

**La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo
de van Hiele**

Informe final

Dora Mercedes Bedoya Vélez

Universidad de Antioquia - Universidad EAFIT

Diciembre de 2013

**La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo
de van Hiele**

Este trabajo forma parte del programa de Maestría en Educación, con énfasis en la
Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia

Dora Mercedes Bedoya Vélez

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Educación, con énfasis en
Educación Matemática.

Asesores

Mg. Ledys Llasmín Salazar Gómez
Ph. D. Pedro Vicente Esteban Duarte

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Departamento de Educación Avanzada
Medellín

2014

*"Es una locura seguir haciendo siempre
lo mismo y esperar resultados diferentes."*

Albert Einstein

A Dios, a mi mamá, mis hermanos y mi Nathi.

Agradecimientos

La culminación de este trabajo de investigación es una contribución a mi formación académica y profesional. Durante su desarrollo fueron muchas las personas que aportaron brindando su apoyo y conocimientos para el alcance del objetivo propuesto, a las personas que menciono y demás que contribuyeron a este logro, agradezco su colaboración.

En especial este reconocimiento va dirigido a los profesores Ledys Llasmín Salazar Gómez y Pedro Vicente Esteban Duarte, quienes además de sus conocimientos, siempre estuvieron demostrando su compromiso y paciencia, para orientar el desarrollo de este trabajo.

También resalto el acompañamiento y aportes de los profesores del grupo de investigación “Educación Matemática e Historia (UdeA-EAFIT)”, quienes estuvieron dispuestos para escuchar desde los primeros intentos de investigación brindando sus aportes y sugerencias, de gran valor para la culminación este proceso.

A mis compañeros de maestría que en todo momento demostraron su preocupación por el trabajo y apoyaron con sus aportes el avance en su desarrollo.

Además, un agradecimiento especial para el rector de la Institución Educativa San José, padres de familia y estudiantes del grado tercero, quienes siempre estuvieron dispuestos a aportar en la construcción de mi tesis.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y amigos, quienes entendieron mi situación para alcanzar esta meta.

Resumen

En Educación Matemática se han venido realizando revisiones acerca de la forma adecuada de llevar los procesos de aprendizaje. Es así como, en las diferentes investigaciones, se realizan procesos en la búsqueda de estrategias que conlleven a que los estudiantes no se limiten a recordar contenidos y definiciones, sino que puedan resolver adecuadamente las situaciones que se les presentan.

El reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, influye en la adecuada utilización de las operaciones básicas de adición y sustracción. El presente trabajo de investigación se ha interesado, particularmente, en la comprensión de estas estructuras, teniendo en cuenta el modelo educativo de van Hiele, desde su componente prescriptivo como una metodología que permite abordar de forma secuencial experiencias de aprendizaje que posibilitan la adecuada configuración del concepto objeto de estudio y de esta manera analizar la comprensión de los estudiantes en relación con el mismo.

Para el alcance de este propósito se diseñaron experiencias de aprendizaje en relación con cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, éstas se organizaron en un Módulo de Aprendizaje, que facilita el análisis de la información y se convierte al mismo tiempo en una herramienta que aporta a los docentes en sus prácticas de aula, particularmente en el grado tercero.

Para lograrlo se traza una ruta metodológica bajo las directrices del paradigma cualitativo, cuyo tipo de estudio denominado, estudio de caso, permite particularizar el objeto de estudio y la aparición de categorías emergentes.

Finalmente, se exponen y analizan los aportes de los estudiantes dentro de cada una de las fases, sus argumentos y sus explicaciones, considerándose esta la mayor fortaleza del trabajo de investigación, ya que los resultados son extraídos de las construcciones y comprensiones realizadas por los participantes de la investigación.

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Planteamiento y justificación del problema de investigación..... | 1 |
| 1.1. Justificación..... | 1 |
| 1.2. Antecedentes del problema de investigación..... | 3 |
| 1.2.1. Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos..... | 3 |
| 1.2.2. Estructuras aritméticas elementales y su modelización..... | 4 |
| 1.2.3. Comprensión de las estructuras en los primeros años de escolaridad..... | 4 |
| 1.3. Antecedentes desde el modelo de van Hiele..... | 5 |
| 1.3.1. Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele..... | 5 |
| 1.3.2. Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos..... | 6 |
| 1.3.3. Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local..... | 6 |
| 1.4. El concepto de estructura..... | 7 |
| 1.4.1. Estructuras de tipo aditivo..... | 9 |
| 1.4.2. El concepto de número..... | 9 |
| 1.4.3. Estructuras de tipo aditivo según Vergnaud..... | 11 |
| 1.4.4. El concepto de estructura aditiva en el currículo escolar..... | 12 |
| 1.4.5. Categorías en las estructuras de tipo aditivo..... | 15 |
| 1.5. Herramientas esenciales en la utilización de las estructuras de tipo aditivo..... | 17 |
| 1.5.1. La componente visual – geométrica..... | 18 |
| 1.5.2. Redes de relaciones..... | 18 |
| 1.5.3. Importancia del lenguaje..... | 19 |
| 1.6. El problema de investigación..... | 20 |
| 1.6.1. Planteamiento del problema..... | 20 |
| 1.6.2. Objetivos..... | 21 |
| 1.6.2.1. Objetivo general..... | 21 |
| 1.6.2.2. Objetivos específicos..... | 21 |
| Marco Teórico..... | 23 |
| 2.1. La comprensión de conceptos matemáticos..... | 23 |
| 2.2. Teorías de aprendizaje..... | 24 |
| 2.2.1. El cognitivismo..... | 25 |
| 2.2.2. El constructivismo..... | 25 |
| 2.3. Modelo educativo de van Hiele..... | 30 |
| 2.3.1. Insight..... | 30 |
| 2.3.2. Niveles de razonamiento..... | 31 |
| 2.3.3. Fases de aprendizaje..... | 32 |
| 2.3.4. Propiedades del modelo..... | 34 |
| 2.3.5. La importancia del lenguaje en el modelo de van Hiele..... | 35 |
| 2.3.6. Pertinencia del modelo de van Hiele..... | 36 |

| | | |
|--|--|----|
| 2.3.7. | Estructuras de tipo aditivo según Vergnaud y el concepto de estructura según van Hiele | 37 |
| 2.4. | Pertinencia del trabajo de Vergnaud en relación con el modelo de van Hiele | 39 |
| Diseño Metodológico | | 42 |
| 3.1. | Paradigma | 42 |
| 3.2. | Participantes | 42 |
| 3.3. | El estudio de casos | 44 |
| 3.4. | Instrumentos | 44 |
| 3.4.1. | Entrevista de Carácter Socrático | 45 |
| 3.4.2. | Mapas Conceptuales | 46 |
| 3.4.3. | Observación | 47 |
| 3.5. | Módulo de Aprendizaje | 47 |
| 3.6. | Trabajo de campo | 48 |
| 3.6.1. | Fase 1: Información | 49 |
| 3.6.1.1. | Actividad A.1.1.: “Conducta de entrada” | 50 |
| 3.6.1.2. | Entrevista de Carácter Socrático | 51 |
| 3.6.1.3. | Actividad 2: “Observando figuras” | 51 |
| 3.6.1.4. | Actividad 3: | 51 |
| 3.6.1.5. | Mapa Conceptual | 52 |
| 3.6.2. | Fase 2: Orientación dirigida | 52 |
| 3.6.2.1. | Entrevista de Carácter Socrático | 53 |
| 3.6.2.2. | Actividad 1. Analiza situaciones presentadas gráficamente | 54 |
| 3.6.2.3. | Actividad 2. La recta numérica | 54 |
| 3.6.2.4. | Actividad 3. Leo y resuelvo situaciones de enunciado verbal | 54 |
| 3.6.2.5. | Mapa Conceptual | 54 |
| 3.6.3. | Fase 3: Explicitación | 55 |
| 3.6.3.1. | Entrevista de Carácter Socrático | 55 |
| 3.6.3.2. | Actividad 1. Describo los cambios ocurridos | 56 |
| 3.6.3.3. | Actividad 2. Verbaliza situaciones | 56 |
| 3.6.3.4. | Mapa Conceptual | 56 |
| 3.6.4. | Fase 4: Orientación libre | 57 |
| 3.6.4.1. | Entrevista de Carácter Socrático | 58 |
| 3.6.4.2. | Actividad 1. Observo, encuentro y propongo cambios en las estructuras | 59 |
| 3.6.4.3. | Actividad 2. Propongo situaciones que involucran la adición y sustracción | 59 |
| 3.6.4.4. | Actividad 3. Jugando con las regletas | 59 |
| 3.6.4.5. | Mapa Conceptual | 59 |
| 3.6.5. | Fase 5: Integración | 60 |
| 3.6.5.1. | Entrevista de Carácter Socrático | 61 |
| 3.6.5.2. | Actividad 1. Integrando mis conocimientos | 61 |
| 3.6.5.3. | Mapa Conceptual | 62 |
| Recolección y análisis de la información | | 63 |
| 4.1. | Herramientas y sus resultados | 63 |
| 4.1.1. | Entrevista de Carácter Socrático | 64 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 4.1.2. | Mapas conceptuales | 64 |
| 4.1.3. | Observación | 65 |
| 4.2. | Descriptores de fase | 65 |
| 4.2.1. | Descriptores para la fase 1: Información..... | 65 |
| 4.2.2. | Descriptores de la fase 2: Orientación dirigida | 67 |
| 4.2.3. | Descriptores de la fase 3: Explicitación..... | 70 |
| 4.2.4. | Descriptores de la fase 4: Orientación libre..... | 71 |
| 4.2.5. | Descriptores de la fase 5: Integración | 74 |
| 4.3. | Categorías | 75 |
| 4.3.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 76 |
| 4.3.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 76 |
| 4.3.3. | Categoría: Relación con el entorno | 76 |
| 4.3.4. | Categoría: Solución y análisis en situaciones..... | 77 |
| 4.4. | Caso Uno (Juana)..... | 81 |
| 4.4.1. | Fase 1: Información | 81 |
| 4.4.1.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 81 |
| 4.4.1.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 82 |
| 4.4.1.3. | Categoría: Relación con el entorno | 83 |
| 4.4.1.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 83 |
| 4.4.2. | Fase 2: Orientación Dirigida | 84 |
| 4.4.2.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 84 |
| 4.4.2.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 85 |
| 4.4.2.3. | Categoría: Relación con el entorno | 86 |
| 4.4.2.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 88 |
| 4.4.3. | Fase 3: Explicitación | 89 |
| 4.4.3.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 89 |
| 4.4.3.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 90 |
| 4.4.3.3. | Categoría: Relación con el entorno | 90 |
| 4.4.3.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 91 |
| 4.4.4. | Fase 4: Orientación Libre..... | 92 |
| 4.4.4.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 92 |
| 4.4.4.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 93 |
| 4.4.4.3. | Categoría: Relación con el entorno | 94 |
| 4.4.4.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 95 |
| 4.4.5. | Fase 5: Integración..... | 97 |
| 4.4.5.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 97 |
| 4.4.5.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 98 |
| 4.4.5.3. | Categoría: Relación con el entorno | 99 |
| 4.4.5.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 99 |
| 4.4.6. | Matriz de códigos para Juana..... | 102 |
| 4.5. | Caso Dos (David)..... | 111 |
| 4.5.1. | Fase 1: Información | 111 |
| 4.5.1.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 111 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 4.5.1.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 112 |
| 4.5.1.3. | Categoría: Relación con el entorno | 112 |
| 4.5.1.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 113 |
| 4.5.2. | Fase 2: Orientación Dirigida | 113 |
| 4.5.2.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 113 |
| 4.5.2.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 115 |
| 4.5.2.3. | Categoría: Relación con el entorno | 116 |
| 4.5.2.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 117 |
| 4.5.3. | Fase 3: Explicitación | 118 |
| 4.5.3.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 118 |
| 4.5.3.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 119 |
| 4.5.3.3. | Categoría: Relación con el entorno | 119 |
| 4.5.3.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 120 |
| 4.5.4. | Fase 4: Orientación Libre..... | 121 |
| 4.5.4.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 122 |
| 4.5.4.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 122 |
| 4.5.4.3. | Categoría: Relación con el entorno | 123 |
| 4.5.4.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 125 |
| 4.5.5. | Fase 5: Integración..... | 126 |
| 4.5.5.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 126 |
| 4.5.5.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 126 |
| 4.5.5.3. | Categoría: Relación con el entorno | 127 |
| 4.5.5.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 129 |
| 4.5.6. | Matriz de códigos para David | 130 |
| 4.6. | Caso tres (Camila) | 138 |
| 4.6.1. | Fase 1: Información | 138 |
| 4.6.1.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 138 |
| 4.6.1.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 139 |
| 4.6.1.3. | Categoría: Relación con el entorno | 139 |
| 4.6.1.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 140 |
| 4.6.2. | Fase 2: Orientación Dirigida | 141 |
| 4.6.2.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 142 |
| 4.6.2.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 143 |
| 4.6.2.3. | Categoría: Relación con el entorno | 143 |
| 4.6.2.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 145 |
| 4.6.3.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 148 |
| 4.6.3.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 148 |
| 4.6.3.3. | Categoría: Relación con el entorno | 149 |
| 4.6.3.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 150 |
| 4.6.4. | Fase 4: Orientación Libre..... | 151 |
| 4.6.4.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 151 |
| 4.6.4.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 153 |
| 4.6.4.3. | Categoría: Relación con el entorno | 154 |

| | | |
|---------------------------------------|---|------------|
| 4.6.4.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 155 |
| 4.6.5. | Fase 5: Integración..... | 156 |
| 4.6.5.1. | Categoría: Reconocimiento de estructuras | 156 |
| 4.6.5.2. | Categoría: Utilización del lenguaje..... | 158 |
| 4.6.5.3. | Categoría: Relación con el entorno | 158 |
| 4.6.5.4. | Categoría: Solución y análisis de situaciones..... | 160 |
| 4.6.6. | Matriz de códigos para Camila | 162 |
| 4.7. | Comprensión de las estructuras de tipo aditivo | 167 |
| 4.7.1. | Análisis de la comprensión Caso Uno (Juana) | 168 |
| 4.7.2. | Análisis de la comprensión Caso Dos (David) | 169 |
| 4.7.3. | Análisis de la comprensión Caso Tres (Camila)..... | 170 |
| 4.8. | Triangulación de la información | 172 |
| Resultados y conclusiones..... | | 178 |
| 5.1. | Alcance de los objetivos..... | 178 |
| 5.1.2. | Alcance del objetivo general..... | 179 |
| 5.2. | Descriptorios de fase | 181 |
| 5.2.1. | Descriptorios para la fase 1: Información..... | 181 |
| 5.2.2. | Descriptorios de la fase 2: Orientación dirigida | 183 |
| 5.2.3. | Descriptorios de la fase 3: Explicitación | 185 |
| 5.2.4. | Descriptorios de la fase 4: Orientación libre | 187 |
| 5.2.5. | Descriptorios de la fase 5: Integración | 190 |
| 5.3. | Módulo de Aprendizaje | 191 |
| 5.4. | Componente visual geométrica | 192 |
| 5.5. | Respuesta a la pregunta de investigación | 193 |
| 5.6. | Nivel de razonamiento y descriptorios hipotéticos..... | 194 |
| 5.7. | Futuras líneas de investigación..... | 196 |
| 5.8. | Participaciones en eventos..... | 196 |
| 5.8.1. | Participaciones nacionales..... | 197 |
| 5.8.1.1. | Comunicación breve – ponencia | 197 |
| 5.8.1.2. | Comunicación breve – ponencia | 197 |
| 5.8.2. | Participaciones internacionales | 198 |
| 5.8.2.1. | Ponencia | 198 |
| 5.8.2.2. | Ponencia | 200 |
| 5.8.3. | Memorias de eventos..... | 201 |
| 5.8.3.1. | La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo de van Hiele | 201 |
| 5.8.3.2. | Caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado tercero. | 202 |
| 5.8.3.3. | La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele. | 202 |
| 5.8.4. | Artículos..... | 203 |
| 5.8.4.1. | Situaciones en contexto para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero. | 203 |

| | |
|---|-----|
| 5.8.4.2. Comprensión de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes de la básica primaria | 203 |
| Apéndice A..... | 205 |
| A.1. Fase 1: Información | 205 |
| Experiencia 1: “Agrupo y separo cantidades”..... | 205 |
| A.1.1. Actividad 1: Conducta de entrada..... | 206 |
| A.1.2. Guión Entrevista de Carácter Socrático | 207 |
| A.1.3. Actividad 2: Observando figuras | 214 |
| A.1.4. Actividad 3 | 215 |
| A.1.5. Actividad 4: Mapa Conceptual | 220 |
| A.2. Fase 2: Orientación dirigida | 221 |
| Experiencia 2: “Exploro las estructuras de tipo aditivo”..... | 221 |
| A.2.1. Estructuras de tipo aditivo | 221 |
| A.2.2. Guión Entrevista de Carácter Socrático | 222 |
| A.2.3. Actividad 1: Analiza situaciones presentadas gráficamente | 239 |
| A.2.4. Actividad 2: La recta numérica | 241 |
| A.2.5. Actividad 3: Leo y resuelvo situaciones de enunciado verbal | 248 |
| A.3. Fase 3: Explicitación | 251 |
| A.3.1. Guión Entrevista de Carácter Socrático | 251 |
| A.3.2. Actividad 1: Describo los cambios ocurridos..... | 262 |
| A.3.3. Actividad 2: Verbaliza situaciones | 264 |
| A.3.4. Actividad 3: Mapa Conceptual | 268 |
| A.4. Fase 4: Orientación Libre | 270 |
| A.4.1. Guión Entrevista de Carácter Socrático | 270 |
| A.4.2. Actividad 1: Observo, encuentro y propongo cambios en las estructuras | 278 |
| A.4.4. Actividad 3: Jugando con las regletas | 282 |
| A.4.5. Actividad 4: Mapa Conceptual | 283 |
| A.5. Fase 5: Integración..... | 284 |
| A.5.1. Guión Entrevista de Carácter Socrático | 284 |
| A.5.2. Actividad 1 Integrando mis conocimientos | 291 |
| A.5.3. Actividad 2: Mapa Conceptual | 294 |
| Apéndice B..... | 295 |
| B.1. Participaciones Nacionales | 295 |
| B.1.1. Comunicación Breve - Memoria | 295 |
| B.2. Participaciones Internacionales | 301 |
| B.2.1. Memoria, ponencia | 301 |
| B.2.2. Memoria, ponencia..... | 302 |
| B.3. Artículos | 303 |
| B.3.1. Situaciones en contexto para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero. | 303 |
| B.3.2. Comprensión de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes de la básica primaria Revista..... | 309 |
| Referencias Bibliográficas..... | 330 |

Índice de ilustraciones

| | |
|--|-----|
| <i>Ilustración 1. Relaciones isomorfas en las estructuras de tipo aditivo.</i> | 9 |
| <i>Ilustración 2. El concepto de número y su relación con las estructuras de tipo aditivo.</i> | 11 |
| <i>Ilustración 3. Categorías de composición y transformación.</i> | 16 |
| <i>Ilustración 4. Categoría de composición.</i> | 16 |
| <i>Ilustración 5. Categoría de transformación.</i> | 17 |
| <i>Ilustración 6. Mapa Conceptual para la fase 1: Información.</i> | 50 |
| <i>Ilustración 7. Mapa Conceptual para la fase 2: Orientación dirigida.</i> | 53 |
| <i>Ilustración 8. Mapa Conceptual para la fase 3: Explicitación.</i> | 55 |
| <i>Ilustración 9. Mapa Conceptual para la fase 4: Orientación libre.</i> | 58 |
| <i>Ilustración 10. Mapa Conceptual para la fase 5: Integración.</i> | 61 |
| <i>Ilustración 11. Mapa Conceptual realizado pro Juana para la fase 2. Caso 1.</i> | 87 |
| <i>Ilustración 12. Representación presentada por Felipe.</i> | 95 |
| <i>Ilustración 13. Recta presentada por Juan.</i> | 95 |
| <i>Ilustración 14. Conjuntos representados por Diego.</i> | 96 |
| <i>Ilustración 15. Mapas construidos por Juana en las fases 1 y 5.</i> | 101 |
| <i>Ilustración 16. Mapa de la fase 4 construido por David.</i> | 123 |
| <i>Ilustración 17. Representación de una situación a partir de un conjunto de bombones.</i> | 124 |
| <i>Ilustración 18. Situaciones presentadas por David, fase 4.</i> | 125 |
| <i>Ilustración 19. Representación del desplazamiento de Felipe en su patineta.</i> | 128 |
| <i>Ilustración 20. Mapas construidos por David en las fases 1 y 5.</i> | 129 |
| <i>Ilustración 21. Canicas de cristal empleadas para el juego.</i> | 140 |
| <i>Ilustración 22. Descomposición del número 10.</i> | 144 |
| <i>Ilustración 23 Representación del complemento entre un conjunto de dulces.</i> | 152 |
| <i>Ilustración 24 Representación que presenta la comparación de panes vendidos.</i> | 154 |
| <i>Ilustración 25 Representación geométrica: Diferencia entre la cantidad de panes.</i> | 155 |
| <i>Ilustración 26. Actividades realizadas por los niños en el parque.</i> | 159 |
| <i>Ilustración 27. Mapas conceptuales construidos por Camila en las fases 1 y 5.</i> | 161 |
| <i>Ilustración 28. Juana - Actividad A.1.1. Punto 3 fase 1.</i> | 173 |
| <i>Ilustración 29 Juana - Apartado Mapa Conceptual, fase 1.</i> | 173 |
| <i>Ilustración 30 Juana - Situación A.1.2.1., punto 4, Entrevista, fase 1.</i> | 174 |
| <i>Ilustración 31. Camila: Situación A.3.1.1., punto 3, Entrevista, fase 3.</i> | 174 |
| <i>Ilustración 32. Camila - Actividad A.3.3., situación 1b.</i> | 175 |
| <i>Ilustración 33. Situación propuesta por David, fase 4.</i> | 176 |

Índice de figuras

| | |
|---|-----|
| Figura A 1. Representación de dos colecciones. | 207 |
| Figura A 2. Imagen de una tarde lluviosa, representada por Laura. | 208 |
| Figura A 3. Conjuntos de dulces comprados por Juan y Sofía. | 211 |
| Figura A 4. Canicas de cristal empleadas para el juego. | 212 |
| Figura A 5. Representación de una cantidad. | 213 |
| Figura A 6. Composición de figuras geométricas 1. | 215 |
| Figura A 7. Composición de figuras geométricas 2. | 215 |
| Figura A 8. Composición de figuras geométricas 3. | 215 |
| Figura A 9. Niños en el parque. | 216 |
| Figura A 10. Representación de una secuencia numérica. | 217 |
| Figura A 11. Niños con sus juegos. | 217 |
| Figura A 12. Ana y Juan con sus globos. | 218 |
| Figura A 13. Juguetes de Luis y Juan. | 223 |
| Figura A 14. Secuencia números pares. | 225 |
| Figura A 15. Saltos de Juan. | 227 |
| Figura A 16. Descomposición del número 10. | 230 |
| Figura A 17. Diferencia entre dos conjuntos de galletas. | 232 |
| Figura A 18. Cajas de Diana. | 235 |
| Figura A 19. Conjuntos de canicas de cristal. | 238 |
| Figura A 20. Rompecabezas con triángulos. | 240 |
| Figura A 21. Conjuntos de árboles. | 240 |
| Figura A 22. Representación en la recta numérica 1. | 242 |
| Figura A 23. Representación en la recta numérica 2. | 242 |
| Figura A 24. Representación de los saltos de una rana. | 243 |
| Figura A 25. Representación de los saltos de un conejo. | 243 |
| Figura A 26. Representación de los saltos de un niño. | 244 |
| Figura A 27. Latas de café recolectadas por Carlos y su papá. | 244 |
| Figura A 28. Representación de la cantidad diaria de “latas” de café recolectadas por Carlos. | 245 |
| Figura A 29. Recta numérica que representa las “latas” de café recolectadas por el papá de Carlos. | 245 |
| Figura A 30. Representación de saltos hacia la izquierda de rana. | 246 |
| Figura A 31. Saltos que da Felipe para alcanzar su juguete. | 247 |
| Figura A 32. Imagen que muestra los cambios ocurridos al conjunto de globos. | 253 |
| Figura A 33. Imagen que muestra los cambios ocurridos en el conjunto de cromos. | 254 |
| Figura A 34. Recta numérica: Recorrido desde la casa de María hasta la casa de Ana. | 259 |
| Figura A 35. Recta numérica que representa la situación vivida por Carlos. | 260 |
| Figura A 36. Recta numérica que representa la situación vivida por José. | 261 |
| Figura A 37. Recta numérica que representa el cambio ocurrido en la cantidad inicial de monedas que tenía Julián. | 261 |
| Figura A 38. Cambio presentado en la construcción de un edificio. | 262 |
| Figura A 39. Imagen sobre adición y sustracción de los elementos de un conjunto. | 265 |
| Figura A 40. Reunión de láminas de color rosado y azul como elementos de un conjunto. | 265 |

| | |
|---|-----|
| Figura A 41. Imagen que muestra la separación entre los elementos de un conjunto. _____ | 265 |
| Figura A 42. Imagen que muestra la reunión de láminas como elementos de un conjunto. _____ | 266 |
| Figura A 43. Representación de los cambios presentados en una estructura aditiva. _____ | 266 |
| Figura A 44. Representación de la disminución en una estructura de tipo aditivo. _____ | 267 |
| Figura A 45. Representación de una disminución en una estructura de tipo aditivo. _____ | 268 |
| Figura A 46. Representación de la Unión de conjuntos ($A \cup B = C$) de figuras geométricas. _____ | 271 |
| Figura A 47. Representación de complemento entre un conjunto de dulces. _____ | 272 |
| Figura A 48. Representación de una situación a partir de un conjunto de bombones. _____ | 274 |
| Figura A 49. Representación que presenta la comparación de panes vendidos. _____ | 274 |
| Figura A 50. Representación geométrica: Diferencia entre la cantidad de panes. _____ | 275 |
| Figura A 51. Imagen que muestra el efecto de añadir en una forma geométrica. _____ | 275 |
| Figura A 52. Representación presentada por Felipe _____ | 276 |
| Figura A 53. Recta presentada por Juan _____ | 276 |
| Figura A 54. Conjuntos representados por Diego. _____ | 277 |
| Figura A 55. Imagen que representa los cambios presentados en una construcción geométrica. _____ | 279 |
| Figura A 56. Imagen que representa cambios ocurridos en una estructura geométrica. _____ | 280 |
| Figura A 57. Representación de las regletas de Cuisenaire. _____ | 282 |
| Figura A 58. Conjunto de objetos de Juan. _____ | 285 |
| Figura A 59. Representación del desplazamiento de Felipe en su patineta. _____ | 287 |
| Figura A 60. Conjunto de canicas de Daniel. _____ | 288 |
| Figura A 61. Representación de la separación de los bombones que hace Diana. _____ | 289 |
| Figura A 62. Actividades realizadas por los niños en el parque. _____ | 292 |

Índice de tablas

| | |
|--|------------|
| Tabla 1. Descriptores de fase y Matriz de Categorías. | 79 |
| Tabla 2. Matriz de códigos, Juana fase 1. | 104 |
| Tabla 3. Matriz de códigos, Juana fase 2. | 107 |
| Tabla 4. Matriz de códigos, Juana fase 3. | 108 |
| Tabla 5. Matriz de códigos, Juana fase 4. | 109 |
| Tabla 6. Matriz de códigos, Juana fase 5. | 110 |
| Tabla 7. Matriz de códigos, David fase 1. | 131 |
| Tabla 8. Matriz de códigos, David fase 2. | 134 |
| Tabla 9. Matriz de códigos, David fase 3. | 136 |
| Tabla 10. Matriz de códigos, David fase 4. | 137 |
| Tabla 11. Matriz de códigos, David fase 5. | 138 |
| Tabla 12. Matriz de códigos, Camila fase 1. | 162 |
| Tabla 13. Matriz de códigos, Camila fase 2. | 164 |
| Tabla 14. Matriz de códigos, Camila fase 3. | 165 |
| Tabla 15. Matriz de códigos, Camila fase 4. | 166 |
| Tabla 16. Matriz de códigos, Camila fase 5. | 167 |

Capítulo 1

Planteamiento y justificación del problema de investigación

La comprensión de los conceptos matemáticos, particularmente las estructuras de tipo aditivo, es de gran importancia en la educación básica primaria. Estas estructuras, son la base para la comprensión de los fundamentos que construyen el aprendizaje de los conceptos matemáticos posteriores.

Dicho aprendizaje se encuentra articulado a las estrategias bajo las cuales se desarrollan las prácticas de aula, que tienen influencia en los razonamientos de los estudiantes y por ende en la comprensión de los conceptos por parte de los mismos. Es así como se considera pertinente presentar formas alternativas para la enseñanza de los conceptos. Por lo tanto, es importante considerar los factores de carácter teórico y metodológico que intervienen en las prácticas de aula, con el fin de favorecer su comprensión.

1.1. Justificación

El proceso de comprensión de los conceptos matemáticos, en los primeros años de escolaridad, está determinado por el acercamiento que se hace de ellos a los estudiantes. Este debe ser de carácter secuencial y amigable, de tal manera que adquieran una adecuada comprensión y puedan razonar y aplicarlos adecuadamente en diversas situaciones de su cotidianidad. Respecto a los conceptos abordados en esta etapa de escolaridad, vale la pena resaltar la importancia del aprendizaje de las estructuras de tipo aditivo, éstas están en la base del aprendizaje de conceptos matemáticos posteriores como: la multiplicación, la división, la potenciación, la logaritmicación, entre otros.

Las estructuras de tipo aditivo permiten a los estudiantes la solución de situaciones de contexto, donde el uso de las operaciones adición y sustracción se hace evidente, en actividades como el juego, la adquisición de productos en la tienda, en desplazamientos, trabajos agrícolas, entre otros. Las estructuras de tipo aditivo, se abordan en la escuela desde una componente simbólica, la cual conlleva a abordar situaciones con las operaciones aritméticas elementales de adición y sustracción, con el fin de utilizarlas en el análisis de diversas situaciones en la que se encuentran involucrados en su cotidianidad.

A partir de representaciones geométricas de diferentes objetos, es posible construir experiencias de aprendizaje que involucren aspectos visuales, con el fin de ayudar a los niños en la comprensión de las operaciones básicas. En los primeros años de escolaridad, el niño explora el entorno, allí las herramientas visuales y manipulativas son necesarias para la construcción de las estructuras matemáticas, las cuales le darán sentido a los nuevos conceptos que formarán parte de su saber, a medida que avance en los niveles de escolaridad.

En este sentido, la componente visual debe acompañar las situaciones de aprendizaje propuestas para el aula, las cuales pueden trabajarse por etapas, que permitan organizar de manera secuencial las experiencias de aprendizaje, teniendo en cuenta aquellos saberes que el estudiante trae consigo, la orientación del docente

e, el intercambio de saberes con los compañeros de clase, la proposición de estrategias y procedimientos por parte de los mismos, y, finalmente relacionar lo aprendido con situaciones propias del contexto. Cada uno de estos momentos permite analizar de manera detallada los razonamientos y procesos de solución que los estudiantes construyen de manera individual y grupal, ya que son un insumo que da cuenta de los procesos de comprensión elaborados.

En esta misma línea, se hace necesario destacar la importancia de analizar la forma como los estudiantes comprenden el concepto de las estructuras de tipo aditivo, ya que en el desarrollo de las experiencias de clase, pueden observarse las formas de pensar, de resolver, de proponer y argumentar, por parte de los mismos, dando origen a nuevas comprensiones alrededor del concepto de estructura.

Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se presentan algunos estudios e investigaciones, que dan cuenta de la importancia de abordar el concepto de estructura aditiva y a su vez, otros estudios relacionados con estrategias que permiten el abordaje de las mismas de manera secuencial. Los estudios referenciados permitieron determinar el marco teórico y metodológico de la presente investigación.

1.2. Antecedentes del problema de investigación

A continuación se describen algunos antecedentes de la investigación articulados al significado y aprendizaje de los conceptos en los primeros años de escolaridad, junto con la comprensión en los procesos iniciales de enseñanza.

1.2.1. Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos

Ruiz (2000) presenta la construcción y formalización de una representación geométrica y otra simbólica para expresar un concepto aritmético, como es la estructura de tipo aditivo, apoyado en la tabla numérica, conocida como la Tabla-100. Él afirma: "...la representación geométrica es la expresión visual del operador aditivo, el cual se puede ver desde un punto de vista figurativo, siendo la expresión simbólica una descripción aritmética de dicho operador" (Ruíz, 2000, p. 3). Este autor resalta la pertinencia de trabajar las estructuras de tipo aditivo, apoyando su componente simbólica en la representación geométrica. Al referirse a la dualidad número y representación visual, cita a Castro (1994), quien afirma que "la visualización es importante para la educación puesto que la comprensión alcanzada mediante elementos visuales y simbólicos se complementan, por ello mismo el aprendizaje debe lograrse integrando información que utilice ambos tipos de códigos" (Citado en Ruiz, 2000, p. 3).

De otro lado, para la representación del operador aditivo en la tabla de los cien primeros números naturales, Ruiz (2000), desarrolla de forma paralela una representación geométrica,

..

donde se muestran los desplazamientos por la tabla como una cadena y la representación simbólica como la expresión aritmética de la misma. De esta forma, se puede afirmar que el aspecto geométrico favorece el afianzamiento del trabajo con las operaciones en su aspecto aritmético y operativo.

1.2.2. Estructuras aritméticas elementales y su modelización

En el desarrollo de las operaciones aritméticas que se da en la escuela, es fundamental la instrucción inicial de suma y resta para su adecuada configuración. “Muchas de las dificultades que tienen los niños al resolver problemas verbales de adición y sustracción se debe a su limitada comprensión de las operaciones aritméticas con las que estos se resuelven” (Castro, Rico y Castro, 1995, p. 37). Por ello, es decisivo ayudar a los estudiantes a fundamentar adecuadamente las estructuras aditivas, desde los primeros años de escolaridad. Adicionalmente, es pertinente que, las estrategias bajo las cuales se enseñan las estructuras de tipo aditivo, estén en correspondencia con el razonamiento inicial de los estudiantes.

1.2.3. Comprensión de las estructuras en los primeros años de escolaridad

Respecto a la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, cabe mencionar que, en el contexto de la educación básica primaria del currículo colombiano, se hace énfasis en el trabajo con las operaciones básicas, ya que éstas permiten el aprendizaje y comprensión de conceptos matemáticos posteriores. Al respecto, en las prácticas de aula se observa que, los estudiantes del grado tercero abordan dichas operaciones utilizando estrategias tales como conteos y cálculos mecánicos, empleando sin distinción adiciones o sustracciones en situaciones matemáticas que implican enunciados verbales. Por lo tanto, es oportuno que los estudiantes se acerquen a las estructuras de tipo aditivo a partir del diseño de experiencias que permitan la construcción y comprensión de los conceptos, dejando de lado la memorización de definiciones y aplicación de algoritmos; donde sea posible reflejar sus construcciones mentales en relación al concepto y a sus diversas representaciones.

1.3. Antecedentes desde el modelo de van Hiele

Las estructuras de tipo aditivo cuentan con un componente de carácter simbólico que es pertinente articular con la componente geométrica. De acuerdo con Ruiz (2000), la comprensión de un concepto se logra cuando se complementan los elementos simbólicos y visuales, en este sentido es recomendable integrar ambos aspectos. El modelo de van Hiele, desarrollado inicialmente para la Geometría, resalta la importancia de la visualización de los objetos y las propiedades que lo conforman, junto con el reconocimiento de los conceptos en diferentes contextos (van Hiele, 1986). Así, la aplicación del modelo se convierte en una base para el desarrollo de investigaciones que pretendan al progreso en el nivel de razonamiento o al reconocimiento de las características que determinan la comprensión de los conceptos, en este sentido, la componente visual geométrica juega un papel esencial en el modelo, debido a que comprende la componente simbólica de las estructuras de tipo aditivo.

A continuación se exponen algunos estudios enmarcados en el modelo:

1.3.1. Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele

Esteban (2000) presentó la memoria para optar el título de doctor: “Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele”, allí se tuvo como objetivo el análisis del concepto objeto de estudio, a partir de la visualización que se obtiene por medio de los mecanismos del zoom y del haz de secantes. En la investigación, se emplearon entrevistas de carácter socrático, caracterizadas por la componente visual geométrica, acorde con el modelo educativo de van Hiele. En esta memoria se muestra la pertinencia del modelo y su componente visual geométrica, en el análisis del concepto de estructura aditiva en el trabajo de aula. Además, se resalta la utilización de las entrevistas de carácter socrático, para abordar dicha componente, con el fin de favorecer la comprensión del concepto.

1.3.2. Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos

Zapata y Sucerquia (2009) en el trabajo: “Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de serie de términos positivos”, consideraron los resultados de la tesis presentada por Jurado y Londoño (2005), relacionada con la dificultad que presentan los estudiantes en el progreso del nivel II al III de razonamiento en el modelo de van Hiele, frente al concepto de convergencia de una serie infinita. Para ello, diseñaron un guión entrevista que fue refinado en el trabajo de campo y que respaldó al progreso en el nivel de razonamiento. Es decir, los estudiantes pueden avanzar en su nivel de razonamiento en torno a un concepto, a través del desarrollo de actividades, que estén en correspondencia con el nivel de inicial y el que se pretende alcanzar. Adicionalmente, este trabajo se apoya en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, para favorecer el progreso en el nivel de razonamiento por parte de los estudiantes.

1.3.3. Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local

Salazar (2011), consideró la pertinencia de las fases del modelo de van Hiele para caracterizar el progreso de los estudiantes, en el paso del nivel II al III de razonamiento de acuerdo con el modelo, en relación con el concepto de continuidad local. Cabe resaltar que, la autora de este trabajo presenta descriptores obtenidos para cada una de las fases como el conjunto de desempeños que permiten caracterizar dicho razonamiento. Respecto al papel de las fases de aprendizaje afirma:

El progreso en el proceso de razonamiento de los estudiantes, se articula a las fases de aprendizaje del modelo, siendo éstas, elementos que permiten describir el razonamiento de ellos en cinco momentos, que están en correspondencia con las cinco fases de aprendizaje. De esta manera, el proceso de enseñanza y de aprendizaje, respecto al concepto de continuidad local, se convierte en un elemento significativo,

..

donde se generan espacios de reflexión y estímulo en los que el aprendiz desarrolla la comprensión expandiendo su red de relaciones (Salazar, 2011, p. 162).

De acuerdo con lo anterior, el apoyo en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, se convierte en una oportunidad para el progreso en el razonamiento de los estudiantes, el desarrollo de su comprensión y crecimiento de la red de relaciones en torno a un concepto matemático.

Teniendo en cuenta los hallazgos en relación con las estructuras de tipo aditivo y la importancia de abordar la componente simbólica de las mismas, a partir de estrategias que permiten su articulación con una componente visual, se considera conveniente presentar a continuación la conceptualización de estas estructuras, teniendo en cuenta sus características y componentes.

1.4. El concepto de estructura

El concepto de estructura se evoca constantemente para las relaciones entre elementos y se presenta como la organización de las partes dentro de un todo. La estructura es, según Strauss (s. f.) "Un sistema regido por una cohesión interna, y esa cohesión, inaccesible a la observación de un sistema aislado, se revela en el estudio de las transformaciones gracias a las cuales encontramos propiedades semejantes en sistemas distintos en apariencia" (citado en Hernández, s.f., p. 56). La cohesión respecto a las estructuras de tipo aditivo implica que los estudiantes las reconozcan, dando una mirada integradora a sus componentes sin aislar ninguno de ellos.

Considerando las ideas de Piaget y de la psicología de la Gestalt, van Hiele menciona las características y propiedades de una estructura. Al respecto, los aportes de cada uno de ellos aluden a lo siguiente:

Para Piaget (1968), las características de las estructuras son:

1. La estructura tiene una totalidad.
2. La estructura es llevada a cabo por transformaciones.
3. La estructura es autorregulada (citado en van Hiele, 1986, p. 27).

Para la psicología de la Gestalt, existen cuatro propiedades que caracterizan una estructura:

1. Es posible extender una estructura. Quien conoce una parte de la estructura, también conoce la extensión de ella. La extensión de una estructura está sujeta a las mismas reglas dadas para una parte de ella.

2. Una estructura puede ser vista como parte de una estructura más fina. La estructura original no se afecta por esto: las reglas de juego no son cambiadas, solamente son ampliadas. De esta manera, es posible tener más detalles que toman parte en la construcción de la estructura.

3. Una estructura puede ser vista como una parte de una estructura más- inclusive. Esta estructura más-inclusive también tiene más reglas. Algunas de ellas definen la estructura original.

4. Una estructura puede ser isomorfa con otra. En este caso, las dos estructuras se definen mediante reglas que corresponden a cada una de ellas. Por tanto, si se ha estudiado la estructura dada, también se sabe cómo la otra estructura está construida (Citado en van Hiele, 1986, p. 28).

Tanto los aportes de Piaget, como de la teoría de la Gestalt y de van Hiele, consideran, como aspecto esencial de las estructuras, sus características isomorfas, las cuales permiten exponer la misma estructura bajo transformaciones. Este isomorfismo puede apreciarse en las estructuras de tipo aditivo cuando a partir de tres relaciones se ilustran las igualdades que la conforman:

$$a + b = c \text{ de donde } \begin{cases} a = c - b \\ b = c - a \end{cases}$$

Ilustración 1. Relaciones isomorfas en las estructuras de tipo aditivo.

De acuerdo con lo anterior, es pertinente que las estructuras de tipo aditivo, se aborden desde los primeros años de escolaridad a partir de experiencias que posibiliten en los estudiantes el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo como un conjunto integrado por la adición y la sustracción, donde puedan visualizarlas como una estructura.

1.4.1. Estructuras de tipo aditivo

Las estructuras de tipo aditivo son el conjunto de conceptos donde se abordan todas aquellas acciones, en las cuales, están involucradas la adición y la sustracción, éstas son fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas ya que se convierten en una base para la comprensión de operaciones, la solución de problemas y la representación de los mismos. Cuando se orientan procesos relacionados con el aprendizaje de las estructuras de tipo aditivo, deben abordarse conjuntamente la adición, sustracción y otros conceptos que forman parte de estas estructuras como son el concepto de número y colección.

1.4.2. El concepto de número

Las nociones que apoyan el concepto de estructura aditiva, abordan inicialmente el concepto de número. “En el niño, la noción de número es indisociable de la noción de medida... es la posibilidad de hacer sumas lo que da a la noción de número, su carácter específico en relación con las nociones, sobre las cuales se apoya” (Vergnaud, 1991, p. 101). En este sentido, se hace pertinente abordar elementos que favorezcan la adecuada configuración del concepto de número

..

para que los estudiantes puedan emplearlo en las situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Las nociones que apoyan el concepto de número son presentadas por Vergnaud, quien hace referencia a éstas como se menciona a continuación:

Una de las nociones que remiten al concepto de número es la seriación, cuando se presenta al niño un conjunto de elementos, éste puede enumerarlos como una recitación de números o puede emplearlos para conteo, estableciendo una relación entre la serie numérica hablada y el conjunto de objetos, de esta manera utiliza la noción de serie numérica (Vergnaud, 1991).

Después de utilizar la noción de seriación, el niño puede reconocer una cantidad como propiedad común a varios conjuntos y hacer una relación uno a uno e identificar dónde hay más, menos o igual cantidad, estableciendo así, una correspondencia biunívoca y una equivalencia cuantitativa que conlleva a la noción de cardinal.

En este sentido, al presentar una colección de objetos, el niño puede realizar agrupaciones teniendo en cuenta características comunes, ordenar atendiendo a un criterio dado y establecer relación entre elementos de acuerdo a un orden proporcionado; también puede asignar un cardinal a una colección estableciendo una correspondencia entre los objetos y el número de los mismos. (Vergnaud, 1991, p. 101 - 104).

Las nociones mencionadas anteriormente permiten el acercamiento a la adquisición del concepto de número y comprender los efectos de añadir y quitar, luego, las estructuras de tipo aditivo permiten ampliar los conocimientos sobre el concepto del número como cardinal, ordinal y medida.

En la ilustración 2, se presenta un Mapa Conceptual que resume la noción sobre la configuración del concepto de número y cómo éste se amplía con las estructuras de tipo aditivo:

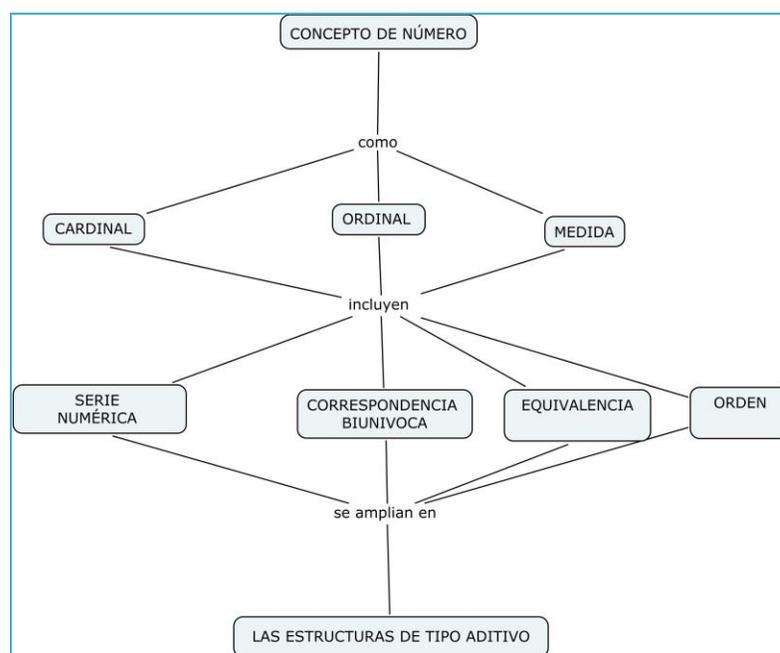


Ilustración 2. El concepto de número y su relación con las estructuras de tipo aditivo.

Las estructuras de tipo aditivo para la solución de situaciones matemáticas que involucran adiciones y sustracciones, fueron abordadas en el trabajo de investigación bajo los parámetros de Vergnaud. A continuación se presentan algunos de sus aportes en relación con dichas estructuras.

1.4.3. Estructuras de tipo aditivo según Vergnaud

Vergnaud (1990) plantea que, el conocimiento, está organizado en campos conceptuales y que las estructuras de tipo aditivo se refieren a uno de ellos, es decir: “El campo conceptual de las estructuras aditivas, es el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones” (Vergnaud, 1990, p. 141). Al referirse a las situaciones, manifiesta que éstas deben llevar a la interpretación y al análisis de las mismas, con el fin de facilitar la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes. Además, Vergnaud plantea con respecto a las situaciones: “la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias” (Vergnaud, 1990, p. 140). De acuerdo con lo anterior, en el trabajo de

investigación, las experiencias de aprendizaje para abordar las estructuras de tipo aditivo deben ser acordes con el contexto de los estudiantes y tener el carácter de tarea desde el aspecto reflexivo, es decir, que permitan el análisis e interpretación por parte de los estudiantes sobre los conceptos.

1.4.4. El concepto de estructura aditiva en el currículo escolar

Con la experiencia docente es posible reflexionar acerca de las estrategias empleadas en el aula y la forma cómo se enfrentan los estudiantes al desarrollo de las actividades académicas, particularmente aquellas que involucran las estructuras de tipo aditivo.

Respecto a las estructuras de tipo aditivo, se observa que las operaciones de adición y sustracción, son abordadas en el ciclo de primero a tercero de forma independiente, enfocadas a cálculos numéricos y pocas veces considerando las situaciones del contexto.

De acuerdo con lo anterior, es importante analizar la forma cómo los estudiantes del grado tercero comprenden las estructuras de tipo aditivo, a partir de estrategias que estén acordes al contexto en el cual se desenvuelven.

La importancia de relacionar los conocimientos con el contexto, se ve plasmada en los referentes nacionales, tales como: Lineamientos Curriculares y Estándares de Competencias. Estos referentes permiten considerar los aspectos concernientes al desarrollo de las prácticas de aula desde el aspecto académico y formativo para cada uno de los grados de escolaridad.

En Colombia, particularmente para el grado tercero, los conocimientos sobre las estructuras de tipo aditivo se apoyan en los planteamientos de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), propuestos por el Ministerio de Educación Nacional “MEN”.

Los Lineamientos Curriculares para Matemáticas plantean que: “Una parte importante del currículo de Matemáticas en la educación básica primaria, se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales” (MEN, 1998, p. 48). Por lo tanto, la comprensión de las estructuras de tipo aditivo es fundamental en los primeros años de escolaridad.

La construcción de esquemas mentales debe relacionarse con necesidades e intereses propios del contexto. Realizar diversas operaciones, interpretarlas y analizarlas, favorece, en el estudiante, la comprensión del contexto de forma cuantitativa, posibilitándole crear modelos que le permiten hacer abstracciones y generalizaciones del mundo real. Por lo tanto, la adecuada utilización de las estructuras de tipo aditivo y su relación con el contexto cobra gran importancia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Al respecto, el MEN resalta la importancia del trabajo escolar en contexto de la siguiente manera:

En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellas que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. Por ejemplo, las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que se trabajan simultáneamente con las ideas que dan lugar al concepto de número.

Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones, en donde el niño describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción, en una segunda etapa está abstrayendo las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos haciendo uso de diversos esquemas o ilustraciones con los cuales se está dando un paso hacia la expresión de las operaciones a través de modelos (MEN, 1998, p. 48).

Luego, es pertinente que las estrategias docentes apunten a la posibilidad de relacionar las estructuras matemáticas con acciones que permitan comprender diferentes aspectos del entorno en el que los estudiantes desarrollan sus actividades.

Si bien los lineamientos curriculares no hacen referencia propiamente a las estructuras, si dejan claras las estrategias como deben abordarse las operaciones de adición y sustracción. El MEN (1998), citando a Dickson (1991), presenta como modelos concretos para ilustrar el significado de estas operaciones, los objetos individuales y las longitudes continuas. Respecto a ello plantean:

Estas ilustraciones tienen relación y permiten ilustrar otros tipos de problemas que casi nunca se proponen en el salón de clase. La mayoría del trabajo dedicado al significado de las operaciones se ha limitado a resolver problemas “verbales o de enunciados” un poco artificiales y a menudo los alumnos no saben cuándo utilizar una operación porque les falta conocer diversas situaciones específicas que dan origen a estas (MEN, 1998, p. 49).

De esta manera, es oportuno abordar las estructuras aditivas a partir de actividades significativas, por esto, en la presente investigación se abordarán elementos que involucran la componente visual geométrica, con el fin de propiciar la comprensión del aspecto simbólico de las mismas.

Adicionalmente, respecto a las prácticas de aula, el MEN (2006) afirma que se deben fomentar experiencias de aprendizaje que ayuden al estudiante a:

- Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Usar diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identificar, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Representar el espacio circundante para establecer relaciones espaciales (MEN, 2006, p. 80).

En concordancia con lo anterior, las aplicaciones y usos del concepto permiten dar cuenta de la importancia de las estructuras de tipo aditivo en los contextos cotidianos y de las exigencias curriculares planteadas por el MEN.

1.4.5. Categorías en las estructuras de tipo aditivo

Respecto a las estructuras de tipo aditivo como: “Estructuras o relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones y sustracciones”, Vergnaud propone seis grandes categorías (Vergnaud, 1991, p. 161):

- a. Primera categoría: Dos medidas se componen para dar lugar a una medida.
- b. Segunda categoría: Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.
- c. Tercera categoría: Una relación une dos medidas.
- d. Cuarta categoría: Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.
- e. Quinta categoría: Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.
- f. Sexta categoría: Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo (Vergnaud, 1991, p. 161).

Las categorías anteriormente mencionadas son consideradas en el presente trabajo a partir de situaciones de composición y transformación. El siguiente Mapa Conceptual ilustra los aspectos que se abordan de las categorías en la investigación:

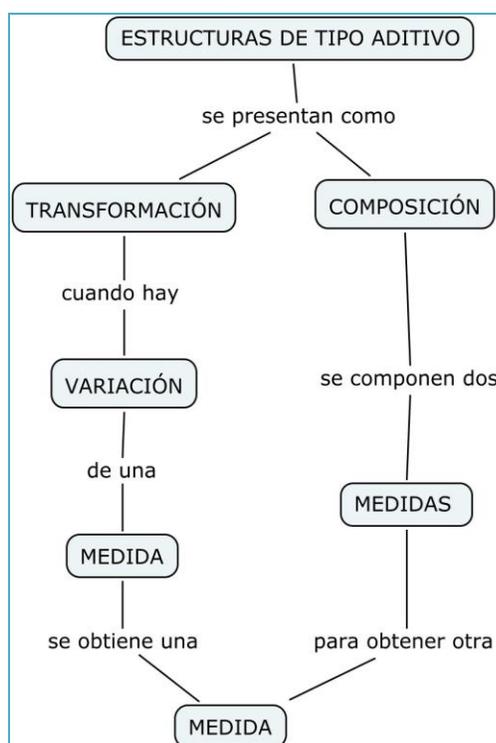


Ilustración 3. Categorías de composición y transformación.

Respecto a la relación de composición, se puede decir que ésta se presenta en situaciones en las cuales se tienen dos cantidades, y éstas se diferencian en alguna de sus características. Se puede hallar la cantidad total cuando se conocen las partes de un conjunto. De otro lado, cuando se conoce la cantidad total y una de las partes, se puede preguntar por la otra parte. Este aspecto se ilustra a continuación:

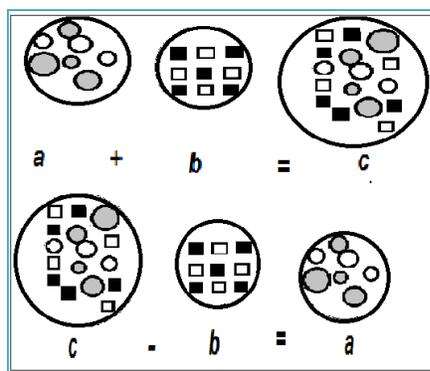


Ilustración 4. Categoría de composición.

Por otro lado, en una relación de transformación se parte de una cantidad a la cual se le adiciona o quita otra cantidad de la misma naturaleza. En estas situaciones se puede preguntar por la cantidad que resulta de la transformación, por la cantidad inicial y/o por la cantidad final. Estas situaciones se ilustran a continuación:

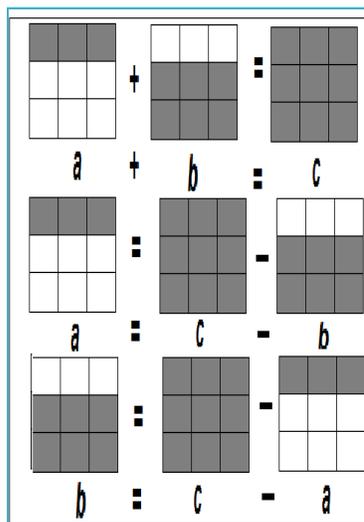


Ilustración 5. Categoría de transformación.

Las categorías de composición y transformación pueden ser abordadas a partir de experiencias basadas en la visualización. Es conveniente, que los estudiantes elaboren, no sólo resultados numéricos y simbólicos, sino también que construyan significados e interiorizaciones alrededor de los mismos, es decir, que obtengan la solución a situaciones de tipo aditivo en diferentes contextos, construyendo argumentos y conocimientos, en torno al reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo.

1.5. Herramientas esenciales en la utilización de las estructuras de tipo aditivo

Abordar las estructuras de tipo aditivo implica el reconocimiento de sus componentes para poder plantear actividades enmarcadas en la comprensión de las mismas. Complementando las definiciones y referentes presentados anteriormente, las estructuras aditivas abarcan la componente visual geométrica, la cual se expone a continuación:

1.5.1. La componente visual – geométrica

Una de las motivaciones de van Hiele para el estudio de la comprensión de los estudiantes fue observar las debilidades que presentaban para entender el aspecto formal de los conceptos, al respecto expresa: "Cuando empecé mi carrera como profesor de Matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no entendían" (van Hiele, 1986, p. 39). Las observaciones realizadas por van Hiele, conllevaron a la formulación del modelo educativo de van Hiele, resaltando la importancia de la visualización desde los primeros años de escolaridad.

Respecto a lo anterior, Corberán et.al., al referirse a los niveles de razonamiento del modelo, mencionan: "... van desde el puramente visual propio de los niños de los primeros cursos de E. Primaria hasta el lógico-formal que desarrolla un matemático" (Corberán et.al, 2004, p. 13). En este sentido, el propósito de las actividades fundamentadas en la visualización "es lograr que el alumno alcance un nivel de razonamiento formal del concepto, sin la necesidad de apelar a la visualización, sino al lenguaje (simbólico) matemático riguroso y preciso que corresponde al concepto en cuestión" (Jaramillo & Campillo, 2001, p. 71), de allí que el presente trabajo esté enmarcado en las fases del modelo de van Hiele y la utilización de estrategias que abordan la componente visual geométrica.

Por lo tanto, los conceptos que conforman las estructuras de tipo aditivo: cardinal, colección, composición y transformación, son abordados desde representaciones icónicas, gráficas y enunciados de carácter verbal, con el fin de ayudar a los estudiantes en la apropiación del aspecto simbólico y el reconocimiento de la adición y sustracción como una estructura.

1.5.2. Redes de relaciones

La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, implica el reconocimiento en su estructura global, para esto es pertinente que los estudiantes se enfrenten a situaciones que posibiliten acrecentar la red de relaciones en torno al concepto.

1.6. El problema de investigación

En la experiencia de aula se puede observar que cuando el docente plantea actividades que involucran las estructuras de tipo aditivo, cuya solución requiere de una actividad de cálculo, los estudiantes la realizan, en general, sin inconvenientes y aplican el algoritmo de forma mecánica. En cambio, cuando se plantean situaciones en las que se debe razonar, analizar, interpretar y emplear determinada operación, éstos presentan dificultades en los procesos que involucran la comprensión y ejecución de cada una de éstas acciones. Además, se observa que, en las prácticas de aula se imparten estrategias que conllevan a cálculos numéricos a partir de enunciados verbales. De esta manera, se considera pertinente la implementación de una serie de estrategias que permitan analizar la manera cómo los estudiantes comprenden las estructuras de tipo aditivo, a partir de experiencias que tienen en cuenta la componente simbólica, articulada a la componente visual - geométrica, con el fin de analizar la comprensión de los estudiantes al enfrentarse a dichas situaciones.

1.6.1. Planteamiento del problema

La presente investigación se enfocó en el reconocimiento visual-geométrico que los estudiantes realizan de las estructuras de tipo aditivo en correspondencia con el modelo de van Hiele. Por lo tanto, la pregunta de investigación que guió este proyecto fue: **¿Cuál es el proceso de comprensión, que los estudiantes del grado tercero de básica primaria adquieren, en relación con las estructuras de tipo aditivo, a partir de experiencias de aprendizaje enmarcadas en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele?**

Es así, como se hace pertinente desarrollar una investigación que permita la apropiación de estructuras mentales y estrategias de solución asociadas a las estructuras de tipo aditivo, a partir de actividades propuestas desde cada una de las fases del Modelo de van Hiele, con el fin de propiciar el reconocimiento de las mismas.

1.6.2. Objetivos

Un razonamiento adecuado frente a las estructuras de tipo aditivo, desde la visualización, favorece la comprensión de diferentes temas relacionados con el saber matemático, así lo confirman Jaramillo & Esteban (2006) al referirse al modelo de van Hiele, planteando que la idea central de éste, es que el estudiante comprenda un concepto matemático apoyado en herramientas con una componente visual geométrica a partir de experiencias adecuadas de aprendizaje.

Las experiencias de aprendizaje, no sólo se hacen necesarias para resolver problemas desde el ámbito escolar, sino también a partir de situaciones propias del contexto que requieren del uso de las mismas. Esta necesidad de abordar la comprensión de las estructuras de tipo aditivo apoyándose en la componente visual geométrica, permite trazar los siguientes objetivos de investigación.

1.6.2.1. Objetivo general

Analizar el proceso de comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en los estudiantes del grado tercero de básica primaria, a partir de experiencias de aprendizaje fundamentadas en las fases del modelo de van Hiele.

1.6.2.2. Objetivos específicos

Con el propósito de lograr el objetivo general del presente trabajo de investigación, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Determinar las características para cada una de las fases del modelo de van Hiele, que el estudiante debe abordar en el proceso de comprensión de las estructuras de tipo aditivo.

- Describir la forma como los estudiantes del grado tercero de básica primaria, abordan experiencias de aprendizaje, apoyadas en la visualización, que permitan el análisis de sus procesos de comprensión, en relación con las estructuras de tipo aditivo.

A partir de la experiencia en el aula y los antecedentes en relación con las estructuras de tipo aditivo, se considera pertinente la articulación del trabajo de investigación con el modelo educativo de van Hiele, éste permite la implementación de estrategias que ayudan al reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero de básica primaria. A su vez proporciona los fundamentos que permiten el análisis de la comprensión en relación con el concepto, para el reconocimiento de aquellos procedimientos y razonamientos que llevan a cabo los estudiantes al momento de resolver situaciones de tipo aditivo, estas descripciones se convierten en una herramienta para el docente, quien al conocer tales formas de comprender, podrá diseñar nuevas actividades y estrategias que mejoren dichos procesos.

El siguiente capítulo presenta los fundamentos teóricos de la investigación.

Capítulo 2

Marco Teórico

Los fundamentos teóricos que sustentan la presente investigación se articulan al modelo educativo de van Hiele, profundizando en la implementación de las fases.

A continuación se expone el modelo con sus respectivos componentes: Insight, niveles de razonamiento y fases de aprendizaje. Adicionalmente, se resalta su pertinencia para el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo en relación con las categorías presentadas por Vergnaud.

2.1. La comprensión de conceptos matemáticos

La comprensión de conceptos matemáticos, juega un papel relevante en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, ésta permite enfrentarse a situaciones del contexto y resolverlas adecuadamente. Por lo tanto, las estrategias empleadas en el aula para el trabajo con operaciones básicas de adición y sustracción, deben propender por la comprensión de las mismas. Al respecto el MEN plantea lo siguiente:

Tradicionalmente el trabajo con las operaciones en la escuela se ha limitado a que los niños adquieran destrezas en las rutinas de cálculo con lápiz y papel a través de los algoritmos formales, antes de saber aplicarlas en situaciones y problemas prácticos, muchas veces sin comprender ni los conceptos que los fundamentan, ni el significado de las operaciones (MEN, 1998, p. 53).

Es pertinente que los docentes planteen experiencias de aula que fomenten la comprensión de los conceptos aplicados en contexto y, además, la correcta aplicación de los algoritmos con lápiz y papel o con medios tecnológicos para la solución de diversos problemas de interés para los

estudiantes. Al respecto: “La adquisición de comprensión es, con razón, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas. Tendremos que crear las condiciones bajo las cuales la comprensión se pueda detectar” (van Hiele, 1957, p. 13). Respecto a lo anterior, en el planteamiento de las actividades de investigación, desarrolladas con los estudiantes del grado tercero, se presentaron las operaciones de adición y sustracción fundamentadas en la visualización, con el fin de favorecer la comprensión de las estructuras de tipo aditivo.

En el desarrollo de actividades encaminadas al reconocimiento de un concepto matemático, por parte del estudiante, “... basta que comprendan la forma como éste opera y a partir de este proceso puedan aplicar el concepto en distintas circunstancias del aprendizaje o en la solución de problemas cotidianos” (Jaramillo & Esteban, 2006, p. 115). Por esta razón, para lograr el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, se busca que el estudiante, antes de aprender los conceptos, pueda enfrentarse, adecuadamente, ante las situaciones; es así como se indagó por estrategias de aprendizaje que posibilitaran a los estudiantes, el acercamiento a la comprensión, de la forma cómo se aplica el concepto en diferentes situaciones. En este sentido, la fundamentación en experiencias desarrolladas de forma secuencial, apoyadas en la componente visual geométrica podría aportar herramientas para la interpretación, comprensión y solución de problemas de tipo aditivo.

2.2. Teorías de aprendizaje

En los contextos escolares, los procesos de aprendizaje se ven reflejados por la manera como los estudiantes se enfrentan a diversas situaciones. Ellos pueden elaborar procesos memorísticos u otros procesos mentales a partir de diferentes construcciones y formas de acercamiento al conocimiento. A continuación se describen los referentes teóricos que permitieron comprender algunos elementos de las construcciones mentales elaboradas por los estudiantes.

2.2.1. El cognitivismo

La articulación entre los procesos mentales y el conocimiento se puede fundamentar en el enfoque cognitivista, éste posibilita al estudiante la participación activa en su proceso. Desde este enfoque, se presenta la información, de tal manera que pueda ser organizada, de forma consciente, se hacen evidentes los procesos mentales a través del uso del lenguaje y los argumentos expuestos ante la solución de las situaciones.

Piaget fue protagonista en el desarrollo del cognitivismo, se preocupó por el desarrollo del conocimiento humano y la forma cómo se generan los procesos mentales. Él se refiere a la evolución del pensamiento humano como un proceso que se inicia con el nacimiento y progresa a través de diferentes etapas o estadios, éstos se caracterizan por su forma especial de pensamiento o razonamiento y se diferencian entre sí.

Las etapas de desarrollo según Piaget, siguen un orden determinado. Cuando el individuo accede a otra etapa, se agregan nuevos conocimientos a los que ya se tienen. En su trabajo se distinguen los siguientes estadios o etapas de desarrollo: Sensoriomotor, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales, las cuales se fundamentan en la postura constructivista como se presenta a continuación (Rosas & Sebastián, 2004).

2.2.2. El constructivismo

La postura constructivista se encuentra articulada al cognitivismo, en ésta se explica la forma cómo el estudiante construye el conocimiento a partir de un proceso de enseñanza. Piaget, en su discurso, presenta el constructivismo cognitivo interesándose en el estudio sobre el desarrollo y la formación del pensamiento humano, haciendo referencia a la estructura cognitiva, donde las diferencias, en el desempeño de los estudiantes, están en relación con sus etapas de desarrollo (Rosas & Sebastián, 2004).

Según Brainerd (1978), la teoría piagetiana gira en torno a "... tres grandes ejes conceptuales: estructura cognitiva, función cognitiva y contenidos de la cognición (Citado por Rosas & Sebastián, 2004, p. 12). De acuerdo con Piaget, la estructura cognitiva es definida como la forma en que la cognición se presenta, en cada uno de los periodos de desarrollo, la cual no puede ser medida sino que se describe a partir de la observación de conductas. "Lo que define a la estructura no es la presencia de unos u otros elementos en un momento dado, sino las relaciones que se establecen entre ellos" (Rosas y Sebastián, 2004, p. 13). Es así como se busca en la investigación que los conocimientos construidos por los estudiantes formen una estructura organizada y con significado, que permita encontrar la relación existente entre cada uno de los elementos de las estructuras de tipo aditivo, para la posterior descripción de los desempeños observados.

Piaget (año) rescata como propiedades de la estructura cognitiva: La totalidad, las transformaciones y la autorregulación, y hace referencia a dos tipos de estas estructuras: Los esquemas y las operaciones. Los esquemas son "... las unidades básicas de la estructura cognitiva humana... definido como una serie de contenidos cognitivos (acciones inteligentes específicas, tales como percepciones, recuerdos, conceptos, símbolos, acciones motoras) relacionados, que están estrechamente entrelazados y que tienden a gatillarse unos a otros" (Rosas & Sebastián, 2004, p. 16).

Por otro lado, las operaciones cognitivas "... corresponden a coordinaciones de acciones interiorizadas, reversibles, agrupadas en sistemas de conjunto con leyes de totalidad. El sujeto no requiere actuar físicamente con el objeto sino que puede representarse una imagen mental de la acción en cuestión" (Rosas & Sebastián, 2004, p. 18). En este sentido, el apoyo en la componente visual geométrica en la investigación busca que, los estudiantes, construyan esquemas mentales que posibiliten la transición del apoyo visual a la apropiación del aspecto simbólico de las estructuras de tipo aditivo.

Piaget (año) afirma que la cognición humana está en constante desarrollo y propone, como invariantes funcionales a la base de la cognición humana: La organización y la adaptación (asimilación, acomodación y equilibración).

La organización hace parte de la inteligencia humana “es un particular conjunto de interrelaciones que pueden ser materializadas por múltiples conjuntos de elementos, propio de un organismo o sistema” (Rosas & Sebastián, 2004, p. 20). Esto permite la construcción de las estructuras mentales como una totalidad a partir del proceso de adaptación.

La adaptación implica que “...los cambios producidos en el medio pueden ser manejados por el organismo sin que su organización se modifique” (Rosas & Sebastián, 2004, p. 22), de este modo es necesario pasar por procesos de asimilación y acomodación, donde la asimilación incluye la incorporación de nuevos elementos a la estructura cognitiva y en la acomodación, según Vuyk (1984): “Se produce un enriquecimiento de la estructura, no surgen nuevos esquemas que anulen al anterior sino que la aparición de nuevas subestructuras diferenciadas permiten una flexibilización de la estructura original”. (Citado en Rosas & Sebastián, 2004, p. 24).

Para Piaget el desarrollo cognitivo está influenciado por etapas de desarrollo genético, “al tomar una perspectiva genética... cada nivel se construye sobre las bases del anterior, dando un salto cualitativo, tal que, las formas cognitivas más elevadas de la etapa anterior, corresponden a las unidades de trabajo en el nivel superior” (Rosas & Sebastián, 2004, p. 22). A continuación se presentan las etapas de desarrollo propuestas por Piaget.

1. Etapa Sensoriomotriz (0 - 2 años), cuyo máximo logro es la adquisición de la función simbólica o capacidad de representar el mundo externo por medio de los símbolos.
2. Etapa preoperacional (2 - 7 años), cuyo máximo logro es la preparación, a partir del ejercicio activo del uso de símbolos, para la adquisición de las “operaciones

mentales”, las que son descritas por Piaget como estructuras cognitivas que le permiten al individuo operar en el ambiente de manera lógica y reversible.

3. Etapa de las operaciones concretas (7 - 12 años) caracterizada por el ejercicio de la lógica en la acción del individuo con los objetos del entorno.

4. Etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años), caracterizada por la posibilidad del individuo de operar en el ambiente de manera hipotético-deductiva, aún en ausencia de experimentación práctica (Rosas & Sebastián, 2004, p. 27-28).

La importancia de los aportes de Piaget, en los procesos de construcción de las estructuras mentales, influyen en otros modelos y teorías, como es el caso de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y el modelo educativo de van Hiele.

La teoría de los campos conceptuales, propuesta por Vergnaud “...es una teoría cognitivista, que proporciona un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y a las técnicas” (Vergnaud 1990, p. 133), allí Vergnaud tiene en cuenta aportes de Piaget en la construcción teórica que hace a partir de su experiencia.

Respecto a los aportes de Piaget al modelo educativo de van Hiele, se puede decir que el modelo tiene sus raíces en lo concerniente al concepto de estructura, pues de Piaget se retoman las propiedades de ésta. Además, su trabajo sirvió de referencia al trabajo de van Hiele, así lo plantean, Londoño & Jurado (2005):

Mientras estudiaba algunos de los trabajos de Jean Piaget, Pierre van Hiele formuló su sistema de niveles de pensamiento en geometría. Él notó, como es evidente en algunas de las entrevistas de Piaget, que los problemas o tareas que se les presentan a los niños con frecuencia requieren de un conocimiento del vocabulario o propiedades que está fuera del alcance de su nivel de pensamiento. Si la enseñanza acontece en un nivel superior al del estudiante, el material no es asimilado propiamente en la memoria por un periodo largo de tiempo (Londoño y Jurado, 2005, p. 4).

..

A partir de los aportes presentados por Piaget, van Hiele formuló su modelo retomando aquellos aportes con los que estuvo de acuerdo y reconsiderando aquellos con los que encontró diferencias. Van Hiele considera que el paso de un nivel de pensamiento a otro está en función del aprendizaje y no de la etapa del desarrollo. Para este autor, el papel del lenguaje es importante para pasar de un nivel al siguiente, el nivel más alto es alcanzado si las reglas que gobiernan la estructura más baja se han hecho explícitas y estudiadas; por lo tanto se convierten en una nueva estructura (van Hiele, 1986, p. 5).

Adicionalmente, otro personaje influyente en este campo fue Vigotski, quien presentó el constructivismo socio-cognitivo y planteó que: “la situación de progreso del ser humano actual sería el producto de una línea de desarrollo que no es la biológica, sino una cualitativamente distinta, a saber, la histórico cultural, inaugurada por la creación de herramientas materiales y sociales ligadas a la organización del trabajo humano” (Van der Veer y Valsiner, 1991, citados por Rosas y Sebastián, 2004, p. 31), en este sentido, el desarrollo del ser humano depende de su relación con la sociedad y la interacción con otras personas.

Luego, retomando aportes de Piaget y Vygotski, Vergnaud plantea:

Piaget y Vygotski se interesan los dos por el desarrollo y la larga duración del desarrollo; sus convergencias son grandes. Es cierto que Piaget enfatiza más en la actividad del sujeto que la cultura, pero es perfectamente consciente del rol de la cultura en el desarrollo cognitivo del niño. Vygotski, prioriza el peso de la cultura y los procesos de mediación, asegurados por el adulto, en vista de la apropiación de la cultura por el niño, pero él es también uno de los padres de la teoría de la actividad, da al lenguaje y al simbolismo un rol esencial de mediación” (Vergnaud, 2006, p. 286).

