

**CUANTIFICACIÓN DE LA FUERZA:
UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ESTE CONCEPTO EN EL
NIVEL UNIVERSITARIO**

**ROBERTO LORDUY GÓMEZ
JOSÉ DAVID RINCÓN CUÉLLAR**

**Monografía para optar al título de
Especialista en Educación en Ciencias Experimentales
Enfasis en enseñanza de la física desde una perspectiva Histórico-
Epistemológica**

Asesor

**Ángel Romero Chacón
Profesor Facultad de Educación
Universidad de Antioquia**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
2002**

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Alonso Sepúlveda Soto

Rodrigo Covaleta

Medellín 14 de noviembre de 2002

CONTENIDO

	Pág.
LISTA DE TABLAS	i
LISTA DE FIGURAS	i
RESUMEN	ii
INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVOS	3
1. REVISIÓN DEL CONCEPTO DE FUERZA EN LOS TEXTOS TRADICIONALES DE FÍSICA	4
1.1. FORMA USUAL COMO SE PRESENTA EL CONCEPTO FUERZA.	4
1.2. PAPEL QUE JUEGA LA EXPERIMENTACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN E INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE FUERZA.	8
1.3. FORMAS CÓMO SE INTERPRETA EL CONCEPTO DE FUERZA.	10
1.4. CUANTIFICACIÓN DE FUERZAS.	12
1.5. IDEAS DEL CONCEPTO DE FUERZA EN EL ESTUDIANTE.	15
1.6. REFLEXIONES A LA FORMA TRADICIONAL COMO SE ABORDA EL CONCEPTO DE FUERZA.	18
1.7. INTERVENCIÓN ESTRATÉGICA.	19
2. LA FUERZA DESDE LAS INTERACCIONES.	21
2.1 INTRODUCCIÓN.	21
2.2 PRINCIPIOS DE CONSERVACIÓN EN LAS COLISIONES.	22
2.3. FORMA TRADICIONAL COMO SE ABORDA LA SEGUNDA LEY DE NEWTON EN LAS COLISIONES Y SU RELACIÓN TEMPORAL.	25
2.4. LA SEGUNDA LEY DE NEWTON DESDE LAS DEFORMACIONES EN LOS TEXTOS TRADICIONALES Y SU RELACIÓN ESPACIAL.	29
2.5. EL CONCEPTO DE FUERZA DESDE LAS INTERACCIONES EN LEONHARD EULER.	35
2.6. EL CONCEPTO DE FUERZA DESDE LAS INTERACCIONES EN NEWTON.	47
3. CUANTIFICACIÓN DE MAGNITUDES FÍSICAS.	55
3.1. INTRODUCCIÓN	55
3.2. MEDICIÓN DE FUERZAS EN FORMA TRADICIONAL.	56
3.3. CRITERIOS PARA LA MEDICIÓN DE VARIABLES EXTENSIVAS.	58
3.4 CRITERIOS PARA LA MEDICIÓN DE VARIABLES INTENSIVAS.	61
3.5. MEDICIÓN DE FUERZAS.	64
3. 6. COMPORTAMIENTO DE MEDIOS ELÁSTICOS Y CONTRASTACIÓN CON LA LEY DE HOOKE.	67
3.7. ANÁLISIS A LAS PREGUNTAS DEL TALLER 3.	70

3.8. ORDENACIÓN DE FUERZAS DESDE LAS INTERACCIONES Y ESTABLECIMIENTO DE LA UNIDAD PATRÓN.	72
3.9. CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN CUERPO.	77
4. TALLERES COMO ESTRATEGIAS PARA LA FORMALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FUERZA.	83
4.1. METODOLOGÍA DE TRABAJO DESARROLLADA EN LOS TALLERES.	83
4.2. INTENCIÓN DE LOS TALLERES.	84
4.3. TALLER 1: IDENTIFICACIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO DESDE LAS COLISIONES.	87
4.4. TALLER 2: GUÍA PARA EL ORDENAMIENTO DE FUERZAS.	92
4.5. TALLER 3: CARACTERÍSTICAS QUE DEBE TENER UN MEDIO ELÁSTICO PARA MEDIR FUERZAS.	96
CONCLUSIONES.	98
BIBLIOGRAFÍA.	101

LISTA DE TABLAS

	Pag.
Tabla 1. Tablas de contenidos de textos tradicionales para los cursos introductorios de física a nivel universitario	5
Tabla 2. Tablas de contenidos de textos tradicionales para los cursos introductorios de física a nivel universitario	6

LISTA DE FIGURAS

	Pag.
Figura 1.1. Fuerza y aceleración sobre un cuerpo m	8
Figura 2.1. Colisión rectilínea de los cuerpos A y B	25
Figura 2.2. t_c : instante de contacto y t_f instante de separación.	26
Figura 2.3. Fuerzas horizontales que actúan sobre un cuerpo m .	29
Figura 2.4. Interpretación propuesta por Euler para analizar el origen de las fuerzas.	40
Figura 2.5. Comparación de distancias de los puntos A y B para $t=0$ y durante la interacción para los puntos a y b en un tiempo posterior t	41
Figura 2.6. Diagrama de Newton para sus experimentos con el péndulo.	49
Figura 3.1. Varillas rectas y rígidas de diferentes longitudes.	60
Figura 3.2. Cuerdas diferentes bajo la misma tensión.	64
Figura 3.3. Diagrama de Esfuerzo – Deformación, para un medio dúctil sometido a tensión.	68
Figura 3.4. Diagrama Esfuerzo – Deformación del caucho vulcanizado, mostrando histéresis elástica.	69
Figura 4.1. Deslizador sobre un riel de aire sin fricción en forma	87
Figura 4.2. Vista General del experimento.	92

RESUMEN

Tradicionalmente los contenidos en el nivel universitario se organizan alrededor del concepto de fuerza. Una revisión al texto de Leonhard Euler: *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia* y del texto de Isaac Newton: *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural I*, libro I, ayuda a la construcción del concepto de fuerza desde las interacciones y su posible cuantificación desde una perspectiva espacial y temporal.

La cuantificación de las fuerzas en estas perspectivas exige explicitar los procesos por los cuales se asigna un único número a un valor o intensidad particular de fuerza; procesos que contribuirán a la construcción del concepto de fuerza y su enseñanza. Finalmente se proponen estrategias para asumir el proceso de cuantificación de algunas magnitudes físicas como: la cantidad de movimiento y la fuerza a partir de las interacciones.

INTRODUCCIÓN

Los cursos introductorios de física a nivel universitario tienen como objetivo principal, dar a conocer los fundamentos de la mecánica clásica y desarrollar en estudiantes el conocimiento de los fenómenos físicos, los conceptos y métodos de trabajo que constituyen la física clásica. Entre dichos fenómenos podemos destacar: la caída libre, el movimiento de proyectiles, choque de partículas abordadas a la luz de conceptos como: velocidad, aceleración, fuerza, masa, energía, momentum y otros desarrollos propuestos por Galileo Galilei e Isaac Newton. Y así propiciar una comprensión y apreciación del pensamiento físico contemporáneo.

Tradicionalmente los contenidos se organizan alrededor del concepto de fuerza. Un análisis de la forma como se presenta este concepto es de utilidad para percatarse de la forma usual como se presenta, el papel que juega la experimentación en su construcción e interpretación, las formas de cómo se interpreta y los procedimientos y análisis adelantados para su posible cuantificación.

Una revisión al texto de Leonhard Euler: *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, nos permite encontrar el origen de las fuerzas a partir de las interacciones y su posible cuantificación desde una perspectiva espacial. Igualmente una revisión del texto de Isaac Newton: *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural I*, libro I, ayuda a la construcción del concepto de

fuerza desde las interacciones y su posible cuantificación desde una perspectiva temporal.

La cuantificación de las fuerzas en estas perspectivas exige explicitar los procesos por los cuales se asigna un único número a un valor o intensidad particular de fuerza; procesos que contribuirán a la construcción del concepto de fuerza y su enseñanza.

Finalmente se proponen estrategias para asumir el proceso de cuantificación de algunas magnitudes físicas como: la cantidad de movimiento y la fuerza a partir de las interacciones.

OBJETIVOS

La propuesta de trabajo se enfoca básicamente en los siguientes objetivos:

- ◆ Revisar el concepto de fuerza bajo los análisis de autores como Isaac Newton y Leonhard Euler, lo que permite reflexionar sobre el desarrollo histórico y epistemológico del concepto para su organización y matematización.
- ◆ Diseñar talleres como estrategias didácticas para la enseñanza del concepto de fuerza en su proceso de matematización y situaciones problémicas en torno al concepto de fuerza.
- ◆ Identificar el proceso de organización como elemento esencial en la cuantificación de la fuerza.

Capítulo 1

Revisión del concepto de fuerza en los textos tradicionales de Física.

1.1. Forma usual como se presenta el concepto fuerza

Una de las formas tradicionales de abordar los cursos introductorios de física, es el considerar el movimiento de una partícula en términos de su posición, velocidad y aceleración donde es primario preguntarse *¿cómo se mueven los cuerpos?* aspecto que corresponde al estudio de la cinemática y seguidamente preguntarse *¿qué causa el movimiento de estos cuerpos?* aspecto que corresponde a la dinámica.

Lo anterior lo podemos apoyar en autores clásicos de los textos de física tales como: Serway¹, Halliday², Sears³, Alonso y Finn⁴, etc, quienes muestran una secuencia lineal de conceptos, en los cuales se parte de unos conceptos primitivos hacia otros conceptos generales, es decir, se establece un orden escalonado desde lo más específico a lo más general. En el caso particular de la cinemática, su estudio empieza con el desplazamiento, la velocidad media, la velocidad instantánea, la aceleración media, la aceleración instantánea y fenómenos como caída libre y movimiento de cuerpos en dos dimensiones. Los siguientes cuadros corresponden a la tabla de contenidos de los cuatro textos antes citados:

¹ Raymond A. Serway, Física Tomo I, quinta edición., Editorial McGraw-Hill, 2000.

² Resnick Robert, Halliday David and Krane Kenneth, Física Volumen I, Cuarta edición, Editorial CECSA, 1995.

³ Sears, Francis W., Zemansky, Mark W., Young, Hugh D. and Freedman Roger A. Física Universitaria, Novena edición, Editorial Adisson Wesley Longman. 1996.

⁴ Alonso, Marcelo y Finn, Edward J., Física, Editorial Adisson-Wesley Iberoamericana. Massachusetts 1992.

<p>Física Tomo I Cuarta edición Raymond A. Serway</p>	<p>Física Volumen I Cuarta edición Resnick, Halliday and Krane</p>
<p>Contenidos: Movimiento en una dimensión: Desplazamiento, velocidad y rapidez. Velocidad instantánea y rapidez Aceleración Movimiento unidimensional con aceleración constante. Objetos que caen libremente. Ecuaciones cinemáticas derivadas del cálculo.</p> <p>Movimiento en dos dimensiones: Los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración. Movimiento bidimensional con aceleración constante. Movimiento de proyectiles. Movimiento circular uniforme. Aceleración tangencial y radial Velocidad y aceleración relativa. Movimiento relativo a altas velocidades.</p> <p>Leyes del movimiento: El concepto de fuerza. Primera ley de Newton y marcos de referencia inerciales. Masa inercial. Segunda ley de Newton. Peso. Tercera Ley de Newton. Algunas aplicaciones de las leyes de Newton. Fuerzas de fricción.</p>	<p>Contenidos: Movimiento unidimensional: Cinemática de la partícula. Descripciones del movimiento. Velocidad promedio. Velocidad instantánea. Movimiento acelerado. Movimiento con aceleración constante. Cuerpos en caída libre. Galileo y la caída libre. Medición de la aceleración en caída libre.</p> <p>Movimiento dimensional y tridimensional: Posición, velocidad y aceleración. Movimiento con aceleración constante. Movimiento de proyectiles. Movimiento circular uniforme. Vectores de velocidad y aceleración en el movimiento circular. Movimiento relativo.</p> <p>Fuerza y leyes de Newton: Mecánica clásica Primera ley de Newton. Fuerza. Masa Segunda ley de Newton Tercera ley de Newton. Unidades de fuerza. Peso y masa Mediciones de fuerza Aplicaciones de las leyes de Newton</p>

Tabla 1. Tablas de contenidos de textos tradicionales para los cursos introductorios de física a nivel universitario.

<p>Física Universitaria Novena edición</p>	<p>Física Volumen I Mecánica:</p>
---	--

Sears, Zemansky, Young and Freedman	Marcelo Alonso y Edward J. Finn
<p>Contenidos:</p> <p>Movimiento a lo largo de una línea recta:</p> <p>Introducción. Desplazamiento, tiempo y velocidad media. Velocidad instantánea. Aceleración media e instantánea. Movimiento con aceleración constante. Cuerpos en caída libre. Velocidad y posición por integración.</p> <p>Movimiento en dos o tres dimensiones:</p> <p>Introducción Vectores de posición y velocidad. El vector aceleración. Movimiento de proyectiles. Movimiento en un círculo. Velocidad relativa.</p> <p>Leyes de Newton del movimiento:</p> <p>Introducción Fuerza e interacciones. Primera ley de Newton. Segunda ley de Newton. Masa y Peso. Tercera Ley de Newton. Empleo de las leyes de Newton. Visualización de diagramas de cuerpo libre. Aplicaciones de las leyes de Newton</p>	<p>Contenidos:</p> <p>Cinemática:</p> <p>Introducción Movimiento rectilíneo: velocidad aceleración, representación vectorial de la velocidad y la aceleración en el movimiento rectilíneo, Movimiento curvilíneo: Descripciones del movimiento: Velocidad, aceleración. Movimiento bajo aceleración constante. Componentes tangencial y normal de la aceleración. Movimiento circular: Velocidad angular Aceleración angular Movimiento curvilíneo general en el plano:</p> <p>Dinámica de una partícula</p> <p>Introducción La ley de Inercia Momentum lineal. Principio de la conservación del momentum. Redefinición de la masa. Segunda y tercera leyes de Newton. Concepto de fuerza. Crítica del concepto de fuerza. Unidades de fuerza. Fuerzas de fricción. Fuerzas de fricción en fluidos. Sistemas con masas variables. Movimiento curvilíneo. Momentum angular. Fuerzas centrales. Equilibrio y reposo.</p>

Tabla 2. Tablas de contenidos de textos tradicionales para los cursos introductorios de física a nivel universitario.

En estos contenidos se muestra a la fuerza como un concepto que estructura y enlaza a otros conceptos físicos como: espacio, tiempo, velocidad,

aceleración y masa, conservando una secuencia desde conceptos específicos hacia conceptos generales.

Una vez estudiadas las descripciones cinemáticas de la caída libre y el movimiento de proyectiles se aborda la dinámica, en donde es necesario atender a las causas de los cambios de movimiento. Usualmente se utilizan los conceptos de fuerza y masa para describir el cambio en el movimiento de partículas y luego se estudian las tres leyes básicas del movimiento, que están fundamentadas en *observaciones experimentales* y en las formulaciones hechas por Isaac Newton. Como aparece en el texto de Serway.

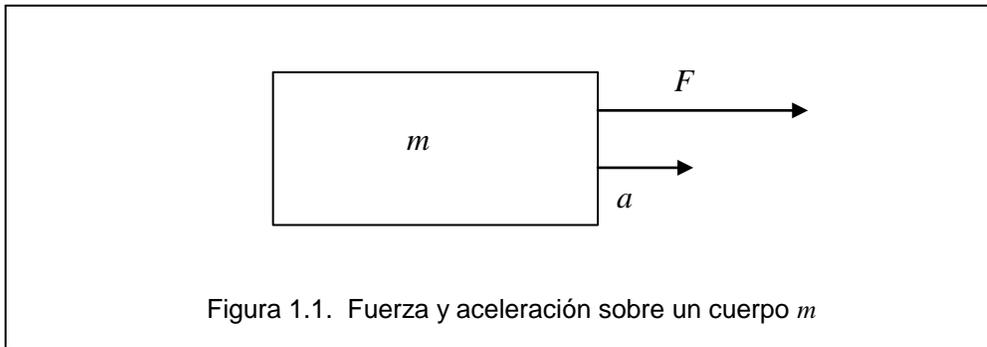
“La primera ley de Newton explica lo que ocurre a un objeto cuando la resultante de todas las fuerzas sobre él es cero: permanece en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante. La segunda ley de Newton responde a la pregunta de lo que sucede a un objeto que tiene una fuerza resultante diferente de cero actuando sobre él. Imagine que empuja un bloque de hielo sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando usted ejerce alguna fuerza horizontal F , el bloque se mueve con cierta aceleración a . Si se aplica una fuerza dos veces mayor, la aceleración se duplica. Del mismo modo, si la fuerza aplicada aumenta a $3F$, la aceleración se triplica, etcétera. A partir de estas *observaciones*, concluimos que *la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre él.*”⁵

En el texto de física fundamental de Michel Valero se enuncia la segunda ley de Newton de la siguiente forma:

“*Si ahora hacemos actuar una fuerza sobre el cuerpo, él será, por tanto acelerado.*”

⁵ Serway, Raymond, Tomo I, op. cit. pp. 112.

La *experiencia muestra* que la aceleración a que experimenta un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza F y en la misma dirección, o sea que $F=ma$ ⁶.



La estructura presentada por estos autores *parece satisfacer* la derivación de conceptos fundamentales, principios y leyes del movimiento en continua sucesión, por medio de secuencias deductivas. No obstante, se puede preguntar: ¿será que las leyes de Newton se deducen de la experiencia?. Además un chequeo riguroso de estos textos muestra la dificultad de abordar el concepto de fuerza ya que no se tiene previamente definido lo que es masa y se cae en círculos en los que fuerza y masa se complementan en su definición, es decir, se define fuerza en términos de masa y masa en términos de fuerza, sin establecerse un significado independiente para cada uno de ellos.

1.2. Papel que juega la experimentación en la construcción e interpretación del concepto de fuerza

De acuerdo con la secuencia anterior, las leyes de Newton están establecidas en términos de los conceptos de fuerza y masa. Sin embargo se presenta un gran dilema ya que fuerza y masa son dos conceptos definidos por las propias leyes de Newton. ¿Es posible abordar y

⁶ Valero M. Física 1. Editorial Norma. pp. 85.

comprender las leyes de Newton sin tener claro primero qué es masa y fuerza? ¿Cómo podemos definir los conceptos de fuerza y masa sin haber establecido antes las leyes de Newton?. La forma de abordar estas preguntas en los textos tradicionales, nos muestra que se define masa y fuerza en forma cualitativa, apoyados en la *experiencia cotidiana*, y bajo estas nociones intuitivas se establecen las leyes de Newton; después de introducir las leyes de Newton se formalizan las definiciones de masa y fuerza.

Además de las citas anteriores, las siguientes muestran el papel que juega la experiencia y la observación en la determinación del concepto de fuerza:

“Los *experimentos* muestran que si se aplica a un cuerpo una combinación de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$, el cuerpo tendrá la misma aceleración (magnitud y dirección) que si se aplicará una sola fuerza igual a la suma vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$ es decir, el principio de superposición de las fuerzas también se cumple cuando la fuerza neta no es cero y el cuerpo se está acelerando.”⁷

“La *experiencia* cotidiana nos da una respuesta cualitativa. La misma fuerza producirá aceleraciones diferentes sobre cuerpos diferentes... A partir de estas *observaciones* parece que, para una fuerza dada, cuanto más grande sea la masa menor será la aceleración. Más precisamente, concluimos de tales experimentos que la aceleración producida por una fuerza dada es inversamente proporcional a la masa que es acelerada.”⁸

“A partir de nuestras *experiencias cotidianas* todos comprendemos, así sea de una manera simple, el concepto de fuerza. Cuando se empuja o se jala un objeto se aplica una fuerza sobre él.”⁹

⁷ Sears Francis W., Zemansky Mark W., Young Hugh D. and Freedman Roger A. Física Universitaria. Op cit pp. 101. La cursiva es muestra.

⁸ Resnick Robert, Halliday David and Krane Kenneth, Física Volumen I, Op. cit pp. 91. La cursiva es nuestra.

⁹ Serway, Raymond, op cit. pp. 106. La cursiva es nuestra.

En las anteriores citas el papel asignado a la experiencia y a la observación en la interpretación del concepto de fuerza juegan un papel importante, pues describen la relación entre el movimiento de un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él. En estos textos la idea de fuerza, y en particular la segunda ley de Newton, supuestamente se obtiene empíricamente. Estas ideas están fundamentadas en la ilusión de llegar a la teoría de manera directa a partir de la experiencia y la observación en la cual se acomodan los datos para lograrlo, como sucede cuando se calcula la constante elástica de un resorte, suspendiendo cuerpos de diferente masa del extremo del resorte, y en la que si no se obtiene una recta, se les pide a los estudiantes una linealización. ¿Será este un procedimiento adecuado para llegar a la teoría? de otra parte se pretende aislar una ley de la mecánica del resto de la mecánica como si en los fenómenos mecánicos se presentaran leyes aisladas, es decir, tratar de separar una ley del resto del sistema es de por sí destruir al sistema mismo y quitarle significado a la ley en particular. Esta concepción niega al lector como individuo pensante y se pretende que vea lo que el autor quiere que vea.

1.3. Formas cómo se interpreta el concepto de fuerza

Los textos usualmente abordan el concepto de fuerza considerando que puesto que sólo una fuerza puede producir un cambio en la velocidad, la fuerza es aquello que ocasiona que un cuerpo se acelere, es decir, un cuerpo acelera debido a *una fuerza externa* (Serway, 2000:114).

