UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

De las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas: análisis de contenido de un texto de décimo grado

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Matemática y Física

NAYARETH CRISTINA VALLEJO ÁLZATE
JORGE ALBERTO MARTÍNEZ GRANDA

Asesor
DR. LUIS ALEXANDER CONDE SOLANO

Medellín
2016

Agradecimientos

A nuestro asesor, Dr. Luis Alexander Conde Solano por habernos motivado y orientado con sus sugerencias, revisiones, consejos, comprensión y aportes durante el desarrollo de la práctica pedagógica y la elaboración del presente trabajo. También por compartir sus innumerables conocimientos y lograr que seamos mejores maestros.

A nuestra profesora cooperadora durante la práctica pedagógica, Lida Vélez por los consejos, comprensión y apoyo brindado durante el proceso de aprendizaje.

A la persona que evaluó nuestro trabajo, Yadira Marcela Mesa por sus sugerencias y comentarios, que fueron de gran ayuda para fortalecer este trabajo, así como a quienes asistieron a nuestras socializaciones, pues sus preguntas y sugerencias dotaron de reflexión nuestra investigación.

A nuestra Alma Mater, en especial a la Facultad de Educación, por crear espacios de reflexión, investigación y construcción de conocimiento en los cuales nos hacemos mejores personas y maestros.

A los profesores que hemos tenido durante nuestro proceso de formación, pues las enseñanzas y aprendizajes que han dejado en nosotros se ven marcados en este trabajo. A nuestras familias, por su inmenso apoyo y amor incondicional, a quienes debemos todo lo que hoy somos, por guiarnos en un camino de disciplina académica, que quizás es el camino más adecuado, por estar siempre presentes y a nuestro lado aunque no fuera físicamente.

Y por último a todos aquellos que no se mencionaron de manera específica pero que estuvieron presentes en este proceso de formación y acompañaron nuestra construcción de saberes.

RESUMEN

Este trabajo surge de la experiencia durante la Práctica Pedagógica del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Colombia. Donde se observó cómo los estudiantes de décimo grado, presentan dificultades en la clase de trigonometría, en especial con los conceptos de razones trigonométricas y funciones trigonométricas. Las intervenciones de los estudiantes en clase de trigonometría, reflejaban un discurso memorístico, recitando de manera literal la información contenida en el texto guía usado por la maestra, mostrando una poca asimilación de los conceptos y una nula articulación entre las diferentes representaciones de las funciones trigonométricas.

En este sentido, se decide analizar de contenido para un libro de texto de matemáticas de décimo grado, centrando la atención en las unidades del texto que abordan las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas, exhibiendo las definiciones, representaciones de los objetos de estudio y particularmente fijando la atención en la existencia de conexiones entre estas dos temáticas.

Durante el análisis bajo estos tres aspectos, se encuentra que el libro de texto analizado no presenta una articulación entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas, además de que algunas definiciones y representaciones confunden diferentes conceptos, dando la idea de una equivalencia entre ellos. Situación que de no

ser reflexionada por el docente puede hacer que estas falencias conceptuales, de representación y de conexiones se trasladen a los estudiantes.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

1 Introducción

En la comunicación del conocimiento matemático ha constituido un hito importante, la aparición del libro escolar como elemento cultural, reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas. Generalmente en su estructura presentan sus contenidos separados por unidades, según los parámetros del autor, lo que en ocasiones da la ida de que los contenidos entre una y otra unidad están poco relacionados. En este sentido se hace necesario destacar, además, que el papel de los libros de texto es doble e irreducible uno a otro (Otte, 1997), por un lado, poseen una función comunicativa y de interpretación que les dotará de un carácter subjetivo tanto desde el punto de vista del autor como del lector, y por otro, se presenta como una estructura materializada del conocimiento dotándoles de carácter eminentemente objetivo. Esta doble faceta de los libros de texto, hace que su estudio aporte gran información tanto acerca de las concepciones, en relación con el contenido matemático que desarrollan, como acerca del proceso educativo en el que están inmersos. La implementación y utilización del libro de texto en el aula de matemáticas, se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta la época actual, ejerciendo para ello diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del estudiante, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver,... Esto ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados.

En Colombia cada profesor tiene la potestad de elegir que texto guía seguir, así la trigonometría escolar, no está exenta de la influencia del libro de texto, donde los docentes utilizan este tipo de textos como fuentes de información primarias a la hora de la preparación de sus clases.

Es aquí donde cobra gran relevancia las habilidades del profesor a la hora de preparar su clase, pues es necesario que el contenido que se enseñe en el aula se adecue a las necesidades contextuales de los estudiantes tal como lo demanda los Lineamientos y Estándares Curriculares.

Dado que el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica se omite en algunos textos de trigonometría escolar, utilizando de manera indistinta las palabras "función" y "razón", realizando lo propio con los términos "razón" y "cociente" sin establecer diferencias entre ellos, se genera una confusión entre uno y otro concepto. Por eso se hace necesario en esta tesis abordar el análisis de este tipo de material escrito. Finalmente, esta tesis está estructurada en los siguientes apartados descritos así: el primer apartado trata de una introducción, en la cual se hace evidente los motivos por los que surge la presente investigación, el segundo consiste en el planteamiento del problema, el cual describe la población, sus dificultades ante el tema de interés de esta investigación, el tercero contiene el marco referencial o antecedentes, los cuales guiaron la presente investigación a la luz del análisis de texto, y los diversos componentes que la conforman , el cuarto el marco conceptual, con el que se muestran aplicaciones de la trigonometría el quinto atañe a la metodología de la investigación, que describe bajo que parámetros se realizó y como se compone, el sexto se trata del análisis del libro de texto, que es el centro de la investigación, con el cual se llega al capítulo siete a las reflexiones finales, donde se hacen consideraciones que se toman en cuenta para hacer un mejor tránsito entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas.

2 Planteamiento del problema

El estudio de la trigonometría en el currículo de la matemática escolar presenta dificultades en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Según San Martín y Soto (2007) dichas dificultades influyen en altos niveles de reprobación como posible consecuencia de: i) La ruptura o discontinuidad en el paso de la geometría y el álgebra a la trigonometría. ii) Carencia o empleo restringido de representaciones para algunos “objetos trigonométricos”.

Durante la estancia en la práctica pedagógica, se observaron dificultades en clase de trigonometría. Las respuestas de los estudiantes a las nuevas actividades se daban como respuestas literales a la información consignada en sus cuadernos, misma, que provenía del libro de texto guía usado por la docente para impartir sus clases, dando indicios de que no habían logrado una comprensión de los conceptos.

Conscientes de esta problemática, se acudió al libro de texto usado por la profesora y otro texto usado por un colega de grado décimo, con el propósito de indagar sobre el abordaje del objeto de estudio en cuestión. Para efecto de este estudio se presenta el análisis del segundo profesor, por motivos de disponibilidad del mismo texto.

Así, detectar las posibles relaciones entre lo observado en clase y la presentación del libro sobre trigonometría.

Precisamente, allí se pudo encontrar que éste libro presentaba de manera aislada las razones trigonométricas y funciones trigonométricas, siendo ambos parte de diferentes unidades, lo que podría fomentar la idea de que son conceptos poco relacionados y por lo tanto entorpecer la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes.

Desde tal problemática, es importante analizar los libros de texto, desde el punto de vista conceptual, en particular, el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas. Se considera que los libros de texto tienen alta influencia en la metodología del profesor y en el contenido disciplinar llevado al aula, debido a que los libros de texto son tomados como fuentes confiables tanto a nivel de contenido disciplinar como metodológico. A tal punto, que las estrategias didácticas que allí se muestran, terminan en su mayoría implementándose en el aula, sin mediar reflexión alguna por parte del profesor. Este fenómeno puede evidenciarse con mayor frecuencia en Colombia ya que se carece de texto guía de matemáticas unificados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Sin embargo, los profesores en su mayoría se deciden por algunos libros escolares para orientar sus clases.

Por lo tanto, de acuerdo a tal problemática e intereses de estudio, se plantea la pregunta de investigación *¿Cómo es el transito que se hace de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que ofrece el libro de texto Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10?*

El objetivo principal atiende a: *Realizar un análisis de texto al libro Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10, con el fin de caracterizar el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que allí se ofrece.*

Se considera que uno de los resultados del presente análisis de contenido de textos escolares, es ofrecer a los profesores argumentos adicionales de tipo conceptual para elegir los textos más indicados para sus estudiantes. También aportar sugerencias didácticas para aquellas personas que diseñan y editan textos para fines educativos.

3 Antecedentes

Se sabe que existen muchas otras perspectivas de investigación alrededor del estudio de la trigonometría en el ámbito escolar. Sin embargo, atendiendo a este interés, en el actual apartado se exhiben algunos estudios sobre las razones y funciones trigonométricas y sus representaciones semióticas mediadas o no por tecnologías digitales. También se exhiben trabajos referentes a análisis de contenido de la matemática escolar.

3.1 Las razones y funciones trigonométricas para la enseñanza

En la búsqueda de un método para mejorar el tránsito entre las representaciones la función trigonométrica, Kendal & Stacy (1998) realizan una comparación entre dos medios de representación para el seno y coseno: el triángulo rectángulo y la circunferencia unitaria, para identificar cuál de las dos representaciones favorece mejor el tránsito a función trigonométrica. En su investigación encuentran que la circunferencia unitaria es la que más favorece esta articulación. Esta información es corroborada por la investigación de Webber (2005) quien logra buenos resultados en el paso a la función trigonométrica, usando la circunferencia unitaria. Las actividades diseñadas para esta investigación utilizan el proceso geométrico que consiste en comparar las coordenadas cartesianas, que corresponden a las longitudes dentro de la circunferencia.

Sin embargo, se considera que el problema no se resuelve con una comparación entre cuál es la mejor representación, sino que es necesario realizar un proceso que permita identificar el cambio entre cada representación.

En este contexto Campo & Lasso (2014), en su investigación hacen referencia a la desarticulación que se presenta entre razón trigonométrica y función trigonométrica y la importancia de desarrollar un pensamiento variacional en el aula. Este autor hace un análisis de cómo se estudia mecánicamente las razones entre la longitud de los lados de los triángulos rectángulos y luego se pasa al estudio de la circunferencia unitaria y se alude a estas sin hacer una articulación en ninguno de los procesos, ellos buscan mediante una secuencia didáctica favorecer el paso entre razones y la función seno.

Esta preocupación por el poco desarrollo del pensamiento variacional en la trigonometría se hace evidente en el análisis de textos realizado por Acevedo (2013), quien en su investigación encuentra que la mayoría de las actividades que proponen los textos se centra en el manejo de símbolos, propiedades y operaciones en problemas que él nombra como problemas de sustitución, que no alcanzan un interés en las nociones variacionales. Por estas razones surge en él la necesidad de realizar propuestas donde se hagan evidentes las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, y superar así la idea de que las razones trigonométricas son fórmulas para calcular datos.

Por otra parte otros investigadores dirigen su interés en la significación de la transición entre las diferentes formas de expresar las funciones trigonométricas. Tal es el caso de Brown (2006) quien documenta que en ocasiones los estudiantes no alcanzan total comprensión de las tres diferentes maneras de expresar las funciones trigonométricas: como relación entre los lados del triángulo, como coordenadas en el círculo unitario y como longitudes horizontales y verticales. En esta dirección Rueda (2000) afirma que el modo en que se enseña que va desde las razones trigonométricas en triángulos rectángulos hasta la circunferencia unitaria, genera aún más confusión, ya que es un cambio que debe poseer un gran apoyo conceptual y estos conceptos deben estar claros para los estudiantes o las personas relacionadas con este estudio, este autor usó la relación entre la trigonometría y la geometría, construyendo una propuesta de enseñanza sobre las razones trigonométricas a través del Geoplano circular trigonométrico.

Durante el estudio encuentran que no hay una relación entre los conceptos geométricos y su representación, también nombran que los terminas razones trigonométrica y funciones trigonométricas se usan de forma indistinta, creando de este modo una confusión en los conceptos, pues las razones no relacionan dos variables como si lo hacen las funciones, lo que genera como lo menciona De Kee (1996) que los estudiantes no diferencien entre razones y funciones trigonométricas.

3.2 Análisis de contenido de la matemática escolar

Rodríguez (2016) realiza un análisis de dos libros de texto, buscando la voz y la mirada del autor en las temáticas de funciones trigonométricas y razones trigonométricas y cómo esto afecta la presentación de tales conceptos. Este autor investiga desde una perspectiva semiótico-cognitiva, con el fin de observar los problemas que pueda encontrar y tratarlos. Estudia cuidadosamente conceptos que considera fundamentales en la aprehensión de las funciones trigonométricas, tratando de ver la intencionalidad del autor de la coordinación y presentación que hace de los capítulos de funciones trigonométricas y razones trigonométricas. Encuentra en su investigación, que el tratamiento que se le da a las funciones trigonométricas y razones trigonométricas en la escuela no logra que se realice una apropiación del lenguaje natural de estos conceptos, negando la posibilidad de darles un significado y a pesar que los temas en ambos textos son los mismos, la importancia que le da cada autor a estos conceptos en la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas y razones trigonométricas es muy diferente.