Se puede decir que, los aportes de la teoría de Vergnaud, amplían los aportes de Piaget apoyándose en Vygostki, dando relevancia al lenguaje y la interacción con el medio y la cultura. Por otro lado van Hiele, da una importancia singular al lenguaje para la adecuada configuración de las estructuras mentales.

2.3. Modelo educativo de van Hiele

A finales de los años 50, del siglo pasado, Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele Geldof trabajaban como profesores de Geometría, estaban preocupados por la comprensión que los estudiantes tenían de algunos conceptos, dado que, aparentemente comprendían, sin embargo, a la hora de dar solución a situaciones que involucraran éstos, se notaban las dificultades que tenían sobre los mismos. A partir de estas inquietudes, comenzaron a investigar sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes en la Geometría, lo cual conllevó a formular el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele (Van Hiele, 1986, p. 39). Este modelo está constituido por tres componentes: El insight, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. A continuación se exponen los componentes del modelo:

2.3.1. Insight

Este componente da cuenta de la estructura mental de los estudiantes, allí se pone de manifiesto la comprensión y las redes de relaciones construidas en torno al concepto y se hacen evidentes los procesos de razonamiento que se entablan de acuerdo a lo aprendido.

Respecto a la comprensión, los esposos van Hiele (1957) hablan de "...dos momentos de la comprensión, "actuar adecuadamente" y la "nueva situación" (van Hiele, 1957, p. 7). En la investigación, al presentar situaciones en relación con las estructuras de tipo aditivo, teniendo en cuenta la componente visual geométrica y la expresión simbólica a partir de enunciados de tipo verbal, se observó que para actuar ante nuevas situaciones se requiere de la comprensión, "... la comprensión se reconoce como tal cuando el sujeto actúa adecuada e intencionadamente ante una nueva situación" (van Hiele, 1957, p. 11). Así, puede definirse comprensión como la actuación del estudiante al enfrentarse ante nuevas situaciones con intención, cuando el estudiante se enfrenta a nuevas situaciones, coloca en evidencia sus razonamientos e intenciones de acuerdo a las construcciones mentales elaboradas.

2.3.2. Niveles de razonamiento

El modelo de van Hiele incluye el aspecto “... descriptivo, en cuanto que intenta explicar cómo razonan los estudiantes. Esto se hace a través de la definición de cinco niveles de razonamiento” (Gutiérrez & Jaime, 1995, p. 27), los cuales permiten ubicar o clasificar el progreso con respecto a la comprensión que posee un estudiante frente a un concepto matemático.

Van Hiele (1986), sugiere la existencia de cinco niveles de razonamiento en relación con la geometría:

Primer nivel: el nivel visual.

Segundo nivel: el nivel descriptivo.

Tercer nivel: el nivel teórico, con las relaciones lógicas, geometría generada de acuerdo a Euclides.

Cuarto nivel: la lógica formal, un estudio de las leyes de la lógica.

Quinto nivel: la naturaleza de las leyes lógicas (van Hiele, 1986, p. 53).

Van Hiele hace especial énfasis en los tres primeros: básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo y tercer nivel o nivel teórico. Expresa que los niveles superiores al tercero presentan dificultades en los estudiantes para su entendimiento y sólo tienen un interés teórico (van Hiele, 1986).

La creación del modelo de van Hiele fue tomando auge con el paso de los años y se aplicó tanto a la Geometría como al Análisis Matemático. A través del tiempo, diversos autores han redefinido el nombre de sus niveles y fases, sin embargo, conservan la esencia y origen del mismo.

Al respecto, Corberán et.al., (2004), lo resumen de la siguiente manera:

Un primer nivel en el que se maneja solamente información visual y cuya forma de razonamiento no puede ser considerada como propiamente matemática.

Un segundo nivel en el que se empieza a reconocer la presencia de propiedades Matemáticas de los objetos, si bien el razonamiento se sigue basando en la percepción física.

Un tercer nivel en el que comienza a desarrollarse la capacidad de razonamiento riguroso y se es capaz de manejar los elementos más simples del sistema formal (definiciones o implicaciones de un solo paso).

Un cuarto nivel en el que se completa la formación del razonamiento matemático lógico-formal de los individuos.

Por último, un quinto nivel en el que se adquieren los conocimientos y habilidades propias de los matemáticos profesionales (Corberán, et al., 1994, p. 19).

Los niveles de razonamiento permiten identificar características del aprendizaje de los estudiantes y reconocer experiencias de aprendizaje, a implementar en las prácticas de aula, acordes con su razonamiento. Por ello, es pertinente planear actividades en las que puedan construir sus conocimientos y progresar a través de los diferentes niveles.

2.3.3. Fases de aprendizaje

Las fases de aprendizaje permiten la estructuración de pautas para la enseñanza de conceptos matemáticos. Brindan herramientas de carácter secuencial y ordenado para la elaboración de actividades, con el fin de permitir el progreso a través de los diferentes niveles de razonamiento.

El progreso, en el nivel de razonamiento, es posible con el desarrollo de actividades articuladas a las fases, estas actividades deben permitir el enriquecimiento de las redes de relaciones, previamente elaboradas, en torno al concepto abordado.

De acuerdo con los van Hiele (1986), las fases de aprendizaje son las siguientes:

Fase 1. Información: El profesor conversa con sus estudiantes, en el conocido lenguaje de símbolos, en el cual, el lenguaje a utilizar queda claro.

Fase 2. Orientación dirigida o exploración: El profesor se encarga de dirigir, aunque los estudiantes son capaces de encontrar la relación entre los símbolos lingüísticos o entre otras formas de las cuales estos símbolos serían desarrollados de la estructura total, les ayuda a encontrar estas relaciones, es importante hablar de la relación del contexto, para lograrlo es necesaria la presentación de un material eficiente o la asignación de tareas eficientes, las cuales forman las bases del pensamiento en el más alto nivel.

Fase 3. Explicitación: Se establecen explicaciones, que aclaren las estructuras involucradas en la actividad, se produce un tipo de discusión. Bajo la dirección del profesor los estudiantes dan sus opiniones sobre las regularidades que ellos han encontrado. En este momento se pone de manifiesto el trabajo con los conceptos aprendidos, los estudiantes intercambian sus puntos de vista sobre las nuevas cosas que han descubierto durante la orientación. El lenguaje juega un rol muy importante en este intercambio.

Fase 4. Orientación Libre: Los estudiantes ya saben de qué tema se trata (a qué se refiere), han leído acerca de situaciones concretas, ya conocen los símbolos lingüísticos adecuados. El dominio de su estudio es claramente marcado. Ha llegado el momento en el cual los niños deberán sentirse como en casa en este dominio. A partir de un número de tareas, que pueden ser ejecutadas de diferentes maneras, deben encontrar la forma en el campo indicado, con el fin de conseguir familiarizarse con él desde todas las direcciones. Estos símbolos gradualmente pierden parte de su contenido visual y desarrollan uniones de redes de relaciones que han sido formadas (van Hiele, 1986, p. 96).

Otros autores hacen alusión a una fase 5 de aprendizaje o fase de integración, la cual “tiene como objetivo completar la red de relaciones objeto de ese nivel para el concepto que se trabaja.

El profesor debe proponer resúmenes de todo lo aprendido y exigir la memorización de los resultados fundamentales” (Gutiérrez & Jaime, 1995, p. 35).

Cada una de las fases de aprendizaje tiene una intencionalidad, en relación con el concepto abordado, particularmente para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, se considera pertinente, presentar experiencias de aprendizaje fundamentadas en las fases del modelo de van Hiele, que impliquen el desarrollo de actividades de forma secuencial a partir de situaciones del contexto.

2.3.4. Propiedades del modelo

El modelo educativo de van Hiele, además de los tres componentes que lo estructuran, presenta algunas características que le identifican, según Gutiérrez & Jaime (1995), éstas son:

La secuencialidad: Hace referencia al orden en la obtención de los niveles de razonamiento, no se puede adquirir un nivel de razonamiento en un concepto, si no se ha superado el anterior.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel posee un lenguaje específico que permite, no sólo el uso adecuado de palabras, sino que ayuda a su interpretación. Es necesario el empleo de un lenguaje acorde al nivel de razonamiento frente a un concepto para que, de esta forma, sea posible la comprensión.

Paso de un nivel al siguiente: El paso de un nivel a otro no se da de manera espontánea, como un salto, es necesario un periodo de transición donde, incluso, puede aparecer el razonamiento de dos niveles consecutivos.

Globalidad o localidad: El nivel de razonamiento es local, si un estudiante razona en cierto nivel, con respecto a un concepto, es posible que razona en otros niveles en relación a otro concepto.

Instrucción: La adquisición de los niveles no es un aspecto biológico, influye, en él, la instrucción recibida y la experiencia personal.

El progreso a través de los niveles de razonamiento, ilustra cada una de estas propiedades. Particularmente, es importante resaltar la pertinencia del lenguaje, el cual se va refinando a medida que el estudiante moviliza y estructura sus razonamientos.

Para captar la forma cómo se va refinando el lenguaje, en la presente investigación, se considera pertinente la utilización de mapas conceptuales que den cuenta de las construcciones mentales de los estudiantes y posibiliten el intercambio de información a través del lenguaje, “...los mapas conceptuales constituyen una representación explícita y manifiesta de los conceptos y proposiciones que posee una persona...” (Novak & Gowin, 1988, p. 7). En este sentido permiten observar la red de relaciones construida por los estudiantes en torno a las estructuras de tipo aditivo.

2.3.5. La importancia del lenguaje en el modelo de van Hiele

El modelo de van Hiele resalta la importancia del lenguaje y hace énfasis en la presentación de experiencias de aprendizaje, acordes al nivel de razonamiento de los estudiantes como requerimiento esencial para el paso a un nuevo nivel.

La transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza – aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje (van Hiele, 1986, p. 50).

Es así, como se hace necesario abordar los conceptos matemáticos presentando actividades de forma secuencial, en este caso, apoyados en las fases de aprendizaje, las cuales permiten a los estudiantes construir y refinar el lenguaje en torno al concepto objeto de estudio y de esta manera avanzar de un nivel de razonamiento inferior a otro superior.

2.3.6. Pertinencia del modelo de van Hiele

Para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, la investigación se fundamenta en el modelo educativo de van Hiele, el cual "...analiza los procesos de razonamiento, por lo que su centro de atención no es el aprendizaje de hechos y destrezas, sino la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento" (Corberan, et. al., 1994, p. 14). De esta manera la fundamentación en el modelo, permite apropiarse de su aspecto prescriptivo, las fases de aprendizaje, para el diseño de experiencias de aprendizaje, que posibilitan observar los razonamientos que adquieren los estudiantes y de esta forma analizar su comprensión en relación con las estructuras de tipo aditivo.

La comprensión de un concepto matemático va en correspondencia con los descriptores de nivel, éstos dan cuenta de las características del nivel de razonamiento en el que se encuentra el estudiante.

Por ello, "...la consecución de cierto nivel implica simultáneamente la adquisición de cierta comprensión. Sin embargo, la consecución de un nivel implica la adquisición de una comprensión muy específica, ésta relacionada con una ordenación mental totalmente nueva" (van hiele, 1957, p. 88).

Por esta razón, en la presente investigación se hizo pertinente el aspecto prescriptivo del modelo, ya que: "Da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar" (Gutiérrez & Jaime, 1995, p. 27).

Es preciso señalar que, el modelo de van Hiele, debido a que inicialmente fue desarrollado, para el ámbito geométrico, le concede una importancia singular a la visualización de los objetos y las propiedades que conforman un concepto. Al respecto, la investigación consideró la componente desde experiencias de aprendizaje fundamentadas en el aspecto gráfico y simbólico para las estructuras de tipo aditivo, lo cual se vio reflejado en el trabajo de aula en la búsqueda del reconocimiento, utilización y aplicación de situaciones que involucraban las estructuras de tipo aditivo.

Por otro lado, abordar las estructuras de tipo aditivo, teniendo en cuenta los aportes de van Hiele, permite dar cuenta de las construcciones mentales de los estudiantes en torno a las mismas, de esta manera el diseño de experiencias teniendo a partir de las fases de aprendizaje, como aspecto prescriptivo del modelo, permite analizar la comprensión de los estudiantes, en relación con la estructura propuesta por Vergnaud, la cual es una estructura conceptual que se articula al concepto.

Es conveniente aclarar que, durante el desarrollo del trabajo de investigación, se tuvieron en cuenta los aportes de Vergnaud para la conceptualización de las estructuras de tipo aditivo, objeto de estudio de esta investigación, pero es el modelo de van Hiele el referente teórico, que apoya el desarrollo del mismo. Los autores de la investigación, a partir del análisis de la literatura establecen la relación entre estas dos estructuras, donde van Hiele aporta en general al concepto de estructura y Vergnaud las estructuras de tipo aditivo.

A continuación se hace una descripción de este aspecto.

2.3.7. Estructuras de tipo aditivo según Vergnaud y el concepto de estructura según van Hiele

Vergnaud (1991), hace referencia al concepto de estructuras de tipo aditivo como el conjunto de relaciones que sólo están formadas por adiciones y sustracciones y plantea algunas categorías para su proceso de conceptualización. De acuerdo con esto, es pertinente aclarar que la teoría de los campos conceptuales se interesa por dar cuenta de la forma cómo se progresa en dicho proceso. En este sentido, Vergnaud (1994) "...a diferencia de Piaget, toma como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual del dominio de ese conocimiento" (Citado en Moreira, 2002, p. 1). De acuerdo con lo anterior, puede afirmarse que la estructura propuesta por Vergnaud es una estructura conceptual, la cual se articula al concepto. Además, Vergnaud, "...en lo que se refiere a la Matemática, se vio obligado a interesarse, mucho

..

más que Piaget, por cuestiones como las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas” (Citado en Moreira, 2002, p. 2).

Para Vergnaud, uno de los conceptos más relevantes es el de esquema, que es “... una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige” (Vergnaud, 1990, p. 149). Particularmente, en la investigación se consideraron las características de la adición y sustracción enmarcadas en experiencias de aprendizaje que permitieron a los estudiantes el reconocimiento como una totalidad, como una estructura de tipo aditivo.

De otro lado, van Hiele (1986) afirma que es la estructura quien permite al hombre enfrentarse a diversas situaciones. Al respecto enumera las siguientes propiedades:

1. Un hombre o un animal puede actuar dando cuenta de una estructura en una nueva situación.
2. La estructura es objetiva, otras personas miran (oyen o huelen) una estructura tal como lo hacemos. Otra persona es capaz de reaccionar a una estructura justo como nosotros lo hacemos (van Hiele, 1986, p. 27).

En este sentido, abordar las estructuras de tipo aditivo teniendo en cuenta los aportes de van Hiele, permite dar cuenta de las construcciones mentales de los estudiantes en torno a las mismas. Adicionalmente, el esquema de Vergnaud está en correspondencia con la red de relaciones, la cual evidencia las construcciones mentales (Ver sección 5.5), donde los esquemas se modifican y enriquecen, así, los estudiantes recurren a nuevas estrategias para dar solución a diversas situaciones, refinando la red de relaciones elaboradas en torno al concepto objeto de estudio.

2.4. Pertinencia del trabajo de Vergnaud en relación con el modelo de van Hiele

El concepto de estructuras de tipo aditivo, definido por Vergnaud como una estructura conceptual está directamente relacionado con las ideas retomadas por van Hiele, el cual se refiere a la construcción de las estructuras mentales, siendo éstas las que dan cuenta de su razonamiento, es decir, de la red de relaciones construida en torno a este concepto (Ver sección 5.5).

El uso adecuado de las estructuras de tipo aditivo es posible si hay un reconocimiento de sus características. El modelo de van Hiele gira en torno al reconocimiento de dichas características, lo que conlleva a fortalecer la estructura conceptual de las mismas.

Por otro lado, el estudio de los campos conceptuales de Vergnaud se articula al modelo de van Hiele a través de los siguientes argumentos:

- No se puede estudiar el desarrollo de un concepto de manera aislada, porque siempre está tomado de un conjunto, formando un sistema.
- La conceptualización es un proceso que forma parte de la actividad, y es necesario, pues, captar las conceptualizaciones que operan en los esquemas, tanto si son explícitas como implícitas; esto es lo que me ha conducido a dar tanta importancia al concepto de invariante operatorio.
- En una perspectiva de desenvolvimiento, un concepto es un triplete de conjuntos... un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios, un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas (Vergnaud, 2006, pág. 288).

Se puede indicar que Vergnaud expone las razones que lo motivan a estudiar los campos conceptuales al trabajar la adición y sustracción como uno de ellos, el de las estructuras de tipo aditivo, ya que estas se toman como un conjunto formado por un sistema y no abordan los conocimientos de forma aislada. Al hacer referencia a las características de las estructuras, van

Hiele resalta que es importante que la estructura sea vista como una totalidad y no como una suma de elementos.

Vergnaud relaciona la importancia de captar las conceptualizaciones que operan en los esquemas. De acuerdo con van Hiele, una de las características de la comprensión consiste en la apropiación del concepto, esto se hace posible a través de las evidencias sobre las redes de relaciones construidas en torno al mismo, dichas redes permiten ampliar las estructuras sobre la construcción del concepto favoreciendo la consolidación del objeto mental de forma consciente y adecuada.

Adicionalmente, Vergnaud plantea que un concepto está formado por un conjunto de situaciones, de invariantes operatorios y de formas lingüísticas y simbólicas, así, el modelo de van Hiele, desde sus fases de aprendizaje, posibilita presentar a los estudiantes, situaciones que dan sentido a las estructuras de tipo aditivo a través de la componente visual geométrica, apoyado en formas lingüísticas y no lingüísticas en el desarrollo de las experiencias llevadas a cabo por los estudiantes.

Para Vergnaud: “Un concepto no puede ser reducido a su definición... es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño” (Vergnaud, 1990, p. 133). Es así, como en la investigación, las experiencias de aprendizaje enmarcadas en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, presentan una variedad de situaciones de forma organizada que permiten abordar las categorías de las estructuras de tipo aditivo propuestas por Vergnaud, incluyendo la componente visual – geométrica, enunciados de tipo verbal y el aspecto simbólico de las mismas.

De acuerdo con lo descrito, es conveniente resaltar la pertinencia del aspecto prescriptivo, del modelo de van Hiele, para describir la forma como se construyen las estructuras mentales de los estudiantes en torno a las estructuras de tipo aditivo y de esta manera alcanzar los objetivos de investigación propuestos.

Los elementos teóricos y metodológicos de la investigación se encuentran en coherencia con el objetivo trazado. A través de estrategias y técnicas enmarcadas en el paradigma cualitativo fue posible la caracterización y recolección de los datos.

A continuación se describe la metodología y las herramientas que fueron utilizadas en la investigación.

Capítulo 3

Diseño Metodológico

El presente capítulo presenta el paradigma de investigación, los participantes, el tipo de estudio, los instrumentos y la forma de recolección de la información. Estos elementos se encuentran enmarcados en el estudio de casos y los fundamentos teóricos aportados por el modelo educativo de van Hiele referentes a las fases de aprendizaje. Tiene como objetivo recolectar la información, para ser analizada en relación con la comprensión, de las estructuras de tipo aditivo de cada uno de los participantes en el estudio.

3.1. Paradigma

El análisis de la comprensión sobre las estructuras de tipo aditivo de los estudiantes del grado tercero, puede ser observada en cada uno de los argumentos expuestos en el desarrollo de las diferentes actividades. Para acceder a la información brindada por los estudiantes, fue necesaria la inmersión del investigador dentro del contexto; por ello, la pertinencia del enfoque cualitativo. “Los investigadores cualitativos destacan la comprensión de las complejas relaciones entre todo lo que existe” (Stake, 1999, p. 42). El acercamiento a las fuentes de información y la observación de sus experiencias de aprendizaje, permiten la reflexión y el análisis de la información recolectada en forma directa.

3.2. Participantes

Los participantes en la investigación se seleccionaron del grado tercero de una institución educativa pública del municipio de Betulia, (Antioquia – Colombia). La mayoría de los hogares de estos estudiantes son nucleares, es decir, están conformados por su padre y madre quienes, diariamente, trabajan para proveer los recursos necesarios para el hogar, dedicándose a actividades relacionadas con el cultivo del café. En cuanto al área de Matemáticas, se

..

caracterizan por su disposición para trabajar de forma individual y colectivamente. Por otro lado, al observar la forma como abordan situaciones que involucran las estructuras de tipo aditivo, se encuentra que realizan cálculos, generalmente mecánicos y resuelven problemas de enunciado verbal, usando indistintamente las operaciones de adición y sustracción, sin tener en cuenta el efecto de estas operaciones de acuerdo a la situación.

Inicialmente, se realizó la selección del grupo conformado por 32 estudiantes, con los cuales se desarrolló un conjunto de actividades que permitieron generar un filtro, y finalmente, consolidar un grupo de nueve (9) estudiantes.

Con el fin de identificar el reconocimiento que presentaban de las estructuras de tipo aditivo, a los nueve (9) estudiantes seleccionados, se les realizó una entrevista como conducta de entrada. Al final de este proceso, solo tres (3) estudiantes presentaron las mejores cualidades, en cuanto a prerrequisitos en matemáticas, disposición a trabajar individual y colectivamente. Además, los padres de estos estudiantes mostraron buena disposición para que sus hijos continuaran con el trabajo. Dieron su consentimiento por escrito sin ninguna objeción.

A partir del trabajo con los estudiantes seleccionados se definieron las entrevistas semiestructuradas para cada una de las fases del modelo de van Hiele. Adicionalmente, se realizaron observaciones de las actividades y se aplicaron cuestionarios diseñados para cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele. Todas estas actividades permitieron la recolección de la información y el análisis de las construcciones mentales elaboradas por los estudiantes.

Los participantes seleccionados se distinguieron por su disposición para el desarrollo de las actividades y por su capacidad de comunicación, "... si es posible, debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas, quizá aquellos en los que se pueda identificar un posible informador" (Stake, 1999, p. 17). De esta forma se determinaron los tres casos particulares para el estudio, debido a la posibilidad de acceso a sus

..

razonamientos, a partir de sus expresiones verbales y manejo adecuado de conceptos matemáticos.

3.3. El estudio de casos

La naturaleza cualitativa de la investigación, permitió considerar el estudio de casos, puesto que "... es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1999, p. 11). Específicamente, se trabajó el estudio de casos instrumental, este es pertinente cuando "... nos encontramos con una cuestión que se debe investigar, una situación paradójica, una necesidad de comprensión general, y consideramos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular" (Stake, 1999, p. 16). Aquí, "el estudio de casos es un instrumento para conseguir algo diferente" (Stake, 1999, p. 17), específicamente, para analizar la comprensión en torno a las estructuras de tipo aditivo.

El cometido real del estudio de casos es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. Se destaca la unicidad, y esto implica el conocimiento de los otros casos de los que el caso en cuestión se diferencia pero la finalidad primera es la comprensión de este último. (Stake, 1999, p. 20).

La técnica del estudio de casos se consideró pertinente para describir el razonamiento de cada uno de los tres estudiantes, con el fin de obtener un producto final descriptivo que permitiera evidenciar los razonamientos de cada uno de ellos.

3.4. Instrumentos

El estudio de casos requiere de la implementación de herramientas que puedan dar cuenta de la información proporcionada por cada estudiante de forma detallada (Stake, 1999). Por lo tanto,

en el desarrollo de la propuesta de investigación se emplearon observaciones, construcción de mapas conceptuales y entrevistas de carácter socrático (Jaramillo y Campillo, 2001), cuyo fin fue el reconocimiento de comportamientos concretos que permitan detectar la comprensión y el razonamiento de los estudiantes. A continuación se presenta una breve descripción de dichos instrumentos.

3.4.1. Entrevista de Carácter Socrático

La Entrevista de Carácter Socrático es una entrevista formativa, ésta: “... entra dentro de la estructura del modelo educativo de van Hiele, que se fundamenta en la necesidad de una experiencia específica de aprendizaje para que se produzca una evolución en el razonamiento” (Jaramillo & Campillo, 2001, p. 3). La Entrevista de Carácter Socrático es semi-estructurada, está fundamentada en un guión abierto que posibilita el diálogo y, que a su vez, se apoya en preguntas con componentes visuales para describir el razonamiento (Jaramillo y Campillo, 2001).

De acuerdo con Jurado & Londoño (2005):

La entrevista está concebida como una red de relaciones, permitiendo que detrás de cada pregunta se esconda una intencionalidad que sólo el entrevistador conoce y que a medida que se avanza en su aplicación, el entrevistado entreteja, relacione, razone, reflexione e infiera a partir de su red de relaciones (Jurado & Londoño, 2005, p. 92).

En este sentido, es conveniente que la entrevista, permita el acercamiento entre el investigador y el investigado, para que a partir del intercambio dado través del diálogo, se acreciente la red de relaciones en torno al concepto objeto de estudio.

En la investigación, las entrevistas fueron diseñadas para cada una de las fases del modelo de van Hiele, en correspondencia con el concepto objeto de estudio. A medida que el estudiante

daba las respuestas en las entrevistas, las preguntas se iban refinando para detectar la red de relaciones que los estudiantes construían en torno del concepto de las estructuras de tipo aditivo.

La aplicación de las entrevistas de carácter socrático contó con preguntas cerradas, con única respuesta, donde una de las opciones era verdadera. Finalizando las opciones de respuesta, se presentó una opción abierta para que el estudiante expusiera sus descripciones y argumentos, respecto a la respuesta seleccionada.

3.4.2. Mapas Conceptuales

Los Mapas Conceptuales son una herramienta en la cual se exhiben los conocimientos construidos en relación con un concepto, Novak & Gowin (1988) plantean que: “Un Mapa Conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones... los mapas conceptuales proporcionan un resumen esquemático de todo lo que se ha aprendido” (Novak & Gowin, 1988, p. 4). Las relaciones presentadas en los mapas conceptuales permiten observar la organización del conocimiento y las construcciones mentales elaboradas por parte de los estudiantes.

En el trabajo de investigación, el desarrollo de cada una de las fases, implicó la construcción de mapas conceptuales, con el objetivo de que el estudiante mostrara la forma como ampliaba y estructuraba la red de relaciones y sus procesos de razonamiento, con respecto a las estructuras de tipo aditivo. Teniendo en cuenta que el modelo de van Hiele, le concede importancia a la red de relaciones y al lenguaje, adquirido por los estudiantes, los mapas conceptuales se consideraron pertinentes para observar la forma como se va refinando el lenguaje, a medida que se avanzaba en el desarrollo de las experiencias de aprendizaje, propuestas en las fases de aprendizaje.

3.4.3. Observación

Las observaciones consisten en realizar un registro sistemático y organizado de cada uno de los acontecimientos, que describe lo ocurrido en torno a las estrategias implementadas. Estas “... conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso” (Stake, 1999, p. 60). Emplear esta herramienta, para la recolección de la información, permite realizar un registro y una descripción detallada de los razonamientos de los estudiantes. Adicionalmente, favorece la visualización y la pertinencia de las estrategias, empleadas para el estudio.

Respecto a lo anterior, es conveniente mencionar que, en el desarrollo de la propuesta, cada uno de los instrumentos que permitieron la recolección de la información, se consolidó en un Módulo de Aprendizaje, el cual corresponde a un conjunto de experiencias articuladas, en cada una de las fases del modelo, que se presenta al final, como un apéndice de la investigación.

3.5. Módulo de Aprendizaje

El Módulo de Aprendizaje es el instrumento que posibilita la organización de los instrumentos empleados para la recolección de información y posterior análisis de la misma. Al respecto, Vasco & Bedoya (2005) exponen:

Se entiende por módulo, un elemento combinable con otros de la misma naturaleza o que concurren a una misma función. En este sentido, un módulo de instrucción es la colección de todas las actividades realizadas para cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, frente al concepto objeto de estudio (Vasco & Bedoya, 2005, p. 24).

El Módulo de Aprendizaje está conformado por las entrevistas de carácter socrático, los mapas conceptuales y las actividades para la aplicación de observaciones en cada una de las fases. Las experiencias presentadas en el Módulo de Aprendizaje, propician los procesos de razonamiento y enriquecimiento de las redes de relaciones, construidas en torno al concepto, con

..

el fin de posibilitar el avance a través de las fases de aprendizaje del modelo y para que el estudiante avance en su nivel de razonamiento, aunque el objeto de la investigación, no es la caracterización de los niveles de razonamiento que poseen o alcanzan los estudiantes participantes de la investigación. La consolidación del Módulo de Aprendizaje aporta a los procesos de enseñanza, Vasco & Bedoya afirman al respecto que: “El papel del Módulo de instrucción es vital, ya que permite establecer un orden secuencial en la aplicación de las actividades propuestas para cada una de las fases, frente al concepto objeto de estudio” (Vasco & Bedoya, 2005, p. 24). Es así como éste se convierte en una herramienta útil para la metodología docente, en el ámbito de las prácticas educativas.

3.6. Trabajo de campo

La interacción directa con los participantes de la investigación para la recolección de información se realizó a través de las siguientes pautas:

1. Inicialmente se realizó la selección del grupo de estudiantes del grado tercero. Se aplicó a algunos de ellos una entrevista como conducta de entrada para explorar el reconocimiento que poseían en relación con las estructuras de tipo aditivo.

2. Se seleccionaron tres estudiantes y se solicitó el permiso de sus padres, “es fundamental obtener un permiso escrito especial de los padres cuando se trata de atender personalmente a niños concretos” (Stake, 1999, p. 58). Con estos estudiantes se aplicaron las entrevistas de carácter socrático y se realizaron las actividades definidas en el módulo de aprendizaje.

3. Se diseñó una experiencia acorde con el propósito de cada una de las fases de aprendizaje, las cuales incluyeron una Entrevista de Carácter Socrático, actividades para la realización de observaciones y orientaciones para la construcción de mapas conceptuales.

4. En cada una de las fases se realizó la Entrevista de Carácter Socrático para los tres casos particulares. Además, se realizaron actividades con todo el grupo, encaminadas al reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, teniendo en cuenta la componente visual – geométrica, enunciados de tipo verbal y el aspecto numérico.

5. En todas las fases, cada uno de los tres estudiantes construyó un Mapa Conceptual, lo cual permitió observar la red de relaciones elaborada en torno al concepto y la forma como esta se va conformando a medida que el trabajo avanzaba.

A continuación se presentan las actividades desarrolladas en cada una de las fases, instrumentos e intencionalidad.

3.6.1. Fase 1: Información

Experiencia 1: “Agrupo y separo cantidades”.

Los procesos relacionados con las estructuras de tipo aditivo, implican abordar conjuntamente la adición, la sustracción y los conceptos de número y colección, teniendo en cuenta los propósitos de la fase de información, de acuerdo con el modelo de van Hiele, en la cual se realiza el diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes, el profesor informa los conceptos, problemas, material a utilizar y metodología a emplear a lo largo de las experiencias de aprendizaje, para abordar el concepto. En este caso particular, las estructuras de tipo aditivo, se presenta una experiencia que permita, informarse acerca de los conocimientos que poseen los estudiantes, en relación con estos conceptos.

La experiencia 1: “Agrupo y separo cantidades”, está conformada por tres actividades, una Entrevista de Carácter Socrático y la construcción de un Mapa Conceptual. Allí se busca el reconocimiento de los saberes en relación con las características de una colección de objetos,

noción de cardinal, adición y sustracción. Así mismo, se les presentan los conceptos a trabajar, problemas, material a utilizar y la metodología a emplear, para el desarrollo de las actividades.

El Mapa Conceptual que se presenta a continuación da a conocer los propósitos de esta fase.

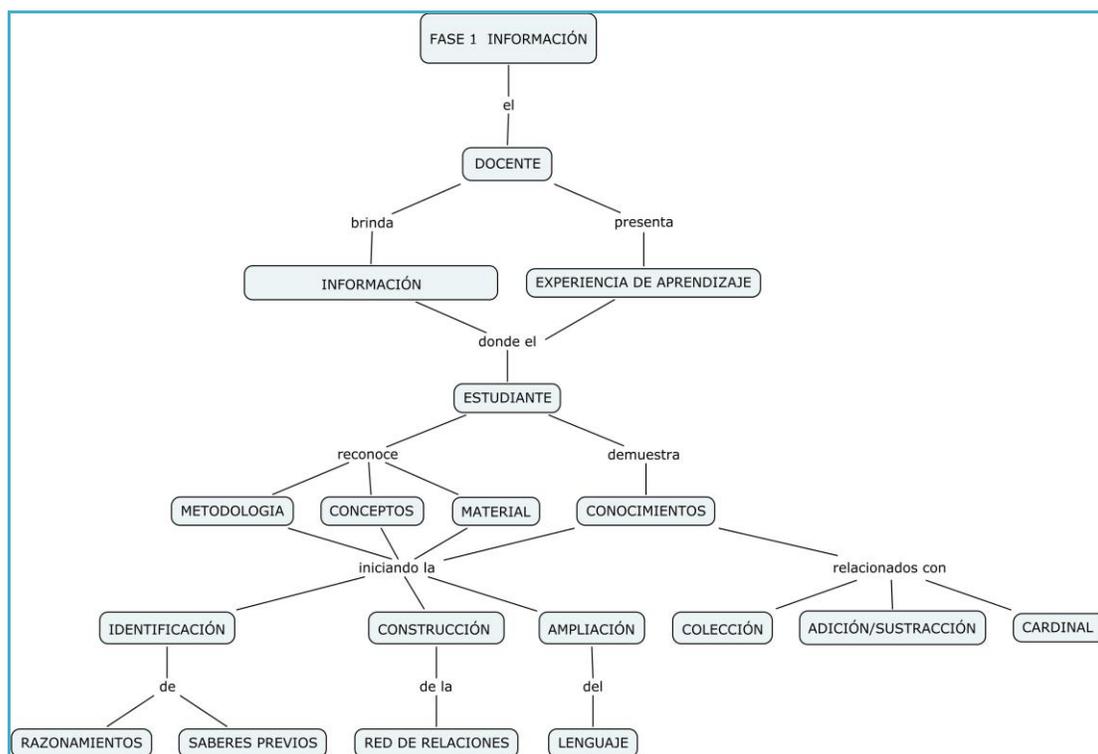


Ilustración 6. Mapa Conceptual para la fase 1: Información.

Las actividades desarrolladas se exponen a continuación.

3.6.1.1. Actividad A.1.1.: “Conducta de entrada”

En el apéndice A, Se presenta la actividad A1.1., llamada “Conducta de entrada” la cual busca apreciar el reconocimiento que tienen los estudiantes del concepto de colección. También, se indican las pautas, materiales, conceptos y metodología sobre el trabajo que se va a desarrollar a lo largo de la investigación.

3.6.1.2. Entrevista de Carácter Socrático

La entrevista de carácter socrático A.1.2., presentada en el Apéndice A, para esta fase tiene en cuenta el concepto de colección y número y, adicionalmente, las características comunes de elementos para realizar agrupaciones. Allí, se asignan las cantidades correspondientes a las colecciones involucradas y se construyen colecciones de objetos que representan dichos números, esto con el propósito de verificar conocimientos previos en relación con dichos conceptos relacionados con las estructuras de tipo aditivo.

3.6.1.3. Actividad 2: “Observando figuras”

En la actividad A.1.3., incluida en el Módulo de aprendizaje, se ilustran composiciones formadas por figuras geométricas (cuadrados, triángulos, rectángulos), con el fin de verificar el reconocimiento que hacen los estudiantes de los conceptos: Cardinal, colección, adición y sustracción. Además, se busca que encuentren características comunes que permitan realizar agrupaciones y de esta forma identificar la composición de una estructura, teniendo como apoyo la componente visual geométrica.

3.6.1.4. Actividad 3:

La actividad A.1.4., presentada en el Módulo de Aprendizaje, implica que los estudiantes le asignen el cardinal adecuado a la situación planteada, completen secuencias numéricas, agrupen y separen elementos empleando las operaciones de adición y sustracción.

3.6.1.5. Mapa Conceptual

En la actividad A.1.5., se presenta a los estudiantes un texto que recopila la información abordada en las diferentes actividades, se debe construir un mapa que resuma la información de los conceptos aprendidos en la fase.

3.6.2. Fase 2: Orientación dirigida

Experiencia 2: “Exploro las estructuras de tipo aditivo”

En esta fase de Orientación dirigida, se presenta la experiencia 2: “Exploro las estructuras de tipo aditivo”, la cual está conformada por una entrevista de carácter socrático y tres actividades que involucran herramientas de carácter visual. Teniendo en cuenta los aportes de van Hiele, para esta fase, tanto la entrevista como las actividades presentadas tienen como propósito que los estudiantes se familiaricen y realicen procesos que permitan comprender y aprender los conceptos y propiedades que forman parte de las estructuras de tipo aditivo a partir de la componente visual – geométrica y de enunciados verbales, que permitan el reconocimiento de las categorías de composición y transformación y acciones correspondientes a separar y a reunir (composición) y, a aumentar y a disminuir (transformación), fortaleciendo a su vez los conocimientos que se tienen en relación con los conceptos de número, colección y operaciones de adición y sustracción.

Los estudiantes deben determinar cuántos elementos le sobran o faltan a un conjunto para ser igual a otro, reúnen y separan elementos de acuerdo a sus características y determinan los cambios que conllevan a un aumento o disminución de una cantidad.

El siguiente Mapa Conceptual ilustra el trabajo desarrollado en esta fase.

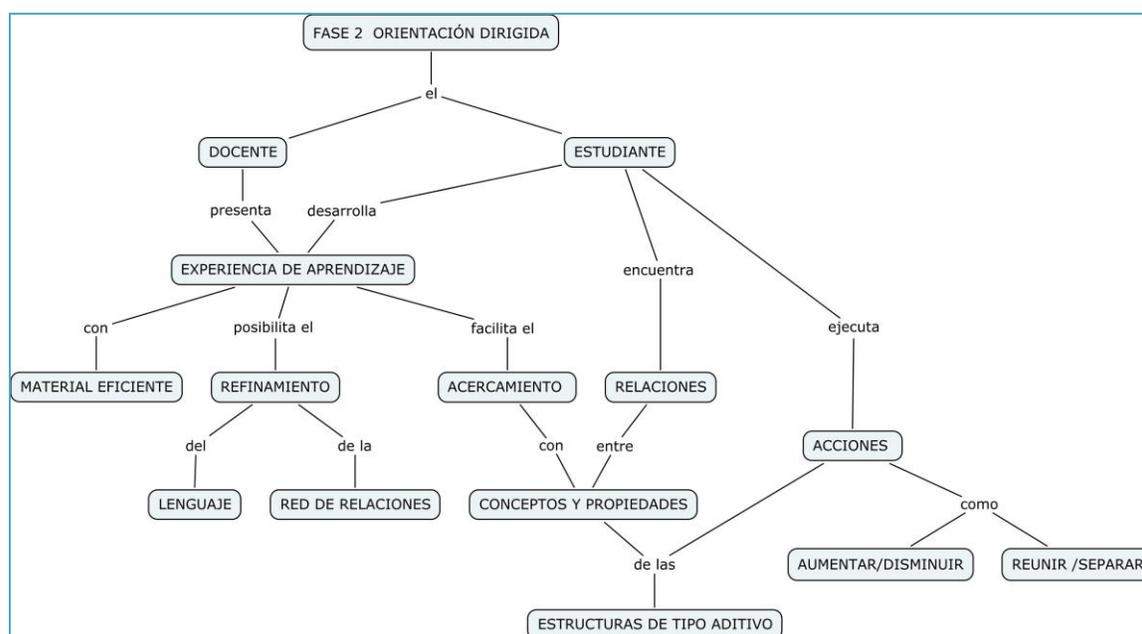


Ilustración 7. Mapa Conceptual para la fase 2: Orientación dirigida.

El desarrollo de la experiencia de aprendizaje con cada uno de los instrumentos en esta fase se describe a continuación.

3.6.2.1. Entrevista de Carácter Socrático

En el Módulo de Aprendizaje, Apéndice A, se encuentra el guión de entrevista A.2.2., correspondiente a esta fase, allí se presentan situaciones relacionadas con el contexto que involucran la componente visual - geométrica y la utilización de enunciados verbales. Se pretendía que los estudiantes encontraran relaciones que se establecen en las estructuras de tipo aditivo, tanto de composición como de transformación. A partir de dos colecciones, establecen su diferencia numérica, encuentran el aumento o disminución de una cantidad a partir de una situación y determinan el número fijo que se ha añadido a un elemento para formar una secuencia numérica.

3.6.2.2. Actividad 1. Analiza situaciones presentadas gráficamente

Se aborda la actividad A.2.3., apoyada en la componente visual geométrica, donde los estudiantes determinan cuánto le falta o sobra a una cantidad para ser igual a otra, considerando características de la categoría de transformación de las estructuras de tipo aditivo.

3.6.2.3. Actividad 2. La recta numérica

Se presenta la actividad A.2.4., en la cual se plantean situaciones que implican la utilización de la recta numérica, allí los estudiantes determinan la cantidad discreta correspondiente a un desplazamiento, comparan valores representados y dan soluciones a situaciones relacionadas con su contexto.

3.6.2.4. Actividad 3. Leo y resuelvo situaciones de enunciado verbal

Se presentan la actividad A.2.5., donde se encuentran cinco situaciones (A.2.5.1., A.2.5.2., A.2.5.3., A.2.5.4., A.2.5.5.), con enunciados de tipo verbal en contextos de composición y transformación, cuyo propósito es que los estudiantes reconozcan las características que identifican estas categorías.

3.6.2.5. Mapa Conceptual

Después de la realización de todas las actividades de esta fase, los estudiantes completan el un Mapa Conceptual, consolidando finalmente, información que da cuenta de la estructura mental construida en torno a las estructuras de tipo aditivo.

3.6.3. Fase 3: Explicitación

Experiencia 3: “Compartiendo y aprendiendo”.

La experiencia de aprendizaje 3: “Compartiendo y aprendiendo”, continúa la secuencia presentada en el Módulo de Aprendizaje en el apartado A.3., correspondiente a la fase 3, está conformada por una Entrevista de Carácter Socrático y dos actividades, en ésta se abordan nuevamente los conceptos relacionados con las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo. El propósito es permitir que los estudiantes socialicen e intercambien ideas con otros compañeros y sean conscientes de las características de estas estructuras. Ellos explican los cambios ocurridos en una representación icónica a partir de transformaciones, abordan las categorías de composición y transformación y resuelven situaciones de forma gráfica y numérica, como se resume en el Mapa Conceptual presentado a continuación.

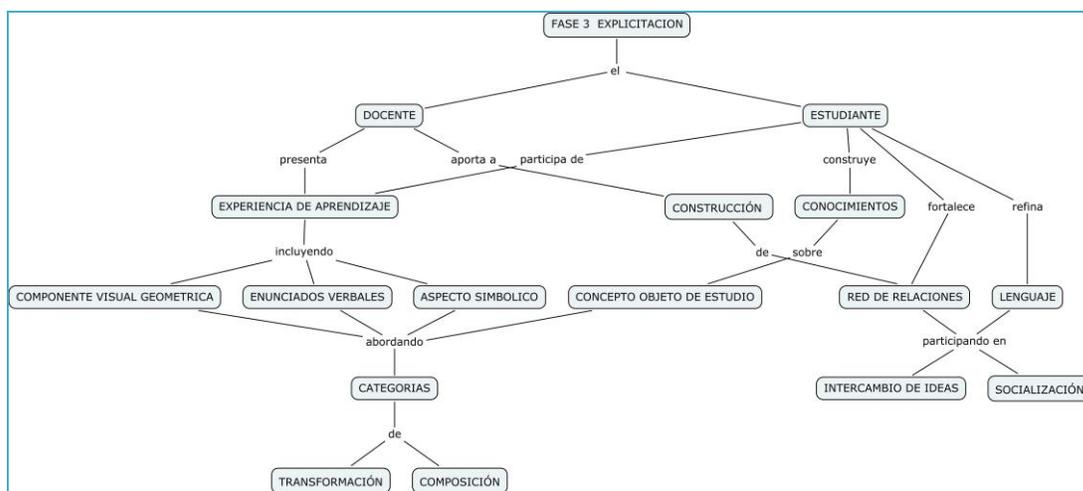


Ilustración 8. Mapa Conceptual para la fase 3: Explicitación.

3.6.3.1. Entrevista de Carácter Socrático

En el apéndice A, se presenta el guión de entrevista de carácter socrático, A.3.1., en la cual se presentan situaciones que implican el uso de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo. Los estudiantes, a partir de sus construcciones mentales deben describir los cambios, que ocurren respecto al aumento o disminución en una cantidad y realizan operaciones en diferentes situaciones.

3.6.3.2. Actividad 1. Describo los cambios ocurridos

Se expone la actividad A.3.2., la cual es un ejercicio práctico donde los estudiantes realizan acciones utilizando recursos del contexto, en este caso bombones. Esta actividad, se convierte en la oportunidad para que los estudiantes expresen a sus compañeros los conocimientos que poseen, intercambien sus ideas y de esta manera enriquezcan la red de relaciones que están construyendo. Adicionalmente, forman agrupaciones, ejecutan acciones de aumento y disminución de una cantidad y describen lo ocurrido en cada situación.

3.6.3.3. Actividad 2. Verbaliza situaciones

La actividad A.6.3.3., presentada en el Módulo de aprendizaje, propone situaciones que se articulan a la componente visual geométrica, allí los estudiantes realizan observaciones, a partir de imágenes presentadas sobre las operaciones de adición y sustracción, en situaciones de composición y transformación, esta actividad grupal permite que los estudiantes verbalicen sus conocimientos y socialicen lo aprendido con sus compañeros y el docente.

3.6.3.4. Mapa Conceptual

En esta fase, con el propósito de permitir la socialización, apropiación del lenguaje y enriquecimiento de la red de relaciones, los estudiantes tienen la oportunidad de participar de un conversatorio con sus compañeros y compartir los conocimientos adquiridos. Realizan una lista de los conceptos que consideran relevantes y construyen un Mapa Conceptual sobre la forma como comprenden las estructuras de tipo aditivo, posteriormente, se comparte el mapa con los compañeros y a partir de este intercambio se recogen las nuevas ideas que permitan la construcción de un nuevo Mapa Conceptual, atendiendo a las observaciones realizadas.

3.6.4. Fase 4: Orientación libre

Experiencia 4: “Utilizo las estructuras en contexto”.

De acuerdo con el modelo de van Hiele, en la fase de Orientación libre, es conveniente presentar a los estudiantes tareas, que pueden ser ejecutadas de diferentes maneras y que el estudiante se enfrente a ellas, empleando la estrategia que considere más adecuada para acercarse al concepto desde todas las direcciones. En el presente trabajo la experiencia de aprendizaje A.4., está conformada por una Entrevista de Carácter Socrático y tres actividades, en las cuales se busca que los estudiantes practiquen lo aprendido, aplicándolo a nuevas situaciones. Además, se les brinda la oportunidad de proponer la estrategia que consideren adecuada para hallar la solución de una situación y presentar nuevas situaciones (Ver A.4.3, A.4.4.).

A partir de las situaciones propuestas en el Módulo de aprendizaje se posibilitó que los estudiantes se enfrentaran a problemas y diversas situaciones empleando relaciones entre conjuntos y representaciones gráficas. La solución de las situaciones planteadas en esta fase, fueron presentadas por los estudiantes a través de enunciados verbales, donde explicaron los efectos de añadir o quitar elementos a un conjunto a partir del uso de figuras geométricas y las estructuras de tipo aditivo en contexto, como se resume a continuación.

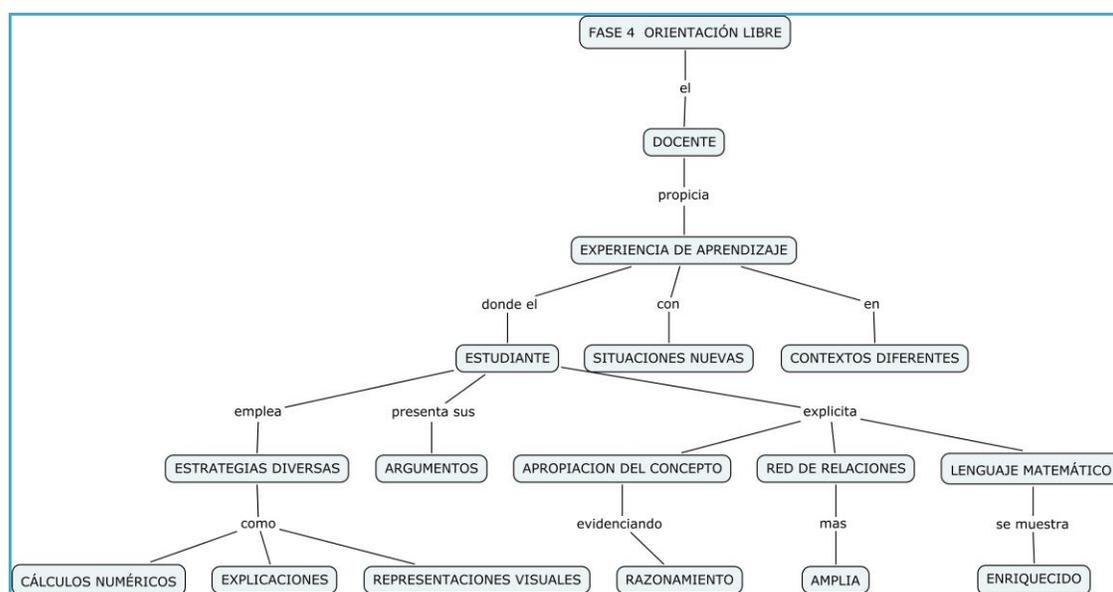


Ilustración 9. Mapa Conceptual para la fase 4: Orientación libre.

3.6.4.1. Entrevista de Carácter Socrático

El guión de entrevista A.4.1., presenta situaciones, donde los estudiantes establecen relaciones entre las operaciones básicas entre conjuntos y las estructuras de tipo aditivo, además se presentan situaciones a partir de enunciados verbales para que los estudiantes identifiquen la representación gráfica más apropiada para dar solución y situaciones del contexto en las cuales se deben identificar aquellas que requieren de una adición o sustracción para resolverla.

En esta fase se pide solucionar situaciones de forma deliberada, las cuales están apoyadas en las formas visuales. Se hace explícito el lenguaje verbal y el aspecto simbólico a través de las justificaciones dadas por los estudiantes.

3.6.4.2. Actividad 1. Observo, encuentro y propongo cambios en las estructuras

Se aborda la actividad A.4.2., con representaciones de estructuras visual geométricas, a partir de éstas los estudiantes encuentran los aumentos o disminuciones que se ilustran en diferentes situaciones y formulan nuevas situaciones a partir de la estructura.

3.6.4.3. Actividad 2. Propongo situaciones que involucran la adición y sustracción

En la actividad A.4.3., los estudiantes a partir de situaciones presentadas en su contexto, describen la forma cómo pueden emplear las estructuras de tipo aditivo; además plantean situaciones con enunciados verbales, relacionados con las estructuras de tipo aditivo, a partir de problemas de su entorno, empleando la componente visual y simbólica.

3.6.4.4. Actividad 3. Jugando con las regletas

En actividad A.4.4., se utilizan las regletas de Cuisenaire, allí los estudiantes representan valores y equivalencias de las mismas. Posteriormente, de forma deliberada, plantean situaciones cuya solución requiere de adiciones y sustracciones, para las cuales se apoyan en las regletas con el fin de obtener la respuesta adecuada.

3.6.4.5. Mapa Conceptual

Después de participar de distintas actividades y aplicar en contexto los conocimientos adquiridos, se presenta el Mapa Conceptual (actividad A.4.5.), como una posibilidad de manifestar la red de relaciones construida, en relación con el concepto. Los estudiantes emplean su propio lenguaje y consideran aquellos conceptos relevantes, en el contexto de las situaciones planteadas, para el refinamiento del mismo. Los estudiantes realizan un listado de los conceptos que consideran pertinentes, los organizan y construyen un Mapa Conceptual que da cuenta de los

..

conocimientos adquiridos con respecto a las estructuras de tipo aditivo y sus diferentes representaciones.

3.6.5. Fase 5: Integración

Experiencia 5: “Integro mis saberes”.

En la experiencia 5: “Integro mis saberes”, correspondiente al apartado A.5. de la Fase 5 se consolidan diferentes situaciones que permiten apreciar el reconocimiento de los estudiantes sobre los elementos propios de las estructuras de tipo aditivo, a partir de sus representaciones, el profesor propone el guión de entrevista de carácter socrático, una actividad y la construcción de un Mapa Conceptual como resumen de los conocimientos trabajados para completar la red de relaciones para el concepto, de acuerdo a lo propuesto por van Hiele, en relación con los propósitos de la fase 5 (Jaime y Gutiérrez, 1995).

Los estudiantes aplican las operaciones básicas de adición y sustracción, diferencian situaciones que implican la utilización de categorías de composición y de transformación y realizan inferencias. Adicionalmente, hacen explícita la red de relaciones construida, el lenguaje adquirido y la apropiación del concepto objeto de estudio.

El siguiente mapa ilustra las pautas consideradas en el desarrollo de la fase.

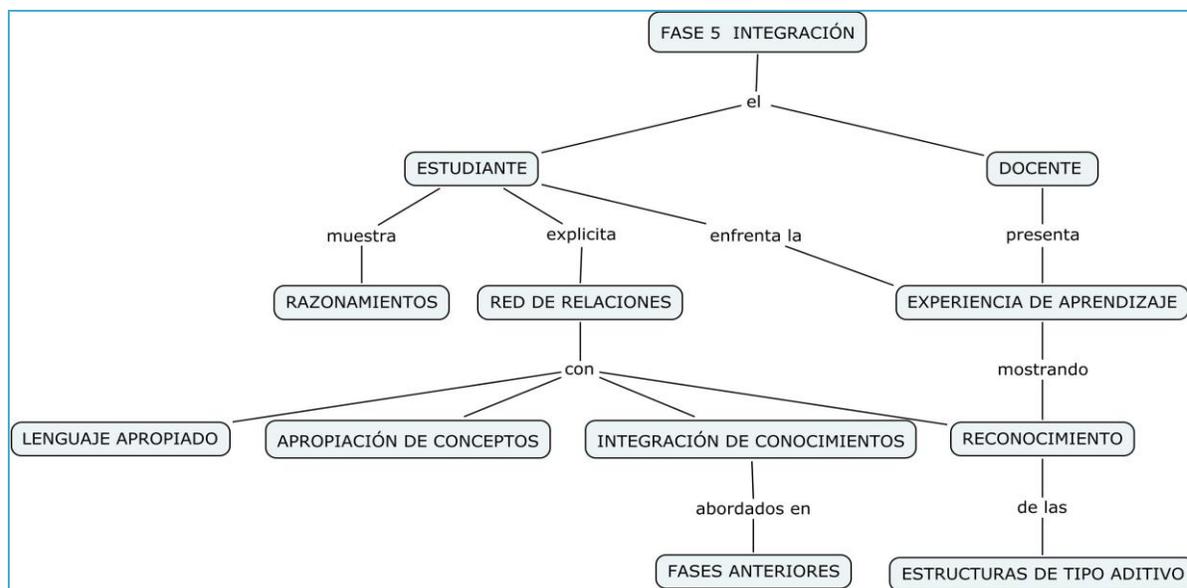


Ilustración 10. Mapa Conceptual para la fase 5: Integración.

3.6.5.1. Entrevista de Carácter Socrático

La realización del guión de entrevista propuesto en el apartado A.5.1., del Módulo de aprendizaje, en esta fase, implica que los estudiantes integren las estrategias utilizadas a lo largo del proceso. Ellos emplean la componente visual -geométrica, utilizan enunciados verbales y su aspecto simbólico, con el fin de dar solución a situaciones de tipo aditivo, empleando las categorías de composición y de transformación.

3.6.5.2. Actividad 1. Integrando mis conocimientos.

La actividad A.5.2., presenta una situación que involucra la representación visual. Esta integra las diversas estrategias empleadas a lo largo de las fases de aprendizaje, los estudiantes

..

analizan cada situación, realizan inferencias y los cálculos necesarios, empleando las operaciones de adición y sustracción con sus respectivas categorías de composición y transformación.

3.6.5.3. Mapa Conceptual

Para observar la red de relaciones consolidada alrededor de las estructuras de tipo aditivo, se presenta un listado de conceptos que integran los conocimientos trabajados en cada una de las fases, los estudiantes establecen el orden jerárquico para los conceptos y construyen un Mapa Conceptual (Ver A.5.3.), que representa la relación entre los mismos en correspondencia con el concepto objeto de estudio.

El desarrollo del trabajo de campo permitió la recolección de la información para su análisis posterior. La información recolectada favorece el refinamiento del Módulo de Aprendizaje que quedó conformado por actividades como: Entrevistas de carácter socrático, elaboración de mapas conceptuales y cuestionarios.

En el siguiente capítulo se describe el análisis de la información recolectada en cada una de las fases y se presentan los episodios más destacados en el trabajo con los estudiantes participantes.

Capítulo 4

Recolección y análisis de la información

A continuación se presenta la información obtenida a partir de la interacción de los estudiantes involucrados en la investigación. Se parte del Módulo de Aprendizaje (ver Apéndice A) diseñado con base en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. También, se analizan las entrevistas y cada una de las actividades realizadas, con el fin de analizar la comprensión sobre las estructuras de tipo aditivo alcanzada por cada uno de los participantes.

Al realizar cada una de las actividades del módulo se generaron conjuntos de códigos que se transformaron en categorías, y éstas a su vez generaron temas. Por lo tanto, la categorización “... en este procedimiento se refiere al resumen de éstos en conceptos genéricos y a la elaboración de las relaciones entre ellos, o las categorías y los conceptos superiores” (Flick, 2004, p. 193). En el proceso de codificación y categorización, las categorías emergieron a medida que se analizaba la información.

A continuación se presentan los hallazgos encontrados con las herramientas utilizadas y los resultados del análisis de la información.

4.1. Herramientas y sus resultados

Las herramientas empleadas y la información recolectada durante el trabajo, fueron el fundamento para la generación de los códigos y las categorías. Los siguientes párrafos ilustran el análisis de cada una de estas herramientas, así como las evidencias obtenidas.

4.1.1. Entrevista de Carácter Socrático

Las Entrevistas de Carácter Socrático se aplicaron en cada una de las fases. En este capítulo se toman algunos fragmentos de preguntas y respuestas presentadas por los estudiantes, las cuales permitieron mostrar los razonamientos en torno a las estructuras de tipo aditivo.

Estas entrevistas, por su carácter socrático, facilitaron a los estudiantes reflexionar sobre sus respuestas y refinar su lenguaje, gracias a los aportes de información presentados; además por ser una entrevista semiestructurada fue posible realizar nuevas preguntas, donde los estudiantes pudieron acrecentar la red de relaciones construida en torno al concepto. Las entrevistas de carácter socrático se aplicaron a cada uno de los casos particulares en las diferentes fases. Éstas, potenciaron procesos de reflexión y refinamiento del lenguaje en torno a las situaciones planteadas. Adicionalmente, por ser entrevistas semiestructuradas, la realización de preguntas a posteriori, posibilitó la ampliación de la red de relaciones construida a priori por cada uno de los estudiantes participantes.

Es fundamental la movilización de los esquemas mentales iniciales, para lograr una nueva comprensión de los conceptos. Por esto, la Entrevista de Carácter Socrático, fue el eje que permitió conocer los razonamientos previos y los posteriores, en relación con las estructuras de tipo aditivo, las mismas que son el eje fundamental del trabajo desarrollado a continuación.

4.1.2. Mapas conceptuales

Los mapas conceptuales fueron elaborados por los estudiantes en las diferentes fases de aprendizaje; cada uno de ellos construyó su red de relaciones en torno a las estructuras de tipo aditivo de forma secuencial, a medida que transcurrían las fases.

Los mapas conceptuales ilustran la jerarquía de los conceptos asimilados por los estudiantes. El concepto central fue el de las estructuras de tipo aditivo. Otros conceptos que emergieron, a lo largo del trabajo y que son necesarios para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, son

..

el de conjunto, categoría, número, colección, entre otros. Estos en el proceso de investigación se abordaron de manera informal e intuitiva.

4.1.3. Observación

El proceso de observación permitió, a partir de la interacción directa con los estudiantes, el registro de la información. En cada caso se inició el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, a partir de las experiencias aplicadas en cada una de las fases de aprendizaje, posibilitando el análisis de la comprensión a partir de las actividades desarrolladas por cada uno de los participantes.

4.2. Descriptores de fase

Durante el trabajo de campo se construyeron descriptores hipotéticos que fueron contrastados y refinados lo largo del trabajo de campo. Los descriptores presentados en cada una de las fases, son producto del proceso de investigación y el resultado del análisis de las entrevistas semiestructuradas, los mapas conceptuales y las actividades previas a la consolidación del Módulo de Aprendizaje resuelto por los estudiantes, y presentado en su totalidad en el Apéndice A, página 204. En su diseño final se tuvieron en cuenta las particularidades de cada una de las fases descritas en el modelo de van Hiele, así como las características que forman parte del concepto de estructuras de tipo aditivo y sus categorías de composición y transformación. A continuación se describe la forma cómo los descriptores de fase se obtuvieron.

4.2.1. Descriptores para la fase 1: Información

En la fase 1, se presentaron situaciones que posibilitaron realizar el diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes, el profesor informó los conceptos, problemas, material

..

a utilizar y metodología empleada a lo largo de las experiencias de aprendizaje propuestas para todas las fases de aprendizaje.

Los descriptores que se plantearon en esta fase permitieron realizar una indagación de los saberes previos y de esta forma orientar a los estudiantes, en relación con los conceptos que forman parte de las estructuras de tipo aditivo. A partir de las acciones propuestas, se posibilitó la familiarización con los materiales y actividades a realizar durante el desarrollo de las experiencias, que conforman el Módulo de Aprendizaje, como se presenta a continuación.

La descripción de características comunes, entre los elementos de diferentes colecciones, permiten agruparlos como conjuntos. Determinar y reconocer características comunes de diferentes objetos o colecciones posibilita que se puedan reunir o separar para realizar diferentes tipos de operaciones. Dentro de los saberes previos, diferenciar colecciones por las características de sus elementos es una habilidad que los estudiantes deben poseer y, por lo tanto, el investigador debe tener certeza de ella. Si los estudiantes no pueden identificar características comunes, en elementos de diversas colecciones no podrán integrar a sus conocimientos la estructura de tipo aditivo y sus categorías de composición y transformación. A partir de las observaciones realizadas en el trabajo de campo se formuló el siguiente descriptor.

Descriptor 1: Determina características comunes en una colección de objetos. (A una colección de objetos la nombra por sus características).

Al presentar diferentes situaciones, en las que a partir de una colección cuyos elementos tienen diferentes características que deben ser identificadas, se consideró pertinente observar la forma cómo los estudiantes realizaban acciones para reunir o separar, para que de esta forma, obtener nuevas agrupaciones de sus elementos. Para ello, se construyó un descriptor que da cuenta de los saberes previos, en relación con los elementos de las estructuras de tipo aditivo. En este caso, la noción de colección, así como de acciones en relación con la categoría de composición y transformación.

Descriptor 2: Realiza agrupaciones de acuerdo a características comunes con los elementos de una colección.

Presentar situaciones apoyadas en la componente visual geométrica, teniendo en cuenta representaciones icónicas, llevó a la observación de los procesos realizados por los estudiantes al momento de identificar las características comunes en diferentes colecciones para realizar nuevas agrupaciones. De ahí surgió un descriptor que apuntó a detectar los saberes previos de los estudiantes en relación con estas acciones.

Descriptor 3: Agrupa elementos de acuerdo a características comunes a partir de diferentes colecciones presentadas.

Durante la experiencia se presentaron colecciones a partir de las cuales los estudiantes debían realizar agrupaciones, de acuerdo a características comunes. Además, debían asignar cantidades a dichas colecciones. Las categorías o las características definidas es lo que permite determinar que se puede reunir. La acción de contar y de asignarle un cardinal a un conjunto de elementos, con una característica común, dio lugar a un nuevo descriptor.

Descriptor 4: Le asigna un número natural a una colección de objetos con características comunes.

La apropiación del concepto de número posibilita la realización de acciones propias de las estructuras de tipo aditivo, permite representarlas de forma numérica y asignar un número a una colección y al resultado de las operaciones realizadas. Por consiguiente, la construcción del descriptor anterior da cuenta de la forma como los estudiantes realizaron asignaciones de números naturales a colecciones con características comunes.

Descriptor 5: Dado un número natural construye colecciones de objetos que representan el número.

4.2.2. Descriptores de la fase 2: Orientación dirigida

En la fase 2, los estudiantes exploraron el concepto de las estructuras de tipo aditivo y tuvieron un acercamiento hacia las características y categorías de las mismas, a partir de experiencias de aprendizaje diseñadas por el docente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la fase 1. Los instrumentos utilizados para el trabajo en esta fase fueron las entrevistas de

..

carácter Socrático, actividades para la observación y la construcción de Mapas Conceptuales. Los análisis realizados a cada una de las actividades propuestas, en el trabajo de campo, por el investigador y desarrolladas por los estudiantes, posibilitaron la construcción de los descriptores para la fase 2 y el apartado correspondiente al módulo de aprendizaje que se presenta en el Apéndice A, página 176. Los descriptores y el análisis de las actividades se presentan a continuación.

En la fase 2 de orientación dirigida, se consideró pertinente presentar situaciones en las cuales el estudiante identificara características propias de las estructuras de tipo aditivo (reunir, separar, aumentar, disminuir), para ello, el estudiante se enfrentó a situaciones en las cuales comparó los elementos de dos colecciones, estableció relaciones y determinó cuál de ellas tenía mayor o menor número de elementos, además realizó acciones que le permitieron encontrar esta diferencia de forma numérica, de esta manera, se construyó el siguiente descriptor:

Descriptor 1: Al comparar elemento a elemento dos colecciones, determina cuál de las dos tiene más elementos.

En las situaciones propuestas se tuvo en cuenta el apoyo de la componente visual geométrica, utilizando principalmente la recta numérica e imágenes relacionadas con el entorno, éstas se consideraron pertinentes para que los estudiantes realizaran descripciones y establecieran la cantidad fija que se añade a una cantidad inicial para formar una secuencia. En este sentido, se construyó el siguiente descriptor:

Descriptor 2: Reconoce el número fijo a de elementos que se ha añadido a una colección que tiene b elementos para formar una secuencia.

Las orientaciones del docente, deben conllevar a que el estudiante reconozca la formación de la totalidad de la estructura, por ello, para la apropiación de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo, se presentaron situaciones en las cuales los estudiantes representaron la equivalencia de una cantidad, a partir de su composición y descomposición, tanto de forma visual como numérica, fue así como se construyó el siguiente descriptor:

Descriptor 3: Representa en forma equivalente un número cualquiera utilizando composición y descomposición.

En esta fase, es oportuno que el docente dirija a los estudiantes para que determinen y describan cuánto le sobra o le hace falta a una cantidad, para tener el mismo número de elementos de otra colección. Por esta razón en el desarrollo del Módulo de Aprendizaje, los estudiantes se enfrentaron a situaciones, realizando acciones propias de las categorías de composición (reunir y separar) y transformación (aumentar y disminuir), con respecto a las estructuras de tipo aditivo, así se construyó el siguiente descriptor para analizar acciones que conllevan al reconocimiento de dichas estructuras.

Descriptor 4: Determina el número m que le sobra o que le hace falta a una colección de n elementos, para que tenga el mismo número de elementos de otra colección.

En la orientación dirigida, es oportuno proponer situaciones que permitan a los estudiantes apropiarse de acciones de la categoría de composición de las estructuras de tipo aditivo, por ello se presentaron situaciones en las cuales los estudiantes separaron o reunieron elementos, a partir de las características comunes en diferentes colecciones, además asignaron la cantidad adecuada y realizaron cálculos que requería del uso de las operaciones, lo cual permitió la construcción de un descriptor que diera cuenta del uso adecuado de las operaciones de adición y sustracción.

Descriptor 5: Separa y reúne elementos, que tienen características comunes, asignándoles un número a cada uno de los subconjuntos formados.

Al plantear situaciones, teniendo en cuenta la categoría transformación, de las estructuras de tipo aditivo, es necesario orientar a los estudiantes para que reconozcan los cambios que ocurren en una estructura, los cuales implican un aumento o disminución de la cantidad, fue así como se construyó un descriptor que permitiera observar la forma cómo los estudiantes utilizaban las operaciones de adición o sustracción, de acuerdo a la situación en contexto que se esté presentando.

Descriptor 6: Determina en una situación de tipo aditivo los cambios que conllevan al aumento o disminución de una cantidad, (Transformación).

4.2.3. Descriptores de la fase 3: Explicitación

La fase 3, es el momento en el cual el estudiante pone de manifiesto el trabajo con los conceptos aprendidos, los estudiantes intercambian ideas sobre los conocimientos que han adquirido durante la fase de información y la de orientación dirigida. También es importante la realimentación por parte del docente, para la consolidación de un lenguaje apropiado, que muestre el reconocimiento de las características de las estructuras de tipo aditivo. A continuación se presentan los descriptores construidos para la fase 3 de explicitación.

La descripción de los procesos empleados para solución de situaciones, en relación con las estructuras de tipo aditivo, da cuenta de la red de relaciones que el estudiante va construyendo a lo largo de la experiencia de aprendizaje, de acuerdo con este concepto. Específicamente, en la categoría de transformación, es indispensable que el estudiante pueda describir los cambios o transformaciones ocurridas en una situación. A partir de esta característica se construyó un descriptor que da cuenta de la forma como el estudiante a través del intercambio de ideas, con los demás compañeros, describe los cambios observados en una situación y la forma adecuada para solucionar una situación de transformación.

Descriptor 1: Describe los cambios que ocurren en un conjunto cuando se realizan sobre sus elementos transformaciones (agregar o quitar elementos).

Al presentar diversas situaciones en relación con las estructuras de tipo aditivo, se consideran pertinentes las explicaciones verbales, acerca de los cambios ocurridos en situaciones que involucran las categorías de composición y transformación. Es por esto, que durante la realización de las diferentes actividades, se permitió a los estudiantes la comunicación de sus ideas para depurar sus conocimientos y de esta manera mostraran sus razonamientos, escucharan a sus compañeros, así como las nuevas explicaciones del docente, que posibilitaran que sus

argumentos se volvieron más precisos a medida que avanzaban en la solución de actividades y problemas planteados en el Módulo de Aprendizaje. En el siguiente descriptor se recogen la situación planteada.

Descriptor 2: Explica verbalmente los cambios que ocurren en diversas situaciones aditivas del contexto que involucran composición o transformación.

En el intercambio de ideas con los estudiantes, durante la solución de situaciones propuestas en el Módulo de Aprendizaje, se consideró pertinente que hicieran explícitas sus estrategias y la forma cómo analizaron y resolvieron situaciones de forma numérica, fue así como se construyó el siguiente descriptor, para analizar la apropiación de las estructuras de tipo aditivo en la solución de situaciones.

Descriptor 3: Resuelve numéricamente diversas situaciones del contexto, que implican la utilización de estructuras de tipo aditivo.

En esta fase los estudiantes plantearon situaciones en contexto, teniendo en cuenta la utilización de las estructuras de tipo aditivo. Plantear sus propias situaciones, a partir del intercambio de ideas permite a los estudiantes, ordenar ideas, justificar y realimentar sus conocimientos, con los aportes de sus compañeros, así se construyó el siguiente descriptor.

Descriptor 4: Plantea diversos problemas del contexto que involucran la utilización de estructuras de tipo aditivo.

4.2.4. Descriptores de la fase 4: Orientación libre

En la fase 4, se presentan a los estudiantes tareas, que pueden ser ejecutadas de diferentes maneras, el estudiante se enfrenta a ellas, empleando la estrategia que considere más adecuada para acercarse al concepto desde todas las direcciones. Las actividades propuestas en el Módulo de Aprendizaje para la fase 4 de orientación libre, tuvieron como propósito que los estudiantes mostraran sus construcciones mentales en la solución de nuevas situaciones, teniendo en cuenta los conocimientos adquiridos anteriormente, donde abordaron diferentes actividades, que involucraban las categorías de composición y transformación de la estructura de tipo aditivo, a

través del uso de expresiones verbales, representaciones visuales y soluciones simbólicas para obtener una solución.

En esta oportunidad, los estudiantes utilizaron sus propias estrategias para proponer y dar solución a situaciones del contexto, haciendo uso de los enunciados verbales y las componentes visual y simbólica, en situaciones que involucraban las estructuras de tipo aditivo, teniendo en cuenta actividades que se realizan en el transcurso de la semana como: descanso escolar, dinero recibido, juegos con los amigos, entre otros. Además, propusieron situaciones a partir de material didáctico entregado, como regletas y fichas con formas geométricas, donde construyeron figuras y propusieron situaciones en las cuales se observó el uso de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo.

A continuación se presentan los descriptores que se obtuvieron para esta fase, a través del desarrollo de la investigación.