En los textos clásicos antes citados la fuerza representa la *interacción* del objeto con su medio, mientras que la masa es una medida de la inercia del objeto, es decir, es una medida cuantitativa de la resistencia de un cuerpo a la aceleración producida por una fuerza dada. Lo anterior lo podemos ver en el texto de Sears:

“El concepto de fuerza nos da una descripción cualitativa de la interacción entre dos cuerpos o entre un cuerpo y su entorno”¹⁰.

El significado de estas leyes físicas representa alguna forma de conocimiento real y se puede preguntar ¿cuál es el significado de la ley de Newton que escribimos como $F=ma$? ¿Cuál es el significado de fuerza, masa y aceleración?

Usualmente el significado de masa se asume intuitivamente y previamente se define la aceleración en la cinemática, bajo las relaciones de espacio y tiempo. Si nos detenemos en el concepto de fuerza encontramos bajo la concepción newtoniana que si un cuerpo está acelerando, entonces una fuerza actúa sobre él; relación traducida en los textos clásicos de hoy como: fuerza es la masa de un objeto multiplicada por la aceleración.

Pero podríamos también definir la fuerza diciendo que un objeto en movimiento sobre el cual no actúan fuerzas continúa moviéndose con velocidad constante en línea recta, de manera tal que si tal objeto no se mueve en línea recta con velocidad constante se puede decir que sobre él actúa una fuerza.

Esta forma de abordar el concepto de fuerza no ayuda a la construcción de su adecuada significación, puesto que son definiciones que van en círculo vicioso y porque la forma como ocurren las interacciones entre los cuerpos es algo que queda completamente fuera de toda definición.

¹⁰ Sears Francis W., Zemansky Mark W., Young Hugh D. and Freedman Roger A. Física Universitaria. Op. cit pp. 93.

El contenido de las leyes de Newton supone que la fuerza tiene algunas propiedades independientes¹¹, distinta a la presentación $F=ma$ pero tales propiedades no son descritas totalmente por los textos clásicos; por lo tanto asumir la fuerza simplemente como el producto de la masa por la aceleración es incompleta y es necesario asumir las propiedades o características de la fuerza como por ejemplo, que la fuerza tiene su origen en la impenetrabilidad de los cuerpos.

¿Cómo construir el concepto de fuerza y cómo construir el concepto de masa en forma independiente y no desde la intuición como se hace tradicionalmente?. Responder a estas preguntas implica asumir la fuerza como una magnitud no derivada de otras o asumir que la fuerza es sólo un nombre para una magnitud física que surge en las interacciones.

1.4. Cuantificación de fuerzas

En algunos textos, la fuerza se determina a través de la medida de la aceleración impartida a un cuerpo estándar jalando de él con un resorte estirado; este método es denominado método dinámico para la medición de fuerza (Halliday, 1995:99). Otro método para medir fuerza se basa en la medición del cambio de forma o de tamaño de un cuerpo (resorte) sobre el cual se aplica la fuerza cuando el cuerpo no es acelerado, este método se denomina estático en la medición de fuerzas (Halliday,1995:99).

El autor plantea una equivalencia entre la fuerza medida estática y dinámicamente lo cual significa que la masa en reposo es equivalente a la masa en movimiento, pero el concepto de masa desempeña dos papeles un tanto distintos en mecánica. Por un lado el peso de un cuerpo (La fuerza

¹¹ como ocurre con la tensión que es de tipo intensivo, ya que no depende de la extensión del cuerpo.

gravitatoria sobre él) es proporcional a su masa gravitatoria¹² y por otro lado se llama masa inercial a la propiedad inercial que aparece en la segunda ley de Newton en la que la masa es una medida cuantitativa de la inercia, de esta forma se supone que la masa no cambia con la velocidad. Bajo estas dos perspectivas presentadas por el autor no existiría diferencia entre masa inercial y masa gravitatoria.

En Física general I (Serway, 2000:108) se utiliza el resorte como medio para medir fuerza, es decir, el resorte representa el mecanismo para resolver el problema en la medición de fuerza, donde se procede con la calibración bajo una fuerza patrón que produce una elongación x , como aparece en la siguiente cita:

“si se aplica una fuerza unitaria F_1 , como la fuerza que produce una elongación de 1cm . Si se aplica una segunda fuerza F_2 cuya magnitud es 2 unidades, la elongación de la balanza es 2cm ”¹³.

La forma de cuantificación de fuerza mostrada en este texto se basa en la identificación de una unidad patrón para calibrar diversos instrumentos de medida, pero en ningún momento se muestran procedimientos y reglas para llegar a establecer esta unidad patrón, es decir la unidad patrón es arbitraria. Por otro lado se asume de entrada que el estiramiento del resorte es lineal con la fuerza aplicada, es decir, se quiere hacer ver sin un análisis previo que tal instrumento de medida o resorte obedece a una proporcionalidad entre la fuerza y la elongación, cuando es posible mostrar que un instrumento de medición de fuerza no tiene que ser necesariamente lineal, con tal que obedezca una función conocida. Tampoco se analiza lo que sucede en la medición de fuerza cuando se agregan masas o cuando se

¹² Masa gravitatoria tiene como característica ejercer una acción sobre otra y bajo esta perspectiva el peso inercial de un cuerpo es diferente al peso gravitacional.

¹³ Serway, Raymond, op cit. pp. 108.

quitan masas, es decir, no se analiza si el comportamiento del medio elástico obedece a la misma función agregando masas o quitando masas. Por otra parte este autor asume valores arbitrarios de elongaciones para distintas fuerzas, es decir, el problema de cuantificación de fuerza estaría resuelto de entrada con la simple asignación de números, cuando el problema de cuantificación de fuerzas es un proceso mucho más riguroso. Finalmente no sabríamos qué es lo que se está midiendo, si la fuerza que hace la Tierra sobre la masa que pende del resorte o la fuerza que hace el resorte sobre la masa.

Se define a la fuerza como la causa de los cambios del movimiento, es decir, de la aceleración, lo cual significa que la fuerza existe antes del movimiento y es independiente de él o de las interacciones mismas. La noción de causa es considerada importante y la fuerza se concibe imaginativamente como la clase de cosa que experimentamos cuando empujamos o jalamos.

“Si se aborda una relación causa-efecto entre la fuerza y el elemento diferencial de la velocidad, se asume que una vez conocidas las fuerzas que intervienen en una situación particular, es posible determinar los cambios de estado de movimiento de los cuerpos que están presentes en tal interacción o viceversa. Por otra parte análisis más juiciosos de las formas de abordar los fenómenos mecánicos, conducen a afirmar que en tales interacciones no es posible conocer a priori las fuerzas involucradas, es decir, no es posible conocer ni mucho menos cuantificar, los entes que producen los cambios de estado de forma exterior e independiente de las interacciones mismas. De otro lado si se asumen como derivables de los cambios de estado de movimiento detectados empíricamente, éstas se convierten en un nombre más para los mismos y la segunda ley de Newton perdería su status de ley”¹⁴.

¹⁴ Romero, Angel. La concepción Euleriana de la fuerza. Revista Física y cultura: cuadernos sobre historia y enseñanza de las ciencias. N° 3. 1996. P 20

Bajo las consideraciones presentadas en los anteriores textos no es posible cuantificar fuerzas ya que existe como una entidad exterior e independiente de las interacciones, por lo tanto es necesario abordar la problemática de la cuantificación de las fuerzas. Si se quiere cuantificar fuerzas es necesario asumir que las fuerzas no existen como una entidad exterior e independiente de las interacciones mismas.

1.5. Ideas del concepto de fuerza en el estudiante

Las investigaciones de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre el concepto de fuerza muestran que la fuerza no se considera como la medida de la interacción sino que es algo que reside dentro de los cuerpos. La noción de fuerza se desarrolla a partir de sensaciones relacionadas con el esfuerzo físico, por ejemplo cuando es necesario levantar un cuerpo o para mover objetos. Noción que se parece al concepto de energía y que da lugar a la confusión entre ambos. Como lo muestran los trabajos de Jimenez, E. et al;1997: "La fuerza es considerada como una propiedad ligada al cuerpo"

De esta idea de fuerza se deriva que:

- ◆ Los humanos, las máquinas y algunos objetos son centros de fuerza: noción antropomórfica de fuerza (Clement, 1973; Watts,1983).
- ◆ Las fuerzas son obligaciones para realizar una acción en contra de alguna resistencia(Watts, 1983).
- ◆ La fuerza es una acción que realiza alguien o algo: la cantidad de fuerza es proporcional a la cantidad de actividad(Watts, 1983)
- ◆ Los objetos retenidos en una posición tienen fuerza(Watts, 1983)

Otros consideran que “todo cuerpo en movimiento lleva asociado una fuerza(Viennot, 1979).

De esta idea de fuerza se deriva que:

- ◆ Las fuerzas son necesarias para mantener un cuerpo en movimiento(Viennot, 1979).
- ◆ Si un cuerpo está moviéndose, existe una fuerza neta sobre él en la dirección del movimiento(Viennot 1979).
- ◆ La fuerza es proporcional a la velocidad (Si $v=0$, entonces $F=0$, incluso si $a \neq 0$; si $v \neq 0$ entonces $F=0$, incluso si $a = 0$; Si las velocidades son diferentes, las fuerzas son distintas, incluso si las aceleraciones son iguales)(Viennot, 1979)
- ◆ Cuando dos fuerzas se juntan, pueden combinarse para cambiar el movimiento de los objetos. (Watts, 1983)

Bajo estas ideas de fuerza se considera que siempre que hay movimiento, es porque hay una fuerza en la dirección del movimiento (por ejemplo cuando se lanza una piedra hacia arriba cerca de la superficie de la Tierra) estableciéndose una relación entre fuerza y velocidad y no entre fuerza y aceleración, como lo muestra el problema utilizado para estudiar las ideas previas(Driver y otros, 1985)¹⁵

Otros estudios acerca de la idea de fuerza y movimiento muestra que, los estudiantes tienen concepciones relativamente indiferenciadas de

¹⁵ Citados por: Limón M, Carretero Mario. Las ideas de los alumnos. ¿Qué aporta este enfoque a la enseñanza de las ciencias?, Construir y enseñar, las ciencias experimentales. Ed. Aique: Buenos Aires 1997. pp 31.

movimiento, confundiendo frecuentemente los conceptos de posición y velocidad (Trowbridge y McDermott 1980), y velocidad y aceleración (Trowbridge y McDermott 1981, Johansson et al. 1985)¹⁶

Otras investigaciones acerca de las concepciones de los estudiantes sobre fuerza a menudo incluyen una u otra de las siguientes características: factores relativamente indiferenciados que causan el movimiento, con una confusión frecuente de las ideas de fuerza, cantidad de movimiento y energía cinética (Viennot, 1979, Watts, 1983, Minstrell 1984); una existencia de tipos pasivos de fuerza como las fuerzas de reacción (Minstrell 1982); y, una falta de un componente de interacción, con la fuerza asignada al objeto mismo (Viennot 1985).

1.6 Reflexiones a la forma tradicional como se aborda el concepto de fuerza

A pesar de que las ideas alternativas de los estudiantes sobre el concepto de fuerza están ya reconocidas desde hace varios años, la forma usual de abordar los contenidos no dan los resultados esperados, ya sea porque a través de estos se adquiere destreza en el manejo de relaciones matemáticas sin detenerse a reflexionar sobre el concepto en estudio, teniéndose la creencia que las ecuaciones son la solución y se convierten en un punto de llegada, dándole poca importancia al proceso para llegar a la

¹⁶ Citados por: Hewson P. W. La enseñanza de fuerza y movimiento como cambio conceptual. Enseñanza de la ciencias, 1990 8(2), 157-159

comprensión de la solución del problema, o por que en el afán de cubrir un programa de física, llevamos a los estudiantes a resolver problemas numéricos que sólo cumplen la función de agilizar al alumno en la rápida aplicación de los conceptos físicos. Resolver problemas no es aplicar fórmulas; es comprender un caso particular, analizarlo, fijarle sus limitaciones y extraerlo del conjunto natural para su examen y discusión, abordando los procesos comprensivos, interpretativos y argumentativos.

No puede entonces el docente limitarse a enunciar las leyes de Newton, examinando su progreso al pedirle que las recite, que escriba fórmulas o que realice algunas operaciones algebraicas a fin de cerciorarse de que no está repitiendo de memoria sino que posee un conocimiento al menos operativo.

A la vista de los resultados obtenidos en las investigaciones citadas anteriormente todo parece indicar que los estudios de lo que el alumno sabe sobre fuerza esta íntimamente ligado a la forma como se abordan los contenidos académicos, por lo que se hace necesario realizar nuevas aportaciones novedosas que profundicen más en la cognición del alumno a partir del diseño de otras estrategias.

1.7 Intervención estratégica

Se hace entonces necesario plantear situaciones problémicas en los cursos introductorios de física que ayuden en la construcción del concepto de fuerza y su formalización para favorecer la búsqueda de relaciones, representaciones, proporciones, regularidades, actividades experimentales, razonamiento, etc., que permitan una matematización de la fuerza, ya que a pesar de que existen formulaciones en las que se puede percibir el significado de fuerza, como es el caso de la relación para la segunda ley, la forma de abordarlas no permite que los estudiantes construyan modelos que los aproxime significativamente al concepto de fuerza. Desde esta

perspectiva se hace necesario una construcción del concepto de fuerza desde las interacciones, que involucre su cuantificación y el uso de formalismos matemáticos explicitando las relaciones, bajo un proceso de ordenación, representación y estudios de caso que permitan tanto matematizar estas relaciones como comprender el fenómeno físico.

Desde la enseñanza de la física, y en particular de la enseñanza del concepto de fuerza, es preciso dimensionar el campo de la construcción de estrategias didácticas que permiten tanto a maestros como a estudiantes reconocer y abordar las dificultades que se presentan bien sea porque el docente no tiene una claridad conceptual del mismo o porque las estrategias utilizadas no permiten la construcción de éste.

Por ello, en la propuesta de construcción de estrategias didácticas se requiere un conocimiento amplio y profundo de la historia evolutiva del concepto ya que esto brindará la posibilidad de realizar propuestas desde su génesis y no desde textos tradicionales, como también la construcción del concepto en el docente; sus relaciones con la física misma y con otras áreas del saber, como las matemáticas por ejemplo, ya que en estas interacciones se fundamentan los principios epistemológicos base de la construcción objetiva del conocimiento en constante desarrollo. Así la enseñanza del concepto de fuerza y sus representaciones se convierte en un espacio de diálogo entre la ciencia, la didáctica, el maestro y el alumno dentro de un lugar común: el aula de clase.

Se busca dar elementos que permitan al estudiante reflexionar acerca de ciertos conceptos del saber de la física y que le ayude a construir otros conceptos, por ejemplo el de fuerza que debe llevar a la comprensión de otros tipos de fuerzas como la eléctrica, la magnética, la gravitacional, etc.

Dentro de los problemas de la física queremos abordar la matematización de la fuerza, ya que se constituye en una herramienta para comprender el concepto de fuerza. Se abordará este concepto desde autores científicos que han aportado a la génesis de este concepto como Leonhard Euler e Isaac Newton tratando de formarnos una idea desde la fuente y no desde análisis hechos desde otros autores para fortalecer su comprensión y asimilación.

Se materializará a través de la construcción y diseño de guías con situaciones problémicas propuestas para los estudiantes, teniendo en cuenta las ideas previas de ellos, como también con situaciones dirigidas buscando una organización en la matematización del concepto de fuerza desde la ordenación, representación geométrica, gráfica y funcional, magnitudes intensivas y extensivas y la cuantificación, pasando desde lo cualitativo a lo cuantitativo y llevar a la modelación y simulación de ejemplos.

Capítulo 2

La fuerza desde las interacciones

2.1. Introducción

Entre las maneras de abordar fenómenos y situaciones relacionadas con las fuerzas es posible diferenciar dos formas de proceder: Por una parte, están aquellos que consideran conocidas las fuerzas y se proponen encontrar los cambios que ellas producen; por otra parte se tienen aquellos enfoques que consideran conocidos los cambios de estado de movimiento de los cuerpos y a partir de ello analizan cómo son las fuerzas.

Usualmente en los cursos de mecánica se considera que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son dadas, para luego determinar el cambio que deben producir en el movimiento de los cuerpos; sin embargo, estudios no tradicionales afirman que:

“en tales interacciones no es posible conocer a priori las fuerzas involucradas, es decir, no es posible conocer ni mucho menos cuantificar, los entes que producen los cambios de estado de forma exterior e independiente de las interacciones mismas”¹⁷.

La presente propuesta pretende encontrar las fuerzas cuando los cambios que ocurren a los cuerpos en su estado de movimiento son conocidos, es

¹⁷ Romero A. E. La concepción Euleriana de la fuerza. op. cit., pag. 20.

decir se asume que la fuerza es derivable de los cambios de estado de movimiento detectados en la colisión, por lo tanto la fuerza se convierte en un nombre más para la interacción de los cuerpos.

2.2. Principios de conservación en las colisiones

En los textos tradicionales de física la segunda ley de Newton es asumida como $\vec{F} = m\vec{a}$ buscando establecer los principios de conservación de momentum y de energía cinética con la intención de abordar fenómenos como: colisiones y caída de un cuerpo, en los que se identifican las variables de estado en sus respectivos sistemas, pero poco se indaga por lo que ocurre durante las transformaciones como es el caso del origen de las fuerzas. A continuación mostraremos bajo un análisis juicioso que los principios de conservación de energía y conservación de momentum en los textos tradicionales se centran en la búsqueda de las variables de estado y las transformaciones sirven de enlace para establecer relaciones entre estas variables de estado. De modo que el establecimiento de estos principios no busca mostrar el origen de las fuerzas durante la interacción ya que se parte de ellas mismas. Por lo tanto si se quiere cuantificar las fuerzas el problema es resuelto de entrada, ya que es independiente de las interacciones mismas. Una perspectiva del origen de las fuerzas desde Leonhard Euler y de los *Principias* de Isaac Newton permiten ver las fuerzas desde las interacciones y su posible cuantificación.

La mecánica o ciencia del movimiento es una disciplina que puede ser *representada* y comprendida con el uso de *sistemas*, entre los cuales se destacan: puntos materiales o masas puntuales, es decir, lo que se denomina partículas; cuerpos rígidos y medios deformables y continuos.

Una masa puntual, punto material o partícula es una idealización cómoda que puede ponerse en correspondencia con gran parte de nuestra experiencia. En la práctica se olvida a menudo su carácter idealizado y se le considera como un objeto material en el sentido usual, como una piedra por ejemplo. De las muchas propiedades que pueden atribuírseles, (posición, color, olor, sabor) en mecánica se elige un conjunto limitado que se considera de interés científico: un punto material tiene una propiedad intrínseca que nunca cambia, su *masa*; y posee además posición y velocidad en las cuales se representa sus respectivas componentes rectangulares.

Es posible reducir estas propiedades a una, lo cual se logra bajo una combinación de masa y velocidad, llamada cantidad de movimiento. En esta perspectiva, el movimiento de una sola partícula se asume bajo la teoría de

Newton como: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(x)$. Esta relación se refiere a una sola partícula que

se mueve en una sola dimensión, la dirección x , además de la propiedad fija m , se tiene un grupo de dos magnitudes variables, x y v ; en cuanto a la función \vec{F} , cuyo argumento es la posición de la partícula, recibe el nombre de fuerza.

La ecuación descrita es una ley de la naturaleza, es una ecuación diferencial en la que la variable independiente es el tiempo, pero este no aparece explícitamente en la ley sino que solamente entra a través de la derivada. En cambio, sí aparecen las variables de estado, x y v . Por consiguiente esta ley de la naturaleza no dice en detalle lo que ocurre.

Una presentación equivalente a esta ley es: $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$, en la cual el

cálculo permite encontrar la siguiente relación:

$$mvdv = F(x)dx$$

integrando

$$\frac{1}{2}mv^2 - \int F(x)dx = constante^{18}$$

donde la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ se reconoce como la energía cinética y $-\int F(x)dx$ como la energía potencial, de modo que la relación se convierte en un enunciado de la conservación de la energía. Es claro pues que la conservación de la energía mostrada en esta relación, no es un nuevo principio de la naturaleza sino otra forma de enunciar la ley del movimiento.

Otra forma equivalente por integración con respecto al tiempo de la segunda ley de Newton toma la forma:

$$mdv = Fdt$$

integrando tenemos que

$$mv - \int Fdt = constante^{19}$$

donde mv se reconoce como cantidad de movimiento y $-\int Fdt$ se llama impulso. Este resultado expresa, la diferencia constante entre la cantidad de movimiento y la impulsión de la fuerza que es otro principio de conservación, por lo tanto existe una equivalencia entre la segunda ley de Newton y los principios de conservación.

¹⁸ Alonso Marcelo y Finn Edward J., Física op. cit.,. 137.

