de dibujos, una estrategia que surge de lo que habitualmente hacen las niñas en sus hogares y en la escuela. Además, esta estrategia permitió identificar las dos familias de cantidades involucradas: osos y patas, y comprender que a medida que aumenta la cantidad de osos aumenta también la cantidad de patas; es decir, intuitivamente se reconoce una relación de proporcionalidad directa.

3. En otra de las tareas se explicaba la forma de organizar una caja de caramelos y bombones.

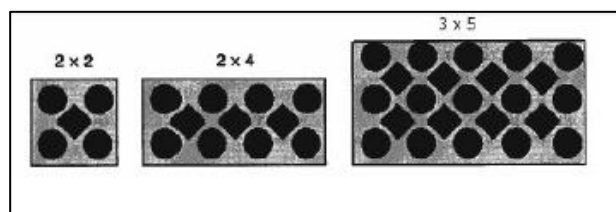


Ilustración 3-Tarea: Caja de caramelos

Los círculos representan bombones y los cuadrados² caramelos. Las dimensiones de las cajas se indican mediante el número de columnas y filas de bombones que hay en cada caja.

Las estudiantes debían encontrar las dimensiones de una caja con 60 bombones y surgió el diálogo que a continuación se presenta:

Estudiante 1: “Profe, no sé cómo hacer este punto”.

Estudiante 2: “Es muy fácil...Tiene que hacer lo mismo que hacíamos cuando dibujábamos los rectángulos, o sea, tiene que buscar dos números que multiplicados den como resultado 60. Por ejemplo, 2 por 30 ó 12 por cinco. Después dibuja la caja de caramelos con esas medidas”.

Estudiante 1: “¡Ah, muy fácil!”.

Puede apreciarse que para la primera de las estudiantes el desarrollo de la tarea fue posible gracias a la interacción y el diálogo con una de sus compañeras, quien a su vez utilizó las acciones ejecutadas en otra tarea realizada anteriormente.

4. En otra ocasión el maestro en formación pregunta por el puntaje de cinco monedas cuyo valor por unidad era ocho puntos, surgiendo el siguiente diálogo:

Maestro en formación: “¿Cuántos puntos tienes en las cinco monedas?”.

Estudiante: “Cinco”.

² No se asume el término cuadrado en términos formales.

Maestro en formación: “¿Cuántos puntos tiene una moneda?”.

Estudiante: “Ocho”.

Maestro en formación: “Entonces, ¿cuántos puntos tienen dos monedas?”.

Estudiante: “Dieciséis... Entonces las cinco monedas valen cuarenta puntos”.

Maestro en formación: “¿Cómo lo sabes?”.

Estudiante: “(Con una mano señala hacia la derecha) Una moneda (señala con la otra mano hacia la izquierda) son ocho puntos. Dos monedas (nuevamente con una mano señala hacia la derecha) son dieciséis puntos. (Continúa haciendo el mismo movimiento con las manos) Tres monedas son veinticuatro puntos, cuatro son treinta y dos, y cinco son cuarenta”.

Se resalta la utilización de movimientos corporales apoyados en palabras que dan cuenta del establecimiento de un proceso de covariación entre dos cantidades de familias diferentes, monedas y puntaje.

Los ejemplos presentados permiten definir varios elementos:

1. La marcada tendencia de las estudiantes a desarrollar tareas multiplicativas por medio de sumas reiteradas, lo cual resulta válido pero insuficiente para comprender diversos aspectos desde los cuales la multiplicación se refiere a procesos de correspondencia entre dos o más familias de cantidades, es decir, a la proporcionalidad directa.
2. El uso de ilustraciones gráficas para representar las tareas y comprenderlas; acción que da cuenta de formas culturales de hacer de las niñas.
3. El profundo valor de las interacciones para interpretar las tareas y los elementos presentes en ellas; es decir, la construcción social del conocimiento.
4. La importancia de movimientos corporales apoyados en palabras para comprender relaciones multiplicativas.

Esto hace posible a su vez afirmar dos ideas básicas; la primera, que es necesario abordar la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación desde una postura situada en la proporcionalidad directa. La segunda; que los artefactos, términos lingüísticos, movimientos corporales y signos posibilitan una aproximación a la multiplicación. Con esta proposición se está afirmando que los Medios Culturales Semióticos, entendidos como el conjunto de objetos, artefactos, términos lingüísticos, gestos y signos empleados por el individuo en el proceso de acción que desarrolla alrededor de los motivos puestos en las tareas, son una excelente vía de aproximación a la multiplicación porque promueven la construcción de conocimientos en el sujeto –en este caso, sobre la multiplicación como proporcionalidad directa- y hacen posible además, evidenciar el proceso de reflexión que lleva a cabo el individuo en la actividad.

1.2.1 Delimitación del problema

Considérense dos ideas bases construidas a partir del proceso de observación, apoyadas en planteamientos de Radford:

1. Los Medios Culturales Semióticos hacen parte esencial de toda actividad, determinando formas de acción a partir de artefactos proporcionados por la cultura (Radford, 2003). Estos medios permiten evidenciar el proceso que los individuos desarrollan para la consecución del motivo o los motivos establecidos en determinado contexto, es decir, hacen posible la objetivación. Por ello puede sugerirse que los Medios Culturales Semióticos son una óptima vía para aproximarse a la multiplicación como proporcionalidad directa.
2. Como se expresó con anterioridad en el apartado Sumas de sumandos iguales, es necesario abordar la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación desde una

postura situada en la proporcionalidad directa, pues permanecer en una postura centrada en la suma de sumandos iguales resulta limitado para aproximarse al gran entramado que se esconde tras la multiplicación.

Ambas premisas sugieren que los Medios Culturales Semióticos pueden ser una potente herramienta para aproximarse a la multiplicación desde una perspectiva de proporcionalidad directa. Así, surge la siguiente pregunta orientadora para el presente trabajo de investigación:

¿Cómo intervienen los Medios Culturales Semióticos en la objetivación de procesos relativos a la multiplicación?

De la cual se desprende el objetivo:

Analizar el papel que desempeñan los Medios Culturales Semióticos en la objetivación de procesos relativos a la multiplicación.

Así pues, para dar respuesta a la pregunta y cumplimiento al objetivo, se diseñaron varias tareas conceptualizadas desde la multiplicación como proporcionalidad directa, que abrían espacio además para analizar la influencia de los Medios Culturales Semióticos en la forma de resolverlas, específicamente, en la manera en que las niñas reconocían relaciones multiplicativas. Al analizar lo sucedido, se estableció que fueron dos las tareas que más elementos aportaron para responder la pregunta orientadora: Las monedas de oro y Golosinas para la fiesta. Pueden apreciarse en el apartado siguiente.

1.3 Aspectos metodológicos

Como ya se mencionó, se tomaron dos tareas conceptualizadas desde la multiplicación como proporcionalidad directa que abrían espacio para analizar la influencia de los Medios Culturales Semióticos en la forma de resolverlas, específicamente, en la manera en que las niñas reconocían relaciones multiplicativas. Como la pretensión es interpretar qué sucede en las dos tareas y cómo sucede, es posible afirmar que nuestra investigación es de corte *cualitativo*, pues como explica Erickson retomado por Stake, la característica más distintiva de la indagación cualitativa es el énfasis en la interpretación (Stake, 1999).

Además, se ubica como un *estudio de casos* al tomar un grupo específico de estudiantes para el análisis y la interpretación de un fenómeno. El caso está constituido por cinco alumnas del grado Cuarto B de la Institución Educativa Antonio Ricaurte que fueron seleccionadas porque su actividad permitió observar con mayor claridad varios aspectos referentes a la influencia de los Medios Culturales Semióticos en los procesos de aproximación a la multiplicación. Por otra parte, el estudio de casos es de tipo *instrumental* debido a que se interesa por comprender lo que sucede específicamente con el grupo de estudiantes escogido; se busca analizar la actividad del caso para tener una idea de su particularidad, de cómo ese grupo de estudiantes emplea ciertos Medios Culturales Semióticos para desarrollar tareas multiplicativas. Así pues, la atención de esta investigación se centra en interpretar el caso para comprenderlo individualmente, no para compararlos con otros ni para partir de él hacia una generalización; tal y como dice Stake:

El caso viene dado. No nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular. Tenemos un interés intrínseco en el caso, y podemos llamar a nuestro trabajo *estudio intrínseco de casos*. (Stake, 1999, p.17)

Ahora, el estudio del caso se llevó a cabo durante cuatro períodos académicos de las alumnas, iniciando con una observación de su actividad³ en las clases de matemáticas a cargo del profesor responsable del área en la institución, para identificar aspectos significativos en el proceso de formación en matemáticas de las niñas. Se observaron ciertos aspectos reiterativos relativos a la forma en que ellas se aproximaban a la multiplicación. Se procedió entonces a diseñar tareas que permitieran focalizar la vista en dicho punto y tener así una idea más global, para posteriormente elaborar nuevas tareas que apuntaran a abordar una vía de mejoramiento de la situación. Estos asuntos se encuentran ampliamente descritos en el apartado El proceso desde el inicio (ver página 13).

En cuanto a la recolección de la información, sirvieron como instrumentos las observaciones de las clases de matemáticas, grabaciones de audio de discusiones, registros escritos de las producciones de las estudiantes⁴ y diarios pedagógicos⁵ elaborados por los maestros en formación donde se consignaron elementos determinantes analizados a la luz del objetivo de investigación y de algunos referentes teóricos que sirvieron de soporte. Estos instrumentos permitieron registrar lo que hacían las niñas alrededor de tareas que involucraban la multiplicación; sus diálogos con otras niñas y con los maestros en formación, sus explicaciones, sus interacciones y sus acciones.

La información arrojada se filtró para recolectar aquella que describiera con mayor claridad los procesos desarrollados por las niñas a partir de las tareas planteadas, así como los instrumentos empleados para la acción encaminada a la consecución de los motivos adoptados en las tareas.

³ Al hablar de actividad se hace referencia a las tareas propuestas a las estudiantes, los motivos que establecen dentro de ellas, los instrumentos empleados para alcanzarlos y las acciones desarrolladas para tal fin.

⁴ Dichos registros se publican con la autorización de los padres de las estudiantes

⁵ Ver anexos 5, 6 y 7.

1.4 Las tareas

Es necesario iniciar explicando que en el presente trabajo se entiende tarea como toda aquella elaboración que promueve en el individuo el desarrollo de acciones físicas e intelectuales. La tarea es diseñada por el docente con un motivo para propiciar ciertas acciones en el sujeto alrededor de los objetos matemáticos y para evidenciar los procesos que desarrolla en la ejecución de las acciones en busca del motivo. Pero, el individuo pocas veces asume el mismo motivo del docente y crea otro(s) diferente(s) en el mismo marco de la tarea y por ende, de los objetos matemáticos involucrados, aunque muchas veces no se hagan explícitos para él.

Ahora bien, se diseñaron varias tareas⁶ conceptualizadas desde la multiplicación como proporcionalidad directa, que abrían espacio además para analizar la influencia de los Medios Culturales Semióticos en la forma de resolverlas, específicamente, en la manera en que las niñas reconocían relaciones multiplicativas.

Estas relaciones podrían identificarse ya que las tareas tienen una amplia gama de posibilidades para trabajar aspectos como formas de representación, divisiones, sumas, correspondencias uno a uno, función lineal, proporcionalidad, razón, cambio proporcional, entre otras.

Además, se pretendió que las tareas dejaran ver la importancia de acciones sociales y culturales, y la influencia que éstas tienen en el aprendizaje de las matemáticas por medio de elementos como la motivación, el juego, el trabajo en equipo, las interacciones que pueden surgir en el desarrollo de las tareas, algunas superestructuras simbólicas como el dinero, entre otras. Se

⁶ Las demás tareas pueden encontrarse en los anexos 2, 3 y 4.

buscó también que las tareas permitieran abordar elementos matemáticos y formas particulares en que las niñas objetivan el conocimiento mediante artefactos e instrumentos.

Al analizar lo sucedido, se estableció que fueron dos las tareas que más elementos aportaron para responder la pregunta orientadora: Las monedas de oro y Golosinas para la fiesta.

Las monedas de oro

En diferentes puntos del colegio se escondieron monedas de papel de distintos colores, cada uno de los cuales tenía un valor particular; verde 2 puntos (88 monedas), azul 4 puntos (66 monedas) y dorado 8 puntos (44 monedas). Las estudiantes, organizadas en equipos de 4 integrantes, se desplazaron en busca de las monedas para encontrar la mayor cantidad posible y obtener el puntaje más alto. Una vez encontradas las monedas se entregó a cada equipo una hoja en blanco donde debían hacer una representación que les permitiera ver con claridad la cantidad hallada de monedas y el puntaje alcanzado en cada color. Hecho esto, se expusieron las representaciones de cada equipo para observar la utilidad de cada una y elegir la más adecuada.

Posteriormente se hizo una socialización de las construcciones de cada equipo utilizando como guía estos interrogantes: ¿Cuántos puntos de ventaja tiene el equipo ganador con respecto al equipo que ocupó el segundo lugar, y al que ocupó el tercero, y el cuarto...? ¿Por qué el equipo ganador obtuvo el mayor puntaje? ¿En total cuántas monedas encontró el equipo? Según esa cantidad, ¿cuál sería el máximo y el mínimo puntaje que hubiera podido obtener el equipo? Si todas las monedas halladas en el equipo hubieran sido azules, ¿cuántos puntos se habrían reunido y cómo calcularlo? Si un equipo hubiera obtenido 20 puntos con monedas de diferentes colores, ¿cuántas monedas de cada color pudo haber encontrado y cómo podemos saberlo?

A continuación se propuso completar de manera grupal las siguientes tablas:

Monedas de color _____		Monedas de color azul	
Cantidad	Valor	Cantidad	Valor
1			4
2			8
3			
4			16
5			20

Ilustración 4-Tabla de registro "Monedas de oro"

En la medida en que se iban completando las tablas se preguntaba a las niñas cómo encontraban cada una de las cantidades que consignaban.

Golosinas para la fiesta

Con el motivo de hacer una pequeña despedida del período académico con las estudiantes, se planteó la posibilidad de comprar golosinas. Para ello se ofreció un presupuesto de \$40.000 que debería distribuirse de tal forma que se comprara golosinas para cada persona y no sobrara dinero.

En un primer momento se pidió a las alumnas que decidieran cuáles golosinas se comprarían y cuántas unidades le corresponderían a cada persona, además debían decidir cuestiones como si se comprarían al detal o por mayor y cuánto dinero se debía gastar en los dulces de cada estudiante. Cada una de las propuestas era analizada de manera grupal para desechar las que no cumplían con las condiciones requeridas y seleccionar la que resultara más conveniente.

El paso siguiente fue elaborar individualmente un presupuesto que considerara la cantidad de estudiantes del grupo, el dinero disponible y las golosinas seleccionadas. Los diferentes presupuestos fueron analizados grupalmente para escoger el que permitiera comprar la mayor cantidad de golosinas con el dinero disponible para la fiesta. El presupuesto que fue escogido especificaba el valor de una unidad de cada uno de los dulces; se procedió entonces a averiguar a partir de esos precios cuánto costarían las 40 unidades de cada dulce y cuál sería el total del valor para la compra de las golosinas para todas las estudiantes. Ésta fue la oportunidad para observar las formas en que las niñas relacionaban cantidad de dulces con precios, y para identificar también los procesos que llevaban a cabo para tal fin, así como las reflexiones que alrededor de ello efectuaban.

Finalmente se compraron las golosinas de la forma en que lo indicaba el presupuesto ganador.