Muñoz (2013) toma seis libros de texto, escogidos arbitrariamente del portal de Colombia Aprende y analiza el uso que estos le otorgan a las herramientas tecnológicas en el contenido de trigonometría. Describiendo cómo en la mayoría de estos textos, las herramientas tecnológicas son usadas para procesar información y realizar tareas en menos tiempo, facilitando que se profundice más en el análisis de las temáticas y menos en lo procedimental, sin embargo en tal investigación se identifica un uso de las herramientas tecnológicas enfocada a la solución de problemas y no a la construcción del conocimiento.

En su investigación Reyes (2009) buscó establecer cómo los estudiantes mexicanos construían y verificaban estrategias para la solución de problemas de trigonometría, determinando a su vez qué conocimientos matemáticos poseían de los conceptos empleados para su solución. En el proceso de investigación realiza una comparación entre los planes de estudio de 2006 y 1993, encontrando que el enfoque de estudio no se había modificado sino que se había generado una mayor acentuación en reforzar la didáctica de las matemáticas. Halló también que los libros de textos para maestros no presentan secuencias organizadas de actividades que permita reflexionar y establecer nuevos procedimientos para la solución de problemas. Él evidenció que los alumnos presentan dificultad al momento de despejar ecuaciones trigonométricas, atribuyendo lo anterior a la poca articulación de las temáticas de la trigonometría con los contenidos trabajados con anterioridad, señalando que cuando se realiza esta articulación las oportunidades de socialización eran mayores y se emplean mejores estrategias para solucionar problemas, concluyendo que para poder aplicar los conocimientos en trigonometría es totalmente necesario adquirir un dominio de las razones trigonométricas y que los algoritmos, formulas y definiciones sólo son importantes en la medida en que los estudiantes puedan usarlas para la solución de problemas de forma reflexiva.

Martínez (2012) realiza un análisis didáctico-cognitivo, donde el estudio cognitivo muestra la concepción que poseen los profesores y estudiantes sobre las unidades angulares de las funciones trigonométricas y el estudio didáctico la poca relevancia que se le da al radian como un concepto articulador de las representaciones de las funciones trigonométricas, en su investigación encuentra que al recurrir al poco uso de la calculadora se limita el estudio de la trigonometría a los ángulos notables, dejando por fuera las posibilidades de conceptualización y el dotar de significados el aprendizaje.

Martínez (2012) en su proceso de investigación, realiza un análisis de texto que buscaba establecer una comparación entre las formas en que se presentan las funciones trigonométricas, observando cómo las definiciones de los conceptos pueden afectar la articulación de los saberes específicos sobre las funciones trigonométricas.

Rico, Lupiáñéz, Marín & Gómez (2007), presentan el análisis de contenido centrado en describir, analizar y organizar los diferentes significados de las matemáticas, allí se evidencia una brecha entre lo que establece el currículo como las temáticas que debería saber el estudiante con las consignadas en los libros de texto, demandando la necesidad que los libros de texto concuerden con el currículo en que se debe centrar la enseñanza en las necesidades de los alumnos, que si bien las necesidades dentro del aula de clases son diversas, los libros de texto deberían encaminarse a cumplir con esta demanda. Concluyen que la formación del docente debe tener una preparación didáctica, disciplinar y metodológica, que en ocasiones los libros de texto pasan por alto. Entonces se debe tomar el texto cómo un primer paso para la interpretación del conocimiento matemático y la preparación siguiente corre por cuenta del docente y sus habilidades.

Rico (2013) realiza un análisis didáctico, con forme a las reglas de la filosofía y la historia del pensamiento y aborda problemas de enseñanza y aprendizaje escolar en la educación matemática. Este texto se centra en dos aspectos específicos; el primero en el análisis didáctico y el análisis de algunos aspectos de la historia del pensamiento, el segundo se centra más en el análisis conceptual y de contenido como método de investigación. Y por último hacen un enlace de las dos maneras entes mencionados. Él concluye que el análisis conceptual y de contenido es un método de investigación consolidado en la historia del pensamiento y la educación, la relación de este método de investigación ha dejado surgir nuevas ideas, brindando a docentes fundamentos propios, tanto teóricos como experimentales, y por ultimo dice que la investigación basada en análisis de texto propicia el uso de la dialéctica, la síntesis y el análisis por parte de los docentes al momento de tomar textos guías para sus clases.

En este caso, se considera que el análisis de textos puede dar luces sobre las raíces de las problemáticas conceptuales y de conexiones que se evidencian en la clase de trigonometría, pues en ocasiones los textos escolares que en su mayoría no establecen una conexión entre las temáticas, son usados como materia prima en la preparación de las clases y si el docente no analiza la forma del contenido que allí se presenta puede propagar sus falencias.

4 Marco conceptual

El origen y estudio de la trigonometría atañe a las aplicaciones en la astronomía y la navegación, donde no era posible hacer mediciones de manera directa o las distancias eran inalcanzables. Por ejemplo: la distancia de la Tierra a la Luna. La trigonometría consiste en el estudio de las medidas y relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Por lo tanto, permite resolver una gran cantidad de situaciones y problemas en el mundo real, fundamentalmente en aplicaciones que requieren el tratamiento de triángulos.

4.1 La trigonometría en la matemática escolar

Según Rico (1997) se entiende por matemáticas escolares las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje. Los términos y conceptos matemáticos que transmite el sistema educativo para la formación de todos los ciudadanos corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes. Las matemáticas son un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar (Devlin, 1994; Steen, 1990).

La trigonometría es ubicada en el componente geométrico según los Estándares para la etapa 9-12 de los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Allí se contempla como una aplicación en los campos de topografía, de navegación y arquitectura. Además, la trigonometría proporciona recursos adicionales para resolver problemas matemáticos y prácticos. En este sentido, se espera que los estudiantes usen las relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas angulares, por ejemplo: deberían reconocer que fenómenos periódicos se modelizan mejor por medio de funciones trigonométricas.

En el currículo Colombiano, el estudio de la trigonometría se aparece en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Se ubica en el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos de los grados décimo y undécimo. Por lo tanto, en ese documento se espera que al finalizar el grado undécimo los estudiantes "usen argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. Y describan y modelen fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas" (p. 88).

A partir de las anteriores directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), las instituciones educativas se encargan de construir el plan de área y el plan de asignatura de matemáticas. En este documento por lo general se establece que el estudio de la trigonometría se imparte en el grado décimo. Esta lógica corresponde con la propuesta de los libros de texto de décimo grado.

El plan de asignatura que diseña el profesor al comienzo del año escolar, por lo general tiene un orden temático donde se inicia con las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y círculo unitario, el siguiente las funciones trigonométricas, pasando luego a identidades trigonométricas. Para los estudiantes, el estudio de la trigonometría es introducir elementos nuevos de las matemáticas. Situación que puede dificultar el proceso de aprendizaje, aunque en grados anteriores ellos han abordado la noción de razón.

En este sentido una de las dificultades que se pueden evidencias es la visión atomista de la matemática escolar, por lo tanto, el estudiantes no puede relacionar nociones matemáticas que supuestamente ya se trabajaron en grados anteriores. Este es el caso de la noción de razón, al trabajar proporcionalidad directa e inversa y que tiene esta la misma connotación del estudio de las razones trigonométricas. De igual manera se puede presentar confusión para los estudiantes cuando se utiliza indistintamente los términos “función trigonométrica” y “razón trigonométrica” sin establecer sus diferencias y relaciones.

4.2 Análisis de contenido de la matemática escolar

El análisis de contenido matemático escolar consiste en un método para establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procedimientos que conforman dicho texto (Rico, 2013). Particularmente, se centra la atención en la estructura interna de la matemática escolar de los textos que se implementan en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La organización del conocimiento matemático escolar desde la perspectiva cognitiva, se clasifica en conocimiento conceptual y procedimental. Para Hiebert y Lefevre (1986) el conocimiento conceptual se puede pensar como una red de conocimiento cuyas relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Por lo tanto, una unidad de conocimiento conceptual por definición es una parte del conocimiento conceptual sólo si su poseedor reconoce su relación con otras piezas de información.

Dentro del conocimiento conceptual Hiebert y Lefevre (1986) establecen como niveles de complejidad:

i) Los *hechos*, son unidades de información, que a su vez se organizan en términos, notaciones, convenios y resultados que sirven para registrar los acontecimientos.

ii) Los *conceptos*, son los que caracterizan una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con un signo o un símbolo.

iii) Las *estructuras*, andamiaje que sirven para acoplar conceptos o para relacionar conceptos que pueden trascender en conceptos de orden superior.

El conocimiento procedimental consiste en la secuencia lineal ordenada de reglas algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. Hay instrucciones paso por paso que prescriben cómo concluir una tarea. Un rasgo clave de los procedimientos es que se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada (Hiebert y Lefevre, 1986). En el campo de procedimental los investigadores ya citados, también se distinguen tres niveles:

i) Las *destrezas*, por medio de la ejecución de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos, transformar una expresión simbólica otra forma. Por lo general, en este nivel se procesan hechos.

ii) Los *razonamientos* se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos.

iii) Las *estrategias*, se suponen que son cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse sobre representaciones de conceptos y relaciones, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

Sin embargo, en el ámbito escolar, un mismo concepto matemático puede expresar una variedad de significados. Según Rico (2013) caracteriza el significado de un concepto de las matemáticas escolares por medio de la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos. Por las estructuras conceptuales en que se inserta –referencia-, por los sistemas de símbolos que lo representan –signos-, y por los objetos y fenómenos de los que surge -sentido. Este autor sostiene que un mismo concepto admite una pluralidad de relaciones internas, de modos de representación y de sentidos, que vienen determinados por las relaciones externas del concepto de referencia (Rico, 1997).

El análisis de contenido se centra la naturaleza del mensaje discurso, con el propósito de hallar la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico. En términos de Cohen, Manion y Morrison (2011, p.563) citado por Rico (2013):

> El término análisis de contenido indica el proceso de recogida y resumen de datos escritos –los contenidos principales de dichos datos y sus mensajes.
> De modo más preciso, [el análisis de contenido] define un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos. Algunos autores lo definen como una técnica de investigación para elaborar inferencias válidas y replicables a partir de textos (u otros materiales escritos) en aquellos contextos en que se utilizan. Por texto se entiende cualquier material de comunicación escrita, que se suponen deben ser leídos, interpretados y entendidos por otras personas distintas de aquella que los analiza. El análisis de contenido se puede llevar a cabo con cualquier tipo de material escrito, desde documentos impresos a transcripciones de entrevistas, desde productos de los media hasta producciones escritas. Se utiliza frecuentemente para analizar un número considerable de textos, debido a su naturaleza sistemática, gobernada por reglas; también permite utilizar el análisis asistido por ordenador. Utiliza la categorización para reducir grandes cantidades de datos (p. 17).

El análisis de contenido ha tomado relevancia en la educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto, ya sea discurso del profesor, textos escolares y producciones escolares. Según Rico (2013) las categorías consideradas para analizar el contenido matemático en un documento escolar, son:

- *Conceptual,* que considera el momento histórico y el marco poblacional (el quién comunica y a quién comunica) donde se insertan.

- *Formal y estructural*, que abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal, que proporcionan referencia a los contenidos utilizados.
- *Representacional*, que comprende las notaciones gráficas, simbólicas, y sistemas de signos involucrados.
- *Fenomenológica*, que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio (p.19).

En este trabajo de investigación se centra la atención en un análisis de contenido que permita un estudio sobre el concepto y sus significados asociados sobre las razones y funciones trigonométricas que son tratados en un libro de texto. El propósito además del estudio de conceptos es buscar relaciones entre las razones y funciones que se exhibe en el libro de texto objeto del análisis. La hipótesis previa es que la transición del estudio de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas es poco evidente en los libros de texto de décimo grado.

La unidad de análisis se refiere a la definición de razón trigonométrica, función trigonométrica, representaciones y conexiones entre ellas.

Las categorías de análisis consisten en:

1. *Definición*: Exposición exacta y clara de sobre el concepto a estudiar.
2. *Representaciones*: los signos, símbolos, gráficas e imágenes utilizadas para aproximarse al objeto matemático.
3. *Conexiones*: argumentos, frases, párrafos, imágenes que se utilizan para establecer algún tipo de relación entre las razones y las funciones trigonométricas.

Se concidera que el análisis de contenido en textos escolares aportar al profesor elementos de análisis para valorar, seleccionar y adaptar las nociones matemáticas a su contexto escolar. Esto se puede reflejar en la planeación de sus clases cuando privilegia la construcción de significados de ideas matemáticas estudiadas.

5 Metodología de la investigación

Ésta investigación es de corte cualitativa con un enfoque de análisis de contenido en Educación Matemática. El interés es interpretar y explicar la naturaleza del discurso forjado por una realidad social determinada a través de su producción documental como son los libros de texto de décimo grado. Además, para los efectos de esta investigación se considera el aspecto descriptivo, es decir, enfocarse en describir exhaustivamente la presentación de conceptos y sus representaciones sobre el estudio de las razones trigonométricas y funciones trigonométricas. Con el propósito de hallar conexiones entre ellas. Se considera el Análisis de Contenido como "la técnica destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a un contexto" (Krippendorff, 1980, p. 28). Para la investigación se llevaron a cabo las siguientes fases.