Las operaciones como la unión y el complemento entre conjuntos, permiten visualizar el aumento o disminución de cantidades, de acuerdo con sus características. Fue así como se presentaron situaciones, en el contexto de operaciones entre conjuntos, enfrentando a los estudiantes a nuevas situaciones en las cuales se apropiaron de las operaciones de adición y sustracción, lo cual permitió definir del siguiente descriptor.

Descriptor 1: Relaciona las estructuras de tipo aditivo con las operaciones básicas entre conjuntos.

La apropiación de las características de las estructuras de tipo aditivo, permite dar solución a una situación a partir de diferentes estrategias que pueden trascender de los cálculos mecánicos y realizar procesos reflexivos frente a las situaciones presentadas. En el Módulo de Aprendizaje se presentaron situaciones de enunciado verbal y se dio a los estudiantes la posibilidad de apoyarse en representaciones gráficas e icónicas para hallar la solución, de esta forma se obtuvo el siguiente descriptor.

Descriptor 2: Recurre a representaciones gráficas e icónicas para dar solución a situaciones de enunciado verbal, que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.

Al presentar diferentes representaciones visuales, los estudiantes describieron los cambios ocurridos y dieron sus argumentos para establecer si se añadían o retiraban partes que conformaban la misma, así se obtuvo un descriptor que permitió analizar la forma cómo los estudiantes identificaban las acciones propias de las categorías de composición y transformación en una nueva situación.

Descriptor 3: Visualiza en diferentes formas geométricas el efecto de añadir o quitar elementos con las mismas características a una colección.

Teniendo en cuenta que la orientación libre, permite que los estudiantes escojan diferentes alternativas para dar solución a las situaciones matemáticas, se dio la posibilidad a los estudiantes de escoger aquellas que consideraran coherentes y explicaran de forma adecuada la solución de las situaciones presentadas. Esta característica se plantea en el siguiente descriptor.

Descriptor 4: Utiliza diversas estrategias para dar solución a una situación que involucra las estructuras de tipo aditivo.

Con el propósito de que los estudiantes identificaran que las situaciones matemáticas, no solo se limitan al conteo y aplicación de algoritmos, se propuso indagar acerca de situaciones cotidianas que implicaban la utilización de las operaciones de adición y sustracción, después de observar la forma cómo los estudiantes se enfrentaron a este tipo de situaciones, se obtuvo el siguiente descriptor, para el análisis de la forma cómo el estudiante dio solución a las mismas.

Descriptor 5: Indaga, resuelve y reflexiona sobre situaciones de la vida cotidiana que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.

4.2.5. Descriptores de la fase 5: Integración

La fase 5, es el momento para la comparación e integración de los conocimientos que ya posee el estudiante, aquí se presenta un resumen de los conceptos aprendidos y se consolida la red de relaciones en torno al concepto. En el Módulo de Aprendizaje se propusieron actividades que permitieron visualizar las construcciones mentales de los estudiantes, integrando los conocimientos trabajados en cada una de las fases. Las características que posibilitaron reconocer la red de relaciones construida en torno a las estructuras de tipo aditivo, se agruparon en los descriptores que se presentan a continuación.

Proponer actividades que impliquen la utilización de los diferentes elementos de las estructuras de tipo aditivo, como colección, número y categorías de composición y transformación, permite identificar las construcciones mentales de los estudiantes, las situaciones propuestas y la forma cómo los estudiantes utilizaban dichas estructuras, en la solución de situaciones problema, conllevó a la presentación del siguiente descriptor.

Descriptor 1: Reconoce los elementos de las estructuras de tipo aditivo y los utiliza en la solución de situaciones problema.

En esta fase de integración, se presentan situaciones que posibilitan a los estudiantes mostrar la forma cómo se han apropiado de las operaciones de adición y sustracción, para dar solución a situaciones en diferentes contextos, de estas actividades surge el siguiente descriptor.

Descriptor 2: Interpreta situaciones de tipo aditivo a partir de sus representaciones, aplicando correctamente las operaciones básicas de adición y sustracción.

En esta fase se enfrentó a los estudiantes a situaciones que involucraban las categorías de composición y transformación, así se construyó el descriptor que se presenta a continuación, posibilitando la descripción del reconocimiento por parte de los estudiantes, de la relación entre las categorías y el empleo de la operación matemática correspondiente.

Descriptor 3: Diferencia situaciones que implican la utilización de categorías de composición y de transformación.

..

Durante la implementación de las situaciones propuestas para esta fase, se enfrentó al estudiante ante situaciones que involucraban las estructuras de tipo aditivo y se permitió hacer inferencias, explicar procesos y emplear las operaciones de adición y sustracción, de esta manera que se pudo analizar el proceso de comprensión de los mismos, dando paso al siguiente descriptor:

Descriptor 4: Infiere y explica el proceso y operación matemática (adición o sustracción) a utilizar en el contexto de una situación de tipo aditivo.

Los descriptores hipotéticos presentados, tuvieron en cuenta las particularidades de cada una de las fases del modelo de van Hiele, así como las características que forman parte del concepto de estructuras de tipo aditivo y sus categorías de composición y transformación, éstos fueron contrastados durante el trabajo de campo con los estudiantes, que intervinieron en el proceso de investigación. El cumplimiento de estos descriptores se verificó a partir del análisis de los datos recolectados en las entrevistas de carácter socrático, los mapas conceptuales y observaciones realizadas, su verificación se hizo teniendo en cuenta códigos y posteriormente categorías para el análisis de la comprensión de los estudiantes del grado tercero de la básica primaria, este proceso permitió presentarlos como producto del proceso de investigación.

Las categorías que emergieron de este proceso se presentan a continuación.

4.3. Categorías

Para el alcance del objetivo de investigación se empleó un mecanismo que abordó la componente visual geométrica, enunciados de tipo verbal y el aspecto simbólico de las estructuras de tipo aditivo, a partir de experiencias de aprendizaje articuladas a estos componentes.

Las experiencias se diseñaron para cada una de las fases propuestas por el modelo educativo de van Hiele. A continuación se presentan los hallazgos encontrados en la aplicación de las

..

mismas, donde emergieron los códigos que se agruparon en las categorías y permitieron describir la comprensión alcanzada por cada uno de los estudiantes.

4.3.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

En esta categoría se incluyeron aportes de los participantes que involucraron aspectos relacionados con los conceptos de colección, número, utilización de las operaciones de adición y sustracción y la apropiación de las mismas como una estructura. (Descriptor 4, fase 1; descriptor 5, fase 2; descriptor 3, fase 3; descriptor 1, fase 4; descriptor 1, fase 5).

4.3.2. Categoría: Utilización del lenguaje

En esta categoría se consideraron aspectos relacionados con las expresiones verbales de los participantes y la red de relaciones construida, en torno al concepto objeto de estudio, a medida que transcurrieron cada una de las fases. (Descriptor 1, fase 1; descriptor 6, fase 2; descriptor 2, fase 3; descriptor 5, fase 4, descriptor 4, fase 5).

4.3.3. Categoría: Relación con el entorno

En esta categoría se consideraron aquellas expresiones que hicieron visible la forma cómo el estudiante percibía el entorno, a través de objetos situados en el espacio físico. El apoyo de la componente visual geométrica, permitió al estudiante relacionar el pensamiento espacial y de sistemas geométricos y sus subprocesos. (Descriptor 2-3, fase 1; descriptor 2-3, fase 2; descriptor 4, fase 3; descriptor 3, fase 4; descriptor 2, fase 5).

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos

del entorno, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales (MEN, 1998, p. 56).

Los participantes establecieron relaciones que permitieron exhibir la construcción de sus representaciones mentales, a partir de la relación con los objetos del entorno.

4.3.4. Categoría: Solución y análisis en situaciones

En esta categoría se contemplaron códigos referidos al proceso, análisis, solución, argumentos y actuaciones de los participantes al enfrentarse a las diferentes situaciones. (Descriptor 5, fase 1; descriptor 1, fase 2; descriptor 1, fase 3; descriptor 4, fase 4; descriptor 3, fase 5).

Se consideraron las exigencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN) en relación con el desarrollo del pensamiento numérico.

El MEN (1998) propone:

Tres aspectos básicos, sobre los cuales hay acuerdo, que pueden ayudar a desarrollar pensamiento numérico de los niños y niñas a través del sistema de los números naturales y a orientar el trabajo en el aula:

- Comprensión de los números y de la numeración.
- Comprensión del concepto de las operaciones.
- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones (MEN, 1998, p. 45).

Estos aspectos fueron considerados en cada una de las argumentaciones expuestas por los estudiantes en las diferentes actividades que desarrollaron.

A continuación se presenta la matriz de códigos y categorías que emergieron en el estudio.

| Descriptores de fase y Matriz de Categorías | | | | | | |
|---|---|--|---|---|--|---|
| Categoría: | Códigos | Fase 1 | Fase 2 | Fase 3 | Fase 4 | Fase 5 |
| Reconocimiento de estructuras | Incluye aquellos aportes de los participantes que involucran aspectos relacionados con los conceptos de colección, número y el empleo de las operaciones de adición y sustracción. Estos elementos son propios de las estructuras de tipo aditivo y permiten observar cómo se va organizando y consolidando la estructura mental en relación al concepto. | Le asigna un número natural a una colección de objetos con características comunes. Realiza acciones propias de las categorías composición (reunir, separar) y transformación (aumentar, disminuir) una cantidad. | Separa y reúne elementos, que tienen características comunes, asignando un número a cada uno de los conjuntos formados. | Resuelve numéricamente diversas situaciones del contexto que implican la utilización de estructuras de tipo aditivo. Determina la operación básica pertinente a aplicar de acuerdo a la situación presentada. | Relaciona las estructuras de tipo aditivo con las operaciones básicas entre conjuntos. | Reconoce los elementos de las estructuras de tipo y las utiliza en la solución de situaciones problema. |
| Utilización del lenguaje | Esta categoría incluye códigos relacionados con las expresiones verbales de los participantes y la red de relaciones construida en torno al concepto objeto de estudio, teniendo en cuenta el propósito de cada una de las fases de aprendizaje en relación con el refinamiento del lenguaje. | Determina características comunes en una colección de objetos. (A una colección de objetos la nombra por sus características). Utiliza expresiones que demuestran sus construcciones mentales frente al concepto. | Determina en una situación de tipo aditivo los cambios que conllevan al aumento o disminución de una cantidad. (Transformación). Determina el número que le hace falta a una colección n de elementos, para que tenga el mismo número de elementos de otra | Explica verbalmente los cambios que ocurren en diversas situaciones aditivas del contexto que involucran composición o transformación. | Indaga y reflexiona sobre situaciones de la vida cotidiana que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo. | Infiere y explica el proceso y operación matemática (adición o sustracción) a utilizar en el contexto de una situación de tipo aditivo. |

| | | | | | | |
|---|---|--|---|--|--|--|
| | | | colección. | | | |
| Relación con el entorno | <p>En esta categoría se encuentran aquellos códigos que hacen visible la forma cómo se percibe el entorno a través de objetos situados en el entorno físico y con el apoyo de la componente visual geométrica. Los participantes establecen relaciones que permiten exhibir la construcción de sus representaciones mentales.</p> | <p>Agrupar elementos de acuerdo a características comunes, a partir de diferentes colecciones.</p> <p>Realiza agrupaciones, de acuerdo a características comunes con los elementos de una colección.</p> <p>Establece relaciones entre las situaciones presentadas y los objetos de su entorno, teniendo como apoyo la componente visual geométrica.</p> | <p>Representa en forma equivalente un número cualquiera utilizando composición y descomposición.</p> <p>Reconoce el número fijo a de elementos, que se ha añadido a una colección que tiene b elementos, para formar una secuencia.</p> | <p>Plantea diversos problemas del contexto que involucran la utilización de estructuras de tipo aditivo.</p> | <p>Visualiza en diferentes formas geométricas, el efecto de añadir o quitar elementos con las mismas características a una colección.</p> <p>Recurre a representaciones gráficas e icónicas para dar solución a situaciones de enunciado verbal, que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.</p> | <p>Interpreta situaciones de tipo aditivo a partir de sus representaciones, aplicando correctamente las operaciones básicas de adición y sustracción para su solución.</p> <p>Emplea representaciones (gráficas, icónicas, de enunciado verbal) para dar solución a situaciones de tipo aditivo.</p> |
| Solución y análisis de situaciones | <p>En esta categoría se contemplan códigos referidos al proceso, análisis, solución de argumentos y actuaciones de los participantes al enfrentarse a diferentes situaciones. Principalmente, se consideran aquellos elementos que posibilitan describir la comprensión en cada una de las fases de aprendizaje.</p> | <p>Dado un número natural construye colecciones de objetos que representan el número.</p> <p>Describe los procesos realizados para la solución de una situación particular.</p> | <p>Al comparar elemento a elemento dos colecciones, determina cuál de los dos tiene más elementos.</p> | <p>Describe los cambios que ocurren en un conjunto cuando se realizan sobre sus elementos transformaciones (agregar o quitar elementos).</p> | <p>Utiliza diversas estrategias para dar solución a una situación que involucra las estructuras de tipo aditivo.</p> <p>Propone la solución de situaciones de tipo aditivo, teniendo en cuenta las características de la estructura (resuelve una situación de sustracción por medio de una adición).</p> | <p>Diferencia situaciones que implican la utilización de categorías de composición y de transformación.</p> |

Tabla 1. Descriptores de fase y Matriz de Categorías.

..

.

La matriz presentada, anteriormente, está construida teniendo en cuenta descriptores obtenidos en el diseño y el trabajo realizado con los estudiantes y categorías que emergen, las cuales se fueron refinando a lo largo del proceso, se convierten en el punto de apoyo para presentar la descripción detallada de la información recolectada durante la implementación del Módulo de Aprendizaje. A continuación se presenta el análisis para cada uno de los casos, donde se aplican las experiencias contenidas en el módulo.

4.4. Caso Uno (Juana)

Juana se caracterizó por su disposición frente a la realización de las actividades, el interés por participar y su capacidad crítica.

4.4.1. Fase 1: Información

Durante esta fase, la experiencia de aprendizaje estuvo dirigida hacia la identificación de los conocimientos previos de Juana, ella realizó las actividades que permitieron visualizar sus saberes en relación con conceptos propios de las estructuras de tipo aditivo, de esta manera se cumplió el propósito de la fase de información de acuerdo con los planteamientos del modelo de van Hiele.

A continuación se presenta el análisis de los datos aportados por Juana, para cada una de las categorías.

4.4.1.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Al presentar una colección de objetos Juana realizó afirmaciones como: *“Es un conjunto porque es un grupo”*, de acuerdo con la actividad A.1.1., del Módulo de Aprendizaje. También en el punto 7 de la situación A.1.2.2., de la entrevista socrática, sobre el concepto de número:

..

“Es 18 porque al reunir las y contarlas el total es 18”, en el punto 4, “Juan compró dos bombones y Sofía dos bombones. Durante el proceso realizado por Juana, se observó que reunió elementos teniendo en cuenta las características comunes. Adicionalmente, asignó cantidades y realizó acciones comunes para ellas, en este caso: contar y reunir la totalidad de elementos.

Estas afirmaciones permitieron apreciar el reconocimiento de Juana respecto a conceptos como: colección, número y la utilización de las operaciones de adición y sustracción, abordadas desde las categorías de composición y transformación propuestas por Vergnaud, de esta forma pudo visualizarse el cumplimiento del descriptor 4, de la fase 1, de acuerdo a los planteamientos de van Hiele para esta fase de aprendizaje.

4.4.1.2. Categoría: Utilización del lenguaje

De acuerdo con el modelo de van Hiele, el lenguaje juega un papel importante ya que, pone en evidencia, el razonamiento sobre los conceptos. Juana, a partir de la utilización del lenguaje, ilustró sus construcciones en relación con las estructuras de tipo aditivo. Adicionalmente, describió las acciones realizadas en una situación, empleando palabras como: “*conté y observé*”; “*sumé en la mente*”, en el punto 7 de la situación A.1.2.2., de la entrevista socrática, “*haciendo grupos y contando*”, en el punto 9 de la situación A.1.2.3., de la entrevista socrática.

Al referirse a los conjuntos, mencionó sus características generales asignando rótulos como: “*están coloreadas*” en el punto 1 de la situación A.1.2.1., de la entrevista socrática. , “*son formas geométricas... todos son dulces*”, determinando características comunes en una colección de objetos, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 1, formulado para esta fase. En el punto 3, de la actividad A.1.1., del Módulo de Aprendizaje, los cuales describió como: “*son una reunión de elementos*”, “*tienen características comunes y generales*”, expresiones presentadas en el Mapa Conceptual de la fase 1.

En las respuestas a las preguntas de esta fase, se observó que Juana hacía referencia a una totalidad, reconociendo saberes que conllevan hacia la construcción de la categoría de composición y a las acciones de reunión y separación, como las presentadas en el punto 7 y 8 de

la situación A.1.2.2., de la entrevista socrática: “*Son 10... si todas formaban un conjunto de 18, las de Lucas y Santiago juntas eran 10... al sumar $4 + 6$ da un total de 10*”. Adicionalmente, expresiones como: “*por si hay que agregar o disminuir la cantidad*” dan cuenta de la categoría de transformación.

4.4.1.3. Categoría: Relación con el entorno

Juana recurrió a las imágenes presentadas en el entorno físico para señalar las características comunes de una colección de elementos, “*calle, acera, puente, son un conjunto de elementos que se pueden pisar*”, en el punto 2, de la actividad A.1.1., de esta fase. Ella se apoyó en el aspecto visual - geométrico considerando la característica de forma en los objetos y realizando agrupaciones, “*hay 9 triángulos, porque incluye el que los conforma y los que contiene en su interior*” y “*hay ocho triángulos juntando algunos de igual tamaño*”, en el punto 1 de la actividad A.1.2., de la fase 1, del Módulo de Aprendizaje. También, hizo alusión constante a la observación: “*observándolos esa es la cantidad de niños*”, en el punto 1, de la actividad A.1.3., fase 1, correspondiente al Módulo de Aprendizaje. “*también observo de forma rectangular el palito de bombón*”, aspectos que se relacionan con la componente visual - geométrica y fueron apoyo para que Juana identificara características comunes que le posibilitaron realizar diferentes agrupaciones, en este sentido, puede afirmarse el cumplimiento de las características mencionadas en los descriptores 2 y 3 de la fase 1, los cuales están en relación con la realización de agrupaciones, de acuerdo a características comunes entre los elementos, atendiendo a la categoría de composición de las estructuras de tipo aditivo de Vergnaud.

4.4.1.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

Juana presentó en el numeral 5, de la situación A.1.2.2., de la entrevista socrática de la fase 1, algunos argumentos como: “*Ya entendí la situación... Juan compró dos bombones y Sofía dos bombones, Juan compró bolitas de chocolate y Sofía también, son dulces, todos son dulces.*”

..

También expresó: *“El bombón tiene forma circular y las bolitas de chocolate también”*, en el punto 7, de la situación A.1.2.2., de la entrevista socrática.

En la respuesta al numeral 8, de la misma situación, la explicó de la siguiente manera:

“3 + 5 es 8 y luego 8 más 10 son 18 y así lo hice”. *“Porque si todos formaban un conjunto de 18, las de Lucas y Santiago juntas eran 10... Por eso”*. Al enfrentarse a las situaciones ilustradas, Juana exteriorizó los conocimientos sobre el concepto de número y realizó agrupaciones para hallar el total de una colección. Además, explicó el proceso de reagrupación de cantidades, fue así como pudo observarse el cumplimiento del descriptor 5, de la fase 1, donde realizó acciones relacionadas con el concepto de número y operaciones de adición y sustracción.

Los datos proporcionados por Juana a partir del trabajo realizado durante esta fase, permitieron afirmar el cumplimiento del propósito de la misma, de acuerdo a los planteamientos de van Hiele, ya que a partir de las diferentes actividades fue posible informarse acerca de sus saberes previos, en cuanto a los conceptos relacionados con las estructuras de tipo aditivo en sus categorías de composición y transformación propuestas por Vergnaud.

4.4.2. Fase 2: Orientación Dirigida

Durante las experiencias desarrolladas en esta fase, Juana se acercó a los elementos que forman parte de las estructuras de tipo aditivo, a partir de representaciones que involucraban la componente visual - geométrica y enunciados de tipo verbal. Adicionalmente, participó de las actividades dirigidas y suministró explicaciones de los procesos realizados.

4.4.2.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

En el tiempo dedicado a la realización de las actividades en esta fase, Juana dio respuestas a la situación planteada en A.2.2.1., el punto 4 de la entrevista de la siguiente manera: *“Hay un*

conjunto formado por cinco carros, tres balones, dos cometas... porque sumando los carros hay 5, sumando los balones hay 3 y sumando las cometas hay 2”. También en el punto 2, “El número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis es mayor que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan porque 2 es mayor que 1, o 1 es menor que 2”. Luego se observó la actividad A.2.5.2, donde se presentó un enunciado de tipo verbal, mencionó la cantidad de elementos de dos colecciones y luego la cantidad que representa su reunión: “7 triángulos y 8 cuadrados” y “El número de figuras que tiene Diego es: 15”.

Se observó que Juana reunió elementos de acuerdo a características comunes asignando un cardinal, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 5, construido para la fase 2, el cual apuntaba a que el estudiante a partir de características comunes, separara y reuniera elementos, contribuyendo así con la orientación dirigida, al reconocimiento de características propias de las estructuras. Además, Juana generó relaciones entre los conceptos de colección, número y las operaciones de adición y sustracción de acuerdo a sus categorías. También relacionó cantidades, argumentando cuál era mayor y cual menor cuando ocurría un aumento o una disminución en la cantidad.

4.4.2.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Juana afrontó situaciones que le permitieron involucrarse con el lenguaje de las estructuras de tipo aditivo, observándose en su discurso expresiones que la remitían a la acción de “separar”, propia de las categorías de composición y transformación. Expresiones como: “*su cantidad disminuyó*”, dan cuenta de la utilización de las categorías mencionadas.

Argumentos como los presentados en la situación A.2.5.5., en la actividad 2 de esta fase: “*Hice una sustracción porque me dieron una cantidad inicial y otra que era 12 y debo encontrar el aumento hallando la diferencia entre 12 y 6 así $12 - 6 = 6$* ”, también dieron cuenta de la categoría de transformación de las estructuras de tipo aditivo; el lenguaje empleado por la estudiante al presentar las explicaciones, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 6, de la fase 2, donde la orientación dirigida buscó orientar a los estudiantes hacia el

reconocimiento de los cambios ocurridos en una estructura que conllevan al aumento o disminución de una cantidad.

En el punto 29 de la entrevista expresó: *“Durante el juego Santiago tenía 4 canicas y se ganó 2 canicas aumentando la cantidad, y Diego tenía 4 y su cantidad disminuyó”*, también explicó lo ocurrido en el punto 26 de la entrevista: *“Juan tiene 6 bombones de chicle y Diego tiene 6... porque si Diego compró 10 bombones entre esos bombones de chicle y chocolate, luego Juan le ayudó a separarlos y cuenta que Diego tiene 4 bombones de chocolate y el resto son de chicle... el resto son 6”*. Respecto a lo anterior, se puede observar que Juana dio soluciones a diversas situaciones, tratando de explicar cada uno de los detalles presentados en las mismas.

4.4.2.3. Categoría: Relación con el entorno

Juana describió la situación A.2.2.3. de la entrevista, a partir de observaciones sobre el entorno físico, entre sus argumentos para los puntos 9 -10 se encontraron: *“La situación indica que Juan para ubicar los obstáculos dio 3 pasos y que avanzó hasta la tercera piedra y por eso son 9 pasos... porque podemos contar de 3 en 3... 3, 6, 9”*. *“6... porque siguiendo los obstáculos le faltaban 6 pasos para llegar a la casa de David... cada obstáculo tiene 3 pasos... también se puede observar que los pasos del recorrido de la casa de Juan a la casa de David son 15, entonces Juan lleva 9 pasos y de 9 a 15 hay 6”*. Los argumentos presentados permitieron confirmar el descriptor 2, de la fase 2, donde la orientación consideró la componente visual – geométrica para que la estudiante lograra establecer la cantidad fija que se añadió para formar una secuencia.

En el punto 1 de la entrevista correspondiente a la situación A.2.2.1., explicó: *“Porque observando veo que la cantidad de carros en el conjunto de juguetes de Luis es menor”*.

Desde la interacción con representaciones del entorno físico, Juana contempló transformaciones como el aumento y disminución de cantidades. A partir de allí, estableció relaciones con el entorno y los objetos, iniciando procesos que permitieron determinar,

..

cuantitativamente, la diferencia numérica entre los mismos, qué tan lejos o qué tan cerca estaba un objeto del otro y cuánto le faltaba o sobraba a una cantidad para ser igual a otra. Además, en esta fase, Juana resaltó la importancia de la visualización de los objetos con argumentos plasmados en un Mapa Conceptual, los cuales permitieron observar la forma de construcción de la red de relaciones en torno al concepto. Algunas expresiones fueron: *“Tanto en la adición como en la sustracción pueden emplearse representaciones como dibujos, rectas numéricas y situaciones... Las representaciones como dibujos, rectas numéricas y situaciones ayudan a comprender”*. Estos argumentos pueden apreciarse en el Mapa Conceptual construido por Juana presentado a continuación:

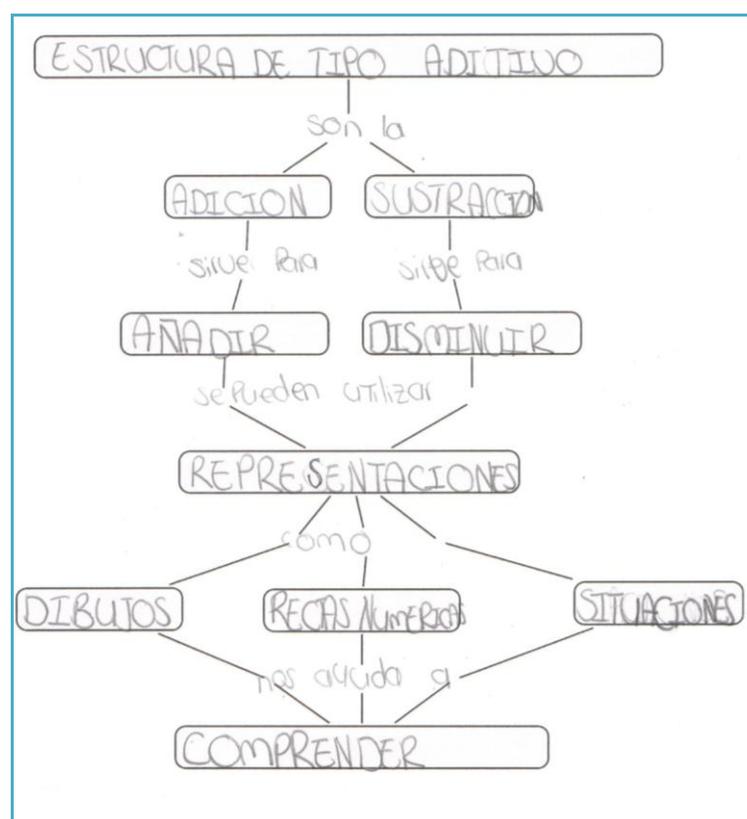


Ilustración 11. Mapa Conceptual realizado pro Juana para la fase 2. Caso 1.

4.4.2.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

Juana describió los procesos realizados para solucionar situaciones como la A.2.2.1., correspondiente la entrevista en el punto 3, a través de expresiones como: *“La cantidad de juguetes de Luis y la cantidad de juguetes de Juan son iguales... lo sé observándolas o sumándolas... o contándolas cada una por separado...esta es la cantidad que tiene cada una o la cantidad de ellos es igual”*. También lo hizo en la situación A.2.2.10., en el punto 28 donde explicó: *“La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es menor en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente... Porque Diego inicialmente tenía 6 canicas y guardó 2 de ellas y le quedaron 4, y 4 es menor que la cantidad 6”*. Al momento de dar solución a las situaciones, resaltó la posibilidad de observar los objetos para establecer relaciones al comparar dos cantidades.

Al observar la forma cómo Juana dio solución a las situaciones presentadas, de esta forma se verificó el cumplimiento de los descriptores 1 y 4, construidos para la fase 2, donde Juana comparó los elementos de una colección y determinó la cantidad que sobraba o hacía falta en una colección para ser igual a la otra. Juana expresó que, en la realización, efectuó una suma o simplemente un conteo de los objetos, de esta manera ilustró como, el conteo, es una estrategia que hace parte de acciones cotidianas y como la suma es una operación pertinente para realizar agrupaciones.

Al observar el desempeño de Juana durante del desarrollo de las diferentes actividades propuestas para la fase 2, puede resaltarse, el cumplimiento de los propósitos de la misma, ya que a partir de la orientación dirigida pudo familiarice con los conceptos y propiedades que forman parte de las estructuras de tipo aditivo a partir de la componente visual – geométrica y de enunciados verbales, reconociendo características de las categorías de composición y transformación.

4.4.3. Fase 3: Explicitación

Durante esta fase Juana socializó con sus compañeros y realizó descripciones de las actividades. La descripción fue posible por la estructura de las actividades, las cuales contemplaban: Imágenes, representaciones gráficas como la recta numérica y textos con enunciados verbales.

4.4.3.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Juana intercambió ideas con sus compañeros, luego, realizó cálculos numéricos empleando las operaciones de adición y sustracción de acuerdo a la situación, haciendo explícito el porqué del uso de éstas, a partir del dialogo establecido con la estudiante, ésta compartió la forma cómo analizó y dio solución de forma numérica, a una situación presentada, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 3, construido en la fase 3. En la situación A.3.1.1., de la entrevista, en el punto 3, expresó: *“La forma apropiada para calcular la disminución presentada en el número de globos es $8 - 5 = 3$... porque la cantidad inicial de globos es 8, la otra cantidad después de explotarlos con una aguja es 5 y el resultado es 3... porque disminuyeron, quitándose las cantidades y se realizan con la operación de la sustracción”*. Esto permitió visualizar el proceso realizado, debido a que fue posible establecer el cambio ocurrido en una situación particular. Además, en la situación A.3.1.2., en los puntos 4, 5 y 6 de la entrevista, Juana presenta expresiones como: *“Daniel ganó cromos, porque antes de jugar tenía 6 cromos y al final tenía 10, o sea que aumentó... Daniel estaba jugando y la cantidad inicial de cromos eran 6 y luego aumentó el número de cromos”, “el aumento en los cromos se calcula $10 - 6 = 4$, porque al comparar las cantidades esa es mi respuesta” y “Para saber cuánta cantidad aumento cojo la cantidad mayor que es 10 y le quito la cantidad inicial que es 6 y me da 4”,* expresiones que dan cuenta del reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo efectuada por la estudiante.

Al presentarse una situación práctica, en la actividad A.3.2., trabajada empleando elementos del entorno, en este caso bombones, en la situación A.3.2.1., Juana tuvo la oportunidad de

intercambiar sus ideas con las de sus compañeros y después de compartir con éstos, al retirar elementos de una cantidad, afirmó: *“el cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea menor que la inicial”*, relacionando esto con la operación de “sustracción”. Adicionalmente, en el caso A.3.2.2., añadió elementos a una cantidad afirmando: *“el cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea mayor que la inicial”*, relacionando esto con la operación de “adición”.

4.4.3.2. Categoría: Utilización del lenguaje

En las experiencias, propuestas en el Módulo de Aprendizaje, se permitió a los estudiantes comunicar sus ideas, escuchar a sus compañeros, así como las nuevas orientaciones del profesor, de esta manera Juana mostró su razonamiento y dio sus argumentos e ilustró sus construcciones mentales acerca de las estructuras de tipo aditivo explicando de forma verbal los cambios ocurridos en la situación A.3.1.1., en el punto 1: *“El cambio representado en el conjunto final de globos en relación con el conjunto inicial hace que la cantidad.... disminuya... porque al iniciar la situación dicen que habían 8 globos y luego la situación dice que hay 5”*. También realizó afirmaciones sobre la situación A.3.1.2., en el punto 7, argumentando el porqué de la misma: *“Juan sí realiza bien el cálculo porque Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso los 8 carros, quedando un grupo de 4 balones... porque analizando la situación tenía 12 juguetes y los separó, empezando con los 8 carros, entonces a 8 le faltan 4 que son los 4 balones”*. Se puede observar que en sus argumentos existe claridad frente a las acciones realizadas en relación con las categorías de composición (separar, reunir) y transformación (aumentar, disminuir), de esta manera se cumplió con las características del descriptor 2, construido para la fase 3.

4.4.3.3. Categoría: Relación con el entorno

Al realizar la actividad A.3.2., con objetos del entorno (bombones), Juana estableció relaciones entre las cantidades: *“Tienen la misma cantidad”*, *“ocho es mayor que tres”*. A partir

de la observación realizada en la actividad A.3.3.1., al indagar por un caso presentado de forma visual (láminas de colores) explicó la categoría de composición: *“habían siete fichas de color rosado y le agrega nueve azules, o sea, que hay un nuevo conjunto de fichas de colores”, “hay un conjunto de 16 fichas de colores, luego separaron las siete rosadas y quedan nueve de las azules”*.

Con el desarrollo de estas actividades fundamentadas en la componente visual – geométrica, el intercambio de ideas y realización de cálculos de forma grupal, permitió a Juana proponer sus propias situaciones y darles solución, empleando las categorías de las estructuras de tipo aditivo, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 4, construido en la fase 3.

4.4.3.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En los procesos de socialización de esta fase, Juana presentó sus explicaciones en la entrevista, al indagar por la situación A.3.1.1., en el punto 2: *“La cantidad que representa la disminución es: 3... porque el resultado de la sustracción $8 - 5$ es 3... 8 que es la cantidad inicial y 5 que es la cantidad de globos que quedaron”*.

También lo hizo en la situación A.3.1.2., en los puntos 5 y 6: *“La cantidad que representa el aumento de cromos es 4... porque al comparar las dos cantidades, que la inicial es 6 y al final 10, vemos que a 6 le faltan 4 para llegar a 10... a través de una sustracción”*. Además, hizo explícita su comprensión acerca del efecto de cada una de las operaciones de adición y sustracción, las descripciones presentadas por Juana, acerca de los cambios ocurridos en una situación, permitieron verificar el cumplimiento del descriptor 1, de la fase 3, donde el lenguaje empleado dio cuenta de la red de relaciones que la estudiante ha ido construyendo a lo largo del proceso.

Observar el desempeño de Juana durante la implementación de la experiencia de aprendizaje propuesta para la fase 3, permite afirmar la pertinencia del modelo de van Hiele, donde en esta fase de explicitación, pudo intercambiar ideas con sus compañeros, aclarar dudas, dar sus

..

aportes, demostrando el enriquecimiento de su red de relaciones al emplear un vocabulario que muestra apropiación de las características de las categorías de composición y transformación de estas estructuras.

4.4.4. Fase 4: Orientación Libre

Durante esta fase Juana aplicó los conocimientos en la solución en diversas situaciones. Adicionalmente, planteó nuevas alternativas y estrategias para resolver los problemas.

4.4.4.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

En las experiencias presentadas Juana tuvo la oportunidad de mostrar el reconocimiento de las estructuras empleando diversas estrategias, ella se apropió tanto de las operaciones entre conjuntos como de operaciones básicas de adición y sustracción para dar solución a situaciones presentadas, de esta manera se observó el cumplimiento del descriptor 1, construido en la fase 4, como se presenta a continuación:

Juana demostró el reconocimiento de las estructuras aditivas relacionando la adición y sustracción con las operaciones básicas entre conjuntos, esto lo demostró en la situación A.4.1.1., punto 1 de la entrevista, allí empleó la categoría de composición y acciones propias de la misma, como se ilustra a continuación: *“8 + 6 = 14 porque al adicionar o al juntar la cantidad de círculos en el conjunto A con la cantidad del conjunto B, los cuadrados me da como resultado 14... lo que se hace es que se agrupan los círculos y los cuadrados, 8 círculos y 6 cuadrados para que de un total de 14”*. Se puede evidenciar que, aquellas situaciones que involucran las operaciones básicas, entre conjuntos, permitieron a Juana relacionar las estructuras de tipo aditivo con la unión entre conjuntos. Ella concluyó que, al adicionar una cantidad a la otra, se obtienen agrupaciones, aplicando así la categoría de composición.

Al presentar la situación A.4.1.8., en los puntos 9 y 10, a partir de un enunciado de tipo verbal y preguntar por la operación indicada, Juana respondió: *“la adición $450 + 1800$ porque Juan debía hacer una adición para saber cuánto costaba la leche y las galletas”*, luego *“Cuánto vale la bolsa de leche y las galletas y para saberlo hay que hacer una adición”*. Estos argumentos dejan en evidencia la utilización y el reconocimiento que Juana hace de la operación de adición con números naturales.

4.4.4.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Durante esta fase se observó la utilización de un lenguaje propio de las Matemáticas y se visualizó la red de relaciones, construida en torno a las estructuras de tipo aditivo, a través de argumentos como los presentados en la situación A.4.1.2, puntos 2 y 3 de la entrevista: *“la operación indicada es una sustracción porque la cantidad inicial fue 12 y la cantidad final 4, entonces yo retiré a 12 las 4 nucas y me dio 8”*, también lo hizo con otras situaciones: *“ $8 + 6 = 14$ porque al adicionar la cantidad de círculos en el conjunto A con la cantidad del conjunto B los cuadrados me da como resultado 14”*.

Al presentar situaciones en diferentes contextos, Juana reconoció la operación matemática indicada: adición o sustracción. También manifestó apropiación del vocabulario, presentando la relación con las categorías trabajadas respecto a la cantidad inicial y final. Al indagar acerca del proceso que se realiza, con las cantidades en una adición, en la entrevista, al indagar por la situación A.4.1.1., punto 1, ella afirmó: *“se agrupan... los círculos y los cuadrados... 8 círculos y 6 cuadrados que suman 14*. La estudiante, además de expresar con claridad el proceso realizado y emplear la operación adecuada, se apropió de un discurso, acorde con la estructura construida en relación con la información encontrada en las diferentes fases de aprendizaje, haciendo evidente la ampliación de la red de relaciones, construida en torno al concepto.

Juana también tuvo la oportunidad de enfrentarse a situaciones del contexto, analizándolas y proporcionando su solución, de esta manera observó la utilización de las operaciones de adición y sustracción en la cotidianidad. Al presentar la situación A.4.1.8., en los puntos 9 y 10, las

..

cuales corresponden a una situación en contexto, Juana indicó como operación adecuada: *“la adición $450 + 1800$ porque Juan debía hacer una adición para saber cuánto costaba la leche y las galletas”*, luego *“Cuánto vale la bolsa de leche y las galletas y para saberlo hay que hacer una adición”*, Juana reveló apropiación del lenguaje al dar solución a las situaciones, así como la utilización adecuada de las estructuras de tipo aditivo, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 5, propuesto para esta fase.

4.4.4.3. Categoría: Relación con el entorno

Cuando se presentaron situaciones apoyadas en la componente visual –geométrica, como en la entrevista, en la situación A.4.1.4., punto 5, Juana describió lo ocurrido como se enuncia a continuación: *“porque hay 7 panes, ya que hay una cantidad inicial de panes que es de 35 y otra cantidad final que es de 28 panes y si a 35 le quito 28 es un total de 7 panes, $35 - 28 = 7$ ”*. Estos argumentos dejan en evidencia la utilización de la categoría de transformación y sus implicaciones en diferentes situaciones.

También en la entrevista en la situación A.4.1.5., en el punto 6, donde se empleó la componente visual – geométrica, Juana afirmó: *“porque Diana le ha añadido 2 triángulos a la figura inicial. Al observar la cantidad inicial que es 2 y completó en total 4 triángulos, la cantidad final que es 4”*, así mostró que, a partir de una forma geométrica, es posible visualizar la adición y la sustracción, de elementos entre conjuntos.

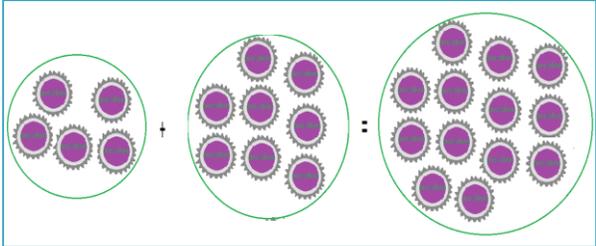
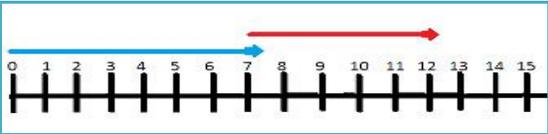
En las interacciones con el entorno al participar de la situación A.4.1.3., en el punto 4, Juana argumentó: *“está representada por 13 bombones menos 5, o sea que la cantidad que le dio el amigo de Camilo que fueron 5 bombones... Porque 13 era la cantidad inicial y 8 es la cantidad final, hice una sustracción y a 13 le quito 8 es un total de 5”*. En esta ocasión, la manipulación de elementos del contexto permitió que Juana describiera una situación de tipo aditivo, determinando la operación matemática correcta para la solución, Juana al enfrentarse a situaciones del contexto, apoyadas en la componente visual – geométrica, pudo dar solución a las mismas empleando la operación adecuada, de esta forma mostró apropiación de las categorías de

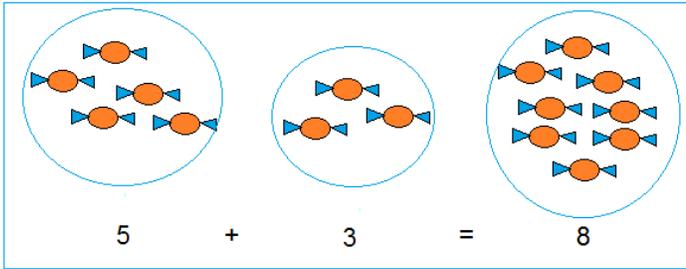
composición y transformación a partir de situaciones presentadas en diferentes contextos, dando cumplimiento al descriptor 3, propuesto para esta fase.

4.4.4.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

A continuación se describe un fragmento de la Entrevista de Carácter Socrático correspondiente a la situación A.4.1.6., punto 7, la cual da cuenta del análisis que Juana realizó en una de las situaciones planteadas a lo largo de la fase.

Entrevistador: *Lee, observa y analiza la siguiente situación, para que luego puedas responder una pregunta. Ahora debes señalar con una X el nombre de quien (quienes) consideres que tienen las respuestas adecuadas para dar solución a la situación:*

| Situación A.4.1.6. | |
|--|--|
| <p>Durante la clase de Matemáticas la profesora presenta a sus estudiantes la siguiente situación:</p> <p>El día de los niños Diana tenía 5 confites, salió de casa y al regreso llevó 8 confites más. Para saber el número de confites que completó Diana, la profesora pide dar solución a la situación y da a sus estudiantes la libertad para que hallen la respuesta.</p> | <p>Felipe lo hizo así: representó las cantidades con tapas y luego las reunió.</p>  <p>Ilustración 12. Representación presentada por Felipe.</p> <p>Juan lo hizo así: representó en la recta numérica realizando desplazamientos.</p>  <p>Ilustración 13. Recta presentada por Juan.</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>Diego decidió representarlo con conjuntos así:</p>  <p>Ilustración 14. Conjuntos representados por Diego.</p> <p>Andrés, simplemente, lo hizo así: $5 + 8 = 13$</p> |
|--|--|

- a. Andrés _____
- b. Juan _____
- c. Diego _____
- d. Felipe _____

Estudiante: *Andrés y Felipe.*

Entrevistador: *¿Puedes explicar tu respuesta?*

Estudiante: *Porque Andrés explicó la situación con números, quedando así: $5 + 8 = 13$ y Felipe que representó la situación con imágenes (figuras de color morado) y la situación de Juan es una recta numérica incorrecta arrancando en 7 y terminando en 12, siendo las cantidades 7 y 5 y Diego representó con confites e hizo $5 + 13 = 8$ como cantidad final y también era incorrecto.*

Se puede concluir que Juana se apoyó en las distintas representaciones para el análisis de la situación, fundamentándose en la componente visual – geométrica, con el fin de establecer conclusiones acertadas respecto a la solución. De esta forma se apropió de las características que se deben poseer para la fase de orientación libre, donde el reconocimiento de las diferentes estrategias para explicar la solución de la situación, verifica el cumplimiento del descriptor 4 propuesto para esta fase.

..

Durante el desarrollo de las actividades propuestas para esta fase, se observó la forma de abordar las situaciones por parte de la estudiante, allí, ella presentó sus argumentos de forma deliberada y analítica. Por lo tanto, se puede afirmar la pertinencia del uso de actividades secuenciales durante las diferentes fases de aprendizaje, las cuales permiten estructurar razonamientos que son empleados en los momentos que se requiera solucionar una situación matemática.

4.4.5. Fase 5: Integración

En esta fase, Juana integró los conocimientos adquiridos a lo largo del trabajo en cada una de las fases anteriores, dando cuenta de la apropiación de los conceptos y el enriquecimiento de la red de relaciones construida sobre las estructuras de tipo aditivo.

4.4.5.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Al integrar los conocimientos adquiridos sobre las estructuras de tipo aditivo, Juana reconoció características generales de las mismas. En la Entrevista de Carácter Socrático, al presentarse la situación A.5.1.1., en el punto 1, dio argumentos como: *“carros, balones y cometas tienen la característica de juguetes, triángulos y cuadrados tienen las características de figuras geométricas y nucas, bombones y bolitas de chocolate tienen la característica de dulces”*, evidencian el reconocimiento sobre las características que identifican una colección.

Respecto a las operaciones de adición y sustracción como una estructura, en la entrevista, situación A.5.1.6., punto 9, presentó aportes como: *“la respuesta adecuada es: el aumento que se ha presentado en la cantidad de personas que visitaron la piscina durante los dos fines de semana, porque teníamos que hacer una sustracción para saber el aumento del número de personas que hubo en los fines de semana”*. Con estos argumentos, Juana manifestó el reconocimiento de la categoría transformación, al referirse a ella, mencionó cómo se involucran,

en ésta, elementos de la misma naturaleza, y al analizar la situación, encontró que la cantidad aumentó utilizando la operación de sustracción.

En la situación A.5.1.4., punto 7, la cual implicaba la categoría de composición, Juana argumentó: *“Diana tiene en cuenta la característica “bombones de chocolate” para formar su colección, porque Diana tenía 8 bombones y decidió separar los bombones de chocolate utilizando la característica “bombones de chocolate”, una sustracción que vendría a ser $8 - 4 = 4$ bombones de chicle”*. De esta forma quedan explícitas las acciones de reunir y separar, propias de la categoría composición.

Los argumentos presentados por Juana dan cuenta de sus construcciones mentales en torno a las estructuras de tipo aditivo, de esta manera se cumplió el descriptor 1, propuesto para la fase 5.

4.4.5.2. Categoría: Utilización del lenguaje

La red de relaciones construida en torno al concepto de estructuras de tipo aditivo se hizo evidente en las siguientes explicaciones presentadas por Juana en la entrevista, situación A.5.1.1., punto 4: *“aumenta porque si Juan tiene una cantidad y le agrega o le aumenta más el cambio que ocurre es que aumenta”*. En su discurso, Juana demostró que las acciones realizadas tenían una intención. Adicionalmente, hizo evidente los efectos de las operaciones y uso en las expresiones verbales ilustradas.

En la construcción del Mapa Conceptual, se observó la apropiación de las operaciones de adición y sustracción como aquellas que conforman las estructuras de tipo aditivo. Ella afirmó que estas permiten reunir y separar elementos, así como aumentar o disminuir una cantidad, las cuales se encuentran articuladas a las categorías de composición y transformación, en correspondencia con la utilización de conjuntos y sus representaciones numéricas, de esta manera se cumple el descriptor 4, propuesto para esta fase de aprendizaje.

4.4.5.3. Categoría: Relación con el entorno

Al presentar situaciones de tipo aditivo desde diferentes representaciones, en la entrevista, situación A.5.1.4., punto 6: Juana explicó: *“Se presentan elementos de las mismas características, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación, que hace que la cantidad de canicas de cristal aumente, porque al observar el dibujo o representación visual, se ve que Daniel antes de jugar tenía 8 canicas y después de jugar tenía 12 canicas eso hace que la cantidad aumente y me doy cuenta haciendo una sustracción $12 - 8 = 4$ ”*. *“... ocurre la transformación porque estamos hablando de objetos de la misma categoría”*. Esto indica que el apoyo, en la componente visual – geométrica, es un aspecto que proporciona herramientas para resolver diversas situaciones. En este caso, la componente permitió determinar el cálculo realizado, cumpliendo el descriptor 2, construido en la fase 5, donde se empleó de forma adecuada las operaciones de adición y sustracción. Además, Juana trascendió de las representaciones visuales a la componente simbólica y formal de las estructuras de tipo aditivo.

4.4.5.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En el punto 8 de la entrevista, correspondiente a la situación A.5.1.5., Juana explicó cuál era la operación adecuada para la solución, como se muestra a continuación:

Entrevistador: *Escucha la siguiente situación: Diego tiene ocho monedas, su tío Carlos le regala cuatro más, el número de monedas que tiene ahora es...*

De acuerdo con el planteamiento anterior, la operación adecuada para hallar la solución a la situación es:

- a. Una resta porque se pregunta por la cantidad final de monedas.*
- b. Una adición porque permite calcular el aumento en la cantidad inicial de monedas.*
- c. Una adición porque se está preguntando por la disminución en una cantidad inicial de monedas.*

d. *Una resta porque ha disminuido la cantidad inicial de monedas.*

Estudiante: *es la b.*

Docente: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *Una adición porque permite calcular el aumento en la cantidad inicial de monedas, porque ocho monedas que tenía, 4 que le regala su tío, al hacer la adición: $8 + 4 = 12$ se puede saber cuál es el aumento ocurrido.*

La solución a la situación anterior permite dar cuenta de la utilización de las operaciones de suma y resta para el análisis de situaciones en contexto, lo cual evidencia nuevamente el empleo de las categorías de composición y transformación, exhibiendo el cumplimiento del descriptor 3, correspondiente a la fase 5, al diferenciar las situaciones que corresponden a las categorías de composición y transformación y empleando la operación matemática correspondiente.

A continuación se presentan los mapas conceptuales construidos por Juana en la fase 1 y fase 5, donde puede apreciarse la forma cómo se ha acrecentado la red de relaciones construida por la estudiante:

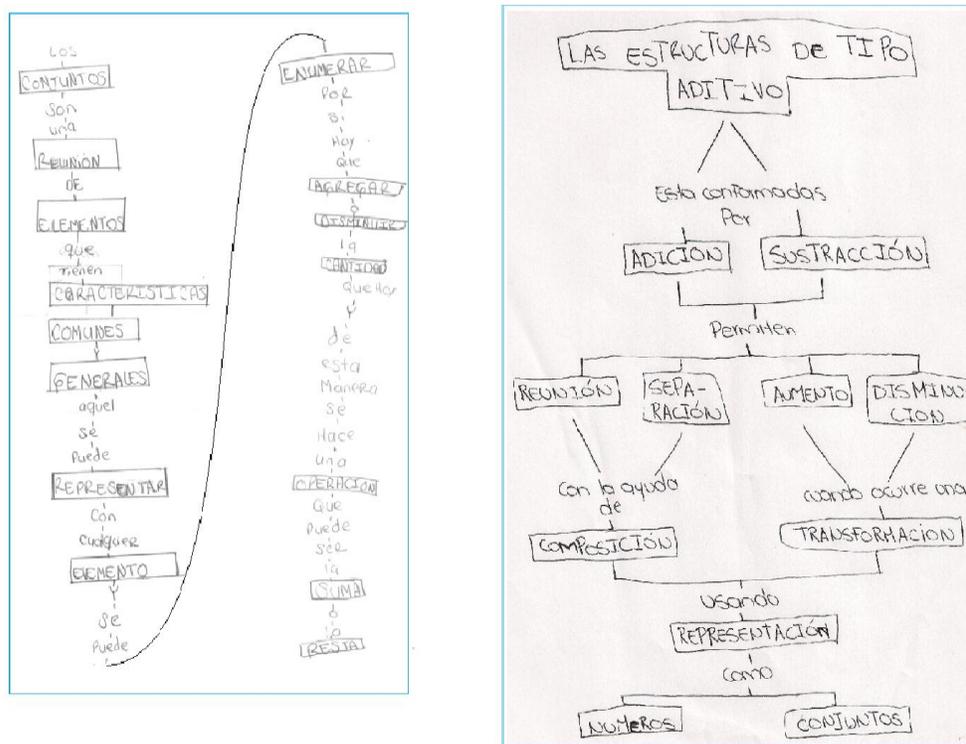


Ilustración 15. Mapas construidos por Juana en las fases 1 y 5.

Los mapas conceptuales realizados por Juana, permiten observar la red de relaciones construida en torno al concepto de las estructuras de tipo aditivo, en el mapa correspondiente a la fase 1, se aprecian sus saberes previos en relación con el concepto de colección y acerca de las operaciones de adición y sustracción, en el mapa correspondiente a la fase 5, se ve apropiación de las categorías propuestas por Vergnaud para el abordaje de estas estructuras. Además, se encuentra reconocimiento de estas dos operaciones y de los conceptos que están relacionados, así como de sus diferentes representaciones, dejando clara la estructura mental que se ha construido con respecto al concepto.

Juana demostró apropiación de los diferentes elementos que conforman las estructuras de tipo aditivo, el lenguaje empleado y el Mapa Conceptual construido muestran la forma como se completó la red de relaciones para el concepto, así como la integración de sus conocimientos adquiridos a los largo del proceso, para enfrentarse a situaciones del contexto que involucran las estructuras de tipo aditivo, de esta manera se observa cumplimiento de los propósitos de las fases

del modelo de van Hiele, desde el reconocimiento de sus saberes previos, hasta llegar a esta etapa de integración.

4.4.6. Matriz de códigos para Juana

El trabajo realizado por Juana, durante el desarrollo del Módulo de Aprendizaje, permitió que, en sus aportes, se identificaran códigos que posteriormente, conformaron familias de categorías que posibilitaron la descripción de la comprensión, a continuación se presentan los códigos tenidos en cuenta para cada una de las fases.

Fase 1: Información

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA JUANA | | | |
|---|--------------------------------------|--|-------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 1: Información | Colección | <p>“Están coloreadas” (Situación A.1.2.1., punto 1, entrevista).</p> <p>“Son formas geométricas” (Situación A.1.2.1., punto 2, entrevista)</p> <p>“Todos son dulces”. (Actividad A.1.1. Módulo).</p> <p>“Haciendo grupos y contando” (Punto 8, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“es un conjunto porque es un grupo (Actividad A.1.1. Módulo)</p> <p>“Se pueden representar con cualquier elemento” (Mapa)</p> | Reconocimiento de estructuras |
| | Número | <p>“Juan compró dos bombones y Sofía dos bombones”. (Punto 4, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“Juan compró dos bombones y Sofía dos bombones, es 18 porque al reunirlos y contarlos el total es 18”. (Punto 7, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“Si la profesora tiene 40 confites para repartir y no los ha repartido por eso 40 es la cantidad” (Punto 10, situación A.1.2.4. entrevista).</p> <p>“Se pueden enumerar” (Mapa)</p> | |
| | Operaciones de adición y sustracción | <p>“Sumé en la mente” (Punto 7, situación A.1.2.2., entrevista).</p> | |

| | | | |
|--|------------------------|---|---------------------------------|
| | | <p>“El conjunto que formé de Juan y Carlos daba ocho y el de Lucas y Santiago daba 10... 3 + 5 es 8 y luego 8 más 10 son 18” (Punto 7, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“10... Si todos formaban un conjunto de 18 las de Lucas y Santiago juntas eran 10... Al sumar 4 + 6 da un total de 10”. (Punto 8, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“Por si hay que agregar o disminuir la cantidad” “Se hace una operación que puede ser una suma o una resta” (Mapa)</p> | |
| | Explicación | <p>“Conté y observé”; “sumé en la mente” (Punto 7, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“Haciendo grupos y contando” (Punto 9, situación A.1.2.3., entrevista).</p> <p>“Hay seis niños porque contándolos suman 6”. (Actividad).</p> <p>“Son 10... si todas formaban un conjunto de 18, las de Lucas y Santiago juntas eran 10... al sumar 4 + 6 da un total de 10”. (Puntos 7 y 8, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“Por si hay que agregar o disminuir la cantidad”</p> <p>“Los conjuntos son una reunión de elementos” (Mapa)</p> <p>“Tienen características comunes y generales” (Mapa)</p> | Utilización del lenguaje |
| | Objetos físico | <p>“Calle, acera, puente, conjunto de elementos que se pueden pisar” (Punto 2, Actividad A.1.1).</p> <p>“Observándolos esa es la cantidad de niños” (Actividad)</p> | Relación con el entorno |
| | Características | <p>“Hay 9 triángulos porque incluye el que los conforma y los que contiene en su interior”. (Punto 1, Actividad A.1.2.).</p> <p>“Hay ocho triángulos juntando algunos de igual tamaño”. (Punto 1, Actividad A.1.2.).</p> <p>“El conjunto de Laura tiene cuadrados, triángulos y círculos” (Situación A.1.2.1., punto 3, entrevista).</p> <p>“Hay tres tipos de círculos grande, pequeño y mediano”. (Situación A.1.2.1., punto 4, entrevista).</p> | |

| | | | |
|--|--------------------|---|---|
| | Observación | <p>“Observándolos esa es la cantidad de niños” (Punto 1, Actividad A.1.3.)</p> <p>También observo de forma rectangular el palito de bombón.</p> | Solución y análisis en situaciones |
| | Proceso | <p>“Sumé en la mente”</p> <p>“Formé el grupo de Carlos con el grupo de Juan y las nombré como un conjunto, luego el de Lucas y Santiago y las nombré como otro conjunto, luego conté cuantas habían en el conjunto de Santiago y Lucas y dio un total y luego conté cuántas habían en el de Juan y Carlos, así luego sumé el total de las canicas de Santiago y Lucas y luego el de Carlos y Juan”. (Situación A.1.2.3., punto 8, entrevista).</p> | |
| | Apropiación | <p>“Ya entendí la situación... Juan compró dos bombones y Sofía dos bombones, Juan compró bolitas de chocolate y Sofía también, son dulces, todos son dulces.” (Punto 5, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“El bombón tiene forma circular y las bolitas de chocolate también”. (Punto 7, situación A.1.2.2., entrevista).</p> <p>“3 + 5 es 8 y luego 8 más 10 son 18 y así lo hice”. “Porque si todos formaban un conjunto de 18, las de Lucas y Santiago juntas eran 10... Por eso”. (Punto 8, situación A.1.2.2., entrevista).</p> | |

Tabla 2. Matriz de códigos, Juana fase 1.

Fase 2: Orientación Dirigida

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA JUANA | | | |
|---|---|---|--------------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 2: Orientación Dirigida | Colección | <p>“Hay un conjunto formado por cinco carros, tres balones, dos cometas... porque sumando los carros hay 5, sumando los balones hay 3 y sumando las cometas hay 2”. (Situación A.2.2.1., punto 4, entrevista).</p> <p>“7 triángulos y 8 cuadrados” y “El número de figuras que tiene Diego es: 15”. (Actividad A.2.5.2)</p> | Reconocimiento de estructuras |
| | Número | <p>“El número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis es mayor que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan porque 2 es mayor que 1, o 1 es menor que 2”. (Situación A.2.2.1., punto 2, entrevista).</p> | |
| | Operaciones de adición y sustracción | <p>“5... Porque al compararlas, el número de galletas que le hacen falta a Ana para tener la misma cantidad de Andrea es 5... la cantidad es 10... Ana</p> | |

| | | | |
|--|------------------------------|--|--|
| | | <p><i>tiene 5.. le faltan 5 para llegar a 10” (Situación A.2.2.6., punto 17, entrevista).</i></p> <p><i>“Porque Andrea decidió ir a comprar 5 galletas más para ajustar la misma cantidad de Andrea que es 10, y a 5 le faltan 5 para llegar a 10... La cantidad de galletas de Ana aumenta” (Situación A.2.2.6., punto 19, entrevista).</i></p> <p><i>“Al comparar el número de panes que vendió el día miércoles doña Rosa en su panadería y el día jueves la cantidad de panes que vendió el día jueves o sea 40 es mayor que la cantidad que vendió el día miércoles que son 30 panes... el día jueves vendió 10 panes más... porque 40 es mayor que 30... 50 es 10 unidades mayor que 40” (Situación A.2.2.7., puntos 20 -22, entrevista).</i></p> <p><i>“El total de láminas de la nueva caja es igual a la suma del total de láminas de la Caja 1 y 2” (Situación A.2.2.8., punto 24, entrevista).</i></p> <p><i>La sustracción sirve para disminuir” (Mapa).</i></p> | |
| | <p>Explicación</p> | <p><i>“Hice una sustracción porque me dieron una cantidad inicial y otra que era 12 y debo encontrar el aumento hallando la diferencia entre 12 y 6 así $12 - 6 = 6$”. (Situación A.2.5.5., Actividad A.2.5., punto 2).</i></p> <p><i>“Durante el juego Santiago tenía 4 canicas y se ganó 2 canicas aumentando la cantidad, y Diego tenía 4 y su cantidad disminuyó” (Situación A.2.2.9., punto 29, entrevista).</i></p> <p><i>“Juan tiene 6 bombones de chicle y Diego tiene 6... porque si Diego compró 10 bombones entre esos bombones de chicle y chocolate, luego Juan le ayudó a separarlos y cuenta que Diego tiene 4 bombones de chocolate y el resto son de chicle... el resto son 6”. (Situación A.2.2.9., punto 26, entrevista).</i></p> | <p>Utilización del lenguaje</p> |
| | <p>Espacio físico</p> | <p><i>“La situación indica que Juan para ubicar los obstáculos dio 3 pasos y que avanzó hasta la tercera piedra y por eso son 9 pasos... porque podemos contar de 3 en 3... 3, 6, 9”. (Situación A.2.2.3, punto 9, entrevista).</i></p> <p><i>“6... porque siguiendo los obstáculos le faltaban 6 pasos para llegar a la casa de David... cada obstáculo tiene 3 pasos... también se puede observar que los pasos del recorrido de la casa de Juan a la casa de David son 15, entonces Juan lleva 9 pasos y de 9 a 15 hay 6”. (Situación A.2.2.3, punto 10, entrevista).</i></p> | <p>Relación con el entorno</p> |

| | | | |
|--|------------------------|---|---|
| | | <p>“Las imágenes ayudan a hacer más fácil las sumas y las restas” (Actividad).</p> | |
| | Características | <p>“Porque observando veo que la cantidad de carros en el conjunto de juguetes de Luis es menor”. (Punto 1, entrevista, situación A.2.2.1.).</p> <p>“Tanto en la adición como en la sustracción pueden emplearse representaciones como dibujos, rectas numéricas y situaciones... Las representaciones como dibujos, rectas numéricas y situaciones ayudan a comprender. (Mapa).</p> | |
| | Observación | <p>“El número fijo que se ha añadido al valor inicial es 2... porque observando la secuencia encuentro que el número que se ha añadido es 2... Observando” (Situación A.2.2.2., punto 5, entrevista).</p> <p>“Porque hay 3 cuadros azules, 3 cuadros verdes y 4 cuadros rojos... $3 + 3 + 4 = 10$... Porque los cuadros azules eran 3, los cuadros verdes eran 3 y los cuadros rojos eran 4 al sumarlos hacen 10.” (Situación A.2.2.5., puntos.14 – 15, entrevista).</p> | |
| | Proceso | <p>“La cantidad de juguetes de Luis y la cantidad de juguetes de Juan son iguales... lo sé observándolas o sumándolas... o contándolas cada una por separado... esta es la cantidad que tiene cada una o la cantidad de ellos es igual”. (Situación A.2.2.1., punto 3, entrevista).</p> <p>“Al iniciar la secuencia hay un 2 y se va yendo hasta el final de 2 en 2... 2, 4, 6, 8, ... contando, observando... lo hago en la mente.. sumo... sumo 2... sumo otros 2”. (Situación A.2.2.2., punto 5, entrevista).</p> <p>“3... porque Juan estaba parado en el número 12 y se devolvió 3 obstáculos, o sea del 9 al 6 y llega al 3 y le faltan 3 pasos para llegar al inicio” (Situación A.2.2.4., punto 12, entrevista).</p> <p>“El niño se llamaba Juan y tenía ocho monedas en su alcancía que es la cantidad, luego, el domingo colocó 12 monedas y los reunió y le dio una cantidad llamada 20, $8 + 12 = 20$” (Actividad)</p> | Solución y análisis en situaciones |
| | Apropiación | <p>“Se sabe que para rellenar el triángulo grande</p> | |

| | | | |
|--|------------------|---|--|
| | | <p>se necesitan 16 triángulos pequeños. El número de triángulos pequeños que hacen falta para completar el triángulo grande es: 7</p> <p>“Si se quiere hacer un triángulo más grande, el número de triángulos pequeños que se deben agregar para formar otra fila en la base es: 9” “hay que aumentarla” ... la secuencia va de dos en dos”. (Actividad)</p> <p>“Utilicé la cantidad siete y la cantidad 8, las reuní, $7+8=15$, porque $7+7$ es 14, entonces $7+8=15$.” (Actividad)</p> | |
| | Argumento | <p>“La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es menor en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente... Porque Diego inicialmente tenía 6 canicas y guardó 2 de ellas y le quedaron 4, y 4 es menor que la cantidad 6”. (Situación A.2.2.10., punto 28, entrevista).</p> <p>“El 3 representa los niños que no asistieron a clases porque según la situación ese día faltaron tres estudiantes”.</p> | |

Tabla 3. Matriz de códigos, Juana fase 2.

Fase 3: Explicitación

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA JUANA | | | |
|---|--------------------------------------|--|-------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 3: Explicitación | Operaciones de adición y sustracción | <p>“La forma apropiada para calcular la disminución presentada en el número de globos es $8 - 5 = 3$... porque la cantidad inicial de globos es 8, la otra cantidad después de explotarlos con una aguja es 5 y el resultado es 3... porque disminuyeron, quitándose las cantidades y se realizan con la operación de la sustracción”. (Situación A.3.1.1., entrevista, punto 3).</p> <p>“Daniel ganó cromos, porque antes de jugar tenía 6 cromos y al final tenía 10, o sea que aumentó... Daniel estaba jugando y la cantidad inicial de cromos eran 6 y luego aumentó el número de cromos” (Situación A.3.1.2., punto 4, entrevista).</p> <p>“El aumento en los cromos se calcula $10 - 6 = 4$, porque al comparar las cantidades esa es mi respuesta” (Situación A.3.1.2., punto 5, entrevista).</p> <p>“Para saber cuánta cantidad aumento cojo la cantidad mayor que es 10 y le quito la cantidad inicial que es 6 y me da 4” (Situación A.3.1.2., punto 6, entrevista).</p> <p>“El cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea menor que la inicial” (Actividad</p> | Reconocimiento de estructuras |

| | | | |
|--|------------------------|--|---|
| | | A.3.2., situación A.3.2.1.). “El cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea mayor que la inicial” (Actividad A.3.2., situación A.3.2.2.). | |
| | Explicación | “El cambio representado en el conjunto final de globos en relación con el conjunto inicial hace que la cantidad... disminuya... porque al iniciar la situación dicen que habían 8 globos y luego la situación dice que hay 5... (Situación A.3.1.1., punto 1, Entrevista). “Juan si realiza bien el cálculo porque Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso los 8 carros, quedando un grupo de 4 balones... porque analizando la situación tenía 12 juguetes y los separo, empezando con los 8 carros entonces a 8 le faltan 4 que son los 4 balones. (Situación A.3.1.2., punto 7, entrevista). | Utilización del lenguaje |
| | Características | “Tienen la misma cantidad”, “ocho es mayor que tres” (Actividad A.3.2). | Relación con el entorno |
| | Observación | “Había siete fichas de color rosado y le agregan 9 azules o sea que hay un nuevo conjunto de 16 fichas de colores” (Actividad A.3.3.1). “Hay un conjunto de 16 fichas de colores, luego ‘separaron’ las 7 rosadas que habían, de las azules y quedaron 9 de color azul”. | |
| | Proceso | “La cantidad que representa el aumento de cromos es 4... porque al comparar las dos cantidades que la inicial es 6 y al final 10, vemos que a 6 le faltan 4 para llegar a 10... a través de una sustracción. (Entrevista, Situación A.3.1.2., puntos 5 y 6). | Solución y análisis de situaciones |
| | Argumento | “La cantidad que representa la disminución es: 3... porque el resultado de la sustracción $8 - 5$ es 3... 8 que es la cantidad inicial y 5 que es la cantidad de globos que quedaron”. (Entrevista, situación A.3.1.1., punto 2). | |

Tabla 4. Matriz de códigos, Juana fase 3.

Fase 4: Orientación Libre

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA JUANA | | | |
|---|--------------------------------------|--|------------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 4: Orientación Libre | Colección | “ $8 + 6 = 14$, porque al adicionar o al contar la cantidad de círculos en el conjunto A con la cantidad del conjunto B los cuadrados me da como resultado 14. Se agrupan.... Los círculos y los cuadrados, 8 círculos y 6 cuadrados que suman 14.” (Situación A.4.1.1., punto 1, entrevista). | Reconocimiento de estructuras |
| | Operaciones de adición y sustracción | “La adición $450 + 1800$ porque Juan debía hacer una adición para saber cuánto costaba la leche y las galletas”, luego “Cuánto vale la bolsa de leche y las galletas y para saberlo hay que hacer una adición”. (Juana realiza la sustracción) (Situación A.4.1.8., puntos 9 y 10, entrevista) | |
| | Explicación | “La operación indicada es una sustracción porque la cantidad inicial fue 12 y la cantidad final 4, entonces yo retiré a 12 las 4 nuezitas y me dio 8”, también lo hizo con otras situaciones: “ $8 + 6 = 14$ porque al adicionar la cantidad de círculos en el conjunto A con la cantidad del conjunto B los cuadrados me da como resultado 14”. (Situación A.4.1.2, puntos 2 y 3, entrevista). “Se agrupan... los círculos y los cuadrados... 8 círculos y 6 cuadrados que suman 14”. (Situación A.4.1.1., punto 1, entrevista). | Utilización del lenguaje |
| | Características | “Está representada por 13 bombones menos 5, o sea que la cantidad que le dio el amigo de Camilo que fueron 5 bombones... Porque 13 era la cantidad inicial y 8 es la cantidad final, hice una sustracción y a 13 le quito 8 es un total de 5” (Situación A.4.1.3., punto 4, entrevista). | Relación con el entorno |
| | Observación | “Porque hay 7 panes, ya que hay una cantidad inicial de panes que es de 35 y otra cantidad final que es de 28 panes y si a 35 le quito 28 es un total de 7 panes, $35 - 28 = 7$ ”. (Situación A.4.1.4., punto 5, entrevista). “Porque Diana le ha añadido 2 triángulos a la figura inicial. Al observar la cantidad inicial que es 2 y completó en total 4 triángulos, la cantidad final que es 4” (Situación A.4.1.5., en el punto 6, entrevista). | |
| | Proceso | “Porque Andrés explicó la situación con números, quedando así: $5+8=13$ y la d Felipe que representó la situación con imágenes (figuras de color morado) y la situación de Juan es una recta numérica incorrecta arrancando en 7 y terminando en 12 siendo las cantidades 7 y 5 y Diego representó con confites e hizo $5 + 13 = 8$ como cantidad final y también era incorrecto” (Situación A.4.1.6., punto 7, entrevista). | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 5. Matriz de códigos, Juana fase 4.

Fase 5: Integración

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA JUANA | | | |
|---|--------------------------------------|---|------------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 5: Integración | Colección | “Carros, balones y cometas tienen la característica de juguetes, triángulos y cuadrados tienen las características de figuras geométricas y nueces, bombones y bolitas de chocolate tienen la característica de dulces” (Situación A.5.1.1., en el punto 1, entrevista). | Reconocimiento de estructuras |
| | Operaciones de adición y sustracción | “La respuesta adecuada es: el aumento que se ha presentado en la cantidad de personas que visitaron la piscina durante los dos fines de semana, porque teníamos que hacer una sustracción para saber el aumento del número de personas que hubo en los fines de semana”. (Situación A.5.1.6., punto 9, entrevista). “Diana tiene en cuenta la característica “bombones de chocolate” para formar su colección, porque Diana tenía 8 bombones y decidió separar los bombones de chocolate utilizando la característica “bombones de chocolate”, una sustracción que vendría a ser $8 - 4 = 4$ bombones de chicle”. (Situación A.5.1.4., punto 7, entrevista). | |
| | Explicación | “Aumenta porque si Juan tiene una cantidad y le agrega o le aumenta más el cambio que ocurre es que aumenta”. (Situación A.5.1.1., punto 4, entrevista). | Utilización del lenguaje |
| | Observación | “Se presentan elementos de las mismas características, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación, que hace que la cantidad de canicas de cristal aumente, porque al observar el dibujo o representación visual, se ve que Daniel antes de jugar tenía 8 canicas y después de jugar tenía 12 canicas eso hace que la cantidad aumente y me doy cuenta haciendo una sustracción $12 - 8 = 4$ ”. “... ocurre la transformación porque estamos hablando de objetos de la misma categoría”. (Situación A.5.1.4., punto 6, entrevista). | Relación con el entorno |
| | Apropiación | “La operación adecuada Una adición porque permite calcular el aumento en la cantidad inicial de monedas, porque ocho monedas que tenía, 4 que le regala su tío, al hacer la adición: $8 + 4 = 12$ se puede saber cuál es el aumento ocurrido. (Situación A.5.1.5., punto 8, entrevista). | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 6. Matriz de códigos, Juana fase 5.