2. SOPORTES TEÓRICOS

2.1 Enfoque sociocultural

A partir de las primeras experiencias en la institución se estableció la importancia del enfoque sociocultural al constituirse un elemento fundamental dentro del aprendizaje no sólo por reconocer la influencia de los elementos sociales y culturales en la constitución del conocimiento, sino también porque aporta bases para comprender la dialéctica entre lo social y lo individual. Además permite observar cómo los objetos de conocimiento, en este caso los objetos matemáticos, son conceptualizados en el contexto de su dimensión histórico cultural. Para esto se hace enfoque en la Teoría de la Actividad, centrando a su vez la atención en la importancia de los Medios Culturales Semióticos en el aprendizaje; entendiendo éstos como el conjunto de objetos, artefactos, términos lingüísticos, gestos y signos que se utilizan con el fin de evidenciar el proceso que se desarrolla alrededor de los motivos de acción de los individuos. Esto implica que la forma en que los individuos perciben el mundo y objetivan el conocimiento es a través de las creencias, valores, prácticas sociales, signos y artefactos, que surgen en la actividad mediada social y culturalmente.

En esta perspectiva el aprendizaje no se limita simplemente a obtener un conocimiento, sino que se trata de dotar de sentidos y significados a los objetos que encuentra el sujeto en la cultura para posicionarse frente al mundo y reflexionar alrededor de ellos. En pocas palabras esto es lo que denominamos objetivación.

Para sintetizar las anteriores ideas obsérvese este mapa conceptual:

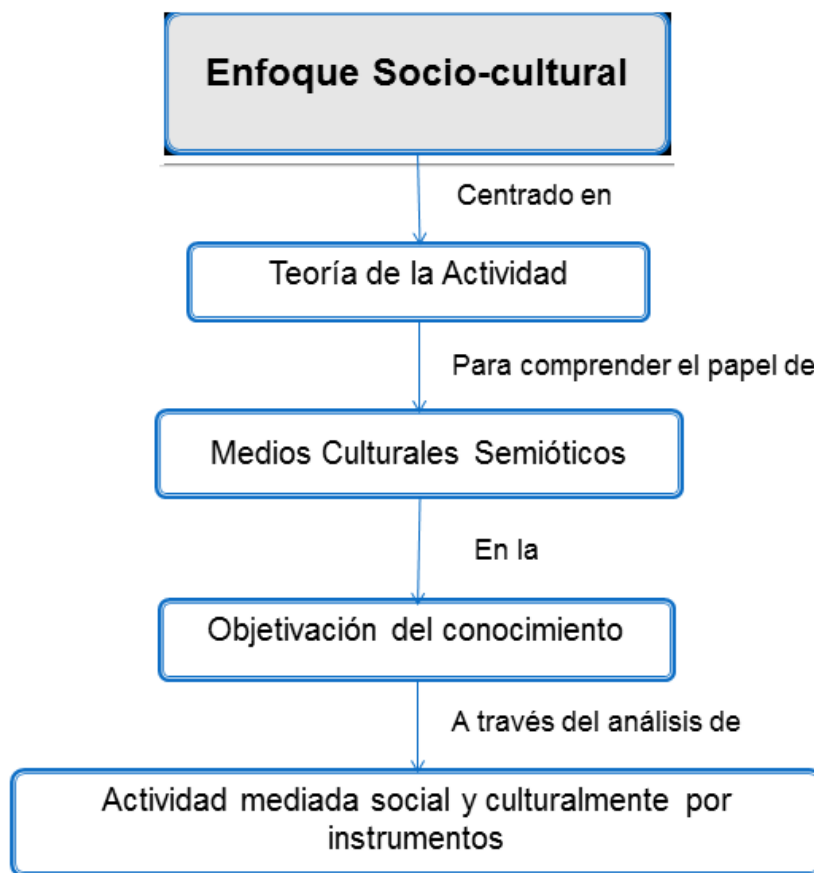


Ilustración 5-Mapa conceptual: Enfoque sociocultural

¿Por qué abordar la semiótica?

Para este trabajo se aborda la semiótica en el terreno de la educación matemática y dentro de la teoría de la actividad, puesto que en los últimos años numerosas investigaciones como Radford (2006;2010); D'Amore (2006) han dado gran importancia al papel de la semiótica en el terreno de la educación matemática y han apuntado a mirar los objetos matemáticos como una construcción social-simbólica, resaltando la importancia de los artefactos y signos que llevados al aula se convierten en instrumentos potentes en la

construcción de conocimiento, panorama que permite entender la función cognitiva y social que desempeñan los mismos. Al respecto Radford comenta:

Los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos en el contexto cultural (Radford, 2006, p. 7).

Por otro lado ha surgido cierto interés por comprender las conductas y tendencias del discurso matemático en el salón de clase, para lo cual la semiótica propone tácticas, métodos y conceptos que permiten entender desde una teoría consolidada la complejidad del discurso.

Además, la historia habla del interés que han tenido al menos tres teorías por centrar sus miradas en la semiótica; a continuación se describen brevemente sus aportes para observar la importancia que le dan a los signos, objetos y artefactos. La primera de ellas, la tradición saussureana, propone la creación de una nueva ciencia llamada semiología que estudia “la vida de los signos en el seno de la vida social”; ya que los signos no son simplemente marcas que representan ideas, sino elementos que combinan dos estados naturales que van ligados: el significado y el significante. Por lo tanto el signo es una pieza de engranaje de la estructura. Por otra lado la tradición Peirceana, considera “la semiótica como la doctrina formal de los signos” (Radford, 2006, p. 10); es decir, lo importante consiste en saber cómo los individuos crean nuevas ideas a partir del signo. Así todo pensamiento es un signo; el punto más crítico es encontrar el “el método correcto” para pensar.

Por último está la tradición Vygotskiana, que señala que la semiótica no es un generador de ideas, ni una pieza de algún sistema estructural, sino que se constituye como la herramienta

para estudiar el pensamiento y su desarrollo, por lo cual “el signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto” (Radford, 2006, p. 11). Así mismo, dentro esta perspectiva es fundamental el concepto de actividad e instrumento (que es ampliado en la siguiente sección), donde los objetos y las herramientas se transforman para convertirse en instrumentos que “alteran el curso del desarrollo natural de los procesos psicológicos” (Radford, 2006, p. 11).

Como puede verse, hay diferentes teorías que resaltan la importancia de la semiótica, pero para el presente trabajo se adoptará esta última, centrada en la actividad del individuo destacando el uso de los signos como mediadores de conocimiento. Finalmente cabe anotar que los signos y artefactos juegan un papel crucial en el aprendizaje puesto que además de llevar sobre sí una gran carga histórico-cultural, permiten ver cómo piensan los individuos en su contexto (Radford, 2006, p. 107).

Actividad

El concepto de actividad despierta un interés exclusivo dentro del campo de la educación matemática puesto que ha logrado traspasar la idea a la que generalmente se asocia, consistente en el conglomerado de trabajos, ejercicios y prácticas que se realizan en una asignatura en la escuela, para posicionarse dentro de una nueva mirada en la cual el ser humano construye conocimiento durante su desarrollo. Así mismo se ha pretendido acabar con la idea de que la actividad del maestro y del estudiante van por separado, planteando un nuevo panorama donde existe una sola actividad de enseñanza-aprendizaje mediada por instrumentos empleados con un motivo para alcanzar y un motivo que es tanto colectivo como individual. A propósito cabe

retomar las siguientes palabras de Leontiev: “el funcionamiento intelectual puramente humano es un funcionamiento mediatizado”; es decir, “la actividad está determinada por el objetivo que la impregna y los medios para llegar a este objetivo”. Así no sólo hay un estímulo sino que hay el fiel propósito de orientar dicha actividad, pues “no puede haber una actividad sin un motivo”.

Resulta prudente ampliar estos dos últimos aspectos; el objetivo de la actividad y los medios para llegar a dicho objetivo. Cuando se resalta la importancia del objetivo se hace referencia al gran valor científico, cultural, estético y político, que ratifica la gran carga de significación cultural que mediatiza la actividad en un primer estrato de la mediación semiótica.

En cuanto a los medios para alcanzar ese objetivo, se alude a aquellos que “median en un plano material la actividad misma”, es decir, aquellos objetos como los instrumentos, el lenguaje, los signos, entre otros, que se transforman en instrumentos psicológicos y que logran convertirse en parte inherente de ellos (de los medios). Es así como estos objetos logran mediatizar la actividad en un segundo plano de la mediación semiótica.

Pero la mediación semiótica cobra verdadera importancia en el hecho de que los sistemas de significación cultural además de suministrarle al sujeto medios de desarrollo conceptual, permiten modificar las funciones cognitivas del individuo gracias a los instrumentos psicológicos.

Objetivación

Como se mencionó anteriormente, la actividad no pretende crear un espacio de socialización donde los sujetos piensan juntos, sino muy por el contrario, pretende ir más allá de

una simple interacción entre individuos. Es por esto que se afirma que una actividad es un proceso social que pretende llegar a un objetivo invadido de significados culturales, objetivo que se logra gracias a las acciones mediatizadas por los sistemas semióticos impregnados de una historia cognitiva, o como explica Leontiev: “Una actividad es una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana” (Leontiev, 1978/1993).

Por todo lo anterior puede afirmarse que el concepto de mediación semiótica no se limita a una función netamente instrumental, sino que desempeña un papel de objetivación del saber. ¿Pero qué se entiende por objetivación? Podría decirse que es un proceso donde el aprendizaje no se reduce a obtener un conocimiento; se trata de dotar de sentidos y significados los objetos que encuentra el sujeto en la cultura para posicionarse frente al mundo y reflexionar alrededor de estos. Es decir, en la medida en que el sujeto adquiere estos objetos cargados tanto de procesos históricos como culturales, los direcciona según su interpretación subjetiva.

De esta manera la objetivación se refiere a un conocimiento y un enriquecimiento personal que surge de la transformación cultural que hace el sujeto; en otras palabras, consiste en todos aquellos actos que cobran significado para el sujeto gracias a la actividad sensorial que éste establece con la cultura material. Al respecto Radford (2004) comenta: “objetivación es una palabra que viene de la palabra objeto, cuyo origen proviene del latín *obiectare*, que significa “lanzar algo en el camino”, lanzar algo enfrente” (Charleton, 1996, p. 550). El sufijo “-tivación” proviene del verbo *facere*, que significa “hacer” (Charleton, 1996, p. 311). Así pues, etimológicamente hablando, la objetivación hace referencia a las acciones cuyo propósito

consiste en colocar o poner algo frente a alguien, o hacer algo visible. En términos más generales, como se entiende en la perspectiva semiótica cultural, “el acto de objetivación consiste en volver aparente lo potencial” (Radford, 2004).

Saber, conocimiento y pensamiento

Desde la teoría histórico-cultural se establecen ciertos conceptos clave que es necesario considerar en el presente trabajo; ellos son: pensamiento, saber, conocimiento, aprendizaje, cultura y actividad.

Estos elementos son pensados desde la perspectiva histórico-cultural porque otras perspectivas proporcionan visiones rígidas sobre cómo el individuo aprende y cómo el conocimiento se construye al interior de él, dejando a un lado las experiencias e interacciones con el otro, la carga histórica y la manera como la cultura media en el proceso de construcción de conocimiento. Así mismo, olvidan retomar dentro del ámbito matemático la posición que ejerce el individuo en su cultura, que es aquello que le ayuda a reflexionar sobre todos los discursos matemáticos constituidos histórica y culturalmente. A propósito afirma Wittgenstein (1920): Desde un punto de vista filosófico, el conocimiento matemático, o mejor aún, la verdad en el conocimiento matemático no puede ser pretendida de manera absoluta, sino que ésta descansa sobre los procesos de construcción de sentidos y significados propios del intercambio sociocultural en que están inmersos.

En primer lugar, es prudente resaltar algunas de las miradas que han surgido alrededor de lo que es saber; unas apuntan a una idea más productiva y que afirman que se “sabe” algo cuando se comprende cómo se ha construido, de la misma manera que se sabe cómo está fabricada una

mesa o una silla. Piaget retoma esta mirada de posicionar el saber como una construcción y afirma que sólo el individuo puede construir su propio saber a partir de las experiencias individuales, dándole así una dimensión personal al saber. Pero esta visión del saber deja por fuera muchas teorías socioculturales que resaltan el papel de la cultura y la mediación con el otro en la objetivación del saber.

Se retoma entonces en este momento la mirada que interesa para el presente trabajo. Los aportes desde la teoría sociocultural hablan del saber como el cúmulo de formas que emergen de la acción (expresión, lenguaje, graficas, análisis, entre otros) y de la reflexión de estas formas constituidas histórica y culturalmente; o como bien lo afirma Radford (2013): *“saber es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente”*. De esta manera cuando se presenta a los estudiantes una tarea que gira en torno al razonamiento multiplicativo, se espera que ellos analicen y reflexionen sobre las estructuras que se han constituido a la largo de la historia. Es aquí donde el saber se convierte en un conjunto de acciones que se recopilan logrando establecer una posición general.

Ahora bien, cuando se habla de conocimiento debe tenerse presente que no se apunta a la repetición de un hecho o una acción, ni como algo fijo. Radford explica que el conocimiento es la “actualización del saber” que está implícito y surge en la mediación de la actividad, que es donde adquiere un sentido particular. Por tanto el conocimiento es el producto de la mediación y logra una forma de reflexión codificada histórica y culturalmente.

Se han tratado dos conceptos bases dentro de las teorías socioculturales: conocimiento y saber; ahora se intentará darle un sentido dentro de este enfoque al aprendizaje y al pensamiento. El primero de ellos se define como el fin último de la actividad que se logra de la adaptación

por medio de la mediación a las prácticas sociales. Cabe resaltar que dentro de esta teoría el pensamiento es contemplado desde una visión no mentalista. Así, se entiende como una práctica social donde hay una reflexión mediatizada del mundo que hace el individuo sobre su práctica. Esta idea sugiere entender el carácter mediatizado de los instrumentos que forman parte esencial de la práctica social, ya que los individuos piensan con y por medio de ellos al emplearlos en el desarrollo de sus acciones en la consecución de sus motivos.

2.2 La multiplicación

Suma de sumandos iguales

Bien se sabe que el método de sumas de sumas iguales para aproximarse a la multiplicación es tal vez el más empleado en la escuela desde hace varias décadas atrás. A propósito es prudente resaltar que las sumas abreviadas constituyen una forma válida pero no suficiente para conceptualizar la multiplicación debido a su imposibilidad para el tratamiento de cantidades continuas, así como para el establecimiento de relaciones entre dos tipos de cantidades diferentes, lo que hace manifiesta la necesidad de explorar un modelo que haga énfasis en la multiplicación como un proceso que pone en correspondencia elementos de dos familias de cantidades diferentes, es decir, un modelo centrado en la proporcionalidad directa.

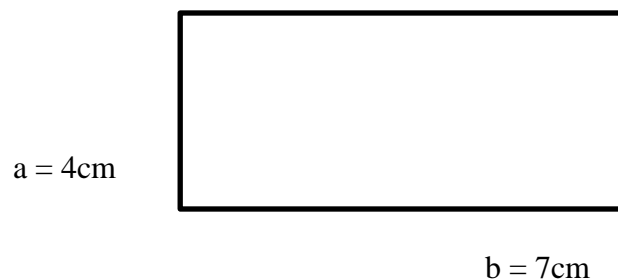
Como puede verse, los ejemplos expuestos muestran el uso básicamente de dos estrategias para enfrentarse a tareas de tipo multiplicativo: conteos y sumas de sumandos iguales. Es prudente resaltar que las sumas abreviadas constituyen una forma válida pero no suficiente para conceptualizar la multiplicación, debido básicamente a dos razones. En primer lugar porque

resulta útil para manipular cantidades discretas, por ejemplo para expresar enunciados como: *Carlos compra diariamente 3 caramelos, ¿cuántos caramelos habrá comprado en 5 días?* Aquí es posible utilizar una suma de sumandos iguales para encontrar la respuesta:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

Pero si la tarea contiene cantidades de carácter continuo, el uso de sumas repetidas no puede ser una estrategia de solución. Para ilustrar un poco esta idea veamos el siguiente ejemplo: *María consume $\frac{1}{2}$ barra de chocolate en un día, ¿qué porción de la barra de chocolate consume en $\frac{1}{4}$ de día?* Este planteamiento sugiere claramente la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$. La pregunta sería entonces, ¿es posible resolver la tarea usando una suma de sumandos iguales?, y la respuesta es definitivamente no.