5.1 Fase 1. Preliminares

Durante la estancia en la Práctica Pedagógica, realizada en un inicio en el colegio la Navarra ubicado en el sector de Niquía al Norte del Valle de Aburrá, en el departamento de Antioquia. Esta Práctica Pedagógica fue realizada en las áreas de Matemáticas y Física en los grados de noveno a once. En ella se tuvo un acercamiento a los quehaceres de la labor docente y fue allí, realizando la práctica en el grado décimo, en clase de trigonometría dirigida por la docente cooperadora donde se pudo detectar algunas dificultades en las temáticas de razones trigonométricas y funciones trigonométricas. Las respuestas de los estudiantes a las nuevas actividades de trigonometría se trataban de respuestas literales a las consignadas en sus cuadernos, dando indicios de que no habían logrado una comprensión de los conceptos. Por lo general los apuntes de los estudiantes provienen de libros de texto que los profesores utilizan para su planeación de clase.

5.2 Fase 2. Planteamiento del problema

De la anterior experiencia, surgió el interés de examinar la presentación que revisar el libro de texto relacionado con el estudio de la trigonometría. Particularmente, se quiere indagar si existe alguna conexión implícita o explícita sobre el tránsito de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas.

Aunque la problemática fue evidenciada durante la estancia en la Práctica Pedagógica, por falta de disponibilidad del libro de texto para escanearlo, no se pudo analizar el libro de texto utilizado por la docente, así que el criterio para la selección de este libro de texto, atiende a un libro usado por un docente para impartir su clase en décimo grado en una institución del área metropolitana del Valle de Aburrá, Colombia.

5.3 Fase 4. Antecedentes

Para este trabajo se hizo una revisión de textos, tesis y artículos referentes a la trigonometría, con lo cual se construyó el marco referencial y conceptual. También permitió determinar los criterios usados para el análisis de los libros de texto. Se pretende obtener información sobre los conceptos y sus representaciones.

5.4 Fase 5. Marco conceptual

Teniendo en cuenta tal objeto de estudio, el marco conceptual se compone en dos aspectos.

1. *La trigonometría en la matemática escolar*, cuyo interés es exhibir argumentos sobre lo que se entiende por matemáticas escolares y la ubicación de este trabajo en el sistema educativo. Por lo tanto, se ubicará la trigonometría en el sistema escolar en el contexto internacional según los NTCM (2000) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) en el caso del contexto nacional.

2. *El Análisis de contenido de la matemática escolar,* como un método relevante en la educación matemática para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que en este caso aparecen el libro de texto de décimo grado seleccionado.

5.5 Fase 6. Análisis de textos escolares

El libro de texto titulado "Matemáticas redes de aprendizajes para la vida 10" fue el seleccionado para el análisis, como se mencionó anteriormente, atañe al libro utilizado por un docente para orientar su clase en grado décimo. Cómo es costumbre en este tipo de textos, sus contenidos vienen separados por unidades, y a su vez cada unidad posee un determinado número de secciones. En este texto las unidades dos y tres se dedican el estudio de las razones trigonométricas y funciones trigonométricas respectivamente, allí es donde se concentra el análisis, primordialmente en búsqueda de conexiones entre las razones trigonométricas y funciones trigonométricas. Los criterios e instrumento de análisis son los presentados en la Figura 5.

Categorías\Conceptos	**Razones Trigonométricas en el triángulo rectángulo**	**Razones trigonométricas en la circunferencia unitaria**	**Funciones Trigonométricas**
Definición: Exposición exacta y clara del significado del concepto a estudiar.			
Representaciones: los signos, símbolos e imágenes utilizadas para aproximarse al objeto matemático			
Conexiones: argumentos, frases, párrafos, imágenes que se utilicen para establecer algún tipo de relación entre las razones y las funciones trigonométricas.			

Figura 1. *Instrumento de análisis*

5.6 Fase 7. Reflexiones finales

En esta fase, se enfoca a dar respuesta a la pregunta de investigación *¿Cómo es el transito que se hace de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que ofrece el libro de texto Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10?*

De igual forma se exhiben argumentos a la luz del objetivo principal; *Realizar un análisis de texto al libro Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10, con el fin de caracterizar el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que allí se ofrece.*

6 Análisis del texto escolar

En este apartado se presenta el análisis en tres momentos. El primero consiste en una contextualización del uso del libro. El segundo momento apunta a una descripción general del libro, incluyendo la ubicación y la organización de los contenidos tratados en este estudio. Y el tercer momento, trata de la aplicación del instrumento de análisis determinado para este trabajo. Para el segundo y tercer momento se recurrirá a imágenes originales del libro, con el propósito de dar mayor veracidad al análisis.

6.1 Contextualización del uso del libro

El libro que aquí se analiza corresponde al grado décimo de educación media en Colombia y es usado por un profesor de un colegio perteneciente área metropolitana del Valle de Aburrá.

6.2 Descripción general del libro

El libro "Matemáticas redes de aprendizajes para la vida 10" hace parte del proyecto Sé de la editorial SM. Desde su portada el libro muestra características de hipertexto (Figura 6), señalando en cada sección enlaces hacia sitios en internet donde el lector puede encontrar más información sobre el tema y de alguna manera busca relacionar sus contenidos con el uso de las TIC, proponiendo actividades que se desarrollan en software Cabri y Derive, también se puede evidenciar al final de cada unidad ciertas aplicaciones prácticas de los contenidos allí expuestos.

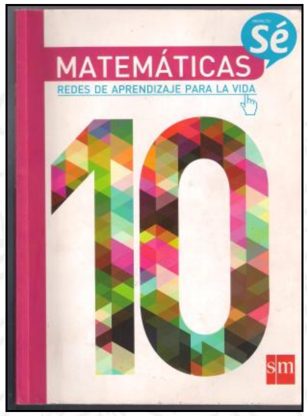


Figura 2. *Portada del libro de texto*

Como es recurrente en este tipo de libros, sus contenidos vienen separados con base en los parámetros del escritor; en unidades, a su vez estas unidades poseen un determinado número de secciones con sus respectivas actividades propuestas, acción que en ocasiones desencadena la idea de que los temas en una y otra unidad no poseen mucha relación entre sí. Al final de cada unidad se puede ver como el texto realiza una invitación a utilizar un software y a desarrollar las competencias por medio de una contextualización de las temáticas trabajadas en situaciones que podrían ser consideradas de la vida cotidiana.

En esta ocasión dado que la temática a desarrollar en esta investigación corresponde a la trigonometría, más específicamente a cómo los libros de texto presentan las diferentes representaciones de las razones trigonométricas, entonces se presentará especial cuidado sólo en las unidades 2 y 3 del libro en cuestión. Mismas tituladas Razones Trigonométricas y Funciones Trigonométricas respectivamente.

6.3 Categorías de análisis

Anteriormente en la figura 1, se mostró mediante un cuadro las categorías de análisis; allí se describen las tres temáticas a explorar y tres ítems que direccionaran el análisis. Dado que las dificultades observadas en los estudiantes de grado décimo, durante la permanencia en la práctica pedagógica se encontraban directamente en las razones trigonométricas y funciones trigonométricas, se decidió analizar las definiciones, representaciones y conexiones que entrega el libro dentro de las tres maneras para representar las funciones trigonométricas que allí se presentan, estas son nombradas en la figura 1 según el orden en que el libro las presenta, estas son: las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, razones trigonométricas en la circunferencia unitaria y como funciones trigonométricas.

Dado que los estudiantes recitaban las definiciones presentes en sus cuadernos, que resultaban ser las mismas presentes en el libro de texto guía, se decide exponer las definiciones que presenta el texto guía elegido para el análisis con el fin de describirlas y analizarlas explorando sus aciertos y desaciertos, así mismo se procede con las representaciones usadas por el texto, debido a que en su mayoría estas se realizan para dar claridad al lector sobre una definición, un concepto abstracto o la información de un enunciado.

Sin embargo, es en el tema de las conexiones donde se centra la atención del presente análisis, con la finalidad de determinar si el libro entrelaza las representaciones que aborda para las razones trigonométricas. Esto se hace necesario ya que la ausencia de conexiones excluye la posibilidad de comprender que las tres representaciones aquí trabajadas son totalmente relacionadas.

6.3.1 Definición de razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Las razones trigonométricas tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia unitaria, se proponen estudiar en la unidad 2 titulada: Razones Trigonométricas, ésta consta de nueve secciones, y es enmarcada por el libro en el desarrollo del pensamiento métrico, dejando ver en su primera página los conocimientos que el lector podrá adquirir por medio de objetivos tal como lo muestra la Figura 3.

Luego con el propósito de aportar al proceso de formación del estudiante bajo lo estipulado en la Ley General de Educación 115 de 1994 donde se habla de una educación integral, el autor propone reflexionar acerca de lo que implica ser razonable, incitando a comentar la frase "*no pretendas que los demás vivan de acuerdo a tus códigos, porqué seguramente no te gustara que los otros te impongan los suyos".* A continuación el libro incita a desarrollar las competencias por medio de una reseña histórica de la trigonometría donde muestra sus más antiguos usos como el caso de la astronomía y el cálculo de las distancias.

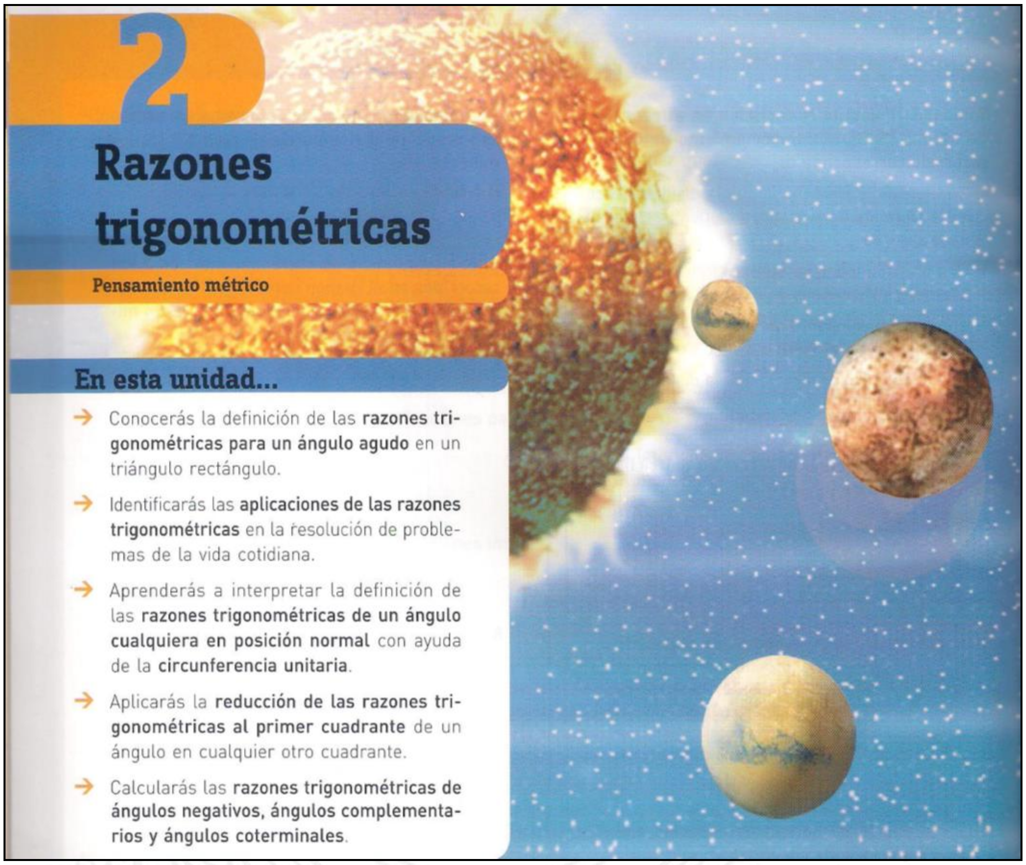


Figura 3. *Objetivos de la unidad 2.*

(p. 46)

A partir de esta introducción el autor comienza en la primera sección a abordar los sistemas de medición angular, calificados por el mismo como los más usados, en esta dirección explora en primera instancia el sistema sexagesimal, insinuando el uso del transportador. Luego se introduce el concepto de radian y se aborda la relación entre ambos sistemas de medida por medio de las proporciones. Seguido de varios ejemplos ilustrativos y se proponen algunas actividades con ejercicios similares a los propuestos en los ejemplos que buscan afianzar la parte memorística por medio de la repetición, con el fin de reforzar los contenidos expuestos.

Después de estudiar el sistema de medición angular, la segunda sección del libro de texto propone continuar inmediatamente con las razones trigonométricas. Definiéndolas en primera instancia en términos de las longitudes los lados del triángulo (Figura 4), sin embargo la definición que aquí se presenta llega a ser confusa para el lector, pues comienza describiendo las razones trigonométricas en términos de ángulos y distancias para luego limitar la definición al ángulo agudo, sustituyendo "distancias" por "longitudes", dejando la idea de que distancia y longitud son el mismo concepto, no obstante, entre ambos existe una diferencia conceptual.

> Las **razones trigonométricas** son expresiones matemáticas que relacionan medidas de ángulos y distancias. Para un ángulo agudo, se definen considerando los cocientes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo construido sobre el ángulo considerado.

Figura 4. *Definición de razones trigonométricas*

(p. 50)

La definición aquí presentada restringe el uso de las razones trigonométricas al cociente entre los lados del triángulo que forman el ángulo agudo considerado. Esto es, la definición limita la aplicación de las razones trigonométricas al cociente entre la hipotenusa y el lado del triángulo que forme el ángulo agudo o el comúnmente llamado cateto adyacente. Siendo consecuentes con ello solo se podrían presentar el Coseno de un ángulo como el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa y la Secante que sería igual a dividir la hipotenusa entre el cateto adyacente, pues el cateto opuesto está siendo ignorado por la definición del autor.