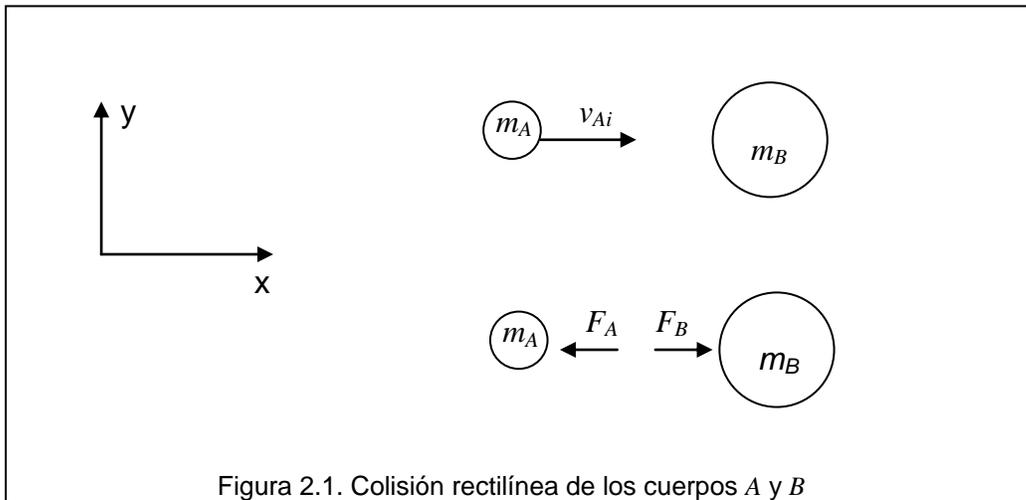
¹⁹ Lea Susan M. y Burke Jhon Robert. Física vol I. La naturaleza de las cosas. Ed. Thompson. México 1999. pp 205.

2.3. Forma tradicional como se aborda la segunda ley de Newton en las colisiones y su relación temporal.

A continuación se presentará la forma tradicional como se aborda la segunda ley de Newton desde las colisiones y su relación temporal.

La segunda y la tercera ley de Newton hacen posible analizar el movimiento de un sistema de cuerpos aislados y a la vez tratan con un solo cuerpo.

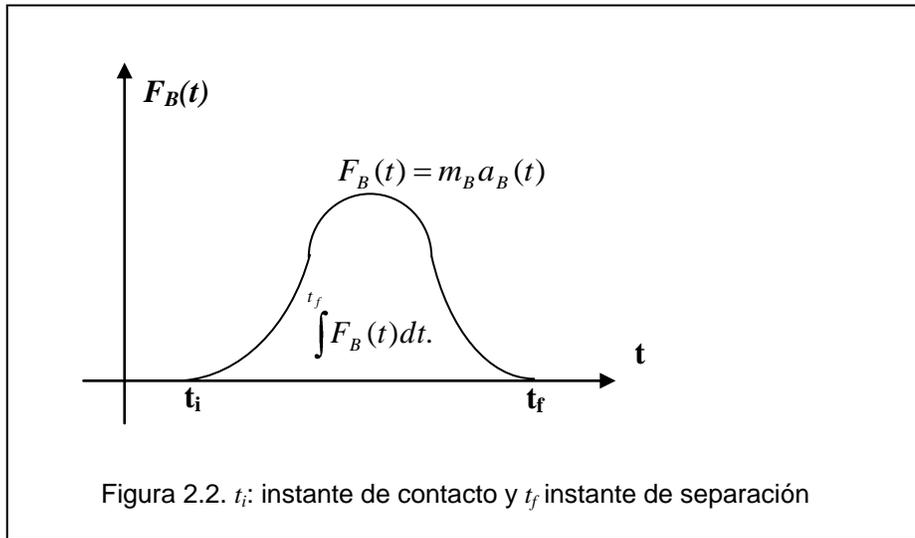
Consideremos un cuerpo A de masa m_A moviéndose con una velocidad uniforme v_{Ai} que choca con un cuerpo estacionario B de masa m_B , como lo muestra la siguiente Figura 2.1



En virtud de la segunda ley de Newton para el cuerpo B tenemos:

$$F_{xneto} = ma_x, \text{ y } F_B(t) = m_B a_B(t) \quad (1)$$

donde la fuerza de interacción y la aceleración resultante varían de instante a instante durante el intervalo de la colisión. La Figura 2.1 muestra la posible variación de F respecto a t durante el intervalo de contacto.



La fuerza en general no es uniforme, varía en una forma compleja y la ecuación (1) nos dice muy poco acerca de ella. Sin embargo si se quiere conocer el efecto general de la colisión en el movimiento del cuerpo B , es necesario conocer el efecto acumulativo de la fuerza F_B , lo cual se resuelve por medio del cálculo integral, como:

$$F_B(t) = m_B a_B(t)$$

integrando a ambos lados obtenemos

$$\int_{t_i}^{t_f} F_B(t) dt = \Delta(m_B v_B). \quad (2)$$

La relación anterior nos muestra que $\int_{t_i}^{t_f} F_B(t) dt$ es siempre igual al cambio en

el momento del cuerpo al cual la fuerza neta es aplicada, es decir $\int_{t_i}^{t_f} F_B(t) dt$

puede ser expresada en términos solamente de las velocidades inicial y final, independiente de la variación intermedia. El lado derecho de la ecuación (2) representa una manera de calcular un número dada la historia fuerza-tiempo; el lado izquierdo representa una manera diferente de calcular ese mismo número (Arons, 1997:25).

Si en una colisión, se tiene el cambio en el momentum de un cuerpo B y el intervalo de contacto $(t_f - t_i)$, se puede estimar el promedio de la fuerza $F_B(t)$ en el tiempo; es decir,

$$\overline{F}_B(t) = \frac{\int_{t_i}^{t_f} F_B(t) dt}{t_f - t_i} = \frac{\Delta(m_B v_B)}{\Delta t}$$

luego

$$\overline{F}_B(t) \cdot \Delta t = \Delta m_B v_B$$

donde F_B es aquella fuerza constante que produciría el cambio dado en el momentum en el mismo intervalo que la fuerza variable real. Sin embargo el cálculo de Δt es difícil de medir en un experimento real, pues es del orden de 10^{-4} s (Lea Susan, 1999:206).

Si se quiere analizar la historia del conjunto completo de los cuerpos A y B tenemos

$$\int_{t_i}^{t_f} F_B(t) dt = m_B v_{Bf} - m_B v_{Bi} \quad (3)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} F_A(t) dt = m_A v_{Af} - m_A v_{Ai} \quad (4)$$

de acuerdo con la tercera ley de Newton $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ en cada instante durante la interacción y los impulsos impartidos a los cuerpos A y B son, por tanto, iguales y opuestos. Si sumamos las ecuaciones (3) y (4) obtenemos

$$0 = m_B v_{Bf} - m_B v_{Bi} + m_A v_{Af} - m_A v_{Ai}$$

lo cual se puede reescribir como:

$$m_B v_{Bf} + m_A v_{Af} = m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi}$$

es decir el momento final total es igual al momento inicial total, o también

$$m_B v_{Bf} - m_B v_{Bi} = -(m_A v_{Af} - m_A v_{Ai})$$

es decir el cambio en el momento del cuerpo A es igual a menos el cambio en el momento del cuerpo B .

Todas estas presentaciones son diferentes maneras de decir que el momento se conserva en la colisión independientemente de cómo varía la fuerza de interacción durante la colisión, es así como se obtiene una relación algebraica entre las condiciones inicial y final del movimiento sin hacer referencia alguna a las etapas intermedias(Arons, 1997:31).

Sin embargo ésto no constituye una solución completa del problema de la colisión rectilínea. Si conocemos las masas m_A y m_B y las velocidades iniciales v_{Ai} y v_{Bi} y buscamos predecir el movimiento final, nos quedan dos incógnitas, v_{Af} y v_{Bf} . Es necesario tener información adicional para determinar cada una de estas velocidades.

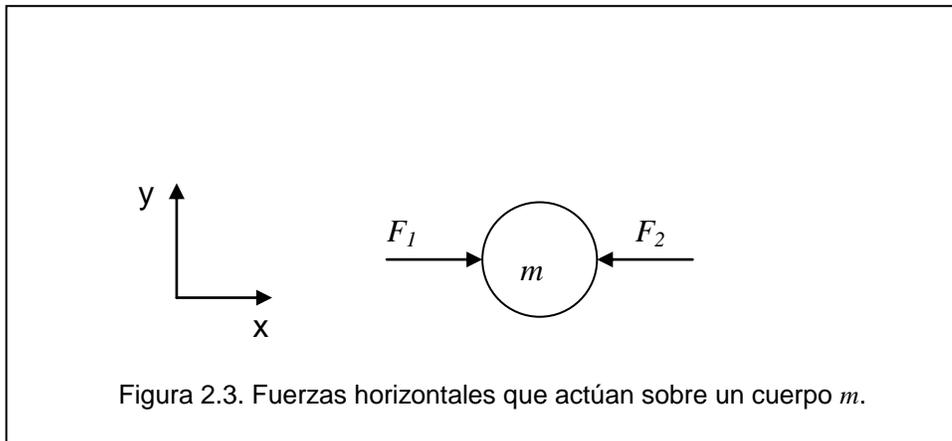
Aplicando la segunda y la tercera ley del movimiento a la interacción de los cuerpos, tenemos(Serway, 2000:254):

- ◆ Que el momento total de un sistema de cuerpos puede ser cambiado por la presencia de una fuerza externa, impartiendo un impulso neto a todo el sistema.
- ◆ Que el momento total de un sistema de cuerpos, que interactúan solamente entre sí, permanece constante.

2.4. La segunda ley de newton desde las deformaciones en los textos tradicionales y su relación espacial:

En la sección anterior se estableció una relación entre las leyes del movimiento y la conservación del momentum, calculando la integral de la fuerza respecto al tiempo y mostrando que esta integral (impulso neto) era igual al cambio del momento impartido al cuerpo. En esta sección estudiaremos la variación de la fuerza y la aceleración como una función de la posición, en lugar del tiempo t .

Consideremos el caso en el cual dos fuerzas horizontales actúan sobre un cuerpo de masa m durante el desplazamiento horizontal.



De tal manera que en virtud de la segunda ley de Newton:

$$F_1 - F_2 = ma_x$$

si las fuerzas son iguales y opuestas, la velocidad no cambia. Si las fuerzas son constantes pero desiguales, se imparte una aceleración uniforme y la velocidad, la aceleración y el desplazamiento están relacionados por la ecuación cinemática:

$$v_x^2 - v_{ox}^2 = 2a_x \Delta x.$$

eliminando a_x y multiplicando ambos miembros por Δx , obtenemos:

$$(F_1 - F_2)\Delta x = \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = \Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) \quad (5)$$

En el segundo miembro tenemos términos que son intrínsecamente propiedades del cuerpo en su movimiento instantáneo; en el primer miembro se combinan los números que están relacionados con la acción aplicada externamente, la fuerza y el desplazamiento asociado. La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ es positiva, independiente del signo de v_x ; por lo tanto, $\frac{1}{2}mv_x^2$ no tienen propiedades vectoriales. Además, $\Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)$ es positiva si el valor final de $\frac{1}{2}mv_x^2$ es mayor que el inicial y negativa en el caso opuesto; ésto es, el signo de $\Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)$ simplemente nos dice si $\frac{1}{2}mv_x^2$ aumenta o disminuye en magnitud durante la acción y ya no tiene nada que ver con las direcciones en el espacio. De tal forma que $\frac{1}{2}mv_x^2$ y $\Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)$ son cantidades escalares y no vectoriales.

En el primer miembro de la ecuación (5) tenemos el producto de dos vectores que son paralelos entre sí, $(F_1 - F_2)$ y Δx . Si la fuerza neta como el desplazamiento son positivos, $\Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)$ es positiva y la cantidad $\frac{1}{2}mv_x^2$ del cuerpo ha sido aumentada.

Si la fuerza neta y el desplazamiento están dirigidos opuestamente, $\Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)$ es negativa y la $\frac{1}{2}mv_x^2$ del cuerpo es disminuida. Así el producto $(F_1 - F_2)\Delta x$ es también una cantidad escalar, y su signo algebraico nos dice

si la propiedad $\frac{1}{2}mv_x^2$ del cuerpo aumenta o disminuye durante el desplazamiento Δx . Aumenta si $(F_1 - F_2)$ y Δx están en la misma dirección y disminuye si están opuestamente dirigidas.

Si $F_2 = 0$ entonces

$$F_1 \Delta x = \Delta \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) \quad (6)$$

lo cual significa que si no hay fuerzas que opongan a F_1 y si F_1 y Δx están en la misma dirección, la propiedad $\frac{1}{2}mv_x^2$ del cuerpo es aumentada durante el desplazamiento y el aumento es igual a $F_1 \Delta x$. Por lo tanto tenemos dos maneras diferentes de calcular el mismo número. Si conocemos F_1 y Δx podemos predecir el cambio en $\frac{1}{2}mv_x^2$ del cuerpo. Si conocemos a partir de la observación directa un cambio en $\frac{1}{2}mv_x^2$, podemos calcular que fuerza habría impartido este cambio en cualquier desplazamiento particular. Además, la ecuación (6) implica que aunque una acción F_1 impartirá velocidades muy diferentes a cuerpos de diferentes masas, siempre impartirá exactamente el mismo cambio en la cantidad $\frac{1}{2}mv_x^2$ a cualquier cuerpo (Arons, 1997:130).

Si las fuerzas no son constantes, de la segunda ley de Newton obtenemos que:

$$F(x) = ma(x)$$

integrando podemos obtener:

$$\int_{x_0}^x F_{neta}(x) dx = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (7)$$

lo cual indica que $\int_{x_0}^x F_{neta}(x)dx$ es siempre igual a $\Delta(\frac{1}{2}mv_x^2)$, independientemente de cómo varíe a_x durante el intervalo (Arons, 1997:98).

De la presentación anterior podemos ver que:

- ◆ La ecuación (2) nos muestra que $\int_{t_i}^{t_f} F_B(t)dt$ es siempre igual al cambio en el momento del cuerpo al cual la fuerza neta es aplicada; es decir, $\int_{t_i}^{t_f} F_B(t)dt$ puede ser expresada en términos solamente de las velocidades inicial y final, independiente de la variación intermedia. Similarmente la ecuación (7) indica que $\int_{x_0}^x F_{neta}(x)dx$ es siempre igual al cambio de la energía cinética, expresada en términos de las velocidades inicial y final, independientemente de cómo varíe la fuerza durante la deformación. Los textos tradicionales no se detienen en hacer un análisis detallado de lo que ocurre durante el tiempo de contacto o de deformación.
- ◆ De otro lado la forma como se llegan a establecer las ecuaciones (2) y (7) muestra que la fuerza es conocida, ya que se parte de $F(t) = ma(t)$ o $F(x) = ma(x)$ cuando lo que se quiere encontrar es la fuerza misma. Es decir si se quiere cuantificar la fuerza, no se debe partir de ella como conocida *a priori*, ya que el problema es resuelto de entrada, lo que significaría que las fuerzas son independientes de las interacciones mismas.

- ◆ El lado derecho de la ecuación (2) representa una manera de calcular un número dada la historia fuerza-tiempo; el lado izquierdo representa una manera diferente de calcular ese mismo número; similarmente ocurre con la ecuación (7), donde las condiciones y iniciales y los cuerpos mismos intervienen en la determinación de la fuerza, lo cual contrasta con la forma tradicional como se llega a las ecuaciones (2) y (7) ya que se parte de la misma fuerza como si fuera independiente de la interacción y no se tiene en cuenta que ellas surgen durante la interacción.

- ◆ La forma como se establece el principio de conservación del momentum o de energía cinética, muestra que es necesaria la interacción para poder relacionar los estados iniciales y finales, sin que sea necesario indagar lo que origina los cambios de estados de los cuerpos.

- ◆ Todas estas presentaciones son diferentes maneras de decir que el momento y la energía cinética se conservan en la colisión independientemente de cómo varía la fuerza de interacción durante la colisión, es así como se obtiene una relación algebraica entre las condiciones inicial y final del movimiento sin hacer referencia alguna a las etapas intermedias.

- ◆ Los resultados encontrados en las ecuaciones (2) y (7) indican dos formas de ver en la física muy distintas, las cuales se originan de la misma ley de Newton, consecuencia de asumir la fuerza como una función del tiempo o la fuerza como una función de la deformación, es decir, se anticipan a lo que se quiere ver durante la interacción, sin embargo en los principios de conservación de momentum y de energía cinética no aparece la fuerza explícitamente. ¿Cómo poder entender estas diferentes formas de ver a partir de la misma ley sin que aparezca la fuerza en estos principios de conservación?

Estas consideraciones inducen a afirmar:

Una posible cuantificación de las fuerzas no es independiente de las interacciones, ya que dependen de las condiciones iniciales y de la naturaleza de los cuerpos para una situación física particular. Se hace necesario establecer una perspectiva que muestre el origen de las fuerzas desde las interacciones mismas, lo cual se puede evidenciar con los trabajos de Leonhard Euler, como se mostrará mas adelante.

2.5. El concepto de Fuerza desde las interacciones en Leonhard Euler:

A continuación se presentará el concepto de fuerza desde la cosmovisión Euleriana, buscando establecer el origen de las fuerzas y una posible cuantificación a partir de las interacciones.

Euler propone inicialmente una propiedad esencial en todos los cuerpos y es el conservarse en su estado sin sufrir cambio alguno, mientras que no sean sometidos a la acción de cualquier causa externa, causa que no reside en el cuerpo, sino más bien en cualquier objeto que exista fuera de él; de modo que si esta causa no actúa sobre el cuerpo, él permanecerá perpetuamente en el mismo estado en el que fue colocado. A esta propiedad de los cuerpos, por la cual ellos permanecen en el mismo estado se le da el nombre de *inercia*; por lo tanto, la inercia es un atributo esencial a todos los cuerpos y no es posible que existan cuerpos desprovistos de esta propiedad. Lo anterior lo podemos mostrar en las siguientes citas:

De ello se deriva esta ley fundamental: *cuando un cuerpo se encuentra en reposo y no hay nada que desde afuera actúe sobre él, este cuerpo permanecerá siempre en reposo; y si comenzara a moverse, la causa de su movimiento estaría fuera de él, de modo que no hay nada en el cuerpo que sea capaz de ponerlo en movimiento*²⁰.

Se trata, pues, de una propiedad fundada en la naturaleza de los cuerpos, por la cual tratan de mantenerse en el mismo estado, ya sea de reposo o de movimiento. Esta cualidad de la que están dotados todos los cuerpos y que les es esencial, se denomina *inercia* y conviene tan necesariamente a todos ellos como la extensión o la impenetrabilidad, de modo que sería imposible que hubiese un cuerpo sin *inercia*²¹.

²⁰ Euler Leonhard. Reflexiones sobre el espacio la fuerza y la materia. Editorial alianza. Madrid. 1993.pp 112.

Puesto que un cuerpo o permanece en reposo o se mueve con un movimiento uniforme en una misma dirección, se dice en uno y otro caso, que el cuerpo permanece en el mismo estado.

La palabra inercia designa tanto la cualidad de un cuerpo que reposa como el principio por el cual un cuerpo que se encuentre en movimiento persevera en el mismo estado, lo cual significa que la inercia en Euler no sólo se refiere al reposo sino también al movimiento uniforme. Sin embargo existe una radical diferencia en la forma de concebir la inercia por Newton y por Euler como lo muestra a continuación la siguiente cita:

“Un aspecto de la interpretación usual en la tradición Newtoniana era el considerar que los cuerpos tienen una fuerza interna por la cual se resisten a ser cambiados de estado. Incluso los términos utilizados por el propio Newton para designar a la inercia son tales que la hacen aparecer como una propiedad activa. Esta forma particular de concebir la inercia como una resistencia activa al cambio es, pues, la que posibilita unificar el tratamiento para los dos estados: La ley de la inercia se convierte entonces en una ley de conservación de estado. Por el contrario, Euler concibe la inercia como una propiedad de los cuerpos absolutamente pasiva. En el tratamiento de Euler, a diferencia de la perspectiva Newtoniana, la inercia no es resistencia activa al cambio, es una cualidad pasiva de la materia”²²

De acuerdo con la anterior cita, inercia en la perspectiva euleriana no es igual que en la perspectiva newtoniana; Euler se refiere a la inercia como una propiedad *pasiva*, mientras que Newton se refiere al estado de reposo o de movimiento uniforme como una propiedad *activa*.

²¹ Ibidem .pp 122.

²² Romero A. E. La Mecánica de Euler: de los principios metafísicos a la teoría de las fuerzas, in Debru, Claude et Paty, Michel (éds), [2002]. *Changements dans l'interprétation et contenus conceptuels. Changes in interpretation and conceptual contents. Symposium du XXI è Congrès International d'Histoire des Sciences (Mexico, 8-14 juillet 2001)*, México, 2002, sous presse.

Establecida la idea de inercia, es claro que todas las veces que un cuerpo cambia de estado, la causa de ese cambio se debe encontrar fuera del cuerpo. Toda causa que es capaz de cambiar el estado de un cuerpo es lo que Euler llama fuerza y esta fuerza se encuentra fuera del cuerpo en cualquier otro objeto, de manera que cualquier cambio en el estado de un cuerpo no tiene lugar en ese cuerpo mismo, en concordancia con la idea de inercia en Euler de propiedad pasiva.

Para encontrar el origen de las fuerzas Euler propone analizar situaciones en las que los cuerpos son obligados a cambiar de estado como veremos a continuación²³:

Consideremos dos cuerpos *A* y *B*, estando *A* en estado de reposo y *B* en estado de movimiento, de modo que *B* se dirige hacia el cuerpo *A*. Tan pronto el cuerpo *B* choca con el cuerpo *A* el estado de movimiento de uno y del otro cambia súbitamente y el cuerpo *A* que se encontraba en estado de reposo ahora se encuentra en movimiento y el movimiento del cuerpo *B* cambiará. Podemos preguntarnos: ¿Por qué estos dos cuerpos no permanecen en su estado? Es decir el cuerpo *A* en reposo y el cuerpo *B* en movimiento con la misma velocidad uniforme y en la misma dirección, como su inercia lo exige.

