ESTADO Y MOVILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO EN NIÑOS DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

GUILLERMO SILVA RESTREPO

ASNED EDIHT RESTREPO MÚNERA

GABRIELA BUILES GIL

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar
el título de Maestría en Psicopedagogía

Director: Orlando Mesa Betancur

MEDELLÍN

UNIVESIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIOÓ AVANZADA
1994

UNIVERSIDAD
DE
ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA

ACTA DE APROBACION DE TESIS

Entre los suscritos presidente y jurados de la tesis: ESTADO Y MOVILIZACION DEL PENSAMIENTO LOGICO-MATEMATICO EN NIÑOS DE EDUCACION BASICA PRIMARIA, presentada por los estudiantes Guillermo Silva Restrepo, Gabriela del Carmen Builes Gil y Asned Edith del Socorro Restrepo Múnera, como requisito para optar al título de magister en Educación: **Psicopedagogía,** nos permitimos conceptuar que ésta cumple con los criterios teóricos y metodológicos exigidos por la Facultad y por lo tanto se aprueba.

Medellín, noviembre 15 de 1994

Orlando Mesa Betancur
ORLANDO MESA BETANCUR
Presidente

NELSON LONDOÑO S.
Jurado

HUGO GUARIN
Jurado

19-XI-94

AGRADECIMIENTO

Manifestamos nuestro agradecimiento a las personas e instituciones que posibilitaron la realización de la presente investigación:

A las directivas y profesoras del Colegio Colombo Francés y la Escuela Santo Tomás de Aquino por facilitarnos sus instituciones como campo de experimentación.

A los profesores de la maestría Orlando Mesa B., Clara Mejía, Guillermo Londoño y Dolly Londoño por su acompañamiento conceptual y metodológico.

Al Centro de Pedagogía Participativa por el apoyo y permanente asesoría.

A Nubia Vergara por su apoyo afectivo y constante.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCION

La educación siempre ha tratado de encontrar, en la psicología, respuestas a las múltiples preguntas sobre la competencia del individuo para acceder a determinados conocimientos y con el objeto de diseñar los programas acordes con el nivel del estudiante. Estas respuestas han sido enmarcadas dentro de diferentes perspectivas y cada escuela de pensamiento psicológico ha creído encontrar en sus postulados la mejor solución al problema del desarrollo mental. Esto ha llevado también a que cada teoría inspire una determinada pedagogía, basada en su manera particular de interpretar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En Colombia a partir de la década de los 70, dos escuelas han acaparado la orientación psicológica de los programas oficiales: el conductismo y la psicología genética piagetiana.

Puede decirse que la irrupción en el medio nacional de la tecnología educativa trajo consigo un diseño curricular centrado en las respuestas.

El planeamiento de las diferentes áreas siempre se realizaba partiendo de unos supuestos, los objetivos, que debían ser alcanzados por los estudiantes sin importar el proceso para lograrlos. Los planes académicos eran rigurosos y de entrada se preconcebía, incluso, hasta la forma en que el estudiante debería ser evaluado para medir el alcance de los objetivos propuestos. Esta forma de concebir la enseñanza se fundamentaba en el paradigma conductista de E.R (Estímulo - Respuesta).
Las pruebas tipo "test" alcanzaron su más alto nivel de aplicación e importancia. Hasta las llamadas pruebas del ICFES mantienen esa forma de "medir" (no de evaluar), con sus funestas consecuencias para la capacidad analítica de los estudiantes, la creatividad y el manejo de la expresión escrita, manifestaciones de la inteligencia que no se consiguen mediante una ejercitación mecánica de la memoria.

Pero a partir de 1978 un "replanteamiento" del currículo empieza a gestarse desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN). La llamada "Reforma Curricular" señala dentro de sus marcos generales para el área de Matemática: "... la metodología propuesta para el desarrollo del programa de Matemática está basado en la teoría psicológica de Jean Piaget, que se concreta en algunas técnicas de aprendizaje de la Matemática, como las de Zoltan P. Dienes, Hans Aebli, etc.". (MEN 1982).

Incluso, se desarrolla un subtema de esta metodología titulado "Aspecto sicológico" y que en breves líneas expresa la importancia de la teoría sicológica piagetiana. Se centra ante todo en una mención a los períodos de las operaciones concretas y operaciones formales, períodos en los que, supuestamente, está incluida la población estudiantil de los niveles de primaria y bachillerato.

Sin embargo esta concepción de los "Marcos Generales de los Programas Curriculares" se desvirtúa cuando las sugerencias metodológicas incluidas en los programas se convierten en modelos para planear por objetivos y predeterminar los indicadores de evaluación.

En otras palabras se tergiversan los postulados piagetianos, para seguir privilegiando la respuesta, independiente de cualquier proceso que asuma el estudiante para lograrla.

Es fácil ver como se ha cambiado de fachada pero la estructura del edificio sigue intacta.

A pesar de ello algunas metodologías inspiradas en las tesis del biólogo ginebrino han aparecido como alternativas pedagógicas. Entre éstas, bástenos señalar el "Constructivismo Pedagógico", que no ha alcanzado aún, posición privilegiada en el contexto educativo pero el impulso de varios investigadores le ha permitido ganar espacio en medio de las expectativas que toda innovación produce.

De todas maneras, estos intentos innovadores, no han sido más que pequeños asomos a una escuela dominada por el tradicionalismo y sumida en el más completo atraso con relación a una sociedad cambiante.

Para nadie, interesado en la educación, es un secreto que los métodos de enseñanza poco o nada han cambiado, trayendo como consecuencia una educación memorística y repetitiva, que coarta la expresividad del estudiante y lo convierte en mero receptor de información con muy pocas posibilidades de atribuirle significación o unos aprendizajes descontextualizados de la realidad.

Los procesos que desarrollan los estudiantes para apropiarse del conocimiento debe ser el punto de partida para la renovación de la escuela. Desde esta perspectiva nos proponemos con esta investigación indagar por los procedimientos que facilitan la construcción del saber por parte de los niños y presentamos una propuesta centrada en dos aspectos fundamentales:

> **Una evaluación de "estado" que nos brinde una información sobre las competencias intelectuales de los niños, acompañada de un análisis individual para reconocer las estrategias a las que recurren para resolver las diferentes tareas. Se realiza en dos momentos.**
>
> **Una intervención pedagógica que parte de la situación problema dándole significación y apoyo a los diferentes algoritmos.**

El propósito central de esta investigación es indagar por el estado y movilización del pensamiento lógico matemático en niños de 1o, 3o y 5o del colegio "Colombo Francés" y la escuela "Santo Tomás de Aquino", establecimientos ubicados en el municipio de Medellín.

El estudio del desarrollo del pensamiento lógico matemático parece cobrar más importancia a medida que la teoría genética piagetiana inspira nuevas tendencias pedagógicas que se abren paso en Colombia.

El texto del presente trabajo está estructurado alrededor de dos grandes núcleos temáticos: Diseño teórico y Diseño Metodológico.

El Diseño teórico consta de tres capítulos:

I. Conceptualización general sobre el desarrollo del pensamiento lógico - matemático.
II. Conceptualización sobre la construcción de los esquemas aditivo y multiplicativo en niños de primaria.
III. Conceptualización sobre la intervención pedagógica.

El diseño metodológico consta de tres capítulos:

I. Descripción de la prueba.
II. Análisis de los resultados.
III. Conclusiones

2. FORMULACION DEL PROBLEMA

El pensamiento del niño escolar entre seis y diez años de edad aproximadamente posee, según la teoría psicogenética, las características correspondientes al período de las operaciones concretas pero en niveles de complejidad diferente.

La permanente relación del niño con los objetos y acontecimientos que lo rodean le permiten la construcción de diferentes esquemas cognitivos básicos para la conformación de estructuras generales.

En nuestra investigación nos interesa analizar EL ESTADO Y MOVILIZACION DE LOS ESQUEMAS ADITIVO Y MULTIPLICATIVO FUNDAMENTALES EN EL PROCESO DE CONOCIMIENTO LOGICO MATEMATICO-

Además nos permitirá confrontar la hipótesis de que: una Intervención pedagógica centrada de los procesos cognitivos permite la movilización de los diferentes esquemas.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

- A partir del reconocimiento de la presencia y calidad de los esquemas aditivo y multiplicativo investigar cómo se movilizan estos esquemas para la comprensión, el análisis y solución de problemas relacionados con las nociones lógico matemáticas básicas.

3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

La investigación estará centrada en la comprensión, ejercitación y resolución de:

Operaciones y relaciones básicas (conteo, suma, resta, multiplicación y división).

Problemas relacionados con las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

4. MARCO CONCEPTUAL

4.1 CONCEPTUALIZACION GENERAL SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LOGICO - MATEMATICO

Nuestra investigación está centrada en el análisis de los procesos por los que los niños atraviesan en el desarrollo del pensamiento lógico - matemático a través de los contenidos curriculares. Partimos de la psicología genética piagetiana como la escuela de pensamiento que mejor aborda la explicación de este proceso.
Según César Coll, la pregunta clave de la teoría genética es:

"¿Cómo se pasa de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento?". (Coll, C. 1983 : 22) Cuestión que trataremos de resolver en los párrafos siguientes.

Explicar cómo se da la construcción de los esquemas es un punto de partida hacia la génesis de las estructuras mentales del individuo.

La psicología piagetiana describe esta construcción elaborando un modelo teórico que conceptualiza paso a paso su formación y la evolución de las competencias intelectuales.
El modelo describe desde las más primitivas "acciones" del infante (los esquemas reflejos) hasta las más complicadas elaboraciones mentales que se logran cuando el individuo alcanza la etapa de las operaciones formales. Dice César Coll que "un esquema es un marco asimilador que permite comprender la realidad a la que se aplica, que permite atribuirle una significación". (Coll, C. 19B : 186).

Prácticamente desde su nacimiento el bebé está enfrentado a la construcción de esquemas y aunque los actos del lactante aparezcan como muy simples su realización será la base para todo su desarrollo mental.

Los esquemas del bebé son esquemas reflejos en la medida de acciones pautadas que aparecen automáticamente en presencia de determinados estímulos. Tal es el caso, por ejemplo, de la succión o la aprehensión que pueden desencadenarse en cualquier momento con el sólo hecho de estimular la zona bucal o palpar la palma de la mano, respectivamente.

Pero estos son verdaderos esquemas ya que las acciones conservan una organización interna cada vez que aparecen.

Los esquemas reflejos se convierten en esquemas de acción cuando el niño, por ejemplo, es capaz de asir el tetero para succionarlo o halar una sábana para acercar un objeto distante. Las acciones van acompañadas de una organización que permite al niño complejizar sus esquemas y mediante los procesos de asimilación y acomodación conducirlos hacia un equilibrio que posibilite la interacción con el medio, atribuyéndole significaciones.

Pero las posibilidades del desarrollo intelectual se verían muy limitadas si el niño permaneciese apegado a la acción y no pudiera representarla. Esto lo logra gracias a los esquemas representativos que no son más que esquemas de acción interiorizados.

Los esquemas de acción se agrupan para dar origen a estructuras mentales. Dichas estructuras se llamarán operatorias si los esquemas interiorizados se coordinan entre sí respetando determinadas leyes o reglas. Además se llamarán concretas o formales según ciertas características definidas por el desarrollo mental.

Hasta aquí hemos hecho una somera presentación del proceso de construcción de los esquemas de acuerdo con la teoría genética. Pero nos quedaríamos cortos en la apreciación, si no abordamos los esquemas de conocimiento, parte fundamental para el aprendizaje.

Los esquemas de conocimiento se plantean como una aplicación de la teoría a la pedagogía. Si los esquemas operatorios se construyen espontáneamente, los de conocimiento rara vez se dan en la misma forma y dependen de los estímulos a los que el medio somete al individuo. En nuestro caso ese medio está constituido por la escuela, medio privilegiado, que en todo momento debe propiciar la construcción de esquemas de conocimiento.

Resaltemos, además, que el estímulo hacia la construcción de esquemas de conocimiento es una alternativa a la equivocada transposición del modelo piagetiano a las aulas. Equivocación que ha convertido la enseñanza en repetición de las tareas de dicho modelo con el fin de acelerar el desarrollo de las estructuras operatorias, dejando de lado los contenidos de las diferentes áreas. Parece ser, que el objetivo de una escuela que propenda por el desarrollo mental es la construcción de esquemas de conocimiento. Orientar actividades para un mejoramiento continuo de esos esquemas y diseñar estrategias metodológicas para una mejor apropiación por parte de los estudiantes.

Pero, ¿qué es un esquema de conocimiento?

"Es la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad; un esquema de conocimiento puede ser mas o menos rico en informaciones y detalles, posee un grado de organización y de coherencia interna variables y ser mas o menos variado, es decir, mas o menos adecuado a la realidad; un esquema de conocimiento comporta esquemas de acción y esquemas representativos en el sentido piagetiano; los diferentes elementos que lo constituyen, presentan una organización interna que puede ir desde la simple yuxtaposición hasta estructuras ordinales y jerárquicas e incluso respetar las leyes de composición que caracterizan las estructuras operatorias". (Coll, C. 1983 : 194)

Varias preguntas aparecen como consecuencia de lo descrito hasta el momento.

¿Cómo se pasa de un esquema reflejo a uno de acción y de este a uno representativo?

¿Cómo se diferencia un esquema de una estructura operatoria?

El contacto del niño con el medio que lo rodea lo somete a un doble juego constante: la asimilación y la acomodación.

, Este juego de la asimilación y la acomodación modifica los esquemas y mediante su reagrupamiento propicia la formación de estructuras operatorias, posibilita el desarrollo mental y abre posibilidades para acceder al conocimiento. La asimilación ayuda al sujeto a
incorporar nueva información como producto de su interacción con el medio. Mientras que la acomodación se da cuando se coteja la información almacenada (esquemas previos) con la nueva, ya sea para modificarla parcial o totalmente.

Cuando el sujeto se encuentra ante una nueva experiencia puede ser que sus esquemas mentales no sean suficientes para incorporarla y la asimilación del nuevo objeto de conocimiento se dificultará. Se produce entonces un desequilibrio en los esquemas del individuo y entra en juego la acomodación que compensa los desajustes provocados reestableciendo el equilibrio.

Esta dinámica desequilibrio - reequilibrio facilitada por la asimilación y la acomodación complejiza los esquemas y ayuda a la apropiación de nuevos objetos de conocimiento por parte del sujeto.

Los esquemas que el niño construye no son aislados, se asocian entre si formando totalidades y respetando determinadas reglas. Estas totalidades de esquemas al final del segundo año marcan el punto culminante de la inteligencia sensoriomotriz y definen las primeras estructuras intelectuales.

Alrededor de los siete u ocho años se da un nuevo reagrupamiento en totalidades que se denominan operaciones concretas.

La característica fundamental del período de las operaciones concretas es la construcción de las operaciones.

Una operación, según Piaget, puede definirse como una acción interiorizada reversible y que se integra en una estructura de conjunto. En la génesis del desarrollo mental no se dan esquemas separados, ni estructuras aisladas. Esta observación fue la que llevó a Piaget a buscar un modelo lógico - matemático que le permitiera explicar las propiedades de esas estructuras de conjunto. Se apoyó en dos estructuras de la matemática: el grupo y el retículo para finalmente elaborar su propia estructura, EL AGRUPAMIENTO, como un gran aporte en la búsqueda de un modelo matemático para explicar el desarrollo mental.

El agrupamiento es la estructura formal utilizada por Piaget para explicar el estado cognitivo del niño. Como estructura de la lógica operatoria cumple las siguientes propiedades:

1. Composición: La combinación de dos elementos del conjunto, también pertenece al conjunto.
2. Asociatividad: La combinación de una serie de elementos del conjunto es independiente de la forma en que se los agrupa.
3. Identidad general: Existe un elemento único en el conjunto que al combinarse con otro elemento lo deja invariable.

4. Reversibilidad: Para cada elemento del conjunto existe otro elemento que combinado con él da como resultado el elemento identidad.
5. Identidades especiales: "Propiedad tautológica"; Toda clase sumada con ella misma da como resultado la misma clase.

"Absorción": Si una clase está incluida en una más amplia, la suma de las dos da como resultado la más amplia.