6.3.2 Representaciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Para ilustrar la definición anterior el texto propone una representación gráfica de un triángulo rectángulo (Figura 5), con sus vértices y lados nombrados, donde el nombre de cada lado está siendo parte del acotado del triángulo. Se observa también que uno de sus ángulos agudos se encuentra resaltando aunque no se indica la dirección en que fue realizado, por lo que no se indica si este es positivo o negativo.

Así este ángulo C, nombrado como su vértice, será quien represente el ángulo agudo en consideración para indicar la representación matemática de las funciones trigonométricas. No obstante si se observa la definición de razones trigonométricas que se muestra en la Figura 4, es posible que surja como interpretación de ella, que las razones trigonométricas se definen utilizando los lados del triángulo que formen el ángulo considerado. En este sentido solo se podrían establecer las representaciones matemáticas para el coseno y la secante, pues son las únicas que consideren los lados del ángulo escogido. El coseno y la secante involucran la hipotenusa y el cateto adyacente, ambos cumplen la condición de ser lados del triángulo y formar el ángulo agudo en consideración. De esta manera el cateto opuesto quedaría excluido y con él las cuatro funciones trigonométricas restantes (Seno, Cosecante, Tangente y Cotangente).

De cierta manera se podría ver una falta de coherencia con su definición al tomar el triángulo rectángulo representado en la Figura 5 y definir las 6 funciones trigonométricas con base en el ángulo agudo C, pues esto implica tener en cuenta el lado anteriormente excluido; el cateto opuesto.

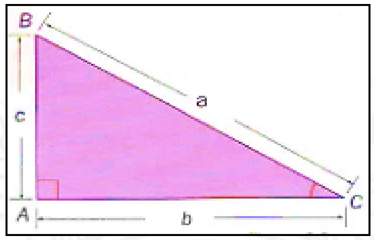


Figura 5. *Triángulo rectángulo.*

(p. 50)

Como se puede evidenciar en la Figura 6, se entregan las expresiones matemáticas utilizadas para calcular el "seno", "coseno", "tangente", "secante", "cosecante" y "cotangente". Esto se hace haciendo uso tanto del lenguaje matemático, cómo el lenguaje común, indicando a su vez el representante de cada cateto del triángulo de la Figura 5. También en la Figura 6, se pueden ver cuatro cocientes que no estarían contemplados en la interpretación descrita de la definición de razones trigonométricas presentada en el texto. Por otro lado el texto realiza una sustitución de la palabra "cociente" por "razón", pues en esta instancia las razones trigonométricas se representan como la razón entre dos lados del triángulo en relación al ángulo agudo C, mientras que en la definición de razones trigonométricas se describe como el cociente entre los lados del triángulo.

El **seno** del ángulo agudo C es la razón entre las longitudes del cateto opuesto al mismo y de la hipotenusa.

$$\operatorname{sen} C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

El **coseno** del ángulo agudo C es la razón entre las longitudes del cateto adyacente y de la hipotenusa.

$$\cos C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

La **tangente** del ángulo C es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y del adyacente.

$$\tan C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

La **cotangente** del ángulo C es la razón entre las longitudes del cateto adyacente y del opuesto.

$$\cot C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{c}$$

La **secante** del ángulo C es la razón entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto adyacente.

$$\sec C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

La **cosecante** del ángulo C es la razón entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto opuesto.

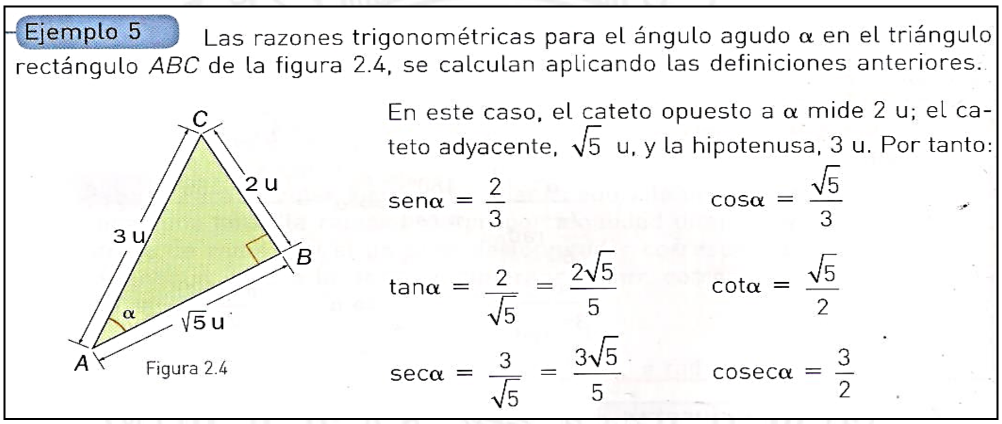
$$\operatorname{cosec} C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{c}$$

Figura 6. *Definición de las 6 funciones trigonométricas*

(p. 50)

Ambos conceptos, si bien están relacionados, no quiere decir que sean iguales. En primera instancia la razón hace referencia a la comparación entre dos magnitudes expresada como "a es a b" o a:b. No obstante con la finalidad de hallar un valor numérico que pueda establecer la diferencia de tamaño entre a y b, la razón se suele expresar como a/b donde el cociente entre ambos tiene un significado cuyo origen se encuentra en la comparación de dos magnitudes, mientras que el cociente que se menciona en la definición de razones trigonométricas se hace referencia al resultado de la división, lo cual lleva a dejar de un lado la comparación subyacente en la razón.

Después de conferir estas expresiones llega la hora de ponerlas en práctica. Para ello el libro de texto presenta un práctico ejemplo (Figura 7) que consiste en encontrar el valor de las 6 razones trigonométricas antes mencionadas.


Ejemplo 5 Las razones trigonométricas para el ángulo agudo α en el triángulo rectángulo ABC de la figura 2.4, se calculan aplicando las definiciones anteriores.

En este caso, el cateto opuesto a α mide 2 u; el cateto adyacente, $\sqrt{5}$ u, y la hipotenusa, 3 u. Por tanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2}$$

Figura 7. *Ejemplo de aplicación de las razones trigonométricas*

(p. 50)

En este particular ejemplo, el quinto de la unidad, pero el primero en aplicar la definición de las razones trigonométricas, usa un triángulo y una notación de una considerable diferencia respecto con aquella que se usó para exponer las expresiones para calcular las razones trigonométricas. Aquí se ve que el ángulo ya no es nombrado como su vértice, sino que es nombrado con la letra griega α, si bien ésta notación es totalmente correcta es necesario preguntarse si podría generar una confusión en el estudiante. Adicionalmente el triángulo representado en esta instancia tiene una posición diferente poniendo el ángulo en consideración al otro lado del ejemplo y con sus vértices nombrados de manera distinta. Es importante en el proceso de enseñanza del concepto evitar cambios inesperados por los estudiantes, dichos cambios generan en ellos imprecisiones y confusiones en la construcción de su nueva noción matemática.

Inmediatamente después del ejemplo vuelven a hacer referencia al ángulo C (Figura 8), sin antes ubicar a los estudiantes a qué figura se refieren. Al no ubicar al estudiante se podría generar confusión, ya que el estudiante seguramente podría referirse al triángulo de ejemplo antes propuesto donde también se encuentra un ángulo C.

Las razones cotangente, secante y cosecante son respectivamente recíprocas a tangente, coseno y seno. Esto es:

$$\cot C = \frac{1}{\tan C} \qquad \sec C = \frac{1}{\cos C} \qquad \operatorname{cosec} C = \frac{1}{\operatorname{sen} C}$$

Por tanto:

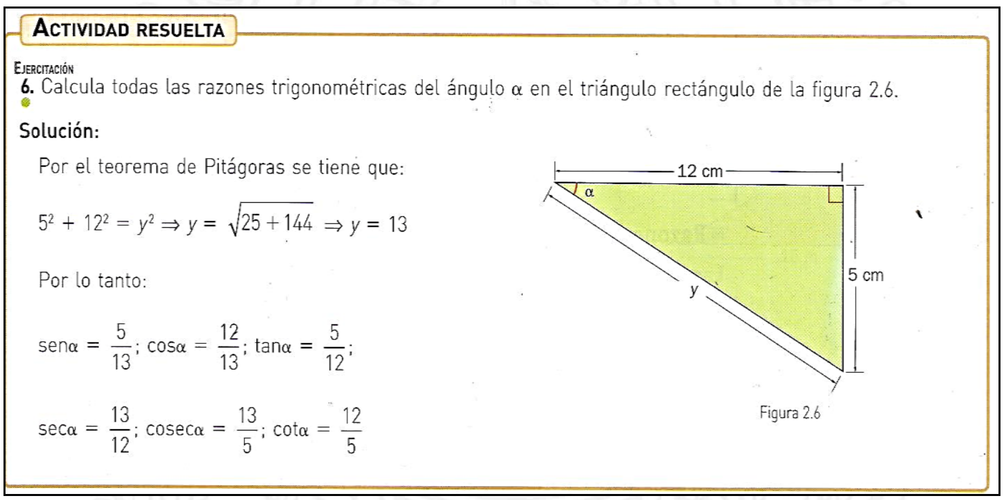
$$\tan C = \frac{1}{\cot C} \qquad \cos C = \frac{1}{\sec C} \qquad \operatorname{sen} C = \frac{1}{\operatorname{cosec} C}$$

Figura 8. *Razones trigonométricas reciprocas*
(p. 50)

Estas nuevas formas de representar las razones trigonométricas, muestran de una manera directa su expresión en forma recíproca, sin dar indicios de porque se puede hacer este cambio de representaciones.

En esta misma página el texto anuncia bajo el título “Sabias que…” una aplicación de razones trigonométricas en problemas de tipo topográfico. Invitando al estudiante a que amplié sus conocimientos visitando el sitio web, mostrando sus cualidades de hipertexto. Esto entra en concordancia con las demandas de los NTCM y el MEN de mostrar a los estudiantes las aplicaciones a la vida real que tienen las temáticas trabajadas.

Después de esto, el texto propone otro ejemplo donde ahora se sugiere partir del valor del seno de un ángulo θ, para encontrar el valor de las demás razones trigonométricas. En este caso se ve una coherencia con el ejemplo anterior pues de nuevo vuelve a nombrar el ángulo con las letras griegas y se realiza la respectiva racionalización de las fracciones obtenidas al hallar las otras razones.



Actividad resuelta

Ejercitación

6. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo rectángulo de la figura 2.6.

Solución:

Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$5^2 + 12^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{25 + 144} \Rightarrow y = 13$

Por lo tanto:

$\text{sen}\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\tan\alpha = \frac{5}{12}$;

$\sec\alpha = \frac{13}{12}$; $\text{cosec}\alpha = \frac{13}{5}$; $\cot\alpha = \frac{12}{5}$

Figura 9. *Actividad resuelta*

(p. 51)

Ahora el libro presenta una actividad resuelta (Figura 9), que en ocasiones se convierte en la primer actividad que se les plantea a los estudiantes para que pongan en práctica lo enseñado en las definiciones y en los ejemplos, en este punto se puede ver cómo para resolver este problema se hace necesario involucrar el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la hipotenusa, de tal manera que se pueda realizar las razones que requieren el inicialmente ignorado cateto opuesto.

De nuevo en este ejemplo, se vuelve a utilizar la simbología de las letras griegas, utilizando la misma letra para nombrar los ángulos de los ejemplos anteriores. En este sentido, si el objetivo del texto era usar esta notación para nombrar los ángulos pudo haber considerado esta para entregar las expresiones de las razones trigonométricas en vez de recurrir al ángulo C.

En esta instancia, sin argumento previo, el texto propone el uso de una herramienta tecnológica que puede ser de gran utilidad a la hora de calcular el valor de las razones trigonométricas; la calculadora. Como se muestra en la Figura 10, el texto indica cómo se debe usar esta herramienta para hallar este valor.

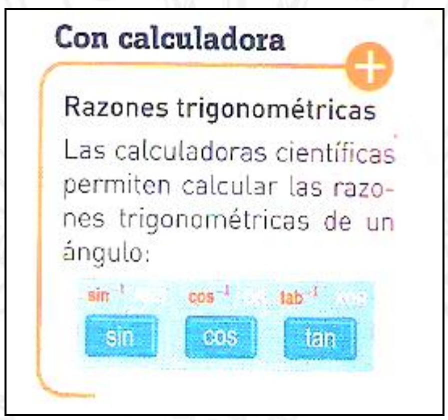


Figura 10. *Uso de la calculadora*

(p. 51)

No obstante, hasta el momento no se han realizado ejemplos donde se le otorgue un valor al ángulo en ninguno de los dos sistemas de medida anteriormente descritos en la presente unidad, sino que se han dado definiciones y ejemplos sobre las razones trigonométricas para un ángulo en forma general. Cabría en esta instancia una

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

explicación del por qué ahora solo conociendo el valor del ángulo y al insertarlo en la calculadora después del nombre de la razón trigonométrica, esta me arroja un valor para dicha razón, aparentemente ignorando el valor de los catetos.