En segundo lugar se encuentra el tema de cálculo de áreas de rectángulos. Por ejemplo, una de las formas para hallar el área del rectángulo ABCD consiste en multiplicar la longitud de la base del cuadrilátero por la de su altura.



Lo cual se expresa como:

$$b \times h = 7 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 28 \text{ cm}^2$$

Ahora se propone expresar el área del rectángulo por medio de sumas repetidas. Podría efectuarse esta suma:

$$7\text{cm} + 7\text{cm} + 7\text{cm} + 7\text{cm} = 28\text{cm}$$

O también ésta:

$$4\text{cm} + 4\text{cm} + 4\text{cm} + 4\text{cm} + 4\text{cm} + 4\text{cm} + 4\text{cm} = 28\text{cm}$$

Pero como puede apreciarse, el producto de la multiplicación $7\text{cm} \times 4\text{cm}$ y el resultado de las sumas “7 veces 4” y “4 veces 7” es diferente; al multiplicar $7\text{cm} \times 4\text{cm}$ se obtiene 28 cm^2 lo que indica la existencia de un área, mientras que en ambas sumas el resultado es 28 cm , es decir, una longitud. Es pues ésta otra razón para afirmar que las sumas repetidas son insuficientes para conceptualizar la multiplicación, a menos que se sumaran cuadrados de área 7cm por 1cm o cuadrados de área 4cm por 1 cm .

Estas cuestiones hacen manifiesta la necesidad de explorar un modelo que haga énfasis en la multiplicación como un proceso que pone en correspondencia elementos de dos clases diferentes, es decir, un modelo centrado en la proporcionalidad directa.

La multiplicación como proporcionalidad directa

En este apartado se abordará el concepto de multiplicación y algunos elementos importantes que a partir de allí deben retomarse. Lo primero a considerar es que resulta complejo dar una definición de multiplicación debido a los múltiples significados a los que este término puede aludir. Por ejemplo, en *Los Elementos de Euclides* se encuentran 4 diferentes significados que hacen referencia implícitamente a una noción de multiplicación. Para el presente trabajo llama especialmente la atención la siguiente definición: “*se dice que un número multiplica a otro número cuando el multiplicando se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro, resultando un tercer número*”, lo cual se interpreta como: si se multiplican dos números M y N, se obtiene como resultado un número C. Esto es:

$$\mathbf{M \times N = C, \text{ siendo C “M” veces N}}$$

Esta proposición indica la repetición de **M**, las **veces que indique N**, para obtener **C**. Es decir, la multiplicación se podría interpretar con una suma iterada, así:

$$\text{Si } \mathbf{M \times N = C}, \text{ es porque } \mathbf{C = \underbrace{M + M + M + \dots M}_{\text{Veces lo que indique } N}}$$

Por otro lado, puede verse que esta definición centra su atención sobre las proporciones, relacionando 4 cantidades por medio de la relación cociente, ya que:

Si $M \times N = C$, siendo M “a veces” N

Es porque: $\frac{M}{1} = \frac{C}{N}$; es decir, M es a la unidad como C es a N

Lo que se interpreta como: $M \times N = 1C$.

Esta definición pues pone en perspectiva la multiplicación desde la proporcionalidad directa. Pero es Descartes quien le da fuerza a este significado de la multiplicación desde lo proporcional y la variación, al definir: “el producto como la medida del trazo que es a la medida M de un trazo dado, como la medida N de otro trazo dado es a la unidad”; esto es $\frac{M}{1} = \frac{C}{N}$. El potente valor de esta definición consiste en que la unidad es arbitraria a cualquier medida; por ejemplo, obsérvese la ilustración 6, allí AB es la unidad y se quiere multiplicar BD por BC . Para ello se unen los puntos A y C , luego se traza DE paralela a CA , y BE es el producto de esta multiplicación.

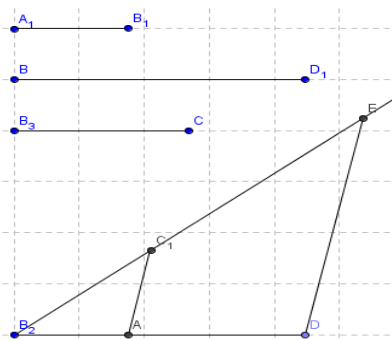


Ilustración 6-Representación geométrica de proporción

Así, ver la multiplicación desde una perspectiva variacional y proporcional abre el panorama para centrar la atención sobre otros elementos que intervienen allí y que son fundamentales para entender tanto la proporcionalidad como la multiplicación, tales como: las razones, los diversos significados que puede implicar la multiplicación según la tarea en que esté involucrada, es decir, como número racional, función lineal, la razón de cambio, entre otras.

En este sentido, hablar de multiplicación desde la perspectiva proporcional no sólo implica considerarla como una operación aritmética, sino que hace necesario también establecer relaciones de tipo proporcional que a su vez dependerán del tipo de tarea propuesta. Sobre esto es prudente retomar lo resaltado por Obando, Arboleda, & Vasco (2013):

La función de la razón no es estática, sino que, en una situación dada, la función de la razón cambia continuamente de un papel lógico a otro según el tipo de problemas que se vayan presentando en el tratamiento de la situación. (Obando, Arboleda, & Vasco, 2013, P. 5)

Es decir, a partir de la relación establecida en la tarea propuesta, la razón puede interpretarse como operador, relator, correlator o como transformador.

Además, ver la multiplicación desde una perspectiva proporcional implica iniciar el estudio y el desarrollo del razonamiento proporcional que para Obando y Botero (2006) “se constituye en la piedra angular del pensamiento matemático avanzado, y la cúspide del desarrollo de los conceptos de la matemática elemental”.

3. PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN

3.1 ¿Qué sucedió con las tareas?

Las monedas de oro

Podría comenzarse resaltando la presencia del trabajo en equipo a lo largo del desarrollo de la tarea, lo cual pudo observarse en los siguientes hechos: Las estudiantes trabajaron en equipo para conseguir la mayor cantidad de monedas. Para esto, los equipos se organizaron para desplazarse por todo el colegio y encontrar las monedas en el menor tiempo posible. Luego, cada grupo volvió al salón y unió las monedas halladas por todas las integrantes, para comenzar a cuantificar la cantidad encontrada. Estas actividades de organización y de trabajo en equipo fueron fundamentales para ganar la competencia y obtener mejores resultados, y es justamente lo que se esperaría socialmente que realizara un equipo en una competencia (Radford, On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought , 2003).

Por otro lado, mientras las estudiantes buscaban las monedas, los docentes en formación notaron que las niñas estaban más preocupadas por encontrar la mayor cantidad de monedas pues sabían que entre mayor sea la cantidad de monedas, mayor es el puntaje obtenido.

Se observó también que las niñas se olvidaron de la cantidad de monedas para centrar su preocupación exclusivamente en el puntaje y la forma de organizar la información en la tabla.

Para ilustrar un poco esta idea se pueden observar las siguientes conversaciones:

Conversación 1

Maestro en formación: “¿Cuántas monedas encontraste?”.

Estudiante: “Yo encontré una azul y vale 4. Además, dos verdes que valen 4, vea dos más dos (mostrando las dos monedas verdes, una coordinación entre los movimientos, palabras y las relaciones multiplicativas). También una dorada que vale 8”.

Conversación 2

Maestro en formación: “¿Cuántas monedas encontraron?”.

Estudiantes 1 y 2: “33”.

Maestro en formación: “¿33 monedas doradas?”.

Estudiante 2: “No, 4 doradas, entonces hay que escribir 4 aquí (señalando una casilla en la tabla)”.

Maestro en formación: “¿Cuántas verdes?”.

Estudiante 1: “10”.

Estudiante 2: “No, 5”.

Maestro en formación: “¿Y azules?”.

Estudiante 2: “2”.

Esto quiere decir que mientras las niñas realizaban la tarea su objeto-motivo cambió continuamente; primero fue encontrar la mayor cantidad de monedas, luego se centraron en los puntos obtenidos y por último se preocuparon por la manera de organizar la información para la exposición. Este constante movimiento del objeto-motivo se da primero que todo por la tarea misma, y segundo por el contacto con los artefactos e instrumentos utilizados por las niñas con un fin o propósito, los cuales al mismo tiempo estos reorganizan las acciones motrices e intelectuales y afectan a las niñas (Radford, 2006). Esta idea se sintetiza en la ilustración 7:

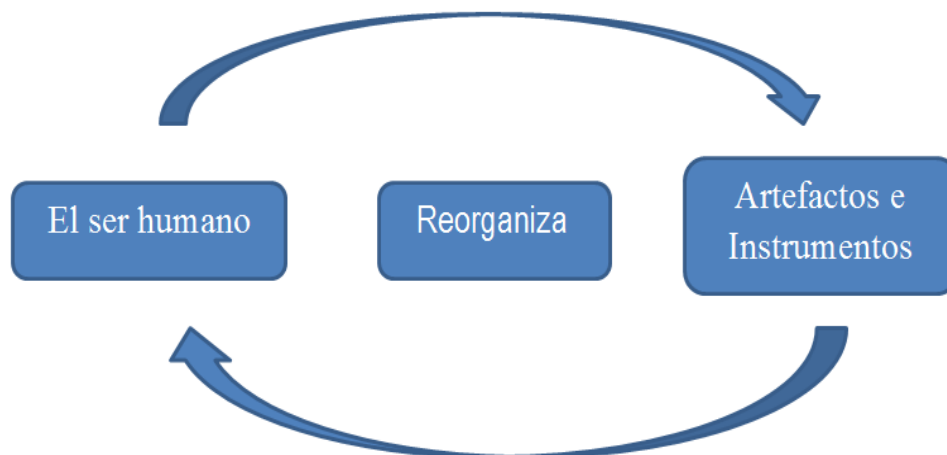


Ilustración 7-Reorganización de artefactos e instrumentos

Por otra parte, se resalta el trabajo de completar la tabla de registro porque implica aprender a llenarla y seleccionar la información necesaria. Es por esto que el uso de las tablas es un instrumento que le permite a la estudiante organizar y seleccionar la información necesaria para –en este caso- hacer posteriormente una presentación de resultados. Esto quiere decir que la manera en que las niñas usan las tablas permite que los docentes en formación logren cierta aproximación a la forma en que las niñas van objetivando el conocimiento, específicamente, la objetivación de la multiplicación. Esto puede verse en las siguientes conversaciones:

Conversación 3

Estudiante 1: “¿Profe qué tenemos que hacer?”.

Maestro en formación: “Presentar la información”.

Estudiante 2: “Como el cuadrito de la rana”.

Maestro en formación: “Pero ¿cuántas doradas encontraron?”.

Estudiante 1: “Ninguna”.

Maestro en formación: “¿Cuántas azules?”.

Estudiante 2: (Mirando la tabla) “5”.

Maestro en formación: “¿Cuántas verdes?”.

Estudiantes 1 y 2: (Mirando la tabla) “Una”.

Maestro en formación: “¿Cuál es el puntaje total?”.

Conversación 4:

Estudiante 1: “¿Cómo hacemos la tabla?”.

Estudiante 2: “Como la de la rana”.

En conclusión, el uso de tablas para registrar la información se convierte en un instrumento para la acción y si la acción cambia, el instrumento también, ya que a través de la acción las niñas le dan sentido a un objeto y a medida que lo hacen, ellas mismas se van transformando para posicionarse frente al mundo. Esto fue lo que Radford (2006, p. 113) denominó objetivación del conocimiento.

Otro elemento que salió a la luz y que sirvió a las niñas para obtener los puntajes correspondientes a la cantidad de monedas fue el uso de las tablas de multiplicar y el conteo iterado por medio de múltiplos. Es decir, además de utilizar las tablas de registro como instrumentos, las estudiantes usaron diferentes métodos de cálculo para cuantificar la puntuación. Estos métodos de cálculo se convirtieron en instrumentos que determinaron acciones o en instrumentos para la acción.

Esto quiere decir que la manera en que las niñas organizan el puntaje y buscan obtener el mayor, desencadena una serie de acciones que dejan ver a los docentes en formación el proceso

de atribución de sentido a la tareas, a los motivos, a los instrumentos y a los objetos de conocimiento; permite pues observar cómo objetivan el conocimiento sobre la multiplicación.

Por otro lado, en la imagen 8 puede apreciarse cómo las niñas organizaron la información para presentar a sus compañeras los resultados obtenidos, para lo cual debieron idear métodos para simbolizar las monedas y sus valores.



Ilustración 8-Representación de monedas encontradas

Las imágenes 9 y 10 muestran el proceso de elaboración de tablas de registro.

Verde=8	Azul=4	Verde=2	puntaje	Yesenia ALEXandra
48	72	18	138	

Ilustración 9-Tabla re registro 1 de monedas encontradas

Verde=8	Azul=4	Verde=2	puntaje	Yesenia ALEXandra
<u>6</u>	<u>9</u>	<u>13</u>		
48	<u>36</u>	<u>35</u>	<u>119</u>	
				48 36 35 <u>119</u>

Ilustración 10-Tabla re registro 2 de monedas encontradas

En la imagen 9 se encontró que las niñas identificaron los puntos por cada color y el puntaje total. Luego el docente en formación les pregunta por el número de monedas encontradas, pero las niñas se mostraron confundidas. Es por esto que el docente insiste en la

necesidad de saber cuántas monedas encontraron y de qué color son. Es así como las estudiantes comienzan a verificar y escribir la cantidad de monedas (ver imagen 10), y de manera inmediata las niñas se dan cuenta que los puntaje estaban mal calculados; comienzan entonces a corregir en cada color los puntajes obtenidos, así como el puntaje total.

El docente observó que las niñas obtenían los puntajes por medio de las tablas de multiplicar de la siguiente manera: multiplicaban los puntos de las monedas por la cantidad de monedas obtenidas y así obtenían el puntaje. Luego sumaban estos puntajes para encontrar el total. Pero, aunque el procedimiento empleado fuese válido, las estudiantes cometían errores en los cálculos, lo cual respondió en gran parte a la prisa que tenían por culminar la tarea para determinar el equipo ganador de la competencia. Además, el tratamiento de las cantidades que en algunos casos se hizo no fue el adecuado; veamos el siguiente ejemplo:

$$6 \text{ monedas doradas} \times 8 \text{ puntos} = 48 \text{ puntos por 6 monedas doradas}$$

Aquí se excluye una familia de cantidades (cantidad de monedas doradas) y convenientemente se conserva la otra familia de cantidades (puntos). Es así, como los métodos de cálculo y las tablas de multiplicar son el instrumento que hacen evidente cómo las niñas objetivan la multiplicación. La estudiante no está realizando una multiplicación como una operación aritmética, sino una coordinación de dos conteos iterados de dos familias de cantidades; por un lado la cantidad de monedas y por el otro los puntajes obtenidos (ver ilustración 11).