El agrupamiento describe las operaciones del niño durante el estadio las operaciones concretas.

Dos tipos de operaciones define Piaget, las lógico - matemáticas (clasificaciones, seriaciones, conservaciones y número) que se refieren a contenidos que implican información discontinua, y las operaciones infralógicas (relativas al espacio, tiempo y la velocidad) que se refieren a información continua. En este trabajo nos ocupamos de las primeras.

¿Qué relación existe entre los agrupamientos y las operaciones entre enteros positivos que determinan los esquemas aditivo y multiplicativo?

Para responder esta pregunta debemos hacer dos anotaciones previas. La primera es de la lógica operatoria, la cual define ocho agrupamientos: cuatro aditivos y cuatro multiplicativos, que pueden ser de clases o de relaciones. En otras palabras estos ocho agrupamientos manejan dos conceptos claves para la suma (y su inverso la resta) y la multiplicación (con su inversa la división): clasificar y seriar. La segunda es recordar que las operaciones entre números enteros son el resultado de la comparación y ordenación bajo determinadas leyes muy precisas.

Hechas estas dos observaciones dejemos que sea el mismo Piaget quien nos resuelva la pregunta anterior al resumir los agrupamientos así:

"El I es el de los encajamientos simples (por ejemplo: "truchas" incluido en "peces", incluido en "animales", incluido en "seres vivos"; el II corresponde a las "vicarías" (ejemplo: "los suizos más todos los extranjeros con respecto a Suiza = los holandeses más todos los extranjeros con respecto a Holanda"); el III es el de las tablas de dos o n entradas (por ejemplo, los objetos clasificados simultáneamente en redondos o cuadrados y en rojos o blancos), y el IV, el de las

clasificaciones que corresponden a árboles genealógicos sus hijos, sus nietos, etc., y la otra, la de los hermanos, primos hermanos, etc.).

El agrupamiento de las seriaciones (encadenamiento de relaciones asimétricas transitivas) es el V, y el VI, el de las composiciones entre relaciones simétricas (transitivas y aliotransitivas); el agrupamiento VII es de las multiplicaciones entre dos seriaciones que se refieran, bien a la misma relación (correspondencia serial entre dos filas distintas de objetos ordenados de acuerdo con una y la misma seriación, por ejemplo, unas figuritas humanas cada vez mayores en correspondencia con bastoncitos cada vez mayores), bien a dos relaciones distintas (por ejemplo, objetos ordenados de acuerdo con su peso y su volumen simultáneamente); en cuanto al octavo, finalmente, corresponde a las relaciones genealógicas que habían aparecido ya en IV traducidas en clasificación de términos". (Piaget. 1980 : 198).

4.2 CONCEPTUALIZACION GENERAL DE LOS ESQUEMAS ADITIVO Y MULTIPLICATIVO.

Dos esquemas básicos definen el pensamiento lógico matemático del niño en edad escolar: El esquema aditivo y el esquema multiplicativo.

Dedicaremos este apartado a describir las operaciones y relaciones básicas que se dan al interior de cada uno y la relación entre ambos esquemas.

4.2.1. ' Esquema aditivo

El esquema aditivo se refiere a las relaciones que se pueden establecer entre el todo y las partes. Al comparar las partes entre sí, las partes con el todo, un todo y otro todo el niño va construyendo diferentes relaciones y operaciones las que a partir de la propia acción y reflexión va interiorizando hasta constituirse en esquemas.

En la comparación parte todo se pueden realizar diferentes acciones: Componer el todo a partir de las partes, dado el todo descomponerlo para llegar a las partes, dado el todo y una parte encontrar la otra parte. Vemos como se realizan acciones directas e inversas, acciones de modificar unas variables y de conservar otras, por ejemplo conservar el todo cuando se opera con las partes, reconocer que el todo es mayor que las partes.

"Para comparar el todo con una parte el niño tiene que realizar dos acciones mentales opuestas al mismo tiempo, dividir el todo en partes y volver a juntar las partes en un todo”. (Kami, C. 1984: 21).

Es decir, se realizan las acciones, directa y reversible al mismo tiempo.

La realización y comprensión de estas acciones es lo que permite la construcción de esquemas reversibles.

"En los agrupamientos aditivos la operación inversa consiste directamente en sustraer la clase. Más específicamente, en la formulación de Grize, a la operación directa "poner los elementos de una clase" (+A), se le hizo corresponder la operación inversa "quitar los elementos de la clase" (-A). * Psicológicamente, puede afirmarse que a la acción de constituir la clase de las ??Qsas le corresponde la acción inversa de quitar los elementos de la clase.

Esta es la forma de reversibilidad que recibe el nombre de reversibilidad por inversión y que pasa a ser la forma de reversibilidad característica de los agrupamientos de clase". (Castorina, J. y Palau, G. 1981 : 67).

En la comparación de las partes entre sí o los todos se puede establecer relaciones cuantitativas y relaciones de orden.

Cuantificar es averiguar por la cantidad y para realizar esta acción se pueden utilizar varias estrategias. Una es establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de ambos grupos y se averigua en donde hay mayor o menor cantidad, y otra sería realizar un conteo uno a uno de todos los elementos y así averiguar por la cantidad y a la vez compararla con otras cantidades.

"La cuantificación extensiva simple es un proceso que permite comparar las partes entre sí, sin necesidad de realizar un proceso de iteración de las unidades discretas que componen el todo, siendo la correspondencia (unívoca, biunívoca, etc.) el mecanismo de cuantificación puesto en juego... La cuantificación extensiva métrica, realiza la misma operación que el anterior, es decir la comparación de las partes entre sí pero mediante un mecanismo que exige la iteración de unidades y que se denomina conteo". (Serrano, J. y Denia, A. 1987 : 58).

Hasta el momento hemos mencionado algunas de las accione^ básicas que posibilitan en el niño la construcción del número.

En nuestro medio encontramos niños qué 'verbalizan los números únicamente como "retahila verbal” sin ninguna relación cuantitativa. Otros que inician esta relación pero sin conservar un orden en lo contado o en la expresión, es decir, que repiten o se saltan algunos números de la serie o elementos que cuentan y otros que realizan el conteo estableciendo la relación cantidad - cardinal.

El dominio o interiorización, por parte del niño, de dicha relación cantidad - cardinal se logra realmente en la realización de actividades directas y reversibles que conllevan a la construcción de esquemas reversibles. Esta adquisición se manifiesta cuando el niño puede utilizar diferentes procedimientos para hallar la relación. Por ejemplo:

Dada una cantidad de elementos contarlos uno a uno para hallar el cardinal correspondientes.

Dado un cardinal y hallar la cantidad que le corresponde. Procedimiento inverso.
Dados un cardinal y una cantidad que no corresponde establecer la igualdad por diferencia o por complemento, esto es sustrayendo o adicionando elementos a la cantidad dada.

Dijimos antes que la comparación permite la cuantificación y también establecer un orden. Analicemos esta última parte.

La realización de acciones tendientes a ordenar o reconstruir un orden también se debe efectuar en diferentes sentidos para así posibilitar en el niño la construcción del esquema reversible propio de los ordenamientos.

"Para el caso de los agrupamientos de relaciones asimétricas hemos explicado cómo se obtiene en lógica la relación conversa. Por ejemplo, la conversa de la relación A>B es, o bien A<B o bien B>A. En la terminología de Piaget esta relación recibe también el «nombre de relación recíproca. Pero para Piaget hay una tercera forma de reciprocidad de las relaciones que consiste en una composición de dos procedimientos anteriores, es decir, se permuta el orden de los elementos y se cambia el sentido de la relación (o sea B<A)". (Castorina, J. y Palau G. 1981 : 67).

Dicho esquema se manifiesta cuando un niño logra realizar todas las "posibles lecturas" de una serie (Mesa, O. 1990). Así: tenemos por ejemplo la serie 3,4,5.

De izquierda a derecha se lee $3<4<5$, 3 es menor que 4 y 4 es menor que 5.

También se puede leer en sentido contrario o sea de derecha a izquierda $3<4<5$, 5 es mayor que 4 y 4 es mayor que 3.

También se puede leer desde un punto intermedio en este ejemplo desde el 4, así, $3<4<5$ el 4 es a la vez mayor que 3 y menor que 5.

Finalmente las lecturas que se deducen de las dos primeras, $3<5$ (entonces 3 es menor que 5) o $5>3$ (entonces 5 es mayor que 3).

Es así como contar es algo más que pronunciar números o señalar objetos sin ningún orden. La construcción del concepto de número se realiza sobre dos acciones u operaciones básicas: La inclusión jerárquica (relación de las partes y el todo) y el ordenamiento. Estos esquemas se constituyen a partir de la reflexión sobre distintas acciones, que Piaget denomina "abstracción reflexiva", que exijan la relación parte - todo y la construcción y análisis de series.

4.2.1.1 Proceso de conteo. "La práctica del contaje verbal prepara el acceso a la comprensión de la enumeración escrita. El niño conoce muy pronto la existencia de las cifras, pero éstas adquieren mayor sentido cuando comprende que expresan las cantidades contadas". (Bassedas, M. 1982 : 76).

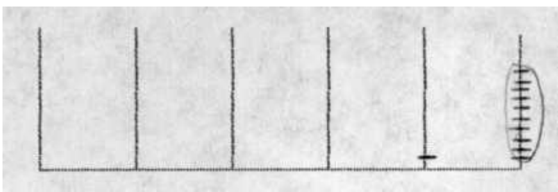
Un número cualquiera no expresa solamente una cantidad, significa además una manera determinada de contar, de registrar unos datos. Un número encierra unos principios básicos de contar y expresar a nivel simbólico cualquier cantidad. En nuestro sistema de numeración la escritura de un número indica que al contar se hace en grupos de 10. Esto es, saber contar es contar en base 10 (Mesa, O. 1989).

Un número como el 327 o 666 significa que se contó en grupos de 10 dando un valor diferente a cada número según la posición en la que se encuentra, por eso se habla de sistema numérico decimal de valor posicional.

Reconstruir el valor posicional permite entender, por ejemplo, que en 666 el primer 6 significa 600, el segundo significa 60 y el tercero 6, y este proceso es lento ya que requiere la comprensión de esquemas básicos.

"Mientras los numerales designan cantidades numéricas totales, los alumnos de los primeros grados no tienen dificultades. Estas se presentan cuando en la notación se involucra la relación parte todo (6, 10 y 16 por ejemplo)". (Kammi, C. 1988 : 113).

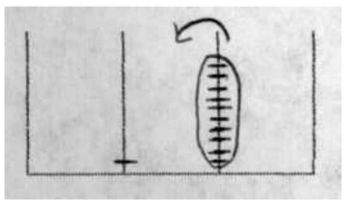
Los esquemas de "sustitución" y "equivalencia" (Orlando Mesa B.) son los esquemas que permiten al niño comprender que 47 es tener 4 grupos de 10 y 7 unidades o sea 40 + 7. Este procedimiento se puede ejemplificar claramente en el ábaco.

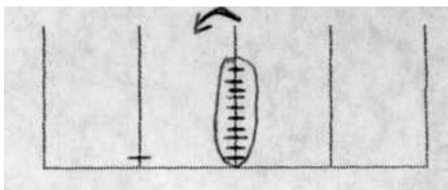


Cuando en la primera barra se cuenta hasta 10 unidades, éstas se retiran y se sustituyen por una en la barra de la decenas. Es como indicar o marcar que se ha contado 10 unidades.

"Una decena, dos decenas, tres decenas, etc., involucran la construcción de un segundo sistema jerárquico sobre el primero que los niños han construido. La construcción del segundo sistema requiere de una división mental del primero, en partes iguales de 10, mientras que el primer sistema permanece intacto. Después, de partir la totalidad en partes iguales, el niño tiene que hacer el mismo proceso anterior de ordenamiento de estas partes y de inclusión jerárquica de las mismas. Como el niño debe construir el segundo sistema sobre el primero, la construcción sólida del segundo no se logra hasta que el primero no esté estructurado" (Kammi, C. 198 : 119).

Al completar 10 en la segunda barra, es decir 10 decenas se sustituyen por una en la tercera que representa una centena, luego al contar hasta 10 centenas se sustituyen por una unidad de mil en la cuarta barra y así sucesivamente se aplica el esquema de sustitución que es básico para comprender el sistema decimal de valor posicional. (Mesa, O. 1990).





Así sistemáticamente se reconstruye la serie numérica a partir del 10 y los niños comprenden que por ejemplo el 568 es 5 veces 100, 6 veces 10 y 8 que sobran, o sea:

568 = 500 +60+8

568 = 5 X 10^*^ + 6 X 10^ + .8 X 10'"

Al partir del valor posicional se reconstruye también el significado de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas.

4.2.1.2 **Suma y Resta.** En el ejemplo anterior vemos como las relaciones de composición y descomposición subyacen a la comprensión de las operaciones de suma y resta no solamente en la ejercitación algorítmica sino en la resolución de problemas y ambos procesos a nivel directo y reveersible. Comprender las operaciones de suma y resta requiere nuevamente del esquema de la comparación de las partes y el todo. "Una vez que los niños logren identificar en las tareas aditivas las partes y el todo las relaciones que las unen, gozarán entonces de un instrumento cognitivo de gran eficiencia para resolver las diferentes categorías de pruebas aditivas" (Bermejo, V. y Rodríguez, P. 1987 : 79).

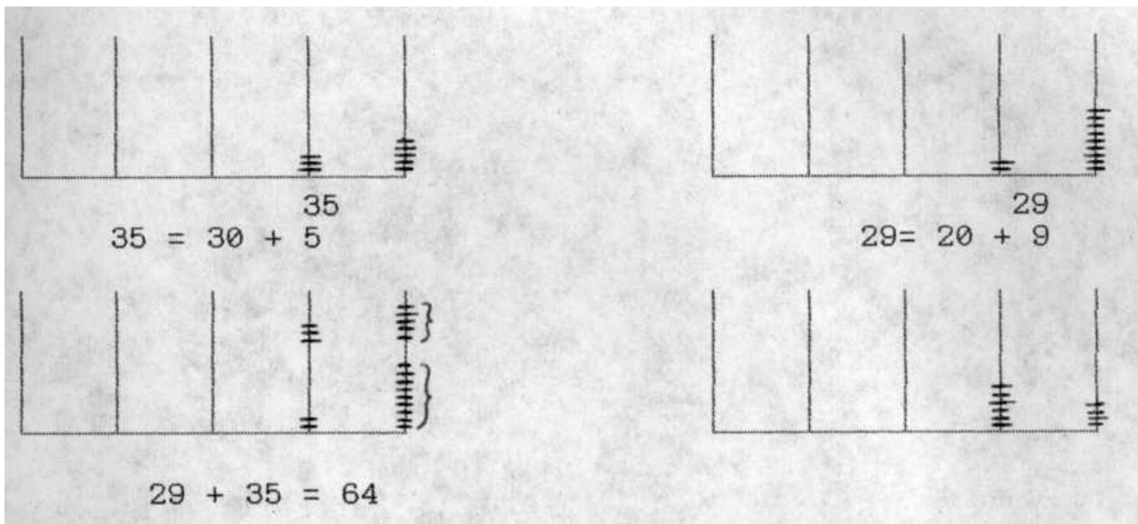
Resolver un algoritmo que se plantea en forma directa exige del sujeto la aplicación de un procedimiento directo, es decir, requiere de la realización de una operación (acción interiorizada) en un sólo sentido como es el caso de las sumas o restas del tipo $a + b = X$ o $a - b = X$. En las que X es la incógnita.

En cambio la reversibilidad algorítmica requiere del sujeto la aplicación de un procedimiento reversible (operación inversa), es decir, realizar una operación en ambos sentidos directo e inverso. Es el caso de las sumas y restas del tipo $a + X = c$, $X + b = c$, , $a - X = c$ y $X - b = c$ en las que el sujeto tiene en cuenta al mismo tiempo la relación de las partes y el todo para operar. Es cuando el niño comprende en el caso $a + X = c$, que $X = c - a$, en $a - X = c$, que $x = a - c$.