Son las situaciones como la descrita en el párrafo anterior las que ponen en evidencia la problemática planteada por Fiallo (2012), Rodríguez y Cogollo (2010) quienes presentan una preocupación por la forma en que se enseña la trigonometría, destacando que en ocasiones ésta se convierte en un recetario de fórmulas sin sentido para el estudiante, pues ahora ante la facilidad que muestra la calculadora, el estudiante pasará a usarla e implementará las formulas descritas en las definiciones sin preguntarse de las razones conceptuales que llevan a que el valor entregado por la calculadora es adecuado.

Para evitar situaciones como estas se hace necesario involucrar el concepto de razón sin reducirlo a encontrar un cociente, de manera que se haga énfasis en el carácter variacional que esta puede otorgar, comparando razones trigonométricas en triángulos semejantes, mostrando cómo al conservarse la medida de los ángulos internos del triángulo la razón permanece constante, esto con el fin de que el paso a la calculadora no carezca de sentido para el estudiante y que encuentre una relación entre lo que hacía antes de usar esta herramienta.

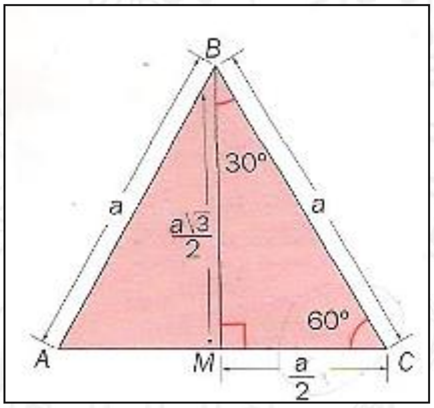
Con los insumos brindados hasta el momento, el libro propone algunos ejercicios para que los estudiantes realicen, algunos de ellos son:

- Calcula la secante, cosecante y cotangente del ángulo de menos amplitud del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5cm y 10cm respectivamente.
- Calcula las razones trigonométricas de 30° y 60°. Para ello, toma un triángulo equilátero de lado *a*, divídelo en dos por una de sus alturas.

Este tipos de ejercicios, si bien de cierta manera ayudan con la vinculación de esta unidad al pensamiento métrico, evita de cierta manera el hecho de la comparación, el cual es un concepto muy ligado a la razón, pues en la definición se le da a la razón un papel muy operativo lo cual lo hace practico para los ejercicios propuestos pero no favorece la apreciación de su carácter variacional.

Además es importante observar los enunciados de las actividades propuestas, pues en todo momento el texto se refiera “calcular la cosecante”, “calcular las razones trigonométricas”, mas siendo consecuentes con los ejemplos realizados sería más acorde decir: “calcular el valor de…” pues en todo momento lo que se hace es hallar un valor correspondiente a cada razón.

Luego en la tercera sección, se hace un acercamiento particular sobre del valor de las razones trigonométricas en los ángulos de 30°, 45° y 60°, distinguiéndolos de los demás bajo la denominación de ángulos notables, resaltando que estos ángulos pueden ser fácilmente obtenidos por geometría elemental, por ello en el texto se representa gráficamente un triángulo equilátero de lado *a* y de allí se extrae por medio del uso de geometría los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 60° y 30° (Figura 11).



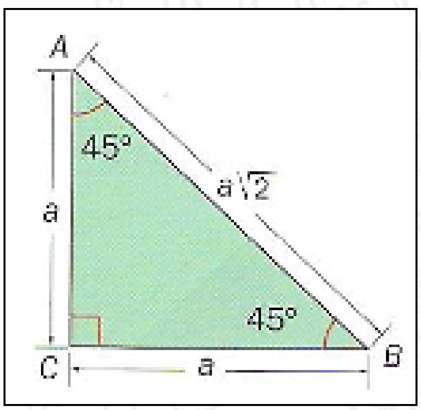


Figura 11. *Ángulos notables*

(p. 52 y 53)

Para encontrar el valor de las razones trigonométricas del ángulo de 45° se recurre al triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales miden *a*, para de esta manera de la mano del teorema de Pitágoras se encuentre el valor de la hipotenusa y se puedan extraer de la figura el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 45°.

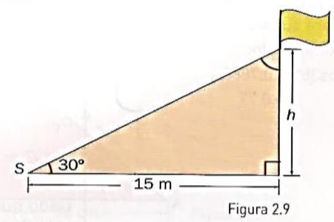
A continuación de esto se propone el ejercicio de la Figura 12, que supone se hace para acercan a los estudiantes a las aplicaciones prácticas de las razones trigonométricas.

En esta actividad propuesta (Figura 12) se puede ver como ahora los símbolos presentes en el enunciado del problema, permiten representar la situación por medio de un triángulo rectángulo. Lo que facilita de cierta manera realizar el cálculo de la longitud del asta de la bandera, este acercamiento a las aplicaciones que poseen las razones trigonométricas, resultan de gran relevancia para que el estudiante adquiera las competencias necesarias para aplicar sus aprendizajes a su vida cotidiana.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

10. Un agrimensor observa que un punto S ubicado al nivel del suelo está a una distancia de 15 m de la base del asta de una bandera, como se muestra en la figura 2.9. ¿Cuál es la longitud h del asta?



Solución:

Para hallar la medida h se puede utilizar una razón trigonométrica de 30°. En este caso, resulta conveniente emplear tan30°, pues h corresponde a la longitud del cateto opuesto y el cateto adyacente mide 15 m.

$$\tan 30° = \frac{h}{15} \Rightarrow h = 15 \cdot \tan 30° = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

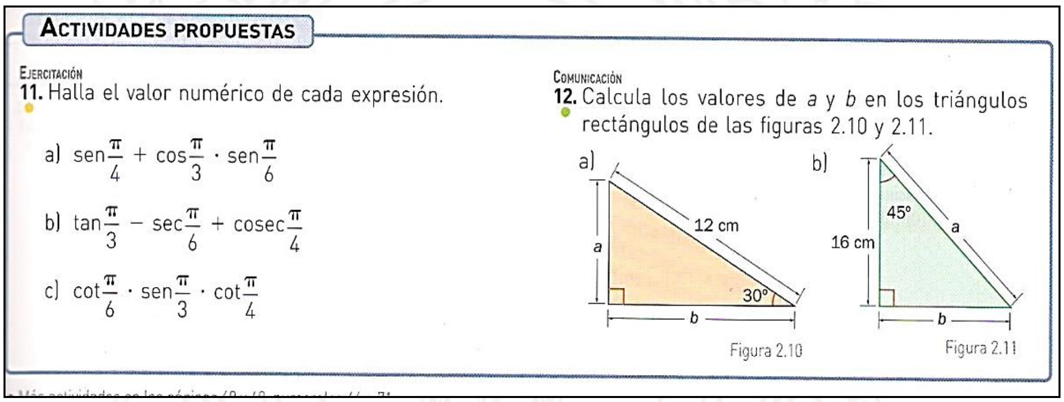
Luego, la longitud del asta es de $5\sqrt{3}$ m.

Figura 12. *Primer problema de aplicación de las razones trigonométricas*

(p. 53)

Para seguir con aplicaciones a lo relacionado con las razones trigonométricas de los ángulos notables, se presentan una serie de ejercicios donde se trabaja con ángulos medidos en radianes (Figura 13), realizando operaciones con los valores de dichas razones, de tal manera que ahora se pasa a operar con el valor numérico de las razones. Luego se propone encontrar los valores de los lados de un triángulo conociendo el valor de un ángulo agudo y la medida de uno de sus lados en unidades de medida métricas.

Esto surge, pues en este momento se está buscando dar una aplicación a las razones trigonométricas por medio de problemas que pudieran ser reales y que pueden ser representados en términos de triángulos rectángulos. Esto también implica comenzar a usar las razones trigonométricas para plantear ecuaciones.



ACTIVIDADES PROPUESTAS

EJERCITACIÓN

11. Halla el valor numérico de cada expresión.

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

b) $\tan\frac{\pi}{3} - \sec\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}$

c) $\cot\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cot\frac{\pi}{4}$

COMUNICACIÓN

12. Calcula los valores de *a* y *b* en los triángulos rectángulos de las figuras 2.10 y 2.11.

Figura 13. *Actividades propuestas en ángulos notables*

(p. 53)

En la secuencia de esta sección de definición de razones trigonométricas, representaciones y aplicaciones, se continúa con las aplicaciones de las razones trigonométricas, la sección cuarta del texto pasa a explicar en qué consiste "resolver un triángulo", interpretado como encontrar el valor de los 3 ángulos y la medida de todos sus lados, estableciendo que esto es posible siempre y cuando se conozcan: la longitud de dos de los lados del triángulo rectángulo o la medida de uno de sus ángulos agudos y la longitud de un lado. Describe que para resolver triángulos es necesario plantear ecuaciones que relacionen los lados y los ángulos, es allí donde se hacen necesarias las razones trigonométricas, por ello se resalta de nuevo la necesidad de la calculadora y que para trabajar con el valor obtenido es necesario realizar una "buena aproximación" de ese valor, aunque no otorga parámetros para lo que es considerado como "buena aproximación".

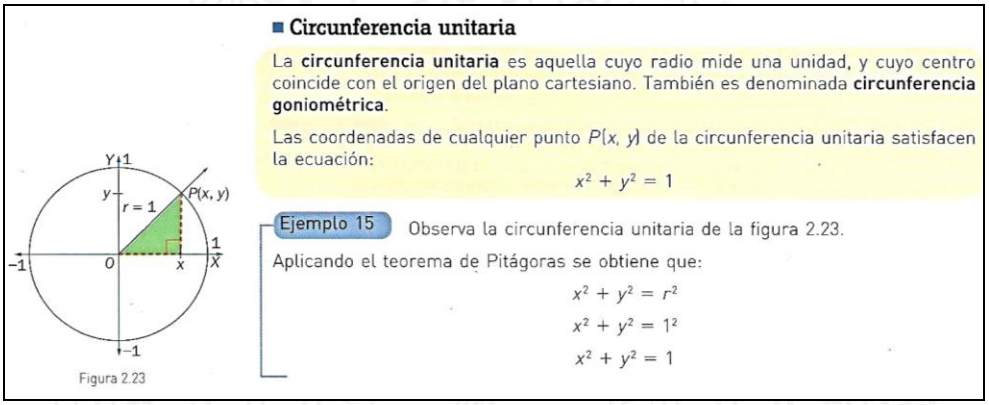
6.3.3 Conexiones presentes entre razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y función trigonométrica.

Cómo se ha descrito anteriormente, la visión que se le ha dado a las razones trigonométricas se ha desligado de todo componente variacional, pues se ha reducido la razón al cálculo de un cociente para operar con él de tal manera que se encuentre la solución a un enunciado determinado. En este sentido no se ha dado ningún indicio de otra posible representación de las razones trigonométricas pues aunque se ha trabajado con ayuda de la calculadora con las funciones trigonométricas inversas para encontrar el valor del ángulo teniendo el valor de la razón, esto se realizó sin prestar atención a lo que esto significaba.

Es importante resaltar el papel de la razón como comparación entre dos magnitudes pues la variación que aquí se presenta al modificar las longitudes del triángulo permite identificar patrones en las razones trigonométricas, los cuales pueden ser usados para adentrarse en el concepto de función.

6.3.4 Definición de razones trigonométricas la circunferencia unitaria.

En el texto se define circunferencia unitaria tal como aparece en la Figura 14, donde se liga la circunferencia unitaria con el plano cartesiano de dos dimensiones cuyos ejes son nombrados como x, y perpendiculares entre sí. Así mismo mediante un ejemplo se establece una correspondencia entre la ecuación de la circunferencia y el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia.



Circunferencia unitaria

La **circunferencia unitaria** es aquella cuyo radio mide una unidad, y cuyo centro coincide con el origen del plano cartesiano. También es denominada **circunferencia goniométrica**.

Las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia unitaria satisfacen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

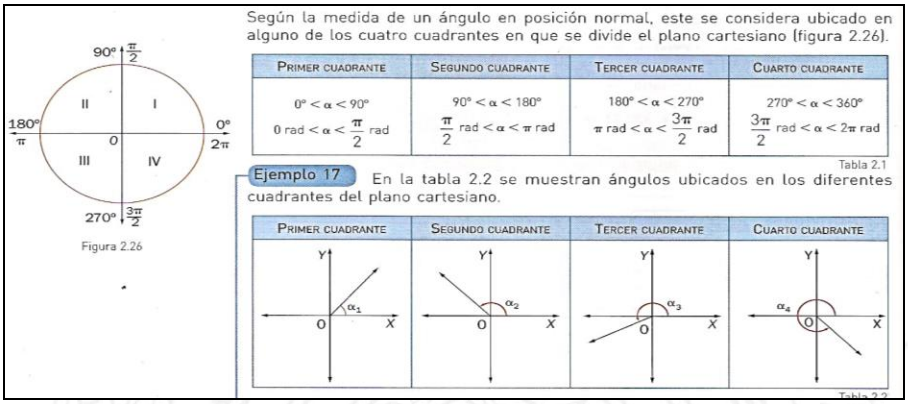
Ejemplo 15 Observa la circunferencia unitaria de la figura 2.23.

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = 1^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Figura 14. *Definición de la circunferencia unitaria*
(p. 58)

Después de esta definición se continua con los denominados ángulos en posición normal, donde se hace la distinción entre ángulo positivo y negativo ubicados sobre un plano cartesiano, lo que establece la necesidad de hablar de los cuadrantes del plano cartesiano, para ello se realizan dos tablas como se ve en la Figura 15. Donde se establece un rango de medida para los ángulos que pertenecen al primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante.