Una posible respuesta indica que es la *impenetrabilidad* la causante del cambio de estado que ocurre en cada uno de los cuerpos, donde la impenetrabilidad es una propiedad de los cuerpos, en virtud de la cual, en tanto que ocupe ese lugar, no permite que otro cuerpo ocupe ese mismo lugar al mismo tiempo. Como lo muestra la siguiente cita:

²³ Euler Leonhard. The origin of forces: Conservation of the quantity of motion and vis viva. In Mém. Acad. Sciences Berlin, 6, 419-447 (1752). pp 139-142. En Lindsay, B. (ed) Energy.

Descubrimos fácilmente, sin embargo, una característica general que es adecuada para toda materia y, por consiguiente, para todo cuerpo; se trata de la *impenetrabilidad*, de la imposibilidad de ser penetrado por otros cuerpos, o bien de la imposibilidad de que dos cuerpos ocupen a la misma vez el mismo lugar.²⁴

Según Euler un cuerpo no es penetrable, por lo tanto no existen grados de penetrabilidad intermedios. Así que la impenetrabilidad de los cuerpos consiste en una imposibilidad absoluta de dejarse penetrar; ya que es imposible que dos cuerpos o partículas ocupen la misma región del espacio en el mismo tiempo.

Dado que el estado de los cuerpos cambia después de la colisión, éste es fruto de la interacción, de modo que el cambio se debe a una causa capaz de modificar el estado de un cuerpo, esta causa la llamaremos fuerza, la cual se encuentra fuera del cuerpo. Puesto que los cuerpos no se pueden penetrar, se deduce necesariamente que la fuerza está ligada con la impenetrabilidad y por lo tanto fuerza e impenetrabilidad no son separables. Así, la fuerza surge para tratar de evitar la penetración, y dado que la impenetrabilidad es una propiedad general de los cuerpos independiente si se dan o no fuerzas. Bajo esta idea las fuerzas no actúan continuamente sino durante la interacción para proteger los cuerpos de la penetración. De manera que las fuerzas que se originan en el choque de dos cuerpos nacen de la impenetrabilidad del uno y del otro a la vez. Los anteriores análisis se pueden ver en las siguientes citas:

Es, pues, la impenetrabilidad de los cuerpos la que encierra el verdadero origen de las fuerzas que modifican continuamente el estado de los cuerpos en este mundo²⁵.

²⁴ Euler Leonhard. Reflexiones sobre el espacio la fuerza y la materia. Editorial alianza. Madrid. 1993. pp 107.

²⁵ Ibidem .pp 133.

Hay que señalar también que las fuerzas no son nunca el efecto de la impenetrabilidad de un solo cuerpo, sino que resultan de la impenetrabilidad de todos a la vez, pues con tal que uno de los dos fuera penetrable, la penetración podría realizarse, no siendo necesaria en ese caso ninguna fuerza que modifique su estado²⁶.

En síntesis, para Euler la esencia de la *materia* es su *inercia* y su *impenetrabilidad*, y es a partir de estas propiedades que ha de explicarse el origen de las fuerzas. Son estas propiedades de la materia de todo cuerpo la que le permite desarrollar fuerzas que modifican, no su propio estado de movimiento o de reposo, sino el de los demás. El origen de dichas fuerzas está, pues, en la impenetrabilidad y la inercia de la materia.

Bajo la perspectiva Euleriana los cambios de estado que experimenta todo cuerpo surgen debido a la impenetrabilidad de los cuerpos, las fuerzas que actúan entre ellos son fruto de acciones por contacto, de modo que los choques se convierten en un prototipo de las interacciones en esta perspectiva.

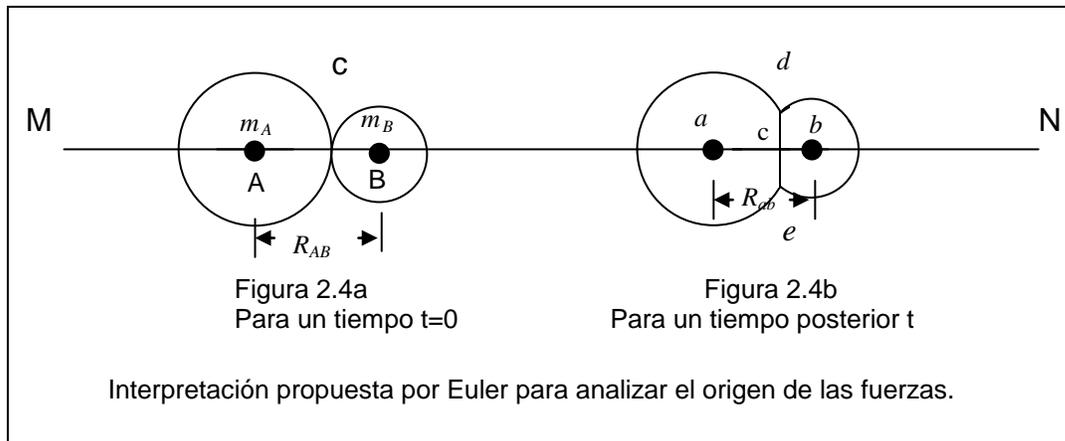
Por lo tanto es necesario pensar situaciones en la que se atente contra la impenetrabilidad, como ocurre en la colisión de dos cuerpos, en la cual se originan fuerzas, fruto de la impenetrabilidad, donde necesariamente ocurren deformaciones que dependen de la naturaleza de los cuerpos. A continuación veremos cómo estas deformaciones en una colisión permiten ver cómo son las fuerzas para su posible cuantificación.

Cuando dos cuerpos colisionan sufren deformaciones que están ligadas a la dureza de los cuerpos, por lo tanto, no existen cuerpos infinitamente duros o

²⁶ Ibidem. pp 135.

rígidos que no sufran alguna deformación cuando sobre ellos actúa una fuerza.

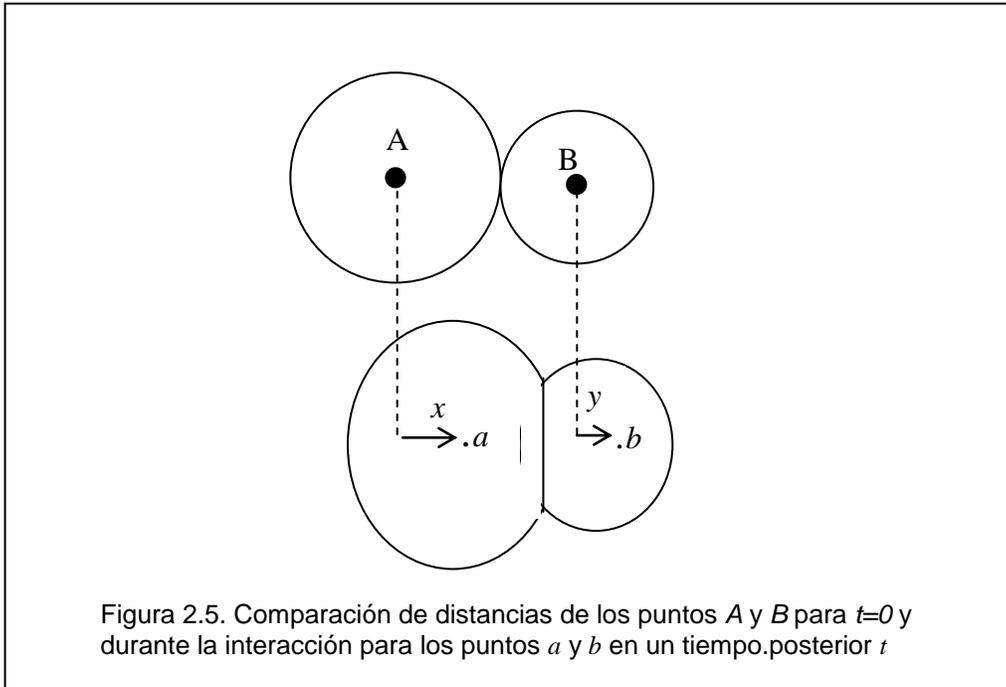
Independientemente del tipo de colisión (elástica o inelástica) el cálculo de la deformación será el mismo para la primera mitad del tiempo que dure el choque.



Consideremos dos cuerpos esféricos m_A y m_B que se mueven sobre la misma línea recta MN en el mismo sentido, pero la velocidad del cuerpo m_A es más grande que la velocidad del cuerpo m_B antes del choque, de modo que ellos comienzan la interacción en algún punto de la línea MN. Supongamos que ello ocurre para el primer instante, en el que la distancia de los centros de masa es máxima y es igual a la suma de los radios de los cuerpos m_A y m_B (los centros de masa son denotados con los puntos A y B en la Figura 2.4a), este será el instante del tiempo, donde el choque comienza.

Supongamos que la velocidad del cuerpo m_A antes del choque es v_a y la del cuerpo m_B es v_b tal que $v_a > v_b$, y sea R_A el radio del cuerpo m_A y R_B el radio del cuerpo m_B de forma tal que la distancia entre los centros de masa es

$R_A + R_B = R_{AB}$. Para un instante posterior t la distancia entre los centros de masa será R_{ab} como lo muestra la Figura 2.4b. Sea x la distancia que recorre el centro de masa del cuerpo m_A en un tiempo t , de manera análoga sea y el espacio recorrido por el centro de masa del cuerpo m_B en el mismo tiempo, de modo que la distancia de los puntos a y b en la Figura 2.4b será:



De la Figura 2.5 podemos observar que: la distancia AB es igual a la distancia aA más aB , es decir, $AB = aA + aB$, pero $aB = ab - bB$

así que: $AB = aA + ab - bB$

como $aA = x$, $bB = y$, $ab = R_{ab}$, $AB = R_A + R_B = R_{AB}$

Entonces $R_{ab} = R_{AB} + y - x$.

Por lo tanto R_{ab} es más pequeño que R_{AB} a causa de la deformación que estos cuerpos imprimen durante la colisión. Por lo tanto $x - y = R_{AB} - R_{ab}$, entonces $x - y > 0$, luego $x > y$.

Sea $z = x - y$, donde z denota la cantidad de deformación. Supongamos ahora que la velocidad del cuerpo A una vez transcurrido el tiempo t es v_A y la del cuerpo B es v_B , donde estas velocidades son diferentes a las velocidades en el primer instante de contacto (v_a y v_b), tal que v_A es mayor que v_B en el instante t , de modo que los cuerpos están obligados todavía a actuar el uno sobre el otro para prevenir la penetración.

Consideremos que para el instante t la fuerza que se origina durante la interacción es F , con la cual estos dos cuerpos actúan el uno sobre el otro y la fuerza que actúa sobre cada una de los cuerpos es de igual magnitud y de sentido opuesto. Como la distancia para el instante t es $R_A - R_B - z$, entonces, para un tiempo dt posterior a t la distancia en un tiempo $t + dt$ será $R_A + R_B - z - dz$ por lo tanto es necesario que la fuerza F aumente si no ha ocurrido la máxima deformación.

Supongamos que la masa del cuerpo A es m_A y la del cuerpo B es m_B . Las velocidades v_A y v_B cambian en un tiempo dt por dv_A y dv_B respectivamente de manera que:

$$m_A dv_A = -Fdt \quad (8) \quad \text{y} \quad m_B dv_B = Fdt \quad (9)$$

Estas ecuaciones de movimiento se atribuyen usualmente a Newton, sin embargo, como se muestra en este proceso es Euler el primero en escribir estas formas analíticas.

El signo menos en la ecuación (8) para el cuerpo A indica que su velocidad disminuye y su diferencial dv_A será negativo, caso contrario ocurre con el cuerpo B en el que el cuerpo sigue la dirección del movimiento inicial y por lo tanto será acelerado.

Sumando las ecuaciones (8) y (9) obtenemos que $m_A dv_A + m_B dv_B = 0$, integrando esta expresión obtenemos que $m_A v_A + m_B v_B = constante$, que es independiente de la fuerza F . Luego para cualquier instante durante la interacción el valor de $m_A v_A + m_B v_B$, será siempre el mismo, así que, $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_a + m_B v_b$ para el instante t .

Esto es lo que reconocemos como el principio de conservación del momentum en los cuales los textos tradicionales lo limitan a justo antes y justo después de la colisión y no durante la colisión como lo muestra Euler.

Para determinar el valor de la fuerza F por la diferencial de la deformación dz , es necesario introducir elementos diferenciales de los espacios recorridos dx y dy en vez de dt , de manera que $dx = v_A dt$ y $dy = v_B dt$ o

$$dt = \frac{dx}{v_A} = \frac{dy}{v_B} \text{ por lo tanto } \frac{dx}{v_A} = \frac{dy}{v_B}.$$

Cuando Euler plantea la necesidad de introducir la diferencial de la deformación dz en vez de dt , es porque considera que una posible cuantificación de las fuerzas involucra la deformación de los cuerpos.

sustituyendo en las ecuaciones (8) y (9) obtenemos

$$m_A dv_A = -F \frac{dx}{v_A} \quad \text{y} \quad m_B dv_B = F \frac{dy}{v_B}$$

Luego:

$$F = -m_A v_A \frac{dv_A}{dx} \quad \text{y} \quad F = m_B v_B \frac{dv_B}{dy}$$

o

$$-F dx = m_A v_A dv_A \quad \text{y} \quad F dy = m_B v_B dv_B$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos:

$$Fdy - Fdx = m_A v_A dv_A + m_B v_B dv_B \quad (10)$$

dado que $x - y = z$ entonces $dx - dy = dz$. Sustituyendo en la ecuación (10) obtenemos:

$$- Fdz = m_A v_A dv_A + m_B v_B dv_B$$

integrando tenemos:

$$- 2 \int Fdz + C = m_A v_A^2 + m_B v_B^2 \quad (11)$$

y puesto que en $t=0$, $z=0$ (en el momento del impacto) la integral $\int Fdz = 0$ y por lo tanto al finalizar el choque de los cuerpos se tendrá: $m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_a^2 + m_B v_b^2$ relación que se conoce como el principio de conservación de energía cinética.

El término Fdz que aparece en la integral está relacionado con la variación del cuadrado de la velocidad, así una variación del cuadrado de la magnitud de la velocidad involucra una variación del término Fdz ; es decir, el término Fdz no es independiente de las condiciones iniciales de la interacción sino que depende de ellas.

La ecuación (11) combinada con la ecuación $m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_a^2 + m_B v_b^2$ permiten hallar las velocidades después del choque.

La fuerza absoluta F que actúa durante el choque no es posible determinarla sin que se sepa su relación con la variación de la deformación dz , de esta forma la fuerza no es independiente de los cuerpos mismos, sino que depende de la naturaleza de ellos y una posible cuantificación de F involucra la deformación de los cuerpos. De modo que es posible pensar que F es proporcional a la variación de la deformación dz , luego $F = k\Delta z$,

donde k designa una cantidad que depende del grado de dureza de los cuerpos que puede ser determinada por medio de la experiencia.

Sea F_p una fuerza que produce una variación de la deformación Δz_1 para los mismos cuerpos, es decir, la constante de proporcionalidad k es la misma, así que $F_p = k\Delta z_1$. Sustituyendo en $F = k\Delta z$ obtenemos:

$$F = F_p \left(\frac{\Delta z}{\Delta z_1} \right), \text{ por lo tanto } 2 \int F dz = F_p \frac{\Delta z^2}{\Delta z_1} \text{ así la ecuación}$$

$$m_A v_A dv_A + m_B v_B dv_B = -F dz \text{ al integrarlo se obtiene}$$

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_a^2 + m_B v_b^2 - F_p \frac{\Delta z^2}{\Delta z_1} \quad \text{o}$$

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_a^2 + m_B v_b^2 - F \Delta z \quad (12).$$

Esta ecuación permite determinar para cada instante de tiempo que dura el choque el valor de $F \Delta z$ donde el instante más relevante es aquel en que la deformación y por tanto también la fuerza es la más grande o para encontrar la mayor fuerza que la impenetrabilidad esta obligada a desplegar para impedir la penetración. Para este instante $v_A = v_B$ y debido a que $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_a + m_B v_b$ tendremos:

$$v_A = v_B = \frac{m_A v_a + m_B v_b}{m_A + m_B}$$

sustituyendo este valor en la ecuación (12) obtenemos

$$\frac{(m_A v_a + m_B v_b)^2}{m_A + m_B} = m_A v_a^2 + m_B v_b^2 - F \Delta z$$

o también

$$F \Delta z = \frac{m_A m_B (v_a - v_b)^2}{m_A + m_B} \quad (13)$$

Dentro de los aspectos a considerar en los trabajos de Euler antes presentados destacamos que:

- ◆ No es posible una cuantificación de las fuerzas independientes de las interacciones, ya que como se muestra en la ecuación (13) una cuantificación de la fuerza absoluta F depende de las deformaciones de los cuerpos.
- ◆ La relación $F\Delta z$ muestra que un cambio en las condiciones iniciales de los cuerpos tiene como consecuencia una modificación del término $F\Delta z$.
- ◆ Similarmente el término $F\Delta z$ depende de la naturaleza de los cuerpos que interactúan, en esta situación de las masas m_A y m_B
- ◆ Es de aclarar que la fuerza absoluta F es diferente del término $F\Delta z$ llamado esfuerzo.
- ◆ La forma tradicional como se aborda la fuerza considera posibles cambios de la masa o de la aceleración para la medida de ella. Los análisis descritos anteriormente muestran que bajo esta forma no es posible la cuantificación de la fuerza, por lo tanto se hace necesario considerar situaciones desde las colisiones para una posible cuantificación de la fuerza.

2.6. El concepto de fuerza desde las interacciones en Newton.

De forma análoga al análisis anterior, a continuación se mostrará el concepto de fuerza desde la cosmovisión newtoniana.

El concepto de fuerza impresa ya había sido introducido en el Siglo II antes de Cristo por el astrónomo Hiparco, según el cual un proyectil se mueve después de haber cesado el contacto entre el proyectil y el proyector por una fuerza transmitida a dicho proyectil por el proyector (Peduzzi, 1997:351). Es decir la fuerza impresa se entendió inicialmente como una fuerza que se transmite a un cuerpo en movimiento después de abandonar el contacto. También Galileo Galilei en sus primeros estudios sobre el movimiento de proyectiles hizo uso del concepto de fuerza impresa, considerando necesario asociar una fuerza a un objeto en movimiento para mantener éste en movimiento²⁷. Él criticaba a Aristóteles por el papel que éste atribuía al medio en sus explicaciones sobre el desplazamiento de un cuerpo sin contacto con su motor.

Newton enuncia la segunda ley en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, de la siguiente forma:

“El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime²⁸.”

Haremos un análisis preliminar de la *fuerza motriz impresa y el cambio de movimiento*, tal como aparece en la segunda ley.

Según la definición IV de los *Principia*,

²⁷ Ibidem pp. 351-360

²⁸ *Principios matemáticos de la filosofía natural*, pp. 136. Alianza Universidad. Madrid 1987.

“la fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme rectilíneo”²⁹.

Consiste esta fuerza en la sola acción y no permanece en el cuerpo después de ella, pues el cuerpo permanece en el nuevo estado únicamente por inercia. La fuerza impresa tiene diferentes orígenes, tales como un golpe, una presión, la fuerza centrípeta³⁰.

Distinto a las concepciones anteriores (de Hiparco y Galileo), para Newton la fuerza impresa es una acción y no permanece en el cuerpo durante el movimiento. Nos detendremos en el siguiente análisis en las fuerzas impresas que se originan durante los choques o colisiones.

De acuerdo con la definición II del libro de los *Principia*,

“La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente”³¹.

La segunda ley depende de la definición de *cantidad de movimiento*, es decir, el cambio de cantidad de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y la cuantificación de ella se obtiene por la cantidad de cambio del valor de mv .

El considerar que la fuerza impresa tiene su origen en las colisiones nos obliga a un cuidadoso estudio experimental de los cambios en el movimiento que ocurren en colisiones entre cuerpos o en la “percusión” como era llamado este fenómeno.

²⁹ Ibidem. pp. 123.

³⁰ Ibidem pp 123.

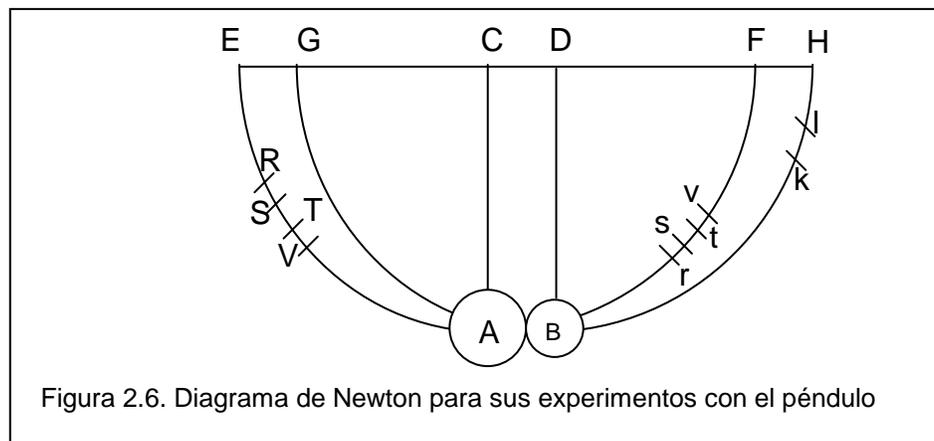
³¹ Ibidem pp. 122.