4.5.Caso Dos (David)

David se caracterizó por su espontaneidad e interés en apropiarse de términos matemáticos adecuados. Se identificó por su capacidad de crítica y constante curiosidad ante las situaciones planteadas en el desarrollo del módulo.

4.5.1. Fase 1: Información

El desarrollo de experiencias de aprendizaje de esta fase permitió a David reconocer sus saberes previos en relación con el concepto de estructuras de tipo aditivo, allí demostró curiosidad por reconocer el material y estrategias a emplear durante el desarrollo de las mismas.

4.5.1.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

A partir de la información recolectada en esta fase, se observaron los conocimientos de David, acerca de los elementos que conforman las estructuras de tipo aditivo, en respuestas como las presentadas en la situación A.1.2.1., punto 3, de la entrevista: *“Hay tres conjuntos, porque hay unos más pequeños, medianos y grandes”*. De esta forma ilustró como desde la separación de objetos, de acuerdo a sus características, es posible formar colecciones. Al presentarse la situación A.1.2.2., punto 4, con elementos de características comunes, como es el caso de los dulces, argumentó: *“Reúnen los bombones, nucas y bolitas de chocolate, para formar un conjunto más grande... porque son dulces”*, así, formó colecciones teniendo en cuenta sus características e hizo referencia a la acción de ‘reunir’, propia de las estructuras de tipo aditivo, además asignó cantidades numéricas a las colecciones presentadas, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 4, construido en la fase 1.

4.5.1.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Las actividades para la fase 1 conllevaron a David a ilustrar sus conocimientos sobre conceptos como: Colección, número y uso de las operaciones de adición y sustracción. Allí se observó naturalidad en las respuestas, donde identificó características comunes en una colección de elementos, de acuerdo con lo propuesto en el descriptor 1, formulado para esta fase, con expresiones como: “...*están coloreadas. Otra característica es que hay triángulos, cuadrados y círculos, hay elementos, son figuras geométricas*” de acuerdo al punto 1 de la situación A.1.2.1., de la entrevista socrática, del Módulo de Aprendizaje.

Situaciones como la A.1.2.3., presentada en la entrevista, en el punto 9, llevaron a David a dar respuestas como: “*hay que sumar... los reuní y los conté*”. De esta manera, se evidenció el reconocimiento de la adición como un proceso que permite reunir cantidades y el conteo como estrategia común para hallar la solución.

En las interacciones de esta fase, se observó que aunque David no utilizó un amplio lenguaje, presentó expresiones acordes con las acciones cotidianas, ilustrando el reconocimiento de conceptos a utilizar en el desarrollo de las experiencias.

4.5.1.3. Categoría: Relación con el entorno

Respecto a las representaciones visuales, David manifestó que su uso hacía más factible la interpretación de los problemas. En el punto 1, de la actividad A.1.4., afirma: “*hay seis niños, un balón y dos nubes*” y en el punto 4 de la misma situación: “*hay siete juegos*”, también en la situación A.1.2.1., punto 2, de la entrevista: “*tienen formas de cuadrado, círculo y triángulo*”. David realizó agrupaciones teniendo en cuenta características comunes entre los elementos, así pudo confirmarse el cumplimiento de los descriptores 2 y 3 de la fase 1. Además, las respuestas presentadas, dan cuenta de la importancia otorgada al aspecto visual y su influencia en la motivación para solucionar las diversas situaciones.

4.5.1.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

Al presentar la situación A.1.2.3., del punto 8, de la entrevista, David afirmó: “*reuniéndolas, sumé, $3+4=7$, luego $7+5=12$ y $12+6=18$, porque al reunir las canicas da 18*”. Se observó un proceso repetitivo para hallar la solución, realizando agrupaciones parciales para obtener finalmente la cantidad total, acciones que están relacionadas con el concepto de número, operaciones de adición y sustracción, así se observó el cumplimiento del descriptor 5, de la fase 1.

Observar la forma como David se enfrentó a las diversas situaciones propuestas, permitió reconocer los saberes previos que posee el estudiante en relación con las estructuras de tipo aditivo, su curiosidad y espontaneidad a la hora de compartir información con el docente permitió el reconocimiento del material y estrategias a emplear durante la implementación de las experiencias propuestas para cada fase, de esta forma se cumplió el propósito de esta fase de acuerdo con los planteamientos desde el modelo de van Hiele.

4.5.2. Fase 2: Orientación Dirigida

En esta fase David estuvo atento a las distintas situaciones que incluían la componente visual – geométrica y enunciados de tipo verbal. Participó de las tareas y buscó relaciones entre los conceptos, en las diferentes situaciones presentadas.

4.5.2.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

En la situación A.2.2.1., en el punto 4, David se enfrentó al reconocimiento de las características propias de las estructuras de tipo aditivo, respuestas como: “*Hay un conjunto formado por cinco carros, tres balones, dos cometas... el tío les dio los juguetes iguales en cantidad, cinco y cinco y en total hay 10 juguetes*”, indican la relación que estableció entre los

dos grupos de juguetes considerando sus partes como un todo. Pudo reunir los cinco elementos de cada grupo como un conjunto total de juguetes y, además estableció una relación de igualdad entre las cantidades de ambas colecciones.

David reconoció las estructuras en situaciones que incluían la componente visual – geométrica y enunciados de tipo verbal. Al presentar dos colecciones pudo establecer cuál tenía más elementos, determinando cuál era la cantidad adicional, donde pudo observarse el cumplimiento del descriptor 4, propuesto para esta fase. En el punto 2, correspondiente a la actividad A.2.3., afirmó: *“En el conjunto de los árboles del lado izquierdo del camino se encuentra 1 árbol más que en el conjunto de los árboles del lado derecho del camino... En el conjunto de árboles del lado derecho del camino se encuentra 1 árbol menos que en el conjunto de los árboles del lado izquierdo del camino”*.

En experiencias que implicaban la exteriorización de expresiones verbales, determinó la cantidad que resultaba al reunir elementos. La situación A.2.5.1., presentada en la actividad A.2.5., lo llevaron a afirmar lo siguiente: *“7 triángulos y 8 cuadrados... El número de figuras que tiene Diego es: 15”*, en este sentido, se cumplió el descriptor 5, construido para la fase 2, donde se tienen en cuenta las acciones de separar y reunir, a partir de la identificación de características comunes. En el punto 2, correspondiente a la actividad A.2.3.: *“La cantidad total de árboles que se observa en el parque, teniendo en cuenta el conjunto de los árboles del lado izquierdo y el conjunto de los árboles del lado derecho del camino es: 7”*. Se observó que David asignaba una cantidad al total de la colección a partir de su reunión, recurriendo a la adición.

Al observar la ubicación en la recta numérica en la situación A.2.4.4., correspondiente a la actividad A.2.4., del módulo de aprendizaje, expresó: *“La rana se encuentra en la posición 12 de la recta numérica y da un primer salto hacia la izquierda para intentar atrapar a la mosca. Cuando la rana da el primer salto la mosca se ubica en la posición: 9”*. Allí, David recurrió al conteo con el fin de hallar la diferencia: *“12-11-10- 9”*. Posteriormente, en la situación planteada en A.2.4.5., afirmó: *“Felipe dio un paso y se ubicó en el número 1, luego dio un primer salto hacia la derecha... La cantidad numérica que representa el primer salto de Felipe desde la*

posición 1 hasta su nueva posición es 4". Se puede concluir que a partir de la utilización de la recta numérica, realizó cálculos y definió una posición asumiendo que los desplazamientos hacia la izquierda eran cada vez "menores" y hacia la derecha cada vez más "grandes".

En la presentación de secuencias, estableció el número fijo que se había añadido para generarla. En la situación A.2.2.2., en el punto 5, de la entrevista afirmó: "*cuenta de a 2, o sea que la respuesta es la c, el número fijo que se ha añadido al valor inicial es 2, porque voy multiplicando de 2 en 2... el 12 sigue de 10*" y en la actividad A.2.3., en el punto 1: "*la secuencia va de dos en dos, lo que hay que hacer es engrandecerlo, aumenta de a 2*". Los anteriores argumentos hacen referencia a una estructura geométrica como herramienta para comprender elementos de las estructuras de tipo aditivo.

4.5.2.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Al presentar situaciones que correspondían a la categoría transformación, David respecto al punto 19 de la situación A.2.2.6., argumentó lo siguiente: "*la cantidad final de galletas de Ana cambia, presentándose un aumento en el número que representaba la cantidad inicial, porque Ana tenía 5 y quiso comprar otras galletas para tener la misma cantidad que Andrea... la cantidad aumentó*" y respecto a los puntos 27-29 de la situación A.2.2.9.: "*La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es menor en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente... Diego guardó 2 canicas, porque son 6 canicas y Diego guarda 2 canicas lo que hace es disminuir... por eso la cantidad es menor... Diego tenía 6 y su amigo 4, Diego disminuyó para tener las mismas que su amigo... Al terminar el juego Santiago tiene en sus manos 6 canicas, Santiago ganó 2 canicas*". Se puede concluir que David estableció la cantidad que se añadió a otra. De igual manera, determinó cuando ocurrió una disminución, comparó cantidades y estableció cuánto le faltaba o sobraba a una cantidad para ser igual a otra, este lenguaje empleado, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 6, de la fase 2.

En el punto 24, de la situación A.2.2.8., correspondiente a la entrevista expresó: "*El total de láminas de la nueva caja es igual a la suma del total de láminas de la Caja 1 y 2... porque en la*

..

caja nueva reunieron, aumentaron las fichas de la caja 1 y la caja 2". Estos argumentos implican que las acciones de reunir o separar cantidades involucran la categoría de composición, la cual es un eje fundamental de las estructuras de tipo aditivo.

4.5.2.3. Categoría: Relación con el entorno

David estableció relaciones con el contexto y articuló las situaciones presentadas con actividades de su vida cotidiana. Después de analizar la situación A.2.2.3., en los puntos 7-10, plasmó respuestas como las presentadas en el fragmento expuesto a continuación:

“El número de pasos entre salto y salto es 3, porque para ir hasta la casa de David, pero contando en saltos, con piedras, Juan lo hizo saltando de a tres pasos.

“El número que representa los pasos que avanza Juan, hasta encontrarse con David, cuando Juan está en la tercera piedra son 9, porque mientras iba dando los pasos contaba pasos, pero saltando sobre las piedras... 3 veces 3”.

“A Juan le hacen falta son 6 pasos, porque los pasos son de a tres y le faltan 2 piedras para llegar a la casa de David”.

“La cantidad es 2, porque David estaba en la piedra tercera y a Juan le faltaban dos piedras para llegar a casa de David, cada piedra corresponde a 3 pasos”.

Las respuestas presentadas por David permitieron observar como estableció la equivalencia de una cantidad en relación con otra, teniendo en cuenta la componente visual – geométrica en una situación del contexto. De igual forma, David determinó aspectos relacionados con la composición de una cantidad a partir de una representación visual – geométrica planteada en los puntos 14-15 de la situación A.2.2.5.: *“En el azul hay 3, en el verde 3 y en el rojo 4 cuadros... 3 + 3 + 4 = 10... porque del 3 le sumo azul y a los 3 del verde y le sumo 4 y me da 10... la cantidad que se descompone es 10 porque a 3 le sumo 3 y me da 6 le sumo 4 y me da 10”*, de esta manera se confirma el descriptor 3, de la fase 2, donde la orientación consideró la

..

componente visual – geométrica para que David utilizara la composición para representar una cantidad.

4.5.2.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

David comparó cantidades y estableció cuál tenía mayor o menor cantidad de acuerdo al conjunto representado, dentro del análisis de situaciones aparecieron justificaciones como las presentadas en la situación A.2.2.1., en el punto 2 de la entrevista como la siguiente: *“Juan tiene tres carros y Luis tiene 2 carros, entonces, el tío quiso como... comparar para que uno tuviera más de un juguete y el otro tuviera más de otro juguete y así les dio cantidades iguales”*, y en la situación A.2.5.4., correspondiente a la actividad A.2.5.: *“Felipe tenía 9 canicas de cristal para jugar. Durante el descanso perdió 5. El número de canicas que le quedaron es 4... La cantidad inicial de canicas que tenía Felipe para jugar es 9... La cantidad de canicas que Felipe perdió es 5 ... “resté, como una cantidad era menos, entonces resté 9 menos 5 y me dio 4”*.

De esta manera se observó que, David, reconoció la forma adecuada para dar solución a una situación, en la cual, ocurre un aumento o disminución de una cantidad, observándose el cumplimiento de los descriptores 1 y 4, construidos para la fase 2.

En los puntos 1 y 2, correspondientes a la situación A.2.2.1., de la entrevista, presentó explicaciones sobre los hechos ocurridos de la siguiente forma: *“El número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis es mayor que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan... porque Luis tiene 2 balones y Juan tiene 1, 2 es mayor que 1”*. *“El número de carros en el conjunto de los juguetes de Luis es menor que el número de carros que en el conjunto de los juguetes de Juan... porque Juan tiene más y Luis tiene menos carros... Juan tiene 3 y Luis tiene 2...3 es mayor que 2”*. Estos argumentos dejan en evidencia que David, al comparar dos cantidades, pudo identificar cuál es menor o mayor.

El proceso de orientación dirigida y el desempeño de David en la ejecución de las diferentes acciones para las situaciones propuestas en la experiencia de la fase 2, permite afirmar la pertinencia del uso de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, pues durante esta fase David se acercó a los conceptos y propiedades que forman parte de las estructuras de tipo aditivo, reconociendo características de las categorías de composición y transformación y fortaleció sus conocimientos en relación con los conceptos de número, colección y operaciones de adición y sustracción.

4.5.3. Fase 3: Explicitación

El intercambio de ideas en las experiencias desarrolladas en esta fase, permitieron a David apoyarse en las categorías de composición y transformación, encontrándose que, al desarrollar situaciones que involucraban las operaciones de adición y sustracción, era necesario considerar al aumento, disminución, reunión y separación de cantidades, articulándolas a la operación matemática correspondiente.

4.5.3.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Al presentar la situación A.3.1.2., en los puntos 7 y 8, David recurrió a la adición o sustracción para hallar su solución, expresiones como: *“Juan tenía 12 juguetes, y su hermana los separó. En carros había 8... y le aumentó 4 para llegar a 12... ejemplo 8 carros y 4 balones, se suman, el 8 y el 4... Para llegar... 8 más 4 da 12... 12 juguetes”*, fueron presentadas por David a partir del intercambio de ideas, donde hizo explícitas sus estrategias, para dar solución a situaciones, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 3, construido en la fase 3. Luego en la situación A.3.7., punto 15, justificó: *“15 – 8 = 7... El regaló... 7, él tenía 15 y regaló 7 y le quedaron 8... lo sé disminuyendo... el 15... Al ocho... una resta... 15 – 8 igual a 7”*. Estas expresiones, dejan en evidencia la construcción y el reconocimiento de las operaciones de suma y resta como una estructura.

4.5.3.2. Categoría: Utilización del lenguaje

En la situación A.3.1.2., presentada en el punto 4, David comparó cantidades e hizo referencia a una cantidad inicial y a otra final como puede observarse a continuación: *“Tenía 6 y al final tenía 10... el 10 es mayor que 6... eso significa que lo que ocurrió con la cantidad fue...que aumentó”*. Adicionalmente, describió con sus palabras los sucesos ocurridos en la situación A.3.4., en los puntos 10 -12: *“Los huevos que se rompieron implicó que la cantidad inicial que Luis había comprado disminuyera... porque al tropezar se le reventaron 6.... Y le entregó a su mamá 9, entonces la cantidad que compró fueron 15, y se le disminuyó 6... Para saber la cantidad de huevos que compró sumo $9 + 6 = 15$... porque 9 es la cantidad de huevos que le entregó a su mamá y 6... hice una suma porque 9 le sumo 6 me quedan 15.”*

Se observó que David estaba en la capacidad de determinar el efecto ocurrido en una situación que implicaba transformación. Adicionalmente, participó de espacios de socialización, donde intercambió ideas con otros compañeros y refinó su lenguaje. Argumentó lo ocurrido y analizó la operación utilizada demostrando la red de relaciones construida en torno al concepto. Él realizó sus propias explicaciones sobre las situaciones y expuso ante sus compañeros, empleando un lenguaje claro y acorde con las categorías de composición y transformación, verificando así el cumplimiento del descriptor 2, construido para la fase 3.

4.5.3.3. Categoría: Relación con el entorno

El reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, articulado a situaciones del contexto, estuvo apoyado en las representaciones visuales empleadas en el desarrollo de las actividades. En la situación A.3.1.5., en el punto 13, David afirmó: *“La operación matemática que permite hallar el total de metros que debe recorrer María, desde la escuela hasta la casa de Ana, es $9 + 4 = 13$... porque los metros para llegar a la casa de Ana son 9... 10 que es uno, 11 que es dos, 12 que es tres y 13 que es cuatro...”*. *“Desde que salen de la escuela hay 13 metros porque conté... Primero recorre 9 de su escuela y después recorre 4... Entonces... $9 + 4 = 13$ ”* y en la

..

situación A.3.1.6., en el punto 14 de la entrevista: *“La tía Marta, vive en el piso... subió hasta el piso 13 y luego... se devolvió hasta el piso 7... ahhh... 7 pisos más abajo... debe hacer una resta... 13 menos... 7 igual a 6... Carlos hizo una sustracción”*, fue así como argumentó las operaciones empleadas en cada caso. También hizo descripciones teniendo en cuenta lo observado en la situación A.3.1.2., en el punto 4: *“En la figura inicial observo seis cromos y en la figura final observo 10... El cambio representado en el conjunto final de cromos en relación con el conjunto inicial hace que la cantidad a, aumente... antes tenía 6, y al terminar de jugar le quedaron... se le aumentó 10”*.

David participó del intercambio de ideas entre sus compañeros, estableció relaciones con el contexto haciendo énfasis en las características del entorno físico y algunas traslaciones dadas en el mismo en forma de acciones como: Subir, bajar, desplazar hacia la izquierda y/o hacia la derecha. Adicionalmente, propuso algunas situaciones teniendo en cuenta las características del entorno, empleando las estructuras de tipo aditivo, verificando el cumplimiento del descriptor 4, construido en la fase 3.

4.5.3.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En la entrevista socrática propuesta en el Módulo de Aprendizaje, se encontraron diferentes aportes que mostraron el desempeño de David frente a las situaciones. A través del intercambio de ideas con los demás compañeros, describió los cambios observados en una situación, verificándose el cumplimiento al descriptor 1, de la fase 3, dando cuenta de la red de relaciones construida a lo largo del proceso, como puede apreciarse a continuación:

En la situación A.3.1.1., del punto 1, David manifestó: *“Al inicio tenían 8 globos y explotaron 3 con una aguja y le quedaron 5... restando... 8 y el 5... ocho menos cinco me quedan tres”*. Luego en la situación A.3.1.2., en el punto 5: *“la cantidad aumentó en cuatro...porque cuando el 6 le aumentan es porque el 4 fueron las fichas que le dieron para llegar a 10... Lo que hice fue sumar, el 6 y el 4... no... una sustracción.... con el 6 y con el*

..

10... a 6 le sumo... No... a 10 le quito 6, me quedan 4". Además en la situación A.3.1.8., punto 16: "la operación matemática es $12 - 5 = 7$... no, el 7 más 5 igual a 12... Porque al 7 le sumamos 5 y me quedan 12... Porque él tenía 7 y la mamá le regaló 5 y le quedan 12. Porque 7 más 5 me da 12. También argumentó respecto a los puntos 2 y 3, de la situación A.3.1.1.: "La cantidad que representa la disminución es b, 3...porque explotaron 3 globos... La forma apropiada para calcular la disminución presentada en el número de globos es la resta... la d. $8 - 5 = 3$... porque al principio habían 8 globos y le disminuyó y le quedaron 5, y le quité 3, ve... y le quité 5 y me quedan 3".

Se observó que David determinó los cambios ocurridos, a partir de un adecuado uso de las operaciones básicas. Argumentó el porqué de sus respuestas y la pertinencia de emplear, adecuadamente, las operaciones básicas de suma y resta para solucionar las situaciones planteadas.

El desempeño de David en la fase 3, permite afirmar el cumplimiento de los propósitos de la misma, ya que a partir de la interacción con sus compañeros fue posible la apropiación de los conocimientos relacionados con las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo. Además, con el lenguaje empleado, demostró el enriquecimiento de la red de relaciones construida en torno al concepto.

4.5.4. Fase 4: Orientación Libre

En esta fase David aplicó los conocimientos adquiridos, se apropió de diferentes estrategias y creó herramientas con el fin de plantear y resolver situaciones que involucraban el concepto objeto de estudio.

4.5.4.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

David demostró el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo teniendo en cuenta sus distintas representaciones, empleó diversas estrategias y se apropió tanto de las operaciones entre conjuntos, como de operaciones básicas de adición y sustracción para dar solución a las situaciones planteadas, de esta manera se observó el cumplimiento del descriptor 1, construido en la fase 4, como se presenta a continuación:

En la entrevista, en la situación A.4.1.2., en el punto 2, manifestó: *“El número de elementos que le hace falta al conjunto N para ser igual al conjunto D es 8 porque a 4 le faltan 8 para llegar a 12, resto 12 que es la cantidad total menos 4 y quedan... se resuelve con una sustracción porque 12 menos 4 da 8”*. Lo anterior implica que David presentó solución a la situación empleando el concepto de complemento de un conjunto, estableciendo a su vez la operación matemática adecuada, particularmente la sustracción.

4.5.4.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Los argumentos expuestos por el estudiante, dan cuenta del cumplimiento del descriptor 5 propuesto para esta fase. En la situación A.4.1.8., en los puntos 9 y 10, expuso: *“se puede solucionar empleando la adición $450 + 1800$, porque Juan debía hacer una adición para saber cuánto costaba la leche y las galletas... debe saber cuánto vale la bolsa de leche y las galletas y para saberlo hay que hacer una adición y luego una sustracción para saber cuánto le sobra $2500 - 2250$ ”*. El lenguaje empleado por David permitió observar sus habilidades para dar solución a situaciones en contexto, utilizando las operaciones indicadas y explicando el porqué del uso de las mismas.

La apropiación de vocabulario se hizo evidente cuando hablaba sobre las estructuras de tipo aditivo, utilizando correctamente, las categorías de composición y transformación.

El siguiente Mapa Conceptual ilustra algunos de los argumentos expuestos por David.

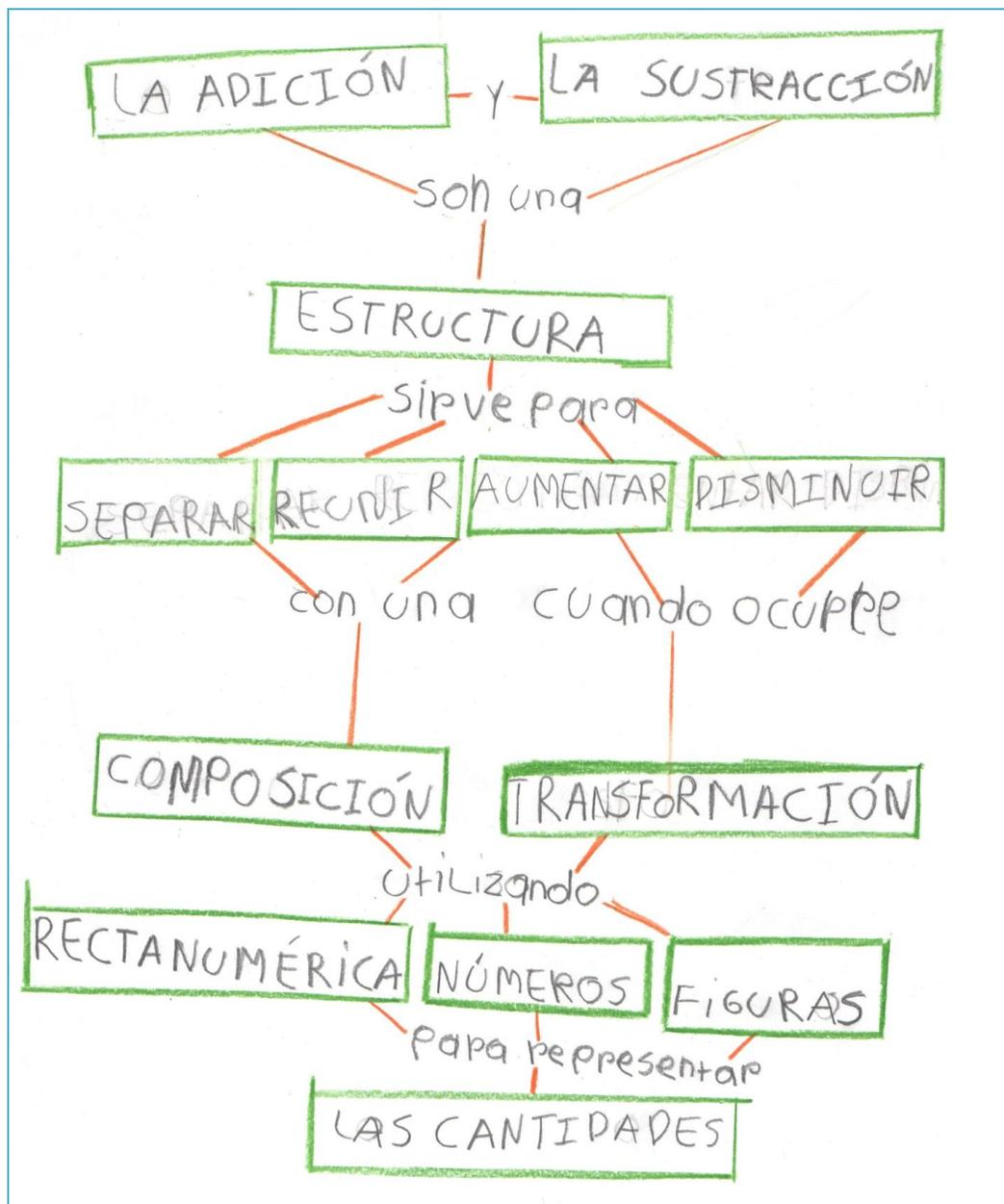


Ilustración 16. Mapa de la fase 4 construido por David.

4.5.4.3. Categoría: Relación con el entorno

Al presentar a David la situación A.4.1.3., de enunciado verbal del punto 4, cuya solución se representó apoyada en la componente visual, se encontró lo siguiente:

Entrevistador: *La siguiente es una situación a partir de un enunciado verbal “Mi mamá me dio 13 bombones, le regalé algunos a Camilo y me han quedado 8”.*

Observa las imágenes que representan la situación y responde:

La imagen que mejor representa la situación anterior es:

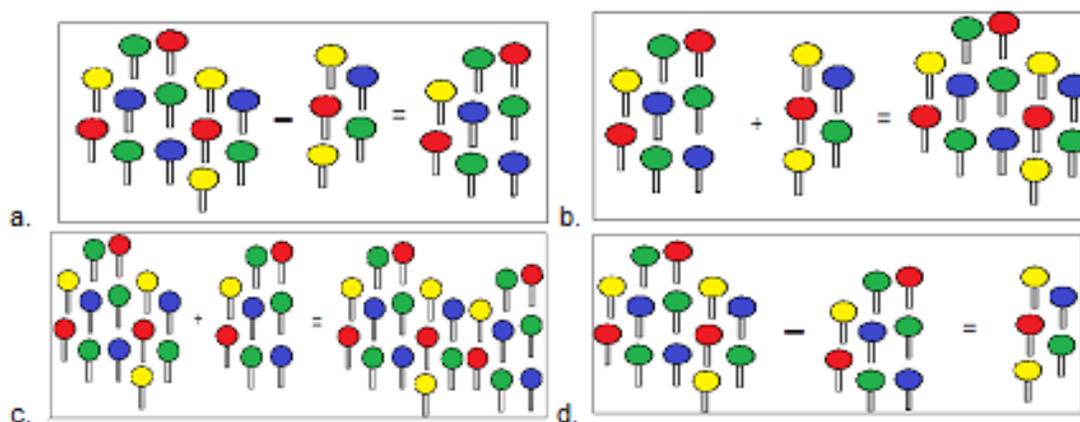


Ilustración 17. Representación de una situación a partir de un conjunto de bombones.

Estudiante: *Es la d.*

Entrevistador: *Puedes explicarme tu respuesta.*

Estudiante: *“la d. porque a 13 le disminuyó 8 y me da 5, 13 es la cantidad inicial y 8 la final”.*

Se observó claridad en los argumentos de David. Él, a partir del apoyo de la componente visual – geométrica en una situación del entorno, no solo estableció la solución indicada, sino que explicó lo ocurrido. Adicionalmente, determinó a partir de la representación, qué cantidad numérica indicaba la cantidad inicial y la final, de esta forma se evidenció la apropiación de las categorías de composición y transformación a partir de situaciones en contexto, verificándose el cumplimiento al descriptor 3, propuesto para esta fase.

4.5.4.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En esta fase David analizó distintas formas de encontrar solución a una situación e indicó cuál era la respuesta adecuada. Disfrutó la oportunidad de presentar situaciones propias, en la actividad A.4.3., en el punto 2, haciendo evidente su apropiación de las categorías de composición y transformación, como se observa a continuación:

Toma las fichas sueltas de las figuras geométricas y construye una nueva figura. Plantea tres situaciones que involucren la adición y sustracción.

Situación 1: El muñeco estaba celebrando se le cayó el sombrero, tenía 7 fichas y le van que dado 6 ¿cuántas fichas formaban el sombrero?

$$1 = 7 - \frac{6}{1}$$

Situación 2: En la celebración le pegaron al muñeco un par de zapatos ¿cuántas fichas tiene el muñeco?

$$2 = 7 + \frac{2}{9}$$

Situación 3: _____

Ilustración 18. Situaciones presentadas por David, fase 4.

Además, en esta fase, David se enfrentó a situaciones estructuradas en correspondencia con las características de la fase de orientación libre. Interactuó con distintos materiales y herramientas, como: regletas, representaciones geométricas, conjuntos y aspectos numéricos, con el fin de dar solución a los problemas planteados. El estudiante verificó el cumplimiento del descriptor 4, propuesto para esta fase.

Al presentar diferentes tareas en el desarrollo de esta fase, David se enfrentó a ellas empleando sus propios planteamientos, cuya solución requería del uso de las operaciones de adición y sustracción. Además el mapa conceptual construido, permitió observar la forma como se ha acrecentando su estructura mental alrededor de las estructuras de tipo aditivo, de esta manera puede observarse el cumplimiento del propósito de la fase 4.

4.5.5. Fase 5: Integración

Durante las experiencias realizadas en esta fase, David consolidó sus conocimientos. Empleó procedimientos e hizo explícitos sus argumentos en correspondencia con los aprendizajes adquiridos.

4.5.5.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

David manifestó apropiación de los conceptos que integran las estructuras de tipo aditivo, tales como: colección, número y categorías de composición y transformación, al utilizarlos en la solución de situaciones, cumplió el descriptor 1, propuesto para esta fase. En el punto 1, de la situación A.5.1.1., correspondiente a la entrevista, expuso lo siguiente: *“Los elementos que conforman los conjuntos son: Carros, balones y cometas; triángulos y cuadrados; nucas, bombones y bolitas de chocolate”*, en el punto 2: *“Las cantidades numéricas que identifican los conjuntos de figuras geométricas, juguetes y dulces, respectivamente son: 7, 11 y 10 porque habían 7 figuras geométricas, 11 juguetes y 10 dulces”*.

La apropiación de las categorías de composición y transformación, a partir de las estrategias desarrolladas, durante el trabajo del Módulo de Aprendizaje, permitió dar solución a situaciones que involucraban las estructuras de tipo aditivo, reconociendo las mismas como una estructura en la cual ocurrían cambios que hacían aumentar o disminuir la cantidad de elementos pertenecientes a un conjunto.

4.5.5.2. Categoría: Utilización del lenguaje

David construyó una red de relaciones en torno a las estructuras de tipo aditivo, la cual implicaba la pertinencia de la utilización de las operaciones básicas de suma y resta en la solución de situaciones matemáticas, esta red hizo evidente su capacidad argumentativa,

analizando y explicando los procesos empleados, así se verificó el cumplimiento del descriptor 4, propuesto para esta fase de aprendizaje, como puede apreciarse en la situación A.5.1.5., en el punto 8:

Entrevistador: *Escucha la siguiente situación: “Diego tiene ocho monedas, su tío Carlos le regala cuatro más”.*

Estudiante: *Si señora.*

Entrevistador: *De acuerdo con el planteamiento anterior, la operación adecuada para hallar la solución a la situación planteada es:*

- a. Una resta porque se pregunta por la cantidad final de monedas.*
- b. Una adición porque permite calcular el aumento en la cantidad inicial de monedas.*
- c. Una adición porque se está preguntando por la disminución en una cantidad inicial de monedas.*
- d. Una resta porque ha disminuido la cantidad inicial de monedas.*

Estudiante: *Es la b.*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *Es la b, porque la cantidad inicial es 8 y le dieron 4 es igual a 12, $8 + 4 = 12$.*

Los anteriores argumentos, dejan en evidencia la asimilación de conceptos por parte de David, en cuanto a las categorías de composición y transformación, éstas permitieron enriquecer su vocabulario y abordar conceptos como: cantidad inicial, cantidad final, reunión, separación, aumento y disminución de cantidades, las cuales favorecieron el refinamiento del lenguaje y permitieron argumentaciones más coherentes.

4.5.5.3. Categoría: Relación con el entorno

En la Entrevista de Carácter Socrático, David en el punto 5, manifestó lo siguiente:

Situación A.5.1.2.

Felipe sale a montar en su patineta, avanza 13 metros, a su regreso sufre una caída en el metro 6.

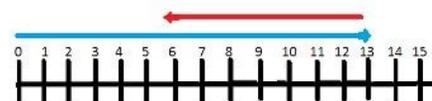


Ilustración 19. Representación del desplazamiento de Felipe en su patineta.

Entrevistador: *A continuación se presenta una situación y a partir de ella debes dar respuesta a algunas preguntas:*

Entrevistador: *Le queda claro lo ocurrido en la situación.*

Estudiante: *Sí señora.*

Entrevistador: *Bien, ahora escucha: La operación adecuada para calcular la posición final, en relación con la posición inicial, hasta el lugar de la caída, de Felipe es:*

a. $6 + 7 = 13$

b. $13 + 6 = 21$

c. $13 - 6 = 7$

d. $13 - 7 = 6$

Estudiante: *La correcta es la d.*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *es d, porque avanzó 13 metros y al devolverse se cayó cuando había avanzado 7 metros.*

Entrevistador: *Justifica la operación empleada.*

Estudiante: *Es una resta porque me están preguntando por la diferencia entre la posición inicial y la posición final, entonces se resta: $13 - 7 = 6$... que son los metros que le faltan para llegar al lugar donde inició.*

Se puede observar que el apoyo en la componente visual – geométrica, permitió a David solucionar la situación, ésta componente implicó la utilización adecuada de las operaciones de suma y resta en situaciones del contexto, de tal manera que favorecieran el reconocimiento de las estructuras en situaciones cotidianas. David interpretó las situaciones de tipo aditivo a partir de sus representaciones, verificándose el cumplimiento del descriptor 2, construido en la fase 5.

4.5.5.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

Se observó un desempeño adecuado por parte de David a la hora de dar soluciones, esto se puede ver en aportes respecto a la situación A.5.1.3., del punto 6:

“Es adecuada la c: Se presentan elementos de la misma naturaleza, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación, que hace que la cantidad de canicas de cristal aumente. Esta es la respuesta porque antes de jugar tenía 8 y después de jugar aumentó y ya tiene 12”.

Respecto a los argumentos anteriores, se puede decir que David demostró claridad frente a la solución de las situaciones planteadas, exhibiendo el cumplimiento del descriptor 3, correspondiente a la fase 5, al diferenciar las situaciones que corresponden a las categorías de composición y transformación, no sólo realizando cálculos numéricos, sino explicando lo ocurrido e indicando la operación adecuada para la respuesta. Adicionalmente, consideró la componente visual – geométrica como una representación que sirve para observar diferentes detalles de la situación.

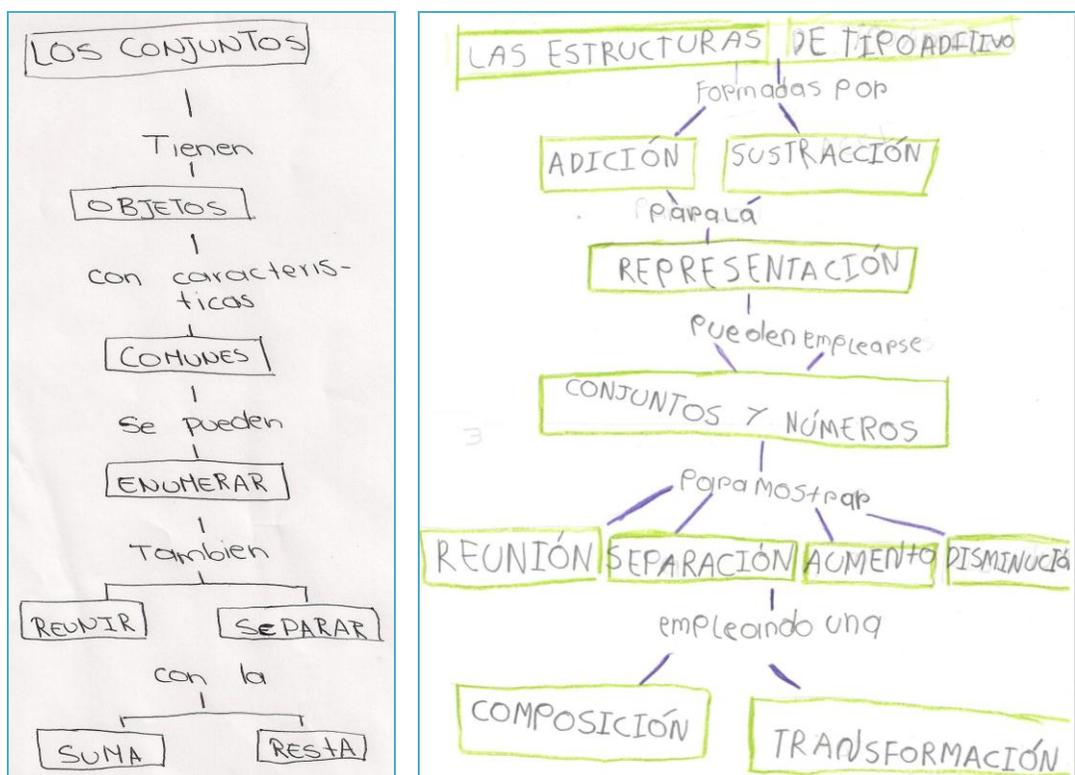


Ilustración 20. Mapas construidos por David en las fases 1 y 5.

Los mapas construidos por David, tanto en la fase 1, como en la fase 5, permiten observar sus construcciones mentales, de acuerdo con las estructuras de tipo aditivo, en la fase cinco, es posible reconocer mayor apropiación y organización de la información, así como la comprensión de las acciones, a las cuales remiten las categorías de composición y transformación y sus distintas representaciones.

David se enfrentó a las situaciones propuestas para la fase 5, mostrando la consolidación de la red de relaciones en torno al concepto de las estructuras de tipo aditivo. Los argumentos expuestos y la forma como se enfrentó a las diversas situaciones, permite confirmar la pertinencia de la secuencialidad de las fases del modelo de van Hiele en el aprendizaje de los conceptos, particularmente de los conceptos matemáticos con una componente visual-geométrica.

4.5.6. Matriz de códigos para David

David permitió la identificación de códigos durante el desarrollo del Módulo de Aprendizaje. Estos códigos fueron agrupados en familias de categorías que posibilitaron el análisis de la comprensión. A continuación se presentan los códigos obtenidos para cada una de las fases.

Fase 1: Información

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA DAVID | | | |
|---|-------------|--|-----------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 1: información | Colección | <p><i>“Hay tres conjuntos, porque hay unos más pequeños, medianos y grandes”. (Situación A.1.2.1., punto 3, de la entrevista)</i></p> <p><i>“Reúnen los bombones, nucas y bolitas de chocolate, para formar un conjunto más grande... porque son dulces”, (Situación A.1.2.2., punto 4).</i></p> | Reconocimiento de las estructuras |
| | Explicación | <p><i>“...Están coloreadas. Otra característica es que hay triángulos, cuadrados y círculos, hay elementos, son figuras geométricas” (Punto 1, situación A.1.2.1 Entrevista).</i></p> | Utilización del lenguaje |
| | Argumento | <p><i>“hay que sumar... los reuní y los conté”.</i></p> | |

| | | | |
|--|------------------------|---|---|
| | | (Situación A.1.2.3., entrevista, punto 9). | |
| | Objetos físicos | “Hay seis niños, un balón y dos nubes” (Punto 1, de la actividad A.1.4.). | Relación con el entorno |
| | Características | “Hay en 7 juegos” (Punto 4, de la actividad A.1.4.). | |
| | Observación | “Tienen formas de cuadrado, círculo y triángulo”. (Situación A.1.2.1., punto 2, entrevista). | |
| | Proceso | “Reuniéndolas, sumé, $3+4=7$, luego $7+5=12$ y $12+6=18$, porque al reunir las canicas da 18”. (Situación A.1.2.3., del punto 3, entrevista). | Análisis y solución de situaciones |

Tabla 7. Matriz de códigos, David fase 1.

Fase 2: Orientación Dirigida

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA DAVID | | | |
|---|-----------|---|--|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 2: Orientación Dirigida | Colección | <p>“La b, un conjunto formado por cinco carros, tres balones, dos cometas..., porque el tío les dio los juguetes... iguales en cantidad cinco y cinco y en total hay 10 juguetes” (Situación A.2.2.1., punto 4, Entrevista).</p> <p>“En el conjunto de los árboles del lado izquierdo del camino se encuentra 1 árbol más que en el conjunto de los árboles del lado derecho del camino... En el conjunto de árboles del lado derecho del camino se encuentra 1 árbol menos que en el conjunto de los árboles del lado izquierdo del camino”. (Punto 2, Actividad A.2.3.).</p> <p>“7 triángulos y 8 cuadrados... El número de figuras que tiene Diego es: 15” (Situación A.2.5.1., Actividad A.2.5.).</p> <p>“La cantidad total de árboles que se observa en el parque, teniendo en cuenta el conjunto de los árboles del lado izquierdo y el conjunto de los árboles del lado derecho del camino es: 7”. (Punto 2, Actividad A.2.3).</p> | Reconocimiento de las estructuras |
| | | <p>“La secuencia va de dos en dos, lo que hay que hacer es engrandecerlo, aumenta de a 2”. (Actividad A.2.3., punto 1).</p> <p>“Cuenta de a 2, o sea que la respuesta es la c, el número fijo que se ha añadido al valor inicial es 2, porque voy multiplicando de 2 en 2... el 12 sigue de 10” (situación A.2.2.2., punto 5, entrevista).</p> <p>“La rana se encuentra en la posición 12 de la recta numérica y da un primer salto hacia la</p> | |

| | | | |
|--------------------------------------|-------------|--|---|
| | | <p>izquierda para intentar atrapar a la mosca. Cuando la rana da el primer salto la mosca se ubica en la posición: 9". (Situación A.2.4.4., Actividad A.2.4.).</p> <p>"Felipe dio un paso y se ubicó en el número 1, luego dio un primer salto hacia la derecha... La cantidad numérica que representa el primer salto de Felipe desde la posición 1 hasta su nueva posición es 4". (Situación A.2.4.5).</p> | |
| Operaciones de adición y sustracción | | <p>"En el azul hay 3, en el verde 3 y en el rojo 4 cuadros... $3 + 3 + 4 = 10$... porque del 3 le sumo azul y a los 3 del verde y le sumo 4 y me da 10... la cantidad que se descompone es 10 porque a 3 le sumo 3 y me da 6 le sumo 4 y me da 10 (Situación A.2.2.5., puntos 14-16, entrevista).</p> <p>"a, La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose un aumento en el número que representaba la cantidad inicial, porque Ana tenía 5 y quiso comprar otras galletas para tener la misma cantidad que Andrea... la cantidad aumentó" (Situación A.2.2.6., punto 19, entrevista).</p> <p>"b, El número de panes vendidos por doña Rosa en los tres días es 120, porque doña Rosa va aumentando de 10 en 10... $30 + 40 + 50$ y me da 120" (Situación A.2.2.7., punto 20, entrevista).</p> <p>"b, El total de láminas de la nueva caja es igual a la suma del total de láminas de la Caja 1 y 2... porque en la caja nueva reunieron, aumentaron las fichas de la caja 1 y la caja 2" (Situación A.2.2.8., punto 24, entrevista).</p> <p>"La d 23, si Juan reúne en un solo conjunto los bombones completa 23, porque Juan con su amigo Diego aumentaron los bombones, sumé 10 de Diego y 13 de Juan". (Situación A.2.2.9.punto 25, entrevista),</p> <p>D, porque Diego tiene 6 bombones de chicle, 10 bombones era el total y habían 4 de chocolate, porque los conté $10 - 4$ son 6," (Situación A.2.2.9.punto 26, entrevista).</p> | |
| | Explicación | | <p>"La cantidad final de galletas de Ana cambia, presentándose un aumento en el número que representaba la cantidad inicial, porque Ana tenía 5 y quiso comprar otras galletas para tener la misma cantidad que Andrea... la cantidad aumentó" (Punto 19, situación A.2.2.6.).</p> <p>"La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es menor en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente... Diego guardó 2 canicas, porque son 6 canicas y Diego guarda 2 canicas lo que</p> |

| | | | |
|--|-------------------------------|---|---------------------------------------|
| | | <p><i>hace es disminuir... por eso la cantidad es menor... Diego tenía 6 y su amigo 4, Diego disminuyó para tener las mismas que su amigo... Al terminar el juego Santiago tiene en sus manos 6 canicas, Santiago ganó 2 canicas". (Puntos 27-29, situación A.2.2.9, Entrevista).</i></p> <p><i>"El total de láminas de la nueva caja es igual a la suma del total de láminas de la Caja 1 y 2... porque en la caja nueva reunieron, aumentaron las fichas de la caja 1 y la caja 2". (Punto 24, situación A.2.2.8., entrevista).</i></p> | |
| | <p>Objetos físicos</p> | <p><i>"El número de pasos entre salto y salto es 3, porque para ir hasta la casa de David, pero contando en saltos, con piedras, Juan lo hizo saltando de a tres pasos". (Situación A.2.2.3., punto 7, Entrevista).</i></p> <p><i>"El número que representa los pasos que avanza Juan, hasta encontrarse con David, cuando Juan está en la tercera piedra son 9, porque mientras iba dando los pasos contaba pasos, pero saltando sobre las piedras... 3 veces 3". Situación A.2.2.3., punto 8, Entrevista).</i></p> <p><i>"A Juan le hacen falta son 6 pasos, porque los pasos son de a tres y le faltan 2 piedras para llegar a la casa de David". Situación A.2.2.3., punto 9, Entrevista).</i></p> <p><i>"La cantidad es 2, porque David estaba en la piedra tercera y a Juan le faltaban dos piedras para llegar a casa de David, cada piedra corresponde a 3 pasos". Situación A.2.2.3., punto 10, Entrevista).</i></p> | <p>Relación con el entorno</p> |
| | <p>Características</p> | <p><i>"Para rellenar el triángulo grande se necesitan 16 triángulos pequeños. El número de triángulos pequeños que hacen falta para completar el triángulo grande es: "7 porque conté" (Actividad A.2.3).</i></p> <p><i>"Si se quiere hacer un triángulo más grande, el número de triángulos pequeños que se deben agregar para formar otra fila en la base es: 9" (Actividad A.2.3).</i></p> <p><i>Asigna característica común a los elementos "son figuras geométricas" (Actividad A.2.3).</i></p> | |
| | <p>Observación</p> | <p><i>"En el azul hay 3, en el verde 3 y en el rojo 4 cuadros... $3 + 3 + 4 = 10$ (Punto 14, situación A.2.2.5, Entrevista).</i></p> <p><i>"Porque del 3 le sumo azul y a los 3 del verde y le sumo 4 y me da 10... la cantidad que se descompone es 10 porque a 3 le sumo 3 y me da 6 le sumo 4 y me da 10". (Punto 15, situación A.2.2.5,</i></p> | |

| | | | |
|--|----------------|--|---|
| | | <i>Entrevista).</i> | |
| | Proceso | <p><i>“Juan tiene tres carros y Luis tiene 2 carros, entonces, el tío quiso como... comparar para que uno tuviera más de un juguete y el otro tuviera más de otro juguete y así les dio cantidades iguales” (Situación A.2.2.1., punto 2, entrevista).</i></p> <p><i>“Felipe tenía 9 canicas de cristal para jugar. Durante el descanso perdió 5. El número de canicas que le quedaron es 4... La cantidad inicial de canicas que tenía Felipe para jugar es 9... La cantidad de canicas que Felipe perdió es 5... “resté, como una cantidad era menos, entonces resté 9 menos 5 y me dio 4”. (Situación A.2.5.4., Actividad A.2.5.)</i></p> <p><i>“El número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis es mayor que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan... porque Luis tiene 2 balones y Juan tiene 1, 2 es mayor que 1”. (Punto 1, situación A.2.2.1., entrevista).</i></p> <p><i>“El número de carros en el conjunto de los juguetes de Luis es menor que el número de carros que en el conjunto de los juguetes de Juan... porque Juan tiene más y Luis tiene menos carros... Juan tiene 3 y Luis tiene 2...3 es mayor que 2”. (Punto 2, situación A.2.2.1., entrevista).</i></p> <p><i>“La b, la cantidad de juguetes de Luis y la cantidad de juguetes de Juan son iguales. Porque los juguetes de Juan, tiene tres carros, una cometa y un balón.. La cantidad de los juguetes de Luis son una cometa, dos balones y dos carros... tienen los juguetes algunos repetidos... como le explicara yo... el total de Juan es 5 y de Luis es 5, son cantidades iguales”. (Punto 3, situación A.2.2.1., entrevista).</i></p> | Solución y análisis en situaciones |

Tabla 8. Matriz de códigos, David fase 2.

Fase 3: Explicitación

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA DAVID | | | |
|--|---|--|--|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 3: Explicitación | Colección | <i>“Juan tenía 12 juguetes, y su hermana los separó. En carros había 8... y le aumentó 4 para llegar a 12... ejemplo 8 carros y 4 balones, se suman, el 8 y el 4... Para llegar... 8 más 4 da 12... 12 juguetes”. (Situación A.3.1.2., en los puntos 7 y 8, entrevista).</i> | Reconocimiento de las estructuras |
| | Número | <i>“12 – 8 = 4, porque a 12 se le disminuye 8 y quedan 4” (Situación A.3.1.2., en los punto 9, entrevista).</i> | |
| | Operaciones de adición y sustracción | <i>“15 – 8 = 7... El regaló... 7, él tenía 15 y regaló 7 y le quedaron 8... lo sé disminuyendo... el</i> | |

| | | | |
|--|-------------------------------|---|--|
| | | <p>15... Al ocho... una resta... $15 - 8$ igual a 7 (Situación A.3.7., punto 15).</p> <p>“La forma apropiada de calcular el aumento presentado en el número de cromos es d, $10 - 6 = 4$... porque al 10 se le disminuye 6 para que quede 4.... Porque 10 es la cantidad al terminar, y el 6 es la cantidad al iniciar, entonces a 10 le quito 6 y me quedan 4” (Situación A.3.1.2., punto 6, entrevista).</p> | |
| | <p>Explicación</p> | <p>“Tenía 6 y al final tenía 10... el 10 es mayor que 6... eso significa que lo que ocurrió con la cantidad fue...que aumentó”. (Situación A.3.1.2., punto 4, entrevista).</p> <p>“Los huevos que se rompieron implicó que la cantidad inicial que Luis había comprado disminuyera” (Situación A.3.4., punto 10, entrevista).</p> <p>“Porque al tropezar se le reventaron 6.... Y le entregó a su mamá 9, entonces la cantidad que compró fueron 15, y se le disminuyó 6” (Situación A.3.4., punto 11, entrevista).</p> <p>“Para saber la cantidad de huevos que compró sumo $9 + 6 = 15$” (Situación A.3.4., punto 12 entrevista).</p> <p>“Porque 9 es la cantidad de huevos que le entregó a su mamá y 6... hice una suma porque 9 le sumo 6 me quedan 15.” (Situación A.3.4., puntos 12, entrevista).</p> | <p>Utilización del lenguaje</p> |
| | <p>Objetos físicos</p> | <p>“La operación matemática que permite hallar el total de metros que debe recorrer María, desde la escuela hasta la casa de Ana, es $9 + 4 = 13$... porque los metros para llegar a la casa de Ana son 9 ... 10 que es uno, 11 que es dos, 12 que es tres y 13 que es cuatro...”. Desde que salen de la escuela hay 13 metros porque conté... Primero recorre 9 de su escuela y después recorre 4... Entonces... $9 + 4 = 13$” (Situación A.3.1.5., punto 13, Entrevista).</p> <p>“La tía Marta, vive en el piso... subió hasta el piso 13 y luego... se devolvió hasta el piso 7... ahhh 7 pisos más abajo... debe hacer una resta... 13 menos... 7 igual a 6... Carlos hizo una sustracción” (Situación A.3.1.6, punto 14, entrevista).</p> | <p>Relación con el entorno</p> |
| | <p>Características</p> | <p>“Juan construye un edificio de 3 pisos, luego decide aumentar su número y obtiene un edificio de 5 pisos... Porque él tenía 3 y le aumentó 2 y le quedaron 5”. (Situación A.3.1.9., punto 19, entrevista)</p> | |

| | | | |
|--|--------------------|---|---|
| | Observación | <p>La figura representa el número de cromos que Daniel tiene antes de jugar y al finalizar el juego. “En la figura inicial observo seis cromos y en la figura final observo 10... El cambio representado en el conjunto final de cromos en relación con el conjunto inicial hace que la cantidad a, aumente... antes tenía 6, y al terminar de jugar le quedaron... se le aumentó 10”. (Situación A.3.1.2., punto 4, entrevista).</p> | Solución y análisis de situaciones |
| | Proceso | <p>“Al inicio tenían 8 globos y explotaron 3 con una aguja y le quedaron 5... restando... 8 y el 5... ocho menos cinco me quedan tres”. (Situación A.3.1.1., punto 1, entrevista).</p> <p>“la cantidad aumentó en cuatro... porque cuando el 6 le aumentan es porque el 4 fueron las fichas que le dieron para llegar a 10... Lo que hice fue sumar, el 6 y el 4... no... una sustracción... Con el 6 y con el 10... a 6 le sumo... No... a 10 le quito 6, me quedan 4”. (Situación A.3.1.2., punto 5, entrevista).</p> <p>“$12 - 5 = 7$... no, el 7 más 5 igual a 12... Porque al 7 le sumamos 5 y me quedan 12... Porque él tenía 7 y la mamá le regaló 5 y le quedan 12. Porque 7 más 5 me da 12 (Situación A.3.1.8., punto 16, entrevista - enunciado verbal).</p> <p>“La cantidad que representa la disminución es b, 3... porque explotaron 3 globos... La forma apropiada para calcular la disminución presentada en el número de globos es la resta... la d. $8 - 5 = 3$... porque al principio habían 8 globos y le disminuyó y le quedaron 5, y le quité 3, ve... y le quité 5 y me quedan 3” (Situación A.3.1.1, punto 2-3, entrevista).</p> | |

Tabla 9. Matriz de códigos, David fase 3.

Fase 4: Orientación Libre

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA DAVID | | | |
|--|---|---|--|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 4: Orientación libre | Operaciones de adición y sustracción | <p>“El número de elementos que le hace falta al conjunto N para ser igual al conjunto D es 8 porque a 4 le faltan 8 para llegar a 12, resto 12 que es la cantidad total menos 4 y quedan... se resuelve con una sustracción porque 12 menos 4 da 8”. (Situación A.4.1.2., punto 2, entrevista).</p> | Reconocimiento de las estructuras |
| | Explicación | <p>“Se puede solucionar empleando la adición $450 + 1800$, porque Juan debía hacer una adición para saber cuánto costaba la leche y las galletas... Debe saber cuánto vale la bolsa de leche y las galletas y para saberlo hay que hacer una adición y luego una</p> | Utilización del lenguaje |

| | | | |
|--|--------------------|--|---|
| | | <i>sustracción para saber cuánto le sobra 2500 – 2250”. (Situación A.4.1.8., puntos 9 y 10, entrevista).</i> | |
| | Observación | <i>“Es la d, porque a 13 le disminuyó 8 y me da 5, 13 es la cantidad inicial y 8 la final. (Situación A.4.1.3., punto 4, entrevista).</i> | Relación con el entorno |
| | Proposición | <i>“El muñeco estaba celebrando, se le cayó el sombrero, si tenía siete fichas y le han quedado 6, ¿cuántas fichas formaban el sombrero? (Actividad A.4.3., en el punto 2)</i> | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 10. Matriz de códigos, David fase 4.

Fase 5: Integración

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA DAVID | | | |
|---|--------------------|---|---|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 5: Integración | Colección | <i>“Los elementos que conforman los conjuntos son: Carros, balones y cometas; triángulos y cuadrados; nucas, bombones y bolitas de chocolate”. (Situación A.5.1.1., punto 1, entrevista).</i> <i>“Las cantidades numéricas que identifican los conjuntos de figuras geométricas, juguetes y dulces, respectivamente son: 7, 11 y 10 porque habían 7 figuras geométricas, 11 juguetes y 10 dulces”. (Situación A.5.1.1., punto 2, entrevista).</i> | Reconocimiento de las estructuras |
| | Argumento | <i>“Es la b, porque la cantidad inicial es 8 y le dieron 4 es igual a 12, $8 + 4 = 12$. (Situación A.5.1.5., punto 8, entrevista).</i> <i>Es d, porque avanzó 13 metros y al devolverse se cayó cuando había avanzado 7 metros. (Situación A.5.1.2., punto 5, entrevista)</i> | Utilización del lenguaje |
| | Explicación | <i>Es una resta porque me están preguntando por la diferencia entre la posición inicial y la posición final, entonces se resta: $13 - 7 = 6$... que son los metros que le faltan para llegar al lugar donde inició. (Situación A.5.1.2., punto 5, entrevista)</i> | |
| | Observación | <i>“ Es la b, porque la cantidad inicial es 8 y le dieron 4 es igual a 12, $8 + 4 = 12$.</i> <i>Es d, porque avanzó 13 metros y al devolverse se cayó cuando había avanzado 7 metros... Es una resta porque me están preguntando por la diferencia entre la posición inicial y la posición final, entonces se resta: $13 - 7 = 6$... que son los metros que le faltan para llegar al lugar donde inició. (Situación A.5.1.2., punto 5, entrevista)</i> | Relación con el entorno |
| | Proceso | <i>Es d, porque avanzó 13 metros y al devolverse se cayó cuando había avanzado 7 metros. (Situación A.5.1.2., punto 5, entrevista)</i> | Solución y análisis de situaciones |

| | | | |
|--|--|---|--|
| | | <p><i>“Es adecuada la c: Se presentan elementos de la misma naturaleza, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación, que hace que la cantidad de canicas de cristal aumente. Esta es la respuesta porque antes de jugar tenía 8 y después de jugar aumentó y ya tiene 12”. (Situación A.5.1.3., punto 6, entrevista).</i></p> | |
|--|--|---|--|

Tabla 11. Matriz de códigos, David fase 5.

4.6. Caso tres (Camila)

Camila, en un comienzo se notó un poco tímida, sin embargo, a medida que se fue familiarizando con la realización de las actividades demostró, de manera abierta, sus argumentos e hizo inferencias ante las diversas situaciones.

4.6.1. Fase 1: Información

En esta fase, Camila expuso los argumentos previos en relación al concepto y se familiarizó con las estrategias a emplear a lo largo del desarrollo del Módulo de Aprendizaje.

4.6.1.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Para identificar los saberes previos de Camila, en relación con las estructuras de tipo aditivo, se le presentó la actividad A.1.3., del punto 2. Ella argumentó lo siguiente: *“Hay dos triángulos pequeños más uno grande”, “un rectángulo de forma vertical más dos derechos... horizontal”, “cuatro cuadrados más dos rectángulos”*. Los anteriores argumentos dan cuenta del reconocimiento inicial de una estructura, por parte de Camila, donde identifica sus partes y asigna cantidades numéricas a diferentes colecciones, de esta forma pudo visualizarse el cumplimiento del descriptor 4, de la fase 1.

4.6.1.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Camila, al enfrentarse a cuestionamientos como los planteados en los puntos 5 y 6, de la situación A.1.2.2., de la entrevista afirmó: *“Es un conjunto porque son dulces... hay bombones y bolitas de chocolate... forman un con conjunto porque son circulares”*. Estos argumentos dan cuenta de que Camila reconoce las características comunes de los objetos y con base en ellas realiza agrupaciones e inferencias, de acuerdo con lo propuesto en el descriptor1, formulado para esta fase.

La construcción de un Mapa Conceptual por parte de Camila dejó en evidencia los aspectos asimilados, tales como: Elementos de un conjunto, agrupación y separación. Relacionó la suma con el ejercicio de juntar elementos y la resta con la acción de separar.

4.6.1.3. Categoría: Relación con el entorno

El apoyo en las características de los objetos del entorno, permitió a Camila realizar diversas interpretaciones. En el punto 2 de la actividad A.1.1., afirmó: *“es un conjunto porque está conformado por cosas del baño”*, *“es un conjunto porque está conformado por dulces... personas... objetos de cocina”*; y en el punto 2, de la actividad A.1.3.: *“dos triángulos pequeños más uno grande”*, *“un rectángulo de forma vertical más dos derechos... horizontal”* y *“cuatro cuadrados más dos rectángulos”*.

De esta manera se observó que, Camila, reconocía características comunes de las colecciones de acuerdo a su relación con el espacio, la posición, el tamaño y la forma, donde se cumplieron los propósitos de los descriptores 2 y 3 de la fase 1.

4.6.1.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En la situación A.1.2.3., del punto 8 de la entrevista se expuso lo siguiente:

Entrevistador: *Observa y analiza la siguiente situación para dar respuesta a una pregunta:*

Juan, Carlos, Lucas y Santiago se encuentran jugando con canicas de cristal en el patio de la escuela, para su juego: Carlos tiene 3 canicas de cristal negras, Lucas 4 de colores, Juan 5 transparentes y Santiago 6 de colores.

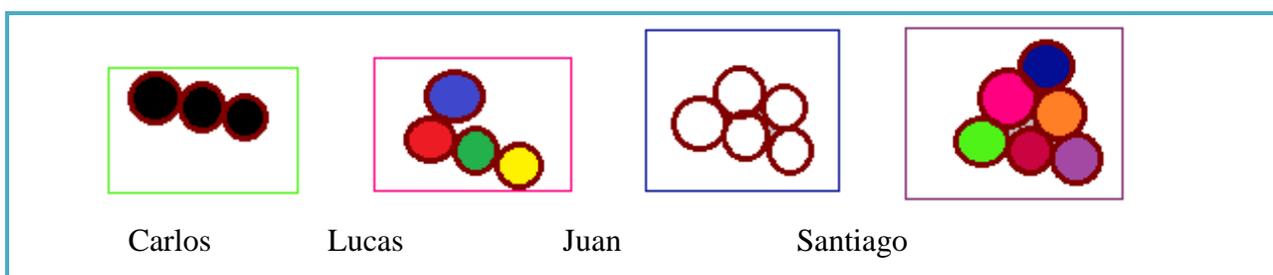


Ilustración 21. Canicas de cristal empleadas para el juego.

Entrevistador: *Después de observar los conjuntos formados por las canicas de Santiago, Juan, Carlos y Lucas, responde:*

Al reunir en un solo conjunto las canicas de Juan, Carlos, Lucas y Santiago, el número que representa el conjunto total de canicas es:

- 10
- 3
- 18
- 5

Entrevistador: *La respuesta adecuada es:*

Estudiante: *Entre todos hay 18.*

Entrevistador: *Para saber que hay 18, la situación la resolviste...*

Estudiante: *Contando...*

Entrevistador: *Otra acción que se podría realizar para hallar la solución es...*

Estudiante: *Ninguna...*

Entrevistador: *Cuando se presentan este tipo de situaciones en clases de Matemáticas, la forma de resolver este tipo de situaciones es...*

Estudiante: *quitando...*

Entrevistador: *Para reunir las lo que haces es...*

Estudiante: *un conjunto...*

Entrevistador: *Puede formar conjuntos y para saber que hay 18 canicas, también lo puedo hacer...*

Estudiante: *contando... porque las conté... sumando.*

Los aportes de Camila ilustran que reunió los elementos de varias agrupaciones asignando una cantidad total a la colección, fue así como se observó el cumplimiento del descriptor 5, de la fase 1. Ella realizó acciones respecto a la categoría de composición de las estructuras de tipo aditivo, reuniendo las partes para formar el todo de una colección.

Al indagar sobre del proceso realizado, mencionó el conteo como actividad propia para la solución. Posteriormente, al realizar nuevas preguntas, mencionó acciones como quitar, juntar y finalmente sumar.

Abordar los conceptos de número y colección, así como situaciones que involucran acciones relacionadas con las operaciones de adición y sustracción, permitió evidenciar los saberes previos que poseía Camila. Además, el acercamiento con el docente permitió informar los conceptos, material a utilizar y metodología a emplear para abordar el concepto de las estructuras de tipo aditivo, de esta manera se cumplió el propósito de la fase de información de acuerdo con el modelo de van Hiele.

4.6.2. Fase 2: Orientación Dirigida

En esta fase se presentó y dirigió, la experiencia de aprendizaje, posibilitando a la estudiante, establecer relaciones entre sus saberes y los conocimientos presentados, con respecto

..

a las estructuras de tipo aditivo. De esta manera amplió la red de relaciones construida en torno al concepto.

4.6.2.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Camila efectuó procesos relacionados con el reconocimiento de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo a través de una experiencia dirigida, estas acciones realizadas, permiten afirmar el cumplimiento del descriptor 5, construido para la fase 2, respecto a la categoría de composición, en el punto 23, se enfrentó a la situación A.2.2.8., en la cual se debían reunir láminas de dos cajas en una nueva caja, allí describió lo ocurrido dando las siguientes respuestas: *“El total de láminas de la nueva caja es 22... en la caja 1 habían 13 y en la caja 2 habían 9... las junté en la nueva caja... quedaron 22... para juntarlas lo que hice fue contarlas y sumarlas... Porque si junto las fichas, las de allá quedaron vacías y la nueva quedó llena... sumé $13 + 9$ y me dio 22... o sea que es lo mismo agregarlas todas en la misma caja que sumar el total de láminas”*. De esta manera, se pudo constatar como Camila, realizó acciones propias de esta categoría, afirmando que para hallar el total de láminas se hizo una suma, relacionando el proceso realizado con la acción de agregar una cantidad a otra.

Otra experiencia que permitió evidenciar el reconocimiento de las estructuras por parte de Camila fue planteada en la situación A.2.2.1., en el punto 3, allí manifestó: *“... Porque tiene los mismos, tiene los mismos casi los mismos juguetes... Porque uno tiene dos carros, dos balones y una cometa... y otro tiene tres carritos una cometa y un balón... Cinco juguetes cada uno... esas cantidades son iguales... Porque son cinco carros dos cometas y tres balones... Porque los conté...sumar... Sumo la cantidad de carros, contando”*. Con estas acciones se observó que a partir de dos colecciones se forman subconjuntos reuniendo los elementos con características comunes, donde es posible asignar un número a cada grupo y establecer relaciones entre las cantidades.

Camila también determinó la cantidad fija que se añade a un valor inicial para formar una secuencia, con argumentos como los siguientes, respecto a los puntos 5 y 6, de la situación

..

A.2.2.2.: “... el valor es 2, porque es de dos en dos... el 12 está ubicado después del 10... el 16, después del 14... el 15 antes de 16, el número que se añade a la secuencia es 2... va de dos en dos... Uno más uno”.

4.6.2.2. Categoría: Utilización del lenguaje

Camila participó de las actividades describiendo cuándo debe realizarse un aumento o una disminución de una cantidad. Esto se hizo explícito en el lenguaje empleado en la solución de cada una de las situaciones y permitió verificar el cumplimiento del descriptor 6, propuesto para esta fase, donde la orientación dirigida buscó que la estudiante reconociera los cambios ocurridos en una estructura que conllevan al aumento o disminución de una cantidad, como se observa a continuación:

Sobre la situación A.2.2.7., en los puntos 20 – 22, expresó: “*La cantidad total es 120... sumé $30 + 40 + 50$ y me dio 120... la cantidad vendida el jueves es mayor que la cantidad vendida el miércoles, porque el número 40 es mayor que el 30... el jueves vendió 10 panes adicionales, porque conté los números... de 10 en 10... conté el 30 y el 40... o sea que el jueves vendió 10 panes más que el miércoles*”. Se puede concluir como Camila realizó los cálculos pertinentes y describió la situación explicando los cambios ocurridos. Además, durante su participación en el desarrollo de actividades, entrevista y construcción de mapas conceptuales, demostró refinamiento de su lenguaje, acorde con los conceptos abordados desde las estructuras de tipo aditivo y sus categorías de composición y transformación.

4.6.2.3. Categoría: Relación con el entorno

Al presentar la situación A.2.2.3., que involucraban la componente visual – geométrica en situaciones del contexto, en el punto 7, Camila aportó: “*El número de pasos que hay entre salto y salto es 3... porque Juan contó los tres pasos... y luego saltó...colocó las piedras*”, esto indica la relación establecida entre la distancia y cada obstáculo.

A continuación, puede observarse, nuevamente, la relación que Camila establece en una situación similar planteada en los puntos 14 - 15:

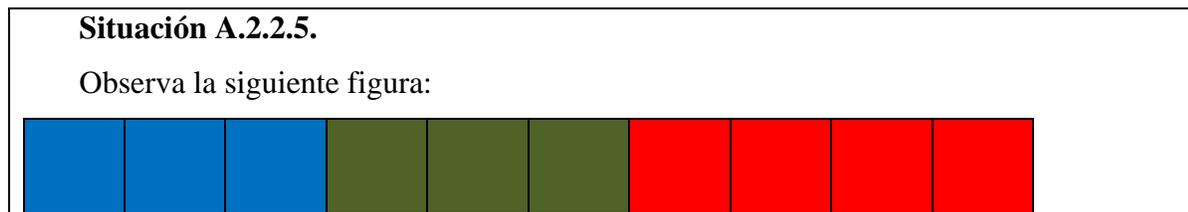


Ilustración 22. Descomposición del número 10.

Entrevistador: *Teniendo en cuenta que en la Figura A.2.2.5, cada cuadro corresponde a una unidad,*

Los valores numéricos que corresponden al color azul, al color verde y al color rojo respectivamente son:

- a. 3, 5, 3
- b. 4, 3, 3
- c. 3, 3, 4
- d. 4, 3, 4

Estudiante: *la c, porque son 3 en la azul, 3 en la verde y 4 en la roja.*

Entrevistador: *Al reunir las cantidades representadas en los cuadros de color azul, color verde y color rojo, la representación numérica adecuada para esta situación es:*

- a. $3 + 3 + 4 = 10$
- b. $3 + 4 + 4 = 10$
- c. $3 + 3 + 4 = 11$
- d. $4 + 3 + 4 = 11$

Entrevistador: *La respuesta adecuada es...*

Estudiante: *la a, porque son 3, 3 y 4 y da 10*

Entrevistador: *Para conseguir esta respuesta, lo que se hace es...*

Estudiante: *se suman 3 más 3 más 4*

Entrevistador: *Supiste que ese era el proceso indicado porque...*

Estudiante: *porque pude observarlo en la gráfica.*

Se puede concluir que, Camila, estableció la equivalencia entre cantidades a partir de la composición y descomposición, apoyándose en la componente visual – geométrica para determinar la solución, teniendo en cuenta que las orientaciones del docente deben conllevar al reconocimiento de la estructura como una totalidad, las equivalencias establecidas por Camila permiten confirmar el descriptor 2, de la fase 2.

4.6.2.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En el desarrollo de la Entrevista de Carácter Socrático, Camila afirmó en el punto 25 de la situación A.2.2.9., lo siguiente: *“Si Juan reúne en un solo conjunto el conjunto formado por los bombones de chocolate y el conjunto formado por los bombones de chicle de Diego y los suyos, el conjunto formado tiene 23 bombones, porque Diego compra 10 de los bombones de chicle y bombones de chocolate... Juan le ayuda a separarlos... Juan tiene 6 bombones de chicle... tiene 7 de chocolate... tiene en total 13... los conté y los sumé. Diego tiene 10 por todos... Sumé 10 + 13 y me dio 23”*. Respecto a estos argumentos, se puede concluir que, Camila manifestó apropiación, en cuanto a la reunión de elementos, de acuerdo a características comunes y, pudo hallar la cantidad total, conociendo las partes que formaban el conjunto de bombones de chocolate.