CANTIDAD DE MONEDAS DORADAS	PUNTAJE
1 moneda doradas	8 puntos
2 monedas doradas	16 puntos
3 monedas doradas	24 puntos
4 monedas doradas	32 puntos
5 monedas doradas	40 puntos
6 monedas doradas	48 untos.

Ilustración 11-Reconocimiento de familias de cantidades

Otro ejemplo del uso de multiplicaciones para obtener los puntajes es el expuesto en la ilustración 12. En el momento de la exposición la niña argumenta: “multiplico 5 monedas doradas por 8 puntos y eso da como resultado 40, porque $8 \times 5 = 40$ ”.



Ilustración 12- Tabla re registro 3 de monedas encontradas

Este ejemplo evidencia cómo la estudiante objetiva la multiplicación al tener claro que es necesario conocer la cantidad de monedas encontradas y los puntos que representan, para luego

obtener el resultado total. Es decir, reconoce las familias de cantidades involucradas y la relación existente entre ellas, y aprovecha este conocimiento para resolver la tarea propuesta.

No obstante, la estudiante hace un uso incorrecto de las cantidades al argumentar que multiplica “ocho puntos por cinco monedas”, lo cual es diferente a multiplicar ocho puntos por cinco, siendo éste un cardinal.

$$8 \text{ puntos} \times 5 = 40 \text{ puntos}$$

Otra opción puede ser que se use el 8 como una razón, considerando el puntaje por moneda (8 puntos/moneda dorada); es decir:

$$8 \frac{\text{puntos}}{\text{moneda dorada}}$$

Y la forma de operar sería:

$$5 \text{ monedas dorada} \times 8 \frac{\text{puntos}}{\text{moneda dorada}} = 40 \text{ puntos}$$

Pero éste no es el caso ilustrado en el ejemplo, ya que la niña no interpreta el 5 como cardinal ni el 8 como una Razón. Puede entonces sugerirse que la estudiante está objetivando la multiplicación como una coordinación de dos conteos iterados de dos familias de cantidades; por un lado la cantidad de monedas y por el otro los puntajes obtenidos.

Ahora, en la ilustración 13 se deja ver otra forma de organizar la información:

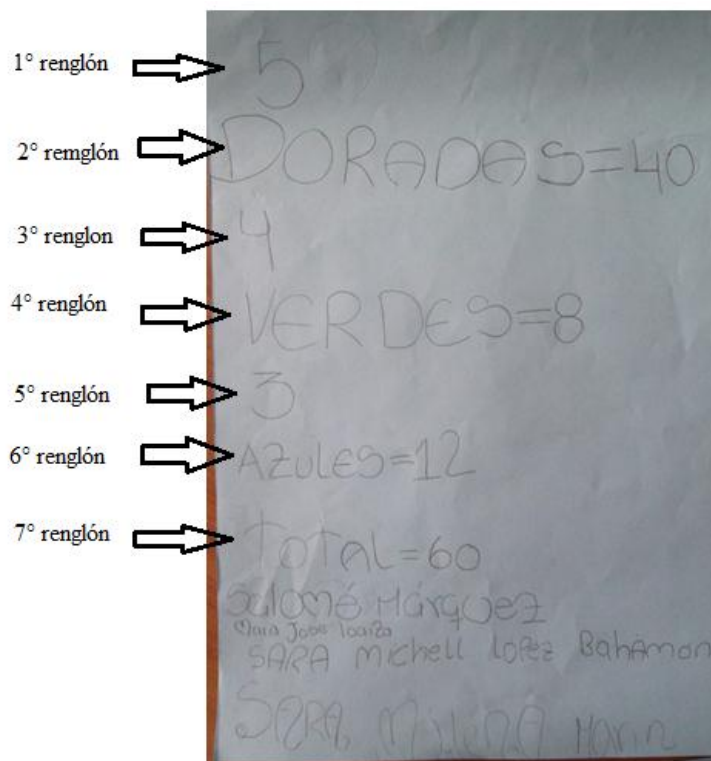


Ilustración 13-Organización de información sin tablas de registro

Sin necesidad de hacer notar o de marcar líneas que indique las filas o columnas para los puntajes y las cantidades, las niñas organizaron la información de una manera diferente. Durante la presentación de su trabajo las niñas argumentaron que no organizaron la información en tablas porque era difícil, y que era más fácil hacerlo así.

Estas estudiantes hacen el mismo tratamiento aritmético sobre las cantidades y familias de cantidades que las dos anteriores evidencias.

Es importante resaltar la manera en que las estudiantes organizaron la información, teniendo presente la cantidad de monedas y los puntos, y sin la necesidad de colocar la etiqueta del valor atribuido a cada color. Puede observarse pues que en el renglón 1 aparece el número 5,

equivalente a 5 monedas; en el renglón 2 se especifica el color de la moneda y el resultado de multiplicar 5×8 , el cual es el puntaje obtenido en las monedas doradas. Vale resaltar que aquí se hace el mismo tratamiento que en los casos anteriores consistente en multiplicar la cantidad de monedas por los puntos.

En los renglones 3 y 4 se efectúa un procedimiento del mismo tipo que el anterior; especificar la cantidad de monedas encontradas (4), el color (verde) y multiplicar 4 monedas por 2 puntos, obteniendo 8 puntos. En el renglón 5 se repite nuevamente el procedimiento pero con las monedas azules. Como el objetivo era conocer el puntaje total según el número de monedas, en el renglón 7 se suman los subtotales y se obtiene 60, es decir el puntaje total.

Todo esto muestra que aunque no realizaron una tabla de registro, a la hora de escribir y presentar la información las niñas lo hacen de una forma lógica y coherente para ellas; además, sus acciones fueron determinadas por su manera particular de organizar y pensar, lo cual a su vez depende de un propósito claro y definido. Es decir que la forma de organizar la información y presentarla se convirtió en un instrumento para la acción, determinado formas, y modos de hacer y saber (Radford, 2006).

Golosinas para la fiesta

Con el motivo de hacer una pequeña despedida del período académico con las estudiantes, se planteó la posibilidad de comprar golosinas. Para ello se ofreció un presupuesto de \$40.000 para todo el salón que debería distribuirse de tal forma que se comprara golosinas para cada persona y no sobrara dinero.

En un primer momento se pidió a las alumnas que decidieran cómo sería la distribución de las golosinas, es decir, cuestiones como si se comprarían al detal o por mayor y cuánto dinero se debía gastar en los dulces de cada estudiante. Ellas propusieron:

1. “Comprar para cada una un dulce de \$500”.
2. “Cada fila trae un paquete de un dulce diferente y luego se reparte entre todas”.
3. “Gastar en cada una \$1.000, ya que somos 40 y hay \$40.000”.

Respecto a la primera propuesta las estudiantes explicaron que de llevarla a cabo sobraría \$20.000 lo cual representaba “menos dulces” para todas. Implícitamente están reconociendo la relación de directa proporcionalidad que hay entre el dinero y los dulces, consistente en que a mayor cantidad de dinero hay mayor cantidad de golosinas. En otras palabras, identifica la forma de variación que hay en una de las familias y la traslada a la otra.

En cuanto a la segunda propuesta, una de las niñas expresó su inconformidad argumentando que mientras las demás filas tenían 7 integrantes la suya sólo tenía 4, por lo cual cada persona de esa fila debía poner más dinero que los demás. La niña tenía claro que a cada estudiante debía corresponderle la misma cantidad de dulces y así mismo, aportar la misma cantidad de dinero.

Cuando se lanzó la propuesta número tres todas las estudiantes estuvieron de acuerdo argumentado que de ser así todas tendrían la misma cantidad de dinero para comprar golosinas y que además no sobraría nada. Las estudiantes establecieron entonces una correspondencia uno a uno entre el dinero y la cantidad de alumnas.

Una vez elegida la propuesta se discutió con el grupo cuáles serían las golosinas que se comprarían, eligiendo democráticamente 7 productos (arequipe, lecherita, gomas, chocolate, chicle, papitas y bombón). Definido esto, se dejó como tarea que cada niña elabora para la siguiente clase un presupuesto considerando la cantidad de estudiantes del grupo, el dinero disponible y las golosinas seleccionadas.

Algunas estudiantes elaboraron presupuestos para una unidad de cada golosina sin prestar atención al valor total de los 7 dulces, omitiendo además lo que ya se había definido sobre gastar \$1.000 en cada estudiante (ver ilustración 14).

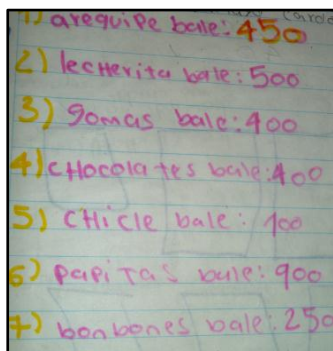


Ilustración 14-Presupuesto al detal

No obstante se escogió el presupuesto menor y se pasó a analizarlo. En la ilustración 15 puede apreciarse el presupuesto menor con un valor total de \$2.400.

Arequipe	\$450
Chocolate	\$300
Lecherita	\$400
Chicle	\$100
Gomita	\$100
Bombón	\$200
Papitas	\$850
Total: \$2.400	

Ilustración 15-Presupuesto menor al detal

Se preguntó a las niñas que considerando dicho valor, cuánto costarían las golosinas para las 40 estudiantes. Inicialmente no sabían cómo encontrar la respuesta pero después de reflexionar sobre lo que debían hacer y discutir con sus compañeras, comenzaron a implementar estrategias para buscarla. Algunos de los procedimientos realizados fueron los siguientes:

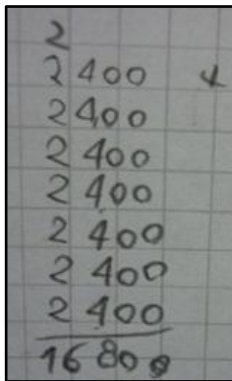


Ilustración 16-Sumas iteradas

Aquí la niña reconoce una sola familia de cantidades, la de dinero, es decir, los \$2.400 que según el presupuesto valen las 7 golosinas. Decide tomar esa cantidad y sumarla 7 veces. Al ver este procedimiento los maestros en formación no comprendieron por qué si estaba haciendo sumas repetidas sólo había sumado 7 veces. Luego de preguntarle se aclaró que lo hizo porque son 7 las golosinas, es decir, confundió el valor de la suma de una unidad de cada dulce con el valor de la suma de las 40 unidades de cada dulce. Esto indica por una parte que pierde de vista cuántas veces debería repetir la cantidad a sumar, y por otro lado, que los símbolos y los procedimientos que las niñas realizan no pueden analizarse sin considerar la razón por la cual lo hacen.

$$\begin{array}{r} 2408 + \\ \quad 40 \\ \hline 2440 \end{array}$$

Ilustración 17-Relación aditiva familias de cantidades

En este otro ejemplo la estudiante identifica dos cantidades pero las relaciona como si fueran de la misma familia de cantidades. Cuando el grupo vio este procedimiento inmediatamente expresó que estaba incorrecto pues según dijeron, “no puede sumar dos cosas diferentes porque estamos hablando del precio de los dulces y del número de niñas que somos”. Esta expresión evidencia el reconocimiento de las dos cantidades y el establecimiento de su relación multiplicativa.

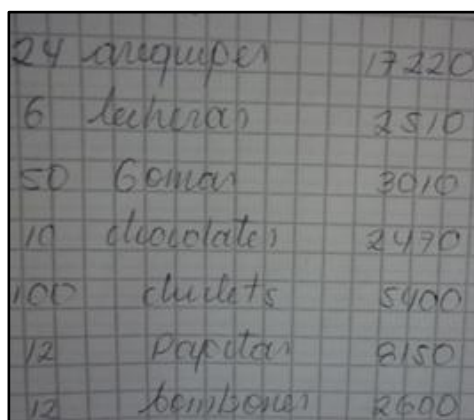
Por otra parte, el proceso de reflexión alrededor de lo que las compañeras hacen, impulsa el razonamiento de las niñas.

$$\begin{array}{r} 2400 \times \\ \quad 40 \\ \hline 96000 \end{array}$$

Ilustración 18-Relación multiplicativa de dos familias de cantidades

Ya en este caso efectúan una multiplicación entre 2.400 y 40. Identifican ambas cantidades y reconocen que pertenecen a familias diferentes. Esto es muestra de que comprenden que la forma en que varían las cantidades de una familia se traslada a la otra, y establecen implícitamente una correspondencia uno a uno.

Los ejemplos presentados hasta el momento muestran lo que las niñas hicieron alrededor de un presupuesto elaborado para una unidad de cada golosina, ahora veamos que otras estudiantes realizaron el presupuesto para varias cantidades de cada golosina, pues tenían claro que cuando se compra “al por mayor” los productos son más económicos.



24	arquipecas	17220
6	lecheras	2510
50	Gomas	3010
10	chocolates	2470
100	churitos	5400
12	Popitars	2150
12	bombonas	2600

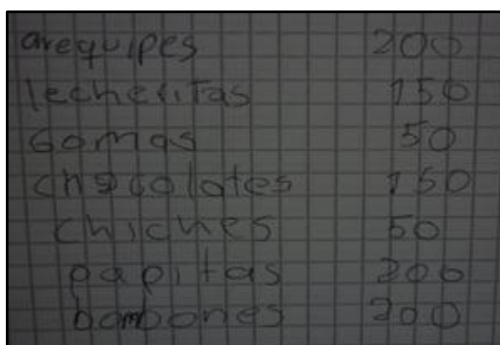
Ilustración 19-Presupuesto "al por mayor"

Esto puede verse en la ilustración 19, donde se aprecia que aunque el presupuesto fue hecho “al por mayor” no se consideró las 40 unidades que debían comprarse de cada dulce.

Se procedió entonces a averiguar a partir de esos precios cuánto costarían las 40 unidades de cada dulce y cuál sería el total del valor para la compra de las golosinas para cada estudiante. La propuesta general fue: “Cojamos el precio que tenemos de cada dulce y lo dividimos entre la cantidad de dulces que valen eso para encontrar cuánto vale uno. Después multiplicamos eso por 40”. Casi de manera inmediata las niñas encontraron cómo averiguar la respuesta.

Comprendieron la relación entre el precio de determinada cantidad de unidades con el valor unitario, para luego establecer correspondencias un a uno entre cantidad de estudiantes y de dinero. Tuvieron claridad en las cantidades y las familias a que pertenecen, y a la forma en que se relacionan.

Después de hacer esto, las estudiantes vieron que el valor final para la compra de las golosinas según este presupuesto era demasiado alto, por lo cual lo descartaron. Decidieron entonces partir de que a cada una le correspondía \$1.000 pesos y seleccionar los precios más bajos que entre todas habían averiguado para cada dulce (ver ilustración 20).



arequipes	200
lecheritas	150
Gomas	50
chocolates	150
chiches	50
papitas	200
bambones	200

Ilustración 20-Arreglo de precios para completar \$1.000

Bien, ya para finalizar y a partir de todo lo anterior, se puede concluir que a la hora de enfrentarse con una tarea las estudiantes se valen de gestos, palabras, esquemas y otros medios cargados de significados culturales para comprender lo que deben hacer y proceder a llevarlo a cabo. Estos medios están cargados de sentidos culturales que determinan sus formas y sus usos en los sujetos. Son además los que hacen posible evidenciar aquello que las niñas hacen para así, entender un poco qué es lo que saben. Es por eso que aprovechar el valor de estos medios es una

excelente opción para abordar en la escuela el aprendizaje de las matemáticas, en este caso, de la multiplicación.