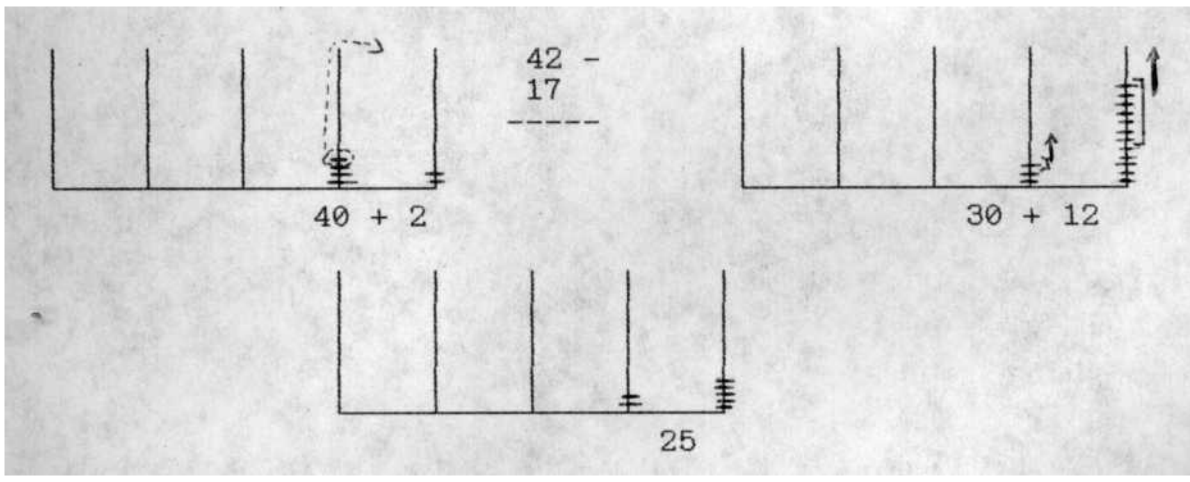
A nivel de los algoritmos resolver una suma 35 + 29 o una resta 42 - 17 requiere realizar una serie de pasos que se han venido construyendo en el proceso de conteo.

Por ejemplo, en la suma se parte del reconocimiento del valor posicional de cada una de las cifras, (30 + 5) + (20 + 9), al efectuar la suma de las unidades 5 + 9 se aplica el esquema de sustitución y se termina sumando las decenas.

Veamos en el ábaco:



En la resta, operación inversa de la suma, se parte primero del reconocimiento de los términos para identificar la mayor cantidad y la menor; (la resta en los números naturales) se tiene en cuenta el valor posicional y se aplica, en algunos casos, el esquema de equivalencia. Veamos un ejemplo:



El esquema de equivalida (1 decena = 10 unidades, 1 centena= 10 decenas, etc.) se aplica cuando una de las cifras del minuendo es menor a la respectiva cifra del sustraendo.

La comprensión e interiorización de los esquemas básicos permite entender el algoritmo de las operaciones. La aplicación de los esquemas y los algoritmos en diferentes situaciones permite la ejercitación y dominio de los algoritmos y la relación con los diferentes problemas.

"Un concepto, una noción, construida en un determinado contexto, no siempre se conserva de la misma manera si debe ser aplicada en un mismo contexto". (Gómez, C. 1985 : 231).

"Y es que una operación sólo se construye en conexión con los contenidos, los contextos, las relaciones particulares en las que aparece, de forma que el niño puede atribuir a una misma operación significaciones diferentes en función del contexto en que se encuentre". (Gómez, C, 1985 : 231).

4.2.2 Esquema multiplicativo

El esquema multiplicativo se construye sobre el esquema aditivo. Las unidades se particionan en grupos de a 10 para comprender el sistema de numeración decimal. Aparece entonces, un "segundo sistema de unidades" representado por los grupos de 10.

Al decir 1 diez, 2 dieces, 3 dieces, 4 dieces..., el 1, 2, 3, 4 no significan unidades sino grupos de diez, es decir, unidades de unidades.

La acción concreta sobre la cual el niño construye el esquema multiplicativo, que incluye tanto la multiplicación como la división, es la de repartir cantidades iguales y reconstruir el total a partir de dichas cantidades. Al realizar la partición de una cantidad en subgrupos iguales se obtiene n veces una cantidad que puede ser 3 veces 5, 5 veces 3, 2 veces 8, 7 veces 4... en los que estos números no representan unidades por ejemplo, el 3 y el 5 bajo la operación veces no representan 3 unidades ni 5 unidades. El 3 está indicando que hay 3 grupos y el 5 indica que en cada grupo hay 5 unidades, o sea que el significado de ambos números está dado por el "operador veces" que en este caso significa el número de veces que se debe realizar una acción.

Es así como el niño construye la relación entre el concepto "veces" y el de multiplicación que posibilita en última instancia la construcción del esquema multiplicativo.

"Uno de los principales problemas que presenta el aprendizaje de la multiplicación aritmética es el descubrimiento del operador multiplicativo, es decir, el número de veces que se repite un determinado conjunto, o lo que es lo mismo, del número de acciones u operaciones. Es por esto que la comprensión del esquema multiplicativo es de mayor complejidad que el esquema aditivo". (Gómez, C. 1981 : pag. 15).

"Desde el punto de vista estrictamente matemático podríamos decir que la multiplicación de los números enteros no reviste mayor complejidad que la operación de adición con los mismos números, ya que entre las operaciones 3+3+3+3 y 3x4 o 4x3 no existen diferencias importantes, ya que una constituye una expresión abreviada de la otra. La enseñanza de esta operación de multiplicación se aborda, en efecto, normalmente explicándole al niño que 3x4 es una forma más corta de poner 3+3+3+3 y que es lo mismo poner 3x4 que 4x3 porque las dos formas dan el mismo resultado.

Si bien esto sería perfectamente lógico para un adulto, para un niño no lo es tanto, porque, desde un punto de vista epistemológico y psicológico, la construcción de la operación de multiplicación comporta un proceso - que Piaget describe en términos de abstracción reflexionante- de un mayor nivel de complejidad que el de la adición. En efecto mientras que en la suma podemos adicionar sucesivamente 2+2+2+2... y llegar a un resultado final sin tener en cuenta para nada el número de veces (número de operaciones) que hemos realizado la acción de añadir, en la multiplicación será necesario que tengamos en cuenta el número de conjuntos equivalentes que tenemos y este número de conjuntos equivalentes, representa a la vez el número de acciones, de operaciones, realizadas; hay por tanto un operador que nos indica el número de veces que se repite un determinado conjunto y que se sitúa, como una variable de rango superior en cuanto que representa número de operaciones con conjuntos y no sólo con elementos " (Gómez, C. 1981 : 15).

Para analizar la división retomemos nuevamente la acción concreta de repartir una cantidad en n partes iguales de la que partimos en el esquema multiplicativo.

Una repartición de una cantidad cualquiera se puede realizar de dos formas:

Repartir "de a" y repartir "entre" (Carlos Eduardo Vasco). Analizando las situaciones que sugieren al niño realizar una repartición encontramos que están asociadas a estos dos procedimientos.

Por ejemplo, 18 se puede repartir "de a" 3, entre 2, entre 6, etc. En el primer caso se determina la cantidad que le correspondería a cada subgrupo para averiguar cuántos subgrupos se pueden formar. En el segundo caso se determina el número de grupos para averiguar qué cantidad le corresponde a cada uno. Obteniendo al final n veces una cantidad. Así se puede deducir, entonces, la relación multiplicación -división y la posibilidad de construir el significado de la división a partir de la reflexión sobre la acción concreta de repartir.

Como el niño construye el significado de la multiplicación a partir de la suma también puede construir el significado de la división, asociada a la repartición "de a", a partir de la resta (Mesa, O. 1990).

Retomemos el ejemplo anterior. Si repartimos 18 de a 6 tenemos lo siguiente:

```
18 -
 6
----
12 -
 6
-----
 6 -
 6
-----
 0
```

Es decir, cuántas veces se puede "sacar" 6 de 18, o cuántos grupos de 6 se pueden formar.

Al concluir la resta se obtiene que se han formado 3 grupos, 3 veces 6.

Analicemos otro ejemplo:

Repartir 24 de a 7

```
24 -
 7
-----
17 -
 7
-----
10 -
 7
-----
 3
```

Qué preguntas se pueden hacer sobre la relación de los términos?

Cuántos grupos de a 7 se formaron?

Qué cantidad fue la que se repartió?

Cuánto sobró?

Cuánto había inicialmente?

Si se formaron tres grupos de a cuánto se repartió?

Pero lo importante es que el niño a partir de estas situaciones avance a operar con grupos y cantidades a la vez, es decir que utilice la multiplicación para resolver dichos problemas (cuántos grupos de 7 se pueden formar con 24).

Si tuviéramos que repartir 435 de a 3. Hay que preguntar cuántos grupos de a 3 se pueden formar o cuántas veces "esté el 3" en el 435 posibilitando así el cálculo aproximativo a partir de la multiplicación:

```
 20 veces 3 = 60
 50 veces 3 = 150
100 veces 3 = 300

  435 | 3
      |------
 -300 | 100
 -----|
  135 | 20
  -60 |
 -----|
```

$$\begin{array}{r|l} 75 & 20 \\ -60 & \\ \hline 15 & 5 \\ -15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

La respuesta sería: de 435 se forman 145 grupos de a 3 o sea que 145 veces 3 = 435

El análisis de estas actividades y preguntas permite construir comprensivamente el significado del algoritmo de la división como proceso directo y reversible

$$\begin{array}{l|l} \text{(D) dividendo} & \text{divisor (d)} \\ \cline{2-2} \text{(r) residuo} & \text{cociente (c)} \end{array}$$

$$c = \frac{D}{d}$$

$$r = D - (d.c)$$

$$D = (d.c) + r$$

$$d = \frac{D}{c}$$

Las diferentes relaciones que se pueden construir a partir de éstas y otras actividades es lo que nos permite hablar de ejercitación algorítmica, o sea la aplicación de unas estrategias, de unas operaciones para resolver diferentes situaciones, en variados contextos.

Finalmente, en la resolución de problemas no se hace ningún análisis detallado ya que nos interesa observar la relación que el niño establece entre el problema y la operación que le permite encontrar la respuesta, o sea si el niño establece una relación significativa entre el planteamiento y las operaciones. En este sentido planteamos dos tipos de problemas. Unos que para su solución exigen el algoritmo directo y otros que requieren del algoritmo indirecto o reversible.

4.3 CONCEPTUALIZACION SOBRE LA INTERVENCION PEDAGOGICA

4.3.1 Fundamentación.

En la historia de la pedagogía, la ``intervención pedagógica" ha sido interpretada de diferentes maneras, según la corriente pedagógica imperante en el momento. Con el surgimiento de la escuela activa representada en Comenio, Dewey, Decroly y otros, se resaltó la participación activa del maestro en el proceso de aprendizaje, considerándolo como un facilitador y creador de actividades con sentido. Este debía poner al alumno en contacto con el objeto de conocimiento, y, permitirle a partir de esa relación reconstruirlo. Siempre interviniendo oportuna y adecuadamente, pues, formar un sujeto crítico, reflexivo y creativo, era el fin.

Posteriormente, la revolución industrial y el ingreso del hombre al modo de producción capitalista, exigió la formación de otro tipo de sujeto. Esto, promovió un tipo de educación más directiva y centrada en la acumulación de conocimientos independientemente de la asimilación comprensiva del sujeto que aprende. El maestro se convierte en un instructor encargado de enseñar al alumno los conocimientos necesarios, elaborados previamente desde sus objetivos y contenidos temáticos y donde el sujeto asumía una actitud pasiva y receptora.

A partir de los planteamientos de la psicología cognitiva centrada en analizar el desarrollo de la inteligencia y los mecanismos mentales utilizados para acceder al conocimiento, se genera un nuevo movimiento pedagógico, el cual rescata los planteamientos de la escuela activa y propone un modelo de enseñanza donde el maestro, el sujeto que aprende y el contexto sociocultural, se integran para formar un sujeto autónomo, crítico, reflexivo, creativo y capaz de defenderse en una determinada sociedad. Esta teoría destaca como elemento principal al maestro, un posibilitador de dichos aprendizajes y quien al enfrentarse a la formación de un sujeto debe tener claros, los siguientes principios:

Tener en cuenta el momento de desarrollo en el que se encuentra el sujeto.

Garantizar el acceso a la construcción de aprendizajes con sentido.

Formar un sujeto autónomo, el cual por si mismo pueda construir significativamente un aprendizaje. Posibilitar al alumno la ampliación de sus esquemas conceptuales los cuales se enriquecen con los nuevos conocimientos.

Es así, como en este apartado, desarrollaremos el concepto "Intervención Pedagógica", a partir de los que consideramos son sus componentes fundamentales; la enseñanza, el rol del maestro y el método. Cada componente con sus características apunta a la formación del alumno.

4.3.1.1 La enseñanza como posibilitadora del desarrollo cognitivo del niño. La enseñanza dentro del contexto educativo se presenta como una posibilidad de acceso al conocimiento y mediadora entre la triada alumno, maestro y objeto de conocimiento. Mediadora en la medida en que su acción educativa moviliza el pensamiento en el alumno y lo lleva a la ampliación y creación de conocimientos, los cuales son construidos de manera activa y participativa por él, en un contexto escolar específico. Es por esto que "las interacciones en el aula tanto afectivas como intelectuales no se dan en el vacio.

Ocurren entorno a contenidos y a saberes específicos. La manera como estos saberes se manejan van a influir en la calidad de las interacciones, y éstas, a su vez, en la calidad y el dinamismo de las formas de construcción y apropiación de aquellos" (Vasco E. 1987).

Interactuar dentro de un espacio escolar conlleva al establecimiento de un acto comunicativo mediatizado por el lenguaje como medio de expresión del pensamiento y que permitiré transformar las diferentes formas del que posee el sujeto para percibir el mundo y conceptualizar dicho objeto de conocimiento, inicialmente, con explicaciones propias, partiendo de su conocimiento previo y, posteriormente, con explicaciones convencionalmente elaboradas.

Esta enseñanza no tiene como único fin permitir conocimientos socialmente elaborados sino que va a posibilitar el crecimiento a todo nivel del sujeto que aprende, permitiéndole actuar, pensar, reflexionar criticar sobre los diferentes acontecimientos de la vida, pues, lo "arma" de elementos teóricos lo suficientemente válidos para defenderse en una sociedad determinada. Lo anterior solamente es posible en la medida en que la enseñanza se planea de manera más flexible, como lo propone Martínez Boom (1990), desarrollar nuevas conceptualizaciones no de tipo pragmático, rígidas, con fines preestablecidos, sino como una aventura interrogadora sin absolutos ni respuestas terminales.

4.3.1.1 El rol del maestro. Las actuales teorías pedagógicas han coincidido en destacar la importancia del maestro como facilitador del aprendizaje en sus alumnos. Un maestro facilitador es aquel que permite al alumno desarrollar su pensamiento teniendo en cuenta sus posibilidades, competencias cognitivas; genera inquietudes e interrogantes frente al objeto de conocimiento al que se enfrenta el alumno; confronta y plantea el interrogante en el momento preciso; parte del desarrollo evolutivo de su alumno y de su motivación e interés frente al aprendizaje.

Un maestro que posibilita el acceso a un conocimiento tiene claro el proceso de construcción de éste, tanto desde el mismo sujeto con sus posibilidades y limitaciones como del mismo objeto de conocimiento. A lo anterior se le agrega una característica fundamental del maestro: la habilidad y capacidad que posee para elaborar situaciones de aprendizaje significativas que lleven al altunno a participar activamente sin presiones de tiempo; pensando más en la cualificación del proceso que en la cantidad de contenidos que se imparten.

Facilitar al alumno la construcción a partir de la manipulación, experimentación, reflexión, razonamiento, discusión, opinión, intercambio de ideas. Es decir, un docente que en términos de Drevillon (1980) esté atento a la forma como reaccionan los niños ante las distintas actividades y hechos de cada día y que éstos aprenden a través de actividades concretas ya que el niño necesita actuar sobre las cosas para comprenderlas.

Es pensar que si un maestro elabora actividades que pretendan movilizar en los alumnos cualquier tipo de conocimiento, estas deben ser lo suficientemente motivantes para el sujeto que aprende; como también estar enmarcadas dentro de un contexto sociocultural relacionado con el alumno.