En el escolio del mismo libro³², Newton presenta experimentos con péndulos, en donde muestra que la segunda ley de movimiento, de forma diferente a la expresión $\vec{F}_{neta} = m \cdot \vec{a}$ como se presenta en los textos tradicionales.

En dicho escolio Newton afirma conocer las leyes del impacto y la regularidad presentada por el producto mv . -llamado cantidad de movimiento- hechas por Sir Christopher Wren, Jhon Wallis y Chistian Huygens quienes proponen reglas para calcular los cambios en el movimiento de cuerpos que sufrían una colisión a lo largo de la línea que une sus centros, dadas las masas y las velocidades iniciales de los cuerpos, mostrando que la cantidad de movimiento tenía propiedades vectoriales y que se conservaba en una colisión. Newton describe sus propios experimentos con péndulos que chocan, buscando regularidades no solo en los movimientos antes y después de la colisión sino que busca la acción que cambia el movimiento durante la colisión.

A continuación se presenta una interpretación de los experimentos propuestos y analizados por Newton en el escolio.

La siguiente figura, muestra dos cuerpos A y B suspendidos de dos cuerdas o hilos de igual longitud.



³² *ibidem* pp, 145-153.

En estos experimentos Newton considera la resistencia del aire y la fuerza elástica de los cuerpos concurrentes, buscando que la experiencia tenga una correspondencia aceptable con la teoría, donde la cantidad de movimiento juega un papel fundamental en la formulación de la segunda y tercera ley de Newton.

En esta experiencia Newton examina el movimiento de cuerpos donde las trayectorias son circulares y no rectas como tradicionalmente se abordan cuando se quiere estudiar la segunda y la tercera ley.

Se suspenden dos cuerpos esféricos A y B de hilos paralelos de igual medida y se construyen las trayectorias que estos cuerpos describen en forma individual (EAF , GBH , como se muestra en la figura anterior). Inicialmente se suelta el cuerpo A desde el punto R en ausencia del cuerpo B , y en una oscilación completa el cuerpo A regresará hasta el punto V , donde RV representa el retardo debido a la resistencia del aire. Es necesario encontrar el retardo (debido a la resistencia del aire) no para una oscilación completa sino para una cuarta parte de la oscilación, dado que más tarde el cuerpo A chocará con el cuerpo B en el punto más bajo. Sea ST la cuarta parte de RV y puesta en medio de modo que RS sea igual a TV y RS sea a ST como 3 a 2. De tal forma que ST representa el estado en el descenso desde S a A . Si colocamos B en su punto más bajo y dejamos caer el cuerpo A desde el punto S la velocidad en el punto más bajo será aproximadamente igual que si se deja caer en el vacío desde el punto T . La cuerda del arco TA representa la velocidad en el punto más bajo³³. Después de la colisión el cuerpo A alcanza el punto s y el cuerpo B el punto e (bajo la condición de que el cuerpo A tenga mayor masa que el cuerpo B). De igual forma si suelta el cuerpo A sin la presencia del cuerpo B desde v , encontraremos los puntos

³³ En este caso Newton hace uso de los resultados obtenidos por Galileo en la caída libre de los cuerpos donde la altura es proporcional a la velocidad al cuadrado.

r, s, t . La cuerda del arco tA representa la velocidad alcanzada por el cuerpo A en el punto A inmediatamente después de la colisión. Donde t será el punto al que debería llegar el cuerpo A , suprimida la resistencia del aire.

De manera similar se encuentra el punto l al que llega el cuerpo B en el vacío. Con lo cual tenemos las posiciones de los cuerpos A y B como si el experimento se realiza en el vacío. Luego se encuentra la cantidad de movimiento antes y después de la colisión multiplicando el cuerpo A o B (masa de A o B) por las respectivas cuerdas de arco descritas por los cuerpos A y B .

Cuando Newton estudia los cambios de movimientos de los cuerpos A y B , centra su análisis en los efectos que producen las fuerzas que se originan durante el choque. En las descripciones presentadas, Newton se esfuerza por mostrar experimentalmente que el momento se conserva en las colisiones, de esta manera se está obligado a pensar que durante el impacto se imparten cambios de momentos iguales y opuestos para los cuerpos en interacción. Esta es la forma en la que Newton muestra el principio de conservación de momentum, como lo muestra la siguiente cita:

“Así, si el cuerpo A caía sobre el cuerpo B en reposo con nueve unidades de movimiento y, perdidas siete, partía después del choque con dos, el cuerpo B retrocedía con estas otras siete. Si estos cuerpos iban al encuentro, A con doce unidades y B con seis, y A retornaba con dos, B regresaba con 8, efectuada la resta de catorce entre uno y otro”.

De esta experiencia debe ser claro que los términos *fuerza motriz impresa* y *fuerza* no se refieren al mismo concepto, la expresión fuerza motriz a la que Newton se refiere en su segunda ley es a lo que llamamos hoy impulso neto: $I_{neta} = \int_1^2 \vec{F}_{neta}(t) dt = \Delta(m \cdot v)$; en esta relación la fuerza motriz impresa es

una cantidad integral, un golpe fuerte, una acumulación en un breve intervalo ($t_2 - t_1$), la cual está relacionada a un cambio total del momentum $\Delta(m.v)$, no es vista como una razón de cambio o como una derivada. En este contexto, en la segunda ley Newton relaciona el impulso y el momentum, distinto a como aparece en los textos de hoy donde:

$$F_{x.neta} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} , F_{y.neta} = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

la cual fue introducida en el siglo XVIII por Leonhard Euler como lo muestra C. Truesdell en su libro Ensayos de Historia de la Mecánica³⁴.

En los textos de hoy muchos autores interpretan que la fuerza es proporcional a la razón de cambio del momentum, es decir, $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$, lo cual estaría de acuerdo con la situación planteada en las colisiones y que resulta tener una aplicación a situaciones en las cuales la masa de un cuerpo varía de una manera particularmente simple.

El siguiente aparte del escolio en estudio muestra que las fuerzas son derivadas de los cambios de estado, de las condiciones iniciales y de la naturaleza de los cuerpos.

“Esto lo ensayé con pelotas de lana bien prensadas. Primero dejando caer el péndulo y midiendo la reflexión hallé la fuerza elástica; después mediante esta fuerza calculé las reflexiones en otros ejemplos de choque y los experimentos concordaban. Retrocedían siempre las pelotas con una velocidad relativa tal que se relacionaba con la velocidad relativa de choque, aproximadamente como 5 a 9. Las de acero retrocedían casi siempre con la misma velocidad, las de madera con un poco menos, mientras que las de vidrio la proporción era casi 15

³⁴ Truesdell C. Ensayos de historia de la mecánica. Editorial Tecnos Madrid. 1975. pp. 236.

*a 16 y así de éste modo se ha comprobado la tercera ley, en cuanto a las acciones y reacciones, por medio de una teoría que se adecua plenamente con los experimentos*³⁵.

Dentro de los aspectos a considerar en los trabajos de Isaac Newton antes presentados destacamos que:

- ◆ De la experiencia de los péndulos de Newton debe ser claro que la fuerza motriz impresa y fuerza no se refieren al mismo concepto, es decir, $\vec{F}_{neto} = m \cdot \vec{a}$; a lo que se refiere la fuerza motriz impresa es a lo que llamamos hoy impulso neto.

La fuerza motriz impresa es una cantidad integral, que da cuenta de la acción de la fuerza en un breve intervalo de tiempo, la cual está relacionada a un cambio total del momentum $\Delta(m.v)$; no es vista como una razón de cambio o como una derivada. En este contexto en la segunda ley, Newton relaciona el impulso y el momentum, distinto a como aparece en los textos de hoy.

- ◆ El contenido de las leyes de Newton supone que la fuerza tiene algunas propiedades independientes, distinta a la presentación $\vec{F} = m\vec{a}$, pero las propiedades específicas independientes que tiene la fuerza no son descritas totalmente por Newton y por los textos clásicos, por lo tanto asumirla como el producto de masa por la aceleración es incompleta y es necesario asumir las propiedades o características de la fuerza como por ejemplo que la fuerza tiene un origen fruto de la impenetrabilidad.
- ◆ Se hace necesario encontrar las fuerzas, cuando los cambios que ocurren a los cuerpos en su estado de movimiento son conocidos, es

³⁵ *Principios matemáticos de la filosofía natural*, pp. 149-150. Alianza Universidad. Madrid 1987.

decir la fuerza es derivable de los cambios de estado de movimiento detectados en la colisión; por lo tanto, la fuerza se convierte en un nombre más para la interacción de los cuerpos.

- ◆ Como consecuencia del anterior análisis se hace necesario abordar situaciones problemáticas que favorezcan una posible cuantificación de la fuerza desde las interacciones, como ocurre en la colisión de dos cuerpos, pues en conclusión una cosa es que conocidas las fuerzas, se quieren encontrar los cambios que ellas producen y otra cosa es que conocidos los cambios de estado de los cuerpos se quieran saber como son las fuerzas.

Capítulo 3

Cuantificación de magnitudes físicas

3.1. Introducción

Uno de los objetivos fundamentales de la física es la medición de magnitudes físicas. Por ello es necesario sentar las bases necesarias para tal proceso.

Usualmente en el proceso de medición, es el instrumento el encargado de arrojar un número y poco se indaga por el proceso que involucra asignarle ese número a la propiedad física en estudio.

Se hace necesario tomar conciencia de la complejidad que introducen en los procesos de medición los aparatos de medida para hacer uso más racional de ellos, ya que muchas veces es más complejo el uso y funcionamiento del aparato, que el fenómeno en estudio, como sucede con el uso de un multímetro en los laboratorios de electricidad, con el cual se pueden realizar diferentes medidas de una magnitud física.

Los instrumentos de medida utilizados en el laboratorio tienen la tendencia a privilegiar actividades que conducen a la “cuantificación” de una propiedad física en estudio frente a lo cualitativo. Es así que cuando se dice que un cuerpo A está más caliente que otro B , desde lo cualitativo (sensaciones por contacto) resulta menos significativo que cuando se dice que el cuerpo menos caliente A tiene una temperatura T_A y el cuerpo más caliente B tiene

una temperatura T_B desde lo cuantitativo. Es necesario percatarse que estas temperaturas T_A y T_B tienen significado en función de la imagen cualitativa que se tenga de ellas. Por lo tanto el paso de lo cualitativo a lo cuantitativo es complejo y el valor de lo cuantitativo es valioso en función de la comprensión que se produzca en el terreno de lo cualitativo. Un caso interesante ocurre cuando se mide la temperatura, en este proceso podemos preguntarnos: ¿en qué momento puede darse un significado de lo que mide el termómetro? ¿Qué relación tiene tal marca con lo que se entiende por temperatura? De la misma manera en la medida de una fuerza con ayuda de un dinamómetro podemos también preguntarnos: ¿En qué momento puede darse un significado a la medida dada por el dinamómetro? ¿Qué relación tiene la elongación con lo que se entiende por fuerza?

3.2. Medición de Fuerzas en forma tradicional

Usualmente, la *medición* se entiende como el proceso de *cuantificar* nuestra experiencia del mundo exterior. Así, medir es *comparar*



una magnitud con otra de la misma clase, tomada de manera arbitraria como referencia, denominada *patrón* y

expresar cuántas veces la contiene. Al resultado de medir lo llamamos *Medida*.

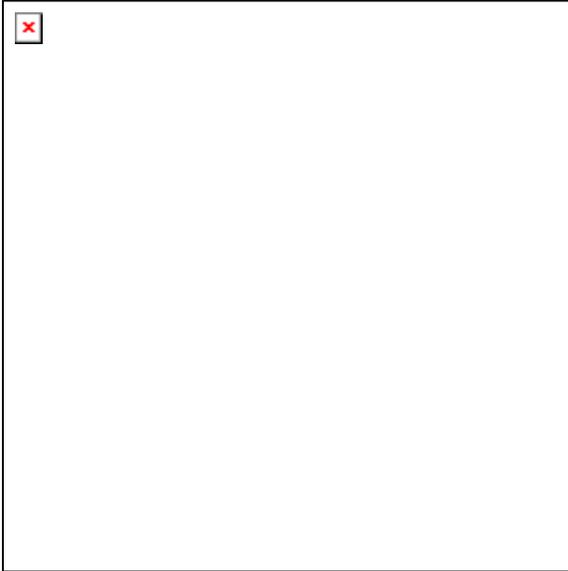
El *patrón* de medición que llamamos también *unidad de medida*, debe cumplir las siguientes condiciones³⁶:

- ◆ *Ser inalterable*, esto es, no ha de cambiar por el paso del tiempo ni en función de quién realice la medida.
- ◆ *Ser universal*, es decir utilizada por todos los países.
- ◆ Ha de ser *fácilmente reproducible*.

Así la medición se convierte en una técnica mediante la cual asignamos un número único, generalmente un número real, a una propiedad física, como resultado de una *comparación* con otra similar tomada como *patrón*, adoptada como unidad.

³⁶ Lea, M. Susan. y Burke John Robert. Física: Vol I. La naturaleza de las cosas. Ed. Thompson. México 1999. pp 23-25.

En este sentido, se denominan *magnitudes*, a las propiedades físicas



que se pueden medir.

Usualmente la medición de las fuerzas se restringe a la lectura de un número en la escala de un dinamómetro, del cual se ha suspendido una masa de su extremo que produce una elongación y en asocio con la ley de Hooke se obtiene un número de la medida de tal fuerza; tal medición es de tipo estático. Bajo esta perspectiva es necesario preguntarse ¿qué fuerza es la que se mide? ¿Se trata de la fuerza que ejerce la Tierra sobre la masa suspendida o de la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa m ? ¿Qué significa medir una longitud (alargamiento del resorte) y finalmente obtener una fuerza? ¿Cómo decidir si un dinamómetro es igual de confiable en su lectura que otro en el cual se produce una elongación diferente para una misma masa?

Otra forma de medir fuerzas es bajo la relación $\vec{F} = m\vec{a}$, desde esta forma se toma inicialmente una masa constante y luego se encuentra la velocidad instantánea en varios puntos buscando una aceleración constante o se hacen variar las masas y se buscan aceleraciones tal que el producto ma sea constante; este método se denomina dinámico. La cuantificación de la fuerza

en este último método trae algunos aspectos a analizar: si se quiere medir la fuerza, ¿por qué se parte de F conocida?, es decir se busca cuantificar la fuerza mediante el producto ma , el cual ya es una expresión conocida, dejando la ilusión de que la relación se obtiene empíricamente. ¿Es independiente la fuerza de las interacciones mismas? Es decir, se asume que la fuerza obedece la relación causa-efecto, por lo tanto conocida la causa es posible predecir los efectos independiente de la naturaleza de los cuerpos y de las condiciones iniciales. Por lo tanto será necesario considerar la fuerza a partir de las interacciones, donde conocidos los efectos es posible saber la forma de las fuerzas, las cuales dependen de la naturaleza de los cuerpos y de las interacciones mismas.

Responder a estas preguntas significa que es necesario abordar la medición de fuerzas no como el número asociado a una escala de un dinámometro sino que es necesario abordar todo el proceso que trae consigo tal asignación, el cual resulta importante para nuestros estudiantes a la hora de comprender conceptos físicos como lo es la fuerza.

3.3. Criterios para la medición de variables extensivas

La medición en una idea primitiva que parece pertenecer al sentido común, ya que se trata de algo plenamente familiar a cualquier persona civilizada de hoy día, pero en un sentido más amplio la medición puede definirse en general como la atribución de números³⁷ a propiedades para representarlas(Campbell, 1921:186)³⁸.

³⁷ En el proceso medición se asigna un único número, generalmente un número real, a una propiedad física, como resultado de una *comparación* con otra similar tomada como *patrón*; pero es necesario marcar una diferencia en la significación del número, ya que es usado en contextos distintos de la misma forma. A veces significa un nombre, palabra o símbolo y a veces significa una propiedad de un objeto. Por ejemplo una cosa es identificar un estudiante en una lista de clase con el "número" 18, para contestar a la lista y otra cosa es que este estudiante tenga 18 años de edad. Es de aclarar que el primer "número" 18 de la lista es un rótulo o nombre para identificar los estudiantes rápidamente, pero la edad de 18 años corresponde a una propiedad medible, de modo que es necesario precisar que los nombres símbolos o palabras se llaman "cifras", y reservando la palabra número para significar la propiedad siempre representada por cifras. Una forma de operar en ejercicios de física, muestra que si se quiere

De manera que las propiedades medibles de un objeto tienen que parecerse de algún modo particular a la propiedad de ser número, puesto que pueden representarse adecuadamente por los mismos símbolos. Tienen que tener alguna estructura común con los números, por lo tanto es necesario preguntarse ¿cuál es esta estructura común?

Campbell plantea que para que una variable extensiva sea medible debe cumplir las siguientes reglas (Campbell, 1921,187):

- 1. Dos objetos que respecto de esa propiedad sean lo mismo que un tercer objeto, sean lo mismo el uno que el otro.**
- 2. Por la adición sucesiva de objetos podemos construir una serie normal, un miembro de la cual sea lo mismo, respecto de la propiedad, que cualquier otro objeto que deseemos medir.**
- 3. Iguales añadidos a iguales, produzcan sumas iguales.**

Para conseguir que una propiedad sea medible tenemos que hallar algún método para decidir acerca de la igualdad y de la adición de objetos, de modo que se cumplan esas reglas.

encontrar la resistencia equivalente de $R_1 = 2\Omega$ y $R_2 = 3\Omega$ para un circuito en paralelo, las operaciones pueden desarrollarse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \text{ entonces } R_{eq} = \frac{6}{5}\Omega, \text{ en principio se opera con cifras y finalmente se asigna un número a la}$$

propiedad en estudio,

³⁸ Es necesario resaltar que no todas las propiedades pueden representarse mediante números por ejemplo el color o la dureza, entonces podemos preguntarnos ¿por qué hay propiedades medibles y propiedades no medibles?.

Para ilustrar la pregunta anterior, supongamos que tenemos dos litros de agua en recipientes separados que son idénticos en cuanto a volumen, peso, color y olor y que luego se mezclan en un solo recipiente, tendremos entonces que el peso y el volumen, la densidad y la temperatura son las propiedades medibles es este nuevo recipiente, sin embargo el color y el olor son propiedades no medibles.

Mostraremos ahora cómo la propiedad longitud satisface las tres reglas enunciadas. Sin embargo, es necesario establecer cuándo dos magnitudes son iguales y cuál es el procedimiento para adicionar tales magnitudes, aspectos que están directamente relacionados con la fenomenología de las propiedades en consideración.

Se dice que dos varillas rectas son iguales en longitud si pueden colocarse de tal modo que los dos extremos de una queden contiguos a los dos extremos de la otra; están sumadas respecto de la longitud cuando se colocan de tal modo que un extremo de la una es contiguo a un extremo de la otra, mientras las dos juntas forman una sola varilla recta.

Consideremos cinco varillas rectas de longitudes L_1 , L_2 , L_3 , L_4 y L_5 como lo muestra en la Figura 3.1.

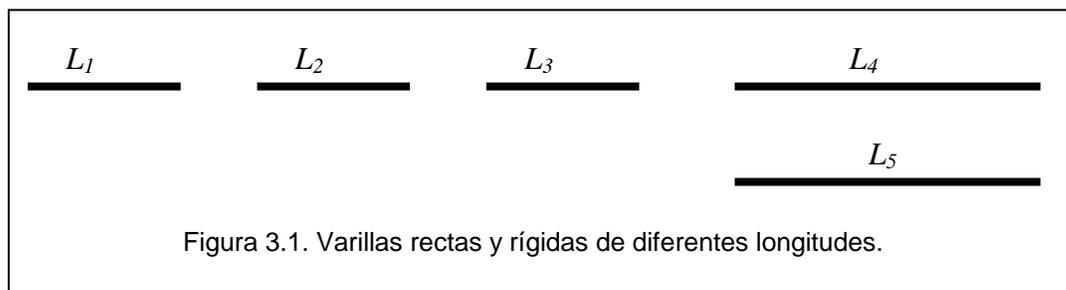


Figura 3.1. Varillas rectas y rígidas de diferentes longitudes.

A continuación mostraremos que la propiedad longitud cumple las tres reglas:

1. Dos cuerpos que sean iguales en longitud a un tercero, son iguales entre sí.

Si L_1 es igual a L_2 y L_2 es igual a L_3 entonces L_1 es igual a L_3 .

2. Sumando sucesivamente varillas unas a otras puede formarse una varilla que sea igual a cualquier varilla propuesta.

De la figura anterior obtenemos que $L_1+L_3=L_4$.

3. Varillas iguales sumadas a varillas iguales producen varillas iguales.

De la figura propuesta tenemos que si $L_1=L_3$ y $L_4=L_5$ entonces $L_1+L_4=L_3+L_5$.

La longitud es por lo tanto una propiedad extensiva medible, ya que cumple las tres reglas y existe un procedimiento en la experiencia para decidir acerca de la igualdad y adición de varillas.

Las anteriores reglas son las que hacen a las propiedades extensivas medibles y tan semejantes a los números que es posible y útil representarlas por cifras. Además por medio de estas reglas se posibilita encontrar una cifra y sólo una que represente adecuadamente un valor particular de la propiedad en estudio.

Dado que estas reglas son establecidas por aplicación a situaciones particulares, es la experiencia la que valida estas reglas, es decir, el experimento determina si ellas se satisfacen o no. Es de aclarar que estas reglas están sujetas para su validez a unas condiciones ideales, por ejemplo que existan varillas rectas y rígidas.