Camila también participó en la solución de situaciones que implicaban la categoría de transformación. A continuación se describe la situación y los argumentos encontrados en la situación A.2.2.6., de la entrevista:

Situación A.2.2.6.

Andrea y Ana deciden comprar galletas durante el descanso. Al salir de la tienda Ana lleva 5 galletas y Andrea 10. Cuando Ana observa el número de galletas que ha comprado Andrea, decide hacer la cuenta para saber cuántas le faltan, para tener la misma cantidad que tiene

Andrea.

Observa y ayuda a Ana a encontrar esta diferencia.

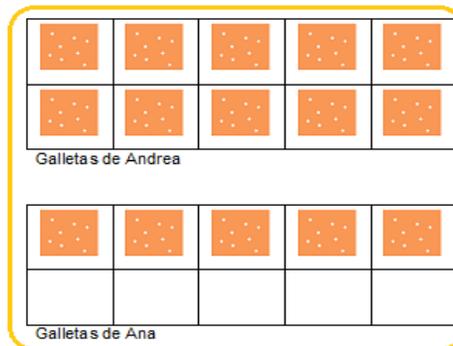


Ilustración 23. Diferencia entre dos conjuntos de galletas.

Entrevistador: *El número de galletas que le hacen falta a Ana, para tener el mismo número de galletas que tiene Andrea es:*

- a. 7
- b. 5
- c. 1
- d. 6

Estudiante: *5 es la cantidad de galletas que debe comprar Ana.*

Entrevistador: *Puedes justificar esta respuesta.*

Estudiante: *Porque ella compró 5, Andrea compró 10 y Ana compró 5 para ajustar la cantidad de Andrea, le faltan 5 para ajustar 10.*

Entrevistador: *Le voy a realizar una nueva pregunta: El número adicional de galletas que tiene Andrea en relación con el número de galletas de Ana es:*

- a. 3
- b. 4
- c. 5
- d. 4

Estudiante: *es c. 5.*

Entrevistador: *Puede justificar por qué sabe que son 5 galletas.*

Estudiante: *Porque ella compro 10 y a la otra le faltan 5.*

Entrevistador: *Entonces, el número de galletas adicionales que tiene Andrea en relación con las que tiene Ana, es...*

Estudiante: *5,*

Entrevistador: *Cuando comparamos las cantidades de galletas y se encuentra que Ana tiene 5 y Andrea tiene 10, la relación que existe entre estas dos cantidades es...*

Estudiante: *El 10 es un número alto... es 5 unidades mayor que el 5.*

Entrevistador: *Si Ana decide comprar el número de galletas que le hacen falta para tener la misma cantidad de galletas que tiene Andrea, se puede concluir que:*

a. La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose un aumento en el número que representaba la cantidad inicial.

b. La cantidad inicial de galletas de Ana no sufre ningún cambio y la cantidad final conserva el mismo valor numérico.

c. La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose una disminución en el número que representaba la cantidad inicial.

d. La cantidad final de galletas de Ana es menor con relación a la cantidad de galletas de Andrea. Aumentó en el número que representaba la cantidad inicial... ha aumentado.

Estudiante: *La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose un 5”.*

La solución a esta situación por parte de la estudiante, deja ver como en la comparación de dos cantidades es posible establecer la relación existente, para saber cuánto le hace falta a una cantidad para ser igual a la otra, así se verificó el cumplimiento de los descriptores 1 y 4, construidos para la fase 2.

Durante el trabajo realizado en esta fase, Camila a partir de la orientación dirigida se familiarizó con las acciones propias de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo, reconoció la estructura como una totalidad y los cambios que ocurren en la misma, así se observó el cumplimiento del propósito de esta fase.

4.6.3. Fase 3: Explicitación

La participación en las experiencias de esta fase permitió a Camila ampliar su lenguaje. Los aportes de información presentados en la entrevista acerca de las categorías de las estructuras de tipo aditivo, favorecieron la socialización ante los compañeros junto con el intercambio de ideas.

4.6.3.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Camila participó de discusiones con sus compañeros e hizo referencia a características que identificaban las categorías, como puede apreciarse en este apartado sobre los puntos 7 – 9, del Módulo de Aprendizaje, situación A.3.1.2.: *“Las partes que se representan son 8 carros y 4 balones que forman el conjunto de juguetes... Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso los 8 carros, quedando un grupo de 4 balones.... porque a 12 le quito 8 me quedan 4 balones...el cálculo adecuado es $12 - 4 = 8$... Juan restó 8... $12-8=4$ ”* y en la situación A.3.1.4., en los puntos 11 – 12: *“Los huevos que se rompieron implicó que la cantidad inicial que Luis había comprado, disminuyera... el cálculo es $9 + 6= 15$... Porque conté los que quebró y los que le entregó a la mamá.... ehh sumé”*.

Camila refiere acciones como separar, cambios como la disminución, a partir del dialogo refirió la forma cómo analizó y dio solución de forma numérica, sus argumentos dejan en evidencia el reconocimiento de las categorías de composición y transformación, las mismas permiten ver la adición y sustracción como una estructura, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 3, construido en la fase 3.

4.6.3.2. Categoría: Utilización del lenguaje

La secuencialidad de las experiencias permitió que Camila refinara su lenguaje, considerando los cambios ocurridos en situaciones de composición y transformación. Explicaciones verbales como las presentadas en la entrevista, acerca de los cambios ocurridos, le permitieron el intercambio de ideas donde sus argumentos fueron más precisos, verificando el cumplimiento del descriptor 2, propuesto para esta fase. Respecto a los puntos 1-3, de la situación A.3.1.1., dan cuenta de las nuevas expresiones construidas por la estudiante: *“Si explotó globos... No aumenta, ni sigue igual... entonces disminuye. Si tengo ocho globos y al final tengo 5 la cantidad disminuye... La cantidad 8 disminuyó 3, para que la cantidad final fuera 5... porque si a 8 le quito 5 el resultado es 3.... $8 - 5 = 3$... 8 es la cantidad que comienza y 5 la final... la cantidad disminuye... lo soluciono por medio de una resta”*. En otra situación explicó: *“La cantidad de huevos que él compró fue 15... porque hubo que sumar, sumé $9 + 6$ y me dio 15... porque se quebraron 6 huevos y Luis le entregó nueve huevos a la mamá, entonces compró 15 huevos”*. El lenguaje empleado por Camila permitió observar que ella no sólo dio solución a la situación, sino que infirió cuál era la operación adecuada para la solución.

4.6.3.3. Categoría: Relación con el entorno

Camila al enfrentarse a situaciones del contexto, se apoyó en la componente visual – geométrica y dio solución a las mismas, explicando el proceso realizado. En diferentes situaciones del Módulo de Aprendizaje, correspondientes a la entrevista de esta fase expresó lo siguiente:

Situación A.3.1.6., punto 13: *“La operación matemática para conocer el total de metros que debe recorrer María, desde la escuela hasta la casa de Ana, $9 + 4 = 13$... porque si recorrió 9 metros... de la escuela y sumo... 4 es igual a 13”*.

Situación A.3.1.6., punto 14: *“La tía de Carlos vive en el piso 6... $13 - 7 = 6$... porque si subió... Subió más arriba, subió hasta el piso número 13, entonces bajó 7 pisos... restó...Restó 7 pisos y quedó en el número 6”*.

Situación A.3.1.6., punto 17: *“Juan construye un edificio de 3 pisos, luego decide aumentar su número y obtiene un edificio de 5 pisos... porque la cantidad inicial es 3 y la final es 5, entonces el cambio hace que... aumente dos pisos y quede más grande”*.

Situación A.3.1.2., punto 4: *“Daniel antes de jugar tenía 6 cromos y, después de jugar tenía 10 cromos... entonces... al finalizar la cantidad aumentó. Al observar la cantidad del primer conjunto y la del final la cantidad que representa el aumento de cromos es 4”*.

Se observó que Camila se apoyó en la componente visual – geométrica y describió lo ocurrido en cada una de las situaciones argumentando el cambio ocurrido. A partir del intercambio de ideas con sus compañeros y solución de problemas, Camila propuso sus propias situaciones y las resolvió empleando las categorías de las estructuras de tipo aditivo, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 4, construido en la fase 3.

4.6.3.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

Camila planteó soluciones y describió los cambios ocurridos en la situación A.3.1.2, cuando había una transformación. En los argumentos expuestos ante sus compañeros respecto al punto 5, donde afirmó: *“Sumé y conté... mmm... una resta... 4 porque $10 - 6 = 4$... porque tenía una cantidad de 6 y al final tenía 10, entonces... si a 10 le quito 6 descubro que tenía 4 cromos”*. Se observa la utilización de un lenguaje adecuado y la descripción de los cambios ocurridos en la situación, donde se cumplió el descriptor 1, propuesto para esta fase. Luego, en la situación A.3.1.8., en el punto 16: *“Julián tenía 7 monedas, su mamá le regaló 5 entonces... $7 + 5 = 12$... él tenía 7 monedas y la mamá le regala 5, queda en 12 monedas... porque la mamá le regaló 5 monedas. Porque $7 + 5 = 12$ ”*.

Se puede concluir que Camila describió, adecuadamente, los procesos necesarios para dar solución a una situación, explicando ante sus compañeros la situación y la operación adecuada, para encontrar la solución.

Durante el desarrollo de las situaciones propuestas para esta fase, puede afirmarse el que desempeño de Camila da cuenta del cumplimiento de los descriptores, ya que a partir del intercambio de ideas con sus compañeros, dio solución acertada a diferentes situaciones. Adicionalmente, propuso sus propias situaciones y las resolvió empleando las categorías de las estructuras de tipo aditivo, observándose el uso de un lenguaje apropiado y acorde con la red de relaciones construida.

4.6.4. Fase 4: Orientación Libre

El desarrollo de esta fase generó libertad a Camila para manifestar los conocimientos adquiridos. Expuso de forma espontánea los razonamientos y conclusiones en las diferentes situaciones planteadas.

4.6.4.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Teniendo en cuenta las diversas estrategias empleadas para resolver las actividades, se abordaron situaciones en las que se requerían las operaciones básicas entre conjuntos. Respecto a los puntos 2 – 3, del Módulo de Aprendizaje se puede afirmar lo siguiente:

Entrevistador: *A continuación se presenta una situación, la cual debes analizar para dar respuesta a una pregunta:*

Situación A.4.1.2.

Diego fue a la tienda y compró algunos dulces: bombones, bolitas de chocolate y nucas, él quería saber el número total de dulces y encontró que había 12, luego, observó que la cantidad de nucas era 4 y las agrupó en un conjunto llamado N.

Diego quiere saber cuál es la cantidad de dulces que complementa su conjunto de nucas.

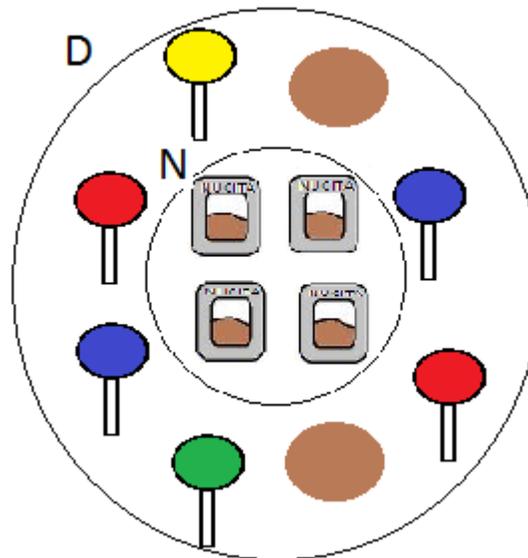


Ilustración 23 Representación del complemento entre un conjunto de dulces.

Entrevistador: *Ahora analiza la pregunta: El conjunto D está conformado por 12 elementos. La cantidad de elementos que posee el conjunto N es 4. Se puede afirmar que el número de elementos que le hace falta al conjunto N para ser igual al conjunto D es:*

- a. 5
- b. 12
- c. 8
- d. 4

Estudiante: *c. 8*

Entrevistador: *Explica por favor la respuesta.*

Estudiante: *Porque si se trata de que faltan entonces faltarían 8 para llegar a 12.*

Entrevistador: *La operación matemática que permite calcular la cantidad que hace falta al conjunto N para ser igual al conjunto D es:*

- a. *Una multiplicación.*
- b. *Una adición.*

c. Una sustracción.

d. Una división.

Estudiante: *c. Una sustracción*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *porque $12 - 4 = 8$, 12 es la cantidad total y las nucas que son 4 son una parte de la cantidad total, a 12 le quito 4 y me da 8.*

Los anteriores argumentos evidencian el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, a partir de sus distintas formas de representación. Al presentar situaciones que incluían las operaciones básicas entre conjuntos, Camila dio solución, generando una asociación con las operaciones de adición y sustracción, de esta manera se observó el cumplimiento del descriptor 1, construido en la fase 4.

4.6.4.2. Categoría: Utilización del lenguaje

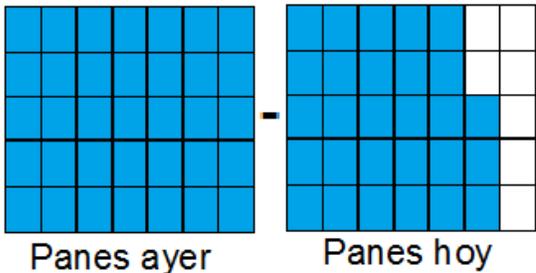
En la situación A.4.1.8., planteada en los puntos 9 - 10, Camila dio las siguientes explicaciones: “*debe realizarse la adición $450 + 1800$ porque la leche valió \$1800 y las galletas \$450, y Juan para saberlo hace una adición que da \$2.250, para saber cuánto dinero le queda se realiza la sustracción $2500 - 2250$ porque él llevó \$2.500 y las galletas y la leche le valieron \$2.250 y le sobraron \$250*”.

A partir de lo anterior se observó la apropiación de las estructuras de tipo aditivo en relación con el lenguaje, Camila se enfrentó a situaciones de su cotidianidad, que implicaban la utilización de las operaciones de adición y sustracción, ella explicó la solución matemática a través de enunciados verbales, sin limitarse a un proceso mecánico, generando reflexión sobre los resultados, de esta manera se cumplió el descriptor 5, propuesto para esta fase.

4.6.4.3. Categoría: Relación con el entorno

En las interacciones en esta fase Camila participó de distintas situaciones apoyándose en material concreto, allí hizo sus propias representaciones y planteó estrategias de solución. Adicionalmente, en algunas preguntas de la entrevista visualizó en formas geométricas la adición y sustracción de elementos, de esta forma cumplió las características presentadas en el descriptor 3, propuesto para esta fase, dando argumentos como los expuestos a continuación:

Entrevistador: *lee y analiza la siguiente situación:*

| Situación A.4.1.4. | |
|---|--|
| <p>La familia de Juan vende panes, ayer había 35 panes, hoy hay 28, Juan quiere calcular cuántos panes más había ayer y emplea una forma geométrica para representar el cálculo realizado.</p> <p>Juan es un poco caprichoso así que representa un nuevo cuadrado e inventa otra forma de presentar el resultado.</p> |  <p>Ilustración 24 Representación que presenta la comparación de panes vendidos.</p> |

Entrevistador: *Ahora debes responder el siguiente cuestionamiento: La imagen que representa la cantidad de panes de más que había ayer en comparación con la cantidad de panes que hay el día de hoy es:*

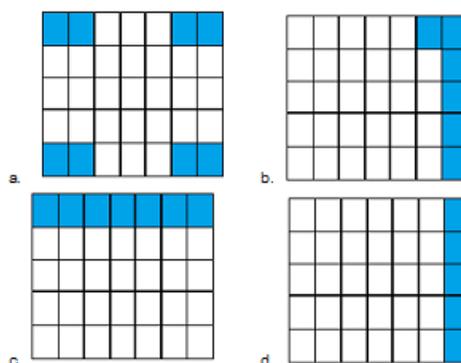


Ilustración 25 Representación geométrica: Diferencia entre la cantidad de panes.

Estudiante: *La respuesta correcta es la c.*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *Es la c. porque yo observé la representación, luego realicé el cálculo para verificar la respuesta encontrada, a 28 le faltan 7 para llegar a 35, yo hice la sustracción $35 - 28 = 7$.*

Se puede concluir que la solución, a situaciones en contexto, estuvo fundamentada en el uso de la componente visual – geométrica, la cual sirvió de apoyo a Camila para determinar la cantidad que se había añadido o quitado a otra cantidad.

4.6.4.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

En la situación A.4.1.6., planteada en el punto 7 Camila afirmó: *“Felipe hizo la adición buena porque sumó $5 + 8 = 13$ y lo hizo con bolitas y Andrés encontró la respuesta acertada con números, sumó $5 + 8 = 13$; Juan empleó la recta numérica y no respondió bien porque sumó $7 + 5$ y le dio 12 y Diego lo hizo con conjuntos, no lo hizo bien porque sumó $5 + 3$ y le dio 8 y le tenía que dar $5 + 8 = 13$ ”*. Estos argumentos dan cuenta de las diferentes alternativas que Camila encontró para la solución de una situación, debido a que, el uso adecuado de las estructuras de tipo aditivo, permite la visualización de diferentes vías de solución, de esta manera se apropió de las características que identifican esta fase, reconociendo las estrategias pertinentes para explicar

..

la solución de la situación presentada, de esta forma se verificó el cumplimiento del descriptor 4, propuesto para esta fase.

Camila se enfrentó a las diferentes situaciones presentadas para esta fase, dando solución a situaciones propuestas tanto a partir de enunciados verbales, como aquellas presentadas con el apoyo de la componente visual, identificó las estrategias adecuadas para dar solución a una situación y propuso sus propios problemas, demostrando el cumplimiento del propósito de esta fase, de acuerdo con el modelo de van Hiele.

4.6.5. Fase 5: Integración

Las experiencias desarrolladas, en esta fase, permitieron a Camila la consolidación de los aprendizajes adquiridos, a lo largo del trabajo de campo. La integración de los diferentes razonamientos fue posible, gracias a la estructuración de una red de relaciones, más refinada frente al concepto, aspecto que se hizo evidente en la solución de cada una de las situaciones y las inferencias verbales ilustradas sobre las mismas.

4.6.5.1. Categoría: Reconocimiento de estructuras

Al presentar una colección de objetos, Camila clasificó las colecciones y asignó la cantidad correspondiente a cada colección. Posteriormente, se realizaron algunas preguntas como aparece en el fragmento correspondiente a la situación A.5.1.1., presentado a continuación:

Entrevistador: *Le voy a realizar una nueva pregunta: De la colección de figuras geométricas: Triángulos y cuadrados, Juan separa la cantidad de triángulos. Si se sabe que la cantidad total de figuras geométricas es 7 y la cantidad de triángulos es 3, la cantidad de cuadrados es:*

a. 5

b. 3

c. 4

d. 7

Estudiante: *c. 4.*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *porque $4+3 = 7$, cuando Juan separa los tres triángulos del grupo de figuras geométricas, está separando una de las partes, para solucionarlo debo realizar una sustracción $7 - 3 = 4$.*

Entrevistador: *Analiza la siguiente pregunta: De la colección de juguetes, Juan selecciona los cinco carros. Él recuerda que tiene guardados tres carros más, que su tío Carlos le había regalado. Cuando toma los que tenía guardados y los reúne con los carros que tiene, se puede afirmar que la cantidad de carros en el conjunto de los juguetes:*

a. *Disminuye*

b. *Se duplica*

c. *Continúa igual*

d. *Aumenta*

Estudiante: *Es la d.*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *Porque sumó los 5 carros que tenía a los que le regaló el tío Carlos, por esta razón aumenta la cantidad.*

Se puede concluir que Camila infirió que las estructuras de tipo aditivo son una totalidad formada por adiciones y sustracciones. Esta totalidad implicó abordar conceptos como: colección, número, categorías de composición y transformación; los cuales son herramientas fundamentales para el reconocimiento y utilización de las estructuras de tipo aditivo, este reconocimiento permitió que se cumpliera el descriptor 1, propuesto para la fase 5.

4.6.5.2. Categoría: Utilización del lenguaje

En la situación A.5.1.1., en el punto 4, Camila da respuestas como: “*c, porque me dieron una cantidad inicial que es 7 y otra que es 3 y al hacer una sustracción $7 - 3$ me da 4*”. Los aportes presentados por Camila permitieron observar la apropiación del lenguaje propio de las Matemáticas donde, no sólo dio solución a la situación, sino que pudo explicarlo de una manera refinada, empleando términos propios de la categoría de transformación propuesta por Vergnaud e indicando la operación pertinente para hallar la solución a esta situación, de esta manera se cumple el descriptor 4, propuesto para esta fase de aprendizaje.

4.6.5.3. Categoría: Relación con el entorno

Camila demostró apropiación de las estructuras de tipo aditivo al presentarse una situación en contexto apoyada en la componente visual – geométrica como la que se presenta en la actividad A.5.2., situación A.5.2.1., la cual se presenta a continuación:

La profesora del grado tercero realiza una salida, con los estudiantes, al parque de recreación, allí ellos hacen diferentes actividades:

Ana y Diana recorren el prado saltando.

Diego, Luis y Juan juegan a las canicas.

Andrés y Laura toman los bloques lógicos y deciden formar agrupaciones.

Andrea y Juliana compran en la tienda algunas galletas.

Felipe toma los multicubos y construye algunos edificios.

Observa:

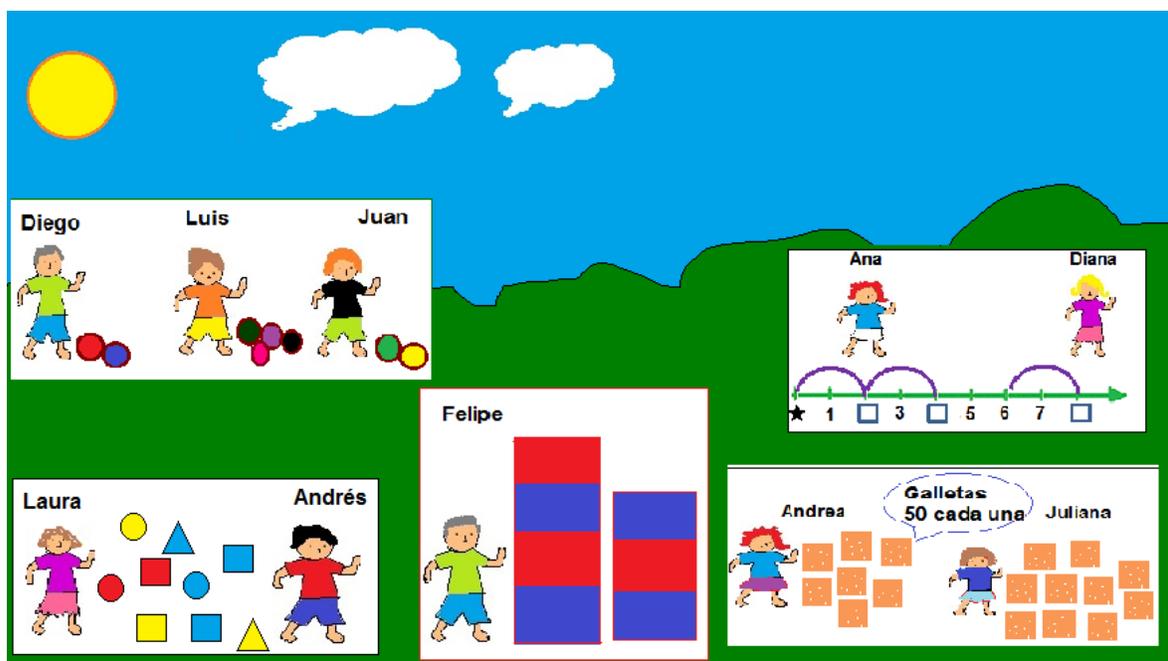


Ilustración 26. Actividades realizadas por los niños en el parque.

En el punto 4 de la actividad, se puede observar la forma como Camila se enfrentó a la situación:

“Después de contar el número de galletas que compran Andrea y Juliana en la tienda, completa las siguientes afirmaciones:

- a. Juliana compró 3 galletas más que Andrea.*
- b. Andrea pagó \$350 por sus 7 galletas y Juliana pagó \$500 por sus 10 galletas.*
- c. Quien pagó menos dinero fue **Andrea**.*
- d. El dinero adicional que pagó Juliana en comparación con el de Andrea fue \$150.*

La componente visual – geométrica, posibilitó a Camila enfrentarse a situaciones contextualizadas, donde interpretó la situación presentada de forma visual y dio solución de forma numérica, Camila realizó los cálculos pertinentes para hallar la solución adecuada, enfrentarse a las estructuras de tipo aditivo, a partir de sus diferentes representaciones, permitió justificar el cumplimiento del descriptor 2, construido en la fase 5, donde se emplearon de forma adecuada las operaciones de adición y sustracción.

4.6.5.4. Categoría: Solución y análisis de situaciones

Para la solución y el análisis de situaciones, Camila hizo evidente su reconocimiento sobre las estructuras de tipo aditivo. Este reconocimiento se convirtió en la base que fundamentó sus producciones verbales y escritas sobre el razonamiento de la situación planteada. A continuación se presenta un fragmento de la situación A.5.1.5., correspondiente a la entrevista con los diferentes argumentos expuestos por la estudiante:

Entrevistador: *Le voy a presentar una nueva situación para dar respuesta a algunos interrogantes: “Diego tiene ocho monedas, su tío Carlos le regala cuatro más, el número de monedas que tiene ahora es...”*

Entrevistador: *De acuerdo con el planteamiento anterior, la operación adecuada para hallar la solución a la situación planteada es:*

- a. Una resta porque se pregunta por la cantidad final de monedas.*
- b. Una adición porque permite calcular el aumento en la cantidad inicial de monedas.*
- c. Una adición porque se está preguntando por la disminución en una cantidad inicial de monedas.*
- d. Una resta porque ha disminuido la cantidad inicial de monedas.*

Estudiante: *es la b.*

Entrevistador: *Explica tu respuesta.*

Estudiante: *porque la adición permite calcular el aumento inicial de monedas*

Los argumentos expuestos por Camila dejan ver que la solución de situaciones que implican las estructuras de tipo aditivo se articula a las construcciones mentales previas. Estas construcciones se fueron elaborando en el desarrollo de cada una de las experiencias, donde Camila asimiló, de forma correcta, las categorías de composición y transformación, aplicándolas a la solución de situaciones que implicaban las operaciones básicas de suma y resta, haciendo visible el cumplimiento del descriptor 3, correspondiente a la fase 5.

A continuación se presentan los mapas conceptuales construidos por Camila, durante el desarrollo de la fase 1 y la fase 5 del desarrollo del Módulo de Aprendizaje, los cuales permiten visualizar las construcciones mentales de la estudiante.

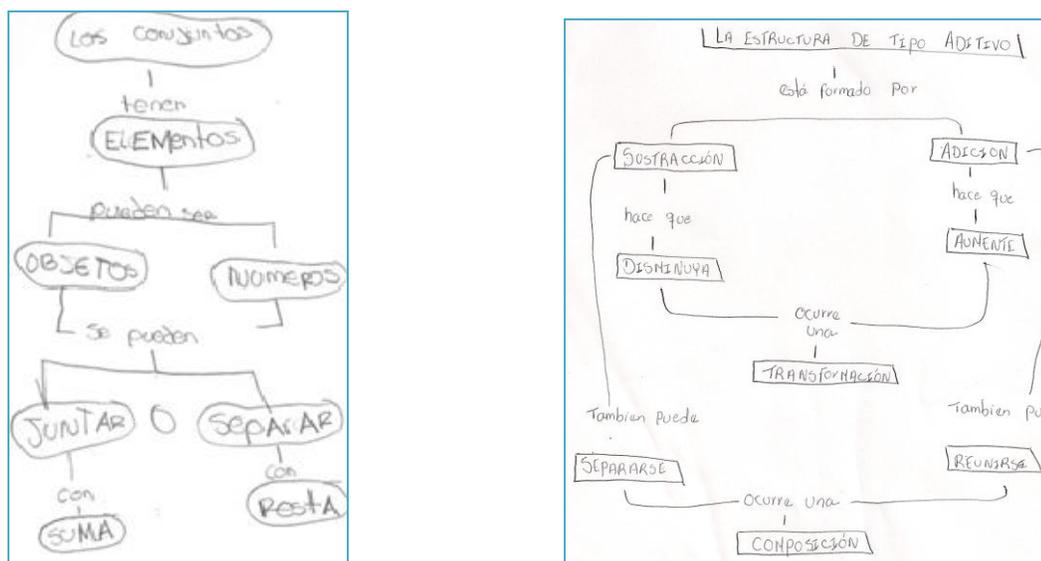


Ilustración 27. Mapas conceptuales construidos por Camila en las fases 1 y 5.

La construcción de los mapas conceptuales, presentados por Camila, permite observar la forma como se ha acrecentado la red de relaciones construida, donde puede apreciarse la claridad en cuanto a las categorías, que forman parte de las estructuras de tipo aditivo, el lenguaje empleado muestra la apropiación de conceptos, el cual se observa refinado y acorde al contexto de las estructuras de tipo aditivo.

La actitud y razonamientos de la estudiante en la fase 5, permiten afirmar que hubo una integración de los conocimientos trabajados durante las diferentes fases, así como la validez de presentar experiencias de forma secuencial de acuerdo con el modelo de van Hiele, para acrecentar la red de relaciones en relación con un concepto, en este caso en relación con las estructuras de tipo aditivo. Puede afirmarse que el proceso llevado a cabo con las diferentes estrategias permitió su reconocimiento de una estructura y el enfrenamiento a situaciones de su contexto, empleando las operaciones de adición y sustracción, dando cuenta del cumplimiento del propósito de esta fase.

4.6.6. Matriz de códigos para Camila

Camila también exhibió sus comprensiones, durante el desarrollo de las experiencias presentadas en el Módulo de Aprendizaje, permitiendo la identificación de códigos que posteriormente, conformaron familias de categorías que posibilitaron la descripción de la comprensión, a continuación se presentan los códigos para cada una de las fases.

Fase 1: Información

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA CAMILA | | | |
|--|--------------------------------------|--|------------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| | Número | “Hay dos triángulos pequeños más uno grande”, “un rectángulo de forma vertical más dos derechos... horizontal”, “cuatro cuadrados más dos rectángulos”.(actividad A.1.3., punto 2) | |
| | Operaciones de adición y sustracción | “Conjunto como una colección de elementos” (mapa) | |
| | Argumento | “Es un conjunto porque son dulces... hay bombones y bolitas de chocolate... forman un con conjunto porque son circulares”. (A.1.2.2., entrevista puntos 5 y 6) | Utilización del lenguaje |
| | Espacio circundante | “Es un conjunto porque está conformado por cosas del baño”, “es un conjunto porque está conformado por dulces... personas... objetos de cocina”. (Punto 2 de la actividad A.1.1). “Dos triángulos pequeños más uno grande”, “un rectángulo de forma vertical más dos derechos... horizontal” y “cuatro cuadrados más dos rectángulos”. (Actividad A.1.3 punto 2,) | Relación con el entorno |
| | | “Entre todos hay 18... Contando...mmm ... quitando...mmm un conjunto... contando... porque las conté... sumando. (Situación.2.3., punto 8, entrevista) | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 12. Matriz de códigos, Camila fase 1.

Fase 2: Orientación Dirigida

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA CAMILA | | | |
|--|--------------------------------------|---|-------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 2: Orientación Dirigida | Colección | <p>“El total de láminas de la nueva caja es 22... en la caja 1 habían 13 y en la caja 2 habían 9... las junté en la nueva caja... quedaron 22... para juntarlas lo que hice fue contarlas y sumarlas... Porque si junto las fichas, las de allá quedaron vacías y la nueva quedó llena... sumé $13 + 9$ y me dio 22... o sea que es lo mismo agregarlas todas en la misma caja que sumar el total de láminas (Situación A.2.2.8., punto 23, entrevista).</p> | Reconocimiento de estructuras |
| | Número | <p>“... El valor es 2, porque es de dos en dos... el 12 está ubicado después del 10... el 16, después del 14... el 15 antes de 16, el número que se añade a la secuencia es 2... va de dos en dos... Uno más uno”. (Puntos 5 y 6, Situación A.2.2.2, entrevista)</p> | |
| | Operaciones de adición y sustracción | <p>“El total de láminas de la nueva caja es 22... en la caja 1 habían 13 y en la caja 2 habían 9... las junté en la nueva caja... quedaron 22... para juntarlas lo que hice fue contarlas y sumarlas... Porque si junto las fichas, las de allá quedaron vacías y la nueva quedó llena... sumé $13 + 9$ y me dio 22... o sea que es lo mismo agregarlas todas en la misma caja que sumar el total de láminas (Situación A.2.2.8., punto 24, entrevista)</p> <p>“... Porque tiene los mismos, tiene los mismos casi los mismos juguetes... Porque uno tiene dos carros, dos balones y una cometa... y otro tiene tres carritos una cometa y un balón... Cinco juguetes cada uno... esas cantidades son iguales... Porque son cinco carros dos cometas y tres balones... Porque los conté...sumar... Sumo la cantidad de carros, contando”.(Situación A.2.2.1., punto 3, entrevista)</p> | |
| | Argumento | <p>“La cantidad total es 120... sumé $30 + 40 + 50$ y me dio 120... la cantidad vendida el jueves es mayor que la cantidad vendida el miércoles, porque el número 40 es mayor que el 30... el jueves vendió 10 panes adicionales, porque conté los números... de 10 en 10... conté el 30 y el 40... o sea que el jueves vendió 10 panes más que el miércoles”. (Situación A.2.2.7., en los puntos 20 – 22).</p> | Utilización del lenguaje |
| | Observación | <p>“El número de pasos que hay entre salto y salto es 3... porque Juan contó los tres pasos... y luego saltó...colocó las piedras”, (Situación A.2.2.3., punto 7, entrevista)</p> <p>“...La c, porque son 3 en la azul, 3 en la verde y 4 en la roja... porque son 3, 3 y 4 y da 10. Se suman 3</p> | Relación con el entorno |

| | | | |
|--|----------------|--|---|
| | | <i>más 3 más 4. Porque pude observarlo en la gráfica.” (Situación A.2.2.5., puntos 14 – 15, entrevista).</i> | |
| | Proceso | <p><i>“Si Juan reúne en un solo conjunto el conjunto formado por los bombones de chocolate y el conjunto formado por los bombones de chicle de Diego y los suyos, el conjunto formado tiene 23 bombones, porque Diego compra 10 de los bombones de chicle y bombones de chocolate... Juan le ayuda a separarlos... Juan tiene 6 bombones de chicle... tiene 7 de chocolate... tiene en total 13... los conté y los sumé. Diego tiene 10 por todos... Sumé 10 + 13 y me dio 23”. (Situación A.2.2.9., punto 25, entrevista).</i></p> <p><i>“...5 es la cantidad de galletas que debe comprar Ana, porque ella compró 5, Andrea compró 10 y Ana compró 5 para ajustar la cantidad de Andrea, le faltan 5 para ajustar 10. Porque ella compro 10 y a la otra le faltan 5. ...El 10 es un número alto... es 5 unidades mayor que el 5. La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose un 5”.(Situación A.2.2.6., puntos 17-19, entrevista).</i></p> | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 13. Matriz de códigos, Camila fase 2.

Fase 3: Explicitación

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA CAMILA | | | |
|--|---|--|--------------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| | Operaciones de adición y sustracción | <p><i>“Las partes que se representan son 8 carros y 4 balones que forman el conjunto de juguetes... Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso los 8 carros, quedando un grupo de 4 balones.... porque a 12 le quito 8 me quedan 4 balones...el cálculo adecuado es $12 - 4 = 8$... Juan restó 8...$12-8= 4$”</i></p> <p><i>(Puntos 7 – 9, del Módulo de Aprendizaje, situación A.3.1.2.)</i></p> <p><i>“Los huevos que se rompieron implicó que la cantidad inicial que Luis había comprado, disminuyera... el cálculo es $9+6= 15$... Porque conté los que quebró y los que le entregó a la mamá.... ehh sumé”. (Situación A.3.1.4., en los puntos 11 – 12, entrevista).</i></p> | Reconocimiento de estructuras |
| | Argumento | <p><i>“Si explotó globos... No aumenta, ni sigue igual... entonces disminuye. Si tengo ocho globos y al final tengo 5 la cantidad disminuye... La cantidad 8 disminuyó 3, para que la cantidad final fuera 5... porque si a 8 le quito 5 el resultado es 3.... $8 - 5 = 3$... 8 es la cantidad que comienza y 5 la final... la cantidad disminuye... lo soluciono por medio de una resta”. (Situación A.3.1.1., puntos 1-3, entrevista).</i></p> | Utilización del lenguaje |

| | | | |
|--|--------------------|--|---|
| | | <p>“La cantidad de huevos que él compró fue 15... porque hubo que sumar, sumé $9 + 6$ y me dio 15... porque se quebraron 6 huevos y Luis le entregó nueve huevos a la mamá, entonces compró 15 huevos”. (Situación A.3.1.4., en los puntos 11 – 12, entrevista).</p> | |
| | Observación | <p>“La operación matemática para conocer el total de metros que debe recorrer María, desde la escuela hasta la casa de Ana, $9 + 4 = 13$... porque si recorrió 9 metros... de la escuela y sumo... 4 es igual a 13”. (Situación A.3.1.6., punto 13, entrevista).</p> <p>“La tía de Carlos vive en el piso 6... $13 - 7 = 6$... porque si subió... Subió más arriba, subió hasta el piso número 13, entonces bajó 7 pisos... restó... Restó 7 pisos y quedó en el número 6”. (Situación A.3.1.6., punto 14, entrevista)</p> <p>“Juan construye un edificio de 3 pisos, luego decide aumentar su número y obtiene un edificio de 5 pisos... porque la cantidad inicial es 3 y la final es 5, entonces el cambio hace que... aumente dos pisos y quede más grande”. (Situación A.3.1.6., punto 17, entrevista)</p> <p>“Daniel antes de jugar tenía 6 cromos y, después de jugar tenía 10 cromos... entonces... al finalizar la cantidad aumentó. Al observar la cantidad del primer conjunto y la del final la cantidad que representa el aumento de cromos es 4”. (Situación A.3.1.2., punto 4, entrevista).</p> | Relación con el entorno |
| | | <p>“Sumé y conté... mmm... una resta... 4 porque $10 - 6 = 4$... porque tenía una cantidad de 6 y al final tenía 10, entonces... si a 10 le quito 6 descubro que tenía 4 cromos”. (Situación A.3.1.2., punto 5, entrevista).</p> <p>“Julián tenía 7 monedas, su mamá le regaló 5 entonces... $7 + 5 = 12$... él tenía 7 monedas y la mamá le regala 5, queda en 12 monedas... porque la mamá le regaló 5 monedas. Porque $7 + 5 = 12$”. (Situación A.3.1.8., punto 16, entrevista)</p> | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 14. Matriz de códigos, Camila fase 3.

Fase 4: Orientación Libre

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA CAMILA | | | |
|--|--------------------------------------|---|------------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| Fase 4: Orientación Libre | Operaciones de adición y sustracción | “C. 8, porque si se trata de que faltan entonces faltarían 8 para llegar a 12. Hice una sustracción, porque $12 - 4 = 8$, 12 es la cantidad total y las nueces que son 4 son una parte de la cantidad total, a 12 le quito 4 y me da 8”. (Situación A.4.1.2.puntos 2 – 3, Módulo de Aprendizaje). | Reconocimiento de estructuras |
| | Argumento | “Camila dio las siguientes explicaciones: “debe realizarse la adición $450 + 1800$ porque la leche valió \$1800 y las galletas \$450, y Juan para saberlo hace una adición que da \$2.250, para saber cuánto dinero le queda se realiza la sustracción $2500 - 2250$ porque él llevó \$2.500 y las galletas y la leche le valieron \$2.250 y le sobraron \$250”. (Situación A.4.1.8., puntos 9 – 10, entrevista). | Utilización del lenguaje |
| | Observación | “La respuesta correcta es la c, porque yo observé la representación, luego realicé el cálculo para verificar la respuesta encontrada, a 28 le faltan 7 para llegar a 35, yo hice la sustracción $35 - 28 = 7$. (Situación A.4.1.5, punto 5, entrevista). | Relación con el entorno |
| | Explicación | “Felipe hizo la adición buena porque sumó $5 + 8 = 13$ y lo hizo con bolitas y Andrés encontró la respuesta acertada con números, sumó $5 + 8 = 13$; Juan empleó la recta numérica y no respondió bien porque sumó $7 + 5$ y le dio 12 y Diego lo hizo con conjuntos, no lo hizo bien porque sumó $5 + 3$ y le dio 8 y le tenía que dar $5 + 8 = 13$ ”. (Situación A.4.1.6., punto 7, entrevista). | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 15. Matriz de códigos, Camila fase 4.

Fase 5: Integración

| MATRIZ DE CÓDIGOS Y CATEGORÍAS PARA CAMILA | | | |
|--|--------------------------------------|---|-------------------------------|
| Fase | Código | Indicador | Categoría |
| | Operaciones de adición y sustracción | “C. 4., porque $4 + 3 = 7$, cuando Juan separa los tres triángulos del grupo de figuras geométricas, está separando una de las partes, para solucionarlo debo realizar una sustracción $7 - 3 = 4$.(Situación A.5.1.1., punto 2, entrevista). “Es la d, porque sumo los 5 carros que tenía a los que le regaló el tío Carlos, por esta razón aumenta la cantidad. (Situación A.5.1.1., punto 4, entrevista). | Reconocimiento de estructuras |
| | Argumento | “c, porque me dieron una cantidad inicial que es 7 y otra que es 3 y al hacer una sustracción $7 - 3$ me da 4”. (Situación A.5.1.1., punto 3, entrevista). | Utilización del lenguaje |
| | Observación | “Después de contar el número de galletas que compran Andrea y Juliana en la tienda, completa las siguientes afirmaciones: | Relación con el entorno |

| | | | |
|--|--|---|---|
| | | <i>a. Juliana compró 3 galletas más que Andrea. b. Andrea pagó \$350 por sus 7 galletas y Juliana pagó \$500 por sus 10 galletas. c. Quien pagó menos dinero fue Andrea. d. El dinero adicional que pagó Juliana en comparación con el de Andrea fue \$150. (Actividad A.5.2., situación A.5.2.1).</i> | |
| | | <i>“Es la b, porque la adición permite calcular el aumento inicial de monedas” (Situación A.5.1.5., punto 8, entrevista)</i> | Solución y análisis de situaciones |

Tabla 16. Matriz de códigos, Camila fase 5.

4.7. Comprensión de las estructuras de tipo aditivo

La comprensión de conceptos está influenciada por las estrategias bajo las cuales éstos son abordados en el aula de clase y las situaciones presentadas a los estudiantes, por esta razón, es pertinente que las experiencias de aprendizaje llevadas a cabo por el docente, posibiliten a los estudiantes, actuar adecuadamente al enfrentarse a una nueva situación. Van Hiele (1957), plantea al respecto:

Comprensión y situación de aprendizaje van muy unidas. La persona se encuentra en un proceso de aprendizaje y después de cierto tiempo está capacitada para actuar de manera adecuada ante situaciones que todavía no habían aparecido en su proceso de aprendizaje. Se dice entonces que ha actuado basándose en la comprensión que ha adquirido durante el aprendizaje (van Hiele, 1957 p. 2).

Las experiencias de aprendizaje presentadas a los estudiantes del grado tercero, en relación con las estructuras de tipo aditivo y las categorías de composición y transformación propuestas por Vergnaud (1991), han permitido analizar la comprensión, a partir de su desempeño en las actividades propuestas, en cada fase de aprendizaje, las cuales han sido consolidadas en el Módulo de Aprendizaje, para el posterior análisis de las mismas. A continuación se consolida el análisis de la comprensión observada en cada uno de los tres casos particulares, en relación con las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo educativo de van Hiele.

4.7.1. Análisis de la comprensión Caso Uno (Juana)

Juana al enfrentarse a las experiencias propuestas en el Módulo de Aprendizaje, en relación con cada una de las fases del modelo de van Hiele, mostró un razonamiento inicial que se fue estructurando, a lo largo del proceso. Inicialmente, se observaron sus saberes previos, en cuanto a los conceptos relacionados con las estructuras de tipo aditivo, encontrando la realización de procesos como reunión de elementos de acuerdo con características comunes, asignó cantidades, encontrándose, como una acción común, el conteo de elementos, al momento de reunir cantidades. Poco a poco se observó cómo estableció relaciones entre éstas, argumentando cuál de ellas era mayor o menor y cuándo ocurrió un aumento o una disminución en la cantidad, de esta manera fue construyendo su estructura mental en relación con el concepto. Más adelante, se apreció una actuación intencionada de la estudiante, estableciendo los cambios presentados en una situación planteada, determinó de acuerdo al caso presentado, cuál era la operación matemática pertinente para hallar la solución.

En cuanto al lenguaje, inicialmente, se encontraron expresiones que remitían a las acciones realizadas para dar solución a una situación. Posteriormente, este lenguaje se fue refinando y dio argumentos que mostraron el reconocimiento de las categorías que conforman las estructuras de tipo aditivo, donde manifestó de forma verbal cuándo ocurría un aumento o disminución en una cantidad, en este caso, cuándo se presentó una transformación o en qué momento se realizaban las acciones de reunir y separar, propias de la categoría composición. La estudiante se preocupó por reconocer los términos adecuados para explicar lo ocurrido, acrecentando así la red de relaciones en torno al concepto, expresó con claridad el proceso realizado y se apropió de un discurso, acorde a la estructura construida en relación con la información encontrada en las diferentes fases de aprendizaje.

Con el apoyo de la componente visual – geométrica realizó asociaciones entre su entorno cercano y los conceptos que conforman las estructuras de tipo aditivo, también, contempló transformaciones como aumento y disminución de cantidades. Con ello estableció relaciones con el entorno y los objetos. Luego, determinó, cuantitativamente, la diferencia numérica entre los

..

mismos, qué tan lejos o qué tan cerca estaba un objeto del otro y cuánto le faltaba o sobraba a una cantidad para ser igual a otra. Se observó cómo, el apoyo de esta componente, permitió a la estudiante dar solución a situaciones, empleando adecuadamente las categorías de las estructuras de tipo aditivo. Juana, trascendió de las representaciones visuales a la componente simbólica y formal de estas estructuras.

Finalmente, se observó el desempeño de la estudiante en las distintas situaciones, a medida que avanzó en el desarrollo de las fases, se enfrentó con seguridad, empleando la operación adecuada de acuerdo al caso, reconoció las operaciones de adición y sustracción como una estructura, realizando inferencias que le permitieron hacer un uso adecuado de las mismas en las diferentes situaciones.

4.7.2. Análisis de la comprensión Caso Dos (David)

David, quien participó con sus aportes en el caso dos, mostró en su desempeño durante las experiencias presentadas, en las diferentes fases de aprendizaje, su comprensión de acuerdo con las actividades presentadas. Con respecto al reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, en un comienzo se observó cómo formó colecciones con elementos, con características comunes, estableció cuál tenía más elementos; posteriormente, resolvió una situación de tipo aditivo de forma numérica. Al presentar una situación, David, recurrió a la adición o sustracción para hallar su solución y las reconoció como una estructura en la cual ocurrían cambios que la hacen aumentar o disminuir conservando su composición a partir de sus distintas representaciones.

En su lenguaje se apreciaron expresiones acordes con las acciones cotidianas realizadas para dar solución a diversas situaciones, más adelante hizo manifiesta la red de relaciones construida, empleando un lenguaje refinado de acuerdo a las categorías que conforman las estructuras de tipo aditivo, donde argumentó qué ocurrió, cuál era la operación adecuada y el porqué de los procesos realizados, utilizando un vocabulario adecuado para referirse a las categorías de

composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo, como son: cantidad inicial, cantidad final, reunión, separación, aumento y disminución de una cantidad.

Al presentarse situaciones acompañadas por la componente visual – geométrica, hizo relaciones en el contexto de acuerdo a los elementos observados, determinó aspectos relacionados con la composición de una cantidad, a partir de una representación visual – geométrica. Posteriormente, al presentarse una situación del entorno, no sólo estableció la solución indicada, sino que afirmó que ocurrió una disminución y determinó, a partir de la representación, qué cantidad numérica representaba la cantidad inicial y cuál la cantidad final, relacionando la representación en el espacio con la operación matemática pertinente, se observó cómo pasó de tener en cuenta la componente visual – geométrica, como una representación que le servía, solamente, para observar. Determinó la categoría de las estructuras de tipo aditivo que estuvo presente en cada situación.

Por último, al presentarse una situación, determinó la estrategia adecuada para dar solución a una situación de tipo aditivo, mostró claridad frente a la solución de situaciones, realizando cálculos numéricos y estuvo en capacidad para explicar lo ocurrido en una situación particular, indicando cuál era la operación apropiada para encontrar la respuesta.

4.7.3. Análisis de la comprensión Caso Tres (Camila)

Camila, la estudiante que aportó la información para el caso tres, hizo visible su comprensión a partir de su desempeño en las actividades realizadas, en las fases de aprendizaje. Inicialmente, mostró sus saberes previos enfrentándose a situaciones en las cuales reconoció características comunes, en una colección, asignó un número a cada grupo, estableció relaciones entre las cantidades y realizó conteos para hallar soluciones a diferentes planteamientos.

Más adelante, cuando la estudiante se enfrentó a estas situaciones, se observó un reconocimiento de las categorías de composición y transformación, las cuales permiten ver la adición y sustracción como una estructura, además resolvió situaciones de forma numérica,

..

explicando lo ocurrido en cada caso. Al presentársele situaciones, que incluían las operaciones entre conjuntos, las solucionó asociándolas con las operaciones de adición y sustracción.

El lenguaje empleado a lo largo del proceso se fue refinando y al final, no sólo dio solución a la situación presentada, sino que presentó explicaciones coherentes de acuerdo con lo planteado. Además, pudo determinar la operación indicada, para encontrar la solución. En sus explicaciones, las respuestas dadas, tenían una intención y trascendieron de un proceso mecánico, a la hora de dar solución a una situación, pues la estudiante explicó lo ocurrido en cada caso.

Con el apoyo de la componente visual - geométrica realizó agrupaciones de acuerdo con las características comunes, estableció la equivalencia entre cantidades a partir de la composición y descomposición, describió lo ocurrido en cada una de las situaciones, argumentando el cambio ocurrido. La componente visual – geométrica, fue su apoyo para determinar la cantidad que se añade o se quita a otra cantidad, además empleó la solución de tipo numérico y realizó la operación pertinente para afirmar la solución dada.

Por último, la estudiante describió, de manera adecuada, los procesos realizados para dar solución a lo planteado, explicó ante sus compañeros lo ocurrido y la operación precisa para encontrar la respuesta y estableció diferencias entre los distintos tipos de situaciones presentadas, haciendo explícitas sus construcciones mentales en relación con el concepto.

A lo largo del trabajo realizado por la estudiante, se observó su progreso para dar solución a situaciones relacionadas con las estructuras de tipo aditivo, apreciándose cómo empleó de manera concreta, diferentes procesos para dar solución a dichas situaciones, la estudiante realizaba procesos de análisis y hacía inferencias para determinar la forma correcta para resolverla.

..

A continuación se presenta la triangulación de la información, analizada durante este capítulo, donde puede apreciarse la confiabilidad de los datos obtenidos, a partir de la utilización de las diferentes herramientas metodológicas.

4.8. Triangulación de la información

Cuando se realizan procesos de investigación, se requiere de una interpretación que proporcione seguridad acerca de los resultados encontrados, el proceso de triangulación posibilita la coherencia en el análisis de la información y permite que éste sea más riguroso; según Campbell y Fiske (1959): “Para conseguir constructos útiles e hipotéticamente realistas en una ciencia se requieren métodos múltiples que se centren en el diagnóstico del mismo constructo desde puntos de observación independientes, mediante una especie de triangulación”. (Citado por Stake, 1999, p. 99). En esta investigación se emplearon, como herramientas de recolección de información: Entrevistas de carácter socrático, observaciones y mapas conceptuales, todo con el propósito de analizar la comprensión de los estudiantes, en relación con las estructuras de tipo aditivo.

La investigación se apoyó en la triangulación metodológica, la cual hace referencia a la coherencia entre los métodos empleados. “Cuando hablamos de métodos en los estudios de casos, nos referimos una vez más sobre todo a la observación, la entrevista y la revisión de documentos” (Stake, 1999, p. 99). En esta ocasión se consideró pertinente la triangulación, dado que permitió hallar la relación e interpretación de los datos, de acuerdo a la información recolectada, con cada una de las técnicas. Las entrevistas de carácter socrático, actividades para la observación y la construcción de mapas conceptuales, estuvieron orientadas hacia la comprensión de conceptos relacionados con las estructuras de tipo aditivo como: Colección, número y operaciones de adición y sustracción, en relación con las categorías de composición y transformación.

En el caso de Juana pueden observarse coincidencias en los tres instrumentos como se presenta a continuación:

③ la Figura 1 para mi es un conjunto porque es un grupo de dulces.
 la Figura 2 para mi es un conjunto porque es un grupo de personas.

Ilustración 28. Juana - Actividad A.1.1. Punto 3 fase 1.

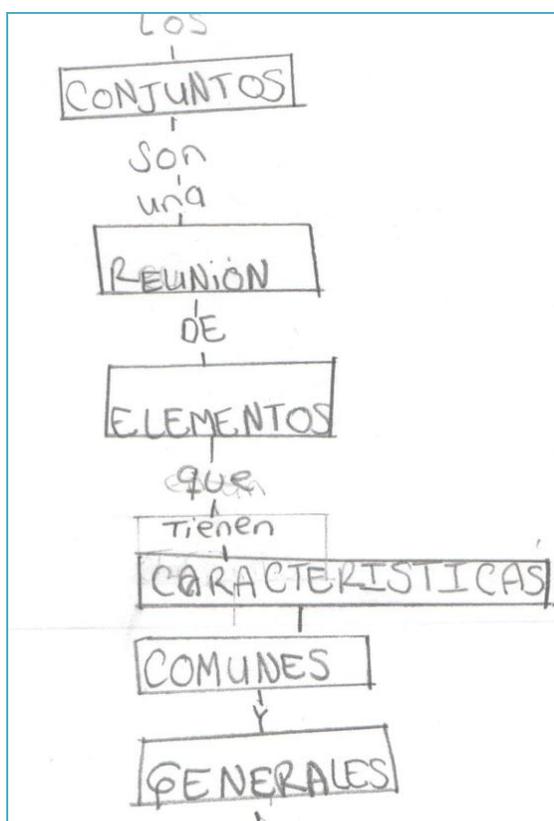


Ilustración 29 Juana - Apartado Mapa Conceptual, fase 1.

4. Al organizar el conjunto de círculos y clasificarlos teniendo en cuenta el tamaño puede decirse que:
- Hay círculos blancos y azules
 - Hay tres conjuntos de círculos
 - Hay solo círculos grandes
 - Todos los círculos son de igual tamaño
 - Explica la respuesta seleccionada: porque tenían va-
rios tamaños como = grande, medianas
y pequeños

Ilustración 30 Juana - Situación A.1.2.1., punto 4, Entrevista, fase 1.

Puede observarse en los apartados presentados, que cada una de las actividades del Módulo de Aprendizaje, estaban orientadas hacia un mismo propósito, en este caso particular, puede apreciarse la claridad con respecto al concepto de colección en el caso de Juana durante la primera fase, lo cual pudo contrastarse al analizar los tres métodos empleados.

Camila también aportó información, que pudo corroborarse, a la hora de analizar los tres métodos empleados, para la recolección de la información, como se presenta:

3. La forma apropiada para calcular la disminución presentada en el número de globos es:
- $5 + 3 = 8$
 - $8 - 3 = 5$
 - $8 + 5 = 13$
 - $8 - 5 = 3$
- Explica tu respuesta: por que a 8 le disminuyo 5
me que dan 3

Ilustración 31. Camila: Situación A.3.1.1., punto 3, Entrevista, fase 3.

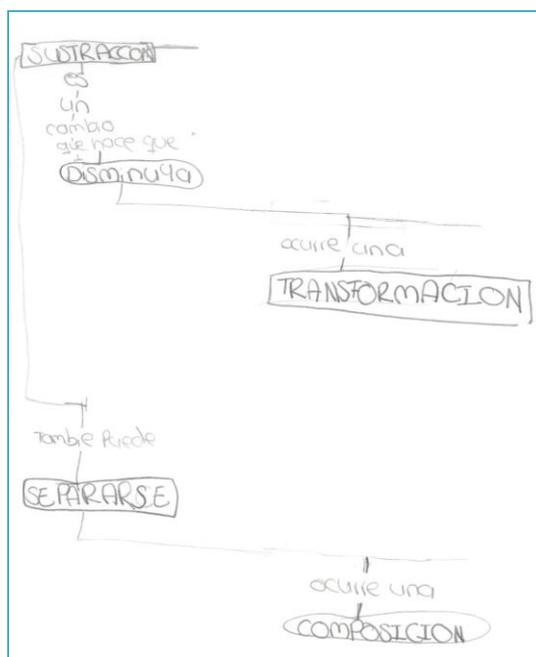


Ilustración 33: Camila: Apartado mapa, fase 3.

b.

Figura. Imagen que muestra la separación entre los elementos de un conjunto.

Explica la situación que se presenta: Hay un conjunto de 16 fichas de colores separaron 7 fichas de color rosado. y que quedan nueve de color azul.

Figura A.3.10: Imagen que muestra la separación entre los elementos de un conjunto.

Ilustración 32. Camila - Actividad A.3.3., situación 1b.

Las diferentes metodologías abordadas en la fase 3 del Módulo de aprendizaje, permitieron que Camila hiciera explícitas sus construcciones con respecto a las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo, al observar sus registros en la entrevista,

..

La construcción del Mapa Conceptual, la situación propuesta por David y sus respuestas en la entrevista socrática, permiten afirmar que, el estudiante, reconoce las categorías de las estructuras de tipo aditivo, puede hacer referencia a ellas empleando el lenguaje adecuado e incluso, proponer sus propias situaciones, a partir de la categoría de composición.

A partir de la categorización y triangulación de la información, puede aludirse la pertinencia de las herramientas empleadas, respecto a las entrevistas de carácter socrático, los tres casos apuntaron a la descripción de los procesos realizados, para dar solución a situaciones de tipo aditivo, teniendo en cuenta aspectos como la componente visual – geométrica, refinamiento del lenguaje y red de relaciones construida en torno al concepto.

Las observaciones estuvieron conformadas por actividades enmarcadas en las fases del modelo de van Hiele y permitieron observar el desempeño de los estudiantes, al dar solución a diversas situaciones, relacionadas con la estructura aditiva. Adicionalmente, los mapas conceptuales elaborados posibilitaron observar la red de relaciones construida en torno al concepto.

Los tres métodos permitieron que los estudiantes ilustraran sus comprensiones frente a los conceptos trabajados. Estos identificaron características y se apropiaron de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo.

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones surgidas, a partir del desarrollo de este trabajo de investigación.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

El análisis de la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero, fue posible a partir de la implementación de experiencias de aprendizaje enmarcadas en cada una de las fases del modelo de van Hiele.

A continuación se presentan los resultados que surgieron del proceso de investigación, los cuales están en correspondencia con los objetivos trazados y con el planteamiento de la pregunta de investigación.

5.1. Alcance de los objetivos

El alcance de los objetivos propuestos, se hizo evidente en el análisis de la información presentada, para cada uno de los casos particulares en las diferentes fases de aprendizaje. Este aspecto se visualiza, en la descripción de los siguientes ítems, los cuales describen la consecución del objetivo general y los objetivos específicos.

5.1.1. Alcance de los objetivos específicos

El alcance de los objetivos específicos apuntó a la determinar características que debe abordar el estudiante en relación con las estructuras de tipo aditivo, en cada una de las fases del modelo de van Hiele y la descripción de la forma como los estudiantes del grado tercero, abordan situaciones apoyadas en la visualización. Los objetivos específicos, presentados en el trabajo de investigación, fueron los siguientes:

• Determinar las características para cada una de las fases del modelo de van Hiele, que el estudiante debe abordar en el proceso de comprensión de las estructuras de tipo aditivo.

• Describir la forma como los estudiantes del grado tercero, abordan experiencias de aprendizaje, apoyadas en la visualización, que permitan el análisis de sus procesos de comprensión, en relación con las estructuras de tipo aditivo.

Los anteriores objetivos fueron alcanzados porque, en el desarrollo de las diferentes experiencias, se fueron construyendo y refinando los descriptores de fase, que dan cuenta de las características, que el estudiante debe abordar en el proceso de comprensión de las estructuras de tipo aditivo para cada una de las fases del modelo de van Hiele, (Sección 5.2.) y conjuntamente se estructuró un Módulo de Aprendizaje (Apéndice A), el cual se presenta como anexo en la investigación, que permitió describir la forma como los estudiantes del grado tercero, abordan experiencias de aprendizaje, apoyadas en la visualización. El cumplimiento de estos dos objetivos, permitió el alcance del objetivo general de esta investigación.

5.1.2. Alcance del objetivo general

La implementación de las cinco fases del modelo educativo de van Hiele, permitió abordar experiencias de aprendizaje, articuladas en la componente visual geométrica del concepto. Éstas posibilitaron la construcción de redes de relaciones, que favorecieron la comprensión de las estructuras de tipo aditivo y el refinamiento de los razonamientos, por parte de los estudiantes.

Al analizar la comprensión de los estudiantes, particularmente en el grado tercero de Básica Primaria, se puede concluir que las fases de aprendizaje del modelo, como estrategia metodológica, permiten la adquisición de nuevos procesos de razonamiento. Juana (Sección

4.4.4.2), David (Sección 4.5.5.2), y Camila (Sección 4.6.3.2), mostraron avances en sus formas de razonamiento, empleando un lenguaje refinado y propio de las Matemáticas, a medida que avanzaron en el desarrollo del Módulo de Aprendizaje.

Se observó que, en la primera fase, los estudiantes recurrían a acciones como el conteo y cálculos mecánicos, adiciones o sustracciones en situaciones matemáticas que implicaban enunciados de tipo verbal, así se observó al indagar a Camila por sus saberes previos (Sección 4.6.1.4., solución a la situación A.1.2.3., de la entrevista).

Posteriormente, el desarrollo de actividades en las fases siguientes, favoreció el adecuado uso de lenguaje en relación con las estructuras de tipo aditivo, identificándolas por su estructura global, para el caso de Camila, se observó apropiación al resolver situaciones presentadas en el Módulo de Aprendizaje (Situación A.5.1.5.), evidenciando el reconocimiento de estas estructuras (Sección 4.6.5.4.).

Además, los estudiantes elaboraron estrategias personales, para la resolución de situaciones y, finalmente se evidenció en sus manifestaciones verbales que existían construcciones mentales, más elaboradas en relación con el concepto de estructuras de tipo aditivo. Juana mostró sus construcciones mentales dando explicaciones coherentes ante situaciones presentadas en la fase 5 del Módulo de Aprendizaje (Sección 4.4.5.2).

De esta manera puede observarse cómo la implementación de actividades, apoyadas en la componente visual geométrica, para cada una de las fases de aprendizaje del módulo, contribuyeron a al análisis de la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, desde sus categorías de composición y transformación. Así pudo apreciarse en las explicaciones presentadas por David, ante situaciones presentadas en la entrevista, donde utilizó, adecuadamente, las operaciones de adición y sustracción en situaciones del contexto. (Sección 4.5.5.3.).

5.2. Descriptores de fase

Los descriptores de fase, obtenidos en la investigación (Ver sección 4.2), se convierten en un conjunto de características, que dan cuenta de los aspectos fundamentales para abordar las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero.

Es importante resaltar que estos descriptores, se enfocan en la componente visual – geométrica del concepto y, que implican el conjunto de condiciones que llevan al estudiante, a comprender las estructuras, desde un nivel básico, hasta el nivel de visualización del modelo educativo de van Hiele.

5.2.1. Descriptores para la fase 1: Información

Los descriptores propuestos, para esta fase de aprendizaje, permiten identificar los saberes previos, en relación con los conceptos propios de las estructuras de tipo aditivo, así como el reconocer los materiales y actividades a realizar, durante el desarrollo de las experiencias, que conforman el Módulo de Aprendizaje, como se presenta a continuación:

Descriptor 1: Determina características comunes en una colección de objetos. (A una colección de objetos la nombra por sus características).

Este descriptor permite observar el reconocimiento que tienen los estudiantes del concepto de colección, para ello se presenta una colección de objetos y se describen las características comunes (Sección 4.4.1.2., Sección 4.5.1.2., Sección 4.6.1.2.)

Los conocimientos previos de los estudiantes, en relación con el concepto de colección, se ilustran al presentarse una colección de objetos e indicar la característica común, que permite agruparlos como un conjunto.

Descriptor 2: Realiza agrupaciones de acuerdo a características comunes con los elementos de una colección.

En este caso, a partir de una colección, los estudiantes pueden realizar nuevas agrupaciones.

..

Cuando se presenta una colección de objetos, apoyada en la componente visual, los estudiantes realizan agrupaciones, teniendo en cuenta las características comunes de sus elementos. Juana (Sección 4.3.1.3.), David (Sección 4.4.1.3), (Sección 4.5.1.3), demostraron sus conocimientos realizando estas agrupaciones.

Descriptor 3: Agrupa elementos de acuerdo a características comunes a partir de diferentes colecciones presentadas.

Este descriptor permite indagar la forma cómo los estudiantes reconocen las características comunes en diferentes colecciones, para realizar agrupaciones.

Al visualizar diferentes colecciones, los estudiantes realizan nuevas agrupaciones, de acuerdo a características comunes entre sus elementos. (Sección 4.3.1.3.), (Sección 4.4.1.3), (Sección 4.5.1.3).

Descriptor 4: Le asigna un número natural a una colección de objetos con características comunes.

Con este descriptor se observan los conocimientos que tiene el estudiante sobre el concepto de número, se presentan colecciones para asignar una cantidad numérica y se realizan agrupaciones de acuerdo a características comunes. Los estudiantes asignan cantidades a las colecciones, recurren al conteo para formar agrupaciones.

Cuando los estudiantes reconocen características comunes en una colección de objetos, pueden asignarle una cantidad numérica y además pueden reunir las en un solo conjunto. Esto se logró cuando los estudiantes se enfrentaron a las situaciones presentadas para la fase 1, en el Módulo de Aprendizaje, mostrando el reconocimiento de las estructuras. (Sección 4.3.1.1., Sección 4.4.1.1., Sección 4.5.1.1.).

Descriptor 5: Dado un número natural construye colecciones de objetos que representan el número.

Este descriptor permite establecer la cantidad total de una colección, reunir y separar cantidades y también agregar o disminuir la cantidad. Juana (Sección 4.3.1.4), David (Sección 4.4.1.4) y Camila (Sección 4.5.1.4), al enfrentarse a situaciones propuestas para la fase 1, de

..

acuerdo al Módulo de Aprendizaje, mostraron desempeños acordes con lo propuesto en este descriptor).

Apropiarse del concepto de número, brinda la posibilidad de enfrentarse a situaciones matemáticas, como asignar una cantidad a una colección y realizar acciones propias de las estructuras de tipo aditivo.

5.2.2. Descriptores de la fase 2: Orientación dirigida

Los descriptores, para esta fase, se convierten en una herramienta valiosa para las prácticas de aula, ya que permiten orientar los procesos de enseñanza en torno a las estructuras de tipo aditivo. La orientación dirigida permite, al docente, generar pautas que lleven a los estudiantes, a un aprendizaje de los conceptos de estructura de tipo aditivo. A continuación se describen los descriptores de la fase 2, con el fin de brindar una herramienta, a los docentes, para sus prácticas de aula en la enseñanza de las estructuras de tipo aditivo.

Descriptor 1: Al comparar elemento a elemento dos colecciones, determina cuál de las dos tiene más elementos.

Este descriptor permite que, a partir de dos colecciones, se realicen comparaciones y se establezcan relaciones para determinar cuál colección tiene mayor o menor número de elementos. El cumplimiento de este descriptor se evidenció al observar la solución de las situaciones por parte de los estudiantes (Sección 4.3.2.1., Sección 4.4.2.1. y Sección 4.5.2.1.).

Cuando se presentan colecciones apoyadas en la componente visual – geométrica, los estudiantes reconocen características comunes, establecen en cuál de ellas hay mayor o menor cantidad, y establecen esta diferencia de forma numérica.

Descriptor 2: Reconoce el número fijo a de elementos que se ha añadido a una colección que tiene b elementos para formar una secuencia.

Este descriptor permite establecer la cantidad fija que se añade a una cantidad inicial para formar una secuencia. Las actividades en torno a este descriptor están apoyadas en la

componente visual geométrica, empleando principalmente la recta numérica e imágenes relacionadas con el entorno. Cuando Juana, David y Camila se enfrentaron a situaciones del módulo, se dio cumplimiento a lo propuesto en este descriptor. (Sección A, Situación A.2.2.2.).

Adicionalmente, este descriptor permite describir situaciones a partir de observaciones y establecer el número fijo añadido en una secuencia.

Las situaciones presentadas a partir de imágenes contextualizadas, permiten a los estudiantes: Reconocer regularidades en una secuencia y establecer la diferencia numérica entre los intervalos, analizar desde el entorno y la relación con el espacio, qué tan lejos o qué tan cerca está un objeto del otro y cuánto le falta o sobra a una cantidad para ser igual a otra. (Sección 4.3.2.3, Sección 4.4.2.3, Sección 4.5.2.3.).

Descriptor 3: Representa en forma equivalente un número cualquiera utilizando composición y descomposición.

Este descriptor permite que el profesor, observe cuando el visualiza la equivalencia de una cantidad, a partir de su composición y descomposición, tanto de forma visual como numérica, reconociendo la formación de la totalidad de una estructura.

La componente visual - geométrica permite que los estudiantes establezcan relaciones de equivalencia, identificándolas en la descomposición y composición de un número, además, posibilita que los estudiantes realicen acciones propias de las categorías composición (reunir y separar) y transformación (el aumento o disminución) con respecto a las estructuras de tipo aditivo. (Sección 4.3.2.3, Sección 4.4.2.3 y Sección 4.5.2.3.).

Descriptor 4: Determina el número m que le sobra o que le hace falta a una colección de n elementos, para que tenga el mismo número de elementos de otra colección.

Este descriptor permite observar el acercamiento a los conocimientos propios de las categorías de las estructuras de tipo aditivo. A partir de experiencias de aprendizaje dirigidas, es posible relacionar cantidades, argumentar cuál es mayor y cual menor, para determinar cuando ocurre un aumento o disminución en la cantidad. (Sección 4.3.2.1., Sección 4.4.2.1. y Sección 4.5.2.1.).

Al dirigir a los estudiantes para que determinen y describan cuánto le sobra o hace falta a una cantidad, para tener el mismo número de elementos de un conjunto, es posible llevarlos al reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, como una estructura en la cual ocurren cambios, que hacen que la cantidad aumente o disminuya.

Descriptor 5: Separa y reúne elementos, que tienen características comunes, asignándoles un número a cada uno de los subconjuntos formados.

Este descriptor permite observar cómo a partir de las características comunes en diferentes conjuntos, pueden separarse o reunirse sus elementos y formar otros conjuntos. (Sección 4.3.2.2., Sección 4.4.2.2., y Sección 4.5.2.2.).

Los conjuntos con m y n elementos, respectivamente, permiten formar subconjuntos, los cuales favorecen la apropiación de la categoría de composición. También, es posible reunir y separar elementos asignando la cantidad adecuada, comprobando si los cálculos obtenidos son o no razonables, teniendo en cuenta las características isomorfas de estas estructuras.

Descriptor 6: Determina en una situación de tipo aditivo los cambios que conllevan al aumento o disminución de una cantidad, (Transformación).

Este descriptor permite reconocer los cambios que ocurren en una estructura, los cuales implican un aumento o disminución de la cantidad a partir de agregar o quitar elementos al conjunto, de acuerdo a la operación matemática que se esté efectuando. (Sección 4.4.2.2., Sección 4.5.2.2., y Sección 4.6.2.2.).

5.2.3. Descriptores de la fase 3: Explicitación

La fase de explicitación permite que los estudiantes coloquen en evidencia cada uno de sus conocimientos y las construcciones mentales elaboradas en torno al concepto de estructuras aditivas. En el desarrollo del trabajo de campo y, en el análisis de la información para esta fase, se observó la importancia del lenguaje a través de las diferentes manifestaciones verbales, es

..

decir, hacer explícitos los razonamientos en torno a los conceptos, abre la posibilidad de encontrar relaciones entre los mismos, las cuales se evidencian en los nuevos argumentos que se construyen.

A continuación se describen las conclusiones para cada uno de los descriptores consolidados en esta fase.

Descriptor 1: Describe los cambios que ocurren en un conjunto cuando se realizan sobre sus elementos transformaciones (agregar o quitar elementos).

Con este descriptor es posible abordar la categoría de transformación presente en las estructuras de tipo aditivo, además, permite apoyarse en los aportes de información, brindados en algunas actividades del Módulo de Aprendizaje, para esta fase, con el fin de reconocer la operación matemática empleada en la solución de las situaciones. En el Módulo de Aprendizaje, se presentaron situaciones que permitieron que los estudiantes demostraran su comprensión frente a los cambios o transformaciones ocurridas. (Sección A.3.1.1.)