Para lo anterior se requiere, por parte del maestro, la habilidad para interpretar cada respuesta dada por los alumnos y ver la forma de canalizar adecuadamente dichos conocimientos, ya sea para que complemente los existentes o adquiera otros nuevos. Barrón (1991), plantea que el sujeto al enfrentarse a cualquier tipo de aprendizaje reconstruye y transforma el objeto de conocimiento y además crea hipótesis propias que poco a poco se van ampliando y conceptualizando de manera más compleja.

Para ser un maestro facilitador es necesario tener claridad no solamente frente al desarrollo de la inteligencia del alumno dependiendo de la edad y nivel de conceptualización en el que se encuentra, sino unsa formación básica sobre los conocimientos a impartir, enmarcados dentro de los saberes específicos. Estos poseen su propia estructura y contenidos conceptual y lógicamente organizados, por lo tanto, no pueden presentarse de manera aislada ni descontextualizada sino relacionándolos al interior y entre ellos mismos.

4.3.1.2 La construcción significativa de conocimientos.

Las diferentes teorías del aprendizaje, han desarrollado varias concepciones sobre cómo permitir que el niño aprenda. Aparecen teorías donde el sujeto que aprende asume una actitud pasiva y el maestro lo provee de conocimientos y en ningún momento le exige una participación directa y comprensiva. En las últimas décadas se viene desarrollando una teoría que enfatiza en la construcción significativa de cualquier conocimiento y en la formación de un sujeto más activo.

No de sujetos que copian una realidad sin entenderla ni integrarla mínimamente a su medio inmediato.

Esta teoría basada en los planteamientos del desarrollo de la inteligencia de Piaget, postula que cualquier tipo de conocimiento al que se enfrenta el sujeto debe tener sentido y significado par él (Coll 1988, Barron 1991, Carretero, Ausbel 1983, etc., son algunos de sus representantes).

Para que un aprendizaje sea significativo se debe tener en cuenta no solamente al niño con sus potencialidades, saber previo, intereses, motivaciones, sino el contexto en el que dicho conocimiento se desarrolla. Además que desde una concepción pedagógica esa relación enseñanza - aprendizaje, esté enmarcada dentro de unas propuestas de intervención claras y significativas, cuyos contenidos estén organizados coherentemente, retomando no sólo un saber históricamente elaborado sino al sujeto que aprende.

El ambiente escolar, en el que se desenvuelve un alumno es facilitador de actividades que le posibilitan acceder comprensivamente a cualquier aprendizaje, es por esto que el maestro al desarrollar una propuesta de intervención pedagógica debe tener en cuenta el saber previo relacionado con el saber por enseñar. El nuevo conocimiento se construiré sobre el previamente elaborado (Ausubel 1983); por lo tanto, es de gran importancia para el maestro, conocer los esquemas previamente construidos por el alumno y de que manera puede establecer relaciones entre el conocimiento previo y el nuevo, lo mismo que el tipo de estrategias que utiliza para resolver una situación problema.

4.3.1.3 Cómo permitir al alumno construir?. El maestro cuando asume la tarea de permitirle al alumno acceder a un conocimiento determinado, debe apropiarse de un método especifico el cual garantizará o no un adecuado aprendizaje.

Podemos plantear que históricamente han existido dos métodos de enseñanza, el asociacionista y el método por procesos.

A principios de siglo y con el fin de crear escuelas con un mayor grado de eficiencia, tanto en primaria como en secundaria, se creó un método de enseñanza que diera respuesta al crecimiento científico e industrial del momento y cuyos planteamientos se basaban en la sicología conductista.

Este método es el llamado asociacionista y se caracteriza:

Tiene como propósito fundamental el desarrollo de habilidades las cuales se presentan jerárquicamente organizadas.

Elaboración de materiales con ejercicios graduados los cuales deben ser como preparación para acceder a los primeros niveles de primaria.

La relación maestro - alumno está basada en el autoritarismo y en una sola dirección, el alumno se asume como sujeto pasivo, el cual recibe todo lo que el maestro le enseña, lo repite y lo memoriza, independientemente del significado. Lo anterior dio lugar a la creación de una tecnología educativa la cual ha permanecido durante muchos años.

Solamente hace algunas décadas y con el surgimiento de la psicología cognitiva aparece un nuevo enfoque el cual parte del sujeto como constructor directo del conocimiento y el maestro como un guía no un instructor. Los principios que orienta dicho método se pueden sintetizar de la siguiente manera:

Presentarle al niño situaciones problema que le exijan pensar e integrar todo lo que conoce a partir de la relación que ha tenido con su medio circundante, movilizando en el niño estrategias cognitivas como la anticipación, la inferencia posibilitadora de la construcción de cualquier conocimiento.

El niño al ingresar a la escuela no llega "vacío" sino que trae una cantidad de conocimientos previos, adquiridos a través de la experiencia con el medio en el que se desenvuelve, los cuales se convierten en la base sobre la que se construyen otros conocimientos más formales y complejos.

Los contenidos a trabajar con los niños deben estar acordes con los esquemas conceptuales que poseen, tener en cuenta sus intereses y necesidades y sobre todo se relacionen con su vida cotidiana.

Reconocer y valorar cada respuesta del niño, teniendo en cuenta que él antes que dar una respuesta convencional, está utilizando su propia lógica y no la del adulto. El niño responde dependiendo de su nivel de comprensión y del conocimiento inmediato que tenga del problema presentado.

Crear espacios de discusión y participación donde los niños intercambien conocimientos tanto niño - niño como niño maestro.

Efectuar constantemente confrontaciones sobre lo realizado, pero de manera sutil e inteligente promoviendo en el niño el paso de un estado de "menos conocimiento" a uno de "mayor conocimiento".

4.3.2 Propuesta de intervención pedagógica.

4.3.2.1 Presentación. Los niños ubicados en el nivel escolar de básica primaria, están capacitados para asumir el aprendizaje de los conceptos básicos referidos a la preoperatoria y la operatoria, los cuales poseen niveles variados de complejidad y que dependiendo del nivel de conceptualización adquirido por los niños son asimilados e interiorizados progresivamente.

Por lo tanto más que enseñarle al niño matemáticas partiendo directamente desde lo simbólico antes que del significado, es fundamental llevarlo al logro de una matematización, que exija de cada contenido matemático a trabajar su comprensión, ejercitación e integración dentro de un problema determinado.

Lo- anterior sólo puede lograrse a partir de situaciones problema que creen en el alumno conflicto y le exijan ampliar sus esquemas conceptuales, partiendo de los esquemas de asimilación que ya posee, para llevarlos a niveles más simbólicos, es por esto fundamental analizar el tipo de respuesta dada por el niño ante un problema y las estrategias utilizadas, las cuales permitirán detectar el nivel conceptual en el que se encuentran los niños y los mecanismos de intervención.

Pensar matemáticamente es pensar a través de símbolos los cuales son muy abstractos y no se pueden adquirir de una vez, sino que exigen la búsqueda de varios significados (Mesa, O 1994).

Una situación problema es una actividad orientada por el maestro que le permitirá al niño la construcción o ampliación de un concepto matemático, este tipo de actividad debe ser significativa para él y el maestro al elaborarla debe pensar que éste se ubique dentro de un contexto cercano al niño, que sea dinámica y sobre todo saber plantear el tipo de preguntas que orienten la resolución de las mismas.

El niño al enfrentarse a la solución de una situación problema atraviesa por un proceso el cual según Mesa (1994) se puede categorizar de la siguiente manera:

1. Comprensión global de la situación.

2. Análisis de las relaciones internas, es decir, lo que ocurre entre los componentes de la situación problema.
3. Síntesis de las relaciones; la cual es de tipo inferencial y conlleva a realizar afirmaciones y conceptualizaciones más a nivel abstracto.
4. Escogencia de algoritmos, es decir elección de procesos para la solución o de secuencias para encontrar respuestas intermedias o totales.
5. Búsqueda de verificación, la cual se da a partir de la confrontación de las respuestas frente a los datos del problema o la información para validar o no las respuestas.

El maestro como facilitador de un aprendizaje significativo debe orientar dicho proceso y garantizar la realización de la tarea propuesta.

4.3.2.2 Propósitos.

Comprender los conceptos básicos relacionados con la preoperatoria y la operatoria.

Ejercitar los cuatro algoritmos básicos: suma, resta, multiplicación y división a nivel directo e inverso.

Resolver problemas que integren las operaciones básicas, tanto directos como inversos.

4.3.2.3 Metodología.

Las diferentes actividades realizadas con los niños se desarrollaron a partir de;

Presentación de la situación problema.

Indagación sobre su comprensión.

Análisis de los datos.

Búsqueda de las operaciones que permitieran su resolución.

Confrontación de procedimientos y resultados comparándolos con los datos del problema. Esta se realizó de dos maneras:

Individual: niño - niño, niño - maestro.

Colectiva: Subgrupos, intercambio de producciones, un niño resuelve el problema y los demás lo revisan, escrituras colectivas.

El grupo participa con sus aportes desde el conocimiento y esquemas previos; el profesor aclara dudas, da información sobre la convencionalidad, orienta el análisis de los enunciados de los problemas.

La participación activa de los niños en la realización de las actividades, permite hacer más dinámica la clase porque genera discusión sobre el tema a tratar.

4.3.2.4. Descripción de algunas situaciones problema realizadas con los grupos.

GRADO lo.

Situación problema sobre la granja. Los niños durante el semestre sembraron y cultivaron algunas verduras en la granja escolar, a partir de esta situación se crearon talleres del tipo:

VAMOS A SEMBRAR!

En la huerta del colegio se sembraron 17 semillas de cebolla. Nacieron 10 cebollas. Cuántas cebollas no nacieron?

En una bolsa hay 8 semillas de cebolla y en otra hay 9 semillas. Cuántas semillas hay en total?

Camila sembró 6 semillas de cebolla y Sebastián sembró el resto. Si en la bolsa habían por todas 17. Cuántas semillas sembró Sebastián?

En la huerta sembramos 17 semillas de tomates. Nacieron 5 maticas de tomates. Cuántos tomates no nacieron?

Silvia empacó algunas semillas de tomates y Nicolás empacó 12. Si el total de semillas es 17. Cuántas semillas empacó Silvia?

HAGAMOS CUENTAS!

En una bolsa hay unas semillas para sembrar.

Diana sembró 4 y Eduardo sembró 7. Cuántas semillas sembraron entre los dos?

De la huerta recogimos 5 tomates y 10 cebollas. Cuántas verduras recogimos en total?

Los 5 tomates que se cogieron se vendieron a $50 cada uno. Cuánto costaron todos los tomates?

Un paquetico de cebolla se vendió por 1 billete de $100 y 6 monedas de $10. Cuánto costó el paquete de cebolla?

Se vendieron 2 tomates. Por 1 pagaron 3 monedas de $10 y por el otro pagaron 6 monedas de $10. Cuánto costaron los tomates?

Se vendió un paquetico de cebolla y un tomate. Por la cebolla pagaron 13 monedas de $10. Por el tomate pagaron 5 monedas de $10. Cuánto se pagó por todo?

Situación problema sobre el super mercado.

Indagar sobre lo que es un supermercado, cómo está organizado y quién trabaja allí.

A partir de la información discutir conceptos como: tienda, autoservicio, canasta familiar, registradora, cajero, empacador, etc.

Elaborar una lista de diferentes artículos con sus precios, iniciando una actividad de compra - venta. El ábaco es utilizado como caja registradora.

Juego de la alcancía: el ábaco es utilizado como alcancía, donde se echan determinadas cantidades de monedas ya sean de $1, $10 y $100, realizando los conteos necesarios.

Situación problema sobre la legumbrería:

Elaboración de una lista de legumbres y frutas con su precio respectivo.

Invención de problemas de suma y resta , con los datos.

Resolver los problemas en el ábaco, utilizado como caja registradora.

GRADO 3o.

Situación problema sobre la construcción de una casa.

Se le plantea a los niños construir una casa teniendo en cuenta aspectos como: planos, mano de obra, contrataciones, personal, etc.

En una puesta en común los niños deciden construir una casa para todos los alumnos del grado 3o. Al respecto proponen.

Distribución de la casa
10 dormitorios 1 sala grande 1
comedor amplio 1 cocina
integral amplia 5 baños
3 patios
1
Jakussy
1 sauna
1 salón de estudio y biblioteca con corredores alrededor. 1
chiminea 1 lago
1 parquesito - jardines 1 casa de muñecas 1 cancha de fútbol
1 cancha de basquetbol
1 gimnasio.

Los materiales necesarios son:

madera	capas
ladrillos	terreno
cemento blanco	sanitario
cemento común	lavamanos
hierro	duchas
baldosas	cocina integral
pintura	tejas
clavos	trabajadores
yeso	alcantarillado
gravilla	instalación de energía
estuco	baldocín
puertas	transporte
llaves de agua	vidrios
tubería	regla
agua	metro

energía	martillo
planos	pala

Con base en los datos obtenidos se resolvieron los siguientes problemas:

¡

Calculemos el material que necesitamos para construir una casa!

Para hacer una pieza se necesitan:

218 adobes 16 galones de arena

3bultos de cemento.

Si construiremos 10 piezas. Averiguar cuánto material se requerirá para construir la mitad de las piezas?

Si en un día se construyó 1 pieza y la mitad de otra.

Cuántos adobes se pegaron?

Cuánto cemento se gastó?

Cuánta arena se gastó?

En la calle descargaron la arena que se necesita para hacer 7 piezas. Se han terminado 2 piezas. Cuántos galones de arena hay en la calle? Cuántos galones se gastaron?

En dos días se pegaron 654 adobes. Cuántas piezas se construyeron?

Hagamos cálculos para construir la casa!

Para la instalación eléctrica de la casa se necesitan:

5 rollos de 50 metros de alambre cada uno. Del total de metros se utilizaron 114 metros para la primera planta y el resto para la segunda planta. Cuántos metros se utilizaron para la segunda planta? Se compraron 32 plajones. La mitad más 3 se distribuyeron para la segunda planta; el resto para la primera planta. Cuántos plajones se colocaron en cada piso?
Si la cantidad de swiches debe ser la misma que la cantidad de plajones. Cuántos swiches se requerirán para cada piso?
Se compró una caja que contiene 12 breques para distribuir en 4 lugares de la casa. De a cuántos breques se requieren para cada lugar?

BRADO 5o.

Situación de aprendizaje. "Construcción de una escuela".

Se le propuso a los niños planear la construcción de una escuela. En grupo se discuten aspectos como; planos, material, costos, personal, etc.

Con base en la actividad propuesta se resuelven individual o conjuntamente los siguientes problemas:

1. Se compraron 20 bultos de cemento a $4.500 cada uno; 2 volquetas de arena de pega a $17.000 cada viaje; 3 volquetas de arena de revoque a $18.000 cada uno y 500 ladrillos a $120 cada ladrillo. Se pagó con un cheque de $500.000. El resto del dinero se gastó en el pago de trabajadores con el mismo salario. ¿Cuántos pesos recibió cada trabajador?
2. Para la construcción de las aulas se requieren 6.000 adobes, si se ha construido la tercera parte ¿cuántos adobes faltan por pegarse?
3. El costo total de la obra es de $55'328.125. La comunidad aporta $6'526.400. El municipio participa con tres veces más que lo dado por la comunidad. ¿Cuánto aportó el municipio?

   ¿Cuánto dinero falta para la financiación total de la obra? Plantee una propuesta para conseguir el resto del dinero requerido para la financiación de la obra.
4. En una volqueta caben 725 adobes. ¿Cuántos viajes se deben hacer para transportar el total de adobes?
5. Si en un día un trabajador carga 96 bultos de cemento, ¿cuántos trabajadores se deben contratar para cargar 960 bultos de cemento?

6. Para toda la construcción se requieren 9.000 adobes. Para las aulas se requieren 1/2, más la tercera parte del resto. ¿Cuántos adobes se requieren para el resto de la construcción?
7. Para la construcción de la obra se han contratado unos trabajadores cada uno con un sueldo mensual de $81.590. Si la nómina mensual tiene un costo de $979.080. ¿Cuántos trabajadores se contrataron?
8. El material para la losa tiene el siguiente costo:

   75 varillas de 6 metros cada una valen a $3.000 cada varilla; 3 volquetas de arena de gravilla a $16.000; 3 volquetas de arena de pega a $14.000; 26 bultos de cemento a $3.800 cada uno.