3.4. Criterios para la medición de variables intensivas

Las tres reglas anteriores son útiles para medir una magnitud física extensiva, sin embargo, existen algunas magnitudes físicas como la densidad, la temperatura, la velocidad, la fuerza, etc, que no cumplen el proceso fundamental descrito anteriormente. Es así como si tenemos un medio de densidad $13,6$ no es posible obtener este mismo número por

adiciones sucesivas de otro medio de densidad uno, es necesario por lo tanto detenernos en el procedimiento para este tipo de magnitudes.

La sensación fisiológica de calor y frío es el origen del concepto primario de temperatura. Podemos apreciar variaciones de temperatura de acuerdo con las variaciones de intensidad de estas sensaciones, pero el sentido del tacto carece de la sensibilidad y alcance necesarios para dar una forma cuantitativa a esta magnitud. Además, los efectos producidos por la conductividad de los cuerpos dan lugar a confusión en la apreciación de temperaturas al tacto. Así, por ejemplo, debido a la mejor conductividad de los metales, una pieza de hierro o aluminio parece más fría que un trozo de madera situado en el mismo recinto y, por tanto, a igual temperatura.

En este sentido, asignar un valor numérico a una temperatura, una densidad o una fuerza plantea un problema importante. En efecto, la mayoría de las magnitudes físicas suelen estar definidas por un valor numérico obtenido por comparación con otra tomada como referencia. A éstas se las conoce con el nombre de magnitudes extensivas, pues a partir del patrón de la unidad se pueden definir de forma sencilla, al menos conceptualmente, múltiplos y submúltiplos de ella. Este no es, evidentemente, el caso de la temperatura, la densidad y la fuerza que pertenece al grupo de las llamadas *variables intensivas*. Multiplicar o dividir por un número el valor de una temperatura no tiene significado físico alguno, por ejemplo cuando se mezclan dos litros de agua a temperatura ambiente. Esto nos lleva a plantearnos el estudio de las bases físicas en las que se funda el establecimiento de una escala de temperaturas y de fuerzas.

La primera condición que debe reunir un dinamómetro -como instrumento que mide fuerza- fiable es que siempre indique lo mismo ante fuerzas iguales.

Como ya hemos indicado, las variaciones de la fuerza sobre un medio van casi siempre acompañadas de una variación de las magnitudes observables o macroscópicas que caracterizan el estado de dicho medio. Así ocurre, por ejemplo, con la longitud de un resorte o de un alambre.

La medición de la fuerza en el caso estático depende de la deformación del medio elástico y por tanto, siempre es posible definir una escala de fuerzas basándose en la variación de la deformación de una de las características de un determinado cuerpo elegido como patrón y a la cual referiríamos todas las demás. Sin embargo esta escala sería totalmente arbitraria y no permitiría obtener de la fuerza todo su significado intrínseco. Por tanto, es necesario establecer criterios para definir una escala de fuerzas de carácter universal.

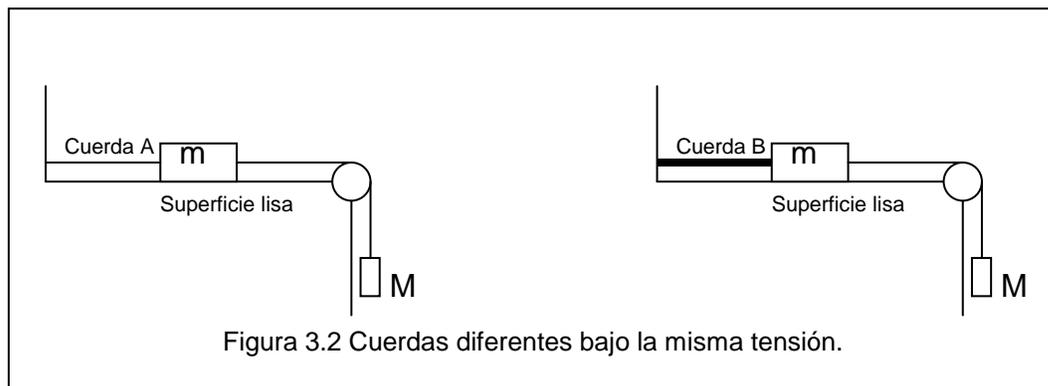
Dado que las magnitudes intensivas no cumplen las reglas de adición, es necesario percatarse de una semejanza respecto del orden³⁹, ya que cuando medimos una propiedad física se le atribuye un número único, en este sentido las cifras se caracterizan por un orden determinado, es así como decimos que dos sigue a uno y precede a tres. El orden es característico de las cifras y resulta útil para la medición de magnitudes intensivas ya que es característico de propiedades representadas por cifras.

Un segundo criterio para la posible cuantificación de una magnitud física intensiva nos lleva a la atribución de números para una propiedad en estudio previamente ordenada, es así que cuando tenemos una propiedad ordenada según A , B , C ., existen infinitos números que pueden atribuirse a dicha propiedad, como son 1 a A , 2 a B , 3 a C ., o también 10 a A , 20 a B y 30 a C .

³⁹ El orden de una magnitud intensiva se establece en la experiencia, es decir por el conocimiento de su fenomenología.

Para lograr la asignación de un número único a una propiedad física en estudio, Campbell propone encontrar una relación entre valores numéricos que representan otras magnitudes extensivas, así por ejemplo que para la densidad del agua se atribuye un valor único en virtud de las magnitudes extensivas masa y volumen (Campbell, 1921:198).

Las fuerzas en general no son extensivas, por ejemplo la tensión en una cuerda horizontal es de tipo intensivo, es decir, la fuerza a lo largo de la cuerda horizontal no cambia si aumentamos o disminuimos la masa de la cuerda o inclusive si se cambia su longitud, como lo muestra la Figura 3.2.



Si se coloca un dinamómetro en la cuerda *A* y luego se coloca el mismo dinamómetro en la cuerda *B* encontraremos la misma tensión; de otro lado la lectura del dinamómetro no depende del punto donde éste se localice a lo largo de la cuerda.

3.5. Medición de Fuerzas

Consideraremos un medio elástico que denominaremos *B* y dos cuerpos *A* y *C*. Si el cuerpo *A* suspendido del medio elástico *B* produce la misma variación de la deformación que el cuerpo *C* suspendido del mismo medio, entonces diremos que el peso de *A* es igual al peso de *C*.

Para la segunda regla consideraremos un cuerpo A que produce una variación de la deformación x_A en el medio B . Si al suspender un cuerpo C se produce una variación de la deformación x_C menor que x_A es posible construir una colección, añadiéndole continuamente otros cuerpos D, E, F , etc, al cuerpo C , que produzca la misma variación de la deformación que produce el cuerpo A .

Finalmente para la tercera regla, si un cuerpo A produce la misma variación de la deformación que un cuerpo C sobre el mismo medio B y un cuerpo D produce la misma variación de la deformación que un cuerpo E en el mismo medio B , tendremos que la variación de la deformación producida por A y D ($A+D$) será igual a la variación de la deformación producida por los cuerpos C y E ($C+E$).

El peso es por lo tanto una propiedad medible, ya que cumple las tres reglas y posibilita la medición de la propiedad peso.

Dado que estas reglas son establecidas por aplicación a situaciones particulares, es la experiencia la que válida estas reglas, es decir, el experimento determina si ellas se satisfacen o no. Es de aclarar que estas reglas están sujetas para su validez a unas condiciones ideales, por ejemplo, cuando se suspende el cuerpo A del extremo del medio elástico, suponemos que tal medio no sufre una deformación permanente. La siguiente cita muestra como la ley de Hooke necesita de la experiencia para su validez:

En 1678 Robert Hooke escribió:

“La teoría de los resortes, aunque intentada por diversos matemáticos eminentes de esta época, hasta ahora no ha sido publicada por ninguno. Han

pasado casi dieciocho años desde que yo la encontré, pero decidiendo aplicarla a algún caso particular, omití su publicación.....”⁴⁰

Ahora bien si un cuerpo A produce una variación de la deformación que no supera el límite elástico en un medio B y un cuerpo C produce la misma variación de la deformación en el mismo medio B , diremos que el peso de A es igual al peso de C , pero si el cuerpo A produce una variación de la deformación dentro del límite elástico y el cuerpo C produce otra variación de la deformación menor que la que produce el cuerpo A , será necesario considerar un cuerpo D tal que produzca otra variación de la deformación menor que la del cuerpo A , diremos entonces que el peso de A es igual a la suma de los pesos de C y D , sólo si tales variaciones de las deformaciones se producen dentro del límite de proporcionalidad del medio B , ya que si la variación de la deformación producida por el cuerpo A supera el límite de proporcionalidad no es posible decir que el peso de A sea igual a la suma de los pesos de C y D , si las variaciones de las deformaciones producidas por C y D se encuentran en el límite de proporcionalidad.

Según el análisis antes descrito una propiedad es medible y su procedimiento para medirla se basa en la investigación experimental. Por lo tanto el peso es medible porque cumple las tres reglas antes mencionadas, pero es necesario percatarse que el peso de un cuerpo es una magnitud extensiva ya que por la combinación de objetos que poseen la propiedad aumenta dicha propiedad, es decir la propiedad en estudio aumenta por adición.

⁴⁰ Arons B. Arnold. Evolución de los conceptos de la física. Editorial Trillas, México 1970. pp. 188.

3. 6. Comportamiento de medios elásticos y contrastación con la ley de Hooke.

Usualmente la Ley de Hooke es presentada en clase de una manera ideal, a través de ella se hace énfasis en la linealidad como una característica esencial para medir fuerzas y poco se indaga por otras propiedades o características de los medios elásticos.

El siguiente análisis busca contrastar la teoría hecha en clase cuando se enuncia la ley de Hooke de la forma $F = -kx$, con los resultados encontrados en el laboratorio.

Cuando se llevan los estudiantes al laboratorio, queremos que ellos “vean” lo que se propuso en clase a nivel teórico, sin la posibilidad de que hagan reflexiones sobre lo que se está midiendo y sobre por qué determinados instrumentos constituyen un medio adecuado para medir. Cuando se está experimentando con masas suspendidas en el extremo de un resorte, lo que se está midiendo es la fuerza que ejerce la Tierra sobre la masa que cuelga del resorte y no la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa que es a la que se refiere la ley de Hooke, la cual no puede ser medida.

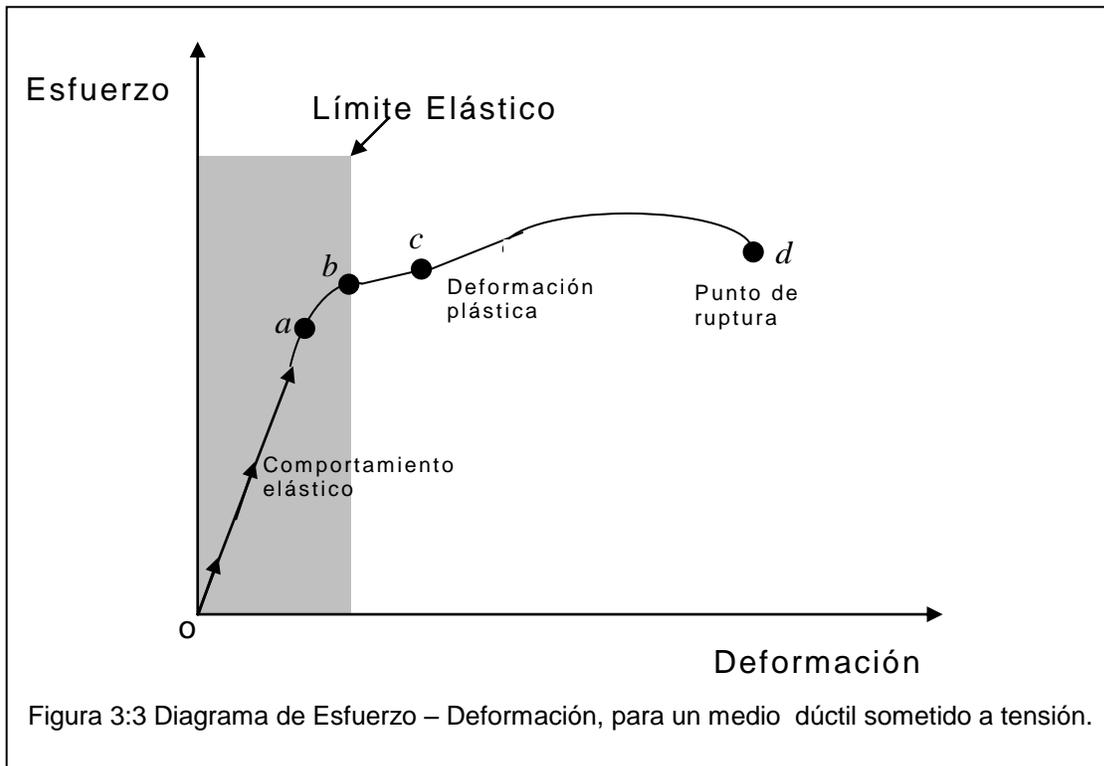
En las prácticas de laboratorio es necesario considerar que los resortes dejen de ser ideales y se conviertan en resortes reales, es decir, son medios elásticos en los que se debe considerar la masa del resorte, la cual es equivalente a suspender un cuerpo de masa $m/3$ en el extremo del resorte, donde m es la masa del resorte⁴¹. En ocasiones se esconden las masas que se suspenden del resorte, para las cuales la ley de Hooke no se cumple, es decir, cuando se suspenden masas muy grandes que sobrepasan el límite

⁴¹ Citados por: Resnick Robert, Halliday David and Krane Kenneth, Física Volumen I, Cuarta edición, Editorial CECSA, 1995. pp. 376. (véase H. L. Armstrong, American Journal of Physics, Vol 37, pp 447,1969)

de proporcionalidad para la cual no es válida esta ley. Además se hace énfasis en que para ciertas masas los resortes no recuperan su forma inicial, después de quitar las masas, es decir cuando se supera el límite elástico.

Podríamos preguntarnos: ¿Cuáles son exactamente las limitaciones de la ley de Hooke?

Una representación gráfica de esfuerzo versus deformación por tensión se muestra en la Figura 3.3 (Sears et al, 1996:345)

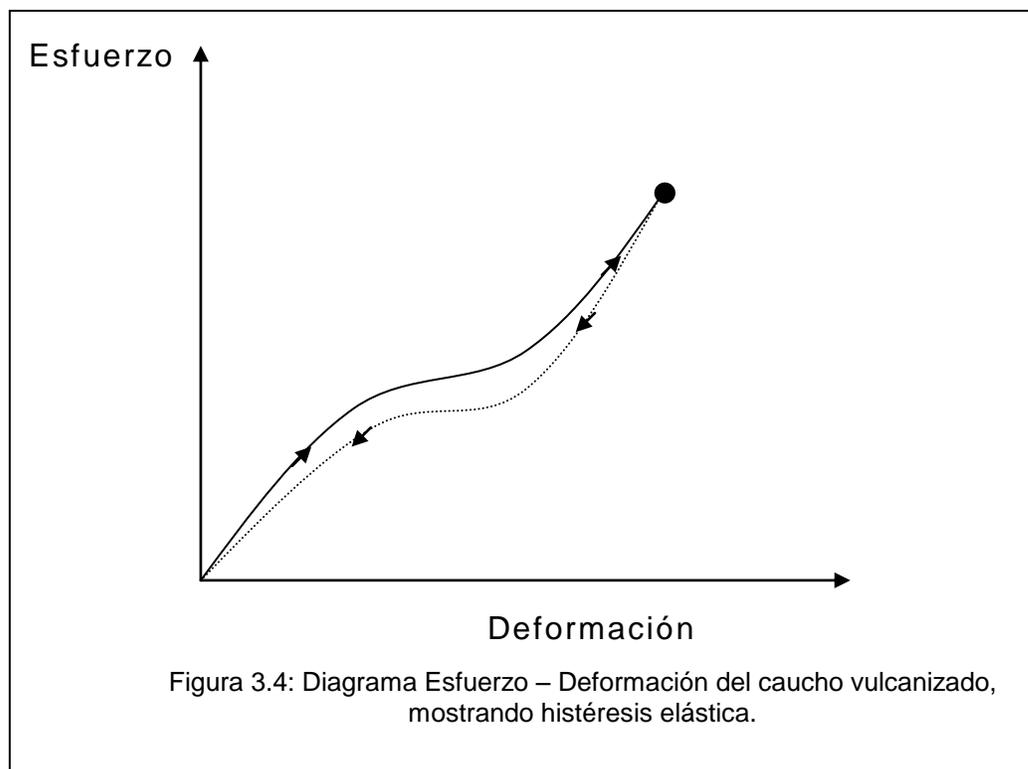


Si se cumple la ley de Hooke, la curva será una recta con pendiente igual al módulo de Young. La primera porción es una línea recta, lo que indica un comportamiento según la ley de Hooke, con el esfuerzo directamente proporcional a la deformación. Esta parte termina en el punto *a* de la Figura 3.3; el esfuerzo en este punto se llama límite proporcional. De *a* a *b*, el esfuerzo y la deformación ya no son proporcionales y no se cumple la ley de

Hooke, pero si la carga se retira gradualmente, la curva se sigue a la inversa hasta que el medio recupera su longitud original. En este sentido la deformación es reversible y las fuerzas son conservativas. En la región ob el medio tiene un comportamiento elástico. El punto b se denomina punto de relajamiento y el esfuerzo en este punto se llama límite elástico.

Si aumentamos el esfuerzo más allá de b y retiramos la carga en un punto c , el medio o material ya no recupera su longitud inicial, el medio sufre una deformación irreversible.

La Figura 3.4. Muestra una curva de esfuerzo deformación de caucho vulcanizado.



En la Figura 3.4, el esfuerzo no es proporcional a la deformación, pero el comportamiento es elástico porque al retirarse la carga el material recupera su longitud original. Sin embargo el material sigue diferentes curvas cuando

aumenta y cuando disminuye el esfuerzo. Esto se denomina histéresis elástica, hay fuerzas no conservativas a la fricción interna del medio.

3.7. Análisis a las preguntas del Taller 3⁴²

Inicialmente se indaga por el modelo conceptual que cada uno de los estudiantes tiene sobre los instrumentos de medida de fuerza y se observa si al final, después de las preguntas planteadas en el taller logran modificar de alguna manera sus modelos.

Con las gráficas construidas se muestra, que distinto a lo que pasa en el laboratorio en el cual se le pide a los estudiantes que adicionen masas en el extremo de un medio elástico, es necesario mostrar también que quitando masas se puede obtener elongaciones distintas y en el caso de obtener las mismas elongaciones al quitar o agregar masas se presentará en la gráfica una sola curva o una sola recta, esto significa que el medio es adecuado para medir fuerzas, así no sea de tipo lineal⁴³.

La construcción de las gráficas permite observar que el comportamiento no es el mismo agregando que quitando masas en todos los medios elásticos.

Se tiene la creencia que el medio más adecuado para medir fuerzas es aquel que recupera su estado natural, es decir no diferencian entre el límite de proporcionalidad y el límite elástico. Se busca que el estudiante evidencie la existencia de un único valor de deformación para un único valor de peso, lo cual corresponde con la idea de función.

⁴² Las preguntas de este taller se encuentran en el capítulo 4 página 97.

⁴³ Arons B. Arnold. Evolución de los conceptos de la física. Editorial Trillas, México 1970. pp. 188-189. "Muchas deformaciones elásticas son bien descritas por una relación lineal, una ley de Hooke, pero hay muchos casos en los cuales la situación es más complicada: los resortes pueden hacerse deliberadamente no uniformes de manera que presenten una ley de fuerza no lineal. Algunos objetos incluyendo los resortes ordinarios, pueden presentar una ley lineal de fuerza hasta que ellos son cargados demasiado y son estirados más allá de sus límites elásticos; la gráfica de F contra x deja entonces de ser una recta".

Seguidamente se indaga si para los estudiantes el hecho de que un medio elástico recupere su longitud natural, constituye un medio adecuado para medir fuerzas ya que todos los medios elásticos presentados recuperan su longitud original y en el que es necesario diferenciar entre un límite de proporcionalidad y un límite elástico, en el cual se presenta la reversibilidad del medio.

Más que indagar por la linealidad, se busca encontrar cual gráfica es más adecuada en virtud de que agregando o quitando masas, corresponda a la misma función, es decir que las gráficas se superpongan o se aproximen entre sí. Con esto se busca establecer que para un medio elástico adecuado sólo existe un valor de deformación para una masa dada.

Si bien para masas muy pequeñas es difícil percibir las elongaciones, las gráficas deben mostrar una tendencia a cero.

Finalmente se pregunta por las características que debe cumplir un medio elástico para la medición de fuerzas y apreciar en qué medida las respuestas dadas por los estudiantes cambian respecto a la primera.