El intercambio de ideas, con los demás compañeros, como los diferentes aportes de información ilustrados en las entrevistas, permite reconocer la forma adecuada para solucionar una situación de transformación, las cuales implican cambios donde se agregan o quitan elementos de los conjuntos de acuerdo a las características de los mismos.

Descriptor 2: Explica verbalmente los cambios que ocurren en diversas situaciones aditivas del contexto que involucran composición o transformación.

La explicación verbal de los cambios ocurridos, en situaciones que involucran categorías de composición o transformación, permiten poner en evidencia las construcciones mentales y los razonamientos, sobre el concepto de las estructuras de tipo aditivo. La comunicación de las ideas posibilita a los estudiantes depurar sus razonamientos, de tal manera que sus argumentos se vuelven más precisos a medida que avanzan en la solución de actividades y problemas del Módulo de Aprendizaje, así se observó al analizar los argumentos presentados por Juana (Sección 4.4.3.2.), David (Sección 4.5.3.2.) y Camila (Sección 4.6.3.2).

Descriptor 3: Resuelve numéricamente diversas situaciones del contexto, que implican la utilización de estructuras de tipo aditivo.

Este descriptor permite la solución de situaciones de tipo aditivo de forma numérica. La importancia del conteo y la asignación de la cantidad correspondiente a un conjunto juegan un papel importante en el análisis de situaciones matemáticas. Cuando se solucionan problemas, es fundamental reconocer cuál es el valor resultante que se obtiene al efectuar las operaciones, el cual indica la cantidad de los elementos del conjunto de acuerdo a características semejantes. Los estudiantes demostraron el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, apropiándose del planteamiento de este descriptor (Sección 4.43.1., Sección 4.5.3.1. y Sección 4.6.3.1).

Descriptor 4: Plantea diversos problemas del contexto que involucran la utilización de estructuras de tipo aditivo.

Este descriptor permite observar la creatividad de los estudiantes a la hora de solucionar situaciones. La imaginación es una herramienta que apunta a encontrar nuevos detalles en algo que, a simple vista, parece tener una única solución. Es decir, la posibilidad de plantear diversas situaciones de la vida cotidiana, que involucren las estructuras de tipo aditivo, remite a una gama de posibilidades y alternativas para analizar la situación. En el Módulo de Aprendizaje pueden apreciarse actividades que posibilita a los estudiantes mostrar su creatividad para dar solución y proponer situaciones en contexto. (Sección A.3.2.).

5.2.4. Descriptores de la fase 4: Orientación libre

Los descriptores encontrados para esta fase, dan cuenta de la importancia del reconocimiento de los conocimientos adquiridos. En ésta, se hace evidente la capacidad, que tiene el estudiante, para abordar las diferentes situaciones problema, que involucran las categorías de composición y transformación, a través de su libre disposición para formular y solucionar diversas situaciones del contexto.

A continuación se exponen los descriptores hallados para esta fase.

Descriptor 1: Relaciona las estructuras de tipo aditivo con las operaciones básicas entre conjuntos.

Se puede decir que existe relación entre las operaciones básicas entre conjuntos y las estructuras de tipo aditivo. Las operaciones básicas entre conjuntos como la unión y el complemento, permiten realizar aumento o disminución de cantidades sobre un conjunto de acuerdo a las características del mismo. (Sección A.4.1., Situación A.4.1.1., Módulo de Aprendizaje).

Los estudiantes resolvieron diferentes situaciones de Unión y Complemento entre conjuntos, dándoles respuesta empleando la operación adecuada. (Sección 4.3.4.1, Sección 4.4.4.1., Sección 4.5.4.1.).

Descriptor 2: Recurre a representaciones gráficas e icónicas para dar solución a situaciones de enunciado verbal, que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.

El uso adecuado de las distintas representaciones para dar solución a una situación permite la realización de las operaciones de suma y resta de una forma más realista.

El reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo desde su estructura global, permite a los estudiantes determinar cuál representación visual es adecuada para el análisis de diferentes situaciones. (Sección 4.4.4.4., Sección 4.5.4.4., Sección 4.6.4.4.).

La implementación de estrategias apoyadas en las diferentes representaciones gráficas, permite a los estudiantes trascender en los cálculos mecánicos y generar procesos reflexivos de los mismos.

Los estudiantes se enfrentaron a situaciones de enunciado verbal, cuya solución implicaba representaciones gráficas e icónicas. Allí, ellos describieron, cual era la solución y representación más adecuada para resolver dicha situación. En el Módulo de Aprendizaje, es posible apreciar este tipo de experiencia (Sección A.4., Situación A.4.1.6.).

Descriptor 3: Visualiza en diferentes formas geométricas el efecto de añadir o quitar elementos con las mismas características a una colección.

La apropiación de la componente visual – geométrica permite establecer los efectos de añadir o quitar elementos geométricos a las diferentes formas.

Los estudiantes analizaron los cambios ocurridos en diferentes representaciones geométricas, describiendo en qué momento el cambio obedece a añadir o quitar partes de la misma. (Juana, Sección 4.4.4.3, David, Sección 4.5.4.3. y Camila Sección 4.6.4.3).

El reconocimiento de la adición y sustracción, como una estructura, permite visualizar los cambios ocurridos en diferentes representaciones geométricas, para establecer si se añaden o retiran partes que conforman la misma.

Descriptor 4: Utiliza diversas estrategias para dar solución a una situación que involucra las estructuras de tipo aditivo.

Con este descriptor se puede visualizar que en el contexto de las Matemáticas no existe una única vía de solución a los problemas. Es importante buscar diferentes alternativas y escoger la que sea coherente y explique de manera acertada el contexto del problema. (Sección 4.4.4.4., Sección 4.5.4.4., Sección 4.6.4.4.).

La apropiación de los conocimientos relacionados con las estructuras de tipo aditivo posibilita el manejo de diversas estrategias y la aplicación de las mismas.

Descriptor 5: Indaga y reflexiona sobre situaciones de la vida cotidiana que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.

El proceso de indagación sobre el aprendizaje de los conceptos, se filtra por las diferentes expresiones verbales en torno a los procesos reflexivos sobre el mismo. (Sección 4.4.4.2., Sección 4.5.4.2. y Sección 4.6.4.2.).

Aprender Matemáticas, no sólo se limita al conteo y asignación de cifras, implica indagación, reflexión y análisis sobre los procesos y los resultados obtenidos.

5.2.5. Descriptores de la fase 5: Integración

El conjunto de descriptores consolidados para esta fase reúne las características que dan cuenta de la asimilación del concepto de estructuras de tipo aditivo a través de las fases anteriores.

Es importante la fijación de los conocimientos, ya que, a través de éstos, se visualizan las construcciones mentales más elaboradas que dan cuenta del avance en el nivel de razonamiento.

Descriptor 1: Reconoce los elementos de las estructuras de tipo aditivo y los utiliza en la solución de situaciones problema.

La apropiación de conceptos como: Colección, número y categorías de composición y transformación, permite la manipulación de las estructuras de tipo aditivo de forma práctica y coherente.

El desarrollo de las actividades presentadas, de forma secuencial en el Módulo de Aprendizaje, permiten la apropiación de los conceptos que forman parte de las estructuras de tipo aditivo, así como su utilización en la solución de diferentes situaciones problema. Juana (Sección 4.4.5.1.), David (Sección 4.5.5.1., y Camila (Sección 4.6.5.1)

Descriptor 2: Interpreta situaciones de tipo aditivo a partir de sus representaciones, aplicando correctamente las operaciones básicas de adición y sustracción.

Cuando existe el reconocimiento de las diferentes representaciones, de las estructuras de tipo aditivo, es posible que los estudiantes trasciendan hacia la apropiación de diversas situaciones, apoyándose en el algoritmo formal de la adición y el de la sustracción, para dar solución a las mismas empleando la operación adecuada. El cumplimiento de este descriptor, puede verificarse al observar la apropiación de los estudiantes para hallar la solución a situaciones apoyadas en la componente visual – geométrica, utilizando los algoritmos formales (Sección 4.4.5.3, Sección 4.5.5.3. y Sección 4.6.5.3.).

Descriptor 3: Diferencia situaciones que implican la utilización de categorías de composición y de transformación.

Existen situaciones que implican la categoría de composición, o de transformación, o ambas. El reconocimiento de la categoría, empleada en la solución de una situación particular, favorece la contextualización de la misma para la identificación de la o de las operaciones matemáticas empleadas. (Sección 4.4.5.4, Sección 4.5.5.4. y Sección 4.6.5.4).

Los estudiantes se enfrentaron a situaciones que involucraron las categorías de composición y transformación y establecieron sus diferencias. Adicionalmente, reconocieron la relación entre las categorías y la operación matemática correspondiente.

Descriptor 4: Infiere y explica el proceso y operación matemática (adición o sustracción) a utilizar en el contexto de una situación de tipo aditivo.

Las inferencias frente a un proceso matemático implican la estructuración lógica de los razonamientos y la explicitación de argumentos contundentes frente a los mismos. Por esto, permitir a los estudiantes inferir sobre la ejecución de sus procesos favorece el enriquecimiento de la red de relaciones elaborada a partir de la apropiación del concepto. (Sección 4.4.5.2, Sección 4.5.5.2. y Sección 4.6.5.2).

Cuando el estudiante se enfrenta ante situaciones que involucran las estructuras de tipo aditivo y tiene la posibilidad de hacer inferencias, explicar procesos y emplear las operaciones de adición y sustracción, las acciones intencionadas demuestran su nivel de comprensión.

Los descriptores de fase fueron refinados a lo largo de la implementación de las experiencias de aprendizaje. Además, éstos permitieron la construcción de la Matriz de Categorías, la cual da cuenta de las características de los estudiantes cuando se encuentran en el nivel de visualización en relación con la comprensión de las estructuras de tipo aditivo.

5.3. Módulo de Aprendizaje

El diseño de un Módulo de Aprendizaje permitió establecer un orden secuencial en la aplicación de las actividades propuestas para cada una de las fases, lo cual posibilitó el análisis

de los datos recolectados en cada una de las mismas y la descripción del reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo por parte de los estudiantes.

Las experiencias de aprendizaje, que se llevan a cabo con los estudiantes, implican el desarrollo de actividades secuenciales que favorezcan la comprensión del concepto de estructuras de tipo aditivo y, su aplicación a situaciones del contexto. Es por esto que la entrevista y los mapas conceptuales del Módulo de Aprendizaje, se desarrollaron para cada una de las fases.

El uso de la Entrevista de Carácter Socrático, consolidada en un Módulo de Aprendizaje, permite analizar la comprensión que los estudiantes tienen de los conceptos matemáticos.

Los mapas conceptuales, construidos en cada una de las fases, permiten observar la forma cómo va creciendo la red de relaciones y cómo se va refinando el lenguaje.

El Módulo de Aprendizaje se convierte en una herramienta de apoyo a los docentes de la educación básica primaria, del currículo colombiano, ya que las estructuras de tipo aditivo, están en la base del aprendizaje de la Aritmética Elemental y permiten la consolidación y comprensión de otros conceptos en el ámbito matemático. (Sección A).

5.4. Componente visual geométrica

El desarrollo de actividades que involucran la componente visual favorece la adecuada configuración del concepto de estructuras de tipo aditivo. A partir de las diferentes representaciones, los estudiantes argumentan e infirieren la solución y los cambios ocurridos en una situación, empleando un vocabulario acorde al nivel de razonamiento en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele.

Las experiencias presentadas en cada una de las fases del modelo, acompañadas por la componente visual – geométrica, permite que, los estudiantes, manifiesten el reconocimiento de

..

las estructuras en su forma global desde las representaciones visuales. Este aspecto permite que los estudiantes efectúen procesos de análisis e interpretación y finalmente resuelvan las situaciones de forma numérica. (Sección 4.3.5.4.).

5.5. Respuesta a la pregunta de investigación

Los argumentos presentados anteriormente permiten dar respuesta a la pregunta de investigación: **¿Cuál es el proceso de comprensión, que los estudiantes del grado tercero de básica primaria adquieren, en relación con las estructuras de tipo aditivo, a partir de experiencias de aprendizaje enmarcadas en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele?**

Las experiencias de aprendizaje, planteadas de manera secuencial en el Módulo de Aprendizaje, permiten que los estudiantes se apropien de los conceptos relacionados con las estructuras de tipo aditivo, dando solución a diversas situaciones y empleando las categorías de composición y transformación propuestas por Vergnaud.

Los estudiantes utilizan las categorías propuestas por Vergnaud a partir del desarrollo de las experiencias de aprendizaje que involucran la componente visual – geométrica, siendo este componente un fundamento del aspecto simbólico de las estructuras de tipo aditivo.

La articulación de la componente simbólica con las fases del modelo de van Hiele, permitieron que el estudiante manifestara sus razonamientos dando cuenta de la comprensión del concepto. La comprensión que los estudiantes manifestaban, se hacía evidente en la forma de solucionar las situaciones problemas, aplicando no sólo algoritmos sino también soluciones relacionadas con la representación gráfica y las categorías de composición y transformación. Es decir, la solución a las situaciones era realizada por diferentes métodos y formas de razonamiento, bajo un fundamento matemático adecuadamente estructurado.

La ampliación de la red de relaciones por parte de los estudiantes ilustra la forma de estructuración de sus construcciones mentales en relación con el concepto de estructuras de tipo aditivo. De esta manera, el esquema propuesto por Vergnaud, les permitió reconocer las características globales de las estructuras de tipo aditivo, en correspondencia con la red de relaciones propuesta por van Hiele, la cual se evidencia en los mapas conceptuales elaborados (Ver mapas conceptuales Sección 4.4.5.4, Sección 4.5.5.4, Sección 4.4.5.4),

Adicionalmente, presentar a los estudiantes las operaciones de adición y sustracción, de forma paralela, conllevó al reconocimiento de las mismas como una sola estructura. (Sección 4.4., Mapa Conceptual 4.4).

Por otro lado, el apoyo en la componente visual geométrica y la utilización de aportes de información en la Entrevista de Carácter Socrático, posibilitaron comprensiones globales del concepto, las cuales se exhiben en los argumentos y los mapas conceptuales elaborados.

5.6. Nivel de razonamiento y descriptores hipotéticos.

Con la investigación se buscó que, los estudiantes, expresaran el reconocimiento de las características propias de las estructuras de tipo aditivo de forma global a través de experiencias de aprendizaje, fundamentadas en las fases del modelo de van Hiele, las cuales involucraban la componente visual geométrica y simbólica de dichas estructuras.

Es importante resaltar que, el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo de manera global, como una estructura que está formada por adiciones y sustracciones, las cuales deben trabajarse en el aula de clase, de forma paralela, permite ubicar a los estudiantes en el nivel 1 de reconocimiento visual, del modelo de van Hiele.

A continuación se describe el conjunto de características que presentaron los tres casos particulares del estudio, en relación al progreso en su nivel de razonamiento, dichas

..

características se consideran descriptores hipotéticos para el nivel 1 de reconocimiento visual, del modelo de van Hiele:

Descriptores hipotéticos para el nivel 1, de Reconocimiento visual

- Identifica características de las estructuras de tipo aditivo desde una componente visual geométrica. (Sección 4.4.5.3, Sección 4.5.5.3 y Sección 4.6.5.3)
- Reconoce las estructuras de tipo aditivo como un a totalidad identificándolas por su características globales. (Sección 4.4.5.1, Sección 4.5.5.1, y Sección 4.6.5.1.).
- Demuestra la adquisición de vocabulario propio del concepto de estructuras aditivas. (Sección 4.4.5.4, Sección 4.5.5.4, y Sección 4.6.5.4.).
- Reproduce esquemas y elabora estrategias personales para la resolución de diversas situaciones cotidianas. (Sección 4.4.5.4, Sección 4.5.5.4, y Sección 4.6.5.4.).
- Comunica los procedimientos utilizados y resultados obtenidos en la solución de situaciones de tipo aditivo. (Sección 4.4.5.4, Sección 4.5.5.4, y Sección 4.6.5.4.).
- Reconoce la forma como opera el concepto de estructuras de tipo aditivo y puede aplicarlo en distintas circunstancias de aprendizaje o en la solución de diversos problemas cotidianos. (Sección 4.4.5.4, Sección 4.5.5.4, y Sección 4.6.5.4.).

La realización del trabajo de campo, a partir de la implementación de experiencias de aprendizaje, para cada una de las fases, articuladas al Módulo de Aprendizaje, permitió plantear los anteriores descriptores hipotéticos, los cuales están relacionados con el nivel de reconocimiento visual, en relación con el modelo de van Hiele. Cabe aclarar que, el propósito de la investigación, es describir la comprensión de los estudiantes en relación con las estructuras de tipo aditivo. Sin embargo, el diseño de las experiencias, con un fuerte acompañamiento de la

..

componente visual – geométrica, conlleva a afirmar que los estudiantes se encuentran este nivel, es decir, que reconocen las estructuras de tipo aditivo desde su forma global.

5.7. Futuras líneas de investigación

Las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, como estrategia metodológica, apoyadas en la componente visual – geométrica, podrían emplearse para abordar otros conceptos de la Aritmética Elemental.

El Módulo de Aprendizaje es una herramienta de apoyo para el diseño de una Entrevista de Carácter Socrático, que permite caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes, en relación con las estructuras de tipo aditivo, para los diferentes niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele.

De acuerdo con lo anterior, es conveniente proponer la caracterización de los niveles de razonamiento, para las estructuras de tipo aditivo a partir del refinamiento de una Entrevista de Carácter Socrático.

También se pueden generar estrategias relacionadas con las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, apoyada en la componente visual – geométrica para contribuir a la comprensión de otros conceptos matemáticos, de importancia en la Aritmética Elemental. Además, pueden generarse otras propuestas investigativas, mediante el diseño de módulos que favorezcan la comprensión de conceptos matemáticos, como es el caso de las estructuras multiplicativas.

5.8. Participaciones en eventos

Durante el trabajo de investigación se participó en varios eventos de carácter nacional e internacional, los cuales permitieron la socialización de los avances desarrollados y dar a conocer la forma cómo la propuesta, contribuye a la Educación Matemática.

5.8.1. Participaciones nacionales

Los eventos realizados a nivel nacional permitieron la socialización del trabajo de investigación a partir de la modalidad de Comunicación Breve.

5.8.1.1. Comunicación breve – ponencia

El 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME 13, Medellín, Colombia, Octubre 11 al 13 de 2012.

El reconocimiento de estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele.

Resumen

La investigación tiene, como objetivo principal, describir el reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo, que hacen los estudiantes del grado tercero. Para ello, la propuesta se articula en el nivel de visualización, del modelo de van Hiele, se realizarán tres estudios de casos presentando experiencias de aprendizaje, de acuerdo a las fases del modelo, que permitan obtener como resultado la descripción del reconocimiento que los estudiantes hacen de las estructuras de tipo aditivo, de forma general como herramienta para la comprensión y aplicación de las mismas, en situaciones matemáticas y en grados posteriores.

Palabras clave: Estructuras aditivas, reconocimiento, visualización, fases de aprendizaje y aprendizaje.

5.8.1.2. Comunicación breve – ponencia

El 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME 14, Barranquilla, Colombia, Octubre 09 al 11 de 2013.

Situaciones en contexto, para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero.

Resumen

La comprensión de las estructuras de tipo aditivo influye en el aprendizaje de las operaciones básicas. El trabajo de investigación abordó la comprensión de éstas en estudiantes del grado tercero, se desarrolló implementando herramientas tales como: entrevistas de carácter socrático y observaciones. Éstas se estructuraron en relación con las fases del modelo educativo de van Hiele, lo cual permitió evidenciar las construcciones mentales y razonamientos de los estudiantes. La información recolectada fue analizada, mediante la codificación y categorización, con el fin de describir la comprensión en torno al concepto objeto de estudio. Finalmente, el producto obtenido se formalizó en un Módulo de Aprendizaje como aporte a los docentes en sus prácticas de aula.

Palabras clave: Comprensión, estructuras de tipo aditivo, visualización, fases del modelo de van Hiele y Módulo de Aprendizaje.

5.8.2. Participaciones internacionales

Los eventos de tipo internacional posibilitaron el intercambio de ideas y la presentación del trabajo, como aporte a la comunidad académica, a través de la participación de ponencias.

5.8.2.1. Ponencia

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 9, 10 y 11 de 2012.

Caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado tercero.

Contexto: En el área de Matemáticas, los docentes evidencian, constantemente, en sus prácticas educativas, aprendizajes memorísticos por parte de los estudiantes, particularmente, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San José del municipio de Betulia, por lo cual se hace importante analizar la forma en que, los estudiantes, razonan ante dichas situaciones con el fin de comprender y describir su razonamiento.

Objetivo general: Caracterizar los niveles de razonamiento de van Hiele en el análisis de situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en los estudiantes del grado tercero en la Institución Educativa San José del municipio de Betulia.

Metodología: El paradigma cualitativo se articula con los propósitos de la investigación, por lo tanto, se considera apropiado desarrollar el estudio de caso, puesto que permite describir, con detalle, cada una de las características del razonamiento de los estudiantes en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Resultados: Con la presente investigación se pretende realizar una descripción detallada de tres estudios de caso, donde se describen los procesos de razonamiento de los estudiantes, en cada uno de los niveles de van Hiele en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Conclusiones: Caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo de estudiantes del grado tercero.

Palabras clave: Niveles de razonamiento, estructuras de tipo aditivo, entrevista socrática y descriptores.

5.8.2.2. Ponencia

V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 8, 9 y 10 de 2013.

La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele.

Contexto: En el área de Matemáticas se puede identificar como el aprendizaje de algunos conceptos, exclusivamente las estructuras de tipo aditivo, son abordados desde aprendizajes memorísticos en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San José del municipio de Betulia, por lo cual se hace pertinente analizar la forma en que, los estudiantes, razonan ante dichas situaciones cuando son presentadas con apoyo de la componente visual geométrica, con el fin de comprender y describir su razonamiento.

Objetivos: Analizar la comprensión de las estructuras de tipo aditivo que adquieren los estudiantes del grado tercero a partir de experiencias de aprendizaje fundamentadas en las fases del modelo de van Hiele.

Metodología: Los fundamentos metodológicos de la investigación se articulan al paradigma cualitativo y se estructuran consolidando herramientas para observar el proceso de razonamiento realizado por cada uno de los participantes en la investigación. Se considera apropiado desarrollar el estudio de casos que permite describir con detalle la comprensión que adquieren los estudiantes en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Resultados: Con la presente investigación se realiza la descripción de la comprensión de los estudiantes, en torno a las estructuras de tipo aditivo, se consolida un módulo de aprendizaje, con base en las fases del modelo de van Hiele, que se convierte en una herramienta de apoyo, para los docentes de la educación básica primaria del currículo colombiano.

Conclusiones: El análisis de la información recolectada deja ver que el desarrollo de actividades, que involucren la componente visual geométrica, favorece la adecuada configuración del concepto de estructuras de tipo aditivo.

Palabras clave: Comprensión, estructuras de tipo aditivo, visualización, fases del modelo de van Hiele y Módulo de Aprendizaje.

5.8.3. Memorias de eventos

Durante el desarrollo del trabajo de investigación y la participación en diferentes eventos, se realizaron algunas producciones escritas, las cuales han sido publicadas en memorias de eventos y revistas como se presenta a continuación.

5.8.3.1. La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo de van Hiele

La participación en el 13 Encuentro colombiano de Matemática Educativa, permitió la participación como ponente de una Comunicación Breve (ver 5.7.1.1. y Apéndice B) y la publicación en las memorias de dicho evento:

Estado: Publicado

Revista: Memorias Del 13 Encuentro Colombiano De Matemática Educativa, 1ra edición: 2013. Sello Editorial Universidad de Medellín, p. 105. ISBN: 978-958-8815-11-4

5.8.3.2. Caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado tercero.

El IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, posibilitó la socialización de avances en el trabajo de investigación como ponente y además publicó el resumen de dicha ponencia (ver 5.7.2.1. y Apéndice B), en la revista de resúmenes de dicho evento.

Estado: Publicado

Revista: Resúmenes IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, 3a. edición 2012. Universidad de Medellín, p. 125.

ISBN: 978-958-8692-77-7

5.8.3.3. La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele.

El V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, se convirtió en la oportunidad para socializar avances en el trabajo de investigación como ponente (ver 5.7.2.2. y Apéndice B), el resumen presentado fue publicado en el libro de resúmenes de este congreso.

Estado: Publicado.

Revista: Resúmenes V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, 4a. edición 2013. Universidad de Medellín, p. 135.

ISBN: 978-958-8815-13-8

5.8.4. Artículos

El desarrollo del trabajo de investigación también facilitó la publicación de artículos en revistas, como se presenta a continuación:

5.8.4.1. Situaciones en contexto para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero.

La participación en el 14 Encuentro Colombiano De Matemática Educativa, ECME 14, dio la oportunidad de socializar avances del trabajo de investigación como ponente de una Comunicación Breve (ver 5.7.1.2. y Apéndice B) y posibilitó la publicación del artículo en la Revista Científica del Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Estado: Publicado

Revista: Revista Científica del Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas / ISSN 0124 2253/ octubre de 2013, p. 296 / edición especial / Bogotá, D.C.

5.8.4.2. Comprensión de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes de la básica primaria

La Universidad de Antioquia y la revista uni-pluri/versidad, brindó la oportunidad de participación, con un artículo relacionado con el trabajo de investigación, cuyo resumen se presenta a continuación:

Resumen.

En las Matemáticas las estructuras de tipo aditivo influyen en el aprendizaje de las operaciones básicas. El trabajo de investigación¹, que se reporta en este artículo, abordó la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes de la básica primaria y se desarrolló a través de la implementación de herramientas como las entrevistas de carácter socrático y observaciones. Éstas se estructuraron en relación con las fases del modelo educativo de van Hiele, lo cual permitió poner, en evidencia, las construcciones mentales y los razonamientos de los estudiantes. La información recolectada en el trabajo de campo, fue analizada a través de un proceso de codificación y categorización, lo cual posibilitó describir la comprensión de los estudiantes, en torno al concepto objeto de estudio. Finalmente, el producto obtenido se formalizó en un Módulo de Aprendizaje, que es una herramienta, que aporta a los docentes en sus prácticas de aula para abordar el concepto de estructuras aditivas, particularmente en estudiantes del grado tercero. (Ver Apéndice B).

Palabras Clave: Comprensión, estructuras de tipo aditivo, visualización, fases del modelo de van Hiele y Módulo de Aprendizaje.

Estado: En proceso de aprobación.

Revista: Revista Uni-pluri/versidad, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.

La participación en diferentes eventos, permite mostrar a la comunidad académica las reflexiones que surgen en torno a la Educación Matemática y comprensión de conceptos. Además, es la oportunidad para recibir aportes que contribuyen al refinamiento del trabajo de investigación, en la medida que se avanza en su desarrollo.

Adicionalmente, la divulgación del trabajo de investigación, permite que los docentes reflexionen acerca de las prácticas de aula, conozcan estrategias que pueden brindar aportes a la cualificación de las mismas y de esta forma, puedan contribuir a la calidad educativa.

¹ Trabajo de investigación “La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele”. Maestría en Educación con énfasis en docencia de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Colombia, 2013.

Apéndice A

Módulo de aprendizaje

El presente Módulo de Aprendizaje, contiene el conjunto de experiencias de aprendizaje, que se han diseñado e implementado durante el trabajo de investigación; éste ha sido la herramienta que permitió la organización, de cada una de las actividades de manera secuencial y de esta forma, analizar la comprensión de los estudiantes en torno a las estructuras de tipo aditivo.

Las actividades presentadas están en relación directa con cada una de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele y en correspondencia con los descriptores hipotéticos de fase construidos. Este módulo se convierte en una herramienta de apoyo a los maestros, para sus prácticas escolares, particularmente en los momentos que requieran abordar el concepto de estructuras de tipo aditivo, con los estudiantes del grado tercero.

A.1. Fase 1: Información

Experiencia 1: “Agrupo y separo cantidades”.

Esta fase permite el intercambio de información. El docente reconoce los saberes de los estudiantes y al mismo tiempo comparte con ellos los conceptos y la metodología a trabajar. Por lo tanto, la experiencia que se presenta a continuación, busca el reconocimiento de los saberes que poseen los estudiantes en relación con las características de una colección de objetos y noción de cardinal, adición y sustracción. Adicionalmente, a partir de la interacción con los estudiantes, se presentan los conceptos a trabajar, problemas, material a utilizar y la metodología para el desarrollo de las actividades. El desarrollo de las situaciones propuestas en los instrumentos empleados pretende el cumplimiento de los siguientes descriptores:

Descriptores de fase 1

1. Determina características comunes en una colección de objetos. (A una colección de objetos la nombra por sus características).

- ..
2. Realiza agrupaciones de acuerdo a características comunes con los elementos de una colección.
 3. Agrupa elementos de acuerdo a características comunes, a partir de diferentes colecciones presentadas.
 4. Le asigna un número natural a una colección de objetos con características comunes.
 5. Dado un número natural construye colecciones de objetos que representan el número.

A.1.1. Actividad 1: Conducta de entrada

Se considera pertinente en esta fase de información, presentar la siguiente actividad, la cual indaga saberes previos en relación con el concepto de colección.

1. Representa cada una de las vocales y luego completa:

Podríamos decir que las vocales forman un _____.

Los elementos del conjunto vocales son _____.

2. Representa conjuntos que hayas observado con objetos de la casa, la calle y otros que recuerdes, realiza una descripción de las características de cada uno de ellos.
3. Explica si las imágenes que observas a continuación son para ti conjuntos y por qué.

Las características que identifican la totalidad de los elementos del conjunto de la imagen **a** son:

Las características de la totalidad de los elementos del conjunto de la imagen **b** son:

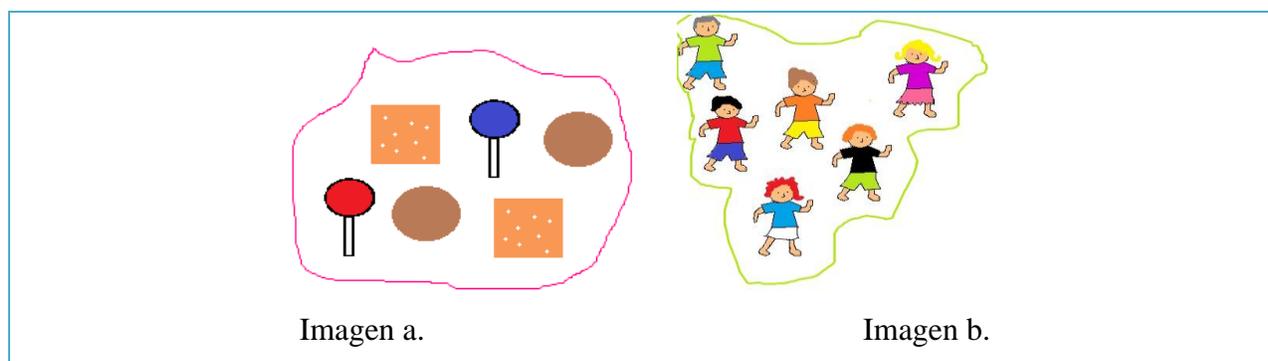


Figura A 1. Representación de dos colecciones.

A.1.2. Guión Entrevista de Carácter Socrático

El guión de entrevista que se presenta a continuación se considera acorde para esta fase, ya que tiene en cuenta el concepto de colección y número, características comunes de elementos para realizar agrupaciones, asignación de cantidades correspondientes a las colecciones involucradas y construcción de otras colecciones a partir de un número, esto para indagar los saberes previos de los estudiantes y a su vez mostrarles los conceptos que se van a tener en cuenta para abordarse a lo largo del trabajo.

Protocolo de entrada

Hola _____

Con la presente entrevista se pretende conocer lo que sabes acerca de la suma y la resta. Es importante aclarar que, tus respuestas, no afectan la valoración en el área de Matemáticas, porque esta actividad no es una evaluación.

Muchas gracias por participar de esta entrevista, tus aportes son muy importantes.

Inicio

En tus clases de Matemáticas, cuando estás trabajando la suma y la resta escuchas las explicaciones del profesor(a) y realizas las actividades, es posible que sientas agrado con ellas y

que desees aprender más. En esta ocasión te invito a hacer esta entrevista para ver que conoces de la suma y la resta.

Aporte de información A.1.2.1.

Una colección de varios elementos se llama conjunto. En un conjunto se pueden encontrar características que son generales para todos los elementos y otras para algunos de ellos, por ejemplo, en un conjunto de útiles escolares, el color, el tamaño, la cantidad, la forma, entre otros, son propias de algunos elementos del conjunto y esto permite generar algunas agrupaciones.

Situación A.1.2.1.

En una tarde lluviosa Laura no pudo salir a jugar con sus amigos, así que tomó su caja de colores y empezó a pintar. Pintó algunos cuadrados que parecían un edificio lleno de cuartos de colores; al pensar en la lluvia dibujó algunos círculos representando burbujas de agua y triángulos en representación de los rayos.

Observa el dibujo que pintó Laura:

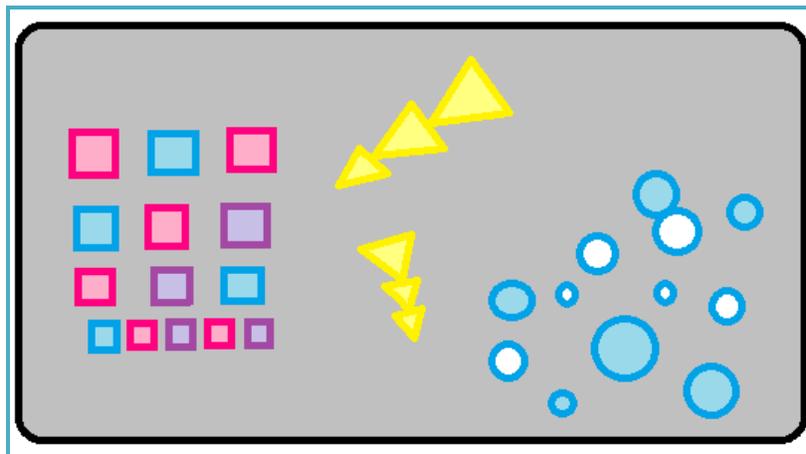


Figura A 2. Imagen de una tarde lluviosa, representada por Laura.

1. Selecciona las características que cumplan todas las figuras que están en el recuadro:
 - a. Están coloreadas.
 - b. Tienen forma circular.

..

c. Están coloreadas de color azul.

d. Tienen forma triangular.

Otra:

2. Selecciona las características que consideres que hacen parte de todos los elementos de la Figura A.1.2.1:

a. Forma cuadrada: _____

b. Color: _____

c. Forma circular: _____

d. Forma geométrica: _____

Otra:

Aporte de información A.1.2.2.

De la colección general, representada por Laura, puede observarse que todos los elementos son figuras geométricas, sin embargo, existen algunas características que los diferencian: Tamaño, forma, color, entre otras.

3. Al agrupar los elementos, teniendo en cuenta la forma, como característica, se encuentran:

a. Tres grupos de figuras diferentes, formados por triángulos, círculos y cuadrados

b. Dos grupos de figuras diferentes, formados por rombos y triángulos.

c. Dos grupos formados por triángulos y círculos.

d. Solamente un grupo formado por cuadrados.

Explica la respuesta seleccionada:

4. Al organizar el conjunto de círculos y clasificarlos, teniendo en cuenta el tamaño, puede decirse que:

- a. Hay círculos blancos y azules
- b. Hay tres conjuntos de círculos
- c. Hay sólo círculos grandes
- d. Todos los círculos son de igual tamaño

Explica la respuesta seleccionada:

Aporte de información A.1.2.3.

Cuando tengo un conjunto con varios elementos, se pueden encontrar, en algunos de ellos, características comunes para formar otras agrupaciones. A estas agrupaciones las llamamos conjuntos.

Situación A.1.2.2.

Mientras transcurría el recreo Juan y Sofía fueron a la tienda escolar, Juan compró dos bombones, dos bolitas de chocolate y dos nueces, Sofía, por su parte, compró tres nueces, dos bombones y dos bolitas de chocolate. Luego decidieron reunir todos sus dulces, teniendo en cuenta las siguientes características:

Conjunto formado por aquellos elementos que son dulces.

Conjunto formado por elementos que tienen forma de cuadrado.

Conjunto de elementos que tienen forma circular.

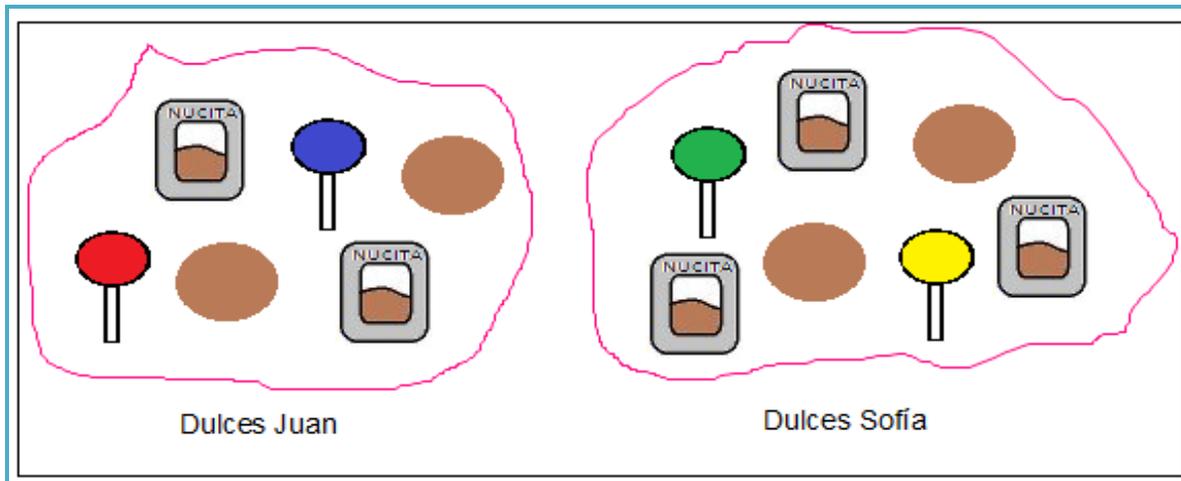


Figura A 3. Conjuntos de dulces comprados por Juan y Sofía.

5. Cuando se tiene en cuenta la característica dulces resulta un conjunto formado por:

- Nucitas y bolitas de chocolate.
- Bombones, nucitas y bolitas de chocolate.
- Sólo bombones.
- Bombones y nucitas.

Explica tu respuesta:

6. Al tener en cuenta el grupo de elementos, de forma circular, resulta un conjunto formado por:

- Bombones y nucitas.
- Bolitas de chocolate y nucitas.
- Bolitas de chocolate y paletas.
- Bombones y bolitas de chocolate.

Explica tu respuesta:

7. Al agrupar los elementos que tienen forma rectangular, resulta el conjunto formado por:

- a. Bolitas de chocolate solamente.
- b. Bombones solamente.
- c. Nueces y bolitas de chocolate.
- d. Nueces solamente.

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.1.2.4.

Una colección de varios elementos se llama conjunto y la cantidad de elementos representa los elementos del conjunto, por ejemplo si tienes 5 manzanas y tu mejor amigo tiene 3 manzanas, entre ambos tendrían un conjunto de 8 manzanas.

Situación A.1.2.3.

Juan, Carlos, Lucas y Santiago se encuentran jugando con canicas de cristal en el patio de la escuela, para su juego: Carlos tiene 3 canicas de cristal negras, Lucas 4 de colores, Juan 5 transparentes y Santiago 6 de colores.

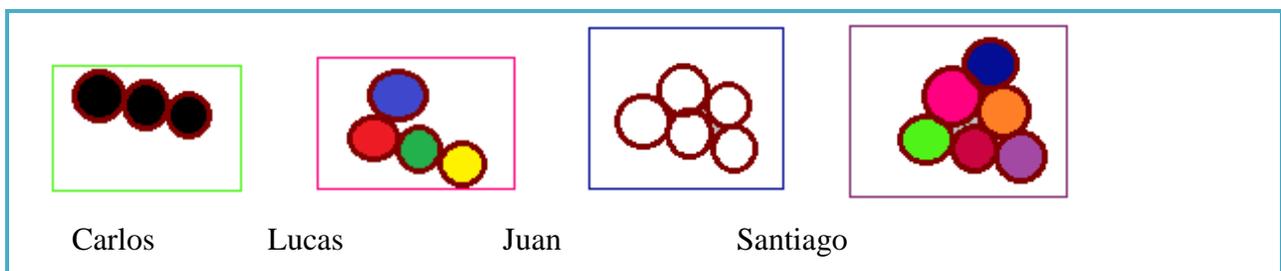


Figura A 4. Canicas de cristal empleadas para el juego.

8. Después de observar los conjuntos formados por las canicas de Santiago, Juan, Carlos y Lucas, responde:

Al reunir, en un solo conjunto, las canicas de Juan, Carlos, Lucas y Santiago, el número que representa el conjunto total de canicas es:

- a. 10
- b. 3
- c. 18
- d. 5

Explica tu respuesta:

9. Si Lucas y Santiago deciden reunir sus canicas de colores, para jugar solos, el número de canicas que completan ambos es:

- a. 11
- b. 9
- c. 10
- d. 8

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.1.2.5.

La cantidad de elementos que posee un conjunto se puede representar mediante un número natural. Por ejemplo el número 4 se puede representar a través de la siguiente figura:



Figura A 5. Representación de una cantidad.

Situación A.1.2.4.

La profesora de clase tiene 40 confites, para repartir entre sus estudiantes, el día de los niños, sin embargo, este día faltaron 3 estudiantes.

10. De acuerdo con la situación anterior se puede concluir que el número 40 representa:

- a. La cantidad de confites que la profesora tiene para repartir.
- b. La cantidad de confites que la profesora repartió.
- c. La cantidad de confites que le sobran a la profesora.
- d. La cantidad de confites que le faltan a la profesora.

Explica tu respuesta:

11. De acuerdo con la situación anterior se puede concluir que, el número 3, representa:

- a. Los niños del salón
- b. Los niños que recibieron el confite
- c. Los niños que comieron el confite
- d. Los niños que no asistieron a clases

Explica tu respuesta:

A.1.3. Actividad 2: Observando figuras

La presente actividad se considera acorde, a los propósitos de la fase de información, ya que en ella se ilustran composiciones formadas por figuras geométricas (cuadrados, triángulos,

rectángulos), observando el reconocimiento que hacen los estudiantes de los conceptos: Cardinal, colección, adición y sustracción.

Observa las figuras y describe:

1. La cantidad de triángulos de diferente color, que puedes observar en cada una de las imágenes:

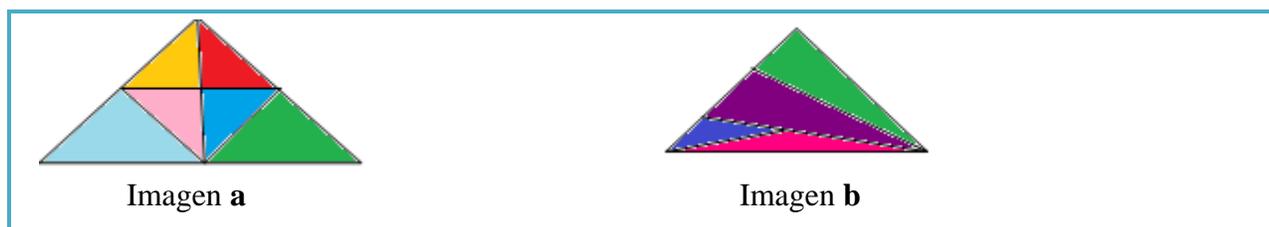


Figura A 6. Composición de figuras geométricas 1.

2. Ahora, explica el número de rectángulos, de diferente color, que se pueden observar en cada una de las imágenes:

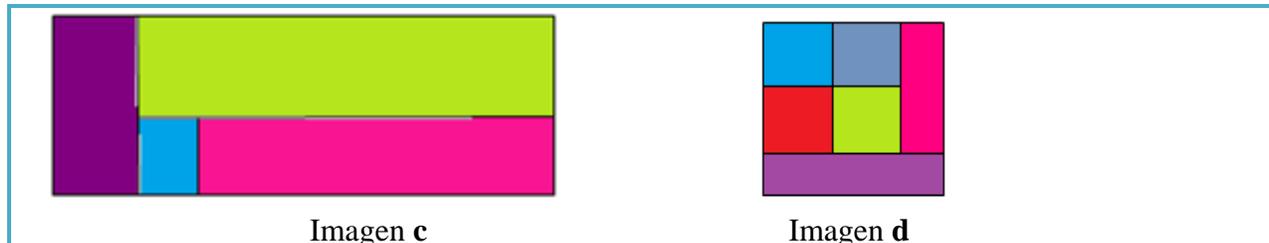


Figura A 7. Composición de figuras geométricas 2.

3. Observa y di la cantidad de triángulos, de diferente color, que puedes observar en la figura:

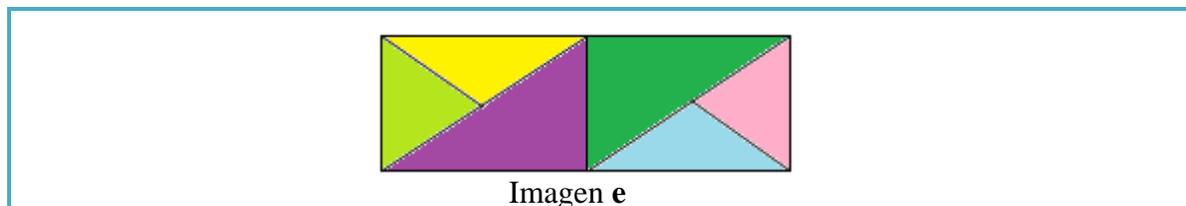


Figura A 8. Composición de figuras geométricas 3.

A.1.4. Actividad 3

La siguiente actividad tiene como propósito identificar los saberes que poseen los estudiantes para asignar el cardinal adecuado a la situación planteada, completar secuencias numéricas y agrupar y separar elementos empleando las operaciones de adición y sustracción.

1. Observa la ilustración:



Figura A 9. Niños en el parque.

Se puede concluir que:

- a. Hay 4 niños
- b. Hay 3 nubes
- c. Hay 6 niños
- d. Hay 5 balones

Explica tu respuesta:

2. Observa:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | 4 | | 6 | 7 |
| 7 | | 5 | 4 | 3 | | 1 | |

Figura A 10. Representación de una secuencia numérica.

Los números que faltan en el gráfico, para completar la secuencia, en forma ascendente, en la primera fila y en forma descendente en la segunda son:

- a. 1, 8, 4, 0 y 5
- b. 3, 5, 6, 2 y 0
- c. 1, 2, 3, 4 y 5
- d. 1, 4, 3, 3 y 7

Responde las preguntas 3 y 4 de acuerdo con las imágenes 1 y 2:

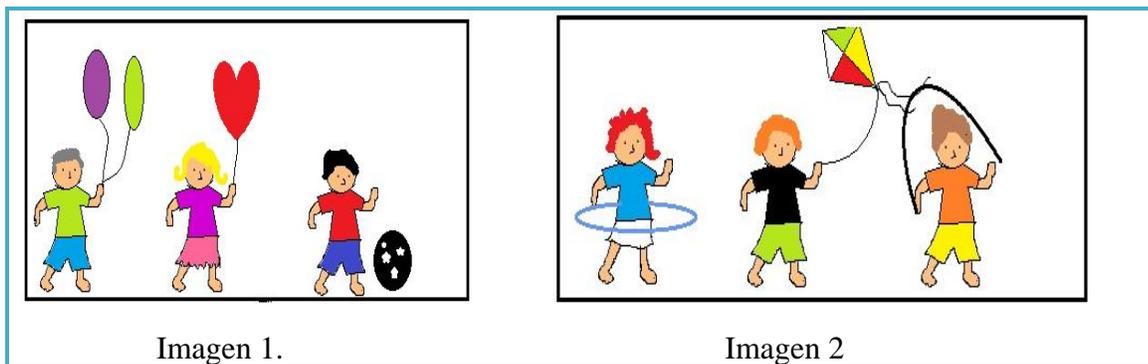


Imagen 1.

Imagen 2

Figura A 11. Niños con sus juegos.

3. Los números que representan la cantidad de niños, en cada una de las dos figuras, respectivamente, son:

- a. 3 y 2
- b. 3 y 6

c. 0 y 5

d. 3 y 3

Explica tu respuesta:

4. Si contamos el número de objetos con los que juegan los niños podemos decir que en total son:

a. Cuatro unidades

b. Seis unidades

c. Ocho unidades

d. Más de diez unidades

Explica tu respuesta:

Responde las preguntas desde la 5 a la 10 de acuerdo con la siguiente información:

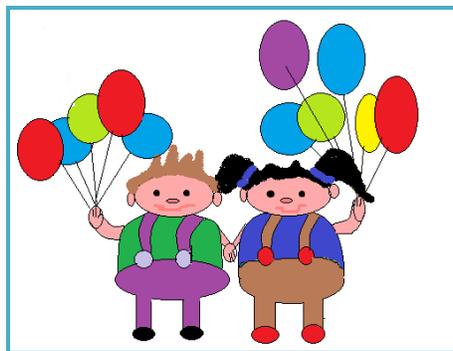


Figura A 12. Ana y Juan con sus globos.

5. Ana tiene 6 globos y Juan tiene 5 globos, ellos juntaron los globos que tenían y reunieron:

a. 13 globos

..

- b. 9 globos.
- c. 11 globos
- d. 12 globos.

6. Mientras ellos estaban jugando, llega Luis y decide unirse al juego. Si Luis tiene 6 globos, la cantidad de globos que reúnen Ana, Juan y Luis es:

- a. Menos de 20 globos.
- b. 20 globos.
- c. Más de 20 globos.
- d. 16 globos.

7. La cantidad de globos que tienen ahora Ana, Juan y Luis se representa con el número:

- a. 21
- b. 12
- c. 17
- d. 22

8. La operación matemática, que me permite hallar el resultado, de la cantidad de globos, que tienen ahora Ana, Juan y Luis es:

- a. $11 + 6$
- b. $11 = 6$
- c. $11 - 6$

Otra

9. Felipe es un niño muy travieso, él llega donde sus amigos y les daña 8 de sus globos. La cantidad de globos, que tienen ahora para jugar, Ana, Juan y Luis son:

- a. 15
- b. 16
- c. 27
- d. 9

10. La cantidad de globos que quedan para jugar Ana, Juan y Luis se puede representar con la operación:

- a. $17+8$
- b. $15 + 8$
- c. $17 - 8$
- d. $8 - 0$

A.1.5. Actividad 4: Mapa Conceptual

La construcción del Mapa Conceptual para la fase 1, tiene como propósito identificar la red de relaciones construida por los estudiantes en relación con los conocimientos que tienen relación con las estructuras de tipo aditivo.

Aporte de información A.1.6.

Una colección de varios elementos se llama **conjunto**, en éste se pueden encontrar características comunes entre sus elementos, de acuerdo a la agrupación indicada.

Cuando se comparan dos o más conjuntos se tienen **cantidades** que pueden ser **mayores** o **menores** y para representar dicha cantidad, se puede asignar un **número** a cada conjunto, de acuerdo a la cantidad de sus elementos.

Elabora un Mapa Conceptual que represente la información anterior y lo que has aprendido con el desarrollo de la entrevista y las actividades.

A.2. Fase 2: Orientación dirigida

Experiencia 2: “Exploro las estructuras de tipo aditivo”

La experiencia presentada para esta fase, tiene como propósito dirigir a los estudiantes para que encuentren las relaciones entre los elementos que forman parte de las estructuras de tipo aditivo, teniendo en cuenta la componente visual – geométrica y enunciados verbales, que permitan el reconocimiento de las categorías de composición y transformación y acciones correspondientes separar y reunir (composición) y aumentar y disminuir (transformación). El propósito de la fase se evidencia en el cumplimiento de los siguientes descriptores:

Descriptores de fase

1. Al comparar elemento a elemento dos conjuntos, determina cuál de los dos tiene más elementos.
2. Reconoce el número fijo a de elementos que se ha añadido a una colección que tiene b elementos para formar una secuencia.
3. Representa en forma equivalente un número cualquiera, utilizando composición y descomposición.
4. Determina el número m que le sobra o que le hace falta, a una colección de n elementos, para que tenga el mismo número de elementos de otra colección.
5. Separa y reúne elementos, que tienen características comunes, asignando un número a cada uno de los conjuntos formados.
6. Determina en una situación de tipo aditivo los cambios que conllevan al aumento o disminución de una cantidad (Transformación).

A.2.1. Estructuras de tipo aditivo

Las estructuras de tipo aditivo son el conjunto de conceptos en que se trabajan todas aquellas acciones en las cuales están involucradas la adición y la sustracción, Vergnaud (1991) al referirse a éstas, afirma que las estructuras de tipo aditivo son: “Estructuras o relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones y sustracciones” (p.161).

..

Vergnaud, propone seis grandes categorías para abordar las situaciones aditivas dependiendo la situación que se plantea, dentro de las cuales tenemos: (1991, p. 164).

Primera categoría: Dos medidas se componen para dar lugar a una medida (Composición).

Segunda categoría: Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida (Transformación).

En una relación de composición, se presentan situaciones en las cuales se tienen dos cantidades, que se diferencian en alguna de sus características. Se puede hallar la cantidad total, cuando se conocen las partes de un conjunto o cuando se conoce la cantidad total y una de las partes se puede preguntar por la otra parte.

En una relación de transformación, se parte de una cantidad, a la cual se le adiciona o quita otra cantidad de la misma naturaleza. En estas situaciones se puede preguntar por la cantidad, que resulta de la transformación, por la cantidad inicial o por la cantidad final.

A.2.2. Guión Entrevista de Carácter Socrático

La entrevista que se presenta a continuación, propone al estudiante situaciones relacionadas con el contexto que involucran la componente visual - geométrica y la utilización de enunciados verbales, en concordancia con la fase 2 y su intencionalidad desde el modelo de van Hiele, busca que los estudiantes encuentren relaciones que se establecen en relación con el concepto abordado, en este caso las estructuras de tipo aditivo y sus categorías de composición como de transformación.

Protocolo de entrada

Hola _____

En la siguiente entrevista se presentan diferentes situaciones. En algunos casos imágenes y en otros, textos con enunciados verbales. Con las actividades se pretende tener un acercamiento, a diversas situaciones de tipo aditivo, a partir de lo gráfico y la verbalización de lo observado, en cada una de las situaciones presentadas.

Muchas gracias por tu participación. Los aportes que realices son muy importantes.

Aporte de información A.2.2.1.

Cuando se presentan dos conjuntos es posible establecer relaciones entre ellos comparando uno a uno sus elementos, de esta forma se puede decir si la cantidad de sus elementos son iguales o si, en alguno de ellos, hay una menor o mayor cantidad de elementos que en el otro.

Situación A.2.2.1.

El tío Carlos decide regalar a sus sobrinos algunos juguetes. A Juan le regala dos carros, dos balones y una cometa y a Luis le regala tres carros, un balón y una cometa.

Juan y Luis toman sus regalos y empiezan a comparar sus juguetes, ellos encuentran algunas características.

Observa:



Figura A 13. Juguetes de Luis y Juan.

1. Al comparar el número de carros, en el conjunto de los juguetes de Luis y en el conjunto de los juguetes de Juan, puedes concluir que:

- a. El número de carros en el conjunto de los juguetes de Luis es menor que el número de carros que en el conjunto de los juguetes de Juan.
- b. El número de carros en el conjunto de los juguetes de Juan es el doble que el número de carros que en el conjunto de los juguetes de Luis.

- ..
- c. El número de carros en el conjunto de los juguetes de Luis es mayor que el número de carros que en el conjunto de los juguetes de Juan.
 - d. El número de carros en el conjunto de los juguetes de Luis es el mismo que el número de carros que en el conjunto de los juguetes de Juan.

Justifica tu respuesta:

2. Al comparar el número de balones, en el conjunto de los juguetes de Luis y el conjunto de los juguetes de Juan, puedes concluir que:

- a. El número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis es el mismo que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan.
- b. El número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan es mayor que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis.
- c. El número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan es el triple que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis.
- d. El número de balones en el conjunto de los juguetes de Luis es mayor que el número de balones en el conjunto de los juguetes de Juan.

Justifica tu respuesta:

3. Al observar la cantidad de juguetes, de los regalos que el tío Carlos entregó a Luis y a Juan, puedes afirmar que:

- a. La cantidad de juguetes de Luis, es mayor que la cantidad de juguetes de Juan.
- b. La cantidad de juguetes de Luis y la cantidad de juguetes de Juan son iguales.

- ..
- c. La cantidad de juguetes de Juan, es el doble que la cantidad de juguetes de Luis.
d. La cantidad de juguetes de Juan, es mayor que la cantidad de juguetes de Luis.

Justifica tu respuesta:

4. Luis y Juan deciden agrupar todos sus juguetes, se puede afirmar que, al reunir el conjunto de los juguetes de Luis, con el conjunto de los juguetes de Juan, se obtiene el siguiente conjunto:
- a. Un conjunto formado por seis carros, tres balones, dos cometas.
b. Un conjunto formado por cinco carros, tres balones, dos cometas.
c. Un conjunto formado por una cometa, cuatro balones, cinco carros.
d. Un conjunto formado por tres balones, cinco carros, una cometa.

Justifica tu respuesta:

Aporte de información A.2.2.2.

Una secuencia numérica es un conjunto de números ordenados que tienen una relación entre sí. Se representa listando los números, en forma ordenada, bien sea de menor a mayor o de mayor a menor. Por ejemplo la secuencia 1, 2, 3,... indica que el elemento posterior aumenta en una unidad respecto al elemento anterior.

Situación A.2.2.2.

Observa la secuencia numérica:



Figura A 14. Secuencia números pares.

5. Después de completar la secuencia numérica puedes afirmar que:

- a. El número fijo que se ha añadido al valor inicial es 3.
- b. Al valor inicial no se añade un número fijo.
- c. El número fijo que se ha añadido al valor inicial es 2.
- d. El número fijo que se ha añadido al valor inicial es 1.

Justifica tu respuesta:

6. Los números que hacen falta en las casillas vacías para completar la secuencia numérica son respectivamente:

- a. 11 y 16.
- b. 12 y 16.
- c. 11 y 15.
- d. 12 y 15.

Justifica tu respuesta:

Situación A.2.2.3.

Juan decidió caminar por la cuadra de su casa hasta llegar a la de David. Para hacer su recorrido más divertido, decidió ir saltando. Para indicar cada salto ubicó algunas piedras, que le sirvieron de obstáculo en su desplazamiento.

Antes de iniciar su recorrido, Juan contó los pasos y la cantidad de piedras que necesitaba. Colocó una piedra por cada tres pasos recorridos. Cuando iba en camino se encontró con David y le propuso averiguar cuántos pasos había avanzado y cuantos obstáculos había sobrepasado.

Ayuda a David a encontrar la respuesta.

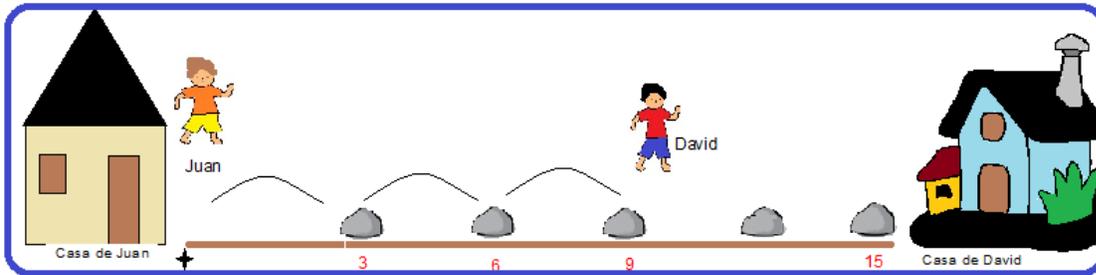


Figura A 15. Saltos de Juan.

7. El número de pasos que hay entre salto y salto es:

- a. 3
- b. 6
- c. 2
- d. 1

Justifica tu respuesta:

8. El número que representa los pasos que avanza Juan, hasta encontrarse con David, cuando Juan está en la tercera piedra, son:

- a. 6
- b. 3
- c. 4
- d. 9

Justifica tu respuesta:

9. El número que representa los pasos que le hacen falta a Juan, para llegar a la casa de David, cuando está en la tercera piedra, es:

- a. 6
- b. 2
- c. 5
- d. 1

Justifica tu respuesta:

11. El número de saltos que le hacen falta a Juan, para llegar a casa de David, cuando está en la tercera piedra, es:

- a. 3
- b. 2
- c. 4
- d. 6

Justifica tu respuesta:

Aporte de información A.2.2.3.

La situación anterior puede representarse en una recta numérica. Esta consiste en una línea recta horizontal con subdivisiones que representan la distancia entre dos números consecutivos. Por ejemplo, 3 y 6 representan el número de pasos, que se avanzan desde la casa de Juan en el primer y segundo obstáculo, respectivamente. Si se traza una recta numérica, que ilustre la situación anterior, podemos encontrar que el valor para la distancia empleada para cada obstáculo es 3, que corresponden a tres pasos. Es decir, cuando nos ubicamos en el valor 6, ya se han avanzado seis pasos y se han dado dos saltos, y así para cada uno de los obstáculos siguientes.

Situación A.2.2.4.

Observa la recta numérica:



Figura A. 16 Recta numérica, pasos y saltos de Juan entre su casa y la de David.

12. Juan parte desde ☆ y avanza 15 pasos, el total de obstáculos que ha superado es:

- a. 6
- b. 2
- c. 5
- d. 1

Justifica tu respuesta:

13. Juan parte desde ☆ y avanza 12 pasos, luego decide saltar devolviéndose tres obstáculos. El número en la recta que indica la nueva posición es:

- a. 1
- b. 5
- c. 3
- d. 9

Justifica tu respuesta:

14. Juan avanza doce pasos y se devuelve tres obstáculos, el número de pasos que le hacen faltan para llegar a ☆ es:

..

- a. 6
- b. 2
- c. 5
- d. 3

Justifica tu respuesta:

Aporte de información A.2.2.4.

Se habla de descomposición y composición de un número cuando encuentras dos o más cantidades que, al sumarlas, dan como resultado ese número y viceversa. Por ejemplo, $5 = 3+2$ ó $2+3 = 5$.

Situación A.2.2.5.

Observa la siguiente figura:

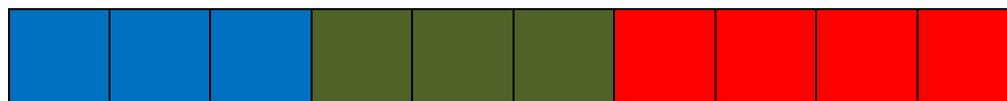


Figura A 16. Descomposición del número 10.

15. Teniendo en cuenta que en la Figura A.2.2.5. cada cuadro corresponde a una unidad, los valores numéricos, que corresponden al color azul, al color verde y al color rojo, respectivamente, son:

- a. 3, 5, 3
- b. 4, 3, 3
- c. 3, 3, 4
- d. 4, 3, 4

Justifica tu respuesta:

..

16. Al reunir las cantidades representadas en los cuadros de color azul, color verde y color rojo, la representación numérica adecuada, para esta situación, es:

a. $3 + 3 + 4 = 10$

b. $3 + 4 + 4 = 10$

c. $3 + 3 + 4 = 11$

d. $4 + 3 + 4 = 11$

Justifica tu respuesta:

17. La cantidad numérica que se ha descompuesto es:

a. 12

b. 13

c. 10

d. 9

Justifica tu respuesta:

Aporte de información A.2.2.5.

Cuando se agrupan dos conjuntos, pueden establecerse diversas relaciones a partir de los cambios ocurridos entre las cantidades iniciales, de cada uno de ellos y el número que representa los elementos del nuevo conjunto.

Una forma de relacionar conjuntos es determinar cuántos elementos le hacen falta o le sobran a un conjunto para ser igual otro.

Situación A.2.2.6.

Andrea y Ana deciden comprar galletas en el descanso, al salir de la tienda Ana lleva 5 galletas y Andrea 10. Cuando Ana observa el número de galletas que ha comprado Andrea, decide hacer la cuenta, para saber cuántas le faltan para tener la misma cantidad que tiene Andrea.

Observa y ayuda a Ana a encontrar esta diferencia.



Figura A 17. Diferencia entre dos conjuntos de galletas.

18. El número de galletas, que le hacen falta a Ana, para tener el mismo número de galletas que tiene Andrea, es:

- a. 7
- b. 5
- c. 1
- d. 6

Justifica tu respuesta:

..

19. El número adicional de galletas, que tiene Andrea, en relación con el número de galletas de Ana, es:

- a. 3
- b. 4
- c. 5
- d. 4

Justifica tu respuesta:

20. Si Ana decide comprar el número de galletas que le hacen falta para tener la misma cantidad de galletas que tiene Andrea, se puede concluir que:

- a. La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose un aumento en el número que representaba la cantidad inicial.
- b. La cantidad inicial de galletas de Ana no sufre ningún cambio y la cantidad final conserva el mismo valor numérico.
- c. La cantidad final de galletas de Ana cambia presentándose una disminución en el número que representaba la cantidad inicial.
- d. La cantidad final de galletas de Ana es menor con relación a la cantidad de galletas de Andrea.

Justifica tu respuesta:

Situación A.2.2.7.

Doña Rosa tiene una panadería, ubicada en una esquina de la plaza principal del pueblo, el día miércoles vende 30 panes, el día jueves 40 y el día viernes 50.

..

21. El número de panes vendidos por doña Rosa en los tres días fue:

- a. 50
- b. 120
- c. 90
- d. 70

Justifica tu respuesta:

22. La cantidad de panes que vendió el día jueves es:

- a. Mayor que la cantidad vendida el miércoles.
- b. Menor que la cantidad vendida el miércoles.
- c. Igual a la cantidad vendida el miércoles.
- d. Igual a la cantidad vendida el viernes.

Justifica tu respuesta:

23. La cantidad de panes adicionales que vendió el día jueves, en comparación con la cantidad de panes que vendió el día miércoles, es:

- a. 20
- b. 10
- c. 15
- d. 50

Justifica tu respuesta:

Aporte de información A.2.2.6.

Cuando se presentan conjuntos, puedes reunirlos o separarlos, teniendo en cuenta sus características generales o particulares, asignando un número a cada uno de los subconjuntos que resultan, de acuerdo con su número de elementos.

Por ejemplo, puedes reunir los triángulos y círculos de dos conjuntos y formar el conjunto total de figuras geométricas; el conjunto que resulta de la reunión de los elementos de dos conjuntos, está formado por todos los elementos de cada uno de los conjuntos originales.

También, puedes separar los elementos de un conjunto de acuerdo con las figuras representadas, por ejemplo: Puedes separar los triángulos del conjunto total de figuras geométricas, formadas por círculos y triángulos y asignarle un número al total de triángulos hallados.

Situación A.2.2.8.

Diana colecciona láminas de colores, en la Caja 1 tiene 13 láminas de color rosado y en la Caja 2, 9 láminas de color azul. En una Nueva Caja coloca el contenido de la Caja 1 y de la Caja 2.

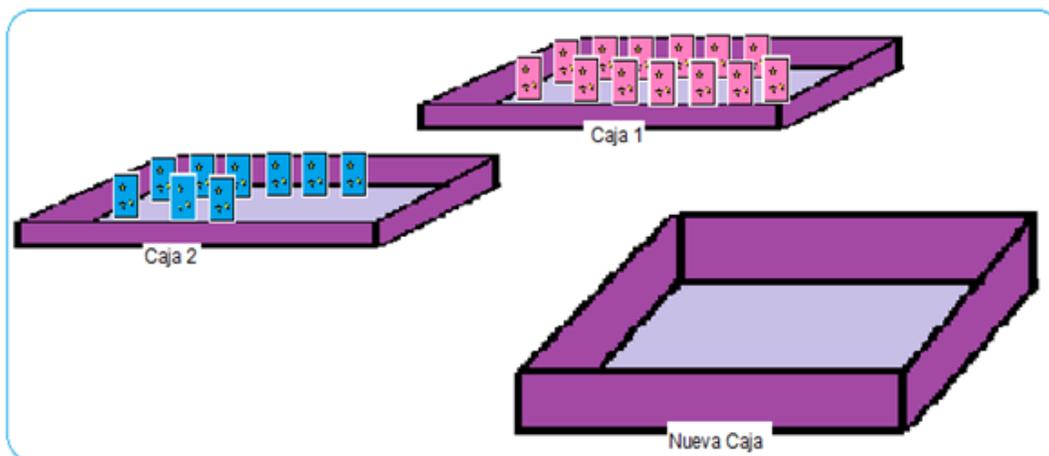


Figura A 18. Cajas de Diana.

..

24. Al colocar el número de láminas de la Caja 1 y de la Caja 2 en la Nueva Caja, el número total de láminas es:

- a. 22
- b. 18
- c. 5
- d. 17

Justifica tu respuesta:

25. Al comparar el número de láminas de la Nueva Caja con las de cada una de las cajas 1 y 2, Diana observa que:

- a. Tiene la misma cantidad de láminas que en la caja 1.
- b. El total de láminas de la nueva caja es igual a la suma del total de láminas de la Caja 1 y 2.
- c. El total de láminas de la nueva caja es menor que la suma del total de láminas de la Caja 1 y 2.
- d. Tiene la misma cantidad de láminas que en la caja 2.

Justifica tu respuesta:

Situación A.2.2.9.

Juan va a la tienda y compra bombones, él compra 6 bombones de chicle y 7 bombones de chocolate.

Diego, el amigo de Juan, decide comprar 10 bombones, entre bombones de chicle y de chocolate, luego Juan le ayuda a separarlos y cuentan 4 bombones de chocolate.

..

26. Si Juan reúne en un solo conjunto, el conjunto formado por los bombones de chocolate y el conjunto formado por los bombones de chicle de Diego y los suyos. El conjunto formado tiene:

- a. 11 bombones.
- b. 10 bombones.
- c. 12 bombones.
- d. 23 bombones.

Justifica tu respuesta:

27. El número de bombones de chicle que tiene Diego es:

- a. 7
- b. 3
- c. 4
- d. 6

Justifica tu respuesta:

Aporte de información A.2.2.7.

Cuando se establecen relaciones entre dos cantidades puede ocurrir un cambio o transformación que conlleve a que una de las cantidades aumente o disminuya dependiendo de la situación planteada. Al analizar el cambio observado se puede explicar lo que ha ocurrido.

Situación A.2.2.10.

Diego tiene en el bolsillo 6 canicas de cristal. Decide jugar con Santiago quien sólo tiene 4. Diego guarda las canicas que le sobran, en relación al número de canicas que tiene Santiago.

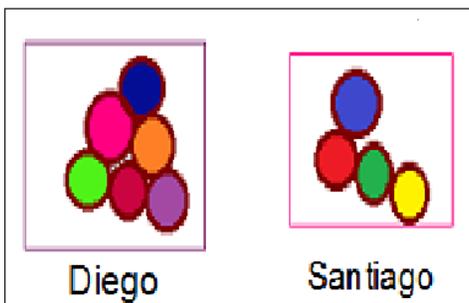


Figura A 19. Conjuntos de canicas de cristal.

28. El número de canicas que guardó Diego en su bolsillo es:

- a. 4
- b. 3
- c. 2
- d. 1

Justifica tu respuesta:

29. Al comparar la cantidad de canicas que Diego toma, inicialmente, de su bolsillo y la cantidad que deja para jugar, puede afirmarse que:

- a. La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es mayor en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente.
- b. La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es menor en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente.
- c. La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es el doble en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente.

..

d. La cantidad de canicas que utiliza Diego para jugar es la mitad en relación con la cantidad que tenía en su bolsillo inicialmente

Justifica tu respuesta:

30. Al terminar el juego Santiago tiene en sus manos 6 canicas y Diego tiene 2. Puede concluirse que durante el juego:

- a. Diego ganó 2 canicas.
- b. Santiago perdió 2 canicas.
- c. La cantidad de canicas Diego aumentó.
- d. Santiago ganó 2 canicas.

Justifica tu respuesta:

A.2.3. Actividad 1: Analiza situaciones presentadas gráficamente

En esta actividad está presente la componente visual geométrica, como apoyo a la orientación dirigida, que permita a los estudiantes el reconocimiento de las características de la categoría de transformación de las estructuras de tipo aditivo.

1. Observa la imagen que se presenta a continuación. Se puede apreciar que, inicialmente, se han ubicado 9 triángulos pequeños dentro del triángulo grande.

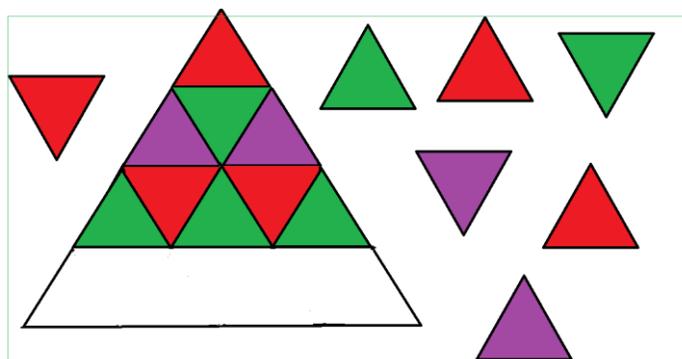


Figura A 20. Rompecabezas con triángulos.