3.2 Categorías emergentes

Durante todo el proceso de investigación se recolectaron evidencias de audio, fotografías y conversaciones del trabajo de las niñas, que fueron consignados en los diarios pedagógicos y fueron sujetas continuamente a análisis realizados por los docentes en formación con la guía de los asesores, considerando elementos teóricos desde un enfoque sociocultural –específicamente desde la Teoría de la Actividad-, y la multiplicación desde la perspectiva asumida en el presente trabajo (ver página 36). Con estas evidencias y los análisis realizados se logró determinar las categorías emergentes. Allí surgió una categoría global: *Los Medios Culturales Semióticos*, elemento acogido de Radford (2003; 2006; 2008;), que a su vez sugiere cuatro categorías de análisis: *1) De lo cualitativo a lo cuantitativo; 2) Instrumentos para la acción; 3) Interacciones verbales; 4) Establecimientos de relaciones multiplicativas.*

En este sentido, se hace necesario explicar cada una de estas categorías, relacionándolas con los soportes teóricos de este trabajo y los sucesos ocurridos en el aula de clase.

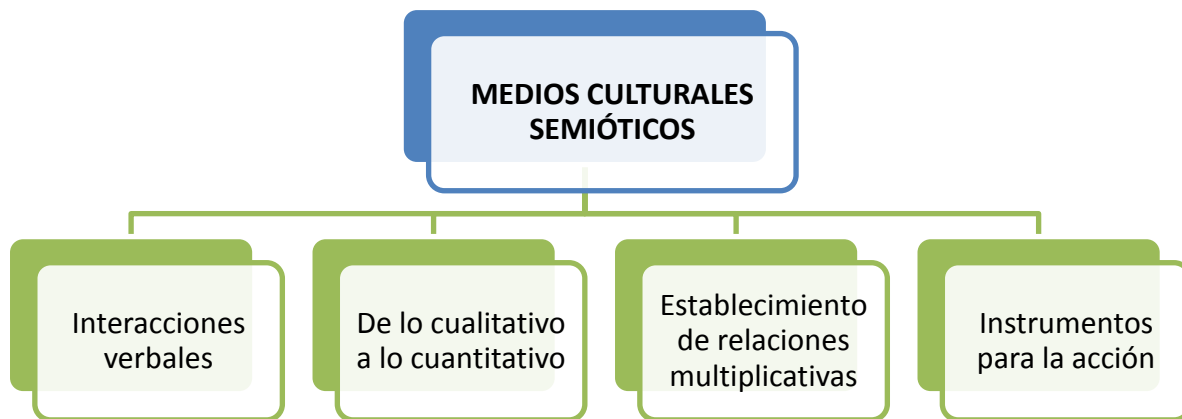


Ilustración 21-Categorías emergentes

Medios Culturales Semióticos

A lo largo de esta investigación se ha resaltado la importancia de la semiótica y la cultura, en tanto que no se excluye la cultura del proceso de construcción del conocimiento, sino que es a través de la dinámica cultural que los signos cobran sentido. En este sentido es necesario no sólo hablar de la semiótica sino también de la cultura; es decir, es necesario hablar desde una perspectiva semiótica cultural, que no se limite a los signos y su función de representación, sino que también incorpore otros elementos que permitan considerar la enseñanza y el aprendizaje como el resultado de la mediación de artefactos e instrumentos que proviene de la cultura.

En la palabras de Radford, citado por Rodolfo Vergel, la perspectiva semiótica cultural, “no sólo considera elementos semióticos, también incorpora nuevas teorías de la cognición que destacan el papel del contexto, el organismo y los sentidos en la forma en que llegamos a conocer” (Vergel). Esto implica que la forma en que los individuos perciben el mundo y objetivan el conocimiento es a través de las creencias, valores, prácticas sociales, signos y

artefactos. Lo que hace necesario considerar lo que Radford (2003, 2006, 2008) denominó un Sistema Semiótico Cultural que la cultura ha construido, que es característico y mediador del pensamiento humano, y que además, tiene “el objetivo de indicar y mostrar algo, por lo cual la objetivación es clave, ya que es un proceso cuyo objetivo es mostrar algo (un objeto) a alguien. Ahora bien, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Esos medios son los denominados *medios semióticos de objetivación*; objetos, artefactos, términos lingüísticos y signos en general que se utilizan con el fin de volver aparente una intención y de llevar a cabo una acción” (Radford, 2005, p. 13). Es por eso que los Medios Semióticos de Objetivación forman parte consensual de la objetivación ya que por medio de estos, los individuos muestran sus intenciones y las llevan a cabo sus acciones. En especial estos Medios Semióticos ayudan a los docentes a entender la forma en que los estudiantes en sus particularidades llevan a cabo la objetivación (de la multiplicación en este caso).

Es fundamental resaltar que en este trabajo no se analizan todos los Medios Semióticos, sino que como se mencionó anteriormente, se establecen cuatro categorías de análisis que centran la atención en ciertos Medios Semióticos, a decir: *1) De lo cualitativo a lo cuantitativo; 2) Instrumentos para la acción; 3) Interacciones verbales; 4) Establecimientos de relaciones multiplicativas.*

De lo cualitativo a lo cuantitativo

Aquí se asume que uno de los medios por los cuales las niñas expresaban sus ideas tenía que ver con las expresiones orales, escritas y aquellos movimientos que estaban en coordinación con estas expresiones. A propósito es importante mencionar lo planteado por Radford (2003):

Para investigar los medios semióticos de objetivación es necesario prestar atención a los recursos lingüísticos variados y signos que los estudiantes utilizan para lograr una forma estable de la conciencia, para hacer evidentes sus intenciones, y para llevar a cabo sus acciones (Radford, 2003, p.48).

Es decir estas expresiones realizadas por los estudiantes, permiten evidenciar la manera en que los estudiantes objetivando la multiplicación.

A continuación se presentan algunas ideas sustanciales sobre el planteamiento anterior:

- Las expresiones siempre están acompañadas de intención y acciones.
- En las expresiones cualitativas se identifican relaciones de mayor y menor, y es aquí donde se comienza a objetivar.
- Las expresiones buscan la validación de los profesores y de los demás niños. Están además cargadas de acciones complementarias, así como de emociones y sentimientos. Señalan también los instrumentos utilizados para llevar a cabo las acciones y en consecuencia, los docentes en formación pueden ver la manera de objetivar la multiplicación.
- Las niñas usaron expresiones cualitativas para tratar de explicar la manera en que se relacionaban las cantidades en las tareas asignadas. Aquí fue fundamental la

participación de los docentes en formación para inducir la necesidad de cuantificar la relación.

- Se establecieron relaciones cualitativas entre cantidad de niños, dinero y cantidad de dulces, evidenciadas en expresiones verbales como: “si queremos comprar más dulces tenemos que poner más dinero”, “dividamos el dinero que tenemos entre la cantidad de personas que somos”, entre otras.

Instrumentos para la acción

Esta categoría lleva implícito el concepto de mediación, donde a su vez es fundamental el concepto de actividad y el de instrumento, debido a que las herramientas y artefactos se transforman y se convierten en instrumentos que “alteran el curso del desarrollo natural de los procesos psicológicos” y “sirven de base a la aparición de las funciones psíquicas superiores” (Radford, 2003, p. 11).

Por otro lado, según Radford (2006, p.13) “la mediación semiótica va más allá de la vista puramente instrumental con la que, en otras perspectivas, se consideran a los signos y artefactos”. En este sentido se cumple con una función mediadora entre los niños y el conocimiento, es decir que los instrumentos utilizados por los docentes en formación sirven para mostrar una determinada idea de multiplicación, pero además generan unas formas de hacer y saber que los niños objetivan frente al conocimiento sobre la multiplicación. En otras palabras, los instrumentos cumplen una función mediadora con el fin de objetivar de la multiplicación (Radford, 2006).

Desde este punto de vista, los instrumentos y su función no son simples ayudas para los estudiantes y para los docente, sino que como lo afirma Radford “se piensa con y a través de los artefactos culturales” (Radford, 2003, p. 107). Así pues, los instrumentos utilizados por los estudiantes generan unos modos de hacer y saber, acordes a la dialéctica que generada entre las niñas, la tarea y los Medios Semióticos utilizados. Para el caso particular del presente trabajo, los instrumentos utilizados por las niñas determinan unos modos de hacer y de saber sobre la multiplicación. Pero esta dialéctica además transforma los niños, los instrumentos, los modos de hacer y saber, logrando una mayor objetivación sobre la multiplicación.

Todas estas consideraciones llevaron plantear la categoría *Instrumentos para la acción*, ya que se considera que los instrumentos utilizados por los estudiantes son parte esencial para determinar lo que saben las niñas.

A propósito de lo anterior es prudente considerar lo siguiente:

- Organizar el presupuesto es un Medio Semiótico de Objetivación, ya que la forma en que se realiza un presupuesto tiene como objetivo rebajar costo y aumentar el beneficio. Este conocimiento sobre la manera de organizar un presupuesto proviene de la objetivación por parte de los sujetos sobre la economía y es transmitido en forma cultural.
- El trabajo en equipo fue un instrumento para la acción, ya que la forma en que las acciones de buscar, organizar, calcular y presentar los puntos obtenidos en la tarea

“las monedas de oro” , fueron ejecutadas con el fin de alcanzar un motivo propuesto por las estudiantes: ganar la competencia.

Interacciones verbales

La manera de entender la interacción es de acuerdo Radford (2006), quien explica: “la interacción en lugar de desempeñar una función meramente de adaptación, de catalizadora o facilitadora, en la perspectiva teórica que estamos esbozando, es consustancial del aprendizaje”. Es por ello que no se entiende como un simple encuentro físico (niña-niña; niña-docente) o un encuentro instrumental, sino como un movimiento dinámico transformador donde los individuos pueden reflexionar sobre sí mismos, sobre los demás y sobre el conocimiento.

De esta manera, las interacciones no solo son parte esencial del conocimiento, sino que también tienen el propósito de socializar a las niñas, ya que permiten intercambiar ideas, aceptarlas, discutir las con mayor profundidad para conocer otros “puntos de vista y mejorar los propios” (Radford, 2008, p.121). En este mismo sentido Radford (2008) afirma que “aprender matemáticas no es simplemente aprender a hacer matemáticas (resolver problemas) sino aprender a ser en matemáticas”.

Considérense ahora estos planteamientos para reforzar la anterior idea:

- Las interacciones permitieron ver que muchas veces el objeto-motivo de los estudiantes es diferentes al del profesor (Radford, 2006).

- Las interacciones permitieron a los docentes en formación ver la forma en que las estudiantes se relacionaban con el conocimiento, en especial con la multiplicación y los medios que utilizaba para desarrollar las tareas propuestas. Hacen posible también observar las acciones, instrumentos y artefactos utilizados por las niñas de forma social para ejecutar las tareas propuestas y conseguir los motivos fijados.

Establecimiento de relaciones multiplicativas

Desde el inicio de la investigación pudo observarse que a la hora de resolver tareas que involucran la multiplicación, las estudiantes utilizan expresiones escritas (dibujos, símbolos) que indican que la forma en que conciben la multiplicación como una suma iterada.

Al comienzo las niñas comenzaron a establecer relaciones multiplicativas con ayuda de las tablas de multiplicar, y entonces surgieron expresiones como: “estamos trabajando la tabla del 2, la del 4 y la del 8”, “los números de la tabla del 6 (refiriéndose a los resultados)”, entre otras.

En la medida en que establecen relaciones multiplicativas, las estudiantes empiezan también a seleccionar instrumentos que les permitieran realizar las tareas propuestas. Entre los instrumentos empleados se destacan: las tablas de multiplicar, calculadoras, algoritmos y el conteo por medio de múltiplos. En cuanto a las relaciones multiplicativas establecidas se encuentran: relaciones multiplicativas de tipo funcional (analítico o analógicos), como múltiplos, las tablas de multiplicar, proporcionalidad, cambio proporcional y razones.

Aunque al principio de este proceso de investigación las estudiantes no diferenciaban las familias de cantidades involucradas en las tareas, al finalizar sí lo lograron, lo cual es crucial para

la objetivación de la multiplicación, en especial el inicio sobre el pensamiento proporcional. Es cierto que el reconocimiento de las familias de cantidades y sus relaciones fue de forma cualitativa la mayor parte del proceso, pero en diferentes momentos la necesidad de cuantificar se hizo presente, promoviendo en las niñas la búsqueda de instrumentos que les permitiera determinar numéricamente la forma en que se relacionaban las familias de cantidades que estaban presentes en las tareas. No obstante, es importante mencionar, que con el hecho de reconocer cualitativamente las familias y sus relaciones, es decir, cómo el comportamiento de una afecta el comportamiento de la otra y cómo esto influye en el resultado final; ya hay una aproximación significativa a la multiplicación como proporcionalidad directa.

4. CONCLUSIONES

- A la hora de enfrentarse con una tarea las estudiantes se valen de gestos, palabras, esquemas y otros medios cargados de significados culturales para comprender lo que deben hacer y proceder a llevarlo a cabo. Estos medios están dotados de sentidos culturales que determinan sus formas y sus usos en los sujetos. Son además los que hacen posible evidenciar aquello que las niñas hacen para así, entender un poco qué es lo que saben. Es por eso que aprovechar el valor de estos medios es una excelente opción para abordar en la escuela el aprendizaje de las matemáticas, en este caso, de la multiplicación.
- La utilización de los Medios Semióticos Culturales descritos a lo largo del trabajo, no responde a la casualidad, revelan por el contrario el hecho de que contienen propósitos claros y definidos históricamente por la cultura. Por ejemplo, asuntos como: la utilización de las sumas reiteradas para explicar la multiplicación, apoyarse de tablas de registro de doble entrada para encontrar patrones el patrón y generalizar - aproximándose a la multiplicación-, valerse de las tablas de multiplicar y del algoritmo para enseñar la multiplicación; servirse de artefactos, acciones, gestos y movimientos coordinados para llevar a cabo conteos iterados por medio de dobles, entre otros; muestran que los Medios Culturales Semióticos tienen una historia que los dota de sentidos culturales que determinan sus formas y sus usos en el acto educativo. De esta manera dichos medios revelan el carácter mediatizado que tiene en la aproximación a la multiplicación.

- El proceso de objetivación de aproximación a la multiplicación como proporcionalidad directa se generó a través de las acciones, artefactos e instrumentos utilizados en todas las tareas propuestas, ya que estos fueron desencadenadores de acciones, interacción e ideas dirigidas a la producción paulatina de aprendizaje sobre la multiplicación.

Primeramente se apreció cómo las estudiantes asumieron que la multiplicación tiene cierta relación con la suma iterada, aunque muchas veces presentaban confusiones en el uso de esta vía. Después se pudo ver cómo los estudiantes a partir de las sumas iteradas precisaron su conocimiento y comenzaron a realizar una coordinación de dos conteos iterados de dos familias de cantidades diferentes. Es decir, las niñas comenzaron a razonar proporcionalmente. Así pues, las estudiantes objetivaron la multiplicación en dos direcciones; la primera como un instrumento que se utiliza para dar solución a problemas en determinadas tareas a través de la relación de dos familias de cantidades y la segunda como una operación aritmética entre de dos números ($M \times N = C$, siendo C “M” veces N), donde no se consideran las familias de cantidades

- El trabajo en equipo durante las diferentes etapas de desarrollo de las tareas es un Medio Cultural Semiótico, donde a su vez se emplean otros medios como instrumentos para la acción e interacciones verbales para establecer relaciones multiplicativas y comprender intuitivamente las tareas a partir de la multiplicación como proporcionalidad directa.
- Lo que las niñas hicieron al organizar, presentar el presupuesto y establecer relaciones matemáticas en la tarea “Golosinas para la fiesta”, son formas de razonamiento

válidas debido a que son Medios Culturales Semióticos. Su utilización permite ver claramente los motivos establecidos (como aprovechar de la mejor manera el presupuesto) por las estudiantes, para la consecución de los cuales desarrollaron diferentes acciones con ayuda de instrumentos. Los conocimientos empleados en este proceso provienen de la objetivación que han hecho las niñas de forma cultural sobre el dinero y sus usos. A su vez, esto promueve la objetivación de la multiplicación tras la excusa de resolver las tareas propuestas por los maestros en formación.

- El proceso de objetivación de aproximación a la multiplicación como proporcionalidad directa se generó a través de acciones, artefactos e instrumentos utilizados en la consecución de los motivos situados en las tareas propuestas, dirigidos hacia la construcción social de aprendizaje sobre la multiplicación.

ANEXOS

Anexo 1: Permiso de los padres para la publicación de producciones de las estudiantes

Medellín, Octubre 30 de 2012

Señores Padres de Familia

Institución Educativa Antonio Ricaurte

Asunto: Consentimiento para participar en el proceso de práctica y en la investigación sobre "las estructuras multiplicativas". Para los grados 3º, 4º y 5º

Cordial saludo

Como es de su conocimiento, el colegio viene adelantando diferentes esfuerzos con el fin de asegurar la calidad académica del servicio educativo que presta. Parte de estos esfuerzos están orientados a los procesos de formación de sus docentes, de seguimiento y evaluación a los procesos curriculares adelantados, y por supuesto, al rediseño curricular permanente en las áreas básicas de formación. En el marco de las estrategias adelantadas para lograr tales fines, la investigación educativa se presenta como un baluarte importante en la consolidación de las metas propuestas por el colegio. Es por eso que durante el presente año lectivo y el siguiente (2012-2013), conjuntamente con la coordinación del colegio, hemos decidido participar en el desarrollo de la investigación sobre "estructuras multiplicativas". La cual realizarán los estudiantes de la Universidad de Antioquia: Jéssica Tapias, Liliana Quintero López, Sara María Mejía Vasco, Duvan Ernesto Restrepo, Jhonatan Restrepo, Susana Betancur, en el marco de su proceso de práctica y de su trabajo de grado para optar el título de licenciados en Básica con énfasis en Matemáticas.

Esta investigación, en el área de las matemáticas, se adelantará en los grados de tercero a quinto

La siguiente comunicación tiene como objetivo solicitar su consentimiento que su hija tome parte en tal estudio. Es importante que sean consientes que ustedes son libres de permitir o no la participación de su hija en el estudio, o incluso de retirarse en cualquier momento sin afectar su relación, y la de su hija con los estudiantes de la Universidad, el docente del curso, o el Colegio.

El propósito de este estudio es comprender los procesos cognitivos y matemáticos implicados en el desarrollo del aprendizaje de las estructuras multiplicativas en niños en edad escolar comprendida entre los grados tercero a quinto de la educación básica, y sobre dichas comprensiones, realizar procesos de intervención pedagógica y didáctica que permite el diseño y ejecución de currículos acordes con estos procesos. El procedimiento será un diseño de estudio de caso, donde se hará seguimiento al trabajo de los estudiantes de estos grados, en los grupos de trabajo en que están organizados en el aula de clase.

Los datos serán recogidos a partir de las situaciones de aula que los estudiantes de la Universidad proponen a los estudiantes en el desarrollo normal del currículo de matemáticas de dichos grados, durante el presente año lectivo y el 2013. La recolección de datos involucrará documentos (las anotaciones en el cuaderno, o en las hojas de trabajo hechas por los estudiantes y el docente, las evaluaciones de los estudiantes y la situaciones de aula propuestas por el docente), material audiovisual (grabaciones de audio, y videograbaciones de algunas de las clases), entrevistas (transcripciones de las entrevistas a algunos estudiantes), y notas de campo de observación de aula (al trabajo realizado por los docentes y los estudiantes). Por lo tanto, las personas involucradas en la recolección de datos serán tanto el docente, como los estudiantes de las clases de matemáticas de los grados antes mencionados.

No sobra decir que estaremos atentos a responder cualquier inquietud o pregunta sobre el estudio antes de permitir la participación de su hija en el mismo, o en el momento que usted lo considere necesario.

Es importante resaltar que la información recogida en el proceso de investigación sólo será **utilizada** con fines académicos en relación con las metas propuestas por la investigación, y los resultados o conclusiones de la misma bajo ninguna circunstancia serán utilizados con fines de evaluación y promoción. Este tipo de procesos serán adelantados por los docentes titulares de los cursos, bajo los parámetros y normas determinadas por la institución. Adicionalmente, la identidad de los participantes será protegida en el desarrollo de la investigación y no se permitirá que personas individuales sean relacionadas directamente con las conclusiones de la investigación, y la identidad de su hijo(a) como un participante será conocida por los investigadores, y con fines analíticos.

Igualmente debemos resaltar que no hay riesgos potenciales conocidos y/o malestar relacionado con este tipo de estudio.

Los beneficios esperados relacionados con la participación de su hija es una mejor comprensión de los procesos de pensamiento matemático de los niños en edad escolar, y en relación con esta comprensión, la reconceptualización de los procesos curriculares y didácticos que orientan el trabajo institucional en el área de matemáticas. Cualquier publicación o divulgación de los resultados reconocerá la participación de la institución y sus estudiantes en el presente estudio.

Muchas gracias por su colaboración.

Gilberto Obando Zapata
Asesor de práctica U de A

María Denis Vanegas Vasco
Asesora de práctica U de A

Liliana Quintero, Jéssica Tapías, Jhonatan Gallego, Sara Mejía, Susana Betancur, Duban Restrepo.
Estudiantes de Práctica U de A

Por favor firme su consentimiento con pleno conocimiento de la naturaleza y el propósito de los procedimientos. Una copia de este consentimiento será remitida al archivo de la institución, y otra al archivo de los estudiantes de práctica (investigadores)

Nombre del alumno: Sara Marcela C. Grado 4-B

Firma Padre de Familia
Nombre Padre de Familia: JOIME C. Fecha: 13-11-12

Firma Madre de Familia
Nombre Madre de Familia: ADRIANA S. Fecha: 13-11-12

No sobra decir que estaremos atentos a responder cualquier inquietud o pregunta sobre el estudio antes de permitir la participación de su hija en el mismo, o en el momento que usted lo considere necesario.

Es importante resaltar que la información recogida en el proceso de investigación sólo será utilizada con fines académicos en relación con las metas propuestas por la investigación, y los resultados o conclusiones de la misma bajo ninguna circunstancia serán utilizados con fines de evaluación y promoción. Este tipo de procesos serán adelantados por los docentes titulares de los cursos, bajo los parámetros y normas determinadas por la institución. Adicionalmente, la identidad de los participantes será protegida en el desarrollo de la investigación y no se permitirá que personas individuales sean relacionadas directamente con las conclusiones de la investigación, y la identidad de su hijo(a) como un participante será conocida por los investigadores, y con fines analíticos.

Igualmente debemos resaltar que no hay riesgos potenciales conocidos y/o malestar relacionado con este tipo de estudio.

Los beneficios esperados relacionados con la participación de su hija es una mejor comprensión de los procesos de pensamiento matemático de los niños en edad escolar, y en relación con esta comprensión, la reconceptualización de los procesos curriculares y didácticos que orientan el trabajo institucional en el área de matemáticas. Cualquier publicación o divulgación de los resultados reconocerá la participación de la institución y sus estudiantes en el presente estudio.

Muchas gracias por su colaboración,

Gilberto Obando Zapata

María Denis Vanegas Vasco

Asesor de práctica U de A

Asesora de práctica U de A

Liliana Quintero, Jéssica Tapias, Jhonatan Gallego, Sara Mejía, Susana Betancur, Duban Restrepo.

Estudiantes de Práctica U de A

Por favor firme su consentimiento con pleno conocimiento de la naturaleza y el propósito de los procedimientos. Una copia de este consentimiento será remitida al archivo de la institución, y otra al archivo de los estudiantes de práctica (investigadores)

Nombre del alumno Valeria Hernandez Grado 4: B

Olaya

Firma Padre de Familia [Firma]

Nombre Padre de Familia Andrey Alberto Estom Restrepo Fecha 13-11-2012

Firma Madre de Familia Diana Olaya

Nombre Madre de Familia Diana Olaya Fecha 13-11-2012

Anexo 2: Guía de trabajo

Tarea: el juego de la rana

Objetivo de la clase: Identificar relaciones multiplicativas que realizan las estudiantes de grado Cuarto, a través de la tarea El juego de la rana.

EL JUEGO DE LA RANA



MATERIALES:

Tapas, cajas de huevos pintadas, tabla de registro de puntos y Lápiz.

INSTRUCCIONES DEL JUEGO:

Reúnete con 5 compañeras. Luego cada jugador tendrá la posibilidad de lanzar 4 fichas en cada turno y deberá anotar en su tabla la cantidad de fichas caídas en cada color. Es decir cada jugador tendrá la posibilidad de lanzar 12 fichas en todo el juego.

Ganará el jugador que más puntaje obtenga al final de los tres turnos, para dar cuenta de ello cada color tiene los siguientes valores:

- Espacio azul da 6 puntos
- Espacio verde da 7 puntos
- Espacio Amarillo 8 puntos
- Espacio rojo 9 puntos

TABLA DE REGISTRO INDIVIDUAL:

	Cantidad de fichas en el espacio azul	Cantidad de fichas en el espacio verde	Cantidad de fichas en el espacio amarillo	Cantidad de fichas en el espacio rojo	Puntaje total
1er Turno					
2do Turno					
3er Turno					
TOTAL					

Ilustración 22-Tabla de registro individual, El juego de las ranas

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR

1. Andrés obtuvo 72 puntos en total. Si se sabe que solamente lanzó fichas en el espacio amarillo ¿Cuántas fichas fueron lanzadas? _____
2. Si Sofía quiere obtener 27 puntos lanzando fichas solamente en el espacio rojo ¿Cuántos fichas debe lanzar allí? _____
3. En el equipo de Santiago, Andrea y Patricia llenaron la siguiente tabla de registro grupal, pero por descuido faltaron algunos datos. Ayúdales a completarla.

	Cantidad de fichas en el espacio azul	Cantidad de fichas en el espacio verde	Cantidad de fichas en el espacio amarillo	Cantidad de fichas en el espacio rojo	Puntaje total
1er Turno	0	3	1	0	
2 do Turno	2		1		36
3er Turno	0				27
Total					

Ilustración 23-Tabla de registro grupal, El juego de la rana



Anexo 3: Planeación

Tarea: resolvamos problemas

Fecha: Miércoles 20 de marzo, lunes 1, miércoles 10, lunes 15 de abril de 2013

Objetivo

Resolver problemas de proporcionalidad directa con ayuda de diferentes instrumentos (representaciones gráficas, discusiones grupales, entre otras).

Cronograma

1. Saludo
2. Explicación de la actividad
3. Desplazamiento hacia la cancha para el desarrollo de la actividad.

Explicación de la actividad

Las estudiantes se organizan en equipos de tres integrantes y se desplazan hacia la cancha. Allí se encontrarán ubicados en distintos puntos los siguientes problemas:

1. La mamá de Carlos y Alejandra hace osos de peluche. Los niños ayudan a su mamá cortando las patas de los osos.

a) ¿Cuántas patas necesita cortar Carlos para hacer cinco osos?

b) Alejandra corta 23 patas ¿Para cuántos osos le alcanzan?

c) Carlos corta 45 patas y luego corta otras 14 ¿Para cuántos osos alcanzan?

2. Una empresa empaqueta dulces de la siguiente manera:

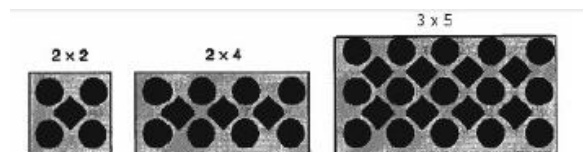


Ilustración 24-Planeación tarea Caja de caramelos

Los círculos representan bombones y los cuadrados caramelos. Las dimensiones de las cajas se indican mediante el número de columnas y filas de bombones que hay en cada caja.

a) ¿Cuánto caramelos tiene la caja cuyas dimensiones son 2×5 y 5×6 ?

b) Si una caja contiene 60 bombones, ¿De cuántas y cuáles formas se puede organizar?

¿Cuántos caramelos contienen dichas cajas?

3. Daniela y Jerónimo quieren hacer galletas para vender. Para hacer 50 galletas necesita: $\frac{1}{2}$ libra de mantequilla, $\frac{1}{2}$ bolsa con leche, 1 libra de harina, 4 cucharadas de azúcar y 2 huevos.

- a) ¿Qué cantidad necesitan de cada ingrediente para hacer 150 galletas?
- b) ¿Qué cantidad necesitan de cada ingrediente para hacer 75 galletas?
- c) Si en una receta utilizan 4 libras de mantequilla, ¿cuántas galletas hicieron?

Cada equipo debe tomar uno de los problemas y proceder a resolverlo con la premisa de explicar los procedimientos llevados a cabo para hacerlo. Una vez resueltos deben consignarlos en un pliego de papel periódico para socializarlos con el resto del grupo. La socialización se llevará cabo la siguiente clase; cada equipo presentará su cartel con la solución del problema que le correspondió. Los carteles se pegarán en el tablero y se compararán los diferentes procedimientos y representaciones que hayan resultado para cada problema.



Anexo 4: Planeación

Tarea: juguemos parqués

Fecha: Febrero 18 y 26, marzo 4 de 2013

Objetivos

- Fortalecer la habilidad de sumar mediante el cálculo mental.
- Hacer una introducción al concepto de divisor.
- Profundizar en el concepto de división exacta e inexacta a partir del conteo y empleando las estrategias propuestas por las estudiantes.

Materiales:

- Tablero de parqués común y las fichas de juego
- 4 fichas para cada uno de los 4 jugadores
- 2 Dados normales y otros 2 modificados (los dados modificados solo tienen números pares desde el 2 hasta el 12)
- Tabla de registro individual.
- Guía de trabajo individual.

DESCRIPCIÓN:

El desarrollo de la actividad se llevará a cabo en cuatro sesiones.

- En la primera sesión se busca que los estudiantes se familiaricen con el juego y las reglas de éste, a través de la interacción con el material. Para esta sesión se mezclará a las estudiantes que conocen el juego con aquellas que no han tenido contacto con él, esto con el fin de que las unas ayuden a las otras. Se preguntará: ¿De qué depende el avance de un jugador por el tablero del parque?
- En la segunda sesión de clase se pretende que las niñas jueguen parques con algunas modificaciones especiales que permitan matematizar el juego. Así mismo se observarán las diferentes estrategias que usan los estudiantes para el conteo y la agrupación. Las modificaciones consisten en que cada casilla tendrá un valor de dos puntos y los dados tendrán sólo números pares.

Se generará un espacio de discusión a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Qué característica tienen los números que aparecen en los dados?
- ¿De qué depende que una ficha avance?
- ¿Cuál es el puntaje mínimo que se puede sacar en los dados y según él, cuánto avanzaría una ficha?
- ¿Cuál es el puntaje máximo que se puede sacar en los dados y según él, cuánto avanzaría una ficha?
- ¿Cuántas casillas se puede avanzar si en los dados obtuvo 4 puntos? ¿Cuántas casillas puede avanzar si en los dados obtuvo 6 puntos? ¿Cuántas casillas puede avanzar si en los dados obtuvo 8 puntos?
- ¿Qué les pareció el juego con estas modificaciones?

GUÍA PARA LA CLASE:

El juego del parqués

Hoy jugaremos parqués, pero jugaremos de con una condición especial. La condición con la que jugaremos hoy consiste en que cada casilla del parqués vale 3 puntos.


Por ejemplo: si un estudiante tira los dados y saca 12 puntos, y como cada casilla vale 2 puntos, solo podrá mover 6 casillas.

Ganará el jugador que termine de llenar la tabla y responder las preguntas.

TABLA DE REGISTRO INDIVIDUAL:

CANTIDAD DE PUNTOS MARCADA EN LOS DADOS	CASILLAS AVANZADAS POR LAS FICHAS

CANIDAD DE PUNTOS MARCADA EN LOS DADOS	CASILLAS AVANZADAS POR LOS FICHAS



EN LA SIGUIENTE TABLA ORGANIZA LOS PUNTAJES DE MENOR A MAYOR

Ilustración 25-Guía de trabajo, El juego del parqués

- En la tercera sesión se pretende que las estudiantes construyan un conocimiento más general, sobre el juego y los procedimientos que surgen en él. Para esto se prepara la siguiente guía:

REFLEXIÓN SOBRE EL JUEGO

¿Qué características tiene los numero en los dados?

¿Cuál es el menor puntaje que se puede obtener con los dados?

¿Cuál es el maximo puntaje que se puede obtener con los dados?

Si un estudiante avanza 12 casillas, ¿Cuántos puntos saco?

¿Cuántas casillas puede avanzar, si en los dados obtuvo 4 puntos?

- ¿Cuántas veces cabe el 2 en el 4?

¿Cuántas casillas puede avanzar si en los dados obtuvo 6 puntos?

- ¿Cuántas veces cabe el 2 en el 6?

¿Cuántas casillas puede avanzar si en los dados obtuvo 8 puntos?

- ¿Cuántas veces cabe 2 en el 8?

Si un estudiante avanza 2 casillas, ¿Cuántos puntos saco?

Si un estudiante avanza 6 casillas, ¿Cuántos puntos saco?

- Si un estudiante tira los dados, y obtiene 20 puntos ¿Cuántas casillas avanza?
- Si un estudiante tira los dados, y obtiene 40 puntos ¿Cuántas casillas avanza?
- Si un estudiante tira los dados, y obtiene 62 puntos ¿Cuántas casillas avanza?

Ilustración 26-Guía de reflexión, El juego del parqués

Para esta sesión establecerá que las casillas del parqués valen 3 puntos. Se preguntará:

- Para avanzar dos casillas ¿Cuántos puntos se tendrá que sacar en los dados?
- ¿Cuántas casillas avanzo si en los dado saco 12? ¿Cuántas casillas avanzo si en los dados saco 18? ¿Cuántas casillas avanzo si en los dados saco 10?
- ¿Cuál es el menor puntaje que se puede sacar en los dados y cuántas casillas se avanzan?
- ¿Cuál es el máximo puntaje que se puede sacar en los dados y cuántas casillas se avanzan?
- ¿De qué depende el avance de las fichas?, ¿cuál es el puntaje que debe sacar en los dados para avanzar 2 casillas, 3 casillas, 4 casillas, 6 casillas, 10 casillas, 15 casillas, 20 casillas?



Anexo 5: Fragmento de diario pedagógico

Tarea: El juego de la rana

Fecha: Marzo 12, Abril 1 - 2 del 2013

Objetivo:

Identificar relaciones multiplicativas que realizan las estudiantes de grado Cuarto, a través de la tarea El juego de la rana.

Resaltemos que en general el trabajo realizado por las estudiantes fue sobresaliente ya que se logró reflexionar en torno a algunos elementos matemáticos que giran en torno a la multiplicación. Observemos algunos análisis que se han extraído de dicha tarea.

- Las estudiantes realizaron el tratamiento adecuado a las familias de cantidades colocándolas en el lugar indicado y obteniendo el resultado correcto (ver imágenes 27).

torno	Azul 3 puntos	Verde 4 puntos	amarillo 5 puntos	rojo 6 puntos	puntaje
1	1	3			45
2	1	2	1		13
3	1	1	1	1	28

Stephanie Rodriguez p. 10

Ilustración 27-Tratamiento de familias de cantidades 1

torno	azul 3 puntos	Verde 4 puntos	amarillo 5 puntos	rojo 6 puntos	puntaje
1		1	1	2	21
2		1	1	3	23
3	2	1			40

maia fernanda Buitrago espina 3ºA

$$\begin{array}{r} 21 \\ 23 \\ 40 \\ \hline 84 \end{array}$$

Ilustración 28-Tratamiento de familias de cantidades 2

- Las estudiantes identificaron las familias de cantidades y las ubicaron en sus respectivos lugares, pero tuvieron errores al calcular el puntaje total (ver imagen 27- 28).

urno	Azul 3 Puntos	Verde 4 Puntos	Rojo 6 Puntos	Amarillo 5 Puntos	Puntaje
1	2	1	1	1	15
2	1	1	1	2	14
3	2	2		2	

Ilustración 29-Tratamiento de familias de cantidades 3

torno	Azul 3 Puntos	Verde 4 Puntos	amarillo 5 Puntos	Rojo 6 Puntos	Puntaje
1			1	1	11
2	1	1		1	13
3	2		1	1	14
			total		38

Ilustración 30-Tratamiento de familias de cantidades 4

- Algunas estudiantes logran identificar las 2 familias involucradas (cantidad de tapas y puntajes de las zonas de color) y obtienen el puntaje total (ver imagen29-30).

turno	Azul 5 Ambar 3 puntos	Verde 4 Ambar 3 puntos	Amarillo 3 Ambar 3 puntos	Rojizo 6 Ambar 3 puntos	Puntos
1	1	1	1	1	4
2	1	1	1	1	4
3	2	1	2	1	6
					14

Ilustración 31-Tratamiento de familias de cantidades 5

- En algunos casos sólo tuvieron en cuenta una de las cantidades involucradas (ver imagen 32)

turno	Azul 3 Puntos	Verde 1 Puntos	Amarillo 5 puntos	Rojizo 6 puntos	Puntos Je
1	1 1 1	2	1 22	1 21	12+ 8 20
2	3	2 1	1	3	15+ 3 18
3	4	2	1	2	20 2 22

turno	Azul 3 Puntos	Verde 1 Puntos	Amarillo 5 puntos	Rojizo 6 puntos	Puntos
1	3				15
2					15
3					15

Ilustración 32-Tratamiento de una familia de cantidades

- El dialogo y la interacción fueron fundamentales en la realización de la tarea observemos algunos diálogos que surgieron:

-Maestro en formación: “¿Usted ya escribió el puntaje?”

-Estudiante: “Es que no sé”

-Maestro en formación: ¿Entonces cómo vas hacer para llevar la cuenta y saber quién ganó el juego?

-Estudiante 2: Es que yo le escribo y le sumo, porque ella no sabe llevar la cuenta.

En esta conversación se muestra el carácter social del proceso de desarrollo de la tarea. Más importante aún es la participación de los compañeros en la realización de las tareas y la presencia de éstos en el aula de clase.

- La utilización de tablas de registro generó interacciones en el plano intersubjetivo e intrasubjetivo. Es decir, la utilización de ésta herramienta hizo que las estudiantes pensarán en la manera de llenar la tabla, pero también en la forma en que lo hacían sus compañeras. Veamos un episodio ejemplo:

-Maestro en formación: “¿Por qué se llena la tabla de esta manera?”

-Estudiante: “Porque sí, porque ella (otra compañera) lo hizo así”.

-Maestro en formación: “¿Y está bien lo que hizo ella?”

-Estudiante: “Sí, yo revisé”.

- La utilización de la tabla o la herramienta fue modificada por algunas estudiantes. Las estudiantes toman la decisión de añadir nuevas casillas, filas o columnas con el propósito de mejorar la utilidad de la tabla de registro. A propósito es prudente retomar lo planteado por el profesor Gilberto Obando en una conversación personal: “existe un ciclo entre el hombre y los artefactos o herramientas. Si bien el hombre crea los artefactos, los artefactos cambiaron al hombre” (ver imágenes 31).

torno	Azul	Verde	Rojo	Blanco	total
1	1	3	1	1	4
2	1	3	1	1	4
3	2	1	2	1	6
					14

torno	Azul	Verde	Blanco	Rojo	total
1	1	1	2	2	4
2	1	1	0	0	4
3	0	0	3	1	7
0	3	0	0	1	4
0	1	1	1	1	4
0	0	1	3	0	4
0	1		2	1	4
0	0	1	2	1	4

Ilustración 33-Tablas de registro



Anexo 6: Diario pedagógico

Tarea: Resolvamos problemas

Fecha: Miércoles 20 de marzo, lunes 1, miércoles 10, lunes 15 de abril de 2013

Objetivo:

Resolver problemas de proporcionalidad directa con ayuda de diferentes instrumentos (representaciones gráficas, discusiones grupales, entre otras).

Como siempre, el desplazamiento de las estudiantes hacia la cancha generó un poco de dispersión y desconcentración. Cada equipo tomó rápidamente un papel con uno de los problemas y aunque la indicación fue pegarlo en el papel periódico, la mayoría comenzó a copiarlo allí y en los cuadernos; esto ocupó casi la totalidad de la primera clase. En realidad fueron dos los equipos que leyeron el problema que les correspondió; uno de ellos comenzó a resolverlo y el otro se dedicó a elegir el tipo de osos que utilizaría para representar el problema, pero no realizó ningún procedimiento para solucionarlo. Los demás equipos comenzaron a leer los problemas después de que las maestras en formación llamaran su atención; varios no los comprendieron, por lo cual se hizo necesario explicar los planteamientos y las preguntas que se pedían responder a partir de ellos. A pesar de haber explicado en cada equipo en qué consistían los problemas, en esta sesión las estudiantes no procedieron a resolverlos inmediatamente; se ocuparon más de cuestiones como decorar el pliego de papel y utilizar una bonita letra para escribir los nombres.

La siguiente clase inició con un pequeño regaño a causa del comportamiento en la clase anterior. Seguidamente las niñas se desplazaron nuevamente a la cancha para continuar con la resolución de los problemas. Se pudo observar que varios equipos comenzaron a discutir los problemas; qué explicaba el enunciado, qué se pedía encontrar y cómo hacerlo. Fue interesante ver cómo algunas niñas que ya habían identificado formas de proceder, se acercaban a las compañeras que aún no lo habían logrado para explicarles qué hacer para resolver los problemas; esto puede apreciarse en el siguiente diálogo que surgió alrededor del problema sobre las cajas de caramelos (ver problema 2, numeral b):

Estudiante 1: “Profé, no sé cómo hacer este punto”.

Estudiante 2: (de otro equipo de trabajo): “Es muy fácil...Tiene que hacer lo mismo que hacíamos cuando dibujábamos los rectángulos, o sea, tiene que buscar dos números que multiplicados den como resultado 60. Por ejemplo, 2 por 30 ó 12 por cinco. Después dibuja la caja de caramelos con esas medidas”.

Estudiante 1: “¡Ah, muy fácil!”.

Puede verse que el diálogo entre las estudiantes es un medio para comprender las tareas y encontrar estrategias para desarrollarlas. Por otra parte, es necesario mencionar que cuando la estudiante 2 dice “tiene que hacer lo mismo que hacíamos cuando dibujábamos los rectángulos” se refiere a una tarea que en otra clase se había planteado donde debían construir rectángulos dada un área determinada. Así, la alumna se apoya en procesos desarrollados anteriormente para llevar a cabo una nueva tarea.

Ahora bien, en cuanto a las acciones y operaciones que las estudiantes empelaron para el desarrollo de las tareas, pueden rescatarse los elementos que a continuación se presentan.

Sobre el problema 1

La mamá de Carlos y Alejandra hace osos de peluche. Los niños ayudan a su mamá cortando las patas de los osos.

a) ¿Cuántas patas necesita cortar Carlos para hacer cinco osos?

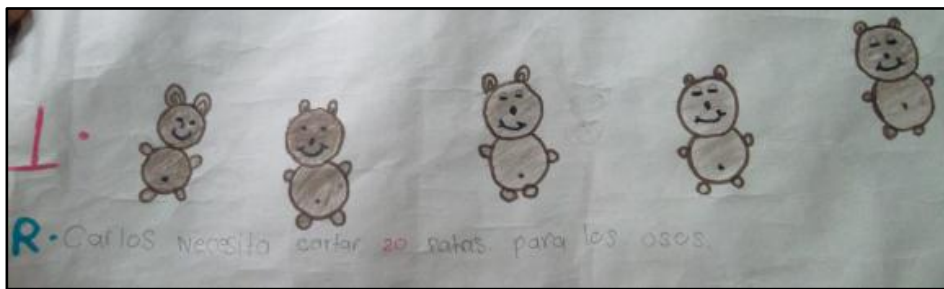


Ilustración 34-Planeación tarea Fábrica de osos

Este grupo decidió dibujar los cinco osos con sus respectivas patas para visualizar con mayor facilidad la cantidad de patas que en total se requería para la fabricación de los osos. Luego sumó todas las patas y encontró que para fabricar los cinco osos son necesarias veinte patas.

Así pues, aunque las estudiantes realizaron un procedimiento de suma, emplearon representaciones gráficas para desarrollar la tarea.

b) Alejandra corta 23 patas ¿Para cuántos osos le alcanzan?

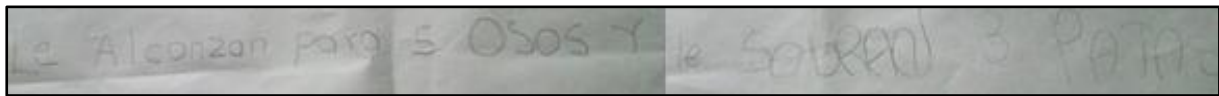
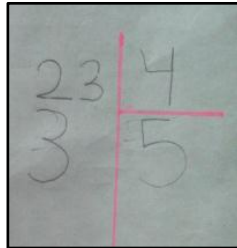


Ilustración 35-Solución tarea Fábrica de osos 1

En este ejemplo puede observarse la realización de una división entre la cantidad de patas dada en el enunciado y el número de patas que tiene cada oso. Luego de resolver la operación las niñas identifican que el cociente indica la cantidad de osos que pueden fabricarse con las 23 patas y que el residuo se refiere a la cantidad de patas que sobran pues no son suficientes para fabricar un oso completo. Este ejemplo es interesante porque puede verse que las estudiantes eligen la división como la vía para resolver el problema, para lo cual fue necesario identificar la existencia de dos cantidades relacionadas entre sí.

c) Carlos corta 45 patas y luego corta otras 14 ¿Para cuántos osos alcanzan?

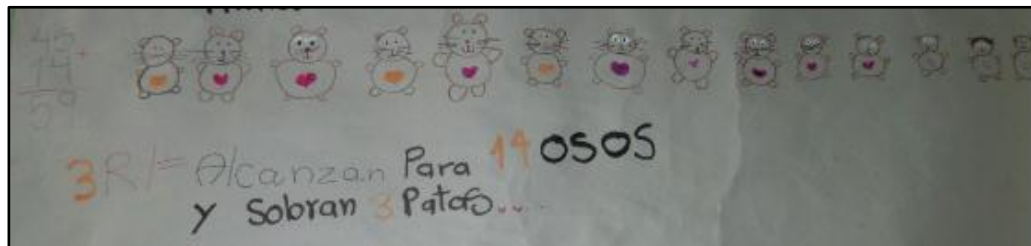


Ilustración 36-Solución tarea Fábrica de osos 2

En este caso, en primer lugar, las niñas reconocen que deben efectuar una suma debido a que se presentan dos cantidades (45 y 14) del mismo sistema de cantidad (patas), por lo cual realizan una suma para encontrar la cantidad de patas total que plantea el problema; así concluyen que se está hablando de 59 patas. Seguidamente, para saber cuántos osos pueden fabricarse con esta cantidad de patas, comienzan a dibujar osos hasta agotar las 59. Ven entonces que pueden dibujar 14 osos completos y sobran 3 patas.

Sobre el problema 2

4. Una empresa empaqa dulces de la siguiente manera:

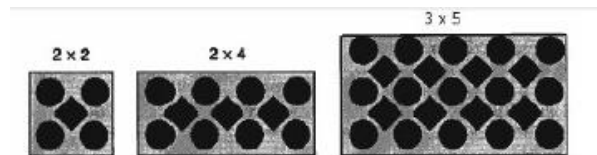


Ilustración 37-Planteamiento tarea Caja de caramelos

Los círculos representan bombones y los cuadrados caramelos. Las dimensiones de las cajas se indican mediante el número de columnas y filas de bombones que hay en cada caja.

c) ¿Cuánto caramelos tiene la caja cuyas dimensiones son 2x5 y 5x6?

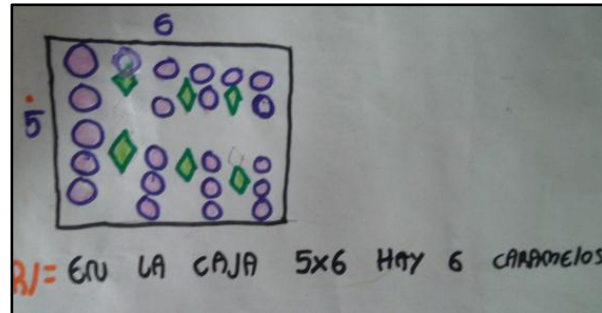


Ilustración 38-Solución tarea Caja de caramelos 1

En la imagen se muestra la representación gráfica hecha por uno de los equipos de trabajo, que es un buen ejemplo para ilustrar la dificultad que algunas estudiantes tienen para seguir instrucciones. El problema explicaba claramente cómo dibujar las cajas teniendo en cuenta la distribución de los bombones y de los caramelos, lo cual además se apoyaba en una imagen para hacer más clara la explicación. Aun así, el equipo ubicó los dulces de forma incorrecta, razón por la que la solución encontrada fue también errónea.

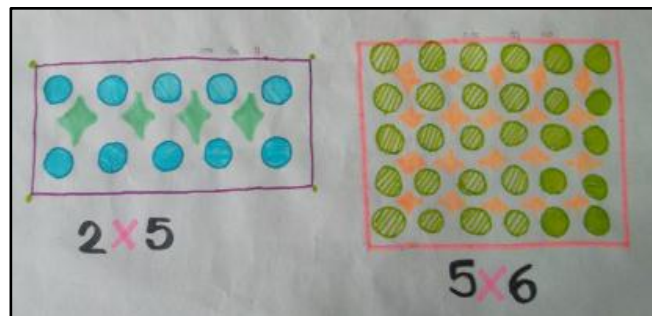


Ilustración 39-Solución tarea Caja de caramelos 2

Esta imagen muestra el trabajo de otro equipo que construyó sus gráficas en concordancia con las instrucciones dadas en el enunciado del problema. Claramente se aprecia la distribución de bombones y caramelos, y la cantidad de cada uno que va en cada caja según sus dimensiones. Es

importante mencionar que una vez se entregó el problema a este equipo, se leyó con las niñas y se les preguntó si podían resolver este punto sin realizar ningún procedimiento. Ellas dedicaron un tiempo para analizar la tarea e intentar desarrollarla, pero no consiguieron ningún resultado. Después elaboraron los esquemas y de este modo lograron hacer lo que no había podido sin utilizar representaciones gráficas. Es también importante indicar que a la hora de la construcción de los esquemas tuvieron principal importancia los diálogos que surgieron entre las niñas cuando discutían cómo debían dibujarse las cajas según las instrucciones del problema.

Por lo anterior, este ejemplo permite observar el papel que los Medios Culturales Semióticos desempeñan en la comprensión y desarrollo de tareas.

- d) Si una caja contiene 60 bombones, ¿De cuántas y cuáles formas se puede organizar?
¿Cuántos caramelos contienen dichas cajas?

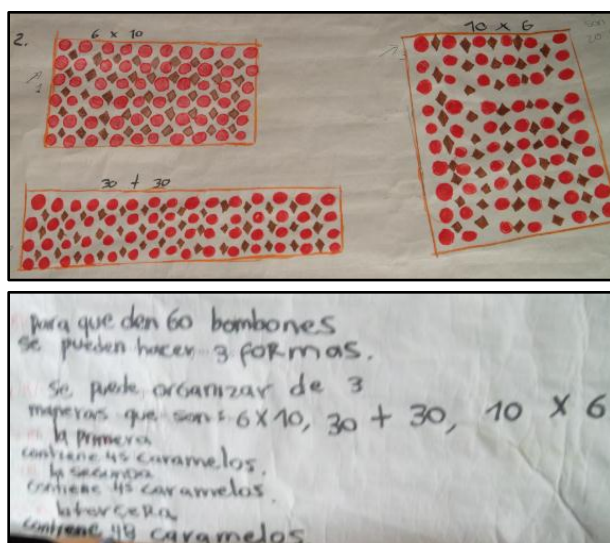


Ilustración 40-Solución tarea Caja de caramelos 3

El equipo seleccionado en este caso es el mencionado al inicio del presente diario cuando se narraba un fragmento del episodio donde una estudiante le explicaba a otra cómo proceder para resolver el numeral b del segundo punto. Las niñas encontraron tres formas diferentes de dar solución al interrogante planteado, buscando dos números que multiplicados dieran como resultado 60. Esta estrategia fue elegida retomando lo que habían hecho en otra ocasión cuando la tarea consistía en construir rectángulos a partir de un área dada.

Cito este ejemplo porque en él las niñas conciben la multiplicación como una vía para resolver el problema. Sin embargo, en la tercera caja de bombones que dibujaron expresaron las dimensiones como $30+30$ aunque claramente hayan dibujado la caja a partir de la multiplicación 15×4 .

Finalmente es importante resaltar que el desarrollo de las tareas propuestas a las estudiantes nos permite observar aspectos de suma importancia para comprender los conocimientos que hay detrás de las acciones que llevan a cabo las niñas.



Anexo 7: Diario pedagógico

Tarea: Jugemos parqués

Fecha: Febrero 18 y 26, marzo 4 de 2013

Objetivos:

- Fortalecer la habilidad de sumar mediante el cálculo mental.
- Hacer una introducción al concepto de divisor.
- Profundizar en el concepto de división exacta e inexacta a partir del conteo y empleando las estrategias propuestas por las estudiantes.

Se pudieron observar varios aspectos:

- Mientras el motivo de los maestros en formación consistía en que las estudiantes encontrarán relaciones entre los números obtenidos en los dados (las casillas avanzadas siempre eran la mitad del puntaje obtenido) y las casillas a avanzar, el motivo de ellas se convirtió en jugar parqués y ganar, para lo cual llenaron la tabla de registro proporcionada por los maestros en formación. Esto a la luz de la teoría de la actividad es llamado el objeto-motivo y como puede verse, es asumido por estudiantes y profesores de

diferente manera. El objeto motivo de los estudiantes nace en la actividad, específicamente en las acciones que las niñas realizan al jugar y llenar la tabla de registro.

- Algunas niñas no percibieron que un número puede obtenerse de diferentes maneras; por ejemplo: durante el juego una estudiante sacó en un dado 6 y en el otro también, obteniendo 12, con lo que puede avanzar 6 casillas. Pero otra niña sacó en un dado 8 y en el otro 4, obteniendo también 12 pero sin comprender que debía avanzar la misma cantidad de casillas que su compañera. Este mismo evento se repite con otros valores numéricos, como puede apreciarse en la imagen:

CANTIDAD DE PUNTOS MARCADA EN LOS DADOS	CASILLAS AVANZADAS POR LOS FICHAS
78	6
73	12
75	8

Ilustración 41-Tabla de registro, El juego del parqués 1

Otra integrante del grupo de trabajo le explica a la niña que debe avanzar 6 casillas también argumentando lo siguiente: “seis más seis es lo mismo que ocho más cuatro, sume y verá”. La estudiante comienza a sumar con ayuda de sus dedos, primero 6 más 6 y luego 8 más 4, hasta concluir que efectivamente ambas sumas tienen el mismo resultado. Seguidamente la niña dice: “como es el mismo resultado, entonces avanzo la misma cantidad de casillas”. A partir de este momento, el equipo de trabajo comprendió que al obtener el mismo número en diferentes lanzamientos, las casillas que se debían avanzar eran las mismas (ver imagen)

CANTIDAD DE PUNTOS MARCADA EN LOS DADOS	CASILLAS AVANZADAS POR LOS FICHAS	CANTIDAD DE PUNTOS MARCADA EN LOS DADOS	CASILLAS AVANZADAS POR LOS FICHAS
12	6	70	5
12	6	10	5
12	6	8	4
2	2	10	5
2	2	70	5
14			

Ilustración 42-Tabla de registro, El juego del parqués 2

Éste es una excelente evidencia de la importancia de las interacciones verbales y los movimientos corporales a la hora de relajar las tareas.

- En una de las sesiones de clase, el maestro en formación preguntó ¿cuáles son los números que están los dados? Las niñas comenzaron a nombrarlos “cuatro, diez, ocho, doce, seis, dos”. A continuación se preguntó también ¿qué características tienen en común? Las niñas guardaron silencio primeramente. Luego de un momento una de ellas dijo: “son números de dos en dos”, a lo que otra añadió: “sí, entonces son números pares”. Es éste otro ejemplo de comprensión a partir del diálogo entre las estudiantes.

Después el maestro preguntó: ¿Cuál es el máximo y el mínimo puntaje que se puede obtener en los dados? En un primer momento las estudiantes dijeron que se podían obtener todos los números. Luego una pequeña dijo: “sólo pueden salir números de dos en dos”, a lo que el maestro preguntó: “entonces, cuál sería el menor” La niña comenzó a escribir en su cuadernos los “números de dos” y respondió: “el menor es dos y el mayor es doce”. Una compañera expresó: “el menor es doce, pero el mayor es veinticuatro”, y surge el siguiente diálogo:

Maestro en formación: ¿Por qué?

Estudiante: “Porque el mayor número es 12, entonces si en los dos dados sale 12 tendría 24”.

- En las imágenes 11 y 12 , no se pretende mirar si la repuesta esta bueno o mala, sino resaltar que la solucion de las preguntas tiene un componente gramatical importante. Las preguntas colocadas a las estudaintes solo pedían y exigían una repuesta de tipo numérico, y aunque no se les exigió que justificaran las repuestas, estas dos estudaintes dieron respuestas numericas y gramaticales.

- Otro aspecto importante es el hecho que las estudiantes emplean representaciones gráficas para comprender las tareas y resolverlas. Al respecto es prudente mencionar que el dibujo no es gratuito, sino que hace parte de su pensamiento, convirtiéndose en un instrumento que cambia y transforma su mente

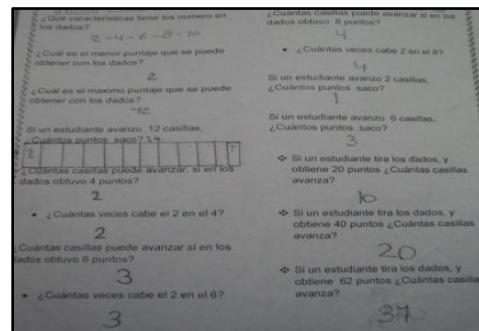
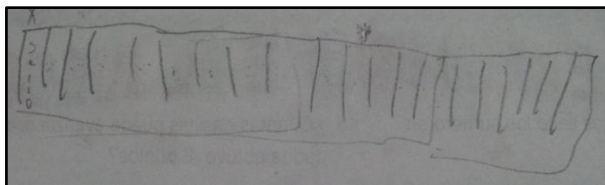


Ilustración 43-Representaciones gráficas, El juego del parqués

- Se observó también que para responder una de las preguntas de la guía, una niña estaba reuniendo y contando los colores de sus cartucheras. Se le preguntó cuál era su objetivo, a lo cual contestó: “necesito reunir 62 colores y después encontrarle la mitad, porque siempre al número que me dan le saco la mitad”. Después de un rato de contar colores

y ver que no era suficientes, expresa “no puedo reunir 62 colores”. En ese momento una compañera se acerca y explica: “para qué colores, sáquele la mitad al 2 y después al 6 y esa es la respuesta” (ver imagen).

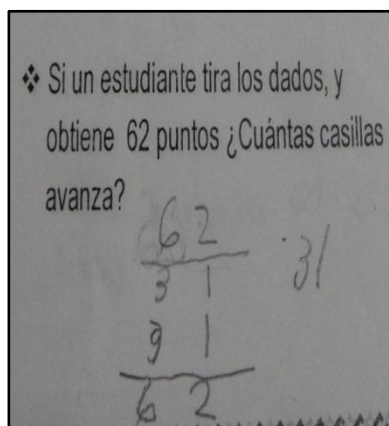


Ilustración 44- Procedimiento para encontrar soluciones

Resaltemos que el componente social y la interacción con los estudiantes son decisivos a la hora de resolver tareas; la intervención de la compañera de clase fue decisiva para que la estudiante encontrara la respuesta.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime* (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa). Número especial de la revista *Relime* (Cinvestav, México DF., México), Pp. 177-196.

Radford, L. (2000). *Objeto, sujeto, cultura y formación del conocimiento*. Canadá

Radford, L (2003). On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought . *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Inter*, pp. 49-79.

Radford, L (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, pp. 191-213.

Radford, L. (2006). *Elementos de una Teoría Cultural de la Objetivación*.

Radford, L. (2006). *Semiótica y Educación Matemática*. *Relime* (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa), número especial, pp. 7.

Radford, L. (2006). *Semiótica cultural y cognición*. In R. Cantoral Uriza, O. Covián Chávez, R. M. Farfán, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 669-689). Mexico: Diaz de Santos.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, pp. 1-19.

Radford, L. (2003). On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought . *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Inter*, 49-79.

- Radford, L. (2005). la generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 191-213.
- Radford, L. (2006). Elementos de una Teoría Cultural de la Objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking.*, pp. 103-129.
- Radford, L. (2006). Semiótica y Educación Matemática. *Relime (Revista Latinamericana de Investigación en Matemática Educativa)*, 7.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 1-19.
- Vergel, R. (n.d.). el papel de la cultura en la teoria de la objetivación.
- Obando Zapata , G., y Botero, O. (2006) La proporcionalidad directa e inversa a partir de la modelación de situaciones de variación. Módulo 2: Pensamiento variacional y sistemas algebraicos (págs. 77-118). Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Daniels, H. (2001). Vygotsky y la pedagogía. España: Paidós.
- Kozulin, A. (1988). Instrumentos psicológicos.
- Lave, J. (2001). La práctica del aprendizaje. En J. L. Seth Chaiklin, Estudiar las prácticas: perspectivas sobre actividad y contexto (págs. 15 - 45). Madrid: Amorrortu.
- Obando Zapata, G. (Septiembre de 2012). Comunicación personal (Asesoría). (L. Quintero, S. Mejía, S. Betancur, y J. Tapias, Entrevistadores)
- Obando Zapata, G., Vanegas, D., y Vásquez, N. (2006). Módulo 1: Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de casos, segunda edición, Madrid Editores Morata S L, pp. 1-149.
- Vergel, R. (s.f.). el papel de la cultura en la teoria de la objetivación. Prensa.