3.8. Ordenación de fuerzas desde las interacciones y establecimiento de la unidad patrón.

Tal como lo plantea Euler si se quiere medir la fuerza absoluta F que actúa durante una colisión es necesario conocer la variación de la deformación Δx . Consideremos entonces una fuerza F proporcional a la variación de la deformación Δx , así que, $F=k\Delta x$, porque las fuerzas requeridas para producir en los cuerpos estas deformaciones, estarán en la misma razón que las deformaciones mismas. La letra k designa una cantidad que depende del grado de dureza de los cuerpos: entre más duros sean los cuerpos más grande debe ser la fuerza que sea capaz de producir una variación de la deformación Δx . Sea $F_1=k\Delta x_1$ una fuerza por la cual se presionan uno con otro dos cuerpos en cuestión. Para medir la variación de la deformación que será producida, supongamos que esta variación de la deformación ocurre a una profundidad igual a Δx_1 , de donde se concluye que para producir una variación de la deformación igual a Δx es necesario una fuerza igual a $F_1\left(\frac{\Delta x}{\Delta x_1}\right)$. Por lo tanto F toma la forma:

$$F = F_1 \frac{\Delta x}{\Delta x_1} \quad (1)$$

F se convierte en una medida de la fuerza en términos de la fuerza F_1 y las variaciones de las deformaciones. Nótese aquí cómo una posible cuantificación de la fuerza sólo es posible en términos de F_1 , es decir la posible cuantificación se hace en términos de magnitudes de la misma clase y es necesario el establecimiento de una unidad patrón F_1 . De otro lado Euler nos muestra que, fijados los cambios de estado de movimiento, la fuerza absoluta F tiene un valor único para cada variación de la deformación durante la interacción; igualmente la reproducibilidad de esta fuerza absoluta

F está asociada a la constante elástica k , es decir mientras esta constante no cambie la fuerza puede ser reproducida.

Si queremos medir la fuerza F_1 es necesario pensar en una unidad de fuerza patrón. La confianza en la medida de F_1 dependería de la reproducibilidad en la unidad patrón y en la variación de la deformación.

La ecuación (1) nos permite obtener un criterio para ordenar fuerzas, sin recurrir a las masas de los cuerpos, ni a la aceleración de la gravedad, ni a la constante del resorte como se hace tradicionalmente cuando se suspende una masa al extremo de un resorte de constante elástica k . Así por ejemplo si tenemos dos cuerpos que chocan y las variaciones de las deformaciones durante la interacción son Δx_1 , Δx_2 y Δx_3 para instantes diferentes y para cambios de estado fijos, tal que $\Delta x_1 < \Delta x_2 < \Delta x_3$, y elegimos arbitrariamente la fuerza patrón asociada a la variación de la deformación Δx_1 , tendremos un buen criterio para ordenar fuerzas, de modo que:

$$F_3 > F_2 > F_1.$$

Lo que nos muestra que la fuerza absoluta F aumenta a medida que aumenta la deformación. Sin embargo es posible obtener un criterio de orden mucho más refinado si tenemos en cuenta la relación (1), de donde podemos obtener que:

$$F_2 = F_1 \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \text{ y } F_3 = F_1 \frac{\Delta x_3}{\Delta x_1}$$

Para una posible cuantificación de la fuerza absoluta F en términos de la fuerza patrón es necesario conocer las variaciones de las deformaciones que se producen durante la interacción, la cual es posible encontrar en forma experimental, con ayuda de una cámara digital que nos muestre las variaciones de las deformaciones en instantes diferentes durante la interacción.

Se hace necesario reflexionar sobre la fuerza patrón apropiada, la cual puede escogerse arbitraria si queremos ordenar fuerzas. Si queremos cuantificar F_2 y F_3 , debemos cuantificar la fuerza patrón F_1 , para esto es necesario conocer la naturaleza del medio deformado, es decir, conocer la constante elástica k , la cual no es posible de determinar en forma experimental a partir de la misma ley propuesta⁴⁴.

Del proceso anterior debe ser claro que una cosa es partir de que $\vec{F} = m\vec{a}$, la cual muestra que la fuerza es medible independiente de las interacciones mismas, y otra cosa es obtener las fuerzas a partir de las interacciones donde inicialmente se estableció una proporcionalidad entre la fuerza y la deformación, mostrando que la fuerza depende de las interacciones mismas. Luego se estableció un criterio para ordenar fuerzas en términos de una fuerza patrón F_1 ya que el criterio de orden debe obedecer comparaciones de elementos de la misma clase, es decir se comparan fuerzas en términos de fuerzas.

Por otro lado la relación $F = F_1 \frac{\Delta x}{\Delta x_1}$ o $F\Delta x_1 = F_1\Delta x$ nos muestra que una

posible cuantificación de la fuerza no es independiente de la naturaleza de los cuerpos mismos, ya que depende de las variaciones de las deformaciones de ellos, es decir que conocidas las variaciones de la deformación es posible conocer qué tan grande o que tan pequeña puede ser la fuerza durante la interacción. Sin embargo Euler nos muestra lo complejo que es pensar en una cuantificación de la fuerza absoluta F , ya que tal fuerza es una función que depende de la misma variación de la deformación del cuerpo, por lo tanto es posible formarse una idea de la

fuerza absoluta F conocida la variación de la deformación pero es difícil saber como varía la fuerza para cada instante de la interacción.

Una mirada a la ecuación planteada por Euler:

$$F\Delta z = \frac{m_A m_B (v_a - v_b)^2}{m_A + m_B} \quad (2)$$

nos muestra que la fuerza absoluta F depende no sólo de las variaciones de las deformaciones de los cuerpos que interactúan, sino que es necesario conocer la naturaleza de los cuerpos y las condiciones iniciales con las que se efectúa la interacción. De la última relación es posible conocer la fuerza absoluta F si se conoce la naturaleza de los cuerpos, las condiciones iniciales y la variación de la deformación máxima durante la interacción. Donde la variación de la deformación Δz es igual a la diferencia de las variaciones de las deformaciones de los dos cuerpos, es decir $\Delta z = \Delta x - \Delta y$.

De igual forma, la ecuación:

$$\overline{F_B}(t) \cdot \Delta t = \Delta m_B v_B \quad (3)$$

muestra que es posible conocer la fuerza promedio F_B si se conoce el tiempo de interacción, la masa y la velocidad inicial.

Sin embargo las ecuaciones (2) y (3) muestran en el lado derecho que es necesario conocer la naturaleza de los cuerpos y las condiciones iniciales si se quiere conocer el esfuerzo ($F\Delta z$) o la fuerza impresa ($F\Delta t$).

⁴⁴ Bajo la relación $F=k\Delta x$ por si sola, no es posible obtener la medida de k sin que se conozca la medida de F y Δx , es decir una medida de k implica que F es conocida.

De otro lado existe una gran diferencia entre la fuerza absoluta F de la ecuación (2) con la fuerza promedio de la ecuación (3), ya que en la ecuación (2) se puede obtener el valor de la fuerza absoluta F máxima si se conoce la variación de la deformación Δz , mientras que en la ecuación (3) sólo es posible conocer la fuerza promedio si se conoce el tiempo que dura la interacción.

3.9. Cantidad de movimiento de un cuerpo

Los movimientos que observamos en el mundo que nos rodea son, en general, complejos. Por ejemplo el movimiento de las nubes en el cielo, el movimiento de las hojas de un árbol provocadas por el viento, los movimientos caóticos y turbulentos del agua y del aire, etc. Esta complejidad nos obliga a que en algunos casos elijamos una abstracción en la cual se asumen los cuerpos como si fueran “partículas” ignorando tanto el cambio de forma como las complejas trayectorias geométricas seguidas por los cuerpos; en esta propuesta, por el contrario, consideraremos a los cuerpos susceptibles de ser deformados de modo que no encaja en nuestro estudio considerar los cuerpos como partículas o cuerpos rígidos.

La mecánica estudia fundamentalmente el movimiento de los cuerpos; nuestro estudio se centrará exclusivamente en el aspecto mecánico de un proceso físico, en este sentido, estudiaremos si un objeto se mueve, y cómo es su movimiento.

Para iniciar la descripción física y la historia del movimiento de un cuerpo, es necesario definir el sistema para caracterizar las variables relevantes del fenómeno en estudio.

Si consideramos un cuerpo de masa m que es lanzado desde el extremo de un riel de aire sin fricción, identificamos la masa como el *sistema* en estudio. Entre las variables que caracterizan el estado de movimiento del cuerpo está la velocidad. Existe otra variable de estado no muy familiar, que necesitamos también para describir el movimiento y que sirve para diferenciar el estado de reposo de un cuerpo y el estado de movimiento de otro cuerpo, esta variable representa algo que está contenido en el cuerpo en movimiento y no cuando está en reposo, es decir, es algo que aparece cuando el cuerpo está

en movimiento y desaparece cuando el cuerpo está en reposo; se reconoce con el nombre de *cantidad de movimiento o momentum* y se representa con la letra P . En algunos textos clásicos la cantidad de movimiento es también llamada *impetu o momento*.

Si se lanza un deslizador de masa m sobre un riel de aire sin fricción mediante un disparador provisto de un resorte, para elongaciones distintas del resorte, el deslizador se moverá con velocidades diferentes y, por tanto, con cantidad de movimiento diferentes, siendo mayor en aquella situación en la que la velocidad es mayor; es decir, cuanto mayor sea la velocidad de un cuerpo, mayor será el momentum que contiene.

Ahora consideremos que el disparador lanza dos deslizadores que tienen masas diferentes pero son lanzados con la misma velocidad, en este caso tendremos que el deslizador de mayor masa contiene mayor momentum.

Las anteriores consideraciones nos permiten concluir que un cuerpo en movimiento contiene cierta propiedad física que depende al mismo tiempo, de su masa y su velocidad, es decir: $p = mv$. De acuerdo con esta relación las unidades de p en el sistema internacional son: $Kg \cdot \frac{m}{s}$, a este producto de unidades se le conoce en algunos textos con el nombre de *Huygens*, y su símbolo es H_y , en honor al físico Chistian Huygens (1629 – 1695), que contribuyó de manera importante al descubrimiento de la magnitud del momentum(Herrmann, 1992:25).

Experimentos simples como los anteriores pueden llevarse a cabo de diferentes formas; por ejemplo se puede hacer que los deslizadores se muevan sobre el riel de aire en sentido contrario para que choquen, se pueden usar bolas de billar, balines de acero. También pueden efectuarse

experimentos semejantes alterando las masas de los cuerpos en colisión cargando o descargando los deslizadores del laboratorio.

Algunas de las regularidades que pueden observarse rápidamente en los experimentos de colisión elásticas entre dos cuerpos de masa m_1 y m_2 son:

Considere que el cuerpo de masa m_2 se encuentre en reposo y el cuerpo de masa m_1 este moviéndose hacia m_2 con una velocidad v .

Si $m_1 = m_2$ entonces m_1 se detiene después de la colisión y m_2 se moverá con la velocidad que tenía m_1 .

Si $m_1 > m_2$, ambos cuerpos se mueven en la misma dirección de m_1 después de la colisión, moviéndose m_2 más rápido que m_1 .

Si $m_1 < m_2$ entonces el cuerpo m_1 rebota mientras que m_2 se mueve en la dirección inicial de m_1 .

Si los cuerpos quedan juntos después de la colisión, la combinación se mueve en la dirección original de m_1 con una velocidad menor que la que traía.

Si los cuerpos m_1 y m_2 se mueven inicialmente uno hacia el otro con velocidades iguales y opuestas entonces:

Si $m_1 = m_2$ los cuerpos rebotan con velocidades iguales y opuestas.

Si $m_1 = m_2$ y los cuerpos quedan juntos después de la colisión, la velocidad final es cero.

Entre las colisiones rectilíneas simple, podemos identificar tres clases diferentes(Alonso y Finn, 1992:300):

- ◆ Los cuerpos en colisión quedan juntos y se mueven como una sola unidad después de la colisión, tales colisiones se llaman perfectamente inelásticas.
- ◆ Cuerpos de masas iguales, aproximándose con velocidades iguales y opuestas, rebotan con velocidades invertidas en dirección, pero con la misma magnitud, tales colisiones se llaman perfectamente elásticas.
- ◆ Cuando los cuerpos rebotan, la velocidad relativa entre ellas después de la colisión se invierte en dirección, pero es más pequeña en magnitud que la velocidad relativa antes de la colisión, tal colisión se reconoce como parcialmente elástica.

Consideremos ahora dos deslizadores de masa m_1 y m_2 sobre un riel de aire sin fricción, tal que m_2 se encuentre en estado de reposo en el riel y m_1 es lanzado por un disparador hacia m_2 .

¿Qué cambios de movimiento se llevan a cabo cuando m_1 y m_2 chocan?.

En esta situación si $m_1 = m_2$, entonces después de la colisión m_1 cambia su estado de movimiento al estado de reposo y m_2 cambia su estado de reposo a un estado de movimiento, m_2 se mueve en la dirección que inicialmente tenía m_1 .

Examinemos este fenómeno indicando lo que ocurrió a la variable de estado llamada momentum: Antes del choque m_1 contenía una cierta cantidad de

movimiento. En el transcurso del choque, el momentum de m_1 se traslada a m_2 , de modo que después del choque m_1 carece de momentum.

Si repetimos el experimento anterior pero colocamos un pedacito de plastilina en ambos deslizadores de modo que después de la colisión los deslizadores queden juntos, moviéndose con una misma velocidad, el experimento transcurre de una manera totalmente distinta: Al principio el deslizador de masa m_1 se mueve y el deslizador de masa m_2 está en reposo, después del choque los dos deslizadores se mueven juntos con la misma velocidad y en la dirección que tenía inicialmente m_1 . La velocidad después del choque, es menor que la velocidad del deslizador de masa m_1 antes del choque. En este caso, no todo el momentum ha sido trasladado del deslizador de masa m_1 al deslizador de masa m_2 , sino que el momentum que tenía m_1 inicialmente ha sido repartido de forma equitativa entre los dos deslizadores, lo cual quiere decir que tienen el mismo estado, de modo que al final cada uno tiene la mitad del momentum que inicialmente tenía el deslizador de masa m_1 .

Para las situaciones planteadas vemos que el cuerpo de masa m_2 inicialmente presenta un estado de movimiento cero y después de la colisión presenta un estado de movimiento, por lo tanto podemos concluir que este cambio de estado es consecuencia de la interacción o choque de los cuerpos, un análisis similar se puede hacer para m_1 .

Si denotamos por p_{i2} la variable inicial de estado para el cuerpo de masa m_2 y por p_{f2} la variable de estado final de m_2 , el cambio de estado de m_2 viene dado por:

$$\Delta p = p_{f2} - p_{i2}$$

Este cambio Δp se conoce como *impulso* se representa con la letra I y tiene las mismas unidades que p .

El impulso es un concepto útil para describir interacciones rápidas, es decir, las interacciones que ocurren en intervalos de tiempo muy breves, (del orden de 10^{-4} segundos). Para que suceda un gran cambio en el momentum lineal en un intervalo de tiempo muy breve, la rapidez de transferencia del momentum lineal debe ser muy grande (Lea y Burke, 1999:202)

Tenemos entonces una relación algebraica entre las condiciones inicial y final del movimiento sin hacer referencia alguna a las etapas intermedias. En los textos clásicos de física esta forma de ver corresponde a la forma integral, sin embargo la mirada que se hace en el presente análisis corresponde a una mirada por estados y transformaciones (Guidoni, 1995:25).

Capítulo 4

Talleres como estrategias para la formalización del concepto de fuerza.

4.1. Metodología de Trabajo desarrollada en los talleres.

Usualmente los laboratorios de Física en la Universidad EAFIT se desarrollan alrededor de una guía de trabajo, donde los estudiantes realizan una secuencia detallada dada por las mismas guías. Dentro de las dificultades identificadas en esta forma de asumir el desarrollo de los laboratorios encontramos:

- ◆ Los estudiantes ya tienen las guías desarrolladas por prácticas realizadas en semestres anteriores recurriendo a ellas para su informe
- ◆ No se presenta la oportunidad de proponer diseños para una situación problemática dada.
- ◆ No existe un espacio común en el cual los estudiantes puedan discutir los resultados, los resultados presentados en los informes son acomodados buscando validar la teoría.

En la búsqueda por superar estas dificultades en los laboratorios, el área de física del departamento de ciencias básicas de la universidad viene implementando una serie de estrategias didácticas en el que el estudiante se vea continuamente impelido a formularse preguntas pertinentes y relevantes en la búsqueda de posibles soluciones. La experimentación propicia

entonces un ejercicio interrogativo recurrente y consciente que, más que ninguna otra figura pedagógica, permite disciplinar al estudiante en *haceres interrogativos* útiles en la solución de problemas reales.

En particular para la práctica de la Ley de Hooke en los laboratorios de física de los medios, los estudiantes realizan mediciones agregando y quitando masas al extremo de un medio elástico elegido por el docente al comenzar la práctica. Luego construyen una gráfica de F vs x , y se coloca en común para dar comienzo a la plenaria. En ningún momento se entrega informe escrito, sino que es construido durante la plenaria por todo el grupo.

4.2. Intención de los talleres.

Con el taller 1 se busca establecer el reconocimiento de las variables de estado asociadas a un sistema. Más que analizar lo que sucede después de una colisión de dos cuerpos queremos detenernos en lo que ocurre durante la interacción, lo cual favorece el establecimiento del origen de las fuerzas y su dependencia con la naturaleza de los cuerpos y las condiciones iniciales.

La siguiente experiencia pretende mostrar, a partir de las colisiones elásticas unidimensionales, una manera de ordenar fuerzas. Para ello se analizará la fenomenología de los cambios de estado y la idea de cantidad de movimiento.

El taller está centrado en dos aspectos: Uno en el cual se familiarice con la cantidad de movimiento desde lo cualitativo y lo cuantitativo y otro en reconocer los cambios en el movimiento.

Se caracterizarán los estados de movimiento y las condiciones en las que se evidencia que dos sistemas colisionan en términos mecánicos. Se analizará lo que ocurre antes, durante y después de la colisión.

Con el taller 3 se muestra la importancia que tiene para la clase, la contrastación experimental en el desarrollo de las actividades. Se analizan las condiciones necesarias que debe tener un medio elástico para medir fuerzas, así como las relaciones entre los resultados del taller y la teoría en torno a la ley de Hooke.

Usualmente la deformación que experimenta un resorte bajo la acción de una fuerza externa se constituye en un buen ejemplo para ilustrar la importancia del experimento para llegar a las leyes de la física, en este caso a la ley de Hooke.

En el proceso de medición es necesario precisar: La ley de Hooke es una abstracción que no es válida para los resortes reales. Los únicos resortes que obedecen la ley de Hooke son los ideales, para los cuales es válida la relación de proporcionalidad. Esta abstracción se construye, claro está, a partir del comportamiento de resortes reales, pero no seleccionando los datos apropiadamente ni ocultando las pesas para los cuales no se cumple la ley, sino idealizando tal resorte (Segura Dino, 1993:131).

Tenemos pues que la ley de Hooke no es una relación que se obtiene directamente en el laboratorio a partir de los datos. Es más bien una construcción teórica que se logra a partir de ellos. Lo cual se puede constatar en lo siguiente(Segura Dino, 1993:132):

- ◆ La ley es sólo válida para resortes que han sido contruidos teóricamente y que consecuentemente, no existen en el laboratorio.
- ◆ La fuerza que hace el resorte y que es a la que se refiere la ley no se puede medir.

Las implicaciones sin embargo van mucho más allá: Frente a un resorte colgado, mientras el maestro ve la ley de Hooke (desde la teoría), el estudiante ve cosas enteramente diferentes (desde su preteoría). Y el paso de una visión a la otra requiere de un cambio conceptual, en nuestro caso requiere de la mecánica Newtoniana.

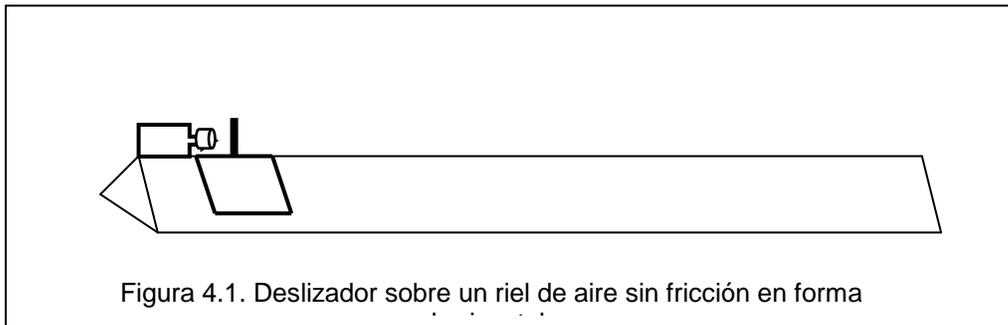
Afirmar que la ley de Hooke se obtiene en el laboratorio es desconocer la reestructuración que se hace necesaria en el momento en que se observa un resorte deformado: en vez de ver la fuerza que lo deforma y la deformación que produce ésta, debemos ver la fuerza que hace el resorte oponiéndose a deformaciones ulteriores; y ese paso no es sencillo.

4.3. TALLER 1

Identificación de las variables de estado desde las colisiones

Situación 1:

Considere un riel de aire en posición horizontal con un disparador el cual lanza un deslizador o cuerpo C_1 colocado en uno de los extremos del riel. (ver Figura 4.1). Suponga en principio que no hay fricción entre el riel de aire y el cuerpo que desliza.



Parte A.

- ◆ Describa el movimiento del cuerpo que se desliza después de ser lanzado por el disparador.
- ◆ ¿Qué pasa con la situación anterior si se cambia de cuerpo?
- ◆ ¿Considera que el cuerpo es una variable que interviene en el movimiento?
- ◆ ¿Es posible que el cuerpo C_1 cambie su estado de movimiento por sí solo, pasando por ejemplo a un estado de movimiento cero?
- ◆ ¿Cómo se puede evidenciar un cambio de estado?

Parte B.