Completa los siguientes enunciados:

- Se sabe que para rellenar el triángulo grande se necesitan 16 triángulos pequeños. El número de triángulos pequeños que hacen falta para completar el triángulo grande es: _____.
- Si se quiere hacer un triángulo más grande, el número de triángulos pequeños, que se deben agregar, para formar otra fila en la base es: _____.

2. En el parque de los columpios se pueden observar dos grupos de árboles, como se muestra en la siguiente figura:

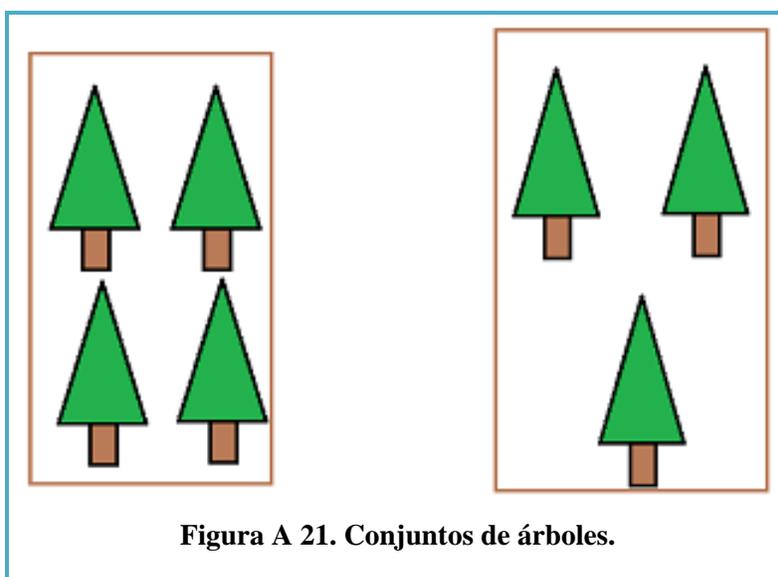


Figura A 21. Conjuntos de árboles.

..

La profesora ha decidido llevar los niños al parque para observar los árboles, encuentran que los árboles forman dos conjuntos, uno a cada lado del camino que recorre el parque. Al lado izquierdo se tiene un conjunto formado por cuatro árboles y al lado derecho un conjunto formado por tres. Luego, la profesora decide hacer algunas afirmaciones que debes completar:

- a. La cantidad de árboles del conjunto representado al lado izquierdo del camino es: _____
- b. La cantidad de árboles del conjunto representado al lado derecho del camino es: _____
- c. La cantidad total de árboles que se observa en el parque, teniendo en cuenta el conjunto de los árboles del lado izquierdo y el conjunto de los árboles del lado derecho del camino es: _____
- d. En el conjunto de los árboles, del lado izquierdo, del camino se encuentra _____ árbol más que en el conjunto de los árboles del lado derecho del camino.
- e. En el conjunto de árboles, del lado derecho, del camino se encuentra _____ árbol menos que en el conjunto de los árboles del lado izquierdo del camino.
- f. Para que el total de árboles observados, al lado izquierdo del camino, sea igual al total de árboles vistos, al lado derecho del camino, se le debe agregar _____ árbol al conjunto del lado derecho del camino.
- g. Para que el total de árboles observados, al lado derecho del camino, sea igual al total de árboles vistos, al lado izquierdo del camino, se le debe retirar _____ árbol al conjunto del lado izquierdo del camino.

A.2.4. Actividad 2: La recta numérica

En esta actividad se presentan situaciones del contexto a partir de la recta numérica, permitiendo establecer relaciones entre las diferentes acciones realizadas, los estudiantes determinan la cantidad discreta correspondiente a un desplazamiento, comparan valores representados y dan soluciones a situaciones.

Para representar cantidades en la recta numérica, las cantidades mayores se ubican hacia la derecha del número a comparar y las menores hacia la izquierda de este número.

Un número natural es menor que otro, si está ubicado a la izquierda del otro número en la recta

numérica. Por ejemplo el 3 está a la izquierda del número 6, quiere decir que 3 es menor que 6.

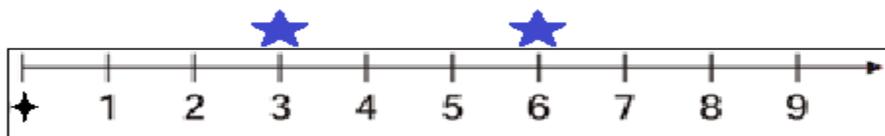


Figura A 22. Representación en la recta numérica 1.

Un número natural es mayor que otro, si está ubicado a la derecha del otro número en la recta numérica. Por ejemplo: el número 5 está a la derecha del número 4, quiere decir que 5 es mayor que 4.

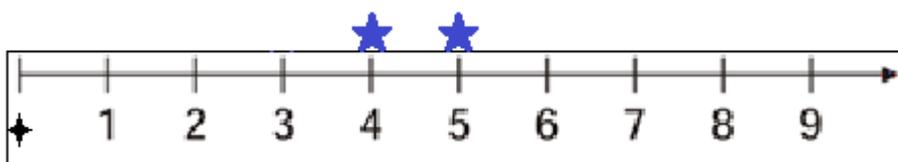


Figura A 23. Representación en la recta numérica 2.

En la recta numérica, cuando se adiciona una cantidad a un número, se realiza un desplazamiento hacia la derecha y cuando se resta una cantidad a otra, se realiza un desplazamiento hacia la izquierda sobre la recta.

En una recta numérica se puede observar una secuencia de números, para representar cantidades en ella pueden emplearse distancias o espacios iguales a la unidad o también espacios mayores que la unidad conservando siempre el mismo espacio en cada subdivisión.

1. Observa cual es valor numérico de los espacios empleados en cada uno de los casos que se presentan a continuación:

Situación A.2.4.1.

En la siguiente representación se observa una recta numérica en la cual se muestran los saltos que da la rana, cada espacio corresponde a una unidad y se debe descubrir el valor numérico de cada salto.

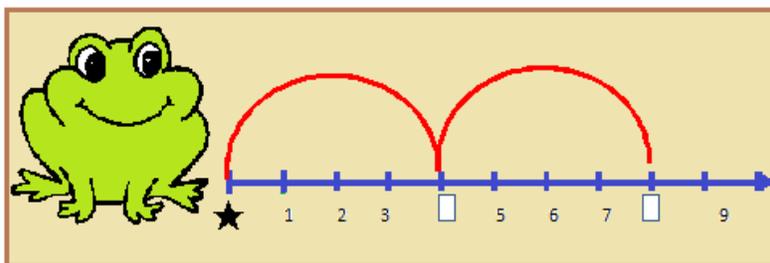


Figura A 24. Representación de los saltos de una rana.

El número que representa el espacio en unidades empleado para cada salto es: _____.

Situación A.2.4.2.

En la siguiente imagen se muestra una recta numérica en la cual se representan los saltos que realiza el conejo donde, cada espacio, corresponde a una unidad. Se debe descubrir el valor numérico de cada salto.

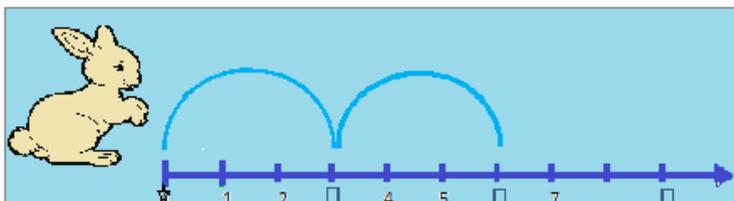


Figura A 25. Representación de los saltos de un conejo.

El número que representa el espacio en unidades empleado para cada salto es: _____.

Situación A.2.4.3.

En siguiente imagen se muestra una recta numérica en la cual se representan los saltos que realiza el niño, cada espacio corresponde a una unidad y se debe descubrir el valor numérico de cada salto.

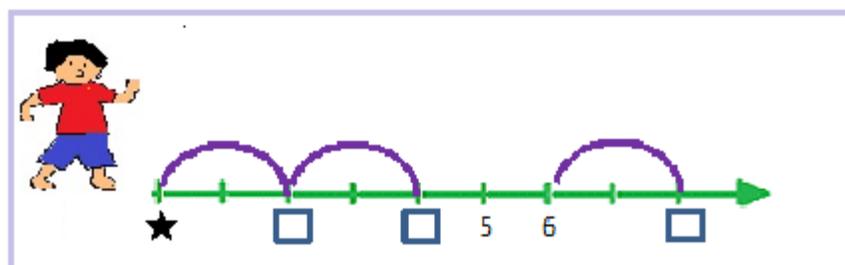


Figura A 26. Representación de los saltos de un niño.

El número que representa el espacio empleado por el niño para cada salto es: _____.

1. En la recta numérica también puedes comparar las cantidades o elementos de dos conjuntos y de esta manera, determinar cuál de los dos tiene menor o mayor cantidad de elementos. Al comparar las cantidades representadas en la recta se puede afirmar que un número es menor que otro si está ubicado a la izquierda de él en la recta numérica, y un número es mayor que otro cuando está ubicado a su derecha.

Situación A.2.4.4.

En la cosecha de café Carlos fue a ayudarle a su papá, durante tres días. Cada uno recolectó distintas cantidades de café. La medida utilizada fue “la lata”. La cantidad de “latas” de café, que cada uno de ellos recolectó, en los tres días se representa en la siguiente tabla:

| | Día 1 | Día 2 | Día 3 |
|--------|---------|---------|---------|
| Carlos | 2 latas | 6 latas | 3 latas |
| Papá | 4 latas | 3 latas | 5 latas |

Figura A 27. Latas de café recolectadas por Carlos y su papá.

..

Observa la representación en la recta numérica, para cada una de las cantidades de “lata” de café, recolectadas por Carlos, durante cada uno de los tres días. Cada marca en la recta numérica representa una unidad, en este caso una “lata” de café.

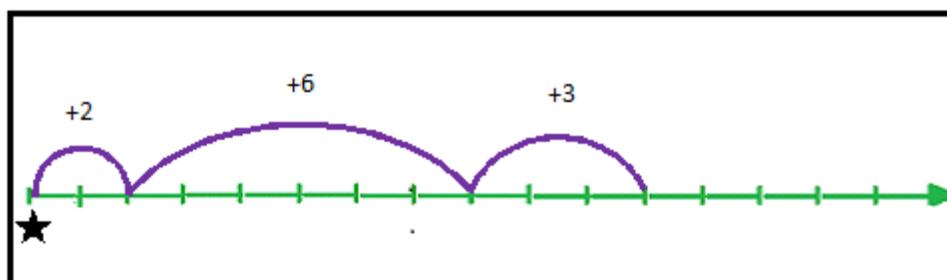


Figura A 28. Representación de la cantidad diaria de “latas” de café recolectadas por Carlos.

1. El número de “latas” de café recolectadas por Carlos durante los tres días fue: _____.
2. Representa en la recta el número de “latas” de café recolectadas por el papá de Carlos durante los tres días.



Figura A 29. Recta numérica que representa las “latas” de café recolectadas por el papá de Carlos.

1. El número de “latas” de café recolectadas por el papá de Carlos durante los tres días fue: _____.
2. Completa cada uno de los siguientes enunciados de acuerdo con las representaciones dadas en la recta numérica:
 La mayor cantidad de “latas” de café recolectadas la realizó: _____.
 La menor cantidad de “latas” de café recolectadas la realizó: _____.

Explica tus respuestas:

En la recta numérica se generan representaciones que permiten visualizar propiedades y hacer comparaciones entre cantidades. Cuando hay un desplazamiento hacia la derecha, las nuevas cantidades son mayores que de la que partimos, cuando avanzamos hacia la derecha, las nuevas cantidades se obtienen sumando. Cuando se hace un desplazamiento hacia la izquierda, las nuevas cantidades son menores que de la que partimos, cuando avanzamos hacia la izquierda, las nuevas cantidades se obtienen restando.

Situación A.2.4.4.

En la siguiente representación se encuentra una recta numérica, en la que se ilustran los saltos que da una rana, que está ubicada en la posición 12 de la recta y pretende atrapar una mosca. Cada espacio corresponde a una unidad y se debe descubrir cuántas unidades hay en cada salto. Observa los saltos de la rana en sus intentos para atrapar la mosca.

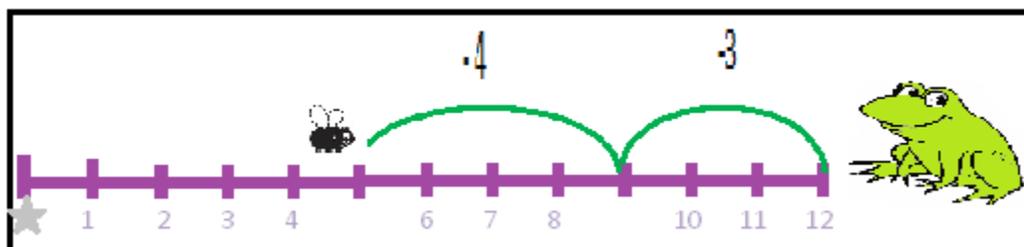


Figura A 30. Representación de saltos hacia la izquierda de rana.

Completa cada uno de los siguientes enunciados:

a. La rana se encuentra en la posición 12 de la recta numérica y da un primer salto hacia la izquierda para intentar atrapar a la mosca. Cuando la rana da el primer salto la mosca se ubica en la posición: _____.

- ..
- b. El valor numérico que representa el primer salto de la rana desde la posición 12 es: _____.
- c. La rana se ubica en la posición 9 de la recta y da un segundo salto hacia la izquierda, para intentar atrapar a la mosca, el valor numérico que representa el segundo salto de la rana es: _____.
- d. La cantidad numérica que representa el segundo salto de la rana, desde la posición 9 hasta su nueva posición es _____.
- e. Cuando en la recta numérica, los desplazamientos son hacia la izquierda, la cantidad representada es cada vez _____.
- f. La posición en la que la rana atrapa la mosca es: _____.
- g. En la representación en la recta numérica puede observarse una relación entre las cantidades. Al efectuar una sustracción entre la cantidad inicial o posición inicial de la rana y la su posición al atrapar la mosca, la diferencia es: _____.

Situación A.2.4.5.

En la siguiente recta numérica se observa el camino que recorre Felipe para recoger su juguete. Cada subdivisión, en la recta numérica, corresponde a un paso. Felipe ha decidido saltar para recoger su juguete. Inicialmente, da un salto que corresponde a cuatro pasos y luego realiza otro que corresponde a tres pasos.

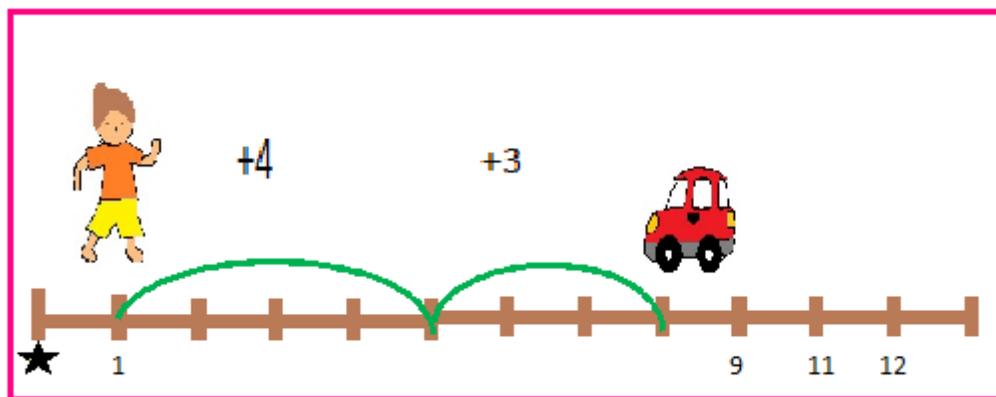


Figura A 31. Saltos que da Felipe para alcanzar su juguete.

Observa el valor numérico de cada uno de los saltos de Felipe y completa los enunciados:

- ..
- a. Felipe dio un paso y se ubicó en el número 1, luego dio un primer salto hacia la derecha. La cantidad numérica que representa el primer salto de Felipe, desde la posición 1 hasta su nueva posición, es _____.
- b. Felipe se encuentra en la posición 1 de la recta numérica y da un primer salto hacia la derecha, para recoger su juguete, el número que indica la nueva posición de Felipe, al dar su primer salto, es: _____.
- c. Felipe se ubica en la posición 5 de la recta y da un segundo salto hacia la derecha, para recoger su juguete, el número que indica la nueva posición de Felipe, es: _____.
- d. La cantidad numérica que representa el segundo salto de Felipe, desde la posición 5 hasta su nueva posición es _____.
- e. Cuando en la recta numérica los desplazamientos son hacia la derecha, la cantidad representada es cada vez más _____.
- f. El juguete de Felipe se encuentra en la posición: _____.
- g. El total de pasos que avanza Felipe en los dos saltos es: _____.

A.2.5. Actividad 3: Leo y resuelvo situaciones de enunciado verbal

En esta actividad la orientación está dirigida hacia el acercamiento de los estudiantes a las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo, en búsqueda del reconocimiento de las características que identifican estas categorías.

A continuación se presentan algunas situaciones matemáticas, en las cuales debes leer el enunciado, analizarlo y dar solución, empleando una adición o sustracción teniendo en cuenta lo descrito.

Situación A.2.5.1.

Diego tiene para jugar un conjunto de figuras geométricas: 7 triángulos y 8 cuadrados. El número de figuras que tiene Diego es: _____.

..

Completa las siguientes afirmaciones:

- La característica común de los elementos que tiene Diego para jugar es: _____.
- Describe los pasos que utilizaste para dar solución a la situación planteada:

Situación A.2.5.2

Diego tiene para jugar un conjunto de 15 figuras geométricas formado por triángulos y cuadrados. Si el número de cuadrados es 8, el número de triángulos es: _____.

Completa las siguientes afirmaciones:

- La característica común de los elementos que tiene Diego para jugar es: _____.
- Describe los pasos que utilizaste para dar solución a la situación planteada:

Situación A.2.5.3.

Juan tenía en su alcancía 8 monedas, el domingo colocó otras 12. El número total de monedas, en la alcancía de Juan, es: _____.

Completa las siguientes afirmaciones:

- La cantidad inicial de monedas que tenía Juan en su alcancía era de: _____.
- La cantidad final de monedas que tiene Juan en la alcancía, en comparación con la cantidad inicial de monedas (aumentó o disminuyó): _____.
- Describe los pasos que utilizaste para dar solución a la situación planteada:

..

Situación A.2.5.4.

Felipe tenía 9 canicas de cristal para jugar. Durante el descanso perdió 5. El número de canicas que le quedaron es: _____.

- La cantidad inicial de canicas que tenía Felipe para jugar es: _____.
- La cantidad de canicas que Felipe perdió es: _____.
- Describe los pasos que utilizaste para dar solución a la situación planteada:

Completa las siguientes afirmaciones:

Situación A.2.5.5.

Juliana tenía 6 láminas. Después de jugar ha reunido 12. El número de láminas que tiene Juliana es: _____.

Completa las siguientes afirmaciones:

- La cantidad inicial de láminas que tiene Juliana es: _____.
- La cantidad de láminas que Juliana ha ganado es: _____.
- Describe los pasos que utilizaste para dar solución a la situación planteada:

A.3. Fase 3: Explicitación

Experiencia 3: “Compartiendo y aprendiendo”.

Con las situaciones propuestas para esta experiencia de aprendizaje, las cuales corresponden a la fase 3, se continúa la secuencia de actividades en relación con las estructuras de tipo aditivo. De acuerdo con el modelo de van Hiele, su intención es permitir que los estudiantes socialicen e intercambien ideas con otros compañeros y sean conscientes de las características de los conceptos relacionados con las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo y pueda visualizarse el cumplimiento de los siguientes descriptores:

Descriptores de fase

1. Describe los cambios que ocurren en un conjunto, cuando se realizan sobre sus elementos transformaciones (agregar o quitar elementos).
2. Explica, verbalmente, los cambios que ocurren en diversas situaciones aditivas del contexto, que involucran composición o transformación.
3. Resuelve numéricamente diversas situaciones del contexto, que implican la utilización de estructuras de tipo aditivo.
4. Plantea diversos problemas del contexto, que involucran la utilización de estructuras de tipo aditivo.

A.3.1. Guión Entrevista de Carácter Socrático

La entrevista de Carácter Socrático presentada a continuación pretende generar un diálogo con los estudiantes, dando cumplimiento a los propósitos de la fase de explicitación donde “...dan sus opiniones sobre las regularidades que ellos han encontrado. En este momento se pone de manifiesto el trabajo con los conceptos aprendidos, los estudiantes intercambian sus puntos de vista sobre las nuevas cosas que han descubierto durante la orientación” (van Hiele, 1986, p. 96). Para alcanzar este propósito se presentan situaciones que implican el uso de las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo. Los estudiantes, a partir de sus

..

construcciones mentales describen los cambios que ocurren respecto al aumento o disminución en una cantidad y realizan operaciones en diferentes situaciones. Al mismo tiempo el docente aclara dudas y orienta el uso adecuado del lenguaje en relación con estas estructuras.

Protocolo de entrada

Hola _____

En la siguiente entrevista se presentan diferentes situaciones en las cuales puedes socializar y describir a partir de lo observado, en algunos casos se encuentran imágenes, en otros, representaciones gráficas, como la recta numérica y en otros, textos con enunciados verbales. Además, aportes de información que permitirán enriquecer el lenguaje con respecto a las estructuras de tipo aditivo (adición y sustracción), podrás comunicar tu comprensión y proponer situaciones con respecto a las experiencias abordadas.

Muchas gracias por tu participación, los aportes que realices son muy importantes.

Aporte de información A.3.1.1.

Un conjunto tiene una cantidad inicial de elementos. Por ejemplo, Daniel tiene un número determinado de canicas. A esta cantidad le puede ocurrir un cambio o transformación, que le aumenta o disminuye el número de sus elementos: Si Daniel juega con sus compañeros puede ganar o perder canicas.

Cuando se pregunta por el aumento o disminución de la cantidad, la situación debe ser solucionada por medio de una sustracción. Por ejemplo: Daniel tenía 8 canicas, después de jugar ha completado 12. ¿Cuántas canicas ha ganado? Se resuelve: $12 - 8 = 4$ ó Daniel tenía 12 canicas, después de jugar le quedan 8. ¿Cuántas canicas ha perdido? Se resuelve: $12 - 8 = 4$.

Situación A.3.1.1.

En la figura se representan un conjunto inicial con 8 globos, en la colección ocurre un cambio después de haber dañado, con una aguja, varios de ellos y se presenta un nuevo conjunto con 5 globos.

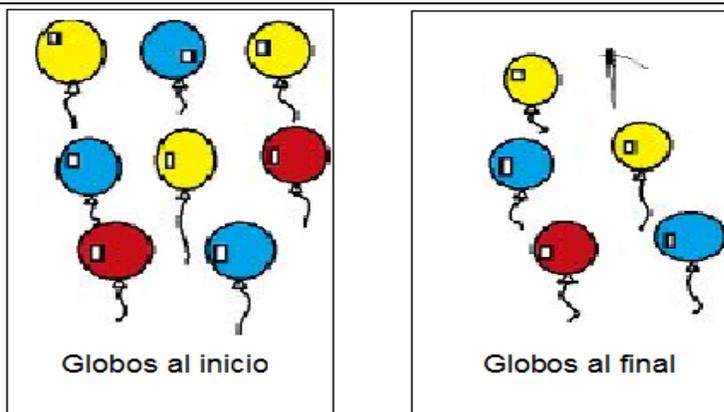


Figura A 32. Imagen que muestra los cambios ocurridos al conjunto de globos.

1. El cambio representado en el conjunto final de globos, en relación con el conjunto inicial, hace que la cantidad:

- a. Aumente
- b. Disminuya
- c. Continúe igual

Describe el cambio ocurrido

2. Al observar la cantidad del primer conjunto y la del final, se puede afirmar que, la cantidad que representa la disminución, es:

- a. 2
- b. 3
- c. 4
- d. 6

Explica tu respuesta:

3. La forma apropiada para calcular la disminución presentada en el número de globos es:

- a. $5 + 3 = 8$
- b. $8 - 3 = 5$
- c. $8 + 5 = 13$
- d. $8 - 5 = 3$

Explica tu respuesta:

Situación A.3.1.2.

La figura representa el número de cromos que Daniel tiene antes de jugar y al finalizar el juego.



Figura A 33. Imagen que muestra los cambios ocurridos en el conjunto de cromos.

4. El cambio representado en el conjunto final de cromos en relación con el conjunto inicial hace que la cantidad:

- a. Aumente
- b. Disminuya
- c. Continúe igual

Describe el cambio ocurrido

..

5. Al observar la cantidad del primer conjunto y la del final, se puede afirmar que la cantidad que representa el aumento de cromos, es:

- a. 5
- b. 3
- c. 4
- d. 6

Explica tu respuesta:

6. La forma apropiada de calcular el aumento presentado en el número de cromos es:

- a. $6 + 4 = 10$
- b. $10 - 4 = 6$
- c. $10 + 6 = 16$
- d. $10 - 6 = 4$

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.3.1.2.

En una colección de objetos se pueden conocer las partes que forman el conjunto. Por ejemplo, **Milena tiene cinco galletas de vainilla y tres galletas de chocolate**, si se pregunta por la cantidad total de galletas, debe resolverse la situación por medio de una adición, así: $5 + 3 = 8$. Si se representa la cantidad total, por ejemplo, **Milena tiene 8 galletas contando las de vainilla y las de chocolate**, una de las partes del conjunto está representada por las 3 **galletas de chocolate**. Si se pregunta por la otra parte, **la cantidad de galletas de vainilla que tiene Milena es...** La situación debe resolverse mediante una sustracción, así: $8 - 3 = 5$.

Situación A.3.1.2.

Juan colecciona carros y balones, sus juguetes favoritos, cierto día juega con su hermana Diana. Ella toma los juguetes y observa que tiene en total 12 juguetes en su colección. Luego separa los carros y encuentra que tiene 8. Diana le pide a su hermano calcular cuántos balones tiene en su colección.

Juan realiza el cálculo empleando una operación matemática y afirma que en su colección hay 4 balones.

7. Lee la situación y analiza si Juan tiene o no la razón:

a. Sí, porque Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso los 8 carros, quedando un grupo de 4 balones.

b. No, porque Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso los 3 balones, quedando un grupo de 8 carros.

c. Sí, porque Diana cuenta 12 juguetes en la colección de Juan y separa una de las partes, en este caso, un grupo con 8 carros y otro con 5 balones, para luego hallar la cantidad total de la colección de juguetes.

d. No, porque Diana presenta una cantidad total de 12 juguetes y añade 8 carros completando 20 juguetes.

Explica tu respuesta:

8. Las partes que representan, cada uno de los conjuntos que forman el conjunto total, de juguetes son:

a. 8 carros y 4 balones.

b. 8 carros y 3 balones.

c. 8 carros y 5 balones.

..

d. 8 carros y 12 balones.

Explica tu respuesta:

9. La forma adecuada de representar el cálculo realizado por Juan es:

- a. $8 + 4 = 12$
- b. $12 + 8 = 20$
- c. $12 - 8 = 4$
- d. $12 - 4 = 8$

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.3.1.3.

Cuando en una situación se presenta la cantidad final, por ejemplo: **al terminar el recreo Juan tiene 9 canicas de cristal**, se sabe que se ha presentado un cambio en el cual la cantidad ha aumentado. **Jugando con sus compañeros ha ganado 6 canicas**. Uno de ellos le pregunta por la cantidad inicial: **La cantidad de canicas que tenías antes de empezar a jugar era...** La situación se soluciona mediante una sustracción así: $9 - 6 = 3$.

Otra situación que representa un cambio, se puede ejemplificar de la siguiente manera: **Al terminar el recreo Juan tiene 4 canicas**: Mientras jugaba ocurrió un cambio o transformación que generó una disminución. **Jugando ha perdido 7 canicas**, un compañero le pregunta: **La cantidad de canicas que tenías antes de empezar a jugar era...** Esta situación se puede resolver por medio de una adición, así: $7 + 4 = 11$

Situación A.3.1.4.

La mamá de Luis le pide el favor de ir a la tienda a comprar huevos. Él se dirige a la tienda y al

regreso tropieza con una piedra. De su canasta caen 6 huevos y se rompen. Luis llega donde su mamá, la cual le recibe los 9 huevos que han quedado.

10. Al leer la situación anterior, se puede afirmar que la cantidad de huevos que él compró fue:

- a. 14
- b. 6
- c. 9
- d. 15

Explica tu respuesta:

11. Los huevos que se rompieron implicó que, la cantidad inicial que Luis había comprado:

- a. Aumentara
- b. Disminuyera
- c. Continuara igual

Explica tu respuesta:

12. El cálculo adecuado para conocer la cantidad de huevos que compró Luis es:

- a. $9 + 6 = 15$
- b. $9 - 6 = 4$
- c. $15 - 6 = 9$
- d. $15 - 9 = 6$

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.3.1.4.

Ana tiene, inicialmente, 6 muñecas, le regalan una más. Para hallar la nueva cantidad, se debe solucionar la situación por medio de una adición, así: $6 + 1 = 7$.

Ahora, si de las 6 muñecas que tiene Ana ella le regala una a su prima Juliana; el procedimiento para hallar la cantidad final de muñecas se obtiene por medio de una sustracción, así: $6 - 1 = 5$.

Situación A.3.1.5.

María y Ana son amigas, María vive a nueve metros de la escuela, cuatro metros después vive Ana. Al terminar las clases María decide visitar a su amiga, ella quiere saber el total de metros que debe recorrer. Observa la representación y ayúdala a encontrar la solución.

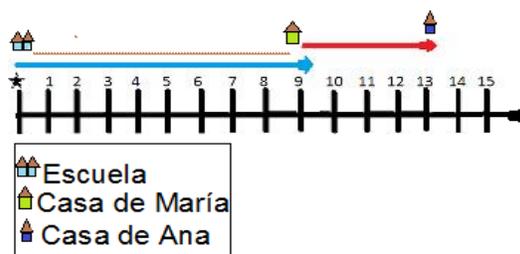


Figura A 34. Recta numérica: Recorrido desde la casa de María hasta la casa de Ana.

13. La operación matemática, que permite hallar el total de metros, que debe recorrer María, desde la escuela hasta la casa de Ana, es:

- a. $13 - 4 = 9$
- b. $9 - 4 = 5$
- c. $9 + 4 = 13$
- d. $13 - 9 = 4$

Explica tu respuesta:

Situación A.3.1.6.

Carlos subió en un ascensor hasta el piso número 13 del edificio más alto de su ciudad. Estando allí recordó que su tía Marta vivía siete pisos más abajo. Ayuda a Carlos a descubrir en qué piso vive su tía Marta.

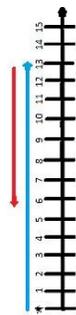


Figura A 35. Recta numérica que representa la situación vivida por Carlos.

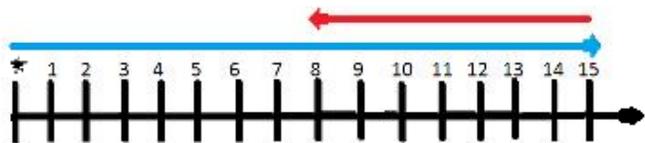
13. La operación matemática que permite saber el piso en el que vive la tía de Carlos es:

- a. $13 - 6 = 7$
- b. $7 + 6 = 13$
- c. $13 - 7 = 6$
- d. $13 + 6 = 19$

Explica tu respuesta.

Situación A.3.1.7.

José tiene en su cartera 15 lápices de colores. Decide regalar algunos de ellos a sus compañeros. Al contar nuevamente sus



lápices, se da cuenta que tiene 8.

Figura A 36. Recta numérica que representa la situación vivida por José.

14. La operación matemática, que permite encontrar el número de lápices de colores, que ha regalado José a sus compañeros, es:

- a. $8 - 7 = 1$
- b. $7 + 8 = 15$
- c. $15 - 7 = 8$
- d. $15 - 8 = 7$

Explica tu respuesta:

Situación A.3.1.8.

Julián tiene 7 monedas. Como regalo de cumpleaños, su mamá le obsequia otras 5.

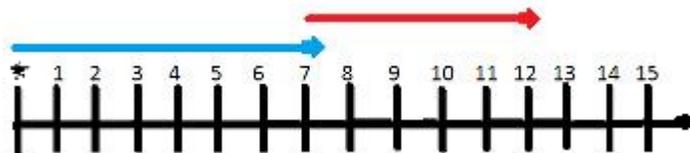


Figura A 37. Recta numérica que representa el cambio ocurrido en la cantidad inicial de monedas que tenía Julián.

15. La operación matemática que, permite calcular el nuevo número de monedas que tiene Julián es:

- a. $12 - 5 = 7$
- b. $7 + 5 = 12$
- c. $12 + 7 = 19$
- d. $12 + 7 = 5$

Explica tu respuesta:

Situación A.3.1.9.

Juan construyó un edificio. Inicialmente tenía 3 pisos y luego construyó otros dos. El resultado de la operación: $5 - 3 = 2$ es el número de los nuevos pisos construidos.

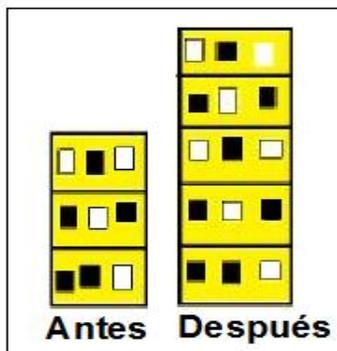


Figura A 38. Cambio presentado en la construcción de un edificio.

16. La situación que describe la transformación ocurrida al edificio en el número de pisos es:

- Juan construye un edificio de 3 pisos, luego decide aumentar su número y obtiene un edificio de 5 pisos.
- Juan construye un edificio con 5 pisos, luego destruye algunos y obtiene un edificio con 3 pisos.
- Juan construye un edificio con 3 pisos, luego construye otro con 5 y obtiene dos edificios.
- Juan construye un edificio con 3 pisos, luego construye uno con cinco y obtiene un edificio con 8 pisos.

Explica tu respuesta:

A.3.2. Actividad 1: Describo los cambios ocurridos

Esta actividad se presenta con el propósito de que los estudiantes expresen a sus compañeros los conocimientos que poseen, intercambien sus ideas y de esta manera enriquezcan la red de relaciones que se está construyendo, de acuerdo a la intencionalidad de esta fase. Los estudiantes realizarán utilizando recursos del contexto, en este caso bombones diferentes acciones como

formar agrupaciones, aumentar o disminuir una cantidad y describir lo ocurrido en cada situación.

1. Toma un paquete de bombones y realiza diferentes agrupaciones con diferente número de bombones. Describe la situación cuando comparas de a dos agrupaciones a la vez.

Explica lo observado:

2. Toma 12 bombones y realiza las siguientes actividades:

Situación A.3.2.1.

De los 12 bombones, guarda 8. Completa la siguiente información:

- El número inicial de bombones es: _____.
- La cantidad de bombones guardados es: _____.
- La cantidad de bombones que quedan es: _____.
- El cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea _____ que la cantidad inicial.
- La operación que representa la cantidad de bombones que quedan es: _____.

Situación A.3.2.2.

Forma un conjunto con 8 bombones, luego añade 4. Completa la siguiente información:

- El número inicial de bombones es: _____.
- La cantidad de bombones que se añaden es: _____.
- La cantidad de bombones que quedan es: _____.
- El cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea _____ que la cantidad inicial.
- La operación que representa la cantidad de bombones que quedan es: _____.

Situación A.3.2.3.

Forma un conjunto con 4 bombones, luego añade otros hasta ajustar 12. Completa la siguiente información:

- a. El número inicial de bombones es _____.
- b. La cantidad de bombones que se añaden es: _____.
- c. El cambio ocurrido en la situación hace que la cantidad final sea _____ que la cantidad inicial.
- d. La operación que representa la cantidad de bombones que quedan es: _____.

A.3.3. Actividad 2: Verbaliza situaciones

Con esta actividad se busca que los estudiantes pongan de manifiesto la red de relaciones construida en relación con las categorías de composición y transformación de las estructuras de tipo aditivo y a su vez adquieran un lenguaje adecuado a partir del intercambio de ideas con sus compañeros.

Situación A.3.3.1.

Al emplear la adición y sustracción en diversas situaciones, en las que se tienen dos conjuntos con diferentes elementos, se puede utilizar la adición para encontrar la cantidad total de elementos al reunir los conjuntos. También, se puede utilizar la resta para encontrar la diferencia de elementos del conjunto mayor en relación con el conjunto menor.

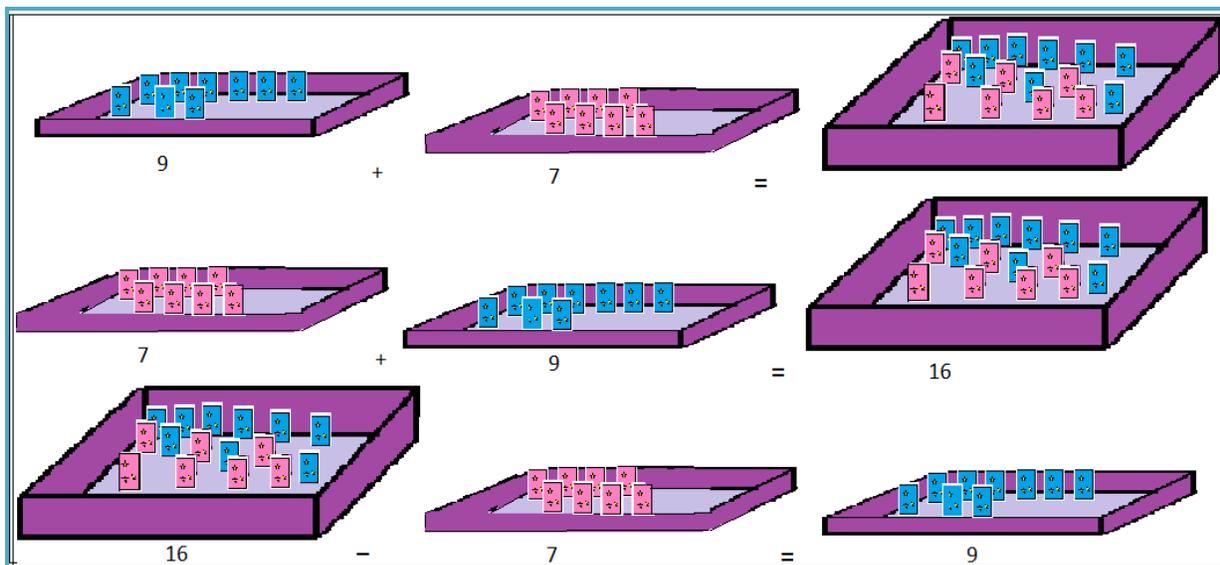
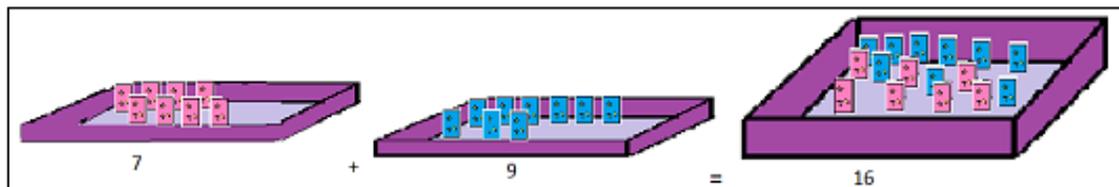


Figura A 39. Imagen sobre adición y sustracción de los elementos de un conjunto.

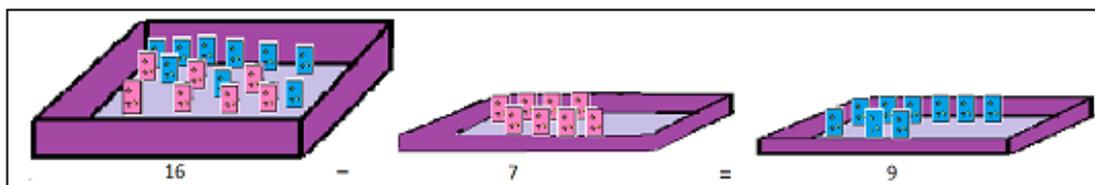
1. Observa las imágenes y explica la situación que se presenta en cada caso.



a.

Figura A 40. Reunión de láminas de color rosado y azul como elementos de un conjunto.

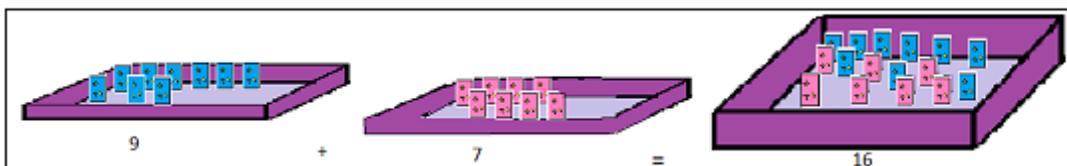
Explica la situación que se presenta:



b.

Figura A 41. Imagen que muestra la separación entre los elementos de un conjunto.

Explica la situación que se presenta:



c.

Figura A 42. Imagen que muestra la reunión de láminas como elementos de un conjunto.

Explica la situación que se presenta:

Situación A.3.3.2

La adición y sustracción también se presentan cuando, a una cantidad se le suma o quita otra cantidad, de la misma naturaleza. En estos casos se puede preguntar por el cambio que le ocurre a una cantidad en relación con otra:

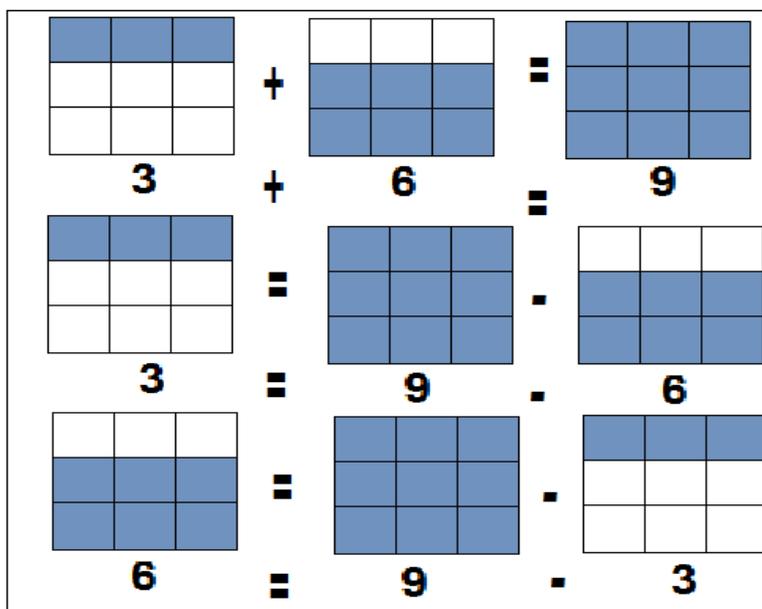
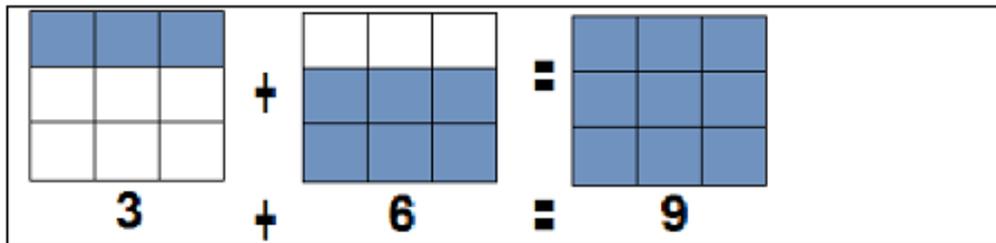


Figura A 43. Representación de los cambios presentados en una estructura aditiva.

1. Observa las figuras que se presentan a continuación y describe los cambios que le ocurren a la cantidad de la izquierda cuando se le suma la cantidad del medio.

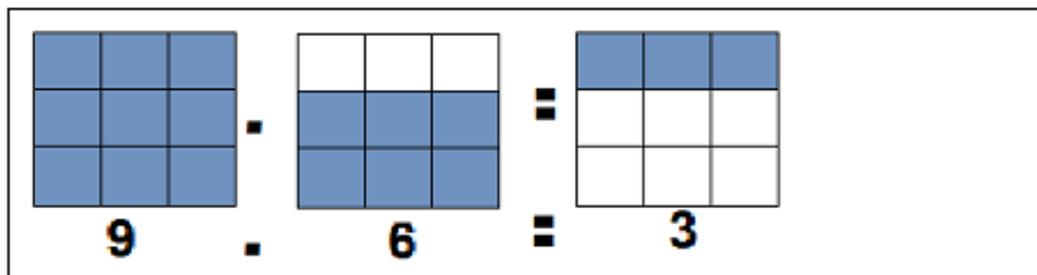


a.

Figura A 43.1. Representación del aumento presentado en una estructura de tipo aditivo.

Describe el cambio ocurrido.

2. Observa las figuras que se presentan a continuación y describe los cambios que le ocurren a la cantidad de la izquierda cuando se le quita la cantidad del medio.



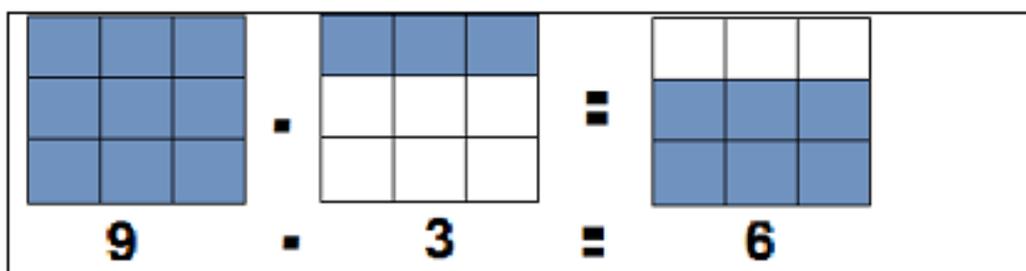
b.

Figura A 44. Representación de la disminución en una estructura de tipo aditivo.

Describe el cambio ocurrido.

3. Observa las figuras que se presentan a continuación y describe los cambios que le ocurren a la cantidad de la izquierda, cuando se le quita la cantidad del medio.

..



c.

Figura A 45. Representación de una disminución en una estructura de tipo aditivo.

Describe el cambio ocurrido.

A.3.4. Actividad 3: Mapa Conceptual

Con esta actividad los estudiantes participan de un conversatorio con sus compañeros, luego construyen un Mapa Conceptual sobre la forma como comprenden las estructuras de tipo aditivo, éste se comparte con los compañeros y a partir del dialogo se recogen las nuevas ideas que permitan la construcción de un nuevo Mapa Conceptual, atendiendo a las observaciones realizadas, de esta manera se cumplen los propósitos de este momento de explicitación en el cual se pretende que refinen su lenguaje y enriquezcan la red de relaciones en torno a las estructuras de tipo aditivo.

- Recuerda, cuando se presentan situaciones relacionadas con las estructuras de tipo aditivo, éstas pueden presentarse como una colección de elementos, los cuales están representados por una cantidad que puede sumarse o restarse con otra. También pueden presentarse relaciones de composición, es decir, aquellas en las cuales dos cantidades, se diferencian por alguna de sus características. Para determinar el total de elementos de un conjunto, cuando se conocen las partes, una de las partes se puede preguntar por la otra. Adicionalmente, puede presentarse una relación de transformación donde se parte de una cantidad a la cual se le adiciona o quita otra cantidad de la misma naturaleza. En estas situaciones se puede preguntar por la cantidad que resulta de la transformación inicial o final en los elementos del conjunto.

..

Teniendo en cuenta los conocimientos sobre las estructuras de tipo aditivo, trabajados en las diferentes fases: conjuntos, cantidad, secuencias, relaciones de composición y transformación y las situaciones que se presentan en cada caso. Realiza las siguientes actividades:

1. Participa en el conversatorio y comparte los conocimientos adquiridos sobre las estructuras de tipo aditivo.
2. Hagan una lista de los conceptos que consideren relevantes.
3. Construye un Mapa Conceptual donde se presenten los conocimientos adquiridos hasta el momento, acerca de la forma como comprendes las estructuras de tipo aditivo.
4. Comparte el mapa con dos compañeros y a partir de la socialización, presenta un nuevo Mapa Conceptual, explicando al grupo la organización de los conceptos.

A.4. Fase 4: Orientación Libre

Experiencia 4: “Utilizo las estructuras en contexto”

Esta experiencia de aprendizaje, busca que los estudiantes practiquen lo aprendido, aplicándolo a nuevas situaciones, brinda la oportunidad de proponer sus propias estrategias para hallar la solución de una situación.

En esta fase de orientación libre el desempeño de los estudiantes garantiza el cumplimiento de los siguientes descriptores:

Descriptores de fase 4

1. Relaciona las estructuras de tipo aditivo con las operaciones básicas entre conjuntos.
2. Recurre a representaciones gráficas e icónicas para dar solución a situaciones de enunciado verbal, que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.
3. Visualiza, en diferentes formas geométricas, el efecto de añadir o quitar elementos con las mismas características a una colección.
4. Utiliza diversas estrategias para dar solución a una situación que involucra las estructuras de tipo aditivo.
5. Indaga y reflexiona sobre situaciones, de la vida cotidiana, que implican la utilización de las estructuras de tipo aditivo.

A.4.1. Guión Entrevista de Carácter Socrático

El guión de entrevista que se presenta a continuación se convierte en la oportunidad para que los estudiantes en esta fase de Orientación libre establezcan relaciones entre los conocimientos adquiridos y otros relacionados con las estructuras de tipo aditivo, por ejemplo, con las operaciones básicas entre conjuntos. También se presentan situaciones a partir de enunciados verbales para que identifiquen la representación gráfica más apropiada a la solución, aquí interactúan con las diferentes estrategias para dar solución a las situaciones de tipo aditivo que involucran: agrupaciones, representaciones visuales, recta numérica y componentes simbólicas, donde deben identificar aquellas que requieren de una adición o sustracción para resolverla.

Protocolo de entrada

Hola _____

En la siguiente entrevista se exhibe variedad de situaciones, que buscan la aplicación de los conocimientos adquiridos, sobre las estructuras de tipo aditivo; allí se presentan actividades, en las cuales, puedes practicar lo aprendido. Puede proponer la estrategia que considere adecuada para hallar la solución.

Muchas gracias por tu participación. Los aportes que realices son muy importantes.

Aporte de información A.4.1.1.

Cuando se presentan dos o más conjuntos, que tienen características comunes, puedo agruparlos en un solo conjunto que reúne la característica general de estos, por ejemplo, si Juan tiene un conjunto de bombones de chocolate y un conjunto de bombones de chicle, puede reunirlos en un solo conjunto con la característica general **bombones**. Esta operación recibe el nombre de unión entre conjuntos; también puedes establecer cuántos elementos posee el conjunto de bombones de chocolate y el conjunto de bombones de chicle y agruparlos teniendo en cuenta la adición como operación.

Situación A.4.1.1.

Felipe tiene, para jugar, algunas formas geométricas, 8 círculos y 6 cuadrados. Decide representar la unión de estos dos conjuntos en un nuevo conjunto.

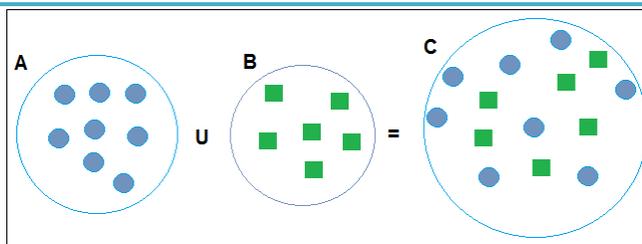


Figura A 46. Representación de la Unión de conjuntos ($A \cup B = C$) de figuras geométricas.

1. Al hallar la unión entre los conjuntos A y B resulta un nuevo conjunto llamado C, la representación numérica que mejor representa esta situación es:

a. $7 + 6 = 13$

b. $14 - 6 = 8$

c. $8 + 6 = 14$

d. $6 + 14 = 20$

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.4.1.2.

Dados un conjunto universal U o conjunto mayor y otro conjunto A , se llama **complemento**, a los elementos del conjunto U , que no pertenecen al conjunto A . Cuando se representan los conjuntos, puede asignarse la cantidad numérica que representa el número de elementos del conjunto U y de esta forma calcular también su diferencia numérica con relación al conjunto A . De igual manera, cuando se presenta una situación, en la cual, se debe saber cuánto le falta a una cantidad para ser igual a otra o cuánto se le ha quitado a una cantidad, se puede recurrir a una sustracción o puede emplearse la representación de conjuntos como ayuda para hallar la solución.

Situación A.4.1.2.

Diego fue a la tienda y compró algunos dulces: bombones, bolitas de chocolate y nucas. Quiso saber el número total de dulces y encontró que había 12, luego observó que la cantidad de nucas era 4 y representó sus agrupaciones en un conjunto.

Diego quiere saber cuál es la cantidad de dulces que complementa su conjunto de nucas.

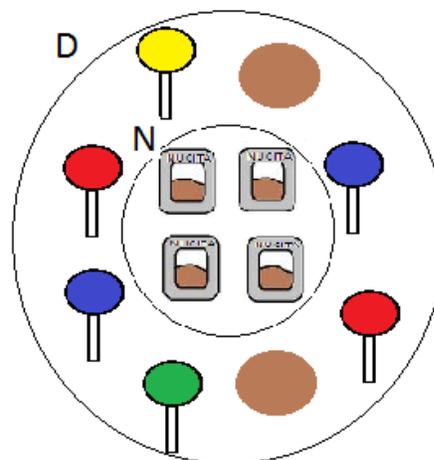


Figura A 47. Representación de complemento entre un conjunto de dulces.

2. El conjunto D está conformado por 12 elementos, si se sabe que la cantidad de elementos que posee el conjunto N es 4, se puede afirmar que, el número de elementos, que le hace falta al conjunto N para ser igual al conjunto D es:

- a. 5
- b. 12
- c. 8
- d. 4

Explica tu respuesta:

3. La operación matemática que permite calcular la cantidad que hace falta al conjunto N para ser igual al conjunto D es:

- a. Una multiplicación.
- b. Una adición.
- c. La sustracción.
- d. La adición.

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.4.1.3.

Cuando se presenta una situación de tipo aditivo, es decir, que involucre una adición o sustracción, es posible visualizar a través de diferentes formas geométricas el cambio ocurrido. Por ejemplo, añadir o quitar cuadrados a una figura inicial.

Situación A.4.1.3.

Mi mamá me dio 13 bombones, le regalé algunos a Camilo y me han quedado 8, el número de bombones que le regalé a Camilo fue:

4. La imagen que mejor representa la situación anterior es:

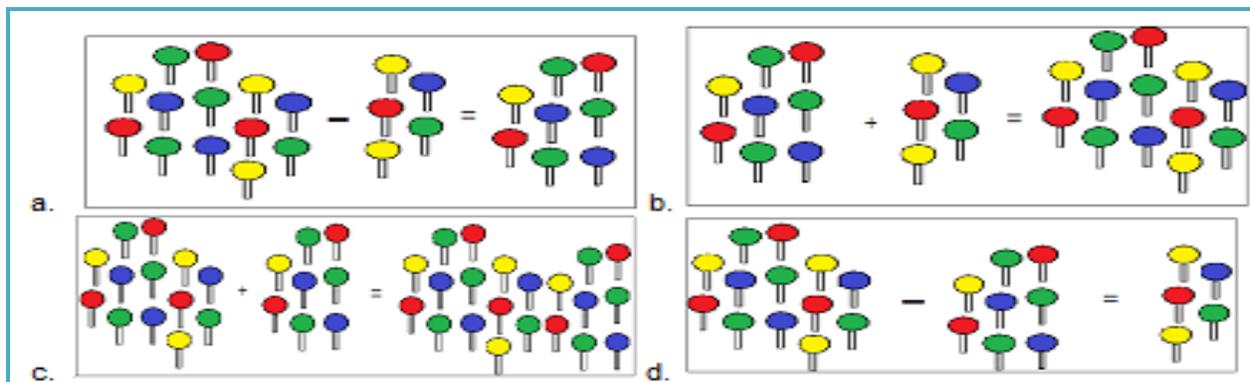


Figura A 48. Representación de una situación a partir de un conjunto de bombones.

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.4.1.4.

Cuando se presenta una situación de tipo aditivo, es decir, que involucre una adición o sustracción, es posible visualizar a través de diferentes formas geométricas el cambio ocurrido, por ejemplo, añadir o quitar cuadrados a una figura inicial.

Situación A.4.1.4.

La familia de Juan vende panes, ayer había 35, hoy hay 28, Juan quiere calcular cuántos panes de más había ayer en comparación con los de hoy. Él emplea una forma geométrica para representar el cálculo realizado. Los cuadrados azules representan las unidades de pan.

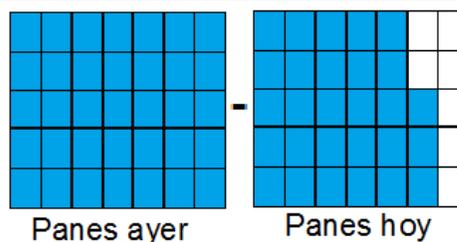


Figura A 49. Representación que presenta la comparación de panes vendidos.

5. La imagen que representa la cantidad de panes de más que había ayer, en comparación con la cantidad de panes que hay el día de hoy, es:

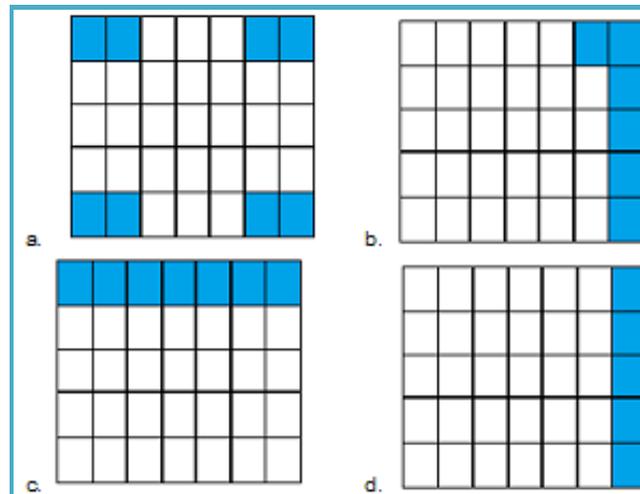


Figura A 50. Representación geométrica: Diferencia entre la cantidad de panes.

Explica tu respuesta:

Situación A.4.1.5.

Diana ha decidido formar agrupaciones empleando figuras formadas por triángulos de igual tamaño:

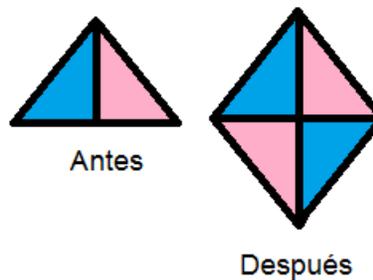


Figura A 51. Imagen que muestra el efecto de añadir en una forma geométrica.

6. Al observar cómo Diana construye la imagen antes y cómo la presenta después, puede afirmarse que:

a. Diana ha añadido nuevos triángulos a la figura inicial

- ..
- b. Diana ha quitado triángulos a la figura inicial
 - c. La cantidad de triángulos del mismo tamaño es igual en la figura inicial, en relación con la figura final
 - d. Se han trasladado los triángulos que presenta la figura inicial

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.4.1.5.

Para hallar la solución a una situación que involucre la adición y sustracción, se puede emplear representaciones en la recta numérica, imágenes y números.

Situación A.4.1.6.

Durante la clase de Matemáticas la profesora presenta a sus estudiantes la siguiente situación:

El día de los niños Diana tenía 5 confites, salió de casa y al regreso llevó 8 confites más, el número de confites que completó Diana es

La profesora pide dar solución a la situación y da a sus estudiantes la libertad para que hallen la respuesta.

Felipe ilustró la situación de la siguiente manera (Cada figura morada representa un confite):

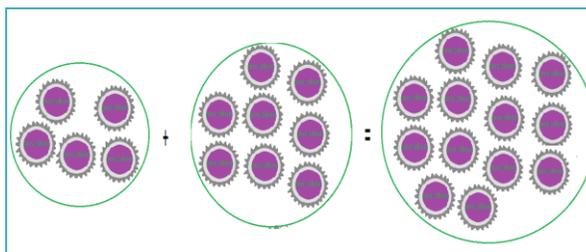


Figura A 52. Representación presentada por Felipe

Juan representó la situación en la recta numérica realizando desplazamientos.

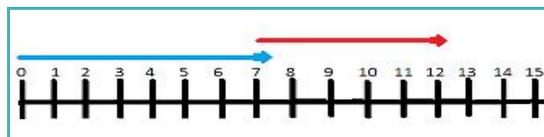
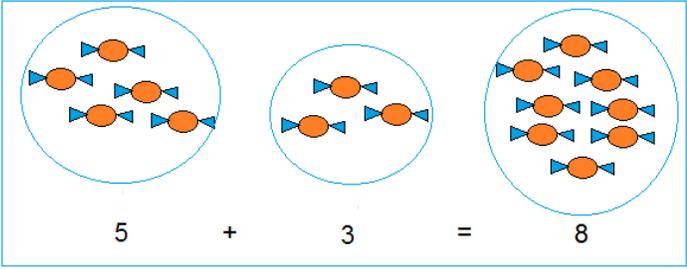


Figura A 53. Recta presentada por Juan

Diego decidió representarlo con conjuntos así:

..

| | |
|--|---|
| |  <p style="text-align: center;">Figura A 54. Conjuntos representados por Diego.</p> <p style="text-align: center;">Andrés simplemente lo hizo así: $5 + 8 = 13$</p> |
|--|---|

7. Señala con una X el nombre de quien (quienes) consideres que tienen las respuestas adecuadas para dar solución a la situación:

Andrés _____

Juan _____

Diego _____

Felipe _____

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.4.1.6.

En el contexto cotidiano se usan con frecuencia las estructuras de tipo aditivo, éstas deben ser utilizadas correctamente de acuerdo a la situación que se analiza.

Situación A.4.1.7.

Juan va a la tienda a comprar algunos alimentos. Él indaga por el valor de las galletas y la bolsa de leche. Las galletas cuestan \$450 y la bolsa de leche \$1800. Juan ha llevado \$2500, él reflexiona sobre la situación y concluye que para solucionarla debe emplear adiciones y sustracciones.

8. Cuando Juan calcula el valor total de las galletas y la bolsa de leche, concluye que la situación se puede solucionar empleando:

- ..
- a. La adición $450 + 1800$
 - b. La sustracción $1800 - 450$
 - c. La sustracción $2500 - 1800$
 - d. La adición $450 + 2500$

Explica tu respuesta:

9. Para saber cuánto dinero le sobra, la operación que Juan realiza es:

La adición $1800 + 2500 + 450$

La sustracción $2500 - 1800$

La sustracción $2250 - 2500$

La sustracción $2500 - 2250$

Explica tu respuesta:

A.4.2. Actividad 1: Observo, encuentro y propongo cambios en las estructuras

En esta actividad se tiene en cuenta el apoyo de la componente visual geométrica y se presentan algunas estructuras para que los estudiantes encuentren los aumentos o disminuciones que se ilustran en diferentes situaciones. Además se brinda la oportunidad para que haciendo uso del material presentado, sean ellos quienes formulen nuevas situaciones a partir de la estructura, apropiándose de las operaciones de adición y sustracción, las cuales forman parte de las estructuras de tipo aditivo.

Situación 4.2.1.

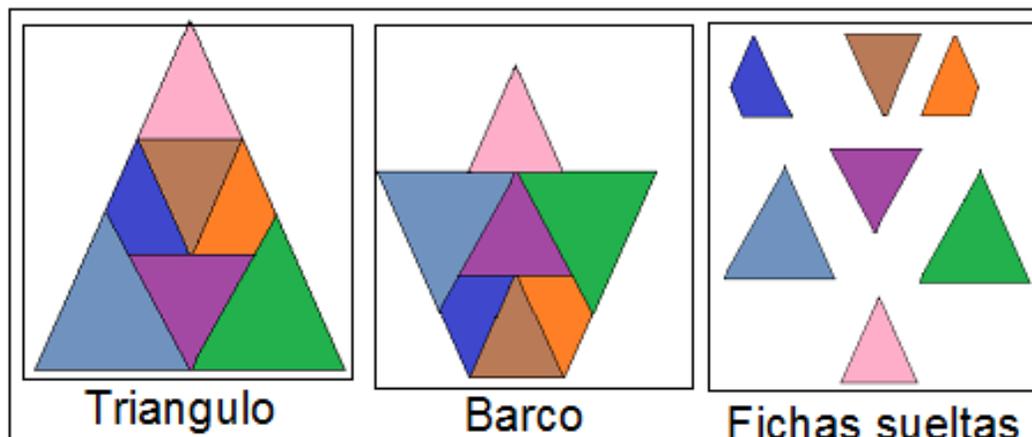


Figura A 55. Imagen que representa los cambios presentados en una construcción geométrica.

Se presenta a los estudiantes un rompecabezas formado por figuras geométricas y a partir de este se realizan las siguientes actividades:

Observa la reunión de las diferentes fichas de color que conforman el Triángulo y completa los siguientes enunciados:

La cantidad de figuras geométricas de diferente color que conforman el Triángulo es _____

Si se retiran dos fichas de diferente color a la figura inicial, el número de fichas de diferente color es que quedan es _____

Ahora observa la reunión de fichas que conforman el Barco y completa los siguientes enunciados:

El número de figuras geométricas de diferente color que conforman el Barco es _____.

Al comparar la cantidad de fichas de diferente color, que conforman el Triángulo y la imagen del Barco, se observa que son _____.

Toma las fichas sueltas de las figuras geométricas y construye una nueva figura. Plantea tres situaciones que involucren la adición y sustracción.

Situación 1: _____

Situación 2: _____

Situación 3: _____

Situación A.4.2.2.

Observa la siguiente imagen y luego completa los enunciados que se presentan:

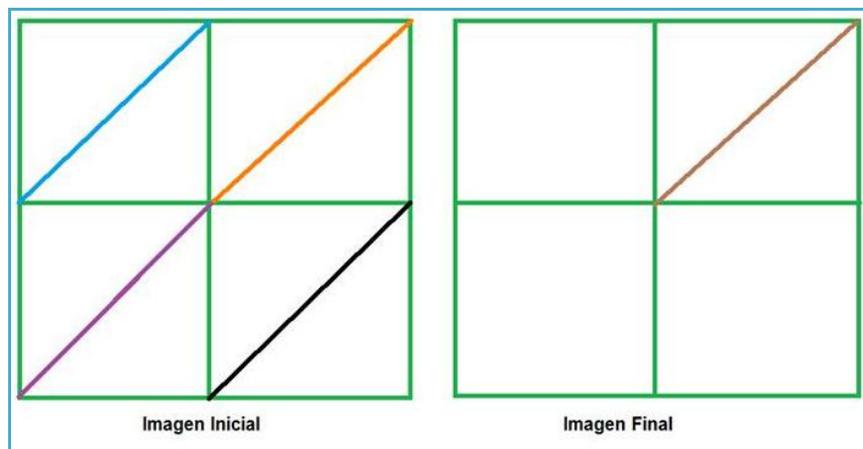


Figura A 56. Imagen que representa cambios ocurridos en una estructura geométrica.

1. En el interior del cuadrado que forma el contorno de la figura pueden observarse ocho triángulos iguales pequeños. Se le asigna a cada triángulo un valor numérico de 5.

El valor numérico que tiene un cuadrado pequeño es _____.

El valor numérico que tienen dos cuadrados de los pequeños es _____.

La nueva figura que forman dos cuadrados (pequeños) de los que hay al interior de la figura inicial, es un _____.

El valor numérico del cuadrado grande es _____.

2. Al observar el cambio presentado en la imagen inicial en relación con la imagen final puede concluirse que:

a. El cambio presentado en la figura inicial, hace que disminuya el número de _____, en la figura final.

b. El valor numérico que representa el total de la imagen inicial es _____.

c. El valor numérico que representa el total de la imagen final es _____.

A.4.3. Actividad 2

Propongo situaciones que involucran la adición y sustracción

En esta fase de orientación libre se da la oportunidad a los estudiantes de presentar sus propias estrategias para proponer y dar solución a situaciones del contexto haciendo uso de los enunciados verbales, la componente visual y simbólica, en situaciones que involucren las estructuras de tipo aditivo.

1. Piensa en actividades que se realizan en el transcurso de la semana y describe de qué forma se pueden emplear la adición y sustracción en cada caso:

Descanso escolar

Dinero recibido

Clase

Juegos con los amigos

2. Después de realizar la actividad anterior te invitamos a:

- a. Proponer una situación con enunciado verbal que involucre la adición y la sustracción.
- b. Representar una situación de forma gráfica.
- c. Plantear una situación que involucre cálculo numérico.

A.4.4. Actividad 3: Jugando con las regletas

En esta actividad empleando las regletas de Cuisenaire, los estudiantes representan valores y equivalencias de las mismas. Posteriormente, tienen la oportunidad de plantear situaciones que involucran la adición y sustracción utilizando las regletas para hallar la solución.

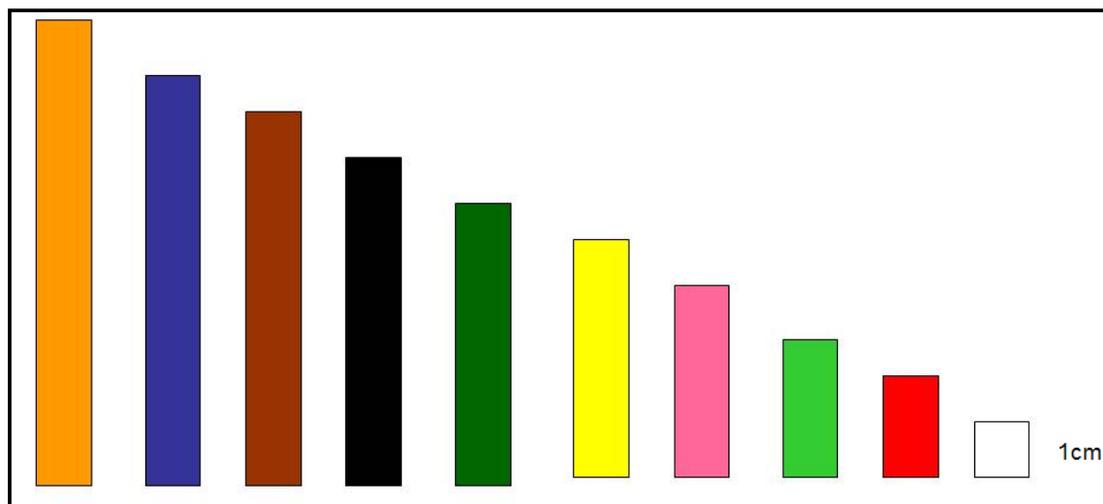


Figura A 57. Representación de las regletas de Cuisenaire.

Se ofrece a los estudiantes un juego de regletas de Cuisenaire, después de interactuar libremente con ellas, deben realizar las siguientes actividades:

1. Usando las regletas de color blanco (1cm) y de color rojo (2cm), cubre la regleta de color naranja.
2. Selecciona varias regletas y cubre la regleta de color negro.
3. Forma la figura que desees y luego plantea una situación que involucre la adición utilizando las cantidades numéricas que representa cada regleta.

4. Forma la figura que desees y luego plantea una situación que involucre la sustracción utilizando las cantidades numéricas que representa cada regleta.

A.4.5. Actividad 4: Mapa Conceptual

La construcción del Mapa Conceptual en esta fase, se convierte en una oportunidad para mostrar la red de relaciones construida, en relación con las estructuras de tipo aditivo. Los estudiantes emplean su propio lenguaje y consideran aquellos conceptos relevantes, en el contexto de las situaciones planteadas, para la construcción de éste.

Durante el desarrollo de las actividades de la fase 4 y las fases anteriores has adquirido conocimientos a partir de imágenes, representaciones en la recta numérica y enunciados de tipo verbal.

Realiza una lista de los conceptos que consideres pertinentes y construye un Mapa Conceptual que dé cuenta de los conocimientos adquiridos respecto al concepto de estructuras de tipo aditivo y sus posibles representaciones.

A.5. Fase 5: Integración

Experiencia 5: “Integro mis saberes”

En esta experiencia de aprendizaje se consolidan diferentes situaciones que permiten completar la red de relaciones por parte de los estudiantes sobre los elementos propios de las estructuras de tipo aditivo a partir de sus representaciones. Los estudiantes integran los conocimientos adquiridos en las fases anteriores y tienen la posibilidad de relacionarlos con situaciones del contexto.

A partir del desarrollo de las situaciones propuestas es posible verificar el cumplimiento de los descriptores que se presentan a continuación:

Descriptores de fase 5

1. Reconoce los elementos de las estructuras de tipo aditivo y los utiliza en la solución de situaciones problema.
2. Interpreta situaciones de tipo aditivo a partir de sus representaciones, aplicando correctamente las operaciones básicas de adición y sustracción.
3. Diferencia situaciones que implican la utilización de categorías de composición y de transformación.
4. Infiere, explica el proceso y operación matemática (adición o sustracción) a utilizar en el contexto de una situación de tipo aditivo.

A.5.1. Guión Entrevista de Carácter Socrático

En la fase 5, como fase de integración de acuerdo con los propósitos de la misma, la Entrevista de Carácter Socrático que se presenta busca que los estudiantes integren las estrategias utilizadas a lo largo del proceso, la componente visual -geométrica, enunciados verbales y su aspecto simbólico, con el fin de dar solución a situaciones de tipo aditivo, empleando las categorías de composición y de transformación, además se presentan situaciones en las cuales puede observarse la integración de los conocimientos para dar solución a situaciones del contexto.

Protocolo de entrada

Hola _____

En esta entrevista se presentan diferentes situaciones. Las siguientes actividades integran los conocimientos de las fases anteriores, para verificar la apropiación que tienes de los conceptos, relacionados con las estructuras de tipo aditivo, a partir de las situaciones propuestas desde sus representaciones gráficas, numéricas y de enunciado verbal.

Aporte de información A.5.1.1.

Las estructuras de tipo aditivo son el conjunto de acciones, en las cuales, se encuentran elementos que se pueden agrupar o separar de acuerdo con sus características, al asignar un valor numérico, a cada colección de elementos y a cada conjunto, puede ocurrir una transformación o cambio que le hace aumentar o disminuir de acuerdo con la situación.

Situación A.5.1.1.

Juan tiene varios objetos: carros, triángulos, nucas, cuadrados, balones, cometas, bombones, bolitas de chocolate; él es un estudiante del grado tercero y durante las clases de Matemáticas ha venido trabajando situaciones relacionadas con las estructuras de tipo aditivo, por esto aprovecha su tiempo libre para practicar lo aprendido en clase.

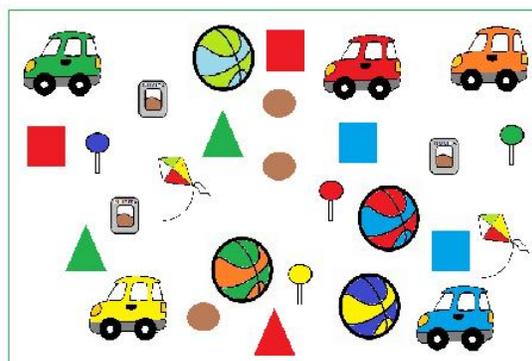


Figura A 58. Conjunto de objetos de Juan.

1. Juan decide agrupar sus objetos teniendo en cuenta las características: figuras geométricas, juguetes y dulces.

Selecciona los elementos que conforman dichos conjuntos:

- ..
- a. Carros, balones y cometas _____
 - b. Balones, bolitas de chocolate _____
 - c. Triángulos y cuadrados _____
 - d. Nucitas, bombones y bolitas de chocolate _____
 - e. Explica tu respuesta:

2. Juan asigna la cantidad numérica correspondiente a cada conjunto, de acuerdo al número de elementos de cada colección. Se puede afirmar que, las cantidades numéricas, que identifican los conjuntos de figuras geométricas, juguetes y dulces, respectivamente, son:

- a. 7 – 11 – 10
- b. 6 – 10 – 9
- c. 11 – 6 – 9
- d. 9 – 10 - 11

Explica tu respuesta:

3. Juan toma la colección de figuras geométricas y separa, de la cantidad total el conjunto de triángulos. Si se sabe que la cantidad total de figuras geométricas es 7 y la cantidad de triángulos es 3, la cantidad de cuadrados, es:

- a. 5
- b. 3
- c. 4
- d. 7

Explica tu respuesta:

4. Juan toma la colección de juguetes y de ella toma sus carros, observa que tiene cinco y recuerda que tiene guardados tres carros más, que su tío Carlos le ha regalado. Cuando Juan saca los carros que tiene guardados y los reúne con los carros que tenía en su conjunto de juguetes, se puede afirmar que:

- a. La cantidad de carros en el conjunto de los juguetes de Juan disminuye
- b. La cantidad de carros en el conjunto de los juguetes de Juan se duplica
- c. La cantidad de carros en el conjunto de los juguetes de Juan continúa igual
- d. La cantidad de carros en el conjunto de los juguetes de Juan aumenta

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.5.1.2.

Una situación matemática en la cual se añade o quita una cantidad puede representarse a través de imágenes, representaciones gráficas como la recta numérica o a partir de situaciones de enunciados verbales. Luego de observar y analizar, la representación presentada, puede realizarse una interpretación de los datos y aplicar la operación básica necesaria para su solución, es decir una adición o una sustracción.

Situación A.5.1.2.

Felipe sale a montar en su patineta, avanza 13 metros, a su regreso sufre una caída en el metro 6.

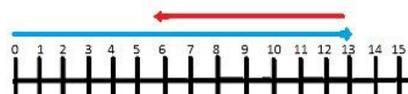


Figura A 59. Representación del desplazamiento de Felipe en su patineta.

5. La operación adecuada para calcular la cantidad de metros que ha avanzado Felipe al devolverse desde el punto 13 hasta el lugar de su caída es:

- a. $6 + 7 = 13$
- b. $13 + 6 = 21$
- c. $13 - 6 = 7$
- d. $13 - 7 = 6$

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.5.1.3.

Cuando se tiene una cantidad a la cual se le adiciona o quita otra cantidad de la misma naturaleza, por ejemplo, tengo 6 bombones y me regalan 5 bombones más, o al contrario tenía 11 bombones y después de regalar algunos me han quedado 6, se puede observar que, en la cantidad, ocurre un cambio que le hace aumentar o disminuir, en este caso se está trabajando la categoría de transformación de las estructuras de tipo aditivo.

Situación A.5.1.3.

Daniel tenía 8 canicas de cristal, después de jugar ha completado 12 canicas. ¿Cuántas canicas de cristal ha ganado?

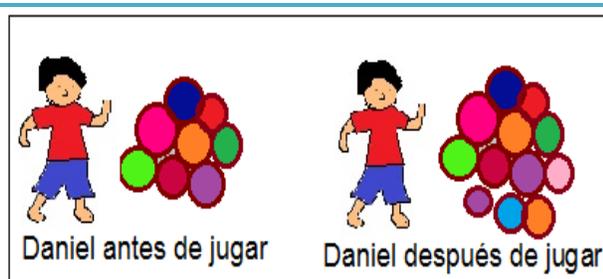


Figura A 60. Conjunto de canicas de Daniel.

6. Al analizar la situación ocurrida a Daniel y los datos del enunciado verbal puede afirmarse que:

- a. Se reúnen cantidades teniendo en cuenta características comunes.

- ..
- b. Se presentan elementos de la misma naturaleza, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación que hace que, la cantidad de canicas de cristal, continúe igual.
- c. Se presentan elementos de la misma naturaleza, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación que hace que, la cantidad de canicas de cristal aumente.
- d. Se presentan elementos de la misma naturaleza, en este caso canicas de cristal y ocurre una transformación que hace que, la cantidad de canicas de cristal, disminuya.

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.5.1.4.

Si se presenta un caso en el cual se tienen dos colecciones, que se diferencian en alguna de sus características, por ejemplo, 6 triángulos y 7 cuadrados, se puede hallar la cantidad total del conjunto de figuras geométricas. Por otro lado, cuando se conoce la cantidad total de elementos del conjunto, 13 figuras geométricas y una de las partes por ejemplo 6 triángulos, se puede preguntar por la otra parte, es decir, la cantidad de cuadrados; en este caso se está trabajando la categoría de composición de las estructuras de tipo aditivo.

Situación A.5.1.4.

Diana ha ido a la tienda y compra 8 bombones, al llegar a casa, decide separar los bombones de chicle de los bombones de chocolate y encuentra que, el número de bombones de chocolate, es 4.

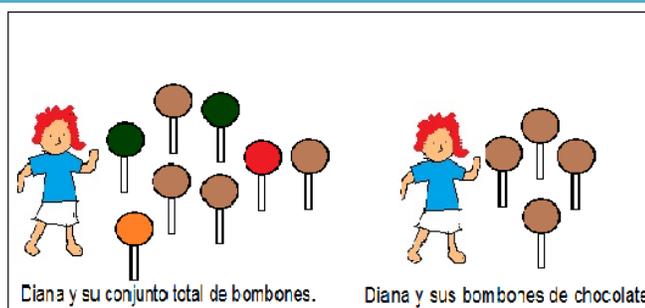


Figura A 61. Representación de la separación de los bombones que hace Diana.

7. De la anterior situación se puede concluir que:

- a. Diana separa sus bombones sin tener en cuenta ninguna característica en particular.
- b. En la situación vivida por Diana ocurre una transformación que hace que, su cantidad de bombones disminuya.
- c. Diana tiene en cuenta la característica general “bombones”, para reunir los elementos de su conjunto.
- d. Diana tiene en cuenta la característica “bombones de chocolate”, para separar su conjunto de bombones.

Explica tu respuesta:

Aporte de información A.5.1.4.

Cuando se presenta una situación matemática que involucra la adición y sustracción, la información presentada permite hacer interpretaciones, analizar, explicar el proceso realizado y justificar la operación matemática empleada.

Situación A.5.1.5.

Diego tenía ocho monedas y su tío Carlos le regala cuatro más. ¿Cuántas monedas tiene ahora?

8. Según el planteamiento anterior, lo que debo hacer, para hallar la solución, es:

- a. Una sustracción, porque pregunta por la cantidad total de monedas.
- b. Una adición, para calcular el aumento en la cantidad de monedas.
- c. Una adición, porque está preguntando por la disminución en una cantidad
- d. Una sustracción, porque ha disminuido la cantidad de monedas.

Explica tu respuesta:

Situación A.5.1.6.

Este fin de semana 340 personas visitaron la piscina. El fin de semana anterior, fue visitada por 253 personas.

9. Si se realiza la sustracción $340 - 253$ lo que se quiere averiguar es:

- a. El número de personas, que no visitaron, la piscina durante los dos fines de semana.
- b. El aumento que se ha presentado, en la cantidad de personas que visitaron la piscina, durante los dos fines de semana.
- c. La disminución que se ha presentado, en la cantidad de personas, que visitaron la piscina, durante los dos fines de semana.
- d. El número de personas que visitaron la piscina, durante este fin de semana.

Explica tu respuesta:

A.5.2. Actividad 1 Integrando mis conocimientos

La actividad propuesta pretende que a partir de una representación empleando la componente visual geométrica, los estudiantes integren los conocimientos adquiridos a lo largo del desarrollo de las fases, den solución a las situaciones presentadas, empleando las estructuras de tipo aditivo, con sus respectivas categorías de composición y transformación.

Situación A.5.2.1.

La profesora del grado tercero realiza una salida con los estudiantes al parque de recreación, allí ellos realizan diferentes actividades:

Ana y Diana recorren el prado saltando.

Diego, Luis y Juan juegan a las canicas.

Andrés y Laura toman los bloques lógicos y deciden formar agrupaciones.

Andrea y Juliana compran en la tienda algunas galletas.

Felipe toma los multicubos y construye algunos edificios.

Observa:

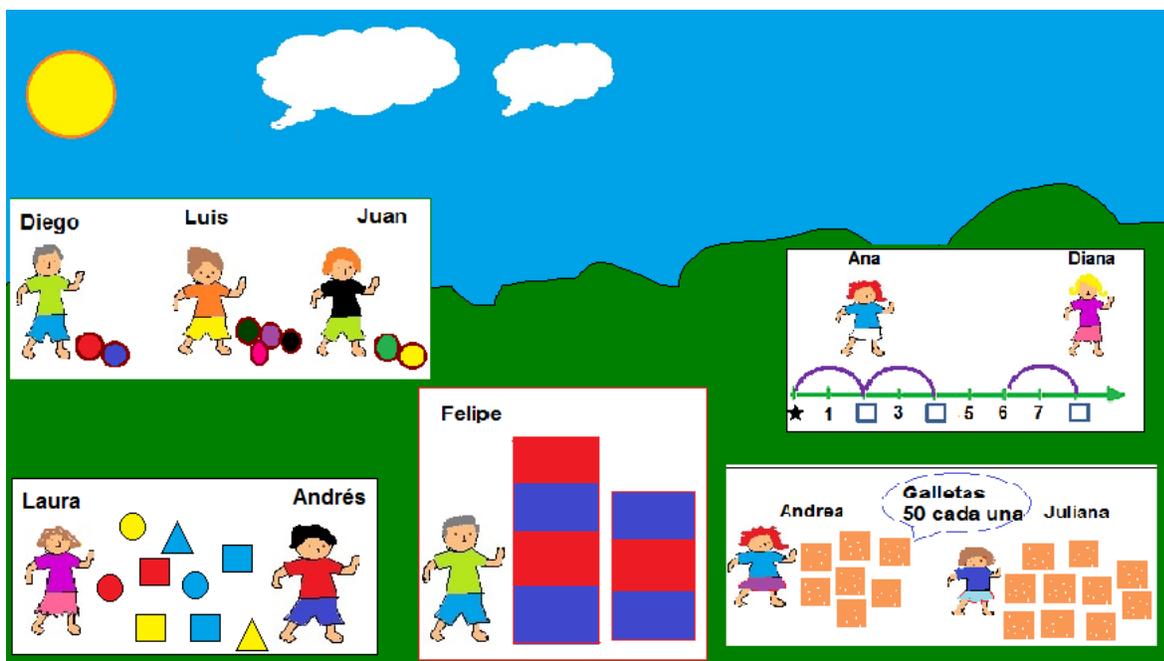


Figura A 62. Actividades realizadas por los niños en el parque.

Después de observar los saltos de Diana y Ana, completa las siguientes oraciones:

Al colocar los valores que hacen falta en la recta numérica, puede afirmarse que el valor para la distancia empleada en cada salto es: _____.

Diana ha realizado _____ saltos más que Ana.

Para calcular el número de saltos que ha dado Ana en comparación con los de Diana, la operación matemática que se puede emplear es la _____.

2. Después de observar la representación de las canicas de cristal que tienen Diego, Luis y Juan completa las siguientes afirmaciones:

- a. Las cantidades numéricas que representan las canicas de cristal de Diego, Luis y Juan son respectivamente: _____, _____ y _____.
- b. La cantidad numérica de canicas de cristal que tiene Diego en comparación con la cantidad de canicas de cristal que tiene Juan es: _____.
- c. Juan regala sus canicas de cristal a Diego. El total de canicas que Diego completa es: _____.
- d. Para calcular la diferencia entre las canicas que tiene Luis en relación con la cantidad de canicas de cristal que tiene Diego, contando las que Juan le regaló, se debe realizar una: _____.

3. Después de observar el conjunto inicial de bloques lógicos que tienen Andrés y Laura completa las siguientes afirmaciones:

- a. Si Andrés y Laura toman su conjunto de 9 figuras geométricas y retiran de este los 3 círculos, la cantidad de figuras geométricas que queda en el conjunto final es: _____.
- b. La operación matemática que permite encontrar el valor de retirar los círculos del conjunto de figuras geométricas es la: _____.
- c. La cantidad de triángulos y cuadrados del conjunto son respectivamente: _____ y _____. Si se reúnen en un solo conjunto los triángulos y cuadrados, la cantidad numérica resultante es: _____.

4. Después de comparar el número de galletas que compran Andrea y Juliana en la tienda, completa las siguientes afirmaciones:

- a. Juliana compró _____ galletas más que Andrea.
- b. Andrea pagó _____ por sus 7 galletas y Juliana pagó _____ por sus 10 galletas.
- c. Quien pagó menos dinero fue _____.
- d. El dinero adicional que pagó Juliana en comparación con el de Andrea fue _____.

A.5.3. Actividad 2: Mapa Conceptual

La construcción del Mapa Conceptual en esta fase por parte de los estudiantes, tiene como propósito observar la red de relaciones construida en relación con las estructuras de tipo aditivo y observar la forma como los estudiantes integran los conocimientos trabajados en cada una de las fases del modelo de van Hiele.

En el trabajo con las fases de aprendizaje, has realizado actividades para la comprensión de situaciones de tipo aditivo apoyado en imágenes, representaciones gráficas y enunciados de carácter verbal; allí, se han considerado los conceptos de conjunto, cantidad, transformación y composición.

A continuación se presentan algunos conceptos abordados durante el desarrollo de actividades en cada una de las fases.

Te invitamos a establecer el orden jerárquico para los conceptos y a construir un Mapa Conceptual que represente la relación entre los mismos en correspondencia con las estructuras de tipo aditivo.

Aumento

Composición

Adición

Sustracción

Transformación

Reunión

Conjunto

Número

Representación

Disminución

Separación

Apéndice B

Divulgación del trabajo de investigación

En esta sección se presentan los documentos completos, presentados para la participación, en varios eventos nacionales e internacionales, los cuales permitieron la socialización de los avances desarrollados y posibilitaron la publicación de memorias como contribución a la Educación Matemática.

B.1. Participaciones Nacionales

En los eventos realizados a nivel nacional, se realizó la publicación de las memorias, a partir de la modalidad de Comunicación Breve.

B.1.1. Comunicación Breve - Memoria

El 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME 13, Medellín, Colombia, Octubre 11 al 13 de 2012.

El reconocimiento de estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele

Dora Mercedes Bedoya Vélez, dorabedoyav@gmail.com, Universidad de Antioquia

Ledys Llasmín Salazar Gómez, ledysllasmin@gmail.com, Universidad de Antioquia

Pedro Vicente Esteban Duarte, pesteban@eafit.edu.co, Universidad de Eafit

Resumen. La investigación tiene como objetivo principal, describir el reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo, que hacen los estudiantes del grado tercero, para ello la propuesta se articula en el nivel de visualización del modelo de van Hiele, se realizarán tres estudios de caso presentando experiencias de aprendizaje, de acuerdo con las fases del modelo, que permitan obtener, como resultado, la descripción del reconocimiento que los estudiantes hacen de las estructuras de tipo aditivo, de forma general, como herramienta para la comprensión y aplicación de las mismas, en situaciones matemáticas y en grados posteriores.

Palabras clave. Estructuras aditivas, reconocimiento, visualización, fases de aprendizaje y aprendizaje.

1. Presentación del problema

Contexto. En ciertos momentos la experiencia docente genera espacios de reflexión sobre nuestras prácticas y la influencia de las mismas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, esto conlleva al análisis de los factores que influyen en dichos procesos, entre los cuales, cabe mencionar, las estrategias que se desarrollan en las prácticas de aula y que condicionan los procesos de aprendizaje, lo que las hace relevantes.

El problema de investigación. Particularmente se puede identificar como el aprendizaje de algunos conceptos, exclusivamente las estructuras de tipo aditivo, son abordados desde aprendizajes memorísticos en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San José, del municipio de Betulia. Cuando se plantean actividades, cuya solución requiere sólo una actividad de cálculo, los estudiantes la realizan sin inconvenientes y aplican el algoritmo de forma mecánica, en cambio cuando se plantean situaciones en las cuales se debe razonar, analizar, interpretar y traducir a una determinada operación, se observa dificultad en los procesos que involucran la comprensión y ejecución de cada una de éstas acciones.

Es pertinente, entonces, que en los procesos de razonamiento que involucran las estructuras de tipo aditivo, los estudiantes construyan un reconocimiento visual para llegar a la aplicación en diferentes situaciones, esta investigación se articula en el nivel de visualización del Modelo de van Hiele, donde los estudiantes reconocen las estructuras de tipo aditivo de forma general, siendo este paso una herramienta para la comprensión posterior de las mismas. Los estudiantes del grado tercero, tienen la necesidad del reconocimiento inicial de las estructuras aditivas, lo que permite la operación y aplicación de las mismas en diferentes contextos y situaciones matemáticas, ya que, dicho reconocimiento inicial, permite abordar las falencias y necesidades que presentan los estudiantes frente a la adición y sustracción, esto se ve reflejado en el desarrollo previo y posterior de situaciones matemáticas, que involucran estructuras de tipo aditivo.

Pregunta de investigación. ¿Cómo favorecer el reconocimiento de las estructuras aditivas en los estudiantes del grado tercero?

Estructuras de tipo aditivo. Las estructuras de tipo aditivo, son el conjunto de conceptos en que se trabajan todas aquellas acciones, en las cuales, están involucradas la adición y la sustracción, éstas son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas ya que se convierten en una base para la comprensión de operaciones, la solución de problemas aditivos y la representación de las mismas.

Justificación. Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la educación básica primaria, se convierten en un eje fundamental, en el campo de la educación, dado que posibilitan la adquisición de conocimientos básicos que, en ciertos momentos, son necesarios para el aprendizaje de nuevos conceptos y la solución de diversas situaciones matemáticas. Particularmente, el concepto de estructura, se convierte en una herramienta necesaria para la solución de situaciones con operaciones básicas en los estudiantes del grado tercero, los cuales, a partir de un reconocimiento inicial, podrán dar un uso y aplicación de las mismas en grados posteriores. Con respecto a las estructuras Jaramillo y Esteban (2006) hablan de la pertinencia de su reconocimiento y afirman que el estudio de las matemáticas debe orientarse hacia la comprensión de las estructuras que la conforman, permitiendo, a los estudiantes, la comprensión de la forma como operan en un concepto y así éstos podrán aplicarlo en distintas circunstancias de aprendizaje.

A lo largo de la historia se ha visto como, las estructuras de tipo aditivo, son temas de gran importancia en la Básica Primaria, esta afirmación se apoya en lo planteado desde los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) que hace énfasis en el currículo de Matemáticas, en las primeras etapas, en donde se construyen las operaciones fundamentales. Las situaciones relacionadas con estructuras de tipo aditivo, son procedimientos de relevante importancia en los primeros años de escolaridad y el avance en la comprensión de éstas es indispensable en la vida cotidiana, ya que se convierten en una base para la comprensión de otros conceptos matemáticos.

Objetivo General

- Describir el reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo en los estudiantes del grado tercero.

Objetivos específicos

- Reconocer la identificación que los estudiantes hacen de las propiedades de las estructuras de tipo aditivo.
- Favorecer la identificación de los estudiantes, desde la visualización, de las estructuras de tipo aditivo.

2. Marco conceptual

Las estructuras de tipo aditivo son de gran importancia, dentro de la educación básica primaria, pues hacen parte de la base que fundamenta el aprendizaje de otros conceptos como: Las operaciones con números decimales, la identificación de un área, volumen, estructura algebraica, entre otros. Éstos se construyen en relación a una adecuada configuración de las estructuras de tipo aditivo. A continuación se presentan algunos estudios que han trabajado diversos aspectos de la estructura aditiva.

Estructuras aritméticas elementales y su modelización (Castro, Rico y Castro, 1995). En este trabajo se resaltan algunas de las dificultades que, posteriormente, en Matemáticas pueden tener su origen en la instrucción inicial de suma y resta. Castro, Rico y Castro (1995), citando a (Carpenter y Moser) afirman que: “Las estructuras aditivas contienen un gran número de conceptos matemáticos que requieren de un largo período de tiempo para su comprensión”. Por ello es importante ayudar a los alumnos a fundamentar, adecuadamente, la estructura aditiva desde los primeros años de escolaridad.

Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos (Ruíz, 2000). En sus argumentos, el autor presenta la construcción y formalización de una representación geométrica y otra simbólica, para expresar un concepto aritmético como es la estructura aditiva apoyado en la tabla numérica, conocida como la Tabla-100. Afirma que la representación geométrica es la expresión visual del operador aditivo, el cual se puede ver desde un punto de vista figurativo,

..

siendo la expresión simbólica una descripción aritmética de dicho operador (Ruíz, 2000). De esta forma, lo geométrico y simbólico, ayuda a que, el alumno, afiance las operaciones en la parte aritmética y viceversa.

El modelo educativo de van Hiele. Este marco de trabajo, desarrollado inicialmente para el trabajo en Geometría, le da una importancia singular a la visualización de los objetos y propiedades que conforman un concepto. De otro lado, el trabajo de aula en el que se aplican los lineamientos del modelo, se enfoca en la búsqueda de estructuras, que permitan, a los alumnos, reconocer el concepto objeto de estudio en diferentes contextos (van Hiele, 1986). Por lo anterior, la aplicación de este modelo a la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras de tipo aditivo, es un área de investigación que promete resultados innovadores, en el campo de la Educación Matemática.

El trabajo de investigación pretende describir el reconocimiento y visualización de las estructuras de tipo aditivo, asume la definición de estructuras desde el modelo que relaciona, la estructura con el insight, ya que afirma que, es la comprensión de las estructuras. Para el logro del objetivo de investigación, se retoma la parte prescriptiva del modelo, las fases.

Según Corberán, et al., (1994), las fases de razonamiento de van Hiele, son las siguientes:

Fase 1, información: El profesor informa los conceptos, problemas, material a utilizar y metodología empleada para desarrollar la temática. Se realiza el diagnóstico de los conocimientos previos.

Fase 2, Orientación dirigida: En esta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión.

Fase 3, Explicitación: El estudiante exponen lo que ha observado y realizado, sus conclusiones frente al concepto, esta es una fase de debate e intercambio de ideas.

Fase 4, Orientación libre: Se proponen problemas donde el estudiante se enfrente a diversas maneras de resolverlo y pueda aplicar los conocimientos.

Fase 5, Integración: Se orienta a los estudiantes para que estos lleguen a comprensiones globales, mediante la comparación y combinación de los conocimientos ya adquiridos.

Estas fases serán trabajadas en el primer nivel de razonamiento: Nivel 1, de reconocimiento visual, donde los estudiantes ven el objeto de estudio, de manera global, dan características físicas de éste.

Se tiene en cuenta el módulo de aprendizaje como herramienta de gran importancia para favorecer el progreso a través de las fases, el cual es un conjunto de actividades, acordes al nivel de razonamiento que se desea alcancen. Estas experiencias de aprendizaje, están en una relación directa con cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele. Se tiene, como estrategia de apoyo, la Entrevista de Carácter Socrático, ésta semi - estructurada y fundamentada en el diálogo, y apoyada en preguntas con aporte visual.

3. Metodología

La investigación está orientada desde un enfoque cualitativo, puesto que les permite a los participantes, construir la realidad desde su contexto social y cultural, es decir los estudiantes participan como sujetos que aprenden, desde su entorno subjetivo, por lo tanto, en ellos, los procesos se dan de manera relativa y por supuesto diversa. Para describir de manera detallada, profunda y singular el progreso de cada uno de los participantes, en la investigación, es conveniente utilizar el estudio de caso, para ello se tendrán en cuenta tres casos particulares para la descripción del reconocimiento que, los estudiantes, hacen de las estructuras de tipo aditivo, a partir del diseño de experiencias de aprendizaje.

4. Resultados esperados

Con la presente investigación se pretende describir los procesos de razonamiento, con respecto al reconocimiento y la visualización de las estructuras de tipo aditivo, en los estudiantes del grado tercero. Se espera, además como producto final, la consolidación de un Módulo de Aprendizaje, que sirva como apoyo a los docentes, para la enseñanza de las estructuras de tipo aditivo.

B.2. Participaciones Internacionales

Los eventos de tipo internacional posibilitaron el compartir, con la comunidad académica, las ponencias presentadas, publicando luego, el resumen, en el libro de memorias del evento.

B.2.1. Memoria, ponencia

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 9, 10 y 11 de 2012.

Caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado tercero.

Contexto: En el área de Matemáticas los docentes evidencian, constantemente, en sus prácticas educativas, aprendizajes memorísticos por parte de los estudiantes, particularmente en situaciones, que involucran estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero, de la Institución Educativa San José del municipio de Betulia, por lo cual se hace importante analizar la forma en que, los estudiantes razonan ante dichas situaciones, con el fin de comprender y describir su razonamiento.

Objetivo general: Caracterizar los niveles de razonamiento de van Hiele en el análisis de situaciones, que involucran estructuras de tipo aditivo, en los estudiantes del grado tercero, en la Institución Educativa San José, del municipio de Betulia.

Metodología: El paradigma cualitativo se articula con los propósitos de la investigación, por lo tanto, se considera apropiado desarrollar, el estudio de caso, puesto que permite describir, con detalle, cada una de las características del razonamiento de los estudiantes en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Resultados: Con la presente investigación se pretende realizar una descripción detallada de tres estudios de caso, en los que se describen los procesos de razonamiento de los estudiantes, en cada uno de los niveles de van Hiele, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Conclusiones: Caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo, de estudiantes del grado tercero.

Palabras clave: Niveles de razonamiento, estructuras de tipo aditivo, entrevista socrática y descriptores.

B.2.2. Memoria, ponencia

V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 8, 9 y 10 de 2013.

La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele.

Contexto: En el área de Matemáticas se puede identificar como, el aprendizaje de algunos conceptos, exclusivamente las estructuras de tipo aditivo, son abordados desde aprendizajes memorísticos, en los estudiantes del grado tercero, de la Institución Educativa San José del municipio de Betulia, por lo cual se hace importante analizar la forma en que éstos razonan ante dichas situaciones, cuando son presentadas con apoyo de la componente visual geométrica, con el fin de comprender y describir su razonamiento.

Objetivos: Analizar la comprensión de las estructuras de tipo aditivo que adquieren los estudiantes del grado tercero, a partir de experiencias de aprendizaje, fundamentadas en las fases del modelo de van Hiele.

Metodología: Los fundamentos metodológicos de la investigación, se articulan al paradigma cualitativo y se estructuran consolidando herramientas para observar el proceso de razonamiento, realizado por cada uno de los participantes en la investigación. Se considera apropiado desarrollar el estudio de caso que permite describir, con detalle, la comprensión que adquieren los estudiantes, en situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo.

Resultados: Con la presente investigación se realiza la descripción de la comprensión de los estudiantes, en torno a las estructuras de tipo aditivo, se consolida un módulo de aprendizaje con base en las fases del modelo de van Hiele, que se convierte en una herramienta de apoyo, para los docentes de la educación básica primaria, del currículo colombiano.

Conclusiones: El análisis de la información recolectada deja ver que, el desarrollo de actividades, que involucren la componente visual geométrica, favorece la adecuada configuración del concepto de estructuras de tipo aditivo.

Palabras clave: Comprensión, estructuras de tipo aditivo, visualización, fases del modelo de van Hiele y Módulo de Aprendizaje.

B.3. Artículos

Los artículos que se presentan, hacen parte del proceso de divulgación del trabajo de investigación.

B.3.1. Situaciones en contexto para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero.

La participación en el 14 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME 14, posibilitó la publicación del artículo, en la Revista Científica del Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Situaciones en contexto para la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes del grado tercero

Dora Mercedes Bedoya Vélez, dorabedoyav@gmail.com, Universidad de Antioquia -
Estudiante

Ledys Llasmín Salazar Gómez, ledysllasmin@gmail.com, Universidad de Antioquia -
Profesora

Pedro Vicente Esteban Duarte, pesteban@eafit.edu.co, Universidad de Eafit - Profesor

Resumen. La comprensión de las estructuras de tipo aditivo influye en el aprendizaje de las operaciones básicas. El trabajo de investigación, abordó la comprensión de estas estructuras, en estudiantes del grado tercero, se desarrolló implementando herramientas como: entrevistas de carácter socrático y observaciones. Éstas se estructuraron en relación con las fases del modelo educativo de van Hiele, lo cual permitió evidenciar las construcciones mentales y razonamientos de los estudiantes. La información recolectada, se analizó mediante la codificación y categorización, con el fin de describir la comprensión en torno al concepto objeto de estudio. Finalmente, el producto obtenido se formalizó en un Módulo de Aprendizaje, como aporte a los docentes en sus prácticas de aula.

Palabras clave. *Comprensión, estructuras de tipo aditivo, visualización, fases del modelo de van Hiele y Módulo de Aprendizaje.*

1. Presentación del problema

Las estrategias, bajo las cuales se desarrollan las prácticas de aula, influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Este hecho se convierte en un aspecto fundamental, para la adquisición de nuevos conocimientos y la solución de situaciones matemáticas, en diversos contextos y niveles de escolaridad. Es por ello, que los docentes deben enfocar su práctica en permitir, a los estudiantes, el reconocimiento de diversas estructuras en diferentes ramas del conocimiento.

Particularmente, al abordar el concepto de estructuras de tipo aditivo, en los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San José del municipio de Betulia (Antioquia,

Colombia), se apreció que, cuando el docente presentaba actividades, cuya solución requería de una actividad de cálculo, los estudiantes las realizaban sin inconvenientes y aplicaban el algoritmo de la adición o sustracción de forma mecánica. En cambio, cuando se planteaban situaciones en las que se debía razonar, analizar, interpretar y emplear una determinada operación, se observó que era necesario generar procesos, que involucraran un adecuado razonamiento y que dieran cuenta de la manera cómo se interpretaban los conceptos, por lo cual se hizo pertinente analizar la forma en que los estudiantes, razonan ante dichas situaciones, cuando se presentan en contexto.

Las estructuras de tipo aditivo son definidas por Vergnaud (1991) como: “estructuras o relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones y sustracciones” (p. 161). La aproximación a las mismas, fue posible a través de experiencias diseñadas, con la intencionalidad de favorecer la comprensión del concepto, en situaciones particulares del contexto.

2. Marco de referencia conceptual

En el contexto educativo colombiano, los fundamentos sobre las estructuras de tipo aditivo, se apoyan en los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional “MEN”. Los Lineamientos Curriculares para Matemáticas plantean que: “Una parte importante del currículo de matemáticas en la educación básica primaria, se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales” (MEN, 1998, p. 48). Es por ello que, la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, es un aspecto fundamental en los primeros años de escolaridad.

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, para el grado tercero, en el aula de clase se deben fomentar experiencias de aprendizaje que ayuden al estudiante a: “Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación y representar el espacio circundante para establecer relaciones espaciales (MEN, 2006, p. 80)” con el fin de acercarlos al aprendizaje de los conceptos.

Atendiendo a lo planteado, en la investigación se presentaron actividades que permitieron el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo a partir de situaciones de composición y transformación. Estas categorías fueron abordadas teniendo en cuenta los aportes de Vergnaud (1991): “Primera categoría: Dos medidas se componen para dar lugar a una medida y Segunda categoría: Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida” (p. 164). Las experiencias en contexto que, permitieron abordar las categorías presentadas por Vergnaud, se articularon a las fases de aprendizaje del modelo educativo.

El modelo educativo de van Hiele fue desarrollado, inicialmente, para el trabajo en Geometría. Le confiere gran importancia a la visualización de los objetos y a las propiedades que conforman un concepto, de allí, su relevancia en la implementación de la propuesta. El trabajo de investigación pretendió describir la comprensión de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado tercero, para lo cual se consideró, como referente, las fases del modelo.

Las fases de aprendizaje, son las siguientes: Fase 1, Información, se realiza el diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes, el profesor informa los conceptos, problemas, material a utilizar y metodología empleada para desarrollar la temática; Fase 2, Orientación dirigida, en ésta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión; Fase 3, Explicitación, el estudiante expone lo que ha observado, realizado y aprendido en sus actividades, ésta fase es de debate e intercambio de ideas; Fase 4, Orientación libre, se proponen problemas y situaciones donde el estudiante se enfrenta a diversas maneras de resolverlos y Fase 5, Integración, donde se orienta a los estudiantes para que lleguen a comprensiones globales, mediante la comparación y combinación de los conocimientos ya adquiridos (Corberán, et al, 1994). Estas fases fueron trabajadas, a partir de experiencias en contexto, que involucraban la componente visual geométrica y el aspecto simbólico de las estructuras de tipo aditivo.

3. Metodología

Los fundamentos metodológicos de la investigación, se articularon al paradigma cualitativo y se estructuraron, consolidando herramientas que permitieron observar el proceso de

razonamiento, llevado a cabo por cada uno de los participantes de la investigación. Debido a su naturaleza, se consideró apropiado, desarrollar el estudio de caso que permitió describir con detalle la comprensión que adquirieron los estudiantes, en situaciones que involucraban estructuras de tipo aditivo.

El estudio de caso requiere de la implementación de herramientas que puedan dar cuenta de la información proporcionada por cada estudiante de forma detallada y acertada (Stake, 1999). Por lo tanto, en el desarrollo de la propuesta de investigación se emplearon entrevistas de carácter socrático y observaciones en profundidad (Jaramillo & Campillo, 2001).

4. Análisis de datos

La información recolectada, en el trabajo de campo, se analizó a través de un proceso de codificación y categorización que permitió describir la comprensión de los estudiantes, en relación con el concepto objeto de estudio. El análisis de los resultados de la Entrevista de Carácter Socrático y la solución de tests, junto con las evidencias de las observaciones, admitió la descripción detallada de cada caso.

A continuación se describen algunas respuestas proporcionadas por un estudiante, en una situación planteada, a partir del trabajo en contexto en la Fase 3.

Situación. Carlos subió en un ascensor hasta el piso número 13, estando allí recordó que su tía Marta vivía en otro piso, al preguntar, le han dicho que vive siete pisos más abajo, por lo tanto debió devolverse. Ayuda a Carlos a descubrir en qué piso vive su tía Marta.



Figura 1. Recta numérica que representa la situación vivida por Carlos en el ascensor.

..

La operación matemática adecuada para hallar la solución a la situación vivida por Carlos es:

- a. $13 - 6 = 7$
- b. $7 + 6 = 13$
- c. $13 - 7 = 6$
- d. $13 + 6 = 19$

Explica tu respuesta: _____.

Entrevistador: Mira la gráfica y trata de encontrar la respuesta a la situación estudiada.

Estudiante: Sí.

Entrevistador: ¿Qué operación matemática se puede utilizar para dar solución al problema?

Estudiante: La resta.

Entrevistador: ¿Cuál es la respuesta acertada?

Estudiante: La c

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante: Él estaba en el piso 13 y tuvo que bajar, entonces se resta.

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante: Él baja, entonces él merma los pisos donde queda al final.

La utilización de las categorías de composición y transformación le permitieron al estudiante describir los cambios ocurridos en una situación particular y resolverla numéricamente.

5. Conclusiones

El análisis de la información permitió construir y refinar descriptores, para cada una de las fases de aprendizaje, en relación con las estructuras de tipo aditivo, los cuales permitieron dar cuenta de las características, que poseen los estudiantes, en relación con la comprensión del concepto.

El desarrollo de actividades, que involucraban la componente visual, favoreció la adecuada configuración del concepto, particularmente el de estructuras de tipo aditivo

Es importante resaltar que, el uso de la Entrevista de Carácter Socrático, consolidada en un Módulo de Aprendizaje, permitió analizar la comprensión que los estudiantes tienen de los conceptos matemáticos. Particularmente, en la investigación se refinaron la entrevista y las actividades, con el fin de brindar una herramienta de apoyo a los docentes, de la educación básica primaria, del currículo colombiano, ya que las estructuras de tipo aditivo están en la base del aprendizaje de la Aritmética Elemental y permiten la consolidación y comprensión de otros conceptos en el ámbito matemático.

<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/issue/current/showToc>

B.3.2. Comprensión de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes de la básica primaria Revista

La Universidad de Antioquia y la revista uni-pluri/versidad, brindó la oportunidad de participación con un artículo relacionado con el trabajo de investigación, este artículo se encuentra en proceso de revisión.

Comprensión de las estructuras de tipo aditivo, en estudiantes de la básica primaria

Dora Mercedes Bedoya Vélez²
dorabedoya@gmail.com
 Estudiante de la Maestría en Educación
 Universidad de Antioquia

Mg. Ledys Llasmin Salazar Gómez³
ledysllasmin@gmail.com
 Docente Universidad de Antioquia

PhD. Pedro Vicente Esteban Duarte⁴
pesteban@eafit.edu.co
 Docente Universidad EAFIT

² Profesora de la Institución Educativa San José del Municipio de Betulia, Antioquia.

³ Profesora de la Institución Educativa Juan María Céspedes del Municipio de Medellín, Antioquia.

⁴ Profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de EAFIT, Medellín, Antioquia.

RESUMEN.

En las Matemáticas las estructuras de tipo aditivo influyen en el aprendizaje de las operaciones básicas. El trabajo de investigación⁵ que se reporta en este artículo abordó la comprensión de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes de la básica primaria y se desarrolló a través de la implementación de herramientas como las entrevistas de carácter socrático y observaciones. Éstas se estructuraron en relación a las fases del modelo educativo de van Hiele, lo cual permitió poner en evidencia las construcciones mentales y los razonamientos de los estudiantes. La información recolectada en el trabajo de campo, fue analizada a través de un proceso de codificación y categorización, lo cual permitió describir la comprensión de los estudiantes en torno al concepto objeto de estudio. Finalmente, el producto obtenido se formalizó en un Módulo de Aprendizaje, que es una herramienta que aporta a los docentes en sus prácticas de aula para abordar el concepto de estructuras aditivas, particularmente en estudiantes del grado tercero.

PALABRAS CLAVE: Comprensión, estructuras de tipo aditivo, visualización, fases del modelo de van Hiele y Módulo de Aprendizaje.

ABSTRACT.

In Mathematics additive type structures influence learning basic operations. The research [1] which is reported in this article addressed the understanding of additive type structures in basic primary students and developed through the implementation of tools such as observations and interviews Socratic character. These are structured in relation to the phases of the educational model of van Hiele, which allowed to expose the mental and reasoning of students. The information collected in the field, was analyzed through a process of coding and categorization, which enabled describe the students' understanding about the concept under study. Finally, the product obtained was formalized into a Learning Module, which is a tool that provides teachers

⁵ Trabajo de investigación "La comprensión de las estructuras de tipo aditivo enmarcada en las fases del modelo de van Hiele". Maestría en Educación con énfasis en docencia de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Colombia, 2013.

..

in their classroom practices to address the concept of additive structures, particularly in third grade students.

KEYWORDS: Understanding, additive type structures, visualization, phases of the Hiele model and Learning Module.

Introducción

Las estrategias bajo las cuales se desarrollan las prácticas de aula, influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Este hecho se convierte en un aspecto fundamental para la adquisición de nuevos conocimientos y la solución de situaciones matemáticas, en diversos contextos y niveles de escolaridad. Es por ello que, los docentes, deben enfocar su práctica en permitir a sus estudiantes el reconocimiento de diversas estructuras, en diferentes ramas del conocimiento. Particularmente, algunos tópicos de las Matemáticas, se fundamentan en el reconocimiento de estructuras, tales como: grupo, anillos, campos, entre otras.

El presente artículo expone un aporte metodológico alternativo para la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras de tipo aditivo en estudiantes de la básica primaria. Las estructuras de tipo aditivo son definidas por Vergnaud (1991) como: “estructuras o relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones y sustracciones” (Vergnaud, 1991, p.161). La aproximación a las mismas, fue posible a través de experiencias diseñadas, con la intencionalidad de favorecer la comprensión del concepto, en situaciones particulares del contexto.

Los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta, están enmarcados en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional “MEN” y, en las fases de aprendizaje, del modelo educativo de van Hiele. El diseño metodológico se

..

articula al aspecto prescriptivo del modelo, el cual está determinado, por las fases de aprendizaje del mismo.

En el contexto educativo colombiano, los Lineamientos Curriculares para Matemáticas plantean que: “Una parte importante del currículo de matemáticas en la educación básica primaria, se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales” (MEN, 1998, p. 30). Es por ello que la comprensión de las estructuras de tipo aditivo y su relación con las operaciones básicas, es un aspecto fundamental en los primeros años de escolaridad.

Para que los conceptos matemáticos sean comprendidos por los estudiantes, éstos deben relacionarse con necesidades e intereses propios del contexto en el que desarrollan sus actividades. Realizar diversas operaciones, interpretarlas y analizarlas, favorece, en el estudiante, comprender el contexto de forma cuantitativa, permitiéndole crear modelos que le permitan hacer abstracciones y generalizaciones del mundo real. Por lo tanto, la adecuada asimilación de las estructuras de tipo aditivo y su relación con el contexto, cobran importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Al respecto, el MEN resalta la importancia del trabajo escolar en contexto de la siguiente manera:

En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellas que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. Por ejemplo las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que se trabajan simultáneamente con las ideas que dan lugar al concepto de número.

Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones, en donde el niño describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción, en una segunda etapa está abstrayendo las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos haciendo uso de diversos esquemas o ilustraciones con los cuales se está dando un paso hacia la expresión de las operaciones a través de modelos (MEN, 1998, p. 30).

Por lo tanto, las estrategias docentes, deben apuntar a que, el estudiante relacione las estructuras de tipo aditivo con acciones que le permitan comprender diferentes aspectos del entorno y su cotidianidad.

En el contexto escolar, se puede apreciar que en momentos donde el docente plantea situaciones, cuya solución requiere de, una actividad de cálculo, los estudiantes la realizan sin inconvenientes y aplican el algoritmo de la adición o sustracción de forma mecánica. En cambio cuando se plantean situaciones en las que se debe razonar, analizar, interpretar y emplear una determinada operación, se observa que es necesario generar procesos que involucren un adecuado razonamiento y que den cuenta de la forma como se interpretan los conceptos. De acuerdo con el MEN, en el aula de clase, se debe fomentar experiencias de aprendizaje que ayuden al estudiante a:

- Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Usar diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identificar, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Representar el espacio circundante para establecer relaciones espaciales (MEN, 2006, p. 80).

En concordancia con lo anterior, las aplicaciones y usos del concepto permiten dar cuenta de las exigencias curriculares planteadas por el MEN y la importancia de las estructuras de tipo aditivo en los contextos cotidianos.

El diseño de las experiencias de aprendizaje que permitieron abordar los aspectos resaltados, se articuló a las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, correspondiente al aspecto prescriptivo.

A partir de las fases se diseñaron experiencias que partieron desde la visualización geométrica, debido a que el modelo educativo de van Hiele permite articular conceptos que poseen componente visual-geométrica. Este tipo de prácticas favorece la comprensión de diferentes temas, relacionados con el saber matemático, como la multiplicación, la división, la

..

potenciación, entre otros. En concordancia con lo anterior, las fases de aprendizaje permiten abordar las estructuras de tipo aditivo, que utilizan los estudiantes, a partir de su uso en las prácticas escolares y en contextos cotidianos.

Marco conceptual

El reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo, desde su aspecto visual geométrico, permite que los estudiantes establezcan relaciones, formulen abstracciones, realicen inferencias, reconozcan propiedades y resuelvan problemas. Para el reconocimiento de las estructuras de tipo aditivo (adición y sustracción), es fundamental definir el concepto y las estrategias empleadas para su comprensión. En este sentido, se exponen a continuación los fundamentos teóricos que sustentaron la investigación, los cuales estuvieron enmarcados en el modelo de van Hiele y los aportes de Vergnaud.

Respecto a las estructuras aditivas, estas pueden ser abordadas en el aula a través de situaciones variadas que den sentido al concepto y a su representación, con el fin de construir marcos referenciales en forma de esquemas o categorías.

Vergnaud (1991) propone seis grandes categorías para abordar las situaciones aditivas:

Primera categoría: Dos medidas se componen para dar lugar a una medida.

Segunda categoría: Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.

Tercera categoría: Una relación une dos medidas.

Cuarta categoría: Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.

Quinta categoría: Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

Sexta categoría: Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo (Vergnaud, 1991, p.161).

Atendiendo a lo planteado desde los Estándares Básicos de Competencias para el grado tercero (Colombia, 2006), en la investigación, se presentaron actividades que permitieron el reconocimiento de las estructuras aditivas a partir de situaciones de composición y transformación

En una relación de composición se presentan situaciones en las cuales, se tienen dos cantidades que se diferencian en alguna de sus características. Se puede hallar la cantidad total cuando se conocen las partes de un conjunto. De otro lado, cuando se conoce la cantidad total y una de las partes, se puede preguntar por la otra parte. Estas situaciones se ilustran en la Figura 1.

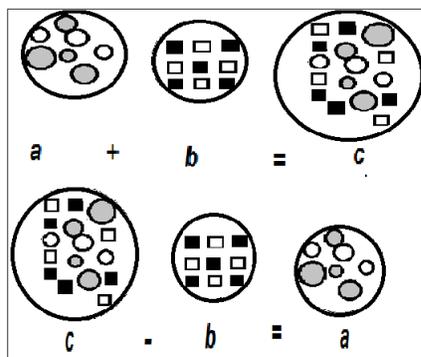


Figura 1. Imagen que representa la categoría de composición de las estructuras aditivas.

En una relación de transformación, se parte de una cantidad a la cual se le adiciona o quita otra cantidad, de la misma naturaleza. En estas situaciones se puede preguntar por la cantidad que resulta de la transformación, por la cantidad inicial y/o por la cantidad final. Estas situaciones se ilustran en la Figura 2.

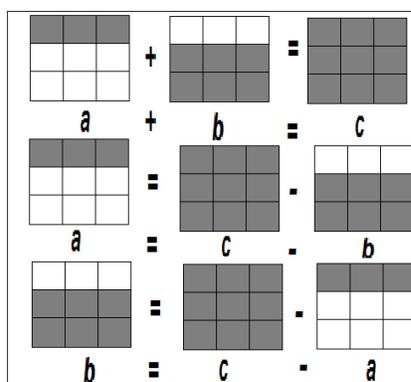


Figura 2. Imagen que representa la categoría de transformación de las estructuras aditivas.

Las categorías de composición y transformación, se abordaron a partir de experiencias basadas en la visualización, a través del desarrollo de actividades enmarcadas en las fases del modelo educativo de van Hiele, con el fin de describir la comprensión que adquieren los

..

estudiantes del grado tercero sobre este concepto, para ubicarlos en el nivel de reconocimiento visual, en correspondencia con el modelo. Respecto a las categorías y su respectiva articulación con el modelo educativo de van Hiele, es importante resaltar que la utilización de las mismas se ha llevado a cabo gracias al aspecto prescriptivo del modelo.

El modelo educativo de van Hiele fue desarrollado, inicialmente, para el trabajo en Geometría. Le confiere gran importancia a la visualización de los objetos y a las propiedades que conforman un concepto, de allí, su relevancia en la implementación de la presente propuesta, dado que permitió abordar los elementos de las estructuras de tipo aditivo desde su componente visual geométrica.

A continuación se exponen los componentes de este modelo: *Insight*, niveles de razonamiento y fases de aprendizaje.

El *insight* permite evidenciar la estructura mental de los estudiantes, allí se pone de manifiesto la comprensión y las redes de relaciones, construidas en torno al concepto, en relación a los procesos de razonamiento que se generan de acuerdo a lo aprendido en el desarrollo de diversas actividades (Jaramillo y Esteban, 2006).

Las fases de aprendizaje, como el componente prescriptivo del modelo, son las siguientes: Fase 1, Información, se realiza el diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes, el profesor informa los conceptos, problemas, material a utilizar y metodología empleada para desarrollar la temática; Fase 2, Orientación dirigida, en ésta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión; Fase 3, Explicitación, el estudiante expone lo que ha observado, realizado y aprendido en sus actividades, ésta fase es de debate e intercambio de ideas; Fase 4, Orientación libre, se proponen problemas y situaciones donde el estudiante se enfrenta a diversas maneras de resolverlos y Fase 5, Integración, donde se orienta a los estudiantes para que lleguen a comprensiones globales, mediante la comparación y combinación de los conocimientos ya adquiridos (Corberán, et al, 1994).

Los niveles de razonamiento como el componente descriptivo del modelo, permiten ubicar o clasificar el grado de comprensión que posee un estudiante, frente a un concepto matemático, existen cinco niveles de razonamiento: Reconocimiento, Análisis, Clasificación, Deducción formal y Rigor (Corberán, et al., 1994). En el nivel 1, se reconocen las características generales de los objetos, se emplean prototipos visuales para caracterizar figuras, aunque los estudiantes pueden reconocer algunas de sus propiedades, se les dificulta ahondar en sus características, componentes y en la utilización de un lenguaje apropiado para referirse a éstas (Corberán, et al, 1994). Particularmente, la propuesta se articuló al Nivel 1, con el fin de ubicar a los estudiantes en un nivel de reconocimiento visual sobre las estructuras de tipo aditivo debido a su importancia en el aprendizaje de nuevos conceptos en el contexto escolar.

Metodología

Es preciso señalar que la ubicación en el Nivel I de razonamiento, respecto a la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, de los estudiantes del grado tercero, es posible a través de la implementación de estrategias que favorecen el desarrollo de procesos de razonamiento, sobre el concepto objeto de estudio, lo que hace indispensable la inmersión del investigador dentro del contexto, y por ende, la pertinencia de un tratamiento desde el enfoque cualitativo. Por ello, el acercamiento de los actores y sus experiencias, permite darle sentido, desde la práctica, a los procesos de observación, reflexión y análisis y a la forma cómo los estudiantes se enfrentan a las situaciones presentadas en el aula.

Respecto a lo anterior, los fundamentos metodológicos de la investigación se articularon al paradigma cualitativo y se estructuraron consolidando herramientas, para observar el proceso de razonamiento realizado por cada uno de los participantes en la investigación. Debido a la naturaleza cualitativa de la investigación, fue necesario realizar un estudio de caso, puesto que “... es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 1999, p. 11).

En la propuesta de investigación se abordaron tres casos particulares de un grupo de estudiantes, es decir, se analizaron las producciones de tres estudiantes, cada una de ellas enfocadas en el razonamiento, respecto a las estructuras de tipo aditivo, con el fin de describir la comprensión de cada caso particular, respecto a las mismas y ubicarlos en el Nivel I del modelo de van Hiele.

El estudio de caso requiere de la implementación de herramientas que puedan dar cuenta de la información proporcionada por cada estudiante de forma detallada y acertada (Stake, 1999). Por lo tanto, en el desarrollo de la propuesta de investigación se emplearon entrevistas de carácter socrático y observaciones en profundidad (Jaramillo y Campillo, 2001).

La información recolectada en la aplicación de las entrevistas y el desarrollo de observaciones, fue analizada a través de un proceso de codificación y categorización, que permitió determinar la comprensión de los estudiantes, en relación con el concepto objeto de estudio.

Con el fin de realizar un seguimiento continuo y detallado de la comprensión de las estructuras aditivas, por los estudiantes del grado tercero, se consideró pertinente la implementación de la Entrevista de Carácter Socrático, ésta es una entrevista semi-estructurada, fundamentada en un guión abierto que posibilita el diálogo y, a su vez se apoya en preguntas con componentes visuales que permiten describir el razonamiento (Jaramillo y Campillo, 2001).

La Entrevista de Carácter Socrático fue diseñada para cada una de las fases del modelo de van Hiele, en correspondencia con el concepto objeto de estudio. Allí, a medida que el estudiante respondía las mismas, se refinaban y depuraban sus conocimientos, dando cuenta de la ampliación de la red de relaciones elaboradas y construidas en concordancia con las estructuras de tipo aditivo.

La observación, como otra herramienta que permitió la recolección de la información, se utilizó como una técnica que posibilitó la comprensión de cada caso, desde el acercamiento con

..

los estudiantes. A partir de las interacciones, fue posible realizar un registro de cada uno de los acontecimientos y una descripción detallada, en torno a las estrategias implementadas para un posterior análisis, de cada uno de los sucesos, con el fin de analizar el razonamiento e interpretación de los estudiantes de las actividades desarrolladas (Stake, 1999).

La utilización de cada uno de los instrumentos, que permitió la recolección de la información, se consolidó en un Módulo de Aprendizaje, el cual quedó estructurado, en un conjunto de experiencias articuladas, a cada una de las fases del modelo, con el fin de brindar una herramienta de apoyo a los maestros para sus prácticas escolares, particularmente, en los momentos que requieran abordar el concepto de estructuras de tipo aditivo con los estudiantes del grado tercero.

La consolidación del Módulo de Aprendizaje aporta a los procesos de enseñanza. Vasco y Bedoya (2005, p. 24) afirman al respecto que: “El papel del Módulo de instrucción es vital, ya que permite establecer un orden secuencial en la aplicación de las actividades propuestas para cada una de las fases, frente al concepto objeto de estudio” (Vasco y Bedoya, 2005 p. 24). Es decir, a medida que los estudiantes se enfrentan a experiencias que requieran la comprensión de las estructuras de tipo aditivo, refinan sus conocimientos y ponen en evidencia la red de relaciones elaborada frente al concepto.

Desarrollo de la experiencia

Inicialmente se realizó la selección de un grupo del grado tercero, posteriormente, se aplicó la entrevista de conducta de entrada a algunos estudiantes, para analizar el reconocimiento que tenían de las estructuras de tipo aditivo. Luego, se seleccionaron tres estudiantes y se procedió al desarrollo del trabajo de campo, para cada caso particular. A cada estudiante se le aplicó la Entrevista de Carácter Socrático con el fin de movilizar sus razonamientos iniciales, a través del desarrollo de actividades enmarcadas en cada una de las fases del modelo.

El trabajo de campo se fundamentó en la aplicación de las entrevistas de carácter socrático, con la intencionalidad de generar procesos de razonamientos. A continuación se exponen algunos elementos abordados en cada una de las fases.

En la Fase 1, se realizaron actividades encaminadas al reconocimiento de los saberes en relación con las características de una colección de objetos, agrupación, noción de cardinalidad y adición y sustracción. Adicionalmente, se informaron los conceptos, problemas, material a utilizar y la metodología empleada para el desarrollo de las actividades.

En la Fase 2, tanto la entrevista como las actividades presentadas, tuvieron como propósito descubrir, comprender y aprender los conceptos y propiedades que forman parte de las estructuras de tipo aditivo, a partir de representaciones visuales y verbales. Allí, los estudiantes determinaron cuántos elementos le sobraban o faltaban a un conjunto para ser igual a otro, reunieron y separaron elementos, de acuerdo a sus características y determinaron los cambios que conllevaban a un aumento o disminución de una cantidad.

En la Fase 3, las actividades y la entrevista permitieron que el estudiante socializara e intercambiara ideas con otros compañeros. Los estudiantes explicaron los cambios ocurridos, en una representación icónica, a partir de transformaciones, abordaron las categorías de composición y de transformación y resolvieron situaciones en forma gráfica y numérica.

En la Fase 4, se enfrentaron a problemas y situaciones empleando relaciones entre conjuntos y representaciones gráficas. La solución de las situaciones planteadas en esta fase fue presentada por los estudiantes en forma argumentada a través de enunciados verbales. Explicaron los efectos de añadir o quitar elementos de un conjunto a partir de situaciones que implicaban el uso de figuras geométricas y la utilización de las estructuras de tipo aditivo en contexto.

En la Fase 5, se presentaron situaciones que permitieron el reconocimiento de los elementos de las estructuras de tipo aditivo, a partir de sus representaciones, aplicaron las operaciones básicas de adición y sustracción, diferenciaron situaciones que implicaban la utilización de categorías de composición y de transformación y realizaron inferencias.

En cada una de las fases se realizó la transcripción de la información. Finalmente, a través de una codificación y categorización detallada, se presentó el conjunto de elementos que permitió dejar en evidencia la comprensión sobre las estructuras de tipo aditivo de los tres casos de estudio.

Resultados

El análisis de los resultados de la Entrevista de Carácter Socrático y la solución de tests, junto con las evidencias de las observaciones, admitió la descripción detallada de cada caso. A continuación se describen algunas respuestas dadas por un estudiante, a algunas de las situaciones planteadas durante la entrevista.

Fase 1

La experiencia se inició a partir de un aporte de información. En este primer momento se le presentó, al estudiante un ejemplo relacionado con una situación cotidiana.

Aporte de información: Una colección de objetos se llama conjunto. Cada uno de los objetos son los elementos del conjunto. Por ejemplo, si tienes 5 manzanas y tu mejor amigo tiene 3 manzanas, entre ambos tienen un conjunto de 8 manzanas. Cada una de las manzanas es un elemento del conjunto.

Situación: Carlos, Lucas, Juan y Santiago se encuentran jugando con canicas de cristal, en el patio de la escuela. Carlos tiene 3 canicas negras, Lucas 4 de varios colores, Juan 5 transparentes y Santiago 6 de varios colores.

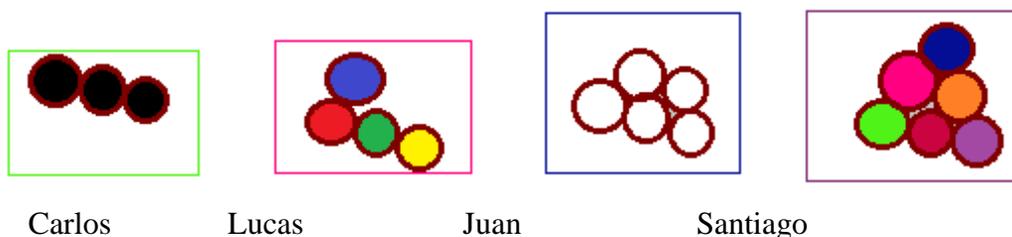


Figura 3. Canicas de cristal.

..

Si reúnes en un solo conjunto, las canicas de Carlos, Lucas, Juan y Santiago. El número total de canicas que tiene el nuevo conjunto es:

- a. 10
- b. 3
- c. 18
- d. 5
- e. Explica tu respuesta_____

Entrevistador: Puedes utilizar el procedimiento que consideres conveniente.

Estudiante: Respuesta c.

Entrevistador: Explica tu respuesta.

Estudiante: La respuesta es 18 porque al reunir las y contarlas el total es 18.

Entrevistador: ¿Cómo las reunió y contó?

Estudiante: Formé el grupo de Carlos con el grupo de Juan y las nombré como un conjunto, luego el de Lucas y Santiago y las nombré como otro conjunto. Luego conté cuántas había en el conjunto de Santiago y Lucas y dio un total y luego conté cuántas había en el de Juan y Carlos. Al final sumé el total de las canicas de Santiago y Lucas y luego el de Carlos y Juan.

Entrevistador: ¿Cómo encontraste el dieciocho?

Estudiante: Sumé en la mente, el conjunto que formé de Juan y Carlos que daba ocho y el de Lucas y Santiago daba 10.

Entrevistador: ¿Por qué daba 18?

Estudiante: Porque $3 + 5 = 8$ y luego $8 + 10 = 18$ y así lo hice.

Si Lucas y Santiago deciden reunir sus canicas de colores, para jugar solos, el número de canicas que completan ambos es:

- a. 11
- b. 9
- c. 10
- d. 8

..
Explica tu respuesta_____

Entrevistador: Si Lucas y Santiago deciden reunir sus canicas de colores para jugar solos, el número de canicas que completan ambos es:

Estudiante: C, diez.

Entrevistador: Explica tu respuesta.

Estudiante: Porque 10... porque si todos formaban un conjunto de 18 las de Lucas y Santiago juntas eran 10 por eso...

Entrevistador: Explica cómo se encuentra que las de Lucas y Santiago son 10.

Estudiante: Haciendo grupos y contando, al sumar $4 + 6$ da un total de 10.

Se puede encontrar que en esta fase, el estudiante, a partir de una colección dada de objetos, pudo realizar agrupaciones con elementos que poseen la misma característica. Adicionalmente, asignó un número natural a una colección de objetos con características comunes.

Fase 2

Se explicaron las pautas para el trabajo con las estructuras de tipo aditivo y se plantearon situaciones como la ilustrada a continuación:

Situación: En la cosecha de café Carlos fue a ayudarle a su papá, durante tres días. Cada uno recolectó distintas cantidades de café. La unidad de medida utilizada fue “la lata”. La cantidad de “latas” de café, que cada uno de ellos recolectó, en los tres días se representa en la siguiente tabla:

| | Día 1 | Día 2 | Día 3 |
|--------|---------|---------|---------|
| Carlos | 2 latas | 6 latas | 3 latas |
| Papá | 4 latas | 3 latas | 5 latas |

Tabla 1. Latas de café.

..

Observa la representación, en la recta numérica, para cada una de las cantidades de café recolectadas por Carlos, durante cada uno de los tres días. Cada marca en la recta numérica representa una unidad, en este caso una “lata” de café.

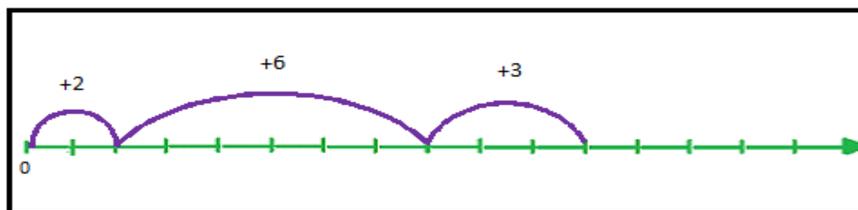


Figura 4. Representación de la cantidad diaria de “latas” de café recolectadas por Carlos.

El número de “latas” de café recolectadas por Carlos durante los tres días fue: _____.

Entrevistador: Mira la tabla y analiza la cantidad de latas de café recolectas por Carlos durante los tres días.

Estudiante: 11.

El número de “latas” de café recolectadas por el papá de Carlos durante los tres días fue: _____.

Entrevistador: ¿Cuál es la cantidad de latas de café recolectadas por el papá de Carlos?

Estudiante: 12.

Completa cada uno de los siguientes enunciados de acuerdo con la información presentada en la tabla:

a. La mayor cantidad de “latas” de café recolectadas en los tres días la realizó: _____ y fue: _____.

Entrevistador: ¿Quién recolectó más latas de café?

Estudiante: El papá de Carlos.

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante: En la tabla se muestra.

Entrevistador: ¿Cuál es la cantidad?

Estudiante: 12 latas.

..

b. La menor cantidad de “latas” de café recolectadas en los tres días la realizó: _____ y fue: _____.

Entrevistador: ¿Quién recolectó menor cantidad de latas de café?

Estudiante: Carlos.

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante: En la tabla se muestra, cuando hago la suma me da menor que el otro.

Entrevistador: ¿Cuál es la cantidad?

Estudiante: 11 latas.

Para resolver las situaciones planteadas, el estudiante, empleó las categorías de composición y transformación. Reunió los elementos de dos conjuntos teniendo en cuenta sus características y asignó un número natural. Adicionalmente, resolvió un problema matemático que implicaba cambios y determinó el aumento o disminución de una cantidad en dicha situación.

Fase 3

En esta fase el estudiante abordó los cambios ocurridos en una situación planteada a partir de las características de la misma, aplicando las categorías de composición y transformación.

Situación: Carlos subió en un ascensor hasta el piso número 13, estando allí recordó que su tía Marta vivía en otro piso, al preguntar, le han dicho que vive siete pisos más abajo, por lo tanto debió devolverse. Ayuda a Carlos a descubrir en qué piso vive su tía Marta.

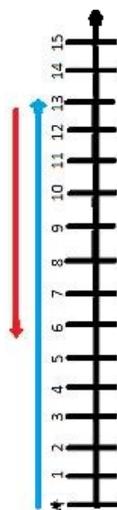


Figura 5. Recta numérica que representa la situación vivida por Carlos en el ascensor.

La operación matemática adecuada para hallar la solución a la situación vivida por Carlos, de acuerdo a la representación de la Figura 5, es:

- a. $13 - 6 = 7$
- b. $7 + 6 = 13$
- c. $13 - 7 = 6$
- d. $13 + 6 = 19$

Explica tu respuesta: _____.

Entrevistador: Mira la gráfica y trata de encontrar la respuesta a la situación estudiada.

Estudiante: Sí.

Entrevistador: ¿Qué operación matemática se puede utilizar para dar solución al problema?

Estudiante: La resta.

Entrevistador: ¿Cuál es la respuesta acertada?

Estudiante: La c

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante: Él estaba en el piso 13 y tuvo que bajar, entonces se resta.

Entrevistador: ¿Por qué?

..

Estudiante: Él baja, entonces él merma los pisos donde queda al final.

La utilización de las categorías de composición y transformación, le permitieron al estudiante, describir los cambios ocurridos en una situación particular y resolverla numéricamente.

Fase 4

El estudiante plantea situaciones de su entorno que puede resolver con la utilización de las estructuras aditivas.

Situación planteada por el estudiante: En la casa, mi mamá me da \$5000 diarios para gastar en el recreo. Todos los días ahorro \$1500 para ir a comer helado el fin de semana. Para saber cuánto tengo ahorrado al final de la semana debo contar todo el dinero.

Entrevistador: ¿De qué otra forma podrías saber cuánto tienes ahorrado al finalizar la semana?

Estudiante: Puedo anotar en mi cuaderno de Matemáticas cada día \$1500, y al final sumar.

Entrevistador: Si el helado que quieres cuesta \$10000, ¿El dinero ahorrado en la semana te alcanza para comprarlo?

Estudiante: No, porque sólo tengo ahorrado \$7500.

Entrevistador: ¿Cuánto dinero te falta para poder comprar el helado?

Estudiante: \$2500

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a la respuesta?

Estudiante: Sumé primero lo que había ahorrado en la semana y me dió \$7500, como el helado cuesta \$10000, a \$10000 le resté \$7500 y eso me dió \$2500.

La comprensión de las categorías de composición y transformación le permitieron al estudiante plantear una situación conocida, fundamentada en las estructuras aditivas y a partir de ellas, resolver situaciones del contexto.

Fase 5

La consolidación de los elementos abordados, en las fases anteriores, se pone de manifiesto en las respuestas dadas, a las situaciones planteadas.

Situación: En uno de los ejercicios planteados se utilizaron tres dados convencionales de color azul, rojo y blanco.

Se le pidió al estudiante que lanzara los tres dados a la vez y que anotara los resultados obtenidos en las caras superiores de cada uno de ellos. Se le plantearon diversas situaciones, tales como: Sume el total de puntos de dos de los dados que tienen mayor cantidad de puntos en su cara superior, luego reste los puntos del dado que tienen menor cantidad en su cara superior.

El estudiante reconoció los elementos de las estructuras de tipo aditivo e interpretó el problema aplicando correctamente las operaciones básicas de adición y sustracción.

La recolección de los datos permitió la construcción de descriptores, para cada una de las fases de aprendizaje, en relación con las estructuras de tipo aditivo. Estos permitieron dar cuenta de las características, que poseen los estudiantes, en cada una de las fases en relación, con la comprensión de las estructuras de tipo aditivo.

En la primera fase se observó que los estudiantes recurrían a acciones como el conteo y cálculos mecánicos, empleando sin distinción adiciones o sustracciones en situaciones matemáticas, que implicaban enunciados verbales. Posteriormente, el desarrollo de actividades de aprendizaje, en las siguientes fases, permitió el uso de lenguaje apropiado en relación con las estructuras de tipo aditivo, identificándolas por su estructura global. Se observó la elaboración de estrategias personales para la resolución de situaciones y, finalmente se evidenció, en las manifestaciones verbales de los estudiantes, que existían construcciones mentales más elaboradas, en relación con el concepto de estructuras de tipo aditivo.

Conclusiones

El análisis de la información recolectada deja ver que, el desarrollo de actividades que involucren la componente visual, favorece la adecuada configuración del concepto, particularmente el concepto de estructuras de tipo aditivo.

A partir de las diferentes representaciones, los estudiantes argumentaron e infirieron la solución y los cambios ocurridos en una situación, empleando un vocabulario acorde al nivel de Reconocimiento visual, de acuerdo con el modelo educativo de van Hiele.

Por lo tanto, es importante resaltar que, el uso de la Entrevista de Carácter Socrático, consolidada en un Módulo de Aprendizaje, permite analizar la comprensión que los estudiantes tienen de los conceptos matemáticos. Particularmente, en la investigación, se refinaron la entrevista y las actividades, con el fin de brindar una herramienta de apoyo, a los docentes de la educación básica primaria, del currículo colombiano, ya que las estructuras de tipo aditivo están en la base del aprendizaje de la Aritmética Elemental y permiten la consolidación y comprensión de otros conceptos en el ámbito matemático.

Agradecimientos

El desarrollo de la propuesta investigativa estuvo avalada por los participantes del Seminario de Educación Matemática del grupo de investigación “Educación Matemática e Historia (UdeA – Eafit)”. Los autores agradecemos los aportes dados por los participantes del seminario.

Referencias Bibliográficas

- Castro, E. R. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Corberán, R., Gutierrez, Á., Huerta, M., Pastor, A., Margarit, J., Peñas, A., y otros. (2004). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y ciencia.
- Esteban, P. V. (2000). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Madrid: Morata.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de Educación Matemática*. Bogotá: Iberoamérica.
- Hernández, J. (s.f). Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki. En U. A. Madrid (Ed.), *En Seminario Orotava de Historia de la Ciencia* (pág. 56). Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
- Jaramillo, C., & Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9(1), 65–84.
- Londoño, R., & Jurado, F. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Moreira, M. (2002). La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*, 7(1), 1-28.
- Novak, J. D., & Gowin, B. (1998). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona.: Ediciones Martínez Roca.

- ..
- Rosas, R., & Sebastián, C. (2004). *Piaget, Vigotski y Maturana. Constructivismo a tres voces*. Argentina: Aique Grupo Editor.
- Ruiz, F. (2000). *Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos*. España: Universidad de Granada.
- Salazar, L. (2011). *Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso*. Madrid: Morata.
- Van Hiele, P. (1986). Structure and Insigh. En P. Van Hiele, . *A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.
- Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Holanda: Tesis doctoral.
- Vasco, E., & Bedoya, J. (2005). *Diseño de Módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. (E. Sánchez, Trad.) *En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa, 10(2 -3), 133-170*.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.
- Vergnaud, G. (septiembre, 2006). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Aprendizaje Significativo. V Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo* (págs. 285-302). Madrid: Indivisa. Boletín de estudios e investigación.
- Zapata, S., & Sucerquia, E. (2009). *Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.