   ¿Cuánto vale todo el material?

   ¿Si el material se canceló con un cheque y devolvieron $75.200, de cuánto era el cheque?
9. Para la instalación eléctrica se requieren:

   6 rollos de alambre de 50 metros cada rollo; 15 toma - swiche; 30 cajas octogonales; 2 cajas de 6 breakes cada una; 24 tubos de 3/4 cada uno. Por los 6 rollos de alambre se pagaron $48.000. Por los swiches $18.000; por las cajas octogonales $13.500, por las dos cajas de breakes $9.000; por los tubos $4.200; por las lámparas $123.300.

¿Cuál fue el costo por unidad de cada artículo comprado?

¿Cuánto se canceló en total?

5. METODOLOGIA

5.1 DESCRIPCION DE LA POBLACION

La población elegida consta de 59 niños (37 niños y 22 niñas) que se encuentran ubicados en los grados primero, tercero y quinto de básica primaria en las instituciones Colombo Francés (grados primero y tercero) y Escuela Santo Tomás de Aquino (grado quinto) de la ciudad de Medellín.

Los niños del Colegio Colombo Francés están ubicados en un nivel socioeconómico medio - alto y los niños de la Escuela Santo Tomás de Aquino pertenecen a un nivel bajo.

De los 59 sujetos 17 están en primero, 17 en tercero y 25 en quinto.

En el grupo de primero el rango de edad es de seis a siete años. Los de tercero oscilan entre ocho y nueve años y los de quinto entre 10 y doce años.

5.2 INSTRUMENTOS DE EVALUACION

5.2.1 Presentación

Como el propósito de nuestra investigación es evaluar un estado inicial del pensamiento lógico matemático en niños de lo., 3o. y 5o de básica primaria y la movilización, luego de un proceso de intervención pedagógica fue necesario elaborar un instrumento que nos permitiera analizar y comparar ambos momentos.

La evaluación se centra fundamentalmente en los conceptos básicos referentes a los esquemas aditivo y multiplicativo que están estrechamiente ligados con el nivel de logros señalados por el Ministerio de Educación Nacional. La prueba inicial indaga por el estado de conocimientos en un momento determinado, es decir el estado de los niños antes de participar de una propuesta de trabajo pedagógica y la prueba final entonces indago por ese nuevo estado alcanzado luego de un proceso de intervención.

Aunque ambas pruebas evalúan los mismos conceptos, la segunda se diferencia de la primera por su nivel de complejidad y ampliación de los contenidos.

5.2.2 **Estructura Básica de la prueba.**

Definidos los esquemas aditivo y multiplicativo como esquemas básicos del pensamiento lógico matemático se establecieron sus componentes o categorías conceptuales que dan cuenta del proceso de estructuración de cada esquema, ellos son:

ESQUEMA ADITIVO

Conteo	Cardinalidad	
	Ordinalidad	
Composición y descomposición aditiva	Proceso directo	
	Proceso reversible	
Ejercitación	Suma	Proceso directo
		Proceso reversible
Algorítmica	Resta	Proceso directo
		Proceso reversible
Resolución de	Aplicación esquema aditivo directo	
Problemas	Aplicación esquema aditivo inverso	

ESQUEMA MULTIPLICATIVO

Conceptualización	Significado de la multiplicación Significado de la división
Ejercitación Algorítmica	Proceso directo Proceso reversible
Resolución de problemas	Aplicación esquema multiplicativo directo Aplicación esquema multiplicativo inverso

5.2.3 DESCRIPCION DE LAS PRUEBAS

5.2.3.1 Prueba inicial

1. ESQUEMA ADITIVO

1.1 CONTEO : En esta categoría se evaluaron los conceptos de cardinalidad y ordinalidad.

1.1.1 Cardinalidad

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
Se propusieron diferentes ejercicios en el círculo del 10: -Presentados varios grupos gráficamente, con cantidad de bolitas diferentes, asignarle el cardinal correspondiente. -Dado el cardinal representar gráficamente la cantidad que le corresponde. -Dado un cardinal y una cantidad diferente presentada en forma gráfica, establecer la correspondencia agregando o quitando bolitas a la cantidad gráfica.	Escribir simbólicamente números de dos y tres cifras dadas en palabras. Reconocer en un número de dos y tres cifras el valor relativo de cada uno.	Escribir simbólicamente números de 3, 4, 5 y 6 cifras dadas en palabras.

1.1.2 Ordinalidad

Se presentaron dos tipos de ejercicios en el círculo del 10: -Dados varios grupos con diferente cantidad de elementos cada uno, se deben ordenar iniciando con el de menor cantidad. -Dados varios números de la serie numérica se deben ordenar iniciando con el que indica menor cantidad.	Se pide realizar diferentes secuencias numéricas, ascendentes y descendentes, comenzando en un número arbitrario ejemplo: contar de 7 en 7, de 3 en 3, etc.	Se pide realizar diferentes secuencias numéricas, ascendentes y descendentes, comenzando en un número arbitrario ejemplo: contar de 5 en 5 iniciando en el 2. Se presentaron sucesiones numéricas en las cuales se debe descubrir la regla de formación ejemplo:

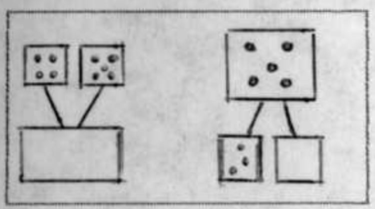
	108	96		72		

1.2 COMPOSICION Y DESCOMPOSICION ADITIVA PROCESO DIRECTO Y REVERSIBLE.

GRADO 1°

-Dada una cantidad en el círculo del 10 buscar diferentes partes en que se puede descomponer conservando la igualdad y viceversa, es decir, dada las partes que conforman un todo encontrar el todo.

También se presentó una cantidad como un todo y una de las partes para encontrar la otra parte. Por ejemplo:



GRADO 3°

Se presentaron sumas en el círculo del 100, en las que en unos casos se da el total para encontrar los sumandos (dado el todo encontrar las partes). En otros casos dados los sumandos encontrar el todo y finalmente dado el total y uno de los sumandos encontrar el sumando que falta. 15 + [ ] = 35

GRADO 5°

Se presentaron sumas en el círculo del 1000, en las que en unos casos se da el total para encontrar los sumandos (dado el todo encontrar las partes). En otros casos dados los sumandos encontrar el todo y finalmente dado el total y uno de los sumandos encontrar el sumando que falte. 145 + [ ] = 275

1.3 EJERCITACION ALGORITMICA DE LA SUMA Y LA RESTA. PROCESO DIRECTO

Se presentaron diferentes ejercicios de sumas, en forma vertical, de una cifra en las que el total se encuentra en el círculo del 20 y de dos cifras en las que se debe aplicar el esquema de sustitución. Sumas del tipo a + b = X (siendo X la incógnita). Ejemplo:

```
 5 +      18 +
 3         7
----      ----
```

Para la resta se presentaron ejercicios con el mismo esquema en los que se debe aplicar el esquema de equivalencia. Restas del tipo a - b = x. Ejemplo:

```
 7 -      13 -
 2         9
----      -----
```

Se presentaron ejercicios de sumas y de restas del tipo a + b = X y a - b = X (siendo X la incógnita) en el círculo del 100. Ejemplo :

```
47 +    130 -
15       37
----    -----
```

Se presentaron ejercicios de sumas y restas del tipo a + b = X y a - b = x (siendo x la incógnita) en el círculo del 10.000. Ejemplo:

```
4384 +      7305 -
1937        3896
------      -------
```

	GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
1.4 EJERCITACION ALGORITMICA DE LA SUMA Y LA RESTA COMO PROCESO REVERSIBLE.		Se presentaron ejercicios de sumas y restas del tipo a+x=c y a-x=c en los cuales el alumno debía calcular o uno de los sumandos, o el minuendo o el sustraendo faltantes. También se dio el caso en que debía completar una o más cifras en una de las cantidades dadas. Ejemplo: 7 4 2 - 1[ ]3 -------- [ ]7[ ]	Se presentaron diferentes sumas y restas en el círculo del 1000, en las cuales el alumno debía calcular o uno de los sumandos, o el minuendo o el sustraendo faltantes, según fuera la operación. También se dio el caso en que debía completar uno o más cifras en una de las cantidades dadas. Ej: [ ] 3 4 [ ] + [ ] 6 8 9 ------------------ 4 [ ][ ] 4
1.5 RESOLUCION DE PROBLEMAS CON EL ESQUEMA ADITIVO DIRECTO	Se plantearon problemas sencillos en los que para su solución se utilizaban operaciones del tipo a+b=x con cifras en el círculo del 10. Ejemplo: Tienes 8 confites. Te comes 5. ¿Cuántos confites te quedan?	Se plantearon problemas de suma y resta en los que para su solución se requiere una operación del tipo a+b=x y a-b=x. Las cantidades se presentaron en el círculo del 100. Ejemplo: En una caja hay 42 tomates y agregaron 67. ¿Cuántos tomates hay en la caja?	Se presentaron problemas de suma y resta en los que para su solución se requiere una operación del tipo a+b=x y a-b=x. Las cantidades se presentaron en el círculo del 1000. Ejemplo: Un señor consignó en el banco, el lunes $39.567 y el martes $13.576. ¿Cuánto dinero guardó?
1.6 RESOLUCION DE PROBLEMAS CON EL ESQUEMA ADITIVO INVERSO	Se presentaron problemas que implicaban la comprensión del esquema reversible. Las operaciones eran del tipo a+x=c y las cifras en el círculo del 10. Ejemplo: Tienes 9 confites. Te comes algunos y te quedan 5. ¿Cuántos confites te comiste?	Se presentaron problemas que implicaban la comprensión del esquema reversible, en los que su solución requería de operaciones del tipo a+x=c y a-x=c. Las cantidades están presentadas en el círculo del 100. Ejemplo: ¿Cuántas gallinas tenía un señor si vendió 253 y le quedaron 178?	Se presentaron problemas que implicaban la comprensión del esquema reversible y la utilización de operaciones del tipo a+x=c y a-x=c, cuyas cantidades están presentadas en el círculo del 1000. Ejemplo: En un estadio hay 23.740 aficionados. Al llegar otros se completaron 45.000. ¿Cuántos aficionados llegaron?

2. ESQUEMA MULTIPLICATIVO

2.1. SIGNIFICADO DE LA MULTIPLICACION

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
Se evaluó la comprensión del concepto "tantas veces" a partir de ejercicios en los que el niño debía representar gráficamente una misma cantidad varias veces, en el círculo del 10. Representar simbólicamente con la operación multiplicación una suma de sumandos iguales. Escribir el resultado de una multiplicación expresada bajo el concepto veces y cuyo resultado está contenido en el círculo del 20. Finalmente escribir el resultado de una multiplicación expresada con el signo X.	Se evaluó la comprensión del concepto "tantas veces" a nivel gráfico y simbólico, a través de ejercicios que representaban gráficamente varios grupos cada uno con el mismo número de elementos; sumas sucesivas las cuales debían representarse a partir de una multiplicación dando el resultado. Además se presentaron multiplicaciones para que fueran representadas con una suma sucesiva.	Se evaluó la comprensión del concepto "tantas veces" a partir de un enunciado (con palabras) para que el alumno lo representara gráficamente. En otro item se propuso una representación gráfica y se le pidió al alumno simbolizarla por medio de una suma; por último se expresa en forma simbólica una suma de sumandos iguales que el alumno debe escribir como multiplicación o viceversa.

2.2. SIGNIFICADO DE LA DIVISION

Se evaluó mediante actividades en las que el niño debe repartir una cantidad dada en forma gráfica, contenida en el círculo del 20, entre varios grupos de tal forma que a cada uno le corresponda igual cantidad. Repartir una cantidad dada, también en forma gráfica, de a n cantidad para cada grupo. Ejemplo: Reparte 12 colores entre tres niños. Reparte 18 naranjas de a 6.	Los conceptos "repartir de a y entre" se evaluaron solicitando al niño repartir de a y entre una cantidad presentada gráficamente y escribir su resultado.	Se pide a los niños a partir de un enunciado repartir de a y entre varias cantidades dadas en forma simbólica (generalmente números pequeños porque lo que se pretendía era evaluar el significado y no el algoritmo de la división).

2.3 EJERCITACION ALGORITMICA COMO PROCESO DIRECTO

	Se evaluó a partir de ejercicios en los que para su solución se requiere de una operación del tipo de $a.b=x$ y $a÷b=x$, en el círculo del 100 y en forma vertical.	Se evaluó a partir de ejercicios en los que para su solución se requiere de una operación del tipo $a.b=x$ y $a÷b=x$ en el círculo del 1000 y en forma vertical.

2.4 EJERCITACION ALGORITMICA COMO PROCESO REVERSIBLE

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
	Se evaluó a partir de ejercicios en los que para su solución se utiliza una operación del tipo $a.x=c$ (La incógnita puede ser el multiplicando o el multiplicador según la forma convencional de la multiplicación). $a \div x=c$, $x \div b=c$ o también algoritmos donde la incógnita es el residuo parcial.	Se evaluó a través de multiplicaciones de la forma $a.x=c$ (la incógnita puede ser el multiplicando o el multiplicador según la forma convencional de la multiplicación, también puede ser todo el número o cifras de él). Ejercicios de divisiones del tipo $a \div x=b$, $x \div b=c$, o también algoritmos donde la incógnita es el residuo parcial, además cuando la incógnita es el dividendo (o el divisor) y el "término" desconocido puede ser la totalidad o algunas de sus cifras.

```
   4 [ ] 7 x        149 |[ ]
     3 [ ]              |-----
  ----------          2 | 21
   [ ] 7  4
 1 3[ ][ ]
---------------
 1[ ]8 [ ] [ ]
```

2.5 RESOLUCION DE PROBLEMAS DEL ESQUEMA MULTIPLICATIVO

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
	Se presentaron problemas directos en los que para su solución se requiere de una operación del tipo $a.b=x$ $a \div b=x$, cuyas cantidades están dadas en el círculo del 100. Ejemplo: ¿Cuánto cuestan 9 cuadernos a $460 cada uno?	Se presentaron problemas directos en los que para su solución se requiere de una operación del tipo $a.b=x$ y $a \div b=x$, cuyas cantidades están dadas en el círculo del 1000.

2.6 RESOLUCION DE PROBLEMAS DEL ESQUEMA MULTIPLICATIVO (PROCESO REVERSIBLE)

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
	Se presentaron problemas que para su solución requiere del algoritmo inverso y cuyo tipo de operación es $a.x=c$ $a \div x=c$ $x.b=c$ $x \div b=c$, cuyas cifras están dadas en el círculo del 100. Ejemplo: ¿Cuántos borrados puede una señora con $738, si cada uno cuesta $123?	Se presentaron problemas que para su solución requieren del algoritmo inverso y cuyo tipo de operación es $a.x=b$, $a \div x=c$, $x.b=c$, $x \div b=c$, cuyas cifras están dadas en el círculo del 1000.

5.2.3.2 PRUEBA FINAL

1. ESQUEMA ADITIVO

1.1 CONTEO: ORDINALIDAD.

GRADO 1°

Se propusieron varios números en el círculo del 100 para que el niño los organizara de menor a mayor. Otros números para organizar de mayor a menor.

También se presentaron diferentes grupos en forma gráfica para ser ordenados de mayor a menor y de menor a mayor.

Se evaluó a nivel simbólico y gráfico para descartar que los niños establecieran el orden más por un aprendizaje mecánico de la serie numérica que por el establecimiento de las relaciones de orden.