- ◆ Proponga una situación en la cual un cuerpo en movimiento no cambie de estado y otra situación en la cual un cuerpo en movimiento cambie de estado.
- ◆ Para la pregunta anterior cuáles son las variables que caracterizan el estado de movimiento cero o de movimiento.
- ◆ ¿Qué pasaría si se interpone sobre el riel otro deslizador C_2 en estado de movimiento cero en el camino de C_1 ? Describa el movimiento de los cuerpos antes y después de la interacción.

Situación 2.

Para las siguientes situaciones considere:

- a. Un deslizador o cuerpo C_1 que es lanzado sobre un riel de aire horizontal; y otro deslizador o cuerpo C_2 sobre el mismo riel de aire pero en estado de movimiento cero y con un pedazo de plastilina de modo que después de la colisión los dos deslizadores permanezcan juntos.
- ◆ Si el cuerpo que se encontraba en estado de movimiento cero antes de la colisión ahora ha cambiado su estado al de una cierta velocidad $v > 0$, indique qué le ocurrió a las variables de estado del cuerpo que se encontraba en movimiento antes del choque.
 - ◆ Para la situación inicial 2a, considere que el cuerpo C_1 con velocidad v , choca con otro cuerpo C_2 en estado de movimiento cero. Después de la colisión el cuerpo C_1 disminuye la velocidad, mientras que el cuerpo C_2

aumenta la velocidad. De acuerdo a esta situación, si los cambios de velocidad son iguales y opuestos, ¿qué se puede decir de la naturaleza de estos cuerpos?

- ◆ Para la misma situación anterior 2a, pero ahora obtenemos que el cambio de velocidad del cuerpo C_1 es el doble y opuesto al cambio de velocidad del cuerpo C_2 . De acuerdo a esta situación, ¿qué se puede decir acerca de cómo se relaciona la naturaleza de estos cuerpos?
- ◆ De nuevo la misma situación 2a, pero ahora tenemos que el cambio de velocidad del cuerpo C_1 es la mitad y opuesta al cambio de velocidad del cuerpo C_2 . ¿De acuerdo a esta situación qué se puede decir acerca de cómo se relaciona la naturaleza de estos cuerpos?

Para las tres últimas situaciones en las cuales las condiciones iniciales de la velocidad eran las mismas, pero los cambios de velocidades eran diferentes, significa que este valor único obtenido de la razón de cambio de velocidades tiene que estar ligado a una propiedad asociada con la naturaleza de los cuerpos, necesitamos pues un nombre para esta propiedad, la cual denominaremos masa, a la existencia de un número único para un cuerpo dado, el cual no es un asunto de definición sino un hecho físico experimental, una ley de la naturaleza.

Las anteriores situaciones se pueden representar mediante la relación:

$$-\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

que podemos reescribir como:

$$-\Delta v_1 m_1 = \Delta v_2 m_2$$

esta relación nos muestra que mientras un cuerpo cede, el otro gana movimiento en virtud de la masa asociada a cada cuerpo.

Otra forma de escribir la relación anterior es:

$$\Delta v_1 m_1 + \Delta v_2 m_2 = 0$$

la anterior relación nos indica que una propiedad física ligada al movimiento y a la masa se conserva, esta propiedad se reconoce como momentum o cantidad de movimiento y es independiente del tipo de colisión.

- b. Considere dos cuerpos de masa m_1 y masa m_2 . Si m_1 se mueve con velocidad v sobre un riel horizontal sin fricción y colisiona frontalmente con el cuerpo m_2 inicialmente en reposo, de tal manera que permanecen juntos después de la colisión.

Si representamos mediante un segmento vertical el momentum o cantidad de movimiento denotado por p , para el cuerpo de masa m_1 , así:



- ◆ ¿Qué fracción o múltiplo de este segmento representaría usted para el momento del cuerpo m_2 después de la colisión bajo las siguientes condiciones?.

- I.* $m_2 = m_1$
- II.* $m_2 = 2m_1$
- III.* $m_2 = n m_1$

- ◆ Es posible transferir el momentum de un cuerpo a otro? Justifique su respuesta. Si se transfiere momentum de un cuerpo a otro, cambia su estado?

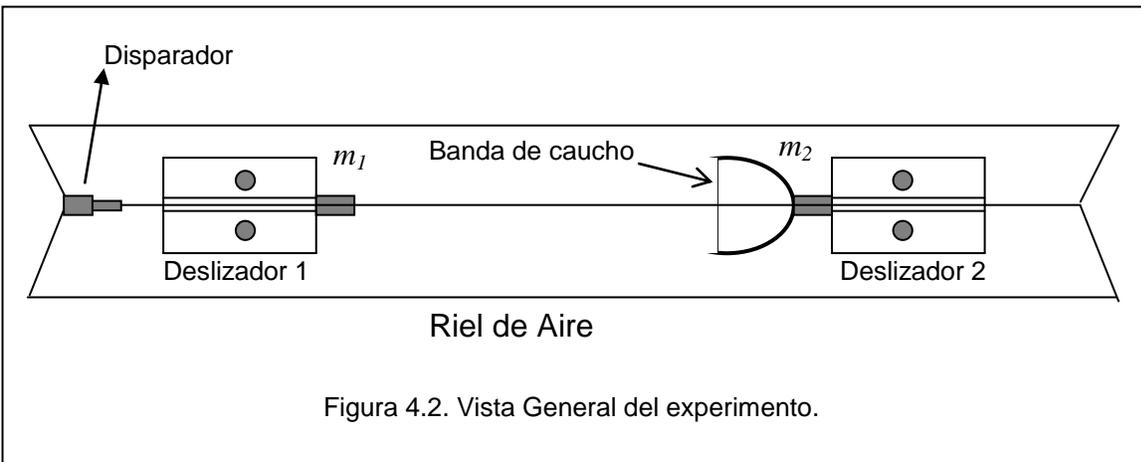
- ◆ Para las situaciones anteriores ¿cómo se reparte el momentum?. Justifique.

- ◆ ¿El cambio de estado depende de las características de los estados iniciales de los cuerpos?.

4.4. TALLER 2

Guía para el ordenamiento de fuerzas

Para el diseño de nuestra experiencia consideremos dos sistemas (cuerpos) con masas m_1 y m_2 conocidas, como se ilustra en la Figura 4.2:



Vamos a suponer una primera situación en la cual tenemos una colisión elástica unidimensional. En la figura 4.2 un deslizador 1 de masa m_1 es impulsado por un disparador con una velocidad V_1 sobre un riel de aire (sin fricción). Otro deslizador 2 de masa m_2 se encuentra en reposo sobre el riel de aire a lo largo de una línea que une los centros de los deslizadores. El deslizador 2 está provisto de una banda de caucho que soportará el impacto del deslizador 1.

El disparador lanzará el deslizador 1 con la misma velocidad V_1 . Suponemos, a no ser que especifiquemos lo contrario, que las velocidades de los deslizadores en la colisión sean lo suficientemente bajas para nuestras observaciones (del orden de 10^2 m/s).

En esta primera situación observaremos la deformación de la banda de caucho suponiendo que la masa m_1 del deslizador 1 se mantiene constante y que además su velocidad V_1 no cambia. El deslizador 2 provisto de la banda de caucho, inicialmente permanecerá en reposo con masa m_2 que cambiará para los diferentes choques, así:

- a) $m_2 = m_1$
- b) $m_2 = 2m_1$.
- c) $m_2 = 3m_1$.

A continuación se elabora una serie de preguntas que permitan discernir acerca de la deformación de la banda de caucho.

- ◆ Durante la colisión se presentan deformaciones. ¿Qué criterios son necesarios tener en cuenta para saber cómo son las deformaciones en cuanto a magnitud?
- ◆ Para las situaciones en las que se cambia la masa: a) b) y c) represente mediante un segmento la magnitud de la deformación de la banda de caucho cuando ocurre la deformación máxima.
- ◆ Ordene de menor a mayor los segmentos representados.
- ◆ ¿Considera que durante la interacción se originan fuerzas? Explique.
- ◆ ¿Es posible que se originen fuerzas durante la interacción, independiente de la deformación de los cuerpos? Explique.

- ◆ Para una deformación máxima en una colisión, represente mediante segmentos la fuerza que se origina en las situaciones a), b) y c)
- ◆ Ordene de menor a mayor las fuerzas antes representadas.
- ◆ ¿Es posible representar la fuerza mediante un segmento de longitud cero para una deformación distinta de cero? Explique. ¿De ser posible qué significado físico tiene esta representación?

Consideremos ahora una situación en la cual el disparador lanza el cuerpo m_1 (m_1 es constante en esta nueva situación) con velocidades diferentes, que puede ocurrir si el disparador consta de resortes diferentes para cada lanzamiento. Las velocidades pueden ser medidas con ayuda de un fotogate.

Supongamos que el cuerpo m_1 choca elásticamente con un cuerpo de masa m_2 en estado de movimiento cero. Con $m_1 > m_2$.

Para la nueva situación descrita considere:

- d. que el cuerpo m_1 es lanzado con una velocidad v_1 .
- e. que el cuerpo m_1 es lanzado con una velocidad $2v_1$
- f. que el cuerpo m_1 es lanzado con una velocidad $3v_1$. (para este caso responda las preguntas anteriores)

- ◆ Para las situaciones en las que se cambia la velocidad: d) e) y f) represente mediante un segmento la magnitud de deformación de la banda de caucho cuando ocurre la deformación máxima.
- ◆ Ordene de menor a mayor los segmentos representados.

- ◆ ¿Considera que durante la interacción se originan fuerzas en esta nueva situación? Explique.
- ◆ ¿Es posible que se originen fuerzas durante la interacción en esta nueva situación, independiente de la deformación de los cuerpos? Explique.
- ◆ Para una deformación máxima en una colisión, represente mediante segmentos la fuerza que se origina en las situaciones d), e) y f)
- ◆ Ordene de menor a mayor las fuerzas antes representadas.
- ◆ ¿Es posible representar la fuerza mediante un segmento de longitud cero para una deformación distinta de cero? Explique. De ser posible qué significado físico tiene esta representación.
- ◆ Durante la colisión se presentan deformaciones en las dos situaciones anteriores. ¿Qué criterios son necesarios tener en cuenta en general para saber cómo son las fuerzas? Explique.

4.5. TALLER 3

Características que debe tener un medio elástico para medir fuerzas.

Considere tres medios elásticos diferentes: banda de caucho, caucho vulcanizado y resorte.

- ◆ Si se tienen dos masas m_1 y m_2 tal que $m_2 > m_1$ suspendidas individualmente del extremo de un medio elástico, ¿cuál de los diferentes medios elásticos considera más adecuado para medir fuerzas? Justifique su respuesta.
- a. Construya una gráfica de peso contra deformación para el medio elástico 1 (banda de caucho) agregando masas.
- b. Construya otra gráfica para el mismo medio del numeral anterior, quitando masas, en el mismo sistema coordenado anterior.
- ◆ Repita lo mismo para el caucho vulcanizado y el resorte de los numerales a y b.
- ◆ ¿El comportamiento de las gráficas es el mismo agregando masas que quitando masas?. En caso de tener el mismo comportamiento sería un instrumento adecuado para medir fuerzas?. Justifique.
- ◆ Si se considera que las masas que se agregan a los extremos de los medios elásticos son pequeñas de modo que el medio no sufra ruptura, ¿cómo es la longitud natural de los medios elásticos antes de agregar y

después de quitar las masas? ¿Qué significado físico tiene para Usted esta igualdad o diferencia?

- ◆ Cuál de estas gráficas considera que es más adecuada para la medición de fuerzas. Por qué?
- ◆ Proponga una relación entre el peso y la deformación en la gráfica que considere más adecuada.
- ◆ ¿Cuál es la tendencia de la gráfica para masas muy pequeñas?
- ◆ Considera que para valores distintos de m existe una misma deformación?
- ◆ Qué características debe cumplir un medio elástico para que sea un instrumento adecuado en la medición de fuerzas?.

Conclusiones

El contenido de las leyes de Newton supone que la fuerza tiene algunas propiedades independientes, distinta a la presentación $\vec{F} = m\vec{a}$, pero las propiedades específicas independientes que tiene la fuerza no son descritas totalmente por Newton y por los textos clásicos, por lo tanto asumirla como el producto de masa por la aceleración es incompleta y es necesario asumir las propiedades o características de la fuerza como por ejemplo que la fuerza tiene un origen fruto de la impenetrabilidad.

La forma tradicional como se aborda el concepto de fuerza considera posibles cambios de la masa o de la aceleración para la medida de ella. Los análisis hechos por Leonhard Euler muestran que una posible cuantificación de las fuerzas no es independiente de las interacciones ya que ellas dependen de las deformaciones de los cuerpos y de las condiciones iniciales.

Mientras que en la perspectiva euleriana una posible cuantificación de las fuerzas está ligada a la deformación de los cuerpos, es decir a lo espacial, en la perspectiva newtoniana una posible cuantificación de las fuerzas esta ligada a lo temporal de modo que estas dos perspectivas son diferentes. La perspectiva euleriana permite identificar el origen de las fuerzas a partir de la impenetrabilidad y la inercia.

La fuerza motriz impresa es una cantidad integral, que da cuenta de la acción de la fuerza en un breve intervalo de tiempo, la cual está relacionada a un cambio total del momentum $\Delta(m.v)$; no es vista como una razón de cambio o como una derivada. En este contexto en la segunda ley, Newton

relaciona el impulso y el momentum, distinto a como aparece en los textos de hoy.

Para una posible cuantificación de las fuerzas es necesario reconocer las tres reglas propuestas por Campbell en caso de ser extensiva, o identificar criterios de orden, unidad patrón y un número único en el caso de ser intensiva y su procedimiento para medirla, se basa en la investigación experimental.

Es necesario tomar conciencia de la complejidad que introducen en los procesos de medición los aparatos de medida para hacer uso más racional de ellos, ya que muchas veces es más complejo el uso y funcionamiento del aparato que el fenómeno en estudio.

Las estrategias diseñadas en los talleres permiten encontrar las fuerzas cuando los cambios que ocurren a los cuerpos en su estado de movimiento son conocidos, es decir la fuerza es derivable de los cambios de estado de movimiento detectados en la colisión; por lo tanto, la fuerza se convierte en un nombre más para la interacción de los cuerpos.

Los talleres diseñados favorecen una posible cuantificación de la fuerza desde las interacciones, como ocurre en la colisión de dos cuerpos, pues en conclusión una cosa es que conocidas las fuerzas, se quieren encontrar los cambios que ellas producen y otra cosa es que conocidos los cambios de estado de los cuerpos se quiera saber como son las fuerzas.

Los talleres propuestos constituyen una forma diferente de abordar el concepto de fuerza y su posible cuantificación ya que en ellos priman las deformaciones de los cuerpos durante las interacciones.

Las estrategias utilizadas muestran también que un medidor de fuerza no tiene que ser necesariamente lineal, es necesario conocer la función.

La forma de abordar las situaciones problemáticas planteadas, contribuyen a la formalización del concepto de fuerza en los estudiantes.

Bibliografía

- ◆ Alonso Marcelo y Finn Edward J., Física, Editorial Adisson-Wesley Iberoamericana. Massachusetts 1992.
- ◆ Arca María, Guidoni Paolo, & Mazzoli Paolo. Realidad y estructuras disciplinarias: iniciar a los niños en los criterios del conocer. Enseñanza de las ciencias. Ed. Paidos, Barcelona, 1990, pp. 139-166.
- ◆ Arons B. Arnold. Evolución de los conceptos de la física. Editorial Trillas, México 1970. pp. 145-162.
- ◆ Arons B. Arnold. Teaching Introductory Physics. Jhon Wiley & Soncs, Inc. 1997. pp 135-163.
- ◆ Campbell Norman Robert. Medición. Ed. 1921. Grijalbo. El mundo de las matemáticas Vol. 5. pp. 186-201.
- ◆ Carretero Mario, Limón Margarita. Las ideas previas de los alumnos. ¿Qué aporta este enfoque a la enseñanza de las ciencias?. Editorial AIQUE, enero 1997. pp. 19-45.
- ◆ Euler Leonhard. The origen of forces: Conservation of the quantity of motion and vis viva. In Mém. Acad. Sciences Berlin, 6, 419-447 (1752). En Lindsay, B. (ed) Energy.
- ◆ Euler Leonhard. Reflexiones sobre el espacio la fuerza y la materia. Editorial alianza. Madrid. 1993.
- ◆ Feynman P. R. , Leighton Robert B. y Sands Matthew. Física. Vol. I. Mecánica, radiación y calor. Addison Wesley Longman. Mexico 1998.

- ◆ Galilei Galileo. Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias. Editora nacional, Madrid. 1976.
- ◆ Guidoni, Paolo & Arca María, Mirar por Sistemas y variables Universidad de Napoles, Italia.
- ◆ Guidoni, Paolo & Arca María, Sistemas y variables, Seminario Didáctico de la Ciencias Universidad de Napoles, Italia. pp 2-20.
- ◆ Herrmann F. & Schmid Bruno. Statics in the momentum current picture. American Journal of Physics, Vol. 52, N°2, February 1984, pp. 146-152.
- ◆ Herrmann F. and M. Schubart. Measuring momentum without the use of $p=mv$ in a demonstration experiment. American Journal of physics. 57 (9) september 1989. pp. 858-859
- ◆ Herrmann F. and Mühlbayer T. A constant force generator for the demonstration of Newton's second law. Am J. Phys. 51(4), April 1983. pp. 344-346.
- ◆ Herrmann F. Física: un texto de estudio para los cursos de educación básica (7° y 8° año) y educación media (10° y 11° año). Mecánica. Universidad de Karlsruhe, R. F. A. Versión en lengua española: W. Egli. Colegio Suizo de Santiago de Chile, 1992.
- ◆ Hertz Heinrich. The principles of mechanics presented in a new form. Ed. New york: Dover Publications. 1956.
- ◆ Hewson, P.W. La enseñanza de Fuerza y Movimiento, como cambio conceptual. Rev. Enseñanza de las ciencias. 1990, 8 (2) pp. 157-162.

- ◆ Hewson, P.W. y Beeth, M. E. Enseñanza para un cambio conceptual: Ejemplo de fuerza y movimiento. Rev. Enseñanza de las ciencias. 1995. 13 (1), pp.25-35.
- ◆ Jammer Max. Concepts of force. Harvard University press cambridge. Massachusetts. 1957.
- ◆ Jiménez Gómez E. Estudio de la progresión en la delimitación del alumno sobre fuerza. Enseñanza de las ciencias. 1997. 15 (3), pp. 309-328.
- ◆ Lea Susan M. y Burke Jhon Robert. Física vol I. La naturaleza de las cosas. Ed. Thompson. México 1999.
- ◆ Margenau Henry. La naturaleza de la realidad física. Una filosofía de la física moderna. Editorial Tecnos Madrid. 1970.
- ◆ Newton Isaac. El sistema del mundo. Alianza editorial. Madrid 1983.
- ◆ Newton Isaac. Principios matemáticos de la filosofía natural. Vol 1. Editorial Alianza Universidad. Madrid 1987.
- ◆ Peduzzi, Luiz O. Q.; Zylbersztajn, Arden, La física de la fuerza impresa y sus implicaciones para la enseñanza de la mecánica.; Revista enseñanza de las ciencias.1997; vol: 15,3. pp, 351-359.
- ◆ Raymond A. Serway, Física Tomo I, cuarta edición., Editorial McGraw-Hill, 1996.
- ◆ Resnick Robert, Halliday David and Krane Kenneth, Física Volumen I, Cuarta edición, Editorial CECSA, 1995.

- ◆ Robert C. Hilborn. Sobre el rediseño de cursos de física introductoria. Física y cultura: cuadernos sobre historia y enseñanza de las ciencias. N° 4. 1998.
- ◆ Romero A. E. La Mecánica de Euler: de los principios metafísicos a la teoría de las fuerzas, in Debru, Claude et Paty, Michel (éds), [2002]. *Changements dans l'interprétation et contenus conceptuels. Changes in interpretation and conceptual contents. Symposium du XXI è Congrès International d'Histoire des Sciences (Mexico, 8-14 juillet 2001)*, México, 2002, sous presse.
- ◆ Romero A. E. Los procesos de matematización y la organización de los fenómenos físicos: El caso de los fenómenos mecánicos y térmicos. Análisis conceptuales y elementos para propuestas didácticas. Revista cuadernos pedagógicos, Universidad de Antioquia, N° 18, 2001. pp 87-101.
- ◆ Romero A. E. y Ayala M. M. La concepción Euleriana de la Fuerza. Revista Física y cultura: cuadernos sobre historia y enseñanza de las ciencias. N° 3. 1996. pp19-26.
- ◆ Romero A. E. y Ayala M. M. La mecánica de Euler: ¿Una mecánica del continuo?. Revista Física y cultura: cuadernos sobre historia y enseñanza de las ciencias. N° 3. 1996. pp. 11-18
- ◆ Sears Francis W., Zemansky Mark W., Young Hugh D. and Freedman Roger A. Física Universitaria, Novena edición, Editorial Adisson Wesley Longman. 1996.
- ◆ Segura R. Dino de J. La enseñanza de la física dificultades y perspectivas. Fondo editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá 1993.

- ◆ Serway, Raymond, Tomo I, Editorial McGraw-Hill, Quinta edición, 2000.
- ◆ Truesdell C. Ensayos de historia de la mecánica. Editorial Tecnos Madrid. 1975.
- ◆ Valero Michel. Física 1. Editorial Norma. 1998.