



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

**Implicaciones didácticas de una construcción histórica de la razón y la
proporción en algunos libros de texto de matemáticas**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en
Matemáticas y Física**

STEPHANY CAÑAS VALENCIA

Asesores

Clara Cecilia Rivera Escobar

Rubén Darío Henao Ciro

Agradecimientos.

A **mis padres**, quienes me han brindado la mejor educación y lecciones de vida, gracias por todo su amor y apoyo incondicional.

A **Joan y mi hermana**, con quienes he compartido mis angustias y han sido cómplices en los momentos difíciles, impulsándome a seguir adelante y no desistir en la lucha por mis sueños.

Gracias a ustedes por saber comprender y tolerar mis ausencias.

A **mis maestros y asesores**, por todo su apoyo y confianza, sin su ayuda y conocimiento este trabajo no hubiese sido posible.

Resumen.

El libro de texto de matemáticas como instrumento de comunicación de los saberes matemáticos ha sido el recurso más empleado por los docentes, ello lo ha convertido en el objeto de estudio de numerosas investigaciones.

El trabajo que se presenta a continuación se realizó con el propósito de determinar si existe correspondencia entre lo planteado por los libros de texto y lo propuesto por la historia de las matemáticas en torno a la razón y la proporción; para ello se analizaron cuatro libros del grado séptimo, en los que se estudió su estructura general y la configuración interna de las unidades temáticas referidas a las razones y proporciones; centrando la atención en sus significados, representaciones y orientaciones metodológicas. En atención a ello se encontró que en los textos la idea de razón se encuentra vinculada a la idea de división, aunque en épocas precedentes como la de Pitágoras y la de Euclides existiera una acepción diferente; la forma como son abordados los conceptos, los ejemplos, ejercicios y problemas dan cuenta de que en un mismo texto se utilizan teorías diferentes para formular explicaciones; además se halló que el papel de la historia es irrelevante en la estructuración de los mismos.

Contenidos.

Capítulo 1. Antecedentes.....	6
Capítulo 2. Presentación del problema.....	16
2.1 Planteamiento del problema.	16
2.2.Objetivos.....	18
Capítulo 3. Marco Teórico.....	19
3.1 Razón y proporción en el currículo escolar colombiano.	19
3.2 El libro de texto en la enseñanza de las matemáticas en Colombia.	21
3.3 la historia en la enseñanza de las matemáticas	24
3.4 Aproximación histórica a las ideas de razón y proporción.....	27
3.4.1 Razón y proporción en las culturas prehelénicas.	27
3.4.2 Razón y proporción en la época helenista.	30
3.4.3 La crisis de los inconmensurables.....	34
3.4.4 La época de Eudoxo y Euclides.	37
Capítulo 4. Metodología.	40
4.1 Caracterización de la investigación.	40
4.2 Momentos de la investigación.	41
4.2.1 Determinación del objeto de estudio.....	42
4.2.2 Definición del sistema de categorías.....	44
4.2.3 Análisis de categorías.....	46

4.2.4 resultados.....	69
Capítulo 5. Conclusiones.....	75
Referencias.	78
Anexos.....	84

Capítulo 1. Antecedentes.

En este capítulo se realiza una revisión de los trabajos previos relacionados con el tema de la razón y la proporción, con ello se busca analizar si la teoría y la investigación anterior ofrecen una respuesta (aunque sea parcial) a la pregunta de investigación, o si sugieren un camino a seguir a la hora de ejecutar este estudio.

Al indagar sobre la razón y la proporción son diversos los estudios que se encuentran en relación con esta temática, pues se trata de un asunto que ha tenido gran relevancia dentro de los contextos escolares de la mayoría de países del mundo (Obando, Vasco, & Arboleda, 2014; Oller & Gairín, 2013), además han ocupado las agendas y discusiones de varios grupos de investigación, por ejemplo, el Seminario Taller de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Distrital, el grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle y el grupo Re-Mate de la Universidad Pedagógica Nacional.

Dentro de los abundantes trabajos de grado, monografías, artículos y proyectos de investigación que giran en torno a la razón y la proporción, se han podido identificar tres grandes grupos en los cuales podrían clasificarse, ellos son: los estudios cognitivos, los estudios didácticos y los estudios epistemológicos.

Estudios cognitivos: su objetivo principal es describir, explicar y comprender la forma como los estudiantes construyen, adquieren y procesan estos conceptos. Con ellos se identifican factores internos y externos que influyen en el aprendizaje y en la realización de tareas relacionadas con la razón y la proporción.

Diversos autores (Obando et al., 2014; Freudenthal, 1983; Rapetti, 2003) coinciden en señalar que este enfoque tiene sus orígenes en los trabajos de Piaget sobre el desarrollo

del pensamiento lógico, quien resalta la importancia del razonamiento proporcional en el cambio del estadio de las operaciones concretas¹a las formales.

Dentro de estos estudios encontramos también los que tratan de identificar las habilidades mentales empleadas a la hora de hacer o resolver matemáticas, así como los relacionados con el desarrollo del pensamiento, basados en procesos de creatividad y resolución de problemas. Dentro de dichos trabajos encontramos:

Razón y proporción: Un estudio en la escuela Primaria: desarrollado por Fernández (2009), en él se presenta un estudio con alumnos de enseñanza primaria, donde se analiza su forma de proceder a la hora de resolver tareas que involucran los conceptos de razón y proporción. Del mismo modo, con él se pretende que la enseñanza de la razón y la proporción sea incorporada de manera directa a la enseñanza primaria y no únicamente de forma indirecta, a través del uso de las fracciones. Bajo esta misma mirada se encuentran los trabajos “competencias en razón y proporción en la escuela primaria” (Fernández, Figueras, Gómez, & Monzó, 2009), “una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria” (Fernández & Puig, 2002), “algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionario de tareas relacionadas con razón y proporción” (Fernández, Figueras, Gómez, & Margarit, 1997).

Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de razón y proporción en estudiantes de sexto grado de educación primaria: este es el resultado de las investigaciones de Ruiz & Lupiáñez (2009), donde se revisan las

¹ Entendiendo las operaciones concretas como una etapa del desarrollo cognoscitivo en la que el niño es capaz de resolver problemas aplicados a objetos concretos, por su parte, en la etapa de las operaciones formales se adquiere la capacidad de resolver situaciones de manera abstracta. (Rafael, 2007)

estrategias empleadas por 29 estudiantes, a la hora de resolver actividades relacionadas con la razón y proporción (simple y directa), a fin de reconocer los procesos cognitivos de los alumnos y determinar su forma de estructurar las respuestas ante preguntas y situaciones problemáticas. **En esta investigación se encontró que en la enseñanza de la razón y proporción— al igual que en la de muchos otros conceptos matemáticos— se priorizan los procesos algorítmicos carentes de sentido y significado.**

Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción: en este trabajo Pérez, Monje & Gómez (2013) centran su atención en la comprensión que tienen maestros en formación sobre la razón y proporción, para ello se proponen una serie de tareas con las cuales se busca analizar su manera de proceder y posteriormente se les incita a reflexionar y a tomar conciencia sobre sus propios procesos y productos cognitivos.

Proporcionalidad. Razones internas y razones Externas: esta investigación es elaborada por Rapetti (2003), en ella se analiza la resolución de problemas de proporcionalidad en 399 alumnos del nivel primario y medio. Se plantean problemas que incluyen razones externas (aquellas cuyos términos corresponden a distintas magnitudes) y problemas que incluyen razones internas (aquellas cuyos términos pertenecen a la misma magnitud). Se examina si el nivel de dificultad en la resolución es el mismo en ambos tipos de problemas y si los alumnos privilegian el uso de estrategias específicas en cada caso. **Al respecto se encontró que en los problemas de razones internas se presentan mayores dificultades y se privilegia la estrategia de comparar razones a partir de su división, sin embargo, no se realiza una correlación entre los resultados obtenidos y los métodos de enseñanza empleados, por lo tanto, podría preguntarse qué tipo de problemas y estrategias de solución se privilegian en el aula de clases.**

Estudios didácticos: piensan el desarrollo del pensamiento proporcional “desde la óptica de la escuela: el problema es ahora cómo enseñarlo, cómo lograr que la escuela favorezca procesos de enseñanza orientados a la constitución de tal forma de razonamiento” (Obando et al., 2014, p. 62), ahora la pregunta es por las estrategias, métodos, recursos y secuencias utilizados en el momento de enseñar estos dos conceptos. Dentro de estas investigaciones encontramos:

Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso (Valdemoros, 2010): en este trabajo se analiza la enseñanza impartida por un maestro de matemáticas, sus métodos y estrategias utilizadas; en él se concluye que se priorizan los procesos algorítmicos, se plantean situaciones aisladas al contextos de los estudiantes, lo cual dificulta la comprensión conceptual, no obstante, luego de que el maestro realizara una reflexión sobre su práctica y tuviera un mayor acercamiento a la temática (por medio de un programa de maestría), su modo de enseñanza evidenció grandes cambios, se dejó para el momento final la introducción de algoritmos y se diseñó una secuencia de actividades en las que existía una evolución del pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo.

Aquí es importante mencionar que aunque autores como Monje *et al.*(2013) sostienen que son varios los trabajos que ponen de manifiesto las dificultades que tienen los profesores de la escuela primaria y secundaria en relación con la comprensión y la enseñanza de los temas de razón y proporción, es necesario aclarar que estos estudios abundan en idioma inglés y en contextos no muy cercanos al colombiano, por lo tanto es importante que en nuestras inmediaciones se indague más por las concepciones del maestro intentando dar respuesta a preguntas como: ¿por qué es importante que los estudiantes tengan conocimiento sobre la razón y la proporción? ¿Qué intentan que los estudiantes aprendan alrededor de estos dos conceptos? ¿Qué conocimientos sobre la historia y la

epistemología tienen acerca de estos conceptos? ¿Qué aspectos del entorno cotidiano son importantes en la enseñanza de los mismos? ¿Cuáles son las dificultades y limitaciones conectadas en la enseñanza de estas ideas? ¿Qué conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales de los alumnos influyen en la enseñanza de estos conceptos? ¿Qué secuencia de actividades y de contenidos emplea para la enseñanza de ellos?

Todas estas son preguntas que se formularon y trataron de resolver con el profesor cooperador a lo largo de la práctica pedagógica, sin embargo, hay cierta resistencia por parte de algunos maestros a que se observe y se evalúe su práctica, y tal vez ello constituya la principal razón por la que son escasos este tipo de trabajos, pues por lo general se ha centrado la atención en las concepciones y dificultades del estudiante.

Cabe señalar que aunque varios trabajos (Ruiz & Lupiáñez, 2009; Pérez, Monje & Gómez, 2013; Rapetti 2003) consideran necesario comprender y analizar la forma cómo el estudiante adquiere el conocimiento matemático a fin de generar o sugerir estrategias que contribuyan a su aprendizaje, también hay que tener en cuenta que el éxito o fracaso de este proceso tiene que ver con la forma como el profesor lleva a cabo su enseñanza, así Thurston, Grant & Topping (2006), señalan que los conocimientos débiles y la poca confianza que tienen algunos profesores que imparten ciencias, influyen en la manera como el estudiante enfrenta su aprendizaje.

Modelos de enseñanza sobre razón y proporción (Ruíz & Valdemoros, 2008): en este trabajo se presenta una secuencia de enseñanza, validada con dos grupos de sexto, en ella se hace la transición entre lo cualitativo y lo cuantitativo; al aplicar la propuesta se concluye que el estudio de razón y proporción debe partir de reconocimientos cualitativos

antes de llegar a la cuantificación y a los procesos algorítmicos, pues así los alumnos encuentran primeramente el significado de términos que posteriormente rebautizarán con nombres del lenguaje matemático, lo que los conducirá a darles sentido hasta llegar a la generalización.

Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina (Ruíz & Valdemoros, 2006): aquí se evalúa una propuesta de enseñanza sobre la razón y proporción, diseñada en el marco de una tesis doctoral. Dicha propuesta se realizó luego de analizar la manera de proceder de un grupo de 29 niños de sexto grado a la hora de resolver problemas relacionados con la razón y proporción. Paulina, la niña del estudio de caso, reflejó la forma de operar de varios de estos niños, quienes resolvieron el cuestionario inicial con algoritmos manejados de un modo mecánico, sin darle sentido a sus elaboraciones, lo cual se vio ratificado al principio del programa de enseñanza. Dicho programa propició la ampliación del pensamiento proporcional cualitativo de Paulina, fortaleciendo su pensamiento proporcional cuantitativo en el terreno de la resolución de problemas. Así, la enseñanza, el cuestionario final y las entrevistas mostraron que el enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo le permitió a Paulina ampliar las relaciones cuantitativas y mejorar el manejo de los algoritmos, enmarcándolos en aplicaciones plenas de sentido.

Empleo de la geometría dinámica como apoyo en actividades de lápiz y papel, para la comprensión de los tópicos de razón y proporción (Ruiz & Lupiáñez,2010): en este trabajo se plantea la importancia de complementar las actividades de lápiz y papel con la observación y manipulación de representaciones hechas por softwares de geometría dinámica como cabri-geometre y se presenta una propuesta de enseñanza en la que se vinculan dichas actividades. Luego de aplicar la propuesta se encontró que los estudiantes,

en su mayoría, lograron determinar las razones involucradas en ciertas figuras y establecer relaciones de equivalencia, además corroboraron sus respuestas apoyándose en lo visual.

Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la educación básica (Obando, 2015): esta tesis doctoral indaga por el lugar de las razones, proporciones y proporcionalidad en las prácticas matemáticas de dos grupos de estudiantes de la Educación Básica primaria, estudia los procesos de constitución del conocimiento matemático, a través de la participación de las clases de matemáticas de los grados 3 y 4, y a su vez examina las configuraciones epistémicas de estos conceptos por medio de un estudio histórico-epistemológico de prácticas matemáticas en épocas y lugares diferentes.

Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas

(Guacaneme, 2001): En esta tesis de maestría se analizan algunos textos escolares de matemáticas que abordan el estudio de la proporcionalidad y se centra la atención en la manera como estos comunican el conocimiento matemático; en ella se estudia la estructura general del texto, la configuración interna de las unidades temáticas a través de las cuales se desarrolla el estudio de la proporcionalidad y el tratamiento de algunos temas o conceptos matemáticos centrales en el estudio de dicho tema. A su vez se examina el grado de relación y correspondencia entre lo propuesto en los libros de texto y en las propuestas curriculares de matemáticas de 1975 y 1989 en Colombia, no obstante, queda la pregunta sobre cómo ha sido la transformación de los libros de texto luego de la reforma educativa que impuso la ley 115 de 1994, cómo han influido los lineamientos y estándares en la formulación de sus contenidos y qué impacto han tenido las abundantes investigaciones sobre la razón y la proporción en el diseño de algunas de sus unidades temáticas.

Este documento es una fuente valiosa para nuestro trabajo, además se ha constituido en una guía para la elaboración del mismo.

Salvo estos dos últimos trabajos (Obando, 2015; Guacaneme, 2001), se puede decir que los estudios didácticos y cognitivos aunque plantean la necesidad de indagar por los procesos de pensamiento, estrategias de solución, información perceptual, lenguaje y métodos de enseñanza, se les puede reclamar que no realizan un cuestionamiento al conocimiento matemático que se imparte en la escuela, perdiendo así de vista que cualquier intento de problematización didáctica debe considerar el conocimiento matemático como una variable fundamental. De esta manera, poner en contraste lo planteado en los libros de texto de matemáticas como instrumento de comunicación de los saberes matemáticos, con lo propuesto por la historia en torno a determinado objeto del conocimiento (en este caso la razón y la proporción) daría cuenta de las transformaciones y deformaciones sufridas por el conocimiento matemático en el proceso de transposición didáctica.

Estudios epistemológicos: se centran en la estructura, organización y naturaleza del conocimiento matemático que está en juego dentro de las nociones de razón y proporción; al leer el estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad, realizado por Obando *et al.* (2014) es claro identificar que la mayoría de la bibliografía relacionada con este tipo de estudios se encuentra en idioma inglés, de igual modo Guacaneme (2016) no duda en afirmar que:

como resultado de la identificación de material bibliográfico disponemos de cerca de un centenar de documentos que versan sobre aspectos relacionados con la historia de los objetos matemáticos razón y proporción, la gran mayoría de ellos escritos en inglés y referidos a la historia de las matemáticas occidentales y hegemónicas(p. 319).

Lo cual supone en muchas ocasiones un obstáculo para las investigaciones que buscan reflexionar sobre estos aspectos o para los maestros que intentan tener un mayor

acercamiento a la temática por medio de su historia, y constituye a su vez un reto para la investigación hispana en este campo. Dentro de nuestro ámbito podemos destacar las investigaciones realizadas por Guacaneme (2012, 2016), Oller & Gairín (2013), Obando, Vasco, & Arboleda (2013).

Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos (Guacaneme, 2012): En este documento se realiza un análisis de la teoría de la proporción expuesta por Euclides en el Libro V de los Elementos; dicho análisis se nutre de los resultados de la investigación en Historia de las Matemáticas y se organiza a la luz de una interpretación de la Teoría de Significados Sistémicos del Enfoque Ontosemiótico². Los resultados del mismo ofrecen una mirada alterna de la propuesta euclidiana relativa al tratamiento de la razón y la proporción, potencialmente útil —y, en cierto sentido, necesaria— para adelantar tanto la actividad de docencia de las matemáticas, como la investigación didáctica relacionada con estos objetos matemáticos. En esta misma línea se dirige la tesis doctoral “potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento matemático del profesor” desarrollada por este autor.

La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización (Oller & Gairín, 2013): en este trabajo se realiza una revisión histórica sobre algunos conceptos relacionados con la razón y la proporción, se analizan los primeros intentos de fundamentación teórica de estos dos conceptos y se presenta el proceso de

² Este es un sistema teórico que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza.

La Teoría de los significados sistémicos alude al análisis de seis categorías a saber: situaciones problemas/tareas matemáticas, lenguaje matemático, procedimientos/ procesos matemáticos, conceptos/definiciones, propiedades y argumentos (Godino, Batanero, & Font, 2007)

aritmetización sufrido por el concepto de razón a partir de la edad media y que, con el paso del tiempo, ha llevado a que se priorice su faceta numérica por encima de su significado.

Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica (Obando, Vasco, & Arboleda, 2013) en esta investigación se plantea que las temáticas relacionadas con la razón, la proporción y la proporcionalidad por lo general son presentadas a partir de organizaciones matemáticas fuertemente aritmetizadas y con baja conexión con otras áreas del currículo, por lo tanto, se proponen una serie de principios que se pueden asumir como orientadores de unas organizaciones matemáticas integradores de lo aritmético, lo métrico y lo algebraico a lo largo del ciclo escolar

Capítulo 2. Presentación del problema.

En este trabajo se indaga por la importancia de la razón y proporción en el currículo escolar colombiano, analizando su desarrollo en algunos libros de textos y su relación con otros objetos matemáticos, además se intenta contrastar la evolución histórica y epistemológica de la razón y la proporción con la estructura presentada en algunos textos escolares. En este capítulo se presentan los interrogantes que constituyen el problema de investigación y se expone nuestra intencionalidad, a través de la formulación de los objetivos.