GRADO 3°

Dentro del proceso de conteo se evaluó nuevamente la ordinalidad a través de la construcción de escalas ascendentes que a diferencia de la prueba inicial, requerían para su construcción descubrir la regla de formación teniendo en cuenta los datos anteriores y posteriores de la misma serie. Su nivel de complejidad radica en que no es suficiente recurrir a la tabla de multiplicar para completarla sino que se debe buscar las relaciones existentes entre los números componentes de la serie para su solución. Ejemplo:

20	26		38				64

GRADO 5°

Se evaluó exclusivamente con items que contenían secuencias numéricas cuya ley de formación debía ser deducida por el alumno. Ejemplo:

132	120		96		72		

1.2 COMPOSICION Y DESCOMPOSICION ADITIVA . PROCESO DIRECTO Y REVERSIBLE.

GRADO 1°

Al igual que en la prueba inicial los ejercicios dan cuenta de la relación de las partes con el todo pero a diferencia de la prueba, están expresados en un nivel de representación simbólica y con cantidades numéricas mayores.

[ ] + 25 = 68

[ ] - 8 = 13

Los ejercicios son del tipo a+b=x, a+x=c, x+b=c, a-x=c, x-b=c en los que se debe encontrar el valor de la variable x para que se dé la igualdad.

GRADO 3°

Se presentaron ejercicios con cifras de números en el círculo del 1000 en donde dado el todo y una parte se debía buscar las otras partes ya fuera uno de los sumandos, o el minuendo o el sustraendo. Se retomaban operaciones del tipo:

a+x=c, a-x=c, a+b=c, x-b=c

GRADO 5°

Se presentaron ejercicios con cifras en el círculo del 10.000 en donde dado el todo y una parte o el todo solamente se debía buscar las partes faltantes a partir de la operación reversible y retomando operaciones del tipo:

a+x=c, x+b=c, a-x=c, x-b=c, x+x=c

1.3 EJERCITACION ALGORITMICA COMO PROCESO DIRECTO (GRADO 1o.) Y REVERSIBLE

GRADO 1°

PROCESO DIRECTO

Se presentaron sumas y restas de números de el círculo del 100. Para resolver cada operación se debía aplicar el esquema de sustitución o el de equivalencia según la operación. En otras operaciones no.

Para evaluar la aplicación del esquema reversible en cualquiera de las dos operaciones se presentaron ejercicios en los que el niño debía calcular uno de los componentes de la operación o completar una o más cifras de las cantidades dadas.

GRADO 3°

COMO PROCESO INVERSO

Se presentaron ejercicios de sumas y restas en los cuales el alumno debía calcular uno o más sumandos, el sustraendo o el minuendo.

También se dio el caso que debía completar una o más cifras de los componentes de las operaciones. A diferencia de la prueba inicial las cifras que componían cada algoritmo eran números en el círculo del 1000.

GRADO 5°

Se disponen diferentes sumas y restas en las cuales el alumno debe calcular uno o más sumandos faltantes o el minuendo o el sustraendo. También se dio el caso que debía completar una o más cifras de los componentes de la operación.

1.4 RESOLUCION DE PROBLEMAS QUE REQUIEREN DEL ESQUEMA ADITIVO INVERSO

GRADO 3°

Se presentaron problemas en los que para su solución se requería de realizar operaciones del tipo $a+x=c$, $x+b=c$; $a-x=c$ $x-b=c$, las cifras se presentaron en el círculo del 1000 y en un nivel mayor de complejidad en sus planteamientos.

GRADO 5°

Se presentaron problemas de suma y de resta en los que para su solución se requería de realizar operaciones del tipo $a+x=c$, $x+b=c$; $a-x=c$, $x-b=c$, las cifras se presentaron en el círculo del 10.000 y con un mayor nivel de complejidad en su planteamiento.

```
  6 [ ] 8 [ ] 4 +
    [ ] 9  7  2
  [ ] 8  6  5 [ ]
5 [ ] 6 [ ][ ][ ]
--------------------
[ ] 4 [ ] 8 [ ] 1
```

2.ESQUEMA MULTIPLICATIVO

2.1 SIGINIFICADO DE LA MULTIPLICACION

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
Se evaluó a partir de los problemas correspondientes al item 2.5.	Se evaluó la comprensión del concepto "tantas veces" desde lo simbólico a través de ejercicios que representaban una suma sucesiva la cual debía ser representada con una multiplicación y una multiplicación para ser representada como suma.	Se evaluó la comprensión del concepto "tantas veces" desde lo simbólico con items de dos tipos: dada una suma de sumandos iguales expresarla como una multiplicación y dada una multiplicación expresarla como suma sucesiva.

2.2 SIGNIFICADO DE LA DIVISION

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
La comprensión de los conceptos repartir "de a" y "entre" se evaluó a través de problemas sencillos. Ejemplo: Si repartes 27 confites de a 9 para cada niño. Para cuántos niños alcanza?	La comprensión de los conceptos "repartir de a" y "entre" se evaluó a través de problemas simples del tipo $a \div b = x$ en cuyo texto aparecían ambos conceptos, a diferencia de la prueba inicial que era en forma gráfica.	La comprensión de los conceptos "repartir de a" y "entre" se evaluaron con problemas directos que requerían para su solución algoritmos de la forma $a \div b = x$ y en cuyo texto aparecen dichos conceptos.

2.3 EJERCITACION ALGORITMICA DE LA DIVISION COMO PROCESO DIRECTO Y REVERSIBLE

GRADO 1°	GRADO 3°	GRADO 5°
	Se evaluó con divisiones del tipo $a \div b = x$ cuyo divisor era de una y dos cifras. Las cantidades del dividendo eran en el círculo del 100.	Se evaluó a partir de divisiones del tipo $a \div b = x$ con divisor de una, dos y hasta tres cifras.
	El algoritmo inverso se evaluó a partir de ejercicios de la forma $a \div x = c$, $x \div b = c$; donde en cada componente hay uno o varios términos desconocidos. Pueden ser el dividendo, el divisor, el cociente o el residuo. Las cifras están dadas en el círculo del 1000.	El algoritmo inverso se evaluó a partir de divisiones donde hay uno o varios términos desconocidos, requiriendo de utilizar el tipo de operación $a \div x = c$, $x \div b = c$. Las cifras faltantes pueden ser el dividendo, el divisor, el cociente o el residuo. Presentan un grado de dificultad que se aumenta gradualmente de acuerdo con el número de cifras del divisor.

2.4 EJERCITACION ALGORITMICA DE LA MULTIPLICACION COMO PROCESO REVERSIBLE.

GRADO 1°

GRADO 3°

El algoritmo inverso de la multiplicación se evaluó a partir de ejercicios que exigían determinar uno de los factores, ya sea todo el número o cifras de él. Los términos desconocidos también pueden ser los productos parciales. También hay items en los cuales se deben calcular cifras del producto total desconociendo algunos del multiplicando o el multiplicador.

GRADO 5°

El algoritmo inverso de la multiplicación se evaluó a partir de ejercicios que exigían determinar uno de los factores, ya sea todo el número o cifras de él. Los términos desconocidos también pueden ser los productos parciales, también hay items en los cuales se debe calcular cifras del producto total desconociendo algunos del multiplicando o el multiplicador. A diferencia de la prueba de 3o., las cifras dadas estaban con el círculo del 10.000. Ejemplo:

```
      4 8 [ ]
        [ ] 9
------------------
   [ ][ ][ ] 7
[ ][ ] 1 [ ]
------------------
[ ][ ][ ][ ] 7

[][ ] 6 [] 5 9
   1[ ]    8[]8[]
    [ ][ ]
       7 5
        [ ]
```

2.5 RESOLUCION DE PROBLEMAS QUE IMPLIQUEN EL ESQUEMA MULTIPLICATIVO.

Grado 1°: Se evaluó a partir de problemas sencillos que requieren del algoritmo directo o reversible. Ejemplo: Una señora compra 120 pesos en bananos. Si cada banano cuesta $40. Cuántos bananos compra?

Grado 3°: Se presentaron problemas que para su solución requieren de la aplicación del algoritmo directo o reversible. Ejemplo: Un señor empacó 3.680 confites en 23 bolsas. Cuántos confites echó en cada una?

Grado 5°: Se presentaron problemas que para su solución requieren de la aplicación del algoritmo directo o reversible.

5.2.4 Metodología de aplicación de las pruebas: Las pruebas se aplicaron en diferentes sesiones, variables en número y duración de acuerdo con el grado.

Para primero fueron seis sesiones aproximadamente, con un tiempo promedio de 30 a 40 minutos por sesión. En los grados tercero y quinto fueron cuatro sesiones con 60 minutos de duración cada una.

La mitad de las sesiones se ocuparon en las preguntas sobre el esquema aditivo. El resto correspondió a la evaluación del esquema multiplicativo. El horario para la ejecución de las pruebas se programó dentro de la jornada escolar institucional. Para los alumnos de primero y tercero en la mañana, los de quinto durante las horas de la tarde. Para evitar que el cansancio fuese un factor que afectara el rendimiento de los niños, las sesiones se realizaron siempre a primera hora.

La prueba constó de un cuestionario multicopiado de ocho páginas que fueron entregadas una a una para su 'resolución. Las hojas estaban escritas por una sola cara y con la sugerencia, para los niños, de emplear el respaldo para efectuar procedimientos, cuando el espacio dejado no era suficiente.

Es pertinente señalar que en las pruebas de primero, una de las profesoras leía los enunciados de las diferentes preguntas en voz alta y empleaba el tablero para una mejor comprensión de los textos. Además, las otras dos educadoras brindaban una asesoría individual para estar seguras de que los alumnos entendían las preguntas.

Como se deduce del párrafo anterior, tres personas estuvieron presentes en la aplicación de las pruebas, esto permitió un mejor control de su ejecución individual y facilitó anotaciones importantes sobre su desarrollo.

En el transcurso de presentación de las pruebas en los grados tercero y quinto los profesores se limitaron a absolver dudas relacionadas con la comprensión de los enunciados sin proporcionar información conducente a la solución de las diferentes tareas.

5.2 ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Los resultados de la evaluación serán presentados en el mismo orden en el que se han definido las diferentes categorías conceptuales al interior de los dos esquemas básicos, aditivos y multiplicativos.

Con base en las respuestas dadas por los niños en la evaluación inicial y final, se hizo una descripción y análisis de las estrategias utilizadas por cada uno en la resolución de las diferentes tareas. Los niños se fueron agrupando alrededor de las estrategias procedimentales que iban caracterizando la solución de cada una de las actividades lo que permitió detectar respuestas típicas en la mayoría de los casos.

Se hizo además un análisis comparativo entre el tipo de estrategia utilizados en ambos momentos de la evaluación para así dar cuenta de la movilización o sea la cualificación o no de los esquemas lógico-matemáticos luego de un proceso de intervención pedagógico.

5.3.1 Grado primero

5.3.1.1 ESQUEMA ADITIVO

CONTEO

Cardinalidad: En la asignación del cardinal los niños recurren al conteo iterativo de todos los elementos, señalando con el lápiz el orden a seguir. En el procedimiento inverso, es decir, cuando se pide asignar

la cantidad que le corresponde a un cardinal dado, se da un único procedimiento que es: identificado el cardinal, los niños proceden a representar dicha cantidad con bolitas.

Para averiguar si realmente las niñas han interiorizado comprensivamente esta relación se propusieron otro tipo de tareas que requerían la aplicación del esquema reversible, es decir los niños encuentran la relación por complemento o diferencia, por ejemplo dado el No. 7 y asignado a una cantidad que no le corresponde bien sea porque tiene más o porque tiene menos elementos, los niños encuentran la correspondencia quitando los que sobran (tachándolos) o agregando los que hacen falta.

En este punto nos dimos cuenta que no todos los niños dominan el nivel escritural de los números ya que se presentan algunas alteraciones como inversión o escritura en espejo del 7 y el 5 cambios de un número por otro, el
4 por el 9, inversión del orden en, el 10 por ejemplo lo escribieron 01.

Evaluado este esquema en la prueba final, pero a un nivel superior de dificultad y generalización, se observa que hubo movilización del esquema ya que todos los niños,

excepto dos reconocen el significado de los números, mayores que 10 y menores que 100 al dar cuenta del valor posicional, es decir en el 52 reconocen que el cinco equivale a 5 grupos de 10 y que el dos equivale a dos unidades.

Durante el proceso de intervención los niños logran construir el sistema de decenas sobre el sistema de unidades de una manera comprensiva, y partiendo del de las unidades que como lo muestra la evaluación ya han comprendido.

Seriación

En el establecimiento de la relación de orden entre diferentes cantidades, dadas en forma gráfica, los niños hacen uso de diferentes procedimientos.

En un primer bloque ubicamos a la mayoría de los niños,
11 en total que ubican las diferentes cantidades en una relación de orden ascendente comenzando por ubicar el grupo de menor cantidad y continuando así hasta el final, es decir de los grupos restantes buscan el menor.

En un segundo bloque ubicamos a los niños que realizan un ordenamiento parcial utilizando también, diferentes estrategias. Por ejemplo, un niño ordena únicamente los grupos menores que seis, el de 3, 4 y 5, los demás los colocan sin ningún criterio. Este niño logra establecer la relación de orden únicamente con iguales cantidades cuya diferencia es posible establecer a nivel perceptivo, no relaciona las cantidades del 7, 8 y 9 que exigen realizar un conteo para establecer la diferencia. En este niño predomina las relaciones de orden más desde lo perceptivo que desde la reflexión lógica.

Otro niño ubica el grupo menor y el mayor y los demás en forma arbitraria entre los dos anteriores. Como en el caso anterior en este niño también predomina la percepción.

Y en un tercer bloque ubicamos a cuatro niños que se limitan a hacer una copia del modelo sin intentar ninguna estrategia de ordenamiento.

Estos seis niños ubicados en los bloques dos y tres aunque reconocen la correspondencia cantidad - cardinal en el círculo del 10 no logran establecer la relación de orden entre dichas cantidades fundamentalmente cuando la actividad le exige al niño el esquema de reversibilidad por reprocidad en las acciones concretas.

Los niños no relacionan una misma cantidad con otras que son mayores y con las que son menores para ubicarlas en un orden.

Sin embargo ante la tarea de establecer la relación de orden entre varios números menores que 10 ubicamos a los niños en dos bloques.

En el primero estarían 15 niños que establecen dicha relación, y en un segundo bloque estarían dos niñas que colocan los grupos en forma arbitraria sin considerar la relación de orden.

Analizando las respuestas de los niños que ubicamos en el primer bloque nos encontramos que algunos realizan la tarea de ordenar los números 3-7-2-4-6-9 comenzando con
el que indica menor cantidad así: 2-3-4- ______________ -6-7-
____-9.

Vemos como hay una reproducción más mecánica que reflexiva de la serie en el sentido que esta existe en la mente del niño como una serie de números que va uno después del otro y no en relación.

Con esto reafirmamos la conclusión de que en el establecimiento de relaciones de orden en este caso por diferencia de cantidades en algunos niños predomina la percepción o el aprendizaje mecánico sobre el razonamiento lógico.

En la prueba final ante la propuesta de ordenar cantidades dadas gráficamente pero ahora en el círculo del 20 y de ordenar también números en el círculo del 100 encontramos los siguientes tipos de respuestas:

1. Doce niños realizan el ordenamiento en forma ascendente y descendente utilizando el mismo procedimiento que en la prueba inicial, en el bloque uno también logran establecer la relación de orden entre los números.
   Comparativamente con los resultados de la prueba inicial hay una cualificación del esquema que se manifiesta, en la comprensión de la relación de un elemento de una serie en ambos sentidos.
   Se descarta la aplicación de un conocimiento mecánico para la realización de la tarea ya que los niños no recurren, en ningún momento, a enumerar uno

a uno los números de la serie como lo hacían en la prueba inicial.

2. En este segundo tipo de respuestas ubicamos a tres niños que colocan en orden ascendente tanto las cantidades dadas gráficamente como los números pero no realizan la acción contraria de ordenarlas en forma descendente. Algunos, entonces repiten el ordenamiento y otros los colocan arbitrariamente sin tener en cuenta ninguna relación.

   Parece que ante la situación de realizar una tarea en ambos sentidos, de ida y vuelta, estos niños realizan una o la otra pero no ambas manifestando con esto la no reversibilidad operatoria en las relaciones de orden.

   Y finalmente un niño no intenta ninguna estrategia en ambas tareas.

COMPOSICION Y DESCOMPOSICION ADITIVA.

Ante la tarea de encontrar varias formas de descomponer una cantidad que se les presenta en forma gráfica, por ejemplo dado un grupo con nueve elementos, bolitas en este caso, los niños deben encontrar todos los subgrupos posibles en que se pueda descomponer. Emplean las siguientes estrategias:

1. Nueve niños, encuentran las tres formas diferentes de descomposición que se les solicita así: 9= 4+5, 9= 7+2 y 9 = 6 + 3, lógicamente que a nivel gráfico los niños señalan en el total una parte por ejemplo en el primer grupo de nueve marcan con el lápiz siete bolitas y las representan en un subgrupo aparte y luego representan en el otro subgrupo las restantes formando así la igualdad.

   En la realización de la acción contraria que sería encontrar el todo a partir de los subgrupos o las partes, así: dadas dos cantidades 3 y 5 representadas gráficamente los niños deben reunirías en un grupo para hallar el total.

   Estos niños cuentan una parte y la representan en el lugar del grupo total, luego cuentan la otra parte y la representan en el total y finalmente realizan el conteo de todo el grupo formado.

   Vemos como no realizan un conteo completo en ambas partes para luego hacer la representación del total en un sólo paso.

   Y en la última tarea de este bloque que reviste un carácter de una reversibilidad más compleja como es el encontrar una parte dados el total y la otra por ejemplo; 4 + C] = 7 pero a un nivel gráfico. Estos niños señalan con el lápiz en el total la parte conocida y lo que les queda sin señalar lo representan en el lugar correspondiente.

Se observa como estos niños comprenden la relación de las partes y el todo pero en presencia del material concreto y que le permita ejercer una acción directa. Aún no han interiorizado esta acción, no existe aún a nivel de operación el esquema que les permita comprender la relación de las partes con el todo es decir la reversibilidad por inversión aún no se ha vuelto mental totalmente pero si aparece a nivel práctico en las acciones concretas.

2. En un segundo tipo de estrategias ubicamos a los otros ocho niños que realizan parcialmente la tarea ya que para realizar las descomposiciones hacen los siguiente:

   9= 4+5, 9= 5+4 pero a nivel gráfico solamente encuentran una manera de realizar las descomposiciones y las demás son repetidas. Pero todos, excepto dos niños realizan las composiciones de un número a partir de las partes aplicando la estrategia correspondiente al primer tipo.

   Y en la última tarea de encontrar una parte a partir del total y la otra parte unos repiten la parte dada así: retomando el ejemplo anterior 4 + [ ] = 7 representan otra vez el cuatro y otros niños representan arbitrariamente cualquier cantidad. Ninguno verifica si la igualdad se cumple.

En las acciones concretas estos niños no establecen la relación entre el todo con las partes, no reconocen el subgrupo como parte del grupo total sino como otro total.

En general encontramos niños que en la realización de acciones con cantidades establecen las relaciones del todo y las partes componentes aunque sin alcanzar aun el plano de lo simbólico en el que es posible considerar al mismo tiempo las partes y el todo y otros niños que en la realización de las acciones con cantidades no establecen dicha relación básicamente cuando la tarea le exige un pensamiento reversible.

En la evaluación final encontramos que la mayoría de los niños realizan composiciones y descomposiciones en el circulo del 50. Por ejemplo:

[ ] + [ ] = 36 ante la tarea de encontrar los números que permitan conservar la igualdad. Dos niños tienen en cuenta el valor posicional y responden 30 + 6, otros 20 + 16. Solamente un niño encuentra otros dos números que también conservan la igualdad así; 21 + 15 = 36.

Solamente dos niños no aplican ninguna estrategia, uno repite el número dado y el otro escribe arbitrariamente dos números.

En este mismo campo de las composiciones y descomposiciones numéricas, ante la tarea de encontrar una parte, dado el total y la otra parte como en el siguiente caso [] + 25 = 68 en la que se debe encontrar el valor de la "variable cuadro". Los niños recurren a las siguientes variables:

13 niños resuelven la igualdad por complemento.

En el ejemplo cuánto le falta a 25 para ser igual a 68 utilizan el conteo de 10 en 10, o realizan un cálculo aproximado.

Lo anterior indica como los niños han alcanzado niveles más avanzados de comprensión del esquema de inclusión jerárquica y a un nivel de representación simbólica sin la necesidad en la mayoría de los casos de utilizar el referente concreto de rayitas o bolitas. Sin embargo al utilizar dicha estrategia también indica como los niños si bien reconocen la relación parte todo aun su pensamiento no es lo suficientemente móvil o reversible como para deducir operaciones que no están indicadas. En el ejemplo que venimos analizando [] + 25 = 68, aunque la tarea exige de la acción reversible los niños recurren a la acción directa que esté indicada en dicha representación.

No deducen la operación inversa, en este caso la resta, que subyace a dicha representación.

Y finalmente dos niños no aplican ninguna estrategia, repiten o colocan arbitrariamente los números.

EJERCITACION ALGORITMICA

Algoritmo de la suma: Ante la propuesta de realizar sumas sencillas en el círculo del 20 los niños recurren a diferentes estrategias:

1. Tres niños realizan las sumas haciendo un "conteo parcial" (Serrano) es decir parten del primer sumando y utilizando el apoyo concreto de los dedos le agregan uno a uno el segundo sumando y escriben el total.
2. Otros tres niños resuelven las sumas realizando un "conteo total" (Serrano) con el apoyo concreto de las rayitas, veamos un ejemplo:

Al niño se le presenta: 8+
7

El niño responde 8+
7

oooo

oooo

oooo

ooo

15

Vemos como los niños representan el primer sumando, luego el segundo y finalmente hacen el conteo de todas las bolitas para encontrar el resultado y escribirlo en números.

3. Seis niños cambian la forma en que se les ha presentado la suma que es la vertical por la horizontal.

   Veamos:

Se les presenta 8 +
                 7

Los niños responden 8 + 7 =
                 7

Dos de estos niños realizan un cálculo inadecuado en las sumas cuyo resultado es mayor que 10 y utilizan el apoyo concreto de las rayas o los dedos.

Y un niño al efectuar el cambio para la forma horizontal como solamente encuentra un sumando entonces lo repite para poder efectuar la operación, el cálculo también es incorrecto.

Obsérvese que aunque los niños empleen estrategias diferentes para resolver las sumas reconocen el significado del algoritmo ya que realizan la acción indicada en la representación.

A medida que avanzamos en la evaluación nos damos cuenta que la comprensión que logran los niños de nuevos contenidos depende de estructuras o contenidos básicos previamente construidos. Es lógico entonces que si los niños no han construido a nivel mental o simbólicamente la relación de las partes y el todo utilicen las estrategias descritas.

Vemos entonces como:

Al utilizar los niños un conteo total dan cuenta de que no hay una conservación mental de cantidades en la relación de agrupar, es decir, los niños no logran retener en la mente una cantidad para a partir de ella continuar el conteo de la otra cantidad que se agrega.

Igualmente el apoyo concreto nos muestra la no interiorización de las operaciones. El cambio en la representación simbólica se explica porque a este nivel el pensamiento no se ha hecho lo suficientemente flexible para generalizar un conocimiento a situaciones diferentes en que se puede aplicar dicha información.

Finalmente cinco niños no utilizan ninguna estrategia.

En la evaluación final recordemos que la indagación sobre el algoritmo de la suma, en este punto se hizo con números en el círculo del 100, algoritmo directo e inverso con o sin aplicación del esquema de sustitución.

Los niños recurren a los siguientes procedimientos:

Ocho niños reconocen parcialmente el algoritmo ya que no aplican el esquema de sustitución. Veamos un ejemplo:

Se presenta	48 +
	26
Respuesta	48 +
	26
	64

Seis niños dan esta respuesta. Realizan un cálculo correcto, pero aun no han comprendido la forma de aplicar el esquema de sustitución en la suma olvidándose de la cantidad que "lleva", en este caso una decena.

Otros dos niños hacen lo siguiente:

```
48 +
26

614
```

A diferencia de los anteriores, estos niños no olvidan las decenas pero tampoco aplican adecuadamente la sustitución y además no tienen presente el valor posicional.

En ambos casos observamos como los niños aunque han construido el sistema de decena a partir de la unidad no han elaborado e interiorizado la forma en que se

I

relacionan no sólo en el conteo iterativo sino en las operaciones, en este caso la suma.

En las sumas del tipo a + x = c o sea que requieren la aplicación del esquema reversible por ejemplo:

```
[ ] 7 +
 1 [ ]
------
 6 2
```

Encontramos que: Seis niños no intentan ninguna estrategia y dos niños completan los cuadros así:

[7]7 + 1[9] **6 2**	C5]7 + 1[9] **6 2**

En el primer caso el niño recurre a la resta ya que parece que su razonamiento es que no hay un número que sumado al 7 de como resultado 2 pero si puede encontrar un número que al quitarle 7 de como resultado 2 invirtiendo además el orden en los términos de la resta, sin ser lo suficientemente claro porque no asume el 7 como el total y en vez del 9 haber colocado el 5 V continúa aplicando la resta en las decenas y encuentra el número que al restarle 1 obtenga la diferencia de 6. Y en el segundo caso comienza utilizando el mismo procedimiento que el anterior pero al operar con las decenas realiza la suma.

Vemos como dos niños no conservan el significado de la operación que está indicada. Ante la primera dificultad recurren a cualquier estrategia que les permita llegar a •ia respuesta así no sea "lógico", no reconocen la operación planteada entre dos cantidades, asumiendo cada cifra como un total aparte cuando la dificultad así se lo exige, no conservando la relación del todo y las parlas.

Como dijimos antes estos niños reconocen parcialmente el algoritmo de la suma aplican únicamente el procedimiento directo y en los casos en que se requiere de la reversibilidad operatoria no comprenden el procedimiento que les permita encontrar la respuesta adecuada.

Otros siete niños reconocen el algoritmo como procedimiento directo. Aplicando correctamente el esquema de sustitución pero en el procedimiento que implica la reversibilidad solamente 3 lo reconocen.
Veamos algunos casos.

Retomando el ejemplo anterior los niños responden:

[4] 7	[ ]	[5]
+ 1	7 +	7 +
[5]	1 [	1 [
	-	

En el primer caso encontramos tres niños que comprenden el algoritmo de la suma como procedimiento directo e indirecto manifestando así la construcción comprensiva de la reversibilidad operatoria.

En el segundo caso, tres niños manifiestan no reconocer el algoritmo como procedimiento reversible.

Y finalmente un niño, en el tercer caso resuelve la suma con las decenas únicamente ya que no le exigen un pensamiento reversible-

Y para terminar dos niños no reconocen el algoritmo uno escribe como resultado uno de los sumandos y el otro no intenta ninguna estrategia.

A diferencia entonces de la evaluación inicial las respuestas son diferentes y se han cualificado en varios sentidos: Se recurre a diferentes estrategias que dan cuenta de la búsqueda de la respuesta.

En el campo de la representación comprenden la presentación vertical, operan con números aunque recurren al apoyo de los dedos para efectuar el cálculo, el reconocimiento parcial del algoritmo y en algunos la mayor comprensión de procesos reversibles.

Algoritmo de la resta: Igual que en el algoritmo de la suma en esta parte de la tarea también los niños utilizan diferentes estrategias.

1. Ubicamos en este primer bloque a ocho niños que se aproximan a la resolución de la tarea, cuatro de ellos

recurren al conteo en los dedos, otro también recurre al apoyo concreto pero de las rayas, representando la cantidad mayor y señala lo que le va a restar y finalmente señala la resta.

Otro niño encuentra el resultado pero el cálculo es incorrecto en las restas cuyos términos son mayores que 10 y los otros dos solamente realizan las restas en el círculo del 9 y en los que los términos son mayores que 10 no. Es importante observar su respuesta;

Se le propone	14 - 8
Respuesta	14 - 8 13

Lo que hacen estos niños es sumar las cifras entre sí.

En este momento los niños reconocen el algoritmo de la resta cuando se les presenta con números menores que 10. Este conocimiento no es aplicado a situaciones diferentes como lo ilustra el ejemplo.

El niño no reconoce en el 14 una cantidad total sino dos cantidades 4 y 1 y por lo tanto considera que las puede sumar indicando con esto que no ha construido el significado de los números a partir del 10.

Los demás niños, nueve en total aunque utilizaron diferentes procedimientos dan cuenta de que no comprenden la representación simbólica de la resta.

Analicemos sus respuestas:

Tres niños escriben arbitrariamente cualquier número; otro aplica el esquema de la suma sin establecer ninguna diferencia entre los signos; otro coloca como resultado uno de los términos de la resta; otro representa gráficamente ambos términos y tres niños no intentan ninguna estrategia

En la evaluación final

Igual que en la suma se propone, la resta en el mismo nivel de dificultad anotado.

Los niños utilizan las siguientes estrategias:

Cinco niños reconocen el algoritmo de la resta cuando el procedimiento es directo. Aplican correctamente el esquema de equivalencia. Así, por ejemplo

53 - 27

26

Cuando el procedimiento es indirecto veamos lo que hacen:

6 [ ] -	6 [ ] -
2 5	2 5
[ ] 7	[ ]7

En el primer caso cuatro niños no recurren a ninguna estrategia y en el segundo, un niño opera únicamente con las decenas aplicando el procedimiento directo.

Concluyendo, entonces, que la operación no se ha construido como procedimiento reversible.

Otros cinco niños no reconocen el algoritmo.

Veamos sus respuestas:

79 -	53 -	53 -	53 -
36	27	27	27
15	24	3	710

En el primer ejemplo dos niños no diferencian el signo de la resta y proceden a aplicar un conocimiento previo que les es más "familiar". Suman las unidades y colocan el 5 como se debe "llevando" una decena. Suma las decenas sin tener en cuenta la cantidad que llevaba y coloca el 1 del 10.

Como lo decíamos en la suma estos dos niños no aplican el esquema de sustitución, además que no reconocen el significado del cero, en este tipo de relaciones.

En el segundo ejemplo un niño realiza la resta aplicando mecánicamente la regla que dice que "del número mayor resta el menor". Para el niño no es problema que este número mayor esté en el minuendo o en el sustraendo o sea que el niño no reconoce en el 53 una cantidad total sino dos cantidades aisladas, el 3 y el 5. Por eso en las unidades invierte los términos, y en las decenas no hay necesidad.

En el tercero un niño ante el conflicto de restar 7 de 3 no intenta ninguna estrategia y continúa con las decenas que no tienen esa dificultad y realiza la resta.

Y en el cuarto un niño, como los del primer ejemplo no diferencian el signo y efectúan una suma con una estrategia antes descrita en la categoría de ejercitación algorítmica de la suma.

Cuando el procedimiento es indirecto. Observemos las respuestas:

6 [ ] - 6 [11] - 2 5 2
5

[ ] 7 [4] 7

En el primer ejemplo encontramos cuatro niños que como dijimos anteriormente no utilizan así ninguna estrategia.

En el segundo ejemplo encontramos un niño que de su resta se puede decir lo siguiente:

Diferencia el signo de la resta.

No reconoce en ambos términos cantidades totales sino que cada cifra es una cantidad total independiente lo que le permite encontrar en el minuendo el número que falta, en este caso el 11. En otros términos no aplica el esquema de equivalencia, ni se deja afectar por el valor posicional y termina restando las decenas sin tener en cuenta ninguna variable.

Cuatro niños reconocen parcialmente el algoritmo de la resta como procedimiento directo.

Hacen lo siguiente:

53 -	**53 -**
27	**27**
36	**30**

En el primer caso tres niños para restar las unidades hacen el cambio requerido pero al restar las decenas no tienen en cuenta dicho cambio, no logran coordinar las dos variables a la vez.

En el segundo caso un niño como no puede aplicar la resta como él la sabe entonces suma las unidades y resta las decenas que no le representan ninguna dificultad.

Finalmente tres niños no reconocen el algoritmo.

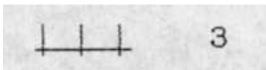
RESOLUCION DE PROBLEMAS

En la resolución de problemas directos del tipo a + b = x los niños utilizan las siguientes estrategias.

Partamos de un problema para tener una mejor ilustración.

Tienes 8 confites y te comes 5. Cuántos confites te quedan?

Once niños representan gráficamente los datos del problema, señalando la respuesta así:



No representan simbólicamente la operación, aunque cinco escriben la respuesta con números.

Los niños comprenden el problema logrando representar significativamente la acción que allí se sugiere.

Dos niños relacionan significativamente la operación que les permite encontrar la resta, y la representan simbólicamente o sea: 8 - 5 = 3

Otros dos niños lo hacen por cálculo mental. Realizan la acción mental pero no logran establecer la relación a nivel simbólico. Y dos niños no comprenden el problema- uno de ellos representa gráficamente uno de los datos y el otro no intenta ninguna estrategia.

En la prueba final se observa un logro significativo en cuanto al nivel de representación.

La mayoría de los niños (15) acceden a la representación simbólica y relacionan significativamente la operación que les permite encontrar la respuesta.

Dos niños no comprenden el problema.

Poco a poco los niños descubren la funcionalidad de la matemática para resolver situaciones cotidianas.

Resolución de problemas del tipo a + x = o

Para resolver los problemas que hemos denominado indirectos los niños utilizan las siguientes estrategias:

Partamos de un ejemplo.

Tienes unos confites. Te comes 2 y te quedan 4. Cuántos confites tenías?

13 niños dan cuenta que comprenden los problemas aunque utilizan diferentes procedimientos. Diez recurren a la representación gráfica así:

oo oooo

representan ambas cantidades y luego cuentan todo escribiendo la suma con números; dos niños lo hacen en cálculo mental escribiendo únicamente la resta y uno lo hace igual que los primeros pero haciendo un conteo parcial y con números, así: 1,2 3 4 5 6 deteniéndose en la respuesta.

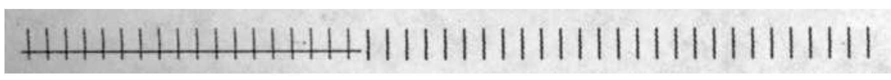
Con estas cantidades pequeñas y en una situación cercana y significativa los niños logran relacionar las partes y el todo para encontrar la respuesta.

En la evaluación final los niños se enfrentan a este tipo de problemas:

> De los tomates que había en la caja se vendieron 23 y quedaron 15. Cuántos tomates habían?
>
> En la tienda hay 45 pasteles. Después del recreo quedaron 18. Cuántos pasteles se vendieron?

Los niños acceden significativamente a la representación simbólica que permite hallar la respuesta, con apoyo concreto 13 niños representan gráficamente los datos y con este apoyo realizan la operación así:

En el segundo problema hacen lo siguiente:



$$45 - 18 = 27 \quad {}^{27}$$

El niño primero necesita realizar la acción que se sugiere en el problema para luego representarla a nivel simbólico. Es decir lo simbólico tiene significado en relación directa con el objeto que sería el paso inmediatamente anterior a la generalización simbólica.

Solamente un niño no requiere el apoyo gráfico para relacionar significativamente la operación y tres niños no intentan ninguna resta.

5.3.1.2 Esquema multiplicativo

- COMPRENSION DEL CONCEPTO TANTAS VECES

Como se dijo en la descripción de la prueba la tarea a la que se enfrentan los niños consiste en representar gráficamente una cantidad, n veces y realizar unas multiplicaciones simples enunciadas bajo el concepto veces.

En este nivel de primero se pretende, principalmente indagar la significación que tenga el niño del concepto veces; cómo lo entienden y cómo lo representan.

Veamos entonces las respuestas de los niños.

Ante la propuesta de, por ejemplo, representar con bolitas cinco veces tres o escribir el resultado de 2 veces 8 o 3 veces 5 seis niños representan gráficamente las cantidades y encuentran el resultado de las multiplicaciones recurriendo a la suma y con apoyo de los dedos es decir cuentan 2 veces el 8 en los dedos.

Cuatro niños que también realizan la representación gráfica en las multiplicaciones suman ambos términos así:
1 veces 4 = 6; lo mismo que hace otro niño que tampoco realiza las representaciones; otros tres, en cambio realizan parcialmente las multiplicaciones ya que encuentran el resultado en un sentido pero en el inverso no o sea que resuelven 2 veces 4 y no resuelven 4 veces 2.

Encontramos entonces en las diferentes respuestas de los niños una aproximación a la comprensión del concepto veces principalmente a nivel gráfico porque a nivel simbólico la mayoría no han comprendido el significado del "operador multiplicativo", es decir la forma cómo se relacionan los números en el esquema multiplicativo.

Es razonable entonces, encontrar niños que suman ambos términos; aplican un esquema comprendido a otra situación que le resulta conocida.

En la evaluación final aunque sabíamos que con los niños no se habían trabajado situaciones de aprendizaje que permitieran la construcción del esquema multiplicativo como contenido curricular pero que se habían realizado variadas situaciones del esquema aditivo volvimos a evaluar el concepto tantas veces a nivel gráfico, simbólico y en resolución de problemas. Veamos las respuestas de los niños:

Trece niños realizan las representaciones gráficas y las multiplicaciones. En éstas últimas utilizan el apoyo concreto de rayas en la hoja o el conteo en los dedos. Por ejemplo: 2 veces 9 = [18]

ooo ooo
ooo ooo
ooo ooo

Y los que utilizan los dedos realizan el mismo procedimiento sólo que retienen mentalmente el número de veces que van contando la cantidad.

Este procedimiento utilizado por los niños es mucho más claro en la resolución de problemas.

Partamos de un ejemplo para analizar las respuestas:

En la tienda hay 3 paquetes de zanahorias. Cada uno contiene 6 zanahorias. Cuántas zanahorias hay por todas?

En este tipo de problemas que corresponden al esquema a.b=x todos los niños excepto dos representan gráficamente el número de grupos que indica el problema y el número de elementos que indica cada grupo; contando estos para encontrar la respuesta así:

0OOOO0   O0OO0O   OOO00O

De estos niños 11, además, representan simbólicamente la suma de 6+6+6=18

De estas respuestas se puede afirmar que:

- Los niños comprenden los problemas.
- Recurren a la representación gráfica como apoyo significativo que le permite relacionar una operación, en este caso la suma.

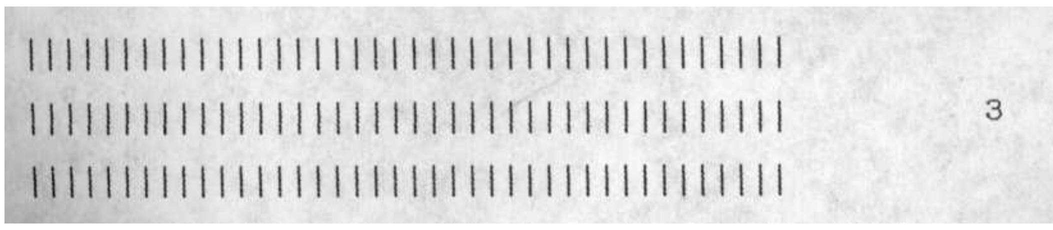
> Los niños comprenden el concepto básico del esquema multiplicativo en relación con el esquema aditivo sin lograr aun la significación simbólica de dicha relación multiplicativa.

En los problemas del tipo a.x=c encontramos.

Retomemos un ejemplo:

Una señora hace una compra por $120. Si cada artículo que compra cuesta $40. Cuántos artículos compró?

Cinco niños representan gráficamente la cantidad total, separan dicha cantidad en grupos de a 40 y finalmente cuentan los grupos para dar la respuesta, o sea:



Uno de estos cinco niños representa simbólicamente la suma 40 + 40 + 40. Nueve niños recurren a la suma para encontrar la respuesta. Suman el 40 varias veces hasta •llegar a 120.

40 + 40 + 40 = 120

Concluyendo que la respuesta es 3 un niño descompone el 120 de 10 en 10, luego separa los grupos de a 40 y finalmente cuenta los grupos para dar la respuesta así:

10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10

Finalmente tres niños no intentan ninguna estrategia.

Según las respuestas de los niños verificamos que:

Los niños comprenden los problemas.

Recurren a diferentes niveles de representación gráfica o simbólica como apoyo significativo y esto ya es un logro importante que da cuenta de los niveles de abstracción mental que van alcanzando los niños.

Los niños comprenden el significado básico de la multiplicación no sólo a nivel directo sino en la relación con la división esto en el campo de lo concreto.

Los niños han logrado mayor interiorización y movilidad del esquema aditivo ya que es adecuadamente utilizado para resolver diferentes situaciones.

COMPRENSION DEL CONCEPTO REPARTIR "DE A" Y REPARTIR "ENTRE"

Ante la tarea de repartir 12 bolas de cristal "entre" tres niños y repartir 18 naranjas "de a" 6; los niños hacen lo siguiente:

Siete niños reparten las bolas de cristal entre los tres niños pero no en forma equitativa, a cada uno le asignan una cantidad diferente.

Nos sorprendió este tipo de respuesta ya que nosotros dábamos por hecho de que si un niño comprende el concepto de repartir era implícito el que fuera equitativamente y no había necesidad de explicitarlo, pero estos niños nos muestran que no es así. Qué ante esta propuesta de repartir se puede entender de varias formas y una de ellas es como lo hacen estos siete niños.

En la evaluación final la tarea es la siguiente:

Repartir 27 confites de a 9 y repartir 15 bolas de cristal entre tres niños. En esta parte se hizo explícito que la repartición se hiciera en partes iguales.

Quince niños realizan las reparticiones de los confites y las bolas de cristal adecuadamente utilizando el mismo procedimiento que en la evaluación inicial; los otros dos niños no utilizan ninguna estrategia.

Se observa como la comprensión de los conceptos básicos se generaliza a situaciones de problemas sencillos con cantidades mayores pero que desde lo concreto adquieren significado.

Vemos también que los niños no han accedido a niveles de representación simbólica pero tienen la comprensión básica.

Reparten las naranjas contando una a una las seis de cada grupo y los encierran hasta terminar.

Cinco niños reparten las bolas de cristal asignando a cada uno la misma cantidad. Entregan de a una cada vez van tachando hasta terminar y reparten las naranjas como lo hacen los niños anteriores excepto dos niños que no intentan ninguna estrategia y tres niños no realizan ninguna de las dos tareas.

Encontramos que la mayoría de los niños comprenden el concepto de repartir en situaciones concretas y cercanas a ellos. Diferencian las dos formas de repartir "de a" y

"entre".

5.3.2 Grado Tercero

5.3.2.1 Esquema Aditivo

CX3NTE0

De la categoría referente al conteo elegimos dos de sus componentes básicos como son: la cardinalidad y la ordinalidad. Las cuales explícitamente se evaluaron en la prueba inicial, pero en la prueba final solamentese retoma la ordinalidad ya que según los resultados de la primera prueba los niños no la habían interiorizadoen niveles más complejos.

La cardinalidad no se reevaluó porque las respuestas dadas daban a Entender que la comprendían, esta hipótesis se confirmó en la prueba final porque los niños escribían correctamente números y daban cuenta del valor posicional al descomponer números en el círculo del 1000.

Al analizar las respuestas nos encontramos que en la prueba inicial 15 niños comprenden las relaciones de orden en series ascendentes. Aparecen las siguientes estrategias:

14 **recurren al conocimiento que poseen de las secuencias dadas en las tablas de multiplicar y por cálculo mental organizan la serie. Veamos un ejemplo:**

Se le propone a los alumnos escribir los números de 7 en 7 hasta el 70. Su respuesta es: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70.

Un niño retoma la estrategia anterior pero representa totalmente la tabla de multiplicar correspondiente a cada serie. Por ejemplo al solicitarle escribir los números de 3 en 3 hasta el 30 realiza lo siguiente:

3x1=3

3x2=6

3x3=9

3x4=12

3x5=15

3x6=18

3x7=21

3x8=24

3x9=27

3x10=30

Un niño en las series que se ordenan sistemáticamente, da como respuesta una suma sucesiva del "operador multiplicativo" hasta obtener el producto solicitado. Veamos un ejemplo. Al niño se le solicita escribir los números de 2 en 2 hasta 20.

Su respuesta es; 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=20

Lo que indica que el niño se apoya en la representación simbólica del número que se repite n veces, pero por cálculo mental ubica los totales parciales para detenerse en el último número de la secuencia.

Finalmente nos encontramos con un niño que no recurre a ninguna estrategia dejando los espacios en blanco.

Lo anterior muestra que los niños recurren a esquemas que ya poseen para generalizarlos a una situación especifica.

Cuando el problema se complica y se deben establecer relaciones de mayor a menor y de menor a mayor con números presentados arbitrariamente por ejemplo 35 - 80 - 28 - 15 - 79 - 43 82 se observa que:

Siete niños logran ordenar sistemáticamente varios números presentados arbitrariamente de menor a mayor y de mayor a menor, recurren al conocimiento de la serie numérica en los naturales ya conocida por ellos.

Ocho solamente ordenan una serie de menor a mayor pero no realizan el proceso inverso, recurren a la misma estrategia de los anteriores niños.

Dos niños no recurren a ninguna estrategia.

De acuerdo a lo anterior se puede concluir que desde el concepto de ordinalidad los niños en su mayoría pueden organizar series pero en un sólo sentido apropiándose de un conocimiento previo como es el manejo de la serie numérica, la cual generalizan a los demás, pero cuando el problema se complejiza y les exige el proceso inverso, es decir aplicar el esquema de reversibilidad por reciprocidad, no lo comprenden.

Con respecto a la prueba final se observa cualificación de las estrategias en todos los niños en mayor o menor grado, es decir que unos logran resolver todas las series y otros entre una y dos: al respecto podemos plantear la siguiente estrategia que fue generalizada en todos los niños.

Completan una serie descubriendo la regla de formación que permite su construcción, es decir establecen la relación que se da entre el número que precede o antecede la cantidad solicitada, teniendo en cuenta la relación de transitividad entre ellos. Por ejemplo:

Se le pide al niño ubicar el número que falte para completar la serie.

20	26		38				

La resuelve de la siguiente manera:

20	26	32	38	44	50	56	62

Lo que indica un logro significativo a nivel de la interiorización del esquema de reversibilidad por reciprocidad en el establecimiento de relaciones.

COMPOSICION Y DESCOMPOSICION ADITIVA

Las repuestas de los niños dadas en la resolución de las tareas relacionadas con la composición aditiva permitió ubicar las siguientes estrategias en la prueba inicial:

Quince logran establecer las relaciones entre las partes y el todo para resolver las operaciones, calculando por complemento la cantidad solicitada; utilizan la respuesta para verificar si el número obtenido puede realizar efectivamente la operación.

El resto o sea dos niños no aplican ninguna estrategia y dejan el espacio en blanco.

En relación con la segunda prueba se observa que;

Diez de los quince niños que resolvieron comprensivamente la operación en la prueba inicial, cualifican su estrategia, ya que recurren directamente a la representación simbólica de la operación inversa para buscar la cantidad faltante por ejemplo al solicitarles realizar la operación 136 + [ ] = 560 el niño realiza una operación del tipo [ ] = 560 - 136 la cual al efectuarla le da el número solicitado.

Los otros cinco realizan el mismo proceso anterior pero solamente cuando la operación representada es suma. En el caso de la resta buscan el minuendo faltante completando al sustraendo lo que le falta para llegar a la diferencia.

Ejemplifiquemos dicha estrategia:

Se presenta la siguiente resta [ ] - 800 = 1350 como respuesta el niño escribe [550] - 800 = 350.

Lo cual indica la no identificación de los componentes de la resta ni el establecimiento de la relación parte - todo.

Los dos niños restantes no recurren a la operación inversa sino que recurren a una respuesta obtenida por cálculo mental

EJERCITACION ALGORITMICA DE LA SUMA Y DE LA RESTA

El dominio que poseen los niños de los algoritmos de la suma y de la resta se evaluó en la prueba inicial presentados en forma directa a+b=x a-b=x y donde aparece una incógnita en uno de los sumandos o en una de sus cifras. En la prueba final solamente se retomaron los algoritmos donde aparecía una incógnita y en el círculo del 1000. Lo anterior debido a que se observó en la prueba inicial que los niños poseían un dominio de los algoritmos presentados en forma directa y teniendo en cuenta los esquemas de sustitución y de equivalencia según fuera suma o resta respectivamente. Solamente algunos presentaban fallas en el cálculo mental.

Con respecto a las estrategias utilizadas por los niños al resolver algoritmos donde aparecían uno o varias incógnitas encontramos que:

En la prueba inicial

Once