Según la medida de un ángulo en posición normal, este se considera ubicado en alguno de los cuatro cuadrantes en que se divide el plano cartesiano (figura 2.26).

Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
$0° < \alpha < 90°$ $0 \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$90° < \alpha < 180°$ $\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \pi \text{ rad}$	$180° < \alpha < 270°$ $\pi \text{ rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	$270° < \alpha < 360°$ $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < 2\pi \text{ rad}$

Tabla 2.1

Ejemplo 17 En la tabla 2.2 se muestran ángulos ubicados en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano.

Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante

Tabla 2.2

Figura 15. *Ángulos en posición normal*

(p. 58)

Ahora en correspondencia con la definición de razón trigonométrica se definen en la séptima sección las razones trigonométricas para un ángulo inscrito en la circunferencia unitaria (Figura 16). Esto con el fin de identificar la manera de encontrar el valor de la razón trigonométrica para un ángulo cualquiera. En esta definición se deja por fuera al triángulo rectángulo, ligando directamente el cociente de la razón trigonométrica al ángulo α, dejando un vacío conceptual respecto a la forma en que se han venido trabajando las razones trigonométricas hasta ahora, cabe preguntarse de donde surge esta definición, por qué ahora no se hace necesario de los lados del triángulo rectángulo y por qué cuando *x* o *y* están en el denominador deben ser diferentes de cero. No obstante esta forma de ver las razones trigonométricas permite trabajarlas relacionando coordenadas en el plano cartesiano.

Sea α un ángulo en posición normal cuyo lado terminal determina el punto $P(x, y)$ de la circunferencia unitaria (figura 2.30). Las razones trigonométricas para el ángulo α se definen de la siguiente manera:

$\text{sen}\alpha = y$ $\quad\quad$ $\cos\alpha = x$ $\quad\quad$ $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$, con $x \neq 0$

$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$, con $y \neq 0$ $\quad\quad$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{x}$, con $x \neq 0$ $\quad\quad$ $\text{cosec}\alpha = \dfrac{1}{y}$, con $y \neq 0$

Figura 16. *Definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria* (p. 60)

6.3.5 Representaciones de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria

La definición de la circunferencia unitaria, se presenta junto con una representación gráfica de la misma. Allí se puede observar una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano, junto con un triángulo rectángulo ubicado en el primer cuadrante. No obstante aunque se podría decir que la inserción del triángulo rectángulo podría ligar esto con lo que se ha trabajado hasta el momento. Este triángulo solo es usado para mostrar que cumple el teorema de Pitágoras. Tal definición no entra bien en la mecánica que se ha venido trabajando, pues se venía trabajando en la solución de problemas, lo que muestra la necesidad de realizar una articulación entre lo que se ha venido trabajando y esta nueva representación.

Más adelante, mientras se muestra en la definición de circunferencia unitaria en su representación gráfica de un triángulo rectángulo, ahora este triángulo queda en el olvido y se pasa a mostrar varios ángulos en posición normal ubicados en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano clasificándolos según su posición (Figura 15), llama la atención que en este caso la circunferencia unitaria usada para ejemplificar estos conceptos está ubicada sobre un plano que no tiene sus ejes nombrados, situación que podría generar confusión pues se sabe que no necesariamente un gráfico con dos ejes perpendiculares entre sí, pertenecen a la representación gráfica plano cartesiano.

En este momento cobra relevancia una descripción que permita al estudiante interpretar por qué los ejes coordenados están divididos en valores de ángulos en radianes y no en los ángulos medidos en el sistema sexagesimal. En la mayoría de los casos los estudiantes, asocian el plano cartesiano con los números reales, pues así lo ha trabajado en los cursos anteriores. De esta manera podría también prepararse el terreno para lo que más adelante será definido como el dominio y el rango de las funciones trigonométricas. Es importante establecer este tipo de articulación de los nuevos conceptos que ya posee el estudiante, pues así se podrá generar un aprendizaje más reflexivo y menos mecánico.

Luego se trabajan los ángulos coterminales y por medio de un ejemplo se muestra cómo se encuentran las coordenadas del punto de intersección entre el lado final del ángulo en consideración y la circunferencia unitaria. De esta manera se proponen una serie de ejercicios (Figura 17) que buscan que el lector ubique ángulos en la circunferencia unitaria, clasifique los ángulos según su posición y logre extraer las coordenadas del punto de intersección entre el lado final del ángulo y la circunferencia unitaria.

RAZONAMIENTO

23. Encuentra las coordenadas del punto P en el que α interseca a la circunferencia unitaria.

a) $\alpha = 0$ rad b) $\alpha = \pi$ rad

c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad d) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad

EJERCITACIÓN

24. Determina si los siguientes pares de ángulos son coterminales o no.

a) 1 000° y 280° b) 135° y −225°

c) $\frac{2\pi}{5}$ rad y $-\frac{2\pi}{5}$ rad d) $\frac{5\pi}{4}$ rad y $-\frac{3\pi}{4}$ rad

Figura 17. *Ejercicios sobre la circunferencia unitaria*

(p. 59)

Es importante mencionar que la definición entregada en la Figura 16, se hace sin ningún apoyo gráfico, sino que se entrega la representación matemática que se tendrá encuentra para encontrar el valor de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria, utilizando el ángulo α, el mismo que fue usado en las anteriores secciones en todos los ejemplos, lo cual podría llegar a generar un inconveniente pues en esta definición no se habla de triángulos.

Sin embargo, inmediatamente después de dar la definición, se pasa a un ejemplo (Figura 18), donde aparece una representación gráfica en la que se ubica un triángulo rectángulo en el primer cuadrante del plano cartesiano. De tal manera que su hipotenusa corta a la circunferencia unitaria en el punto P. En éste ejemplo se observa un intento por relacionar las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo anteriormente estudiadas con la reciente manera de definirlas, situación que tal vez podría esclarecer los interrogantes que deja su definición.

Ejemplo 21 En la figura 2.31 se muestra un ángulo α del primer cuadrante, en posición normal, cuyo lado terminal corta la circunferencia unitaria en el punto $P(x, y)$. Se observa que la proyección de P sobre el eje de las abscisas determina el triángulo rectángulo OMP.

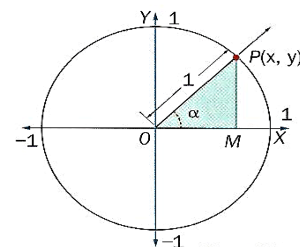


Figura 2.31

Recordando la definición de las razones trigonométricas y teniendo en cuenta que la hipotenusa $\overline{OP}$ del $\triangle OMP$ mide 1, se concluye que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{1} \qquad \cos\alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{x},\ \text{con } x \neq 0 \qquad \cot\alpha = \frac{OM}{MP} = \frac{x}{y},\ \text{con } y \neq 0$$

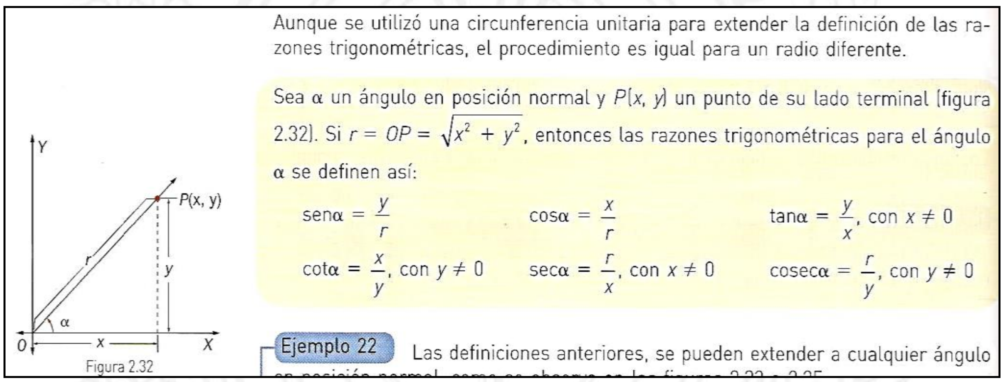
$$\sec\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{x},\ \text{con } x \neq 0 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{y},\ \text{con } y \neq 0$$

Figura 18. *Ejemplo de razones en la circunferencia unitaria.*

(p. 60)

Sin embargo, en este caso el ejemplo muestra una forma distinta a la entregada por su definición de circunferencia unitaria. Para encontrar las razones trigonométricas para el ángulo α, recurre a la primer definición de razones trigonométricas para hallar su valor. Parece ser que se pretende relacionar las definiciones de razones trigonométricas en triángulos con la definición de circunferencia unitaria. Sin embargo, se considera que se requiere de apoyo conceptual en el que puede jugar un papel relevante el concepto de razón, que permita indicar como al comparar estas coordenadas es posible llegar al mismo valor del cociente obtenido con el mismo ángulo en las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Contiguo al ejemplo de la Figura 18, se describe la generalización de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria a la circunferencia de radio *r*. Sin embargo, aunque se hable de una circunferencia, en la figura que se usa de referencia para su generalización no aparece graficada ninguna, en este caso mencionan un punto P(x, y) sobre el lado terminal de un ángulo en posición normal, lo que indica que ahora no se habla del punto de intersección entre el lado terminal del ángulo y la circunferencia, por ello ésta pasa a un segundo plano sin explicación alguna y se comienza a trabajar las razones trigonométricas como un cociente entre coordenadas o radio y coordenada.



Aunque se utilizó una circunferencia unitaria para extender la definición de las razones trigonométricas, el procedimiento es igual para un radio diferente.

Sea α un ángulo en posición normal y $P(x, y)$ un punto de su lado terminal (figura 2.32). Si $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces las razones trigonométricas para el ángulo α se definen así:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x},\ \text{con } x \neq 0$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y},\ \text{con } y \neq 0 \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x},\ \text{con } x \neq 0 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y},\ \text{con } y \neq 0$$

Ejemplo 22 Las definiciones anteriores, se pueden extender a cualquier ángulo

Figura 19. *Generalización de las razones a la circunferencia no unitaria* (p. 60)

Esto puede generar dificultades si se tiene en cuenta que tanto en la definición de la Figura 18 como la presentada en la Figura 19 usan la misma simbología para nombrar al punto de referencia. Es importante hacer énfasis en esto porque en ambas definiciones el punto P(x, y), no representa lo mismo. En la circunferencia unitaria este punto es el nombre que recibe la intersección del lado final del ángulo en cuestión con la circunferencia unitaria y en la Figura 19 indica un punto sobre el lado terminal del ángulo mencionado.

Para finalizar la unidad 2, se proponen ejercicios de reducción de ángulos al primer cuadrante, hallar lados desconocidos de triángulos y aplicaciones como hallar alturas de edificaciones.

6.3.6 Conexiones entre las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria y funciones trigonométricas.

Como se pudo ver en el análisis concerniente a las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria, este se vio ligado desde un inicio al plano cartesiano, lo cual es algo que es realmente útil para la representación gráfica de la función trigonométrica. Pero no se desarrolló un trabajo con la circunferencia unitaria que permitiera reconocer que existía una variación en la razón, aunque sí se mostró por medio de fórmulas como dos ángulos de medida diferente podían obtener el mismo valor en las razones trigonométricas.

No obstante, no se observan evidencias explicitas ni implícitas de que las razones trigonométricas puedan ser representadas por medio de funciones, aunque se podría decir que de cierta manera se han entregado muchos de los conceptos necesarios para desarrollar la próxima representación.

6.3.7 Definición de las funciones trigonométricas

El estudio de las funciones trigonométricas está enmarcado en la unidad 3, titulada Funciones Trigonométricas. En su primera página, el libro de texto se propone abordar lo que dejó de lado en la unidad pasada; el pensamiento variacional. Luego describe sus objetivos (Figura 20), realiza una breve reflexión sobre la voluntad y una resumida reseña histórica para desarrollar las competencias, para así comenzar con la primera sección.

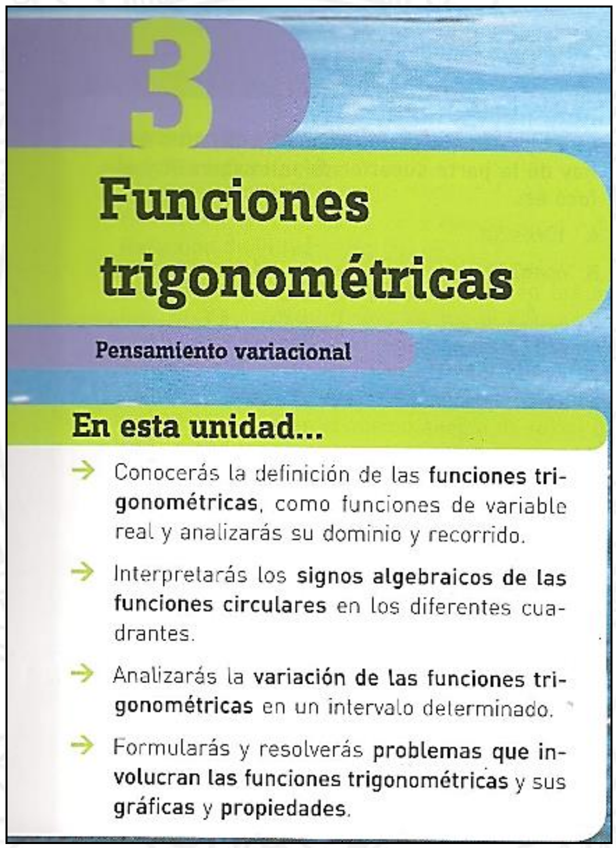

3
Funciones trigonométricas
Pensamiento variacional
En esta unidad...
Conocerás la definición de las **funciones trigonométricas**, como funciones de variable real y analizarás su dominio y recorrido.
Interpretarás los **signos algebraicos de las funciones circulares** en los diferentes cuadrantes.
Analizarás la **variación de las funciones trigonométricas** en un intervalo determinado.
Formularás y resolverás **problemas que involucran las funciones trigonométricas** y sus **gráficas** y **propiedades**.

Figura 20. *Objetivos de la unidad 3*
(p.82)

La unidad tres se encuentra dividida en siete secciones donde se presenta la forma de construir cada una de las funciones trigonométricas, en este caso solo se analizará la manera en que se presentan en forma general y cómo se muestra la función seno (primera sección de la unidad), pues se observa que las demás funciones se construyen de una manera muy similar.

Para comenzar a trabajar la temática de la unidad 3, se anuncia que para el desarrollo de ésta, es necesario tener presente lo estudiado en la unidad 2 y luego se presenta la definición que se muestra en la Figura 21. En esta se aprecia un cambio de notación, pues el ángulo que anteriormente se nombraba con letras griegas, el nombre de su vértice o con tres puntos, pasa a llevar el nombre de *x*. caso que contrasta con su inicial preocupación de tener en cuenta los temas estudiados en la unidad pasada, pues si se revisa la unidad 2 se encuentra que *x* corresponde a una de las coordenadas del punto P(x, y) perteneciente a la intersección entre la circunferencia unitaria y el ángulo en consideración. También como el valor de la función coseno en su presentación de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria. Por este tipo de posibles confusiones es necesario un apoyo conceptual que indique por qué ese cambio de denominación para el ángulo y se haga la salvedad de la diferencia que posee con la "*x*" con la "x" de la unidad pasada.

Para definir las funciones trigonométricas, también llamadas funciones circulares, y realizar un análisis detallado de las mismas, es necesario tener en cuenta las razones trigonométricas estudiadas en la unidad anterior, y considerarlas como funciones cuyos dominios son conjuntos de números reales. Es decir:

Si *x* es un número real, entonces la imagen de *x* mediante cualquier **función trigonométrica** es el valor de su correspondiente razón trigonométrica (si este existe), para un ángulo de *x* radianes.

Ejemplo 1 De acuerdo con la definición anterior, el valor del coseno del número real $\frac{3\pi}{4}$ es, exactamente, el coseno del ángulo $\frac{3\pi}{4}$ rad, es decir, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Figura 21. *Definición de función trigonométrica*

(p.84)

En la misma definición se observan algunos cabos sueltos con respecto a los orígenes de esta nueva forma de estudiar las razones trigonométricas. La manera en que se hace mención a su existencia trae consigo dudas como: ¿Cuándo existe la función trigonométrica?, además de que se indica que el valor de la función trigonométrica es el valor de su correspondiente razón trigonométrica, lo que implica una relación entre la razón y la función que hace que esto sea posible. No obstante, se verá más adelante que esta relación se ve como el resultado del cociente entre dos cantidades y se vuelve a dejar de lado la comparación que subyace en el concepto de razón, lo que está muy ligado a la variación que prometen estudiar en los objetivos de la unidad.

Este hecho de indicar que el valor de la función trigonométrica es el mismo valor de la imagen de la función, puede traer inconvenientes, pues si bien de cierta manera se podría ver una conexión con lo que se ha trabajado en la unidad pasada, podría generar que no se distinga entre razón trigonométrica y función trigonométrica, ya que el texto le otorga a ambas el mismo valor y no establece diferencias entre las representaciones.

6.3.8 Representaciones en las funciones trigonométricas

Al inicio de la primera sección se anuncia que para el desarrollo de esta unidad es importante que el estudiante tenga en cuenta los temas vistos en la unidad 2 y considerar las razones trigonométricas como funciones de dominio real. En este punto antes de abordar su definición es necesario preguntarse si en realidad el paso de cambiar la representación de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas es así de fácil como un cambio de consideración. No obstante luego de anunciar esto, se definen en forma general las funciones trigonométricas.

Después de esta definición general se procede a presentar al lector la función Seno (Figura 23), no sin antes realizar un llamado sobre lo que el lector debe tener en cuenta para abordar esta representación (Figura 22). Esto de nuevo contrasta con lo estudiado en la unidad pasada.

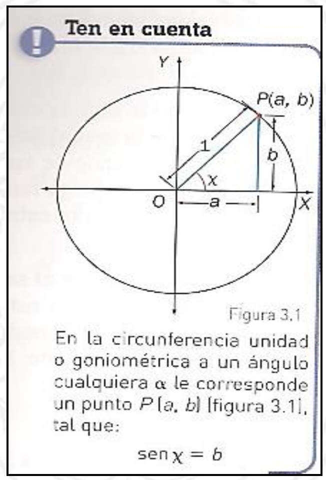
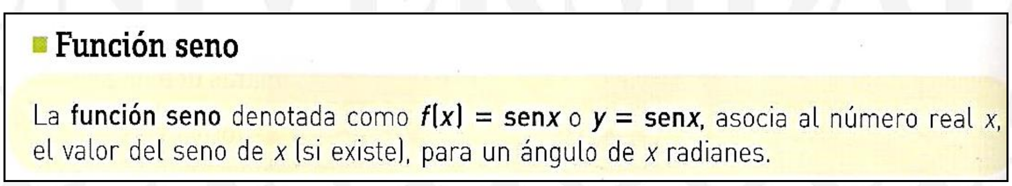


Figura 22. *Aspecto a tener en cuenta para abordar la función Seno*

(p.84)

Ahora el punto P que cumple exactamente la misma función que en la unidad 2 de ser el punto de intersección entre la circunferencia unitaria y el lado final del ángulo en consideración, deja de ser el punto P(x, y) y se convierte en P(a, b), deja esto la duda de si este cambio se da porque ahora la χ es usada para nombrar el ángulo.


Función seno

La **función seno** denotada como **$f(x)$ = sen$x$** o **y = sen$x$**, asocia al número real x, el valor del seno de x (si existe), para un ángulo de x radianes.

Figura 23. *Presentación de la función Seno*

(p.84)

A pesar de que en el recuadro que invita a tener en cuenta algunos aspectos se recurra de nuevo a las letras griegas para nombrar el ángulo, en la definición de la función seno se guarda correspondencia con su definición general para las funciones trigonométricas, nombrando el ángulo con una *x* (“x” cursiva), lo que de nuevo refleja una falta de coherencia con su simbología que puede generar problemas para el lector. En esta definición no se hace mención al ángulo, sino que se habla de una relación entre dos números reales en caso de que esta relación exista, sin embargo a pesar de esta aclaración no se dan parámetros para distinguir su existencia.

A continuación, se recuerda lo trabajado en la unidad pasada sobre la dependencia del cuadrante en que se ubique el ángulo en consideración con el signo algebraico que se le asocia (Figura 24). Además se menciona que este ángulo está inscrito en la circunferencia goniométrica, también llamada circunferencia unitaria, lo que llevaría a pensar si este signo algebraico solo se le asocia a los ángulos inscritos en tal circunferencia.

Como el valor del seno de un ángulo puede ser positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante en el que se ubica su lado terminal en la circunferencia goniométrica, entonces se deduce que:

Cuadrante	I	II	III	IV
Signo de sen x	+	+	−	−

Tabla 3.1

Para la función $y = \operatorname{sen} x$ se verifica que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$; es decir, es una función periódica cuyo periodo es $T = 2\pi$ y basta con tomar valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ para analizar su comportamiento.

Figura 24. *Signos de la función Seno según el cuadrante y el seno como función periódica*

(p.84)

En la misma figura, se dice que dado que la función seno satisface la relación $sen\ (x + 2\pi)$, es posible afirmar que se está en presencia de una función periódica cuyo período es 2π, de nuevo aparece un concepto que es de gran relevancia. La periodicidad de una función, en este caso una función trigonométrica y se da como si esto surgiera de la nada, aquí de nuevo podría entrar el concepto de razón para dar luces al lector sobre esta conclusión.

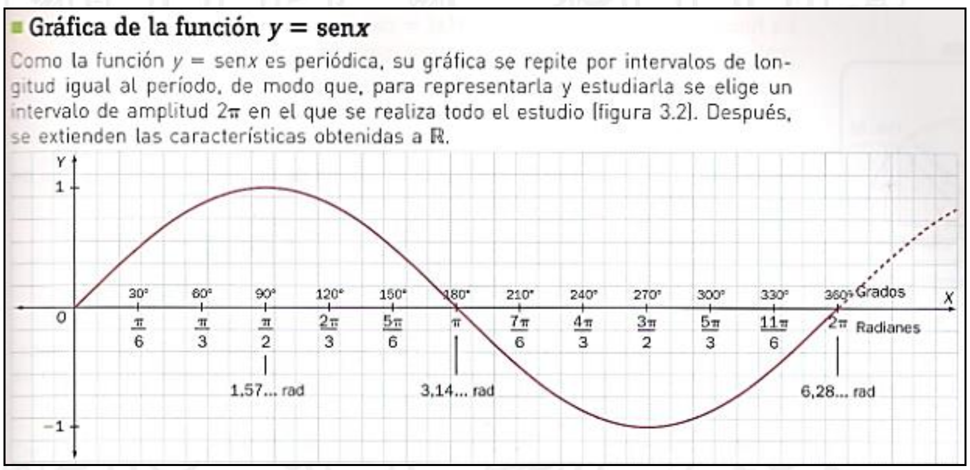
Con la aclaración de la periodicidad de la función seno se acota el intervalo que se debe analizar, así que se propone realizar una tabla (Figura 29) haciendo uso de la calculadora científica.

x (GRADOS)	x (RADIANES)	sen x
0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,5
60°	$\frac{\pi}{3}$	0,87
90°	$\frac{\pi}{2}$	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	0,87
150°	$\frac{5\pi}{6}$	0,5
180°	π	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	−0,5
240°	$\frac{4\pi}{3}$	−0,87
270°	$\frac{3\pi}{2}$	−1
300°	$\frac{5\pi}{3}$	−0,87
330°	$\frac{11\pi}{6}$	−0,5
360°	2π	0

Figura 25. *Tabla de valores de la función Seno*

(p.84)

Los datos que se encuentran consignados en la tabla de la Figura 25, son utilizados para ubicarlos en el gráfico de un plano coordenado y realizar la representación gráfica de la función seno tal como se puede ver en la Figura 26. Donde se ubican los puntos obtenidos y se unen con una línea continua que muestra la generalización del dominio de la función a todos los números reales. Cabe destacar como no se le da importancia a la forma en que se da el proceso de generalización del dominio de la función, sino que se da al lector como un hecho.


Gráfica de la función $y = \text{sen}x$

Como la función $y = \text{sen}x$ es periódica, su gráfica se repite por intervalos de longitud igual al período, de modo que, para representarla y estudiarla se elige un intervalo de amplitud 2π en el que se realiza todo el estudio (figura 3.2). Después, se extienden las características obtenidas a $\mathbb{R}$.

Figura 26. Gráfico de la función Seno
(p.85)

A partir de esta gráfica, el texto enuncia una serie de características que según él pueden ser extraídas de dicha gráfica, tales como: rango, dominio, periodo, amplitud, desfase, entre otras. Todas estas características son enunciadas sin realizar ningún apoyo en lo trabajado anteriormente sobre las razones dando la idea de que esta representación para las razones trigonométrica está aislada de lo estudiado en la unidad 2.

Al final de la unidad 3, se describe cómo las funciones trigonométricas, en especial las funciones seno y coseno son usadas para representar los problemas físicos de las Ondas mecánicas y electromagnéticas, lo que va en relación con lo planteado en los NTCM y lo planteado por el MEN, quienes advierten de la necesidad de que los estudiantes tengan conocimiento sobre los fenómenos que modelan las funciones trigonométricas. Además de que en la búsqueda de mostrar como las ondas son utilizadas en algunas profesiones, se da el ejemplo del electrocardiograma donde se pide hallar determinadas características de esta onda, no obstante aunque esto tiene que ver con ondas está muy poco relacionado con las funciones trigonométricas y sus aplicaciones.

6.3.9 Conexiones entre las funciones trigonométricas y las razones trigonométricas

Al inicio de la unidad se pudo leer en la Figura 25, cómo el texto anuncia la necesidad de tener en cuenta lo trabajado en la unidad pasada, no obstante, indica que ahora lo que se realizará es un cambio de consideración, sustituyendo la representación de razones trigonométricas por funciones de variable real, lo que lleva al texto en el transcurso de la unidad a propagar una sustitución de las “razones” por “funciones”, lo que de inmediato hace resaltar una falta de conexión entre ambas representaciones, pues la descripción de un simple cambio de consideración deja de lado toda articulación.

En este sentido resulta importante recalcar que este tipo de desarticulaciones produce que el estudiante y en ocasiones el docente termine por identificar que una temática no depende ni está relacionada con la otra, cosa que es totalmente falso en este caso pues como se ha mencionado repetidamente, con ayuda de la comparación que subyace en el concepto de razón está relacionada con la variación que está vinculada con la función.

Al culminar este ítem de análisis, es posible llenar con totalidad la tabla de la figura 1. Así en la figura 27 se muestra una breve síntesis de la información obtenida durante el análisis. Donde se muestran los principales resultados obtenidos, que dan cuenta de la problemática expuesta anteriormente y serán junto con la demás información recopilada motivo de reflexión en el próximo capítulo.

Categorías\Conceptos	**Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo**	**Razones trigonométricas en la circunferencia unitaria**	**Funciones trigonométricas**
Definición: Exposición exacta y clara del significado del concepto a estudiar.	Se confunden conceptos en sus definiciones, tales como: cociente y razón, distancia y longitud. Además, No hay claridad en su definición al omitir el cateto opuesto.	Falta claridad de las nuevas consideraciones al presentar confusión entre razón y cociente.	De nuevo se confunde cociente y razón. No se distingue entre “hallar la secante de un ángulo” y “hallar el valor de la secante de un ángulo”
Representaciones: los signos, símbolos e imágenes utilizadas para aproximarse al objeto matemático	Resultan ser confusas al presentar diversos cambios de notación dentro de la misma definición.	Se presentan grandes cambios de notación, y se le asocian diversos significados a un mismo objeto matemático, tal como sucede con el punto P.	Falta de claridad por el uso de la notación de anteriores representaciones pero con nuevos significados.
Conexiones: argumentos, frases, párrafos, imágenes que se utilicen para establecer algún tipo de relación entre las	Se deja de lado un tránsito basado en procesos de	No se relaciona esta forma de representar las razones	No se relaciona con las otras dos representaciones. Ya que la

razones y las funciones trigonométricas.	variación.	trigonométricas con la anterior, más aún si se tiene en cuenta que ahora se permite aplicar las razones trigonométricas a los ángulos que no podrían formar un triángulo rectángulo.	calculadora se convierte en el actor principal.

Figura 27. Síntesis de resultados obtenidos.

7 Reflexiones finales

En este apartado se presentan desde dos perspectivas, en la primera se exhiben algunas reflexiones que atiendan al objetivo de investigación y en las posibles respuestas a la pregunta de investigación y en la segunda perspectiva se presenta cómo se podría abordar las conexiones entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas.

7.1 Tránsito de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que ofrecen el libro de texto de décimo grado analizado

En lo descrito hasta aquí, se pudo evidenciar varias falencias y fortalezas del libro, pues si bien éste de alguna manera busca relacionar los conceptos con temáticas que podrían ser de la vida cotidiana de los estudiantes y mostró un continuo interés por utilizar las TIC como medio para ampliar los aprendizajes, recurriendo a un reiterativo llamado al uso de la calculadora, páginas web y apletts para ampliar los conocimientos e invitaciones para usar Cabri y Derive. Sin embargo se observó una tendencia a ser usadas como simples herramientas para solucionar problemas con mayor facilidad, sería más interesante ver algunas actividades que les dieran un papel más relevante en el proceso de aprendizaje a este tipo de herramientas, en esta dirección Trouche (2005) dice que la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no en “recursos que resuelven y solucionan” problemas de aprendizaje. Los artefactos deben contribuir en el desarrollo del pensamiento matemático, buscando generar en su mente una reorganización conceptual.

En cuanto al objetivo de investigación planteado: *Realizar un análisis de texto al libro Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10, con el fin de caracterizar el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que allí se ofrece.* Las características predominantes son los constantes cambios de notación inclusive dentro de la misma definición de razones trigonométricas, en los ejemplos y en los ejercicios propuestos por el texto. Además, se identificaron conceptos como *longitud y distancia, razón y cociente y por ultimo razón y función*, que fueron tomados como sinónimos, tal vez por la premura de ofrecer una explicación al lector.

Uno de los aspectos que resulta ser muy preocupante es la poca articulación de las diferentes representaciones para las razones trigonométricas, tales como razón entre longitudes en el triángulo rectángulo, razones entre distancias en la circunferencia unitaria y como funciones de variable real.

En cuanto a la pregunta de investigación *¿Cómo es el transito que se hace de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas que ofrece el libro de texto Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10?* Se podría insinuar que en particular en el texto analizado, se considera que el tránsito se hace en la definición de funciones trigonométricas, como se muestra en la figura 21. El tránsito es un cambio brusco de un término por otro, sólo se remplaza las razones por las funciones trigonométricas sin ninguna aclaración sobre las relaciones y las diferencias entre estas nociones matemáticas.

Se deja de lado un tránsito basado en procesos de variación, con el propósito de ofrecer a los estudiantes una construcción de significados y conexiones entre estas nociones. Pero no se puede esperar un tránsito entre nociones si se presentan dificultades en el estudio de cada una de ellas, como las inconsistencias que aquí se exhiben.

Lo anterior faculta tal estudio para decir que el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas debe realizarse articulando diferentes representaciones, teniendo en cuenta que se debe discernir entre función y razón, pues si en este caso ambos conceptos están relacionados, no representan lo mismo, por ello es necesario que así como se establece una articulación entre las representaciones, también se haga una reflexión que permita diferenciar conceptualmente entre ellas.

En ocasiones los docentes suelen apoyarse en un libro de texto sin cuestionarlo ni reflexionar sobre la forma en que este expone las temáticas, en esta dirección Rico, Lupiáñéz, Marín & Gómez (2007), afirman que se debe tomar el texto como un primer paso para la interpretación del conocimiento matemático y la preparación siguiente corre por cuenta del docente y sus habilidades. De tal manera que éste no trasmita directamente a sus alumnos el contenido que el libro presenta. Entonces, es importante que el docente como interprete subjetivo del texto, establezca estrategias que permitan articular las temáticas trabajadas cuando el libro de texto no establezca conexiones entre ellas y no asuma la forma de enseñar los contenidos tal cual lo presenta el texto, si no reflexionando sobre la forma más adecuada para representar las temáticas, atendiendo a las necesidades contextuales de sus estudiantes.

Así se puede ver cómo el análisis de texto en su rol de metodología de investigación, puede ser de ayuda no solo para los docentes sino también para las editoriales y demás actores relacionados con la creación y edición de este tipo de textos, no obstante, son los docentes quienes deben de poseer una mayor preocupación por la forma en que el texto expresa las temáticas y como se da esa aproximación al objeto matemático, de tal manera que en el proceso no se genere confusión en los estudiantes.

7.2 ¿Cómo se podrían relacionar las razones con las funciones trigonométricas?

Para realizar el paso de razones a funciones trigonométricas es necesario tener en cuenta el papel que juega los términos razón y función. El primero de ellos hace referencia a la comparación entre dos magnitudes expresada como “a es a b” o a:b, no obstante con la finalidad de hallar un valor numérico que pueda establecer la diferencia de tamaño entre a y b. La razón se suele expresar como a/b donde el cociente entre ambos tiene un significado cuyo origen se encuentra en la comparación de dos magnitudes. No obstante, como se pudo ver durante el análisis generalmente se recae en enaltecer el cociente que hace referencia al resultado de la división, lo cual lleva a dejar de un lado la comparación subyacente en la razón.

De esta manera cuando se presenten las seis razones trigonométricas, se debe aclarar a que hace referencia el término razones, de tal manera que durante su estudio se tenga presente que lo que se está haciendo es comparar magnitudes. Para que cuándo se determine cualquiera de las seis razones en triángulos semejantes se pueda hacer claridad de por qué se conserva el valor de la razón. De tal manera que se pueda indicar por qué es posible calcular las razones trigonométricas teniendo solo el valor del ángulo.

Entonces, por medio de la comparación entre las longitudes de los lados del triángulo, es posible identificar la variación del valor de la razón que se obtiene al modificar los valores de las longitudes del triángulo.

Después cuando se dé el cambio a la representación de las razones trigonométricas en el círculo unitario, es necesario involucrar el triángulo rectángulo inmerso en la circunferencia unitaria. Esto le daría un papel relevante al plano cartesiano, donde las razones trigonométricas no se relacionen directamente con el cociente entre coordenadas o coordenadas y el valor de la longitud de la hipotenusa, sino que se hable de distancias, resaltando por que se da el cambio de hablar de longitudes a distancias. Si bien para este caso estas dos coinciden en su valor numérico, conceptualmente llegan a poseer diferencias. Distancias que pueden ser halladas por medio de expresiones matemáticas, aunque en este caso se obtenga el valor de la coordenada donde se ubica el vértice coincide con la distancia entre dos vértices (a excepción de la hipotenusa), pues uno de sus vértices reposa en el origen, hay una diferencia conceptual relevante entre ambos sucesos.

En esta dirección, cuando se dé el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, es necesario hacer uso de ambas representaciones de las razones. Esto se logra involucrando el triángulo rectángulo en la circunferencia unitaria, en actividades donde se pueda observar la variación de la razón y cómo al ubicar estas variaciones en un plano cartesiano con uno de sus ejes dividido en radianes y otro en reales, haciendo la salvedad de que el valor del ángulo en radianes pertenece a los números reales. Este representa la longitud de arco que subtiende el ángulo, que aunque un ángulo también pueda ser medido en grados, lo que se está buscando es establecer una relación entre números reales, relación que se puede mostrar que cumple la condición necesaria para llamarse funciones.

Se considera que una de las actividades que se puede utilizar para realizar el paso entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas, puede realizarse haciendo uso de software de geometría dinámica. Realizar una construcción que relacione las tres maneras de representar el seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente, evidenciando que las aunque son diferentes representaciones están relacionadas entre sí y no son para nada aisladas.

Es importante también que los problemas que se usen para aplicar los conocimientos adquiridos en trigonometría, se adecuen al contexto de los estudiantes, pues la trigonometría también puede ser usada para resolver situaciones que les puedan ser útiles en su cotidianidad.

8 Referencias bibliográficas

Acevedo, F. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométrica* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

Barrios,M., Bermudez, D., Chamorro, A., Donaire, J., Fuentes, J., Galarza,R., Hernández,J., Moreno,M., Moriño, O., Parra, E., Pinzón, A., Roldán, D., Serrano,E., Sotero,F., Vaquero,D., Vizmanos,J. & Zamora, S (2012). *Matemáticas redes de aprendizaje para la vida 10, del proyecto Sé* (Libro de análisis). Editorial SM.

Brown, S.A. (2006b). The trigonometric connection: Students' understanding of sine an cosine. *Proceeding of the 30th PME International Conference, 1*, 1-228

Caballero. (2013). U*na transición de la geometría a la trigonometría, históricos de la astronomía como recurso didáctico en la utilizando problemas clase de matemáticas*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Colombia.

Campo, C. & Lasso, L. (2014). *Una secuencia didáctica en el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas: el caso de la función seno* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Colombia.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. Routledge, London. UK.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

De Kee, S., Mura, R. & Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. For the Learning of Mathematics 16 (2), 19 – 22

Fiallo. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis de Doctorado). Universidad de Valencia.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrance Erlbaum Associates.

Kendal, M., & Stacey, K. (1998). *Teaching Trigonometriy. Australian Mathematics Teacher.* Melbourne: University of Melbourne

Krippendorff, K., 1980. Content Analysis. An Introduction to its Methodology. The Sage Commtext Series, Sage Publications Ltd., London.

Martinez, G. (2012). *Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas es el nivel medio superior*. Revista latinoamericana de investigación en matemáticas educativa (2012) 15(1): 35-62

Ministerio de Educación Nacional (1994). *Ley General de Educación. Ley 115 del 8 de febrero de 1994*. Bogotá: MEN.

Muñoz, L. (2013). *El uso de la tecnología en la trigonometría, en algunos libros de texto para el grado* escolar décimo (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

Nelsen, Robert, B. (2000). Proofs without words ll: More exercises in visual thinking, The Mathematical Association of American Washington. Usa.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). National Council of Teachers of.Orjuela, I. (2011). Matemáticas y Música: Propuesta para el aprendizaje de la función trigonométrica Seno empleando instrumentos (Tesis de). Universidad distrital francisco José de Caldas, Colombia

Otte, M. (1997). What is a text?, en Christiansen, B., Howson, A.G., Otte, M. (eds). *Perspectives on mathematics education*, pp. 173-203. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. Reyes, X. (2009). *Resolución de problemas de trigonometría: estrategias de alumnos de educación secundaria* (Tesis de maestría), Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Rico, L., Lupiáñez, J., Marín, A., & Gomez, P. (2007). *Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación*. Comunicación presentada en VIII Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM (2007). Aravaca.

Rico, L. (2013). *El método del análisis didáctico.* Comunicación presentada en el VII congreso Iberoamericano de educación matemática (2013). Montevideo, Uruguay.

Rodríguez, A., & Cogollo, P. (2010). *Enseñanza de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulos y del ángulo doble por medio de las demostraciones sin palabras* (Tesis de pregrado), Universidad industrial de Santander, Colombia.

Rodríguez, H. (2016). *Coordinación de registros semióticos en la presentación de la periodicidad, el acotamiento y la conversión de unidades de las funciones trigonométricas seno y coseno. Análisis de texto* (trabajo de pregrado) Universidad del Valle, Colombia.

Rueda, G. (2012). *Aproximación a la enseñanza de las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas en el grado décimo* (Tesis de pregrado), Universidad del Valle, Colombia.

San Martín, O., & Soto, J. (2007). Construcción de Significados para las Razones Trigonométricas Mediante un Aparato Virtual Diseñado con Cabri. *XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas–Universidad de Sonora. México.*

Trouche, L. (2005). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin, y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique* (pp. 187-214). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Webber, K. (2005). *Student's Understanding of Trigonometric Functions*. New Brunswick Mathematics Education Research.