2.1 Planteamiento del problema.

De acuerdo con Obando, Vasco, & Arboleda (2014) la razón y proporción son objetos de conocimiento importante a nivel curricular, pues se encuentran propuestos e implementados en los planes de estudio de la mayoría de países del mundo, del mismo modo Oller & Gairín (2013) sostienen que la existencia de estos temas, tanto en los currículos escolares como en los libros de texto de cualquier país datan de hace más de 200 años. La importancia concedida a la razón y proporción se ha visto reflejada en la cantidad de trabajos que se han preocupado por las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de estos objetos de conocimiento, sin embargo,

Evaluaciones recientes muestran que estos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes, lo que constituye un certero indicador de la necesidad de hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones de dicha problemática y, por esa vía, lograr mayores impactos en el sistema educativo (Obando *et al.*, 2014, p. 59).

Así por ejemplo, en análisis realizados a las pruebas TIMSS (1995, 2007) se encuentra que los temas relacionados con la razón y la proporción, son difíciles para todos

los estudiantes del mundo; no obstante, estas dificultades se hacen más evidentes en los estudiantes colombianos, quienes tienen un rendimiento bajo en comparación con los resultados de los estudiantes de otros países. Igualmente se encuentra que los asuntos relacionados con la razón y la proporción son de los puntos más críticos dentro de los aspectos evaluados (Obando, 2015)

Si bien, distintos autores (Obando *et al.*, 2014; Oller & Gairín, 2013; Rapetti, 2003) coinciden en señalar que el razonamiento proporcional es una herramienta importante para la solución y modelación de diversos fenómenos físicos, económicos y una gran variedad de problemas cotidianos, hay quienes consideran que el discurso en torno a la razón y proporción ha perdido relevancia; así Castro & Díaz (2010) afirman que

el desaparecimiento de la razón matemática del discurso escolar ha sido progresivo, y está relacionado con la tendencia, principalmente, a partir del siglo XIX, de la formalización del álgebra y del análisis ampliando sus dominios hacia nuevos objetos y trivializando los teoremas relativos a razones y proporciones. En el sistema escolar, la pérdida de importancia ocurre, principalmente en las décadas de los años 60 y 70, con las reformas curriculares ocurridas en América Latina a través del movimiento de la “matemática moderna”³, dirigido hacia al desarrollo de recursos matemáticos considerados más eficientes, como la función lineal y el formalismo algebraico (p.900).

Sin duda alguna, este fenómeno tiene estrecha relación con lo planteado por González (2004), quien sostiene que muchas investigaciones en matemática consisten en retomar teorías anteriores y refundirlas en un marco nuevo, bajo un enfoque más potente y general que explica mejor, lo cual impone un estilo deductivista que oculta el proceso de la construcción original de la Matemática, es decir, las reelaboraciones sucesivas que la Matemática hace de las teorías precedentes, atenúan su historia.

³ Fue un cambio en los planes curriculares y la manera de enseñar matemáticas en las escuelas de Estados Unidos y algunos países Europeos, que tuvo su impacto en algunos cambios curriculares ocurridos en América latina durante la década de 1960. La característica básica de este movimiento fue la implantación de la teoría de conjuntos y de elementos de álgebra abstracta en las clases escolares.

Tal situación permea en muchos casos el ámbito escolar y puede evidenciarse en la estructuración de los planes curriculares y la presentación de los temas en los libros de texto, los cuales generalmente ocultan todo el proceso de construcción y validación entorno al conocimiento. De allí que considere importante preguntarse **¿qué implicaciones didácticas ha tenido la historia de la razón y la proporción en la estructuración de algunos libros de textos escolares?**

2.2.Objetivos.

Objetivo general.

Determinar cuál ha sido la participación de la historia de la razón y la proporción en la estructuración de algunos textos escolares, **a fin de contrastar lo planteado por ellos y lo propuesto por la historia de las matemáticas en torno a estas dos nociones, para dicha intención se recurrirá al método de análisis de contenido.**

Objetivos específicos.

- Analizar la historia de la razón y la proporción e identificar algunos cambios epistemológicos.
- Reconocer el lugar y la función de la razón y la proporción en los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación Colombiano (MEN).
- Describir las relaciones y correspondencias entre la historia de la razón y la proporción con lo planteado por el Ministerio de Educación y algunos libros de texto.

Capítulo 3. Marco Teórico.

En este capítulo se presentan las teorías que soportarán, justificarán y argumentarán la propuesta de investigación, además provee un marco de referencia para la interpretación de los resultados de este estudio. En cuanto a los referentes a tenerse en cuenta, uno corresponderá a la parte contextual y otro a la parte conceptual. En el primero se abordarán aspectos relacionados con el tratamiento de la razón y la proporción en el currículo escolar colombiano, así como las demandas actuales por involucrar la historia y epistemología en la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas; en lo referido a la parte conceptual se realizará una aproximación a la historia de la razón y la proporción.

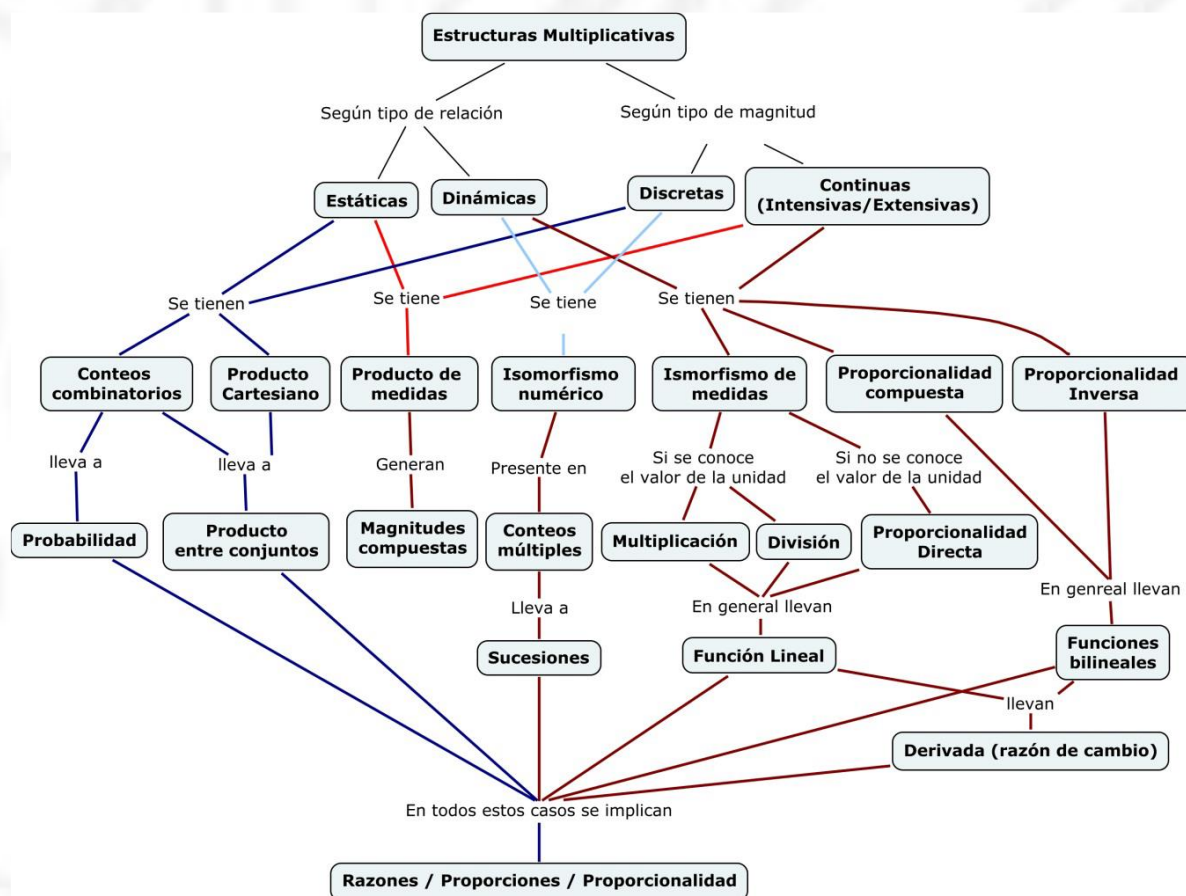
3.1 Razón y proporción en el currículo escolar colombiano.

Como ocurre en muchos países, en la educación colombiana se le otorga una gran importancia al estudio de la razón y la proporción en los niveles de educación básica y media, esto queda evidenciado en los planes curriculares de matemáticas en los que los temas relacionados con la razón y la proporción son tratados en diferentes grados del sistema escolar, así por ejemplo, Obando (2015) a través de una lectura detallada de los lineamientos y estándares propone que la razón y la proporción se encuentran vinculadas por medio de una red conceptual como la que se muestra en la Figura No 1.

Allí se puede apreciar como la razón y proporción son un eje transversal en la organización de los planes de estudio de matemáticas, pues no solo se encuentran presentes en todos los niveles de educación básica y media, si no que conecta a varios tipos de

pensamiento⁴ (numérico, variacional y métrico). Por tal razón no existe un tratamiento explícito de la razón y la proporción en los estándares actuales, en contraste con las propuestas curriculares del Ministerio de Educación de 1975, 1982 y 1989.

Figura No. 1. Red conceptual para las razones, proporciones y proporcionalidad en Lineamientos y Estándares



Fuente: Obando, 2015, p. 24.

Para el año de 1975 el estudio de la razón y la proporción se ubicaba en las unidades 7 y 8 del grado 7° (“ la proporcionalidad y sus aplicaciones”; “tanto por ciento, interés, descuento” respectivamente). Por su parte en la propuesta curricular de 1982 se ubican estos temas en el contexto del sistema relaciones y operaciones del grado 5°. Finalmente

⁴ Ver anexo A: pensamientos y estándares relacionados con la razón, la proporción y la proporcionalidad.

para 1989 estos temas corresponden a la unidad III: proporcionalidad y sus aplicaciones del grado 7° (Gucaneme, 2001).

3.2 El libro de texto en la enseñanza de las matemáticas en Colombia.

El libro de texto ha sido el material más utilizado dentro del sistema educativo colombiano, prueba de ello ha sido el número de políticas educativas implementadas durante el siglo XX en torno a la producción y distribución de textos escolares a través del Ministerio de Educación Nacional, así como la reglamentación de la industria editorial; a esto se le debe sumar los resultados obtenidos por Corena (2002), quien en un estudio sobre la enseñanza de las ciencias en la universidad colombiana obtuvo que el 75% de los profesores entrevistados, adquiere el material de enseñanza de un libro de texto guía.

Por su parte la historia sobre las reformas curriculares de matemáticas en Colombia, muestra también la gran relevancia y valoración social que ha tenido el libro de texto en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así Vasco (2013) señala que durante el período de 1903 a 1963 los cambios en los contenidos de matemáticas se reducían a las adiciones y reordenaciones de temas, de acuerdo con lo que iba apareciendo en los libros de texto extranjeros y a la llegada de algunas traducciones, como fue el caso de los libros de aritmética y de álgebra de G.M Bruño — libros traducido del francés por el Hermano Miguel de las escuelas cristianas Francisco Febres Cordero en Bélgica — que marcaron las clases y contenidos de matemáticas de varios países de hispanoamérica, durante finales del siglo XIX y principios del XX.

Del mismo modo Gómez (2014) identifica entre los libros más utilizados durante la época de los años 50's la aritmética y el álgebra de Aurelio Baldor, el curso de álgebra superior de Ignacio Fossi, el álgebra práctica de Carlos Mataix, la Geometría de Bruño, la

trigonometría rectilínea de Agustín Anfossi, la geometría analítica de Charles Lehman, la geometría analítica de Anfossi, introducción del cálculo infinitesimal de Viedma y el cálculo de Hernando Bedoya.

Otro período importante para las transformaciones curriculares en matemáticas fue la época comprendida entre 1963 y 1993. Durante este período se impuso una nueva manera de enseñar matemáticas y se introdujo la matemática moderna, con la cual se realizó una gran labor de sistematización de las matemáticas, a través del lenguaje de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática, dirigida por el grupo que escribía bajo el seudónimo de Nicolás Bourbaki; “Esta reestructuración bourbakista de las matemáticas sedujo a la comunidad matemática por su elegancia arquitectónica y por la unificación del lenguaje, hasta tal punto que se pensó abolir el plural matemáticas para hablar de una sola matemática” (MEN, 1998, p. 5).

Durante este período con el decreto 1710 de julio 25 de 1963 se estableció un plan único de estudios, los contenidos para cada curso fue realizada por el Ministerio de Educación Nacional y fueron publicados a través de manuales que contenían los programas de todas las asignaturas.

Estos manuales fueron creados con la contribución de la Misión pedagógica alemana quien se encargó de simplificar el riguroso lenguaje de la lógica y la teoría de conjuntos, Vasco (2013) afirma que para esta época

Los alemanes donaron materiales educativos para las matemáticas de primaria a todas las escuelas, y difundieron en sus famosas cartillas una parcelación de contenidos y objetivos, semana por semana de primero a quinto de primaria. Sin necesidad de decreto las cartillas de la misión alemana se convirtieron en el programa nacional para la aritmética de primaria de 1963 a 1984. Para la secundaria de seis años [...] se seguían los programas del ministerio a través de textos escolares que se ajustaban fielmente a ellos (p. 10).

Por esta misma época por medio del decreto 3153 de 1968 se crea el Instituto Colombiano de Pedagogía (ICOLPE) quien se encargaría de prestar asesoría en la producción de materiales educativos y de formular una propuesta de política oficial sobre los libros de textos escolares.

Para el año 1974, con el decreto 080, se introduce una nueva reforma curricular bajo el auspicio del presidente Misael Pastrana y al igual que en los años anteriores se entregan los programas junto con sus objetivos a las editoriales para formular nuevos libros de texto. Es importante anotar que con este decreto al igual que con el decreto 1710 de 1963 los programas fueron aceptados sin ninguna oposición ni crítica pública por parte del magisterio o de la comunidad de matemáticos, a pesar de que la Federación Colombiana de Educadores (FECODE) ya llevaba 15 años trabajando en la organización de los maestros.

Sin embargo, lo paradójico del caso es que cuando se intenta realizar una nueva reforma con la ayuda y participación de los educadores por medio del decreto 088 de 1976 que hablaba de una reorganización del Ministerio de Educación, así como de un plan de mejoramiento cualitativo encabezado por la educadora Pilar Santamaría de Reyes, el intento fracasa, pues

El MEN envía copias de los programas de matemáticas y ciencias naturales de primero a quinto grado a todas las facultades de educación y algunos departamentos de matemáticas de las facultades de ciencias [para que sean revisados]. De todas las facultades de educación no respondió ninguna. Dos universidades que no tenían facultad de educación sí respondieron: la universidad de los Andes, con un informe sobre el programa de matemáticas[...] y la universidad Nacional, con dos informes, uno sobre el programa de matemáticas, escrito por Mary Falk, Miriam Acevedo y Crescencio Huertas, y otro sobre el programa de ciencias naturales, escrito por el grupo Federici. Este último informe fue muy negativo contra la renovación curricular en general, contra la tecnología educativa, y contra el desglose de los programas por objetivos generales y específicos (Vasco, 2013, p. 12)

Para 1991 con la proclamación de la nueva constitución se comienza a preparar una reforma educativa radical, que se cristaliza con la ley general de educación (ley 115 de

1994), a través de la cual el Ministerio de Educación Nacional pierde la potestad curricular y le otorga a los colegios la capacidad de organizar su propio Proyecto Educativo Institucional (PEI) y su propio diseño curricular. Tal situación genera algunas dificultades con la proliferación de Proyectos Educativos Institucionales con orientaciones muy dispares que tratan de contrarrestarse por medio de los libros de textos escolares, los lineamientos y estándares y los exámenes censales (Pruebas Saber para 3, 5, 7, 9, pruebas Saber 11, pruebas saber T y T y pruebas Saber PRO)

De acuerdo con Graffe & Orrego (2013) con la ley general de educación el texto escolar adquiere una valoración especial para el Estado, pues en su artículo 141 se establece la creación de bibliotecas en los centros escolares, las cuales fueron reglamentadas por el Decreto 1860 de 1994, en el que se fija tener de manera obligatoria cierto número de textos y en el que se enuncia que “los textos escolares deben ser seleccionados y adquiridos por el establecimiento educativo, de acuerdo con el proyecto educativo institucional, para ofrecer al alumno soporte pedagógico e información relevante sobre una asignatura” (p. 15)

Junto a esto se han desarrollado diferentes estrategias con las cuales se busca asesorar a los establecimientos educativos frente al uso de los libros de texto, un ejemplo de ello ha sido la iniciativa de las vitrinas pedagógicas, en las que los docentes tienen la oportunidad de estudiar y conocer la oferta bibliográfica vigente y escoger la que mejor se adapte a sus necesidades y el catálogo de textos escolares elaborado por el Ministerio de educación por medio el Decreto 2230 del 8 de agosto de 2003.

3.3 la historia en la enseñanza de las matemáticas

Si bien los libros de texto han tenido una gran influencia dentro de la enseñanza de las matemáticas hay quienes consideran que presentan la información de una manera

cerrada y acabada; esto ha contribuido a reforzar la visión estática, elitista y dogmática que de las matemáticas se ha tenido, pues muchos teoremas, pruebas y definiciones son abordados como simples resultados, ocultándose así todo el proceso de construcción y validación en torno al conocimiento matemático.

No obstante, pese a esta situación “las encuestas TIMSS han permitido identificar estrategias y métodos utilizados habitualmente por los docentes, evidenciando en particular que la casi totalidad del profesorado depende del libro de texto (aproximadamente el 100 %)” (Michellini, Santi, & Stefanel, 2013, p. 846). Situación que ha conducido a una mecanización del saber y del hacer docente, y a una falta de reflexión en relación con los conocimientos matemáticos y la forma de presentarlos en el aula de clases.

Del mismo modo esto se ha visto reforzado con la concepción mitificada que se ha creado en torno a las matemáticas, pues estas generalmente se han considerado como una disciplina determinista y totalizadora, en la que intervienen herramientas formales y que sólo es accesible a unos pocos privilegiados. La visión de las matemáticas como un cuerpo sólido e inequívoco de verdades absolutas, ha conducido a pensar que solo es necesario estudiar y memorizar algunas definiciones y procesos algorítmicos, convirtiéndose así el maestro en un intelectual memorizador y repetidor de frases inertes.

Ante estas dificultades han surgido nuevas demandas, así por ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional (2007) advierte que

Se hace necesaria una nueva visión de las matemáticas como creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un periodo histórico determinado) y, por tanto, como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio. Ello implica incorporar en los procesos de formación de los educandos una visión de las matemáticas como actividad humana culturalmente mediada y de incidencia en la vida social, cultural y política de los ciudadanos [...] así mismos es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y

estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos (p.48).

En consonancia con lo anterior el proyecto Expedición currículo (2014) de la alcaldía de Medellín sostiene que

La matemática es una ciencia en construcción permanente que, a través de la historia, ha ido evolucionando de acuerdo con las necesidades que surgen en las sociedades y de las problemáticas del contexto (cotidiano, histórico y productivo, entre otros). Los Lineamientos curriculares expresan que: “El conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan la colectividad, que sirven de argumento, de justificación” (MEN, 1998; p.12). Desde esta visión es una construcción humana, en la cual, prevalecen los cuestionamientos que al ser resueltos transforman el entorno y la sociedad. Concebir la enseñanza de la matemática como un cuerpo de conocimiento que surge de la elaboración intelectual y se aleja de la vida cotidiana, es como mutilar su fin en sí misma (p. 9).

Por tal razón considerar el proceso histórico sobre el desarrollo y evolución de las matemáticas, puede ser una alternativa ante estas demandas, pues no solo nos permite conocer su largo y arduo proceso de gestación, sino que se pone de manifiesto la naturaleza viva y dinámica de esta ciencia, así como también nos permite conocer

las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban (González, 2004, p. 18)

es decir, nos permite tener una visión más panorámica sobre los problemas matemáticos, colocando las situaciones en contexto y dotándonos de una mejor comprensión sobre las limitaciones de carácter ético, político, cultural y religioso que pudieron influir en la constitución de algún objeto matemático; al mismo tiempo, esto brinda herramientas al maestro para reflexionar sobre sus propias prácticas, su modo de presentar y llevar los

contenidos a las aulas de clases, le ayuda a identificar posibles causas a ciertos problemas de aprendizaje, pues “no se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes” (Kline, 1978, p. 49) y lo dota de un juicio a través del cual tiene la posibilidad de ser un sujeto constructor y no solo reproductor y relator de conocimientos.

3.4 Aproximación histórica a las ideas de razón y proporción.

3.4.1 Razón y proporción en las culturas prehelénicas.

Como se ha venido comentando, la historia de las matemáticas nos ha permitido evidenciar que el origen de muchas teorías suele encontrarse en la necesidad de resolver problemas prácticos; en el caso de la razón y la proporción se ha podido identificar numerosa experiencias que han servido de escenario para el surgimiento y tratamiento de estas dos nociones.

Así por ejemplo, Obando (2015) enuncia que si bien nuestro concepto de razón se debe en gran medida a los desarrollos matemáticos griegos, no se puede desconocer que en el marco de culturas prehelénicas o no occidentales también ha existido un tratamiento de la razón y la proporción, pues aunque no existen textos que expresen de manera explícita los significados que han adquirido estos conceptos a la luz de dichas culturas, es posible identificar a través de sus problemas, sus soluciones, sus algoritmos y explicaciones el lugar de la razón como objeto de conocimiento en el sistema de prácticas matemáticas de dichas comunidades. De esta manera, se ha podido encontrar

un conocimiento de las razones y las proporciones, en relación con los procesos de comparación y de medida relativa entre diferentes cantidades, necesarias en la solución de ciertos tipos de problemas prácticos de la agrimensura, la astronomía, las construcciones, las transacciones comerciales y la distribución de diferentes tipos de bienes y servicios (impuestos, labores, alimentos, etc.) [pues] desde la antigüedad no solo se contó sino que también se midió, se repartió, se intercambié, se compró y se

vendió, y todas esas situaciones fueron el escenario para el surgimiento y tratamiento de una idea de razón (Obando, 2015, p.89).

Este autor considera los sistemas metrológicos como el contexto más antiguo sobre el que se tiene evidencia de una idea de razón, pues con ellos se necesitaba formular relaciones entre magnitudes sin necesidad de recurrir a sus valores numéricos, de esta manera, la razón es entendida como una comparación entre las diferentes cantidades de magnitud referidas a una unidad fundamental.

De tal forma se puede intuir que la razón es tan antigua como la unidad⁵, pues la necesidad de comparar existió desde civilizaciones primitivas. Entender la razón como la comparación entre una parte y otra parte, permite pensar también que guarda cierta relación con la configuración de los primeros sistemas de numeración, pues estos surgieron de poner en correspondencia biunívoca los elementos de dos conjuntos; de esta forma se podía representar con los dedos de las manos y pies colecciones de hasta veinte elementos, y cuando este uso resultaba inadecuado podía utilizarse montones de piedras o marcas sobre huesos o palos para representar dicha correspondencia.

En relación con lo planteado por Obando (2015), Yuste (2004) señala que

Mucho antes, nuestros antepasados del neolítico usaban algo parecido a las razones cuando, por ejemplo, realizaban trueques: tres gavillas de trigo por un cuenco de arcilla, o siete ovejas a cambio de dos vacas; y también al decidir cuánto de cada elemento interviene en una mezcla: diez medidas de arena cada cinco de agua o el doble de la primera que de la segunda, etc. De ahí derivaría la noción de proporción: tanto de una cosa por tanto de otra (p.1).

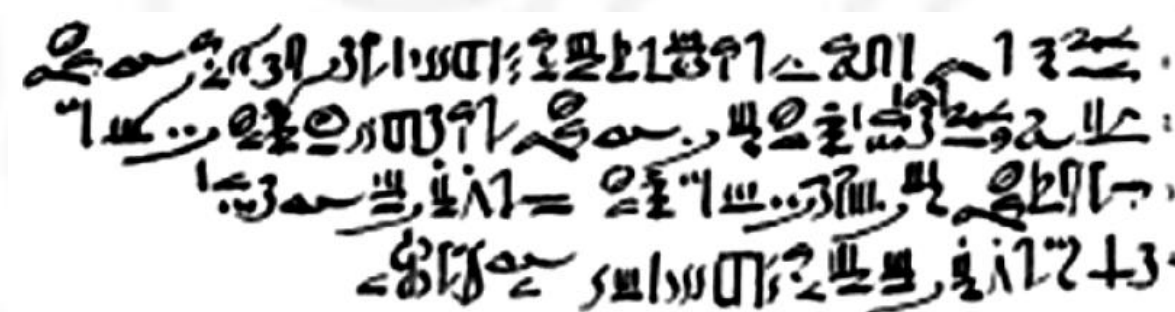
Sin embargo, hay que tener en cuenta que pese a que la naturaleza de los objetos mencionados (trigo, arcilla, ovejas y vacas) es muy distinta, lo que se compara es su cantidad, la cual algún tiempo después pudo ser representada por un número.

⁵ Entendida esta no como un número, sino como un elemento de referencia para realizar cierta comparación

Yuste (2004) marca la diferencia entre razón y proporción, y menciona que si la primera indica una correspondencia entre tamaños o extensiones, la segunda hace referencia a agregados y conjuntos.

El uso de las razones y las proporciones es sin duda bastante remota, así por ejemplo Oller & Gairín (2013) con ayuda de otros autores han podido identificar problemas como este en el papiro de Rhind (siglo XVII a.C) cuya escritura se muestra en la figura No. 2.

Figura No. 2. Problema 66 del papiro de Rhind



Fuente: Chace, 1979, p. 129 citado en Oller & Gairín, 2013, p. 320

“si 10 hekat⁶ de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?” problema que en su técnica de resolución requiere del uso de la razón y la proporción. Del mismo modo, estos autores sostienen que son varios los problemas referentes a intercambios de mercancías o a repartos proporcionales los que aparecen en este texto y en otros de origen chino del siglo II a.c, también existen algunos problemas relacionados con la razón y la proporción en textos hindúes, que aunque cronológicamente mucho más tardíos, recogen tradiciones anteriores.

En este mismo sentido varios autores (Boyer, 2007; García, 2013; Guacaneme, 2016) nos han permitido identificar que el uso de la razón y la proporción se ha dado en

⁶ Unidad de volumen aproximadamente igual a 4.8 litros (Oller & Gairín, 2013, p. 320)

situaciones, lugares y momentos muy distintos, por lo tanto cada documento así como cada cultura, exhiben análisis diferentes sobre estos conceptos; de allí que encontrar y construir una historia sobre la evolución de la razón y la proporción sea casi improbable; sería ingenuo pensar poder reconstruir más de dos mil años de historia; por tal razón y dada las limitaciones para acceder a las fuentes, aquí solo podemos realizar un esbozo superficial de dicha evolución histórica.

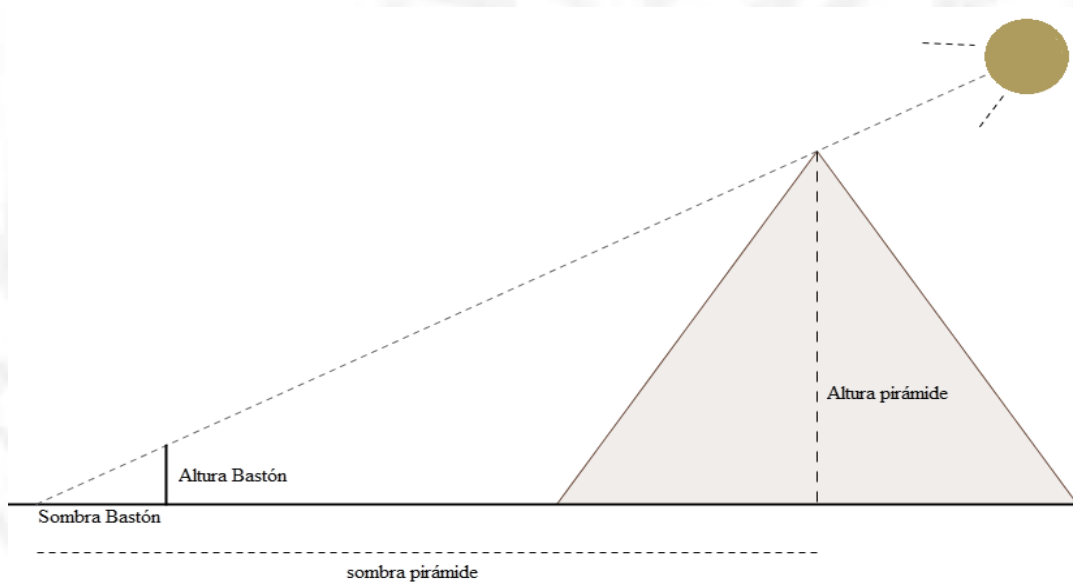
3.4.2 Razón y proporción en la época helenista.

Antes de los griegos se había acumulado una buena cantidad de conocimientos matemáticos, gracias a culturas como la egipcia y la babilónica. Estos conocimientos entraron en contacto con los griegos, a través de las actividades de los mercaderes, negociantes y pensadores que viajaban a los antiguos centros del saber en estas ciudades.

Para el siglo VI a.c, aparecen dos hombres, Tales de Mileto y Pitágoras, quienes por medio de sus viajes entraron en contacto con las matemáticas prehelénicas. Boyer (2007) y Jiménez (2006) coinciden en afirmar que dicho acercamiento significó un cambio radical para las matemáticas, pues estas que se dedicaban inicialmente a la solución de problemas prácticos, comenzaban a interesarse por los conceptos y las relaciones que en ellos estaban implicados; de este modo se comenzó a dar lugar a las matemáticas teóricas.

Entre las leyendas que giran en torno a Tales de Mileto se cuenta que “midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura”(Boyer, 2007, p. 77) lo cual supone un uso de las razones, proporciones y semejanzas, como se ve en la figura No. 3.

Figura No. 3. Medición de la altura de una pirámide a través de triángulos semejantes.



Fuente: Elaboración del autor.

Por su parte Pitágoras, luego de sus largas peregrinaciones a Egipto, Babilonia y posiblemente a la India, se estableció en Magna Grecia (hoy Crotona) y allí fundó una sociedad secreta, “la escuela pitagórica”; Proclo (filósofo griego, discípulo de Platón) sostiene que

Pitágoras que vino después de él, [hablando de Tales] transformó esta ciencia en una forma de educación liberal, examinando sus principios desde el comienzo y demostrando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual. Así descubrió la teoría de las proporciones y la construcción de las figuras cósmicas⁷ (Boyer, 2007, p. 78).

Los pitagóricos desarrollaron una teoría de las proporciones para la descripción de eventos musicales, que solo era aplicable a magnitudes conmensurables, es decir, a magnitudes discretas cuya relación se expresaba por medio de los números naturales, “porque cuando un pitagórico hablaba de número lo que tenía en mente específicamente era número natural y no otra cosa” (Jiménez, 2006, p. 88)

Estos, quienes tuvieron un acercamiento con la música comprobaron empíricamente que al dividir una cuerda en porciones de magnitud discreta (2,3, 4...) los sonidos eran

⁷

Las figuras cósmicas hacen referencia a los poliedros regulares

armónicos, pero si al dividir la cuerda esto no era posible, los sonidos resultaban disonantes.

Para entender mejor esto debemos hablar de la conmensurabilidad de los segmentos, así Yuste (2004) afirma que

Medir una magnitud consiste en desplazar otra distinta y homogénea sobre ella las veces necesarias hasta intentar agotarla. No obstante, puede ocurrir que la medida escogida no sea parte entera de la magnitud y que sobre un trozo de la misma (p.2).

Para esto los griegos diseñaron un algoritmo que describía el proceso de medir, al cual llamaron antypháiresis (antanairensis) que consistía en hallar una medida común a dos magnitudes; dicha medida se obtenía al sustraer de manera sucesiva una de las magnitudes a la otra, si al finalizar el proceso la magnitud se extinguía y se conseguía que el resto fuera cero, es decir, que no sobrara nada, se obtenía la medida buscada y en tal caso se habría probado que las magnitudes son conmensurables, dada la situación de que esto no ocurriera se decía entonces que eran inconmensurables.

Lo anterior queda enunciado en la proposición II del libro X de Euclides de la siguiente manera: “si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables”(p.14).

De este modo si quisiéramos medir una magnitud P con otra semejante a la que se ha llamado Q se procedería de la siguiente manera:

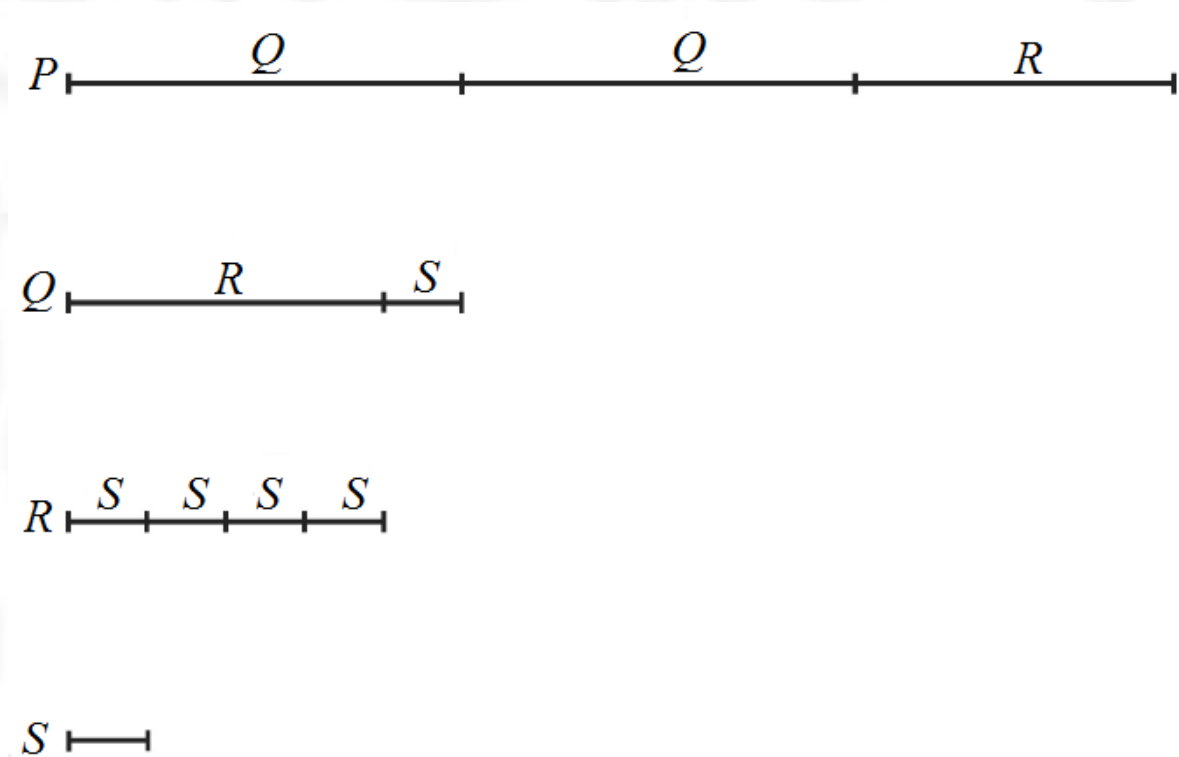
Figura No. 4. Segmentos de magnitud P y Q .



Fuente: Elaboración del autor.

Observe que el segmento P es de mayor longitud que el Q , por lo tanto podemos incluir este último en P tantas veces como se pueda

Figura No. 5. Ilustración del proceso de antypháiresis.



Fuente: Elaboración del autor.

podemos observar que en este caso particular Q cabe dos veces dentro de P quedando un segmento R un poco menor que Q . Por lo tanto es posible incluir en Q a R tantas veces como se pueda (en este caso solo una) y queda un pequeño segmento S que es menor que R , realizando el mismo procedimiento anterior se coloca S en R tantas veces como sea posible (en este caso cuatro) y se puede ver que ya no sobra nada, por lo tanto el segmento S es medida común de P y Q , pues está contenido un número entero (positivo) de veces en cada uno de ellos, catorce veces en el primero y cinco en el segundo. De esta manera, se

puede decir que dos magnitudes tienen una unidad como medida común si son múltiplos de ella.

Inicialmente los pitagóricos tenían plena seguridad de poder realizar este procedimiento independientemente de los segmentos en cuestión, es decir, no importaba cuantos pasos fuera necesario realizar, pero siempre dos segmentos tendrían medida común. Sin embargo, este supuesto se vino a pique cuando trataron de encontrar la medida común del lado y la diagonal del cuadrado, pues esta pareja de segmentos son inconmensurables. Si bien, las circunstancias que rodearon el primer reconocimiento de la existencia de los segmentos inconmensurables son inseguras, suele admitirse que tuvo lugar en conexión con la aplicación del teorema de pitágoras al triángulo rectángulo isósceles.

3.4.3 La crisis de los inconmensurables.

Los pitagóricos quienes consideraban el número como la sustancia constitutiva del universo, llevaron su culto por los números a un extremo y basaron en ellos tanto su filosofía como modo de vida. Sin embargo, no hay que perder de vista, que cuando se habla de número desde la visión pitagórica, se está haciendo referencia a los números naturales o enteros positivos.

El teorema de pitágoras y el pentagrama pitagórico dos de los temas más importantes de la escuela pitagórica, se convirtieron para ella en un gran caballo de Troya, pues de ellos se derivaría un descubrimiento que atentaría contra los fundamentos de la misma. Así por ejemplo,

El cuadrado que es de las figuras geométricas más simples, proporciona un terrible ente geométrico, en el que hay un segmento, la diagonal, que no es conmensurable con otro segmento, el lado –no hay un submúltiplo de ambos, la diagonal y el lado, que pueda tomarse como unidad, para medir a ambos segmentos–. Igualmente sucede en el pentágono regular tan emblemático para los pitagóricos –la diagonal y el lado del pentágono son segmentos que no pueden ser medidos por una unidad común–. La

creencia de que los números podían medirlo todo era una simple ilusión. Así quedaba eliminada de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud. Se había descubierto la magnitud inconmensurable, lo irracional – lo no expresable mediante razones – (González, 2008, p.103).

Este descubrimiento supuso para los pitagóricos la destrucción de los números como representantes del orden perfecto del mundo y fue como un atentado criminal contra la divinidad misma (Spengler, 2006). La divulgación de este fenómeno no solo invalidaba todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones, sino que se consideraba como un grave sacrilegio merecedor de los peores castigos. Autores como Spengler, 2006; Boyer, 2007; González, 2008 dicen que según la tradición “es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales, perecería en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto” (González, 2008, p. 103). Según estos mismos autores, también cuentan otras leyendas que a quien divulgó este acontecimiento se le erigió un monumento funerario como si hubiese muerto; algunos historiadores dicen que quien padeció tan infame castigo fue Hipaso de Metaponto.

Los pitagóricos, quienes habían atribuido a los números un carácter divino y sagrado, consideraban al uno⁸ como el principio y causa de todas las cosas, como el símbolo del Dios único y el generador de todos los números y dimensiones, para ellos

Todo procedía de la unidad y a ella se podía reconducir todo. De ello dependía la inteligibilidad de las cosas. El orden pitagórico se basaba en la finitud. Toda pluralidad como fruto de la unidad es finita, está formada de números enteros y también toda fragmentación o división de la unidad –un medio $[1/2]$, un tercio $[1/3]$,...– procede de ellos y por tanto de la unidad, y a ella revierten ya que dos veces un medio es igual a uno, tres veces un tercio es igual a uno, etc. De forma análoga a cualquier racional p/q se le puede hacer retornar a la unidad pitagórica mediante operaciones de fragmentación y adición (González, 2008, p.109).

⁸ De acuerdo con lo expuesto en el libro de los elementos “una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama *una*” (Def. VII.1) y “un número es una pluralidad compuesta de unidades” (Def. VII.2). Esto conduce a pensar que en el contexto de Euclides y de los mismos pitagóricos el uno no es un número, pues la singularidad está excluida de la pluralidad y como los números son colecciones de unidades el uno es el principio de ellos.

Por su parte, encontrar la medida común del lado y la diagonal del cuadrado llevaba a considerar al ente $\sqrt{2}$ el cual no se podía hacer retornar a la unidad con algún tipo de operación aritmética, no obstante, el no considerar a $\sqrt{2}$ como un número conducía a poner en cuestión el teorema de Pitágoras, en el cual se fundamentaban otros teoremas geométricos. De esta manera, se da una incisión entre geometría y aritmética, pues

La unidad aritmética se revela impotente para medir la entidad $\sqrt{2}$ y debe ser la unidad geométrica, quien cumpla la función de medición; el contar aritmético cede por incapacidad ante la medida geométrica. El abismo entre lo discreto y lo continuo, entre finito e infinito, que ha creado la aparición del inconmensurable obliga a renunciar a medir siempre con exactitud y privilegiar la geometría sobre la aritmética (González, 2008, p.110).

Como consecuencia de este resquebrajamiento, se fractura también la identidad que había establecido el pitagorismo entre número y magnitud, las magnitudes ya no aparecen asociadas o representadas por números, sino por segmentos. El número siguió conservando las características de lo discreto, a las magnitudes por su parte se le atribuían las características de lo continuo y estas debían ser tratadas por métodos puramente geométricos; “El descubrimiento de la inconmensurabilidad provocó que lo continuo se aislara de lo numerable, pues no existiendo una medida común para todas las magnitudes resultaba imposible equipararlas a los números o, al menos, utilizar el mismo cálculo para ambos” (Yuste, 2004, p.2), ahora magnitudes y números eran cosas diferentes.

El hecho de que los pitagóricos consideraran sólo los números naturales, nos conduce a pensar que la razón p/q no representaba a un número – como si lo hace ahora en algunos contextos, en los que se utiliza para representar a un racional – ni tampoco una división, simplemente permitía establecer una relación entre los naturales p y q , lo que en

el sentido actual sería un par ordenado de números. Por su parte, de acuerdo González (2008) los pitagóricos consideraban que dos razones p/q y r/s eran proporcionales si existían enteros a, b, c, d tales $p = ca, q = cb, r = da, s = db$, de esta manera, $\frac{12}{15} = \frac{16}{20}$ porque 12 contiene cuatro de las cinco partes de 15, al igual que 16 contiene cuatro de las cinco partes de 20.

Sin embargo, se desconoce en qué momento los matemáticos griegos se dieron cuenta de que “cuando los *cocientes* (o las veces que una magnitud contiene a otra) de dos esquemas antyphairéticos coincidían, sus razones correspondientes eran equivalentes y, por tanto, las magnitudes respectivas *proporcionales*” (Yuste, 2004, p. 3).

El surgimiento de los números inconmensurables aunque supuso una crisis para la matemática pitagórica, se encargó de promover la demostración y el razonamiento deductivo, pues era imposible verificar por medio de los sentidos la inconmensurabilidad sobre una figura, en otras palabras, no se puede comprobar de manera empírica, sino teórica, pues

Ninguna verificación geométrico-empírica inductiva puede convencer de que no siempre dos segmentos tienen una medida común. La inconmensurabilidad es un fenómeno que sólo puede ser objeto de demostración –a diferencia de otros resultados como el *Teorema de Pitágoras*, para el que hay cientos de *pruebas visuales* que “muestran” su validez–. (González Urbaneja, 2008, p. 112)

3.4.4 La época de Eudoxo y Euclides.

El descubrimiento de los inconmensurables condujo a la revisión de los fundamentos de la matemática pitagórica, pues el carácter continuo de las magnitudes geométricas impedía que estas pudieran ser medidas por números, de esta manera, la razón entre dos cantidades inconmensurables era inexpresable y se hizo necesario relacionar estas cantidades con otras mejor computables o conocidas; así Eudoxo, no define la razón sino la igualdad entre razones de la siguiente manera:

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera, exceden a la par, son iguales a la par, o resultan inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (definición V del libro V de Euclides, p. 11)

En otras palabras si p y q son magnitudes geométricas del mismo tipo y r y s son también del mismo tipo aunque no necesariamente del mismo tipo que p y q , Eudoxo define que las razones p/q y r/s son proporcionales cuando para cualquier par de enteros positivos a y b se tiene $ap > bq$ y $ar > bs$ ó $ap = bq$ y $ar = bs$ ó $ap < bq$ y $ar < bs$. La definición de Eudoxo de proporción generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros.

De acuerdo con Yuste (2004) y Boyer (2007) Eudoxo buscaba una definición que se alejara de la rutina de la antypháiresis, pues con anterioridad se había manejado la idea de que cuatro cantidades están en proporción, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, si las dos razones tienen la misma resta mutua o antypháiresis; es decir, si la menor en cada una de las dos razones cabe en la mayor el mismo número entero de veces, y el resto en cada caso cabe en la menor el mismo número entero de veces y así sucesivamente, esto daba lugar a un proceso largo e indefinido para el caso de las magnitudes inconmensurables; la definición de Eudoxo por su parte, era más abstracta y prescindía de cualquier tipo de medida o referencia sensible, además evitaba prolongar el proceso de sustracciones sucesivas.

Otro aspecto importante a destacar, es que a través de la definición IV del libro V de Euclides, que antecede a la definición de Eudoxo se propone que dos magnitudes tienen razón si se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que supere a la otra, de esta manera, el cero queda excluido (tanto para antecedente como consecuente). Además es necesario precisar que en este libro no se contempla ni el producto ni el cociente entre

magnitudes, pues cualquiera de estas operaciones hubiera supuesto trascender la magnitud en la que se trabajaba, es decir, obtener figuras planas y sólidos a partir de líneas y de superficies.

Por otro lado en la definición III del mismo libro se enuncia que “una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas”(p. 9) en este contexto la comparación entre magnitudes heterogéneas no es posibles además no podría considerarse la razón y la proporción como el resultado de dividir una magnitud por una magnitud o un número entre un número — como actualmente se hace —pues desde lo aquí planteado, carecería de sentido dividir lobos entre ovejas.

De acuerdo con Oller y Garín (2013) el proceso de aritmetización, entendido este como la progresiva identificación de las razones con entes numéricos sólo se inicia en la edad media con la proliferación de traducciones, copias y comentarios a los Elementos de Euclides y esta situación se ha extendido hasta nuestros días.

Capítulo 4. Metodología.

En este apartado se dará cuenta de los procedimientos utilizados para la consecución de los objetivos que orientan la investigación; por las características que esta presenta el método que mejor se articula a ella es el de análisis de contenido, por tal razón las técnicas y procedimientos aquí empleados están en correspondencia con lo propuesto por Martínez (2006) y Abela (2002) para la realización de este tipo de trabajos.

4.1 Caracterización de la investigación.

Por tratar de determinar cuál ha sido la participación de la historia de la razón y la proporción en la estructuración de algunos textos escolares, esta investigación se enmarca dentro de un enfoque cualitativo (Hernández, Fernández & Baptista); en tal sentido, su carácter es flexible y existe una interpretación permanente.

Esta investigación es de carácter documental y el método que se articula con sus intenciones es el de análisis de contenido, el cual es catalogado como una técnica de investigación social tendiente a la producción, análisis, descripción o explicación de datos en mensajes expuestos a través de cualquier canal de comunicación.

De acuerdo con Abela (2002) el análisis de contenido

[...] es una técnica de interpretación de textos, ya sean escritos, grabados, pintados, filmados..., u otra forma diferente donde puedan existir toda clase de registros de datos, transcripción de entrevistas, discursos, protocolos de observación, documentos, videos,... el denominador común de todos estos materiales es su capacidad para albergar un contenido que leído e interpretado adecuadamente nos abre las puertas al conocimientos de diversos aspectos y fenómenos de la vida social (p.2).

De esta manera toda producción textual adquiere una connotación más allá de la simple construcción lingüística del conjunto de palabras, signos y reglas de formación para contener un mensaje susceptible de ser interpretado y que genera otros sentidos y significados de la producción materializada de un pensamiento.

En este mismo sentido Martínez (2006) y Abela (2002) ponen de manifiesto la existencia de dos tipos de contenido dentro de toda producción, por una parte el contenido manifiesto, obvio, directo que es representación y expresión del sentido que el autor pretende comunicar y el contenido oculto o latente que es indirecto y se sirve del contenido manifiesto como instrumento para expresar el sentido oculto que el autor pretende transmitir.

Autores como Clauso (1993) y López (2002) se refieren a dos tipos de análisis de contenido: el análisis externo que trata de colocar los documentos en contexto e indagar por el conjunto de circunstancias (sociales, políticas, económicas y culturales) en las que surgieron, para luego establecer ciertas relaciones e interpretaciones, y el análisis interno que busca destacar el contenido y sentido de la información presente en dicho documento. Si bien, ambos tipos de análisis dan cabida a la interpretación del investigador, Abela (2002) sostiene que el análisis de contenido ha de someterse a ciertas reglas de objetividad, la cual “se refiere al empleo de procedimientos que puedan ser utilizados por otros investigadores de modo que los resultados obtenidos sean susceptibles de verificación” (p.2).

Por tal razón trataré de exponer aquí, el conjunto de técnicas y procedimientos utilizados en el análisis y lectura de los textos objetos de estudio, igualmente debo señalar que cada una de las fases aquí contempladas hacen parte del procedimiento propuesto por Martínez (2006) y Abela (2002) para la realización del análisis de contenido.

4.2 Momentos de la investigación.

De acuerdo con Abela (2002) “todo proyecto o plan de investigación mediante la técnica de análisis de contenido ha de distinguir varios elementos o pasos diferentes en su

proceso” (p.11). Esto quiere decir que este tipo de estudio se desarrolla a partir de unos momentos, tanto en el planteamiento, como en la producción e inferencias de la información analizada. En esta investigación los pasos realizados fueron los siguientes:

4.2.1 Determinación del objeto de estudio.

Este primer momento permitió afinar y delimitar el tema de investigación, lo cual posibilitó estructurar los objetivos de investigación e identificar los recursos necesarios (como materiales fuentes de información y tiempo) para la consecución de los mismos. Dicho momento contempló las siguientes fases: determinación de los objetivos y selección de los documentos.

Fase 1: Determinación de los objetivos.

Inicialmente a la luz de mostrar las matemáticas como una ciencia viva y dinámica se intentó establecer una relación entre ella y el arte, presentando las matemáticas no sólo como un elemento importante dentro de las creaciones artísticas, sino también como actividad creativa, sin embargo, generar dicho vínculo es algo complejo, no porque sea algo difícil de vislumbrar, sino por la cantidad de vertientes que se pueden desprender de dichas áreas (tales como la música, la pintura, la escultura, la geometría, la estadística, el análisis, la aritmética, entre otras).

A partir de esta situación se trató de delimitar un poco más el tema y para ello se pensó en la razón y proporción como elemento común a ambas áreas, no obstante, al revisar algunos aspectos históricos sobre la razón y proporción se encontró que no siempre se concibió como una simple división entre dos números, por su parte se logró apreciar su carácter cambiante de una época a otra, de allí que nos surgiera la inquietud por determinar cuál ha sido la participación de la historia de la razón y la proporción en la estructuración

de algunos textos escolares, teniendo en cuenta que estos no solamente han sido el material curricular más utilizado en la enseñanza, sino que también, hay quienes consideran que presentan las matemáticas como una actividad reduccionista y simplificada. Realizar un análisis de la historia de la razón y proporción, para luego describir las relaciones y correspondencias entre ella y lo propuesto en algunos libros de textos escolares, no se aleja de nuestra intención inicial de mostrar el carácter vivo, dinámico y cambiante de esta ciencia eminentemente humana, en la que los conocimientos matemáticos son producto de las prácticas sociales y culturales de determinado contexto.

Fase 2: Selección de los documentos.

Para realizar este análisis se han seleccionado cuatro textos escolares correspondientes al área de matemáticas para el grado séptimo: “Vamos a aprender matemáticas” (MEN, 2017), “Avanza” (Castiblanco *et al*, 2015), “Alfa con estándares” (Camargo, García, Leguizamón, Samper, & Serrano, 2004) y “Los caminos del saber” (Ortiz *et al*, 2013). Si bien, los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación Nacional no hacen explícito en qué grado se debe abordar los temas de razón y proporción, debido a que aparecen como un eje transversal, es en estos grados en los que los libros de texto sitúan la temática.

Figura No. 6. Libros de texto de matemáticas para el grado séptimo.



Para la selección de los documentos se tuvieron en cuenta los proyectos con mayor acogida en los sondeos realizados por el Ministerio de Educación Nacional, a través de la plataforma educativa “Colombia aprende” y los más demandados por los colegios públicos y privados en sus listas de útiles escolares publicadas a través de internet.

4.2.2 Definición del sistema de categorías.

Una vez seleccionadas las unidades de análisis (libros de texto) se procede a elegir las categorías, elementos o variables a ser examinadas. Para Gomes (2003) las categorías se refieren a conceptos que abarcan elementos o aspectos con características comunes o que se relacionan entre sí y son empleadas para establecer clasificaciones. En este sentido, trabajar con ellas implica agrupar elementos, ideas o expresiones en torno a un concepto capaz de abarcarlas.

Dentro de las categorías consideradas a la hora de analizar los libros de texto se tuvo en cuenta su macroestructura y microestructura. Entendiendo la macroestructura como el conjunto de componentes que se conectan para construir el todo y la microestructura como los elementos que configuran las unidades temáticas referidas a la razón y la proporción. De estas categorías se desprendieron otras unidades más pequeñas (subcategorías) que fueron definidas como se presenta a continuación:

Tabla No.1. Instrumento para el análisis de la macroestructura de los libros de texto.

Categoría	Subcategoría	Definición
Macroestructura	Portada.	Es llamativa y contiene los elementos relevantes (título, autor y casa editorial).
	Año de impresión.	Indica la época para la que fue impreso el libro y a qué disposiciones del MEN corresponde.
	Objetivos.	Son los principios generales en los que se fundamenta el autor.
	Tabla de contenidos.	Presenta una lista de contenidos (junto con su número de página) fundamentados en lo propuesto por el MEN.
	Contenidos.	Son coherentes con las disposiciones del MEN y el entorno en el que se desarrollan, si se ajustan al nivel correspondiente y se destaca su importancia y necesidad de ser abordados.
	Imágenes.	Posee dibujos vinculados con la realidad del estudiante y motivan al lector a la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos. Además se encuentran en equilibrio con el texto.
	Historia.	Ofrece hechos, datos y situaciones veraces relacionadas con la historia del contenido matemático.
	Problemas y Ejercicios.	Existe una serie de problemas y ejercicios propuestos que representan una síntesis de los contenidos vistos en cada unidad, además permite analizar si se encuentran en orden gradual de dificultad y si se da respuesta a ellos.
	Resumen.	Al finalizar cada capítulo se realiza una exposición breve de las ideas o conceptos principales abordados en él
	Evaluación.	El libro ofrece una sección de evaluación corta que permita al estudiante reconocer los conocimientos matemáticos alcanzados en un capítulo.
Bibliografía.	La bibliografía utilizada está actualizada y brinda apoyo al lector.	

Tabla No.2. Instrumento para el análisis de la microestructura de los libros de texto.

Categoría	Subcategoría	Definición
Microestructura	Contenidos.	Retoma títulos y subtítulos relacionados con el tema de razón y proporción. Están en relación con lo pedido por el MEN por medio de los DBA y los estándares.
	Definición.	Da cuenta de cómo deben ser entendidos y abordados los conceptos y las definiciones de razón y proporción.
	Problemas y Ejercicios.	Da cuenta de cuáles son los ejercicios y problemas que predominan a la hora de enseñar estos conceptos y si se encuentran en congruencia con las definiciones dadas.
	Imágenes.	Las ilustraciones reflejan los contenidos e ideas que se quieren transmitir en relación con la razón y proporción.
	Gráficos	Orienta su elaboración y los utiliza correctamente para el análisis de las situaciones de variación.
	Historia.	Brinda información sobre los aspectos históricos tenidos en cuenta al abordar las razones y proporciones.
	Evaluación.	Permite reconocer qué habilidades o conocimientos se pretenden fomentar en los estudiantes en relación con estos temas.

4.2.3 Análisis de categorías.

Tabla No.3. Análisis macroestructura del texto “Vamos aprender matemáticas”

Categoría	Subcategoría	Definición
Macroestructura	Portada.	<p>Título: Vamos a aprender matemáticas. Autor: Ministerio de Educación Nacional (MEN). Casa editorial: Ediciones SM.</p> <p>El título del libro de texto es interesante y sugestivo, dado a que se presenta a manera de invitación. La predominancia de colores naranja y amarillo hacen atractiva la portada, pues de acuerdo con del Olmo (2006) el color influye en la aceptación o en el rechazo de la comunicación escrita, este mismo autor sostiene que los jóvenes presentan una mayor inclinación por los colores cálidos, pues además de la sensación térmica transmiten cercanía, intimidad, energía y calidez.</p> <p>Por tratarse de un juego de ajedrez la imagen presentada en la portada se encuentra vinculada con la realidad de los estudiantes, así como con el conocimiento matemático.</p> <p>Si bien, el texto fue elaborado por el MEN existe un equipo técnico de matemáticas y de materiales pedagógicos de cuyos integrantes no se especifica la formación académica.</p> <p>Con respecto a la casa editorial, se trata de ediciones SM de origen español y que tiene presencia en Colombia desde 2006, desde este año se ha encargado de elaborar y difundir varios materiales bibliográficos del Ministerio de Educación Nacional</p>
	Año de impresión.	<p>Este libro fue impreso y distribuido en el año 2017, por lo tanto debe responder a las disposiciones curriculares del Ministerio de Educación Nacional (lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias y derechos básicos de aprendizaje⁹)</p>
	Objetivos.	<p>Los principios generales en los que se fundamenta el autor no son explícitos, sin embargo, a través de la presentación se puede inferir que dentro de los principales objetivos está:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Brindar materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento del proceso de aprendizaje. • Dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clases. <p>No se plantean objetivos en relación con el conocimiento matemático y su vinculación con algunos temas transversales. Sin embargo, dentro de las unidades temáticas se evidencia una intención mínima por vincular las matemáticas con otras áreas del saber. Esta vinculación no va más allá de la resolución de problemas por medio de procesos algorítmicos.</p>

⁹ Los derechos básicos de aprendizaje (DBA) son un conjunto de saberes y habilidades acerca de lo fundamental que cada estudiante debe aprender al finalizar un grado, esto en concordancia con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias (MEN, 2016, p. 2)

	Tabla de contenidos.	<p>El libro presenta una lista de contenidos claramente identificada y foliada.</p> <p>Los contenidos se encuentran divididos en seis unidades, cada una de ellas relacionada con uno de los tipos de pensamiento (numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio) propuestos por los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación.</p> <p>Unidad 1, pensamiento numérico: números enteros. Unidad 2, pensamiento numérico: números racionales. Unidad 3, pensamiento variacional: proporcionalidad, ecuaciones y funciones. Unidad 4, pensamiento espacial: geometría. Unidad 5, pensamiento métrico: medición. Unidad 6, pensamiento aleatorio: estadística y probabilidad.</p> <p>Resulta curioso que el tema de la proporcionalidad se encuentre ubicado en la unidad correspondiente al pensamiento variacional, pues tal y como se había señalado anteriormente, la razón, la proporción y la proporcionalidad son un eje transversal en la organización de los lineamientos y estándares de matemáticas, pues no solo se encuentran presentes en todos los niveles de educación básica y media, si no que conecta a varios tipos de pensamiento (tal y como se muestra en la Figura No.1 y en el anexo A).</p>
	Contenidos.	<p>Para verificar si los contenidos propuestos por el libro de texto son coherentes con las disposiciones del MEN, se estableció una comparación entre ellos y los derechos básicos de aprendizaje (DBA), pues estos han sido elaborados en correspondencia con los lineamientos y estándares. En esta comparación se encontró que en el libro de texto a diferencia de lo propuesto por los DBA no expone la descomposición de enteros en factores primos (MCD, mcm), la estimación de raíces cuadradas y potencias, y el uso de diagramas de árbol para calcular probabilidades. Aunque estos temas no son expuestos, parecen ser considerados dentro de los conocimientos previos de los alumnos, pues son necesarios a la hora de resolver algunos problemas.</p> <p>Los contenidos en general han sido desarrollados para el nivel y el entorno correspondiente; si bien, los ejemplos y problemas están contextualizados son pocos los que invitan a emprender acciones e interacciones en la vida diaria. Razón por la cual, no se hace evidente la importancia y necesidad de abordarlos.</p> <p>Aunque existe en cada unidad una sección denominada resolución de problemas, en la que se exponen los pasos generales para la solución de los mismos, durante la exposición del contenido en pocas ocasiones se plantean los pasos básicos y particulares para la solución de los ejemplos propuestos.</p>
	Imágenes.	<p>Las ilustraciones presentes en el libro de texto se adaptan y se encuentran en equilibrio con él. Estas por lo general son utilizadas con el fin de atraer, más que de explicar o ayudar a comprender</p>

	una idea o concepto.
Historia.	<p>No se incluyen aspectos relevantes de la historia de las matemáticas, en relación con ella sólo se aportan datos como:</p> <p>“La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números enteros descubierta por matemáticos indios hacia el año 1135 y difundida en Europa gracias a Fibonacci (Leonardo de Pisa)” (p. 111)</p> <p>“En 1812, el matemático francés Pierre Simon, marqués de Laplace, dio la primera definición de probabilidad” (p. 198)</p> <p>También se plantean problemas en los que se incluyen datos históricos como el siguiente:</p> <p>“Escribe un número entero que exprese la cantidad: Pitágoras nació en el siglo VI a.c.”(p. 14)</p> <p>Con datos como estos es imposible conocer las vicisitudes del largo proceso de gestación del conocimiento matemático, además se siguen priorizando las exposiciones cerradas y acabadas de los objetos de estudio.</p>
Problemas y Ejercicios.	<p>Existe una serie de problemas y ejercicios propuestos que representan una síntesis de los contenidos vistos en cada unidad, los puntos están agrupados por temas.</p> <p>para cada punto se especifica la habilidad a desarrollar (razonamiento, ejercitación, resolución de problemas, comunicación, modelación).</p> <p>Los puntos de razonamiento buscan establecer relaciones (de semejanza o diferencia) entre conceptos distintos; los de ejercitación consisten en la aplicación mecánica de conocimientos y algoritmos ya adquiridos y fáciles de identificar; los de resolución de problemas implican procesos de análisis y comprensión; los de comunicación consisten en representar de diferentes maneras una misma situación y los de modelación intentan seleccionar, construir e identificar patrones característicos de ciertos fenómenos.</p> <p>Luego de analizar todas las secciones de “práctica más” se pudo concluir que predominan los puntos de ejercitación y que los demás están en igual cantidad.</p> <p>Los puntos además de especificar la habilidad a desarrollar también indican el proceso cognitivo implicado (memoria, comprensión, análisis, aplicación y síntesis) estos procesos en orden descendente se encuentran organizados de la siguiente manera: análisis, memoria, aplicación, comprensión y síntesis.</p>
Resumen.	Al finalizar cada unidad no hay una síntesis de ideas, conceptos o

		fórmulas claves y aunque se incluyen recuadros dentro del texto para resaltar algunas ideas o conclusiones relevantes, el color de estos no tienen un buen contraste con el fondo, lo que desvía la atención hacia otros elementos.
	Evaluación.	<p>Al finalizar cada unidad se ofrece una sección de evaluación corta que permita al estudiante reconocer los conocimientos matemáticos alcanzados, los puntos de la sección de evaluación están agrupados por temas.</p> <p>para cada punto se especifica la habilidad a desarrollar (razonamiento, ejercitación, resolución de problemas, comunicación, modelación).</p> <p>Una vez examinadas las evaluaciones de cada unidad se pudo establecer que predominan los puntos de ejercitación, detrás de ellos están los de razonamiento, luego aparecen los de resolución de problemas, los de comunicación y finalmente se encuentran los de modelación</p>
	Bibliografía.	El texto ofrece una buena bibliografía, en su mayoría se trata de documentos de los años noventa. Dentro de ella se incluyen textos relacionados con la historia de la matemática, sin embargo, es difícil identificar en qué apartados del texto fue utilizada.

Tabla No.4. Análisis microestructura del texto “Vamos aprender matemáticas”

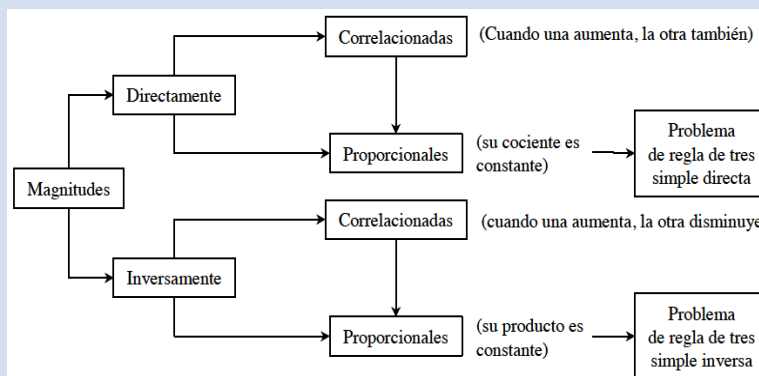
Categoría	Subcategoría	Definición
Microestructura	Contenidos.	<p>Unidad 3, pensamiento variacional: proporcionalidad, ecuaciones y funciones.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Razones y proporciones. 2. Magnitudes correlacionadas. 3. Proporcionalidad directa. 4. Regla de tres simple directa. 5. Aplicaciones de la proporcionalidad directa. 6. Proporcionalidad inversa. 7. Regla de tres compuesta. 8. Lenguaje algebraico. 9. Ecuaciones con estructura aditiva en los números enteros. 10. Ecuaciones con estructura multiplicativa en los números enteros. 11. Ecuaciones con números racionales. 12. Inecuaciones. 13. Funciones. 14. Análisis de gráficas. 15. Funciones de proporcionalidad directa. 16. Funciones de proporcionalidad inversa. 17. Regularidades y sucesiones. 18. Término general de una sucesión.
		La estructura reseñada da cuenta de los temas abordados en la

unidad temática y se encuentran listados con una numeración de un solo nivel, lo cual no da cuenta de sus posibles conexiones o niveles de subordinación.

Los autores inician definiendo la razón como “una expresión numérica de comparación entre las medidas ¹⁰ de dos magnitudes” (MEN, 2017, p. 72), se nombran sus elementos (antecedente y consecuente); posteriormente con base en la idea de igualdad se define la proporción y se nombran sus elementos (extremos y medios).

Una vez definida la proporción se enuncia la propiedad fundamental de las proporciones y se emplea para hallar un término desconocido en la proporción.

A continuación, se presenta el concepto de magnitudes directamente correlacionadas e inversamente correlacionadas y posteriormente se usan las primeras para definir la proporcionalidad directa.



En seguida, a partir del reconocimiento de dos magnitudes directamente proporcionales se presenta la regla de tres simple directa y se exponen problemas de “tanto porciento” e “interés simple” como aplicación de ella.

Más tarde se exponen las magnitudes inversamente proporcionales, la regla de tres simple inversa y la regla de tres compuesta.

Se da un salto inesperado al tema del lenguaje algebraico y de ecuaciones sin establecer un vínculo con los temas previos, el tema de funciones aparece totalmente a parte de la razón y la proporción a pesar de que existen dos apartados dedicados a las funciones de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa.

Definición.

“Una **razón** es una expresión numérica de comparación entre las medidas de dos magnitudes. La razón entre a y b se escribe

¹⁰ El concepto de medida es el que permite cuantificar las magnitudes, compararlas y transmitir datos sobre ellas (grupo Beta, 1990), las magnitudes por sus parte son propiedades susceptibles de ser medidas.

	<p>como $\frac{a}{b}$ o $a : b$ y se lee a es a b” (MEN, 2017, p. 72).</p> <p>Entendiendo una expresión numérica como una expresión matemática conformada por números y símbolos operacionales, se podría decir que en este contexto la razón es una operación indicada.</p> <p>“Dos razones forman una proporción si se puede establecer una igualdad entre ellas. La proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee: a es a b como c es a d. Las razones que forman una proporción son razones equivalentes” (MEN, 2017, p. 72).</p> <p>La primera parte del enunciado sigue la estructura lógica $p \rightarrow q$, no obstante, falta expresar la afirmación recíproca $q \rightarrow p$, es decir, si se establece la igualdad entre dos razones se forma una proporción.</p>
Problemas y Ejercicios.	<p>Algunos ejemplos, problemas y ejercicios son incongruentes con la definiciones dadas en el libro de texto, pues si bien, en él se ha entendido la razón como una operación indicada se plantean afirmaciones como:</p> <p>“ $\frac{3}{6}$ y $\frac{3}{5}$ no forman una proporción, pues $\frac{3}{6} = 0,5 \neq \frac{3}{5} = 0,6$” (MEN, 2017, p. 72).</p> <p>En este ejemplo se puede evidenciar que se reporta la razón como el cociente de la división, es decir, como un resultado. Estas dos miradas son significativamente diferentes, pues tal y como lo señala Guacaneme (2001)</p> <p>la razón —en tanto división realizada— es un elemento de un conjunto numérico, es decir un número que se establecería precisando los dos conjuntos donde dividendo (antecedente) y divisor (consecuente) tomen valores, respectivamente; mientras que la razón —en tanto división indicada— se puede considerar como un elemento de un producto cartesiano de los conjuntos donde dividendo y divisor tomen respectivamente valores (p.195).</p> <p>esto también se puede evidenciar en una actividad para completar propuesta en la página 77 en la que se enuncia:</p> <p>en una fábrica el salario es directamente proporcional al número de horas trabajadas. Juan trabaja el doble de horas que Mateo; luego, el salario de Juan será _____ que el de Mateo (MEN, 2017, p. 77).</p> <p>La palabra doble utilizada en el problema hace referencia al</p>

		<p>número dos y se emplea para hablar de la razón entre los salarios o el número de horas trabajadas.</p> <p>Considerar la razón como una división conduce a la exclusión de las razones con consecuente cero, situación que no se hace explícita en la definición dada.</p>
	Imágenes.	<p>Las ilustraciones presentan gráficamente lo expuesto en los problemas, sin necesidad de tener una vinculación con el conocimiento matemático, es decir, si el enunciado de un problema habla de niños, obras de construcción o excursionistas, se emplean imágenes con estos elementos cuyo propósito es el de atraer más no de explicar o ejemplificar.</p> <p>Al inicio de la unidad se presentan unas pirámides, sin embargo, no se exponen elementos que inviten a la reflexión sobre la relación de esta ilustración con el conocimiento matemático. Para alguien que esté familiarizado con el tema es fácil establecer este vínculo, no obstante, esta tarea será mucho más difícil para alguien que apenas va introducirse en el nuevo conocimiento, por esta razón, sería importante que se incluyeran textos o preguntas que invitaran a realizar dicha reflexión.</p>
	Gráficos	<p>el texto no orienta la construcción, ni la interpretación de gráficos, esto último sólo sucede cuando se introduce el tema de funciones sin establecer un vínculo con la razón y la proporción.</p> <p>Cuando se trabaja el tema de magnitudes proporcionales y correlacionadas aparecen gráficas y tablas de valores, sin explicar la relación entre ellas.</p>
	Historia.	No se retoman elementos históricos a la hora de explicar o contextualizar el tema.
	Evaluación.	Al finalizar la unidad se presenta una sección de evaluación en la que predominan los problemas de cálculos de porcentajes, regla de tres simple y compuesta; los ejercicios están relacionados con la propiedad fundamental de las proporciones y se emplea para hallar un término desconocido.

Tabla No.5. Análisis macroestructura del texto “Avanza matemáticas”

Categoría	Subcategoría	Definición
Macroestructura	Portada.	<p>Título: Avanza matemáticas. Autores: Castiblanco y otros. Casa editorial: Norma.</p>
		La palabra avanza es un término que se suele emplear para

		<p>indicar el progreso o mejora que se experimenta en cualquier aspecto (social, laboral, académico, entre otros), razón por la cual el título no se vincula directamente con el área, además a través de él es difícil percibir una intencionalidad del autor (ya sea de convocar, persuadir o informar).</p> <p>De acuerdo con estudios sobre la psicología del color, los colores fríos –empleados en la portada– producen una serie de efectos psicológicos y perceptuales que evocan serenidad, pasividad y lejanía. Itten (1992) sostiene que este tipo de colores frecuentemente son utilizados en los hospitales, especialmente el blanco; de la misma manera, del Olmo (2006) afirma que son los adultos quienes prefieren este tipo de color.</p> <p>La imagen de la portada es un vector (flecha) y aunque guarda relación con la matemática y es reconocida por los estudiantes, su simplicidad no genera mayor motivación.</p> <p>Con respecto a los autores se presenta su formación académica y constituyen un grupo interdisciplinar, cuyo punto de confluencia es la pedagogía y la educación, además se puede decir –de acuerdo con esta información– que cada apartado del libro ha sido diseñado por personal idóneo y especializado para tal labor.</p> <p>La casa editorial es Norma de origen Colombiano, razón por la cual se espera que gran parte del contenido se encuentre adecuado para este contexto.</p>
	Año de impresión.	<p>“Avanza” es un libro impreso en el 2015 y cuya distribución se comenzó en el año de 2017; esto conlleva a pensar que existe una gran brecha entre el periodo de elaboración, impresión y distribución.</p> <p>Para el año en el que fue impreso el libro se espera que responda a los lineamientos y estándares del MEN..</p>
	Objetivos.	<p>Los objetivos generales no son explícitos en el texto, sin embargo, a través de la presentación se puede inferir que ellos son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ofrecer herramientas para un aprendizaje duradero y pertinente. • Formar en competencias para el siglo XXI (pensamiento crítico, trabajo colaborativo, uso de las tecnologías de la comunicación y la información). • Contribuir al desarrollo del sentido crítico frente a los mensajes del mundo digital y los medios de comunicación. • Brindar orientación en relación con la resolución de problemas y la toma de decisiones. <p>Para el contexto en el que nos encontramos, donde la información se difunde cada día más rápido, resulta fundamental promover estrategias que motiven a la reflexión, a la crítica y a</p>

		<p>la participación activa en la toma de decisiones; esto es mucho más interesante si se vinculan áreas como las matemáticas, pues muestra la incidencia que ellas tienen en la vida cotidiana y la importancia de aprenderlas.</p>
	<p>Tabla de contenidos.</p>	<p>Los contenidos se encuentran divididos en cuatro capítulos y ocho unidades de la siguiente manera: Capítulo 1: números enteros y números racionales. <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 1: números enteros. • Unidad 2: números racionales. Capítulo 2: Razones, proporciones y medición. <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 3: razones y proporciones. • Unidad 4: medición. Capítulo 3: <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 5: conjeturas en geometría. • Unidad 6: movimientos en el plano. Capítulo 4: estadística, probabilidad y preálgebra. <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 7: estadística y probabilidad. • Unidad 8: preálgebra. Adicionalmente se propone la unidad de educación financiera.</p>
	<p>Contenidos.</p>	<p>Aunque para el año de impresión del libro aún no se habían formulado los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) es posible establecer una comparación entre ellos y los contenidos del mismo, puesto que los DBA fueron formulados en consonancia con los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación, dentro de esta comparación se encontró que en el libro de texto a diferencia de lo propuesto por los DBA no expone la descomposición de enteros en factores primos (MCD, mcm) y el uso de diagramas de árbol para calcular probabilidades.</p> <p>Los contenidos en general han sido desarrollados para el nivel y el entorno correspondiente; no obstante, -aunque son pocos- existen algunos ejemplos y problemas descontextualizados, por ejemplo, en la página 14 se les pide a los estudiantes estimar la temperatura del sol, de la lava de un volcán y de Siberia; más tarde en la página 30 se les expone un complicado juego de golf en lugar de utilizar situaciones más cercanas a ellos como un partido de fútbol, por ejemplo.</p> <p>Al inicio de cada tema hay preguntas que buscan despertar el interés, los contenidos se presentan con variedad de ejemplos y se destaca a través de recuadros o negrilla el concepto o procedimiento más relevante. En el desarrollo de los temas aparecen las secciones: “en qué se aplica”, que presenta situaciones de la vida real en las que se aplican los conceptos trabajados; “vínculo web” que ofrece direcciones de internet para desarrollar actividades complementarias; “para recordar” ofrece aclaraciones sobre algún aspecto del contenido.</p> <p>Durante la exposición del contenido se plantean los pasos</p>

	básicos y particulares para la solución de los ejemplos propuestos y existe una fuerte intencionalidad de vincular las matemáticas con asuntos de la vida cotidiana.
Imágenes.	<p>Las ilustraciones presentes al iniciar cada capítulo se adaptan a él con claridad y precisión; en la página posterior a ellas aparecen tres ítems, el primero de ellos es “identifica” en él se plantean preguntas para reconocer los elementos comunicativos de la imagen, en el segundo, “analiza”, se proponen preguntas de análisis sobre el mensaje propuesto y en el último, “opina”, se elaboran cuestiones con las que se puedan construir opiniones sobre el mensaje transmitido por la imagen.</p> <p>Este ejercicio no solo permite realizar una lectura de las ilustraciones, sino que crea nexos entre ellas, las matemáticas y la realidad de los estudiantes.</p> <p>Si bien esto es bastante motivador, durante el desarrollo del contenido predomina el texto.</p>
Historia.	No se ofrecen datos, situaciones o actividades que se encuentren en relación con la historia del contenido matemático.
Problemas y Ejercicios.	<p>Para cada uno de los temas que conforman las unidades se proponen una serie de ejercicios y problemas en los que en pocas ocasiones se evidencia un orden gradual de dificultad; estos aparece en la sección de “desarrolla tus competencias”, sin embargo, hace falta una miscelánea de ejercicios y problemas en los que se sinteticen los contenidos de la unidad completa.</p> <p>Por otro lado, existe una sección denominada “creatividad e innovación”, en la cual se presenta una situación de la vida real y se propone un reto que el estudiante deberá resolver.</p>
Resumen.	Al finalizar cada tema se presenta un resumen con los conceptos y/o procedimientos fundamentales.
Evaluación.	<p>En el texto se contemplan varios tipos de evaluación:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Evaluación diagnóstica: ayuda a identificar los conocimientos previos de los estudiantes, esta evaluación se presenta al iniciar cada capítulo, bajo una sección que lleva este mismo nombre. • Evaluación formativa: contribuyen a identificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes, en el transcurso de una unidad; al mismo tiempo ayuda a consolidar el conocimiento y a reconocer en los que se debe profundizar. Cada unidad cuenta con dos secciones de “evalúa tus competencias”, una aproximadamente en la mitad y la otra al final, del mismo modo, al terminar cada capítulo hay una sección de evaluación denominada “prueba saber”. <p>Para cada punto de las evaluaciones hay un indicador de logro o desempeño, lo que facilita identificar debilidades y</p>

		fortalezas en el conocimiento de los estudiantes.
	Bibliografía.	En el libro de texto se presentan cinco referencias bibliográficas, dos de ellas corresponden a los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación Nacional; las otras tres son libros de texto de la misma editorial, a los cuales solo se puede acceder a través de su compra.

Tabla No.6. Análisis microestructura del texto “Avanza matemáticas”

Categoría	Subcategoría	Definición
Microestructura		<p>Capítulo 2: Razones, proporciones y medición.</p> <p>Unidad 3: razones y proporciones.</p> <p>19. Razones y proporciones. Magnitudes correlacionadas.</p> <p>20. Proporcionalidad directa.</p> <p>21. Regla de tres simple directa.</p> <p>22. Proporcionalidad inversa.</p> <p>23. Regla de tres simple inversa.</p> <p>24. Regla de tres compuesta.</p> <p>25. Repartos proporcionales.</p> <p>26. Porcentajes.</p> <p>27. Interés simple.</p>
	Contenidos.	<p>Todos los temas del libro están enumerados de manera secuencial, dicha numeración es de un solo nivel, lo cual no da cuenta de las conexiones o niveles de subordinación.</p> <p>Los autores inician definiendo la razón como el cociente entre dos magnitudes (Castiblanco <i>et al</i>, 2015), se nominan sus elementos (antecedente y consecuente); posteriormente se define la proporción y se nominan sus elementos (extremos y medios).</p> <p>Una vez definida la proporción se enuncia la propiedad fundamental de las proporciones, se verifica por medio de varios ejemplos y se emplea para resolver problemas en los que se desconoce un término de la proporción.</p> <p>Posteriormente, se presenta el concepto de magnitudes directamente correlacionadas e inversamente correlacionadas.</p> <p>A continuación se define la proporcionalidad directa a partir de la idea de multiplicación o división del valor de una magnitud por un número y se enuncia que dos magnitudes directamente proporcionales satisfacen la relación $y = kx$ donde k es una constante diferente de cero y se conoce como constante de proporcionalidad. Igualmente se presenta la posibilidad de escribir una proporción con los valores de las magnitudes $(k = \frac{y}{x})$ y de representar gráficamente a través de una recta que pasa por el origen de coordenadas</p>

	<p>Más tarde se presenta la regla de tres simple directa como una aplicación de la proporcionalidad directa basada en la propiedad fundamental de las proporciones.</p> <p>En seguida se define la proporcionalidad inversa aunada a la idea de producto constante de magnitudes y se enuncia que dos magnitudes inversamente proporcionales satisfacen la relación $xy = k$ o de forma equivalente $y = \frac{k}{x}$ donde k es una constante diferente de cero. Igualmente se presenta la posibilidad de representarla gráficamente.</p> <p>Finalmente se trata la proporcionalidad compuesta a través de la idea de proporciones donde intervienen más de dos razones, para encontrar el valor desconocido de alguna magnitud a partir de los valores conocidos de tres o más magnitudes.</p> <p>Después se trata el tema de repartos proporcionales y se consideran dentro de ellos los repartos directos, inversos y compuestos, luego se exponen los porcentajes como razones de consecuente cien, finalmente se aborda el tema del interés simple como un caso de proporcionalidad compuesta donde intervienen tres magnitudes (capital, razón o tasa de interés y tiempo).</p>
Definición.	<p>“Dadas dos magnitudes A y B, decimos que el cociente $\frac{A}{B}$ es la razón entre A y B” (Castiblanco <i>et al</i>, 2015, p. 98).</p> <p>En este enunciado la palabra magnitud aparece como sinónimo de medida, por tal razón, no se hace una distinción entre ellas.</p> <p>En la definición dada se referencian la razón como el cociente de la división, es decir, como el resultado de la división, como un número. Considerar la razón como una división conduce a la exclusión de las razones con consecuente cero, situación que no se hace explícita en dicha definición.</p> <p>“la igualdad entre dos razones se denomina proporción” (Castiblanco <i>et al</i>, 2015, p. 99).</p> <p>De acuerdo con Guacaneme (2001) Esta definición es de carácter nominal, pues presenta un nombre particular para un objeto matemático, además, a través de este tipo de definición es posible reconocer la existencia de dos objetos matemáticos (la proporción y la igualdad entre dos razones), que por medio de la definición procuraban hacerse uno presentándolos como idénticos; sin embargo, para lograrse la identidad faltaría expresar la afirmación recíproca, es decir, “una proporción es la igualdad entre dos razones”. Del mismo modo, este autor sostiene que “si la proporción y la igualdad entre razones se quisieran hacer idénticas sería necesario</p>

	<p>establecer previamente qué es cada una, para luego mostrar que no tienen diferencia” (Gucaneme, 2001, p. 206)</p> <p>Por otro lado resulta curioso el siguiente enunciado del texto: “dos fracciones equivalentes siempre forman una proporción. Dada una fracción es posible construir varias proporciones complicando o simplificando la fracción para obtener fracciones equivalentes” Castiblanco <i>et al</i>, 2015, p. 99). De esta manera, el procedimiento que se sigue no permite saber cuándo dos razones son equivalentes al margen de la idea de fracciones iguales y de la identificación de las razones con las fracciones.</p>
Problemas y Ejercicios.	<p>Algunos ejemplos y problemas son incongruentes con la definiciones dadas en el libro de texto, pues si bien, en él se ha entendido la razón como el cociente de la división, es decir, como el resultado de la división, como un número, se plantean afirmaciones como:</p> <p>La razón entre el dinero que aportó y el dinero que tenía cada persona es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Andrés: $\frac{20000}{40000} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ • Carlos: $\frac{10000}{20000} = \frac{1}{2}$ • Marta: $\frac{10000}{100000} = \frac{1}{10}$ (Castiblanco <i>et al</i>, 2015, p. 98). <p>Del mismo modo, se enuncia que “si en un mapa cada centímetro representa 100 cm del terreno, se dice que la escala es de $\frac{1}{100}$” (Castiblanco <i>et al</i>, 2015, p. 101).</p> <p>En estos ejemplos se puede evidenciar que la razón aparece como una división indicada, en la que intervienen dos números (antecedente y consecuente) y no solamente uno como ha de esperarse.</p>
Imágenes.	<p>Las imágenes además de atraer cumplen la función de explicar, ejemplificar y ayudar a comprender, por lo tanto se podría decir que las ilustraciones reflejan los contenidos e ideas que se quieren transmitir en relación con la razón y proporción.</p> <p>Al iniciar la unidad se presenta un volante en el que se ofrecen descuentos para la estadía en varios hoteles, posteriormente a través de una serie de preguntas se trata de vincular la imagen con el conocimiento matemático, además se invita a proponer procedimientos para decidir sobre el mejor precio de compra.</p>
Gráficos	<p>En la exposición del contenido se explican y detallan los pasos básicos para la elaboración de ellos, además se utilizan correctamente para el análisis de las situaciones de variación.</p>
Historia.	<p>No se retoman elementos históricos a la hora de explicar o contextualizar el tema.</p>
Evaluación.	<p>En la evaluación diagnóstica que se propone al iniciar la unidad se</p>

		<p>presentan situaciones en las que se debe analizar la dependencia entre variables estableciendo relaciones de menor, mayor, o igual; además se propone la comparación de áreas y de otras magnitudes.</p> <p>En la primera sección de evalúa tus competencias predominan los problemas de regla de tres simple directa, posteriormente en la segunda sección se proponen problemas que implican la elaboración de tablas y gráficas, aplicaciones de la proporcionalidad (regla de tres simple y compuesta, repartos proporcionales, cálculos de porcentajes y de intereses).</p>
--	--	---

Tabla No.7. Análisis macroestructura del texto “Alfa con estándares”

Categoría	Subcategoría	Definición
Macroestructura	Portada.	<p>Título: Alfa con estándares. Autores:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Leonor Camargo Uribe. • Gloria García de García. • Cecilia Leguizamón de Bernal. • Carmen Samper de Caicedo. • Celly Serrano de Plazas. <p>Casa editorial: Norma.</p> <p>La letra alfa es la primera letra del alfabeto griego y como es la primera se le asocia con el principio de algo, a ella se le ha usado para denotar ángulos, partículas e incluso a los individuos con mayor rango de una comunidad y aunque guarda relación con las matemáticas, es difícil conocer las razones por las que se ha elegido este título y las intencionalidades de los autores con él.</p> <p>La portada presenta la imagen de un artefacto tecnológico de difícil identificación y en ella sobresalen los colores rojos y amarillo.</p> <p>Las autoras son licenciadas en matemáticas y se desempeñan como profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional, por lo tanto, tienen una formación acorde con las demandas para la elaboración del libro de texto.</p>
	Año de impresión.	<p>La primera y última edición de este documento fue en 1999 y 2004 respectivamente, pero aún así, hoy sigue siendo uno de los libros más vendido según el ranking de la plataforma “Colombia aprende”, razón por la cual, se considera dentro de este análisis.</p> <p>De acuerdo a la fecha de publicación y atendiendo a su título, intenta responder a los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación Nacional.</p>
	Objetivos.	<p>No se exponen los principios generales en los que se han fundamentado las autoras y tampoco hay una presentación de la</p>

	<p>que puedan inferirse, sin embargo, siguiendo la estructura del texto, podría decirse que su principal objetivo es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ofrecer una propuesta pedagógica que implemente, aplique y enriquezca los estándares del MEN.
Tabla de contenidos.	<p>El libro consta de diez unidades a saber:</p> <p>Unidad 1: Números enteros. Unidad 2: Operaciones con números enteros. Unidad 3: Números racionales. Unidad 4: Variación proporcional. Unidad 5: Aplicaciones de la proporcionalidad. Unidad 6: Geometría. Unidad 7: Sistema internacional de unidades. Unidad 8: Estadística y probabilidad. Unidad 9: Lógica y conjuntos. Unidad 10: Preálgebra.</p>
Contenidos.	<p>Si bien los contenidos presentados en el libro de texto responden en general a los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación Nacional, por su última fecha de edición hacen falta algunos aspectos relacionados con los DBA.</p> <p>Los contenidos han sido desarrollados para el nivel y el entorno correspondiente; no obstante, -aunque son pocos- existen algunos ejemplos y problemas descontextualizados, por ejemplo, en la página 12 se les pide a los estudiantes estimar la temperatura del sol, de la lava de un volcán y de Siberia.</p> <p>Al inicio de cada unidad se presenta una tabla con los estándares y procesos que se lograran con su desarrollo, cada unidad está conformada por un número de lecciones, las cuales siguen un indicador de logro.</p> <p>Durante el desarrollo del contenido se presenta una sección denominada “en qué se aplica” que resalta la importancia de los temas a trabajar mostrando su presencia en el quehacer diario de las personas.</p>
Imágenes.	<p>Las imágenes presentadas están relacionadas con los contenidos de cada unidad, priman las animaciones en lugar de las imágenes sobre situaciones reales, lo que las desvincula un poco del contexto de los estudiantes.</p>
Historia.	<p>Al inicio de cada unidad se presenta una lectura corta que hace referencia a aspectos interesantes relacionados con la historia de las matemáticas y los temas que se van a desarrollar.</p>
Problemas y Ejercicios.	<p>Cada unidad cuenta con dos talleres de competencias, uno aproximadamente en la mitad y el otro hacia el final. En ellos se encontrarán actividades individuales, grupales, de profundización y de recreación; las cuales siguen ese orden de forma descendente.</p> <p>Los problemas y ejercicios se encuentran ordenados por orden gradual de dificultad y al finalizar el libro se ofrece respuesta a ellos.</p>

	Resumen.	Al finalizar cada unidad no hay una síntesis de ideas, conceptos o fórmulas claves, sin embargo, durante el desarrollo del contenido se incluyen recuadros que resaltan las ideas y conclusiones más relevantes.
	Evaluación.	<p>Al finalizar cada unidad se encuentran las secciones de “evaluación de competencias” y “avancemos hacia el icfes”, en la primera se brindan actividades que ofrecen la posibilidad de afianzar o reforzar los logros e indicadores de logros propuestos al inicio de cada unidad; en la segunda se proponen preguntas para preparar las evaluaciones nacionales.</p> <p>En la sección de evaluación de competencias para cada punto se especifica un proceso: conexión, comunicación, razonamiento lógico o resolución de problemas. Estos procesos son definidos al inicio de cada unidad y agrupan una serie de estándares. La clasificación que se hace pretende mostrar la posibilidad de enfatizar en un proceso, más que en los otros, según el tipo de ejercicio o problema.</p> <p>Al analizar las secciones de “evaluación de competencias” se pudo concluir que los estándares más trabajados son los que tienen que ver con la resolución de problemas, le siguen los relacionados con procesos de conexión, posteriormente se encuentran los de razonamiento lógico y finalmente están los de comunicación.</p> <p>Para la sección de evaluación se ofrecen respuestas al finalizar el libro.</p>
	Bibliografía.	No se ofrece una bibliografía que brinde apoyo al lector.

Tabla No.8. Análisis microestructura del texto “Alfa con estándares”

Categoría	Subcategoría	Definición
Microestructura	Contenidos.	<p>Unidad 4: Variación proporcional.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Variación proporcional directa. • Representación gráfica de la proporcionalidad directa. • Ley de la proporcionalidad directa. • Variación proporcional inversa. • Representación gráfica de la proporcionalidad inversa. • Ley de la proporcionalidad inversa.
		<p>Unidad 5: Aplicaciones de la proporcionalidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Regla de tres simple directa. • Regla de tres simple inversa. • Regla de tres compuesta.

	<ul style="list-style-type: none"> • Interés. • Repartos proporcionales. <p>Como se acaba de describir, este texto aborda el tema de la proporcionalidad en dos unidades, cuyos temas no se encuentran numerados.</p> <p>La unidad 4 se inicia usando (sin definición previa) la idea de magnitudes proporcionales, posteriormente se definen las magnitudes dependientes y se dice que cuando el cociente entre dos magnitudes es constante, ellas son directamente proporcionales, luego se expone su representación gráfica y se enuncian las propiedades – en el texto leyes- de la proporcionalidad directa. Estas propiedades implican las ideas (no definidas) de razón y proporción; en ninguno de los casos ellas se demuestran y generalmente se justifican a través de un ejemplo particular.</p> <p>Más adelante se define nuevamente la proporcionalidad directa a partir de la idea de multiplicación o división del valor de una magnitud por un número y se enuncia que dos magnitudes directamente proporcionales satisfacen la relación $y = kx$ o $k = \frac{y}{x}$ donde k es una constante diferente de cero y se conoce como constante de proporcionalidad.</p> <p>La proporcionalidad inversa se define, se muestra su representación gráfica y se enuncian sus propiedades.</p> <p>En la unidad 5 por medio de un ejemplo y sin definición previa se presenta un problema de regla de tres, luego se define la proporción, se nominan sus elementos (extremos y medios) y se enuncia la propiedad fundamental de las proporciones. En seguida se define la regla de tres simple directa y se exponen los pasos a seguir en la resolución de problemas; esto último también se hace para la regla de tres simple inversa, de la cual no se presenta definición alguna, ni se explicitan sus diferencias con la regla de tres simple directa.</p> <p>A continuación se expone la regla de tres compuesta, el interés y el cálculo de porcentajes, se trabaja el tema de repartos proporcionales y se consideran dentro de ellos los repartos directos, inversos y compuestos.</p>
Definición.	<p>En estas unidades no se reporta definición alguna de la razón, sin embargo, en la unidad 3 en la que se abordan los números racionales se dice que:</p> <p>Los números fraccionarios surgen a partir de la comparación que se hace de cantidades enteras, es decir, de las razones. Cuando se determina una razón y se halla el cociente entre los enteros que la forman, no siempre es posible obtener otro</p>

		<p>entero. En ese caso el resultado es un número fraccionario(Camargo, García, Leguizamón, Samper, & Serrano, 2004, p.76).</p> <p>De esta manera, se puede concluir que las razones son la comparación de cantidades enteras, quedando de esta forma incluidos los números negativos.</p> <p>A través de la lectura del texto se puede evidenciar que las fracciones son idénticas a las razones y se enuncia la equivalencia de fracciones de la misma manera que se hace con la la propiedad fundamental de las proporciones.</p> <p>Al igual que en los textos anteriores, se enuncia que “una proporción es la igualdad entre dos razones” (Camargo, García, Leguizamón, Samper, & Serrano, 2004, p.143).</p>
	Problemas y Ejercicios.	<p>Algunos ejemplos y problemas son incongruentes con la definiciones dadas en el libro de texto, pues si bien, en él se ha entendido la razón como la comparación de cantidades enteras, en la página 118 se presenta una tabla en la que se muestra la distancia recorrida para diferentes valores de tiempo, donde el tiempo es representado por números mixtos.</p> <p>Del mismo modo, en la página 125 se muestra una tabla en la que se relaciona el alargamiento de un resorte y el peso que cuelga de él, y aunque el alargamiento adquiere valores de números enteros (positivos), el peso adquiere valores con cifras decimales.</p> <p>Lo mismo ocurre en la página 129 donde se pide hallar varios productos en los que los factores son decimales y posteriormente se enuncia que: “cuando el producto de dos magnitudes es constante se dice que son inversamente proporcionales” (Camargo, García, Leguizamón, Samper, & Serrano, 2004, p.129).</p> <p>Lo anterior pone en evidencia que es posible establecer una razón entre números racionales y esto riñe con la definición dada.</p>
	Imágenes.	<p>Las imágenes no solo tratan de atraer y motivar, sino que brindan información necesaria para la resolución de problemas y la realización de ejercicios.</p> <p>En ellas priman las animaciones en lugar de las imágenes sobre situaciones reales, lo que las desvincula un poco del contexto de los estudiantes.</p> <p>En este texto no se presenta una imagen al inicio de cada unidad como sí suele hacerse en otros.</p>
	Gráficos	<p>Dentro de los temas que conforman la unidad 4 se incluyen la representación gráfica de la proporcionalidad directa e inversa, en los cuales se explican y detallan los pasos básicos para la elaboración e interpretación de los mismos.</p>

	Historia.	<p>En cuanto a la historia, al inicio de cada unidad se presenta aspectos relevantes relacionados con los temas a desarrollar.</p> <p>Con respecto a la razón y la proporción se reseña como estas fueron utilizadas por los egipcios y los babilonios para resolver problemas prácticos, sin que ello implicara conocer una teoría formal de las proporciones. También se indica que dicha teoría fue iniciada por lo pitagóricos como parte de estudio de la aritmética, se menciona la influencia de los trabajos de Eudoxo y Teeteto en los libros V y VII de Euclides, y como durante la edad media Kepler, Galileo y Newton formularon las leyes del movimiento usando el lenguaje de las proporciones.</p>
	Evaluación.	<p>En la sección de “evaluación de competencias” y “avancemos hacia el icfes” de la unidad 4 predominan los problemas de realización, análisis e interpretación de gráficas de proporcionalidad directa e inversa.</p> <p>Por su parte en la unidad 5 predominan los problemas de regla de tres simple directa o inversa, regla de tres, cálculo de interés y repartos proporcionales.</p>

Tabla No.9. Análisis macroestructura del texto “Los caminos del saber”

Categoría	Subcategoría	Definición
Macroestructura	Portada.	<p>Título: Los caminos del saber. Autores: Ortiz y otros. Casa editorial: Santillana.</p> <p>El título del libro es novedoso y atractivo, sin embargo, no vincula directamente con el conocimiento matemático y tampoco sugiere la intencionalidad del autor.</p> <p>En la portada al igual que en el libro “Avanza” predominan los colores fríos los cuales evocan serenidad, pasividad y lejanía.</p> <p>Por otro lado la imagen de la portada presenta unos dados con números enteros y aunque guardan relación con la matemática no genera mayor motivación. Desde una postura personal las imágenes de situaciones reales suscitan mayor interés que los gráficos sencillos, ficticios o animados.</p> <p>Sobre los autores se presenta su formación académica, la cual da cuenta de sus conocimientos en el área.</p> <p>La casa editorial es Santillana de origen español, sin embargo, se espera que los contenidos estén adaptados para el contexto colombiano.</p>
	Año de impresión.	<p>“Los caminos del saber” es el último proyecto de la editorial Santillana para los años 2016-2017, sin embargo, esta obra fue impresa en 2013. De acuerdo con la editorial este documento ha</p>

	<p>sido pensado en atención a las exigencias del Ministerio de Educación Nacional.</p>									
Objetivos.	<p>Los principios generales en los que se fundamenta el autor no se exponen en el libro de texto y tampoco se cuenta con una presentación de la que puedan inferirse.</p>									
Tabla de contenidos.	<p>Los contenidos están divididos en siete unidades agrupadas de acuerdo a los tipos de pensamiento propuestos por el MEN.</p> <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td style="vertical-align: middle;">Pensamiento numérico y Variacional</td> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="vertical-align: middle;"> <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 1: Números enteros. • Unidad 2: Números racionales. • Unidad 3: Proporcionalidad. • Unidad 4: Introducción al álgebra. </td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: middle;">Pensamiento espacial y métrico</td> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="vertical-align: middle;"> <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 5: Figuras planas. • Unidad 6: Cuerpos geométricos. </td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: middle;">Pensamiento aleatorio</td> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="vertical-align: middle;"> <ul style="list-style-type: none"> • Unidad 7: Estadística y probabilidad. </td> </tr> </table>	Pensamiento numérico y Variacional	}	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 1: Números enteros. • Unidad 2: Números racionales. • Unidad 3: Proporcionalidad. • Unidad 4: Introducción al álgebra. 	Pensamiento espacial y métrico	}	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 5: Figuras planas. • Unidad 6: Cuerpos geométricos. 	Pensamiento aleatorio	}	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 7: Estadística y probabilidad.
Pensamiento numérico y Variacional	}	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 1: Números enteros. • Unidad 2: Números racionales. • Unidad 3: Proporcionalidad. • Unidad 4: Introducción al álgebra. 								
Pensamiento espacial y métrico	}	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 5: Figuras planas. • Unidad 6: Cuerpos geométricos. 								
Pensamiento aleatorio	}	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 7: Estadística y probabilidad. 								
Contenidos.	<p>Aunque para el año de impresión del libro aún no se habían formulado los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) es posible establecer una comparación entre ellos y los contenidos del mismo, puesto que los DBA fueron formulados en consonancia con los lineamientos y estándares del Ministerio de Educación, dentro de esta comparación se encontró que en el libro de texto a diferencia de lo propuesto por los DBA no expone la descomposición de enteros en factores primos (MCD, mcm) y el uso de diagramas de árbol para calcular probabilidades.</p> <p>Los contenidos en general han sido desarrollados para el nivel y el entorno correspondiente.</p> <p>Al inicio de cada unidad se presentan los temas a trabajar y los logros a alcanzar a través de la sección “tu plan de trabajo”; el desarrollo de los contenidos está acompañado de una gran variedad de ejemplos, cuya solución se explica paso a paso.</p> <p>Con el fin de resaltar la importancia de adquirir los conocimientos matemáticos existe una sección al inicio de todas las unidades en la que se explica la aplicación práctica de los temas.</p>									
Imágenes.	<p>Las imágenes presentes al inicio de cada unidad están relacionadas con la sección de “ y esto que vas aprender para qué te sirve” de esta manera se vinculan con el conocimiento matemático y la realidad de los estudiantes.</p> <p>En el desarrollo del contenido se emplean varias ilustraciones que se encuentran en relación y en equilibrio con el texto, sin embargo, en algunas ilustraciones se muestran ciudades como Moscú y New York que no hacen parte del contexto colombiano.</p>									
Historia.	<p>Al inicio de cada unidad se presenta una línea de tiempo en la que de manera sintética se muestra cómo ha sido estudiado el tema de la unidad en diferentes épocas y culturas. Además se incluyen</p>									

		varios recuadros con el título “historia de la matemática” en ellos se ofrecen datos de acontecimientos históricos relacionados con la temática de estudio.
	Problemas y Ejercicios.	<p>Al final de cada unidad se presenta una sección de ejercicios y una de problemas. Los puntos no se encuentran siguiendo un orden gradual de dificultad, sin embargo, para cada punto de la sección de ejercicios se especifica su nivel (alto, medio, bajo); predominan los puntos de nivel bajo, seguidos por los de nivel medio y finalmente se encuentran los de nivel bajo.</p> <p>En el desarrollo de cada unidad también se encuentran varias secciones de “afianza tus competencias” en las cuales se proponen actividades para interpretar, argumentar, proponer, ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas.</p> <p>Es de anotar que en varios de los problemas propuestos el estudiante en su resolución debe estar relacionado con la conversión de unidades de tiempo, masa, longitud y volumen, sin ser un tema abordado en el libro.</p>
	Resumen.	Al finalizar cada unidad no se presenta una síntesis de ideas o conceptos claves, sin embargo, se hace uso de recuadros para resaltar las conclusiones más relevantes.
	Evaluación.	El libro no ofrece una sección de evaluación que permita al estudiante reconocer los conocimientos matemáticos alcanzados, no obstante, este viene acompañado de un libromedia en formato DVD en el que además de recursos digitales hay evaluaciones diagnósticas y de desempeño.
	Bibliografía.	El texto ofrece una buena bibliografía, en su mayoría se trata de documentos de los años noventa. Dentro de ella se incluyen textos relacionados con la historia de la matemática, documentos del Ministerio de Educación Nacional, libros escolares de la misma editorial y otros especializados en matemáticas y educación.

Tabla No.10. Análisis microestructura del texto “Los caminos del saber”

Categoría	Subcategoría	Definición
Microestructura	Contenidos.	<p>Unidad 3: proporcionalidad.</p> <p>Razones y proporciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razones. • Proporciones. <p>Proporcionalidad directa.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitudes directamente correlacionadas. <p>Proporcionalidad inversa.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitudes inversamente correlacionadas. <p>Aplicaciones de la proporcionalidad.</p>

		<ul style="list-style-type: none"> • Regla de tres simple directa. • Regla de tres simple inversa. • Regla de tres compuesta. • Repartos proporcionales. • Porcentajes. • Intereses. <p>Los temas se encuentran organizados en dos niveles, lo cual en cierta medida da cuenta de algunas relaciones de subordinación.</p> <p>Los autores inician definiendo la razón y nombrando sus elementos (antecedente y consecuente); luego (sin definición previa) se usa la idea de igualdad entre razones para definir la serie de razones iguales y se enuncia su propiedad fundamental.</p> <p>Posteriormente se define la proporción, se nombran sus elementos (extremos y medios) y se diferencia la proporción continua¹¹ de la discreta. Se formula la propiedad fundamental de las proporciones y se enuncia cómo a partir de esta se puede calcular un término desconocido de una proporción u obtener otras proporciones. Más adelante se formulan otras propiedades de la proporción.</p> <p>A continuación, se presenta el concepto de magnitud y de magnitudes directamente correlacionadas, luego atendiendo a la idea de razón constante se definen las magnitudes directamente proporcionales y se nombra dicha razón como constante de proporcionalidad.</p> <p>Después se formula la propiedad de las magnitudes directamente proporcionales y se habla de su representación por medio de gráficas y tablas.</p> <p>Se expone el tema de escalas como una aplicación de la proporcionalidad directa, posteriormente se habla de las magnitudes inversamente correlacionadas y atendiendo a la idea de producto constante se definen las magnitudes inversamente proporcionales, además se denomina dicho producto como constante de proporcionalidad; luego se enuncia la propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales y a partir del reconocimiento de dos magnitudes proporcionales directa o inversamente, se presenta la regla de tres simple directa o inversa, respectivamente; además se exhibe el uso de las respectivas propiedades de las magnitudes proporcionales al resolver problemas de regla de tres.</p> <p>Para finalizar se expone la regla de tres compuesta directa, inversa y mixta, y se presentan esquemas para resolver problemas en cada caso. Además se tratan los repartos proporcionales (directo e</p>
--	--	---

¹¹ Si los medios o los extremos en una proporción son iguales, la proporción es continua. El término que se repite en una proporción continua se denomina media proporcional de los otros términos.

Si todos los términos de una proporción son diferentes, la proporción es discreta. En una proporción discreta, cada término es la cuarta proporcional de los otros tres términos (Ortiz *et al*, 2013, p113).

	<p>inverso), el cálculo de porcentajes y el tema de intereses, en el que se aborda el interés simple, para el cual se definen los conceptos de capital, interés, rata o tasa de interés, monto y tiempo; se establecen las relaciones de proporcionalidad existentes entre estos y, en consecuencia, se identifica este tipo de situaciones como de proporcionalidad compuesta.</p>
Definición.	<p>“La razón entre dos cantidades a y b con $b \neq 0$, es el cociente indicado entre dichas cantidades. Se simboliza $\frac{a}{b}$ o $a:b$ y se lee a es a b” (Ortiz <i>et al</i>, 2013, p. 110).</p> <p>De este enunciado es difícil deducir de qué naturaleza son a y b, es decir, a cual conjunto numérico pertenecen, pues al no ser magnitudes pueden ser cantidades positivas o negativas, enteras o racionales.</p> <p>“una proporción es una igualdad entre dos razones. Así, la proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a:b::c:d$ y se lee a es b como c a es a d” (Ortiz <i>et al</i>, 2013, p. 113).</p>
Problemas y Ejercicios.	<p>Existe congruencia entre las definiciones, los ejemplos, los problemas y los ejercicios planteados.</p> <p>Los ejercicios consisten básicamente en aplicar la propiedad fundamental de la proporciones para determinar si dos razones son proporcionales, calcular el término desconocido de una proporción u obtener otras proporciones.</p> <p>También se propone identificar los elementos de una proporción (extremos y medios), diferenciar propiedades continuas y discretas, aplicar las propiedades de la proporción en la resolución de problemas, determinar magnitudes directa e inversamente proporcionales, aplicar regla de tres simple y compuesta, realizar cálculos de interés y porcentaje, y repartos proporcionales.</p>
Imágenes.	<p>Las ilustraciones representan gráficamente lo expuesto, ejemplifican, brindan información para resolver problemas y hacen más atractivo el texto.</p> <p>Al comienzo de la unidad se muestra un esqueleto humano, en la página siguiente en la sección “y esto que vas aprender ¿para qué te sirve?” se habla de cómo la antropología se ha servido del estudio de las razones y proporciones para analizar las medidas del cuerpo humano y cómo estas pueden variar dependiendo de la raza, el sexo, la alimentación, entre otros.</p>
Gráficos	<p>En el texto se describen los pasos para la construcción de tablas y gráficas que representan situaciones de variación directamente proporcional e inversamente proporcional situaciones de variación.</p>
Historia.	<p>En la línea del tiempo presentada al inicio de la unidad, se muestran los siguientes momentos a saber:</p> <p>1600 a.c: En el papiro de Rhind se evidenció el uso de repartos proporcionales para entregar víveres a las personas, y para el</p>

	reparto de herencias. 550 a.c: en grecia Teano, esposa de Pitágoras, propuso ocho formas distintas de representar una proporción. Además escribió sobre la proporción áurea. 600 a.c: Thales de mileto utilizó las proporciones para calcular la altura de la pirámides de Egipto. 370 a.c: Eudoxo desarrolló la teoría de la proporción utilizando cantidades continuas. 1202 d.c: Leonardo de Pisa, Fibonacci, escribió su libro Liber Abaci donde trató problemas de reglas de tres. 1928 d.c: En los juegos olímpicos de Amsterdam se inició la investigación de antropometría en los deportistas de alto nivel aplicando los conceptos de proporcionalidad. En los recuadros titulados “historia de la matemática” se presentan datos de la escuela pitagórica, su concepción del número, y la aplicación de razones entre números enteros para representar intervalos de notas musicales. También se reseña la aplicación de la proporcionalidad en áreas como la química a través de la ley de Boyle o la economía a través del cálculo de porcentajes y de intereses.
	Evaluación. el libro no incluye una sección de evaluación.

4.2.4 resultados.

En este apartado se reportan los resultados del proceso de investigación y del análisis de categorías, para dicho fin se presenta una exposición narrativa en la que se describen los hallazgos.

Al realizar el análisis de los libros de texto, se evidenciaron varios aspectos relevantes, uno de ellos tiene que ver con la presentación de las portadas. Al respecto se encontró que junto a los títulos pocas veces muestran de manera clara y directa la intencionalidad del autor, “Vamos aprender matemáticas” es una excepción a ello, pues además de ser un título acorde con el nivel de comprensión de los estudiantes, el verbo “vamos” convoca e invita a participar de una acción, en este caso la construcción de conocimiento matemático.

En relación al contenido se encontró que el número de unidades presenta diferencias, no obstante, los temas abordados son los mismos, lo que varía es su forma de

compilación. En los libros de texto “Alfa” y “Avanza” se incluye de manera adicional las unidades de “lógica y teoría de conjuntos” y de “educación financiera” respectivamente. Añadido a ello se observó que en todos los libros de texto el estudio de la razón y la proporción aparece posterior al estudio de los números enteros y de los números racionales, y ulterior a ello se encuentra el estudio de los asuntos geométricos. Aunque los enteros y los racionales preceden el estudio de la proporcionalidad no se encontraron relaciones entre estos temas, además son pocos —casi nulos— los ejemplos, problemas y ejercicios que involucran enteros negativos y racionales en el estudio de la proporcionalidad; sólo el libro “Los caminos del saber” se esfuerza constantemente en incluir estos conjuntos numéricos en el estudio de dicha temática y el texto “Alfa” involucra a los números racionales positivos. En ninguna de las propuestas se justifica la cantidad y el orden de las unidades, salvo una consideración que se hace en el libro de texto “Alfa” sobre la relación entre los números fraccionarios (identificados con los números racionales)¹² y la razón. Ante tal situación queda abierta la pregunta sobre las razones que justifican este orden metodológico y la relación entre las temáticas.

Por otro lado, al analizar la configuración de las unidades referidas a la proporcionalidad, se puede apreciar que los temas aparecen listados siguiendo una numeración de un solo nivel, lo cual no da cuenta de sus posibles conexiones o niveles de subordinación. Solo en “Los caminos del saber” se utilizan dos niveles. En la organización

¹² Cabe señalar que un fraccionario y un racional no son lo mismo, pues un fraccionario es un par ordenado de números enteros cuya segunda componente es diferente de cero y un racional es uno de los elementos que representa una clase de fracciones equivalentes (generalmente este elemento es la fracción canónica o irreducible); en otras palabras se puede decir que el conjunto de los números racionales a diferencia de los números fraccionarios está constituido por elementos únicos, es decir, no repetidos.

Afirmar que los números racionales admiten representación fraccionaria, la palabra representación excluye el carácter de igualdad y conlleva a la existencia de dos objetos: uno que representa (la fracción) y otro que es representado (el racional). si consideramos que lo representado y lo que representa son en esencia diferentes pero semejantes, es decir que comparten algunas características pero otras no, concluimos que los racionales y los fraccionarios no son objetos idénticos, sino más bien, dos objetos que se parecen.

de los temas se aborda inicialmente el estudio de la razón y la proporción, y posteriormente el estudio de la proporcionalidad y sus aplicaciones. La proporcionalidad directa e inversa tienen un tratamiento estructural muy similar, es decir, se evidencia cierta simetría entre los temas y conceptos trabajados, no obstante, en el libro de texto “Avanza” se privilegia el estudio de la proporcionalidad directa. Otro aspecto importante es el tratamiento implícito y casi ausente de la proporcionalidad compuesta, si bien, podría considerarse el interés simple como un caso particular de ella en los textos no se hace explícito este vínculo.

Con respecto al concepto de razón este se aborda explícitamente entre números (en los libros “Alfa” y “Los caminos del saber”) y entre magnitudes (en los libros “Vamos aprender matemáticas” y “Avanza”). En las definiciones dadas se encontró que este concepto está ligado a la idea de división, de este modo, en algunos libros aparece como el cociente o resultado de la división y en otros como una división indicada; sin embargo, no se debe perder de vista la diferencia entre estas dos miradas, pues la razón como división realizada es un elemento de un conjunto numérico y como operación indicada puede considerarse como un elemento de un producto cartesiano donde los conjuntos dividendo y divisor han tomado valores respectivamente.

Por otro lado, en cuanto a los ejemplos, problemas y ejercicios propuestos se hallaron inconsistencias en relación con las definiciones dadas, así por ejemplo, aunque en el libro “Avanza” se entiende la razón como el resultado de la división, es decir, como un número, en repetidas ocasiones se le trata como una división indicada, el caso contrario se presenta para el libro de texto “Vamos aprender matemáticas”; en “Alfa” por su parte se entiende la razón como la comparación entre cantidades enteras, no obstante, en sus ejercicios y problemas se consideran cantidades racionales; “Los caminos del saber” es el único texto que durante todo el desarrollo de la unidad es congruente con la definición

dada. Esta situación tal vez poco considerada por los autores, es fundamental para mantener la coherencia entre el discurso matemático contenido en los libros de textos y las ideas que se quieren transmitir.

Con respecto a los números implicados en la razón se pudo encontrar que no existe claridad sobre el conjunto al cual pertenecen, si bien, en los libros de texto “Vamos aprender matemáticas” y “Avanza” se habla de magnitudes, no son explícitos al definir el tipo de magnitud a la que se están refiriendo (absoluta o relativa), sin embargo, a través de su desarrollo temático se puede evidenciar que solo se utilizan las magnitudes absolutas. En los libros “Alfa” y “Los caminos del saber” se habla de cantidades, en el primero aunque se especifica que son cantidades enteras, durante su desarrollo temático solo involucra racionales y enteros positivos; “Los caminos del saber” aunque no define cómo deben ser estas cantidades, por medio de sus ejemplos, problemas y ejercicios presenta implícitamente que estas cantidades pertenecen al conjunto de los números enteros y racionales (positivos y negativos).

Otro aspecto importante a destacar es que en ninguna de las definiciones se hace explícita la situación del consecuente cero, a excepción del libro “Los caminos del saber” en el que si se tiene en cuenta esta consideración, no obstante, el hecho de que en las definiciones se ligue el concepto de razón al de división, implícitamente el cero queda excluido para el consecuente.

En relación a las gráficas se encontró que para la proporcionalidad directa en todos los libros de texto se muestra una semirrecta en el primer cuadrante, cuyo origen coincide con el del sistema de coordenadas, este tipo de información no solo refuerza la idea de que las razones están formadas casi exclusivamente por números enteros, sino que genera la

idea de que esta proporcionalidad sólo puede representarse gráficamente a través de semirrectas con pendiente positiva

En cuanto a la proporción parece existir cierto consenso al definirla como la igualdad entre dos razones y suele equipararse con las fracciones equivalentes, así por ejemplo, en el libro de texto “Avanza” se enuncia que “dos fracciones equivalentes siempre forman una proporción. Dada una fracción es posible construir varias proporciones complicando o simplificando la fracción para obtener fracciones equivalentes” Castiblanco *et al*, 2015, p. 99). De esta manera, el procedimiento que se sugiere no permite saber cuándo dos razones son equivalentes al margen de la idea de fracciones iguales y de la identificación de las razones con las fracciones. Por su parte “Los caminos del saber” propone una herramienta para construir proporciones a partir de la igualdad de productos.

En lo referente a la historia de las matemáticas se encontró que en los libros de texto parece ser un asunto irrelevante, pese a las demandas del Ministerio de Educación por incorporarla al aula de clases y ofrecer una visión de las matemáticas como una creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un periodo histórico determinado); así mismo parece desconocerse los numerosos estudios que aducen a las ventajas de involucrar la historia en el proceso de enseñanza y su potencialidad para ofrecer perspectivas alternas a las que se tienen sobre los objetos matemáticos.

Solo en los libros de texto “Alfa” y “Los caminos del saber” se incluyen apartados en los que se ofrecen datos relacionados con la historia de los temas a trabajar, sin embargo, estos aparecen como algo adicional, ornamental o supletorio y no como parte consustancial de las Matemáticas. Desde la perspectiva de Guacaneme, Torres & Arboleda (2014) aunque esta estrategia puede ser exitosa a la hora de contextualizar una temática de estudio, asigna un valor utilitario a la historia de las matemáticas, en tanto que puede no exigir al educador

y al estudiante ir más allá del relato histórico, es decir, no requerir del estudio de los análisis históricos-epistemológicos resultantes de la investigación histórica.

Por otro lado, también se logró apreciar que tanto en los libros de texto como en los artículos aquí consultados prima la historia hegemónica u occidental a pesar del reconocimiento de la existencia de las matemáticas en otras culturas, del mismo modo, se pudo evidenciar el carácter sexista del conocimiento, pues son escasos, por no decir nulos los documentos en los que se citan los aportes de la mujer en la construcción del conocimiento matemático, así por ejemplo, en el libro “Los caminos del saber” solo se hace referencia a Teano; de acuerdo con este documento, fue ella quien propuso ocho formas de expresar una proporción, planteó la propiedad fundamental de las proporciones y escribió sobre la proporción áurea, sin embargo, al tratar de profundizar en este asunto fue poca la bibliografía que se encontró al respecto. Lo anterior no solo deja una puerta abierta de indagación, sino que se constituye en un elemento de reflexión.

Otro aspecto importante a destacar es que el orden de las unidades temáticas propuesto en los libros de texto no se corresponde con el de la historia, pues mucho antes del estudio de los enteros y de los racionales ya se había trabajado con la razón y proporción entre números enteros positivos; tal vez a esto se deba que en los libros de texto se priorice el trabajo de razones y proporciones con enteros positivos, aunque este tema está precedido por los números enteros y los racionales.

Con respecto al tratamiento de la razón y la proporción en los libros de texto podría decirse que existe cierta hibridación entre diferentes momentos históricos, es decir, la forma como se abordan los conceptos, los ejemplos, los ejercicios y problemas dan cuenta de que emplean diferentes teorías en torno a la proporción para formular sus explicaciones.

Capítulo 5. Conclusiones.

Diversas investigaciones coinciden en señalar que los libros de texto son el material curricular más utilizado en la enseñanza de las ciencias en todos los niveles educativos. En el caso de Colombia estos adquieren una valoración especial del estado con la Ley general de educación, pues ante la proliferación de proyectos educativos institucionales estos aparecen como un elemento unificador.

No obstante, en ellos se ha encontrado que la ciencia se presenta como una actividad simplificada, individual y reduccionista, con independencia tanto de los sujetos como de los contextos, es decir, alejada de una realidad que puede ser considerada a través del reconocimiento de los aspectos sociohistóricos en los que tuvo lugar el conocimiento.

Teniendo como referencia lo anterior, en este trabajo se pudo corroborar que efectivamente el tratamiento de la razón y la proporción en los libros de texto no corresponde a una mirada histórica-epistemológica, así pues, al revisar algunos aspectos históricos sobre la razón y proporción se encontró que no siempre se concibió como una

simple división entre dos números, por su parte se logró apreciar su carácter cambiante de una época a otra.

Aunque las nociones de razón y proporción se han ido transformando a través del tiempo, los libros de texto no dan cuenta de los aportes de las teorías precedentes a las actuales, del mismo modo, la información se presenta de manera enciclopédica y las incongruencias entre las definiciones, ejemplos, problemas y ejercicios propuestos permiten entrever que no existe claridad de la posición epistemológica que se está asumiendo al respecto; en otras palabras se podría decir, que existe cierto desconocimiento de las características y planteamientos propios de cada teoría; razón por la cual, se utilizan elementos de varias de ellas a la hora de formular las explicaciones.

Particularmente, llama la atención el papel protagónico que cumplen los conceptos de razón y proporción derivados del proceso de aritmetización sufrido en la edad media, como consecuencia de las traducciones e interpretaciones de los Elementos de Euclides, pues esto ha generado que se priorice su faceta numérica por encima de su significado.

Los temas relacionados con la razón y la proporción generalmente son enseñados centrando su atención en lo algorítmico y privilegiando lo numérico, desconociendo o conectando débilmente estos objetos de conocimiento matemático con otros, además se ha podido evidenciar que en ciertos libros de texto se suele equiparar la razón con la fracción y los racionales, y la proporción con la proporcionalidad. Estas dificultades conceptuales en los libros de texto contribuyen a forjar andamios intelectuales en alumnos y docentes quienes suelen compartir las ideas de los redactores, por esta razón, se hace un llamado a la reflexión crítica de estas propuestas y a la forma como son comunicados los conocimientos matemáticos.

Con este trabajo también se pudo apreciar que son las editoriales las que determinan qué elementos del saber han de ser socializados en el aula de clases, pues si bien, hoy en Colombia no existe una propuesta curricular, ellas parecen haberla estructurado, esto se puede deducir de la similitud de los temas abordados y del orden metodológico propuesto.

Llama especialmente la atención el gran número de coincidencias entre los resultados de esta investigación y los obtenidos por Guacaneme (2001), pese a que los textos utilizados en esta investigación son de años previos a la reforma educativa de 1994 y a la formulación de los lineamientos y estándares, lo cual permite concluir que no han existido cambios sustanciales, pese a las muchas investigaciones que se han realizado en el campo de la educación matemática y a la existencia de propuestas alternas a las tradicionalmente consideradas. **Por tal razón, la pregunta sobre cómo consolidar propuestas que modifiquen la forma como convencionalmente se ha enseñado las razones y la proporción aún sigue abierta.**

A modo de recomendación, se sugiere que más allá de determinar la validez o no de emplear los libros de texto, se tiene la necesidad de que el maestro en su práctica indague por las concepciones epistemológicas, pedagógicas y didácticas que orientan su actividad y se convierta en un investigador crítico, en diálogo permanente con lo aceptado por la comunidad de especialistas, a partir de lo cual, en la revisión de la historia interna de cada teoría, identifique los principales obstáculos epistemológicos cuyo salto permite el aumento del poder explicativo de las teorías que son socializadas en el aula de clases (Cuellar, Pérez, & Quintanilla, 2005), no obstante, para ello se necesitan recursos y una formación adecuada, con el fin de no caer en el relato fácil y exento de contenido matemático; **y aunque ya se ha indagado por algunos de los participantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje (como los son los libros de texto y los estudiantes), también es necesario**

indagar por el conocimiento del maestro, pues el contenido que llega al alumno dependerá del grado de comprensión que este tenga y de sus creencias sobre la enseñanza.

También es importante señalar que en la educación matemática son frecuentes los estudios que se ocupan por separado de alguna de las tres componentes principales de la actividad docente: el contenido disciplinar, el aprendizaje y la enseñanza; sería interesante que en estudios futuros pudieran incorporarse estas tres variables.

Referencias.

- Alcaldía de Medellín y Secretaría de Educación. (2014). *Expedición currículo: el plan de área de matemáticas*. Medellín: Impresos Begon S.A.S.
- Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*.
- Boyer, C. (2007). *Historia de la matemática*. Madrid : Alianza editorial.
- Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C., & Serrano, C. (2004). *Alfa con estándares*. Bogotá : Norma.
- Castiblanco, G., Estrada, W., Samper, C., Moreno, V., Toquica, M., Báez, A., y otros. (2015). *Avanza matemáticas*. Bogotá: Norma.
- Castro de Almeida, I., & Díaz Moreno, L. (2010). Pensamiento proporcional. una mirada socioepistemológica. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 899-908.
- Clauso García, A. (1993). Análisis documental: el análisis formal. *Revista general de información y Documentación*, 11-19.

- Corena, J. (2002). Veinte preguntas a la enseñanza de las ciencias naturales en la universidad colombiana. Una aproximación al trabajo cotidiano del docente en las aulas deficiencias e ingeniería. *Educación en Ciencias e Ingeniería*, 3-11.
- Cuellar, L., Pérez, R., & Quintanilla, M. (2005). La propuesta de Ernest Rutherford en los libros de texto en Colombia. *Enseñanza de las ciencias*.
- Del Olmo Barbero, J. (2006). el color como elemento comunicacional. *Revista científica de comunicación y educación*, 111-116.
- Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., & Margarit, J. (1997). Algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionamiento de tareas relacionadas con razón y proporción. En *VIII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas)* (págs. 429-433). Salamanca.
- Fernández, A., & Puig, L. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En J. Murillo, P. Arnal, R. Escolano, & J. M. Gairín, *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (págs. 29-46). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.
- Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., & Monzó, O. (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria*. Valencia : Publicacions de la Universitat de València.
- Ferreira de Bravo, M. A., & Mayorga, L. P. (2010). Propuesta para la evaluación de los libros de texto de Matemáticas de todos los niveles educativos. *Revista ciencias de la educación*, 20(35), 15-28.

- García Piqueras, M. (2013). *una historia de la proporción desde la prehistoria al número de oro*. Nivola.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, 127-135.
- Gomes, R. (2003). El análisis de datos en la investigación cualitativa. En M. C. De souza, S. Ferreira, O. Cruz, & R. Gomes, *Investigación social: teoría, método y creatividad* (págs. 53-65). Buenos Aires: Lugar editorial.
- Gómez Andrade, C. (2015). *Catálogo plan lector 2015*. Bogotá: Santillana.
- Gómez Mulett, A. S. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Cincuenta años de reformas en el currículo colombiano. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 155-176.
- González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 17-28.
- González Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaustión. *Sigma*, 101-129.
- Graffe, G., & Orrego, G. (2013). El texto escolar colombiano y las políticas educativas durante el siglo XX. *Itinerario Educativo*, 91-113. Grupo Beta. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Colección: Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Vol. 14. Madrid: Editorial Síntesis S. A.
- Guacaneme Suárez, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

- Guacaneme, E. A. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático*, 99-136.
- Guacaneme Suárez, E. A., Torres Rengifo, L. A., & Arboleda Aparicio, L. C. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 203-224.
- Guacaneme Suárez, E. A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Hans Freudenthal (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (s.f.). *Metodología de la investigación* (Quinta ed.). México: McGraw - Hill.
- Itten, J. (1992). Contraste caliente frío. En J. Itten, *el arte del color* (págs. 45-49). París: Bouret.
- Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 87-103.
- Kline, M. (1978). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid : Siglo XXI.
- López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI revista de educación*, 167-179.
- Martínez Mediano, C. (2006). El análisis de contenido. En F. Arteaga Martín, *Guía de investigación sobre la paz, la seguridad y la defensa* (págs. 311-345). Madrid.

- Michellini, M., Santi, L., & Stefanel, A. (2013). La formación docente: un reto para la investigación. *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*, 846-810.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *serie lineamientos curriculares matemáticas*. Santa Fé de Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Panamericana Formas E Impresos S.A
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Vamos a aprender matemáticas*. Bogotá: Ediciones SM.
- Monje, J., Pérez, P., & Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, C. Nuria, & A. Estepa, *XVII Simposio de Investigación en Educación Matemática* (págs. 395-401). Bilbao.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 979-988.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 59-81.
- Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la educación básica*. Tesis doctoral: Universidad del Valle.

- Oller Marcén, A., & Gairín Sallán, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 317-338.
- Ortiz, L., Ramírez, M., Joya, a., Celi, V., Acosta, M., Perdomo, A., y otros. (2013). *Los caminos del saber*. Bogotá: Santillana.
- Puertas Castaño, M. L. (1994). *Los Elementos de Euclides (libros V-IX)*. Madrid : Gredos.
- Puertas Castaños, M. L. (1996). *Los Elementos de Euclides (libros X-XIII)*. Madrid: Gredos.
- Rafael Linares, A. (2007). Desarrollo cognitivo: las teorías de Piaget y de Vygotsky. *Universidad Autónoma de Barcelona*.
- Rapetti, M. V. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Suma*, 65-70.
- Ruiz, E. F., & Lupiáñez, J. L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa y Psicopedagógica*, 397-424.
- Ruiz, E. F., & Lupiáñez, J. L. (2010). Empleo de la geometría dinámica como apoyo en actividades de lápiz y papel, para la comprensión de los tópicos de razón y proporción. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 207-234.
- Ruiz, E. F., & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 299-324.
- Ruiz, E. F., & Valdemoros, M. E. (2008). Modelos de enseñanza sobre razón y proporción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 289-298.
- Spengler, O. (2006). El sentido de los números. En *La decadencia de occidente*. Buenos Aires.

- Tomasini, M. C. (2007). El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas. 15-27.
- Thurston, A., Grant, G., & Topping, K. (2006). La construcción de la comprensión en ciencias naturales de Primaria: una exploración del proceso y sus resultados en los contenidos de la luz y la tierra. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 1-35.
- Valdemoros, M. E. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 217-226.
- Vasco, C. E. (2013). Los programas curriculares de matemáticas en Colombia. En M. d. Nacional, *Programa de transformación de la calidad educativa. Guía del maestro sé, matemáticas primaria* (págs. 10-13). Ediciones SM.
- Yuste, P. (2004). Razón y proporcionalidad en la geometría Euclídea. *Revista española de física*

Anexos.

Anexo A: pensamientos y estándares relacionados con la razón, la proporción y la proporcionalidad.

En los estándares básicos de competencias en matemáticas para la educación básica y media, se propicia el estudio de la proporcionalidad, desde el estudio de diferentes conceptos matemáticos, los cuales directa o indirectamente permiten que el estudiante emplee este tipo de razonamiento.

A continuación se presentan algunos estándares básicos en competencias matemáticas relacionados con los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad para los diferentes grados:

1^o a 3^o

Pensamiento	Estándar
Numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. • Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.

	<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).
Métrico	<ul style="list-style-type: none"> • Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. • Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias. • Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.
Aleatorio	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. • Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
Variacional	<ul style="list-style-type: none"> • Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas

4° a 5°

Pensamiento	Estándar
Numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones • Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos • Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. • Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
Espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras
Métrico	<ul style="list-style-type: none"> • Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir. • Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos. • Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas
Variacional	<ul style="list-style-type: none"> • Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos. • Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

6° a 7°

Pensamiento	Estándar
Numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. • Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Métrico	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas) • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. • Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
Aleatorio	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.)
Variacional	<ul style="list-style-type: none"> • Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

8° a 9°

Pensamiento	Estándar
Espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
Métrico	<ul style="list-style-type: none"> • Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
Variacional	<ul style="list-style-type: none"> • Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan

10° a 11°

Pensamiento	Estándar
Espacial	<p>Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas</p>
Métrico	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. • Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.

Variacional

- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modeló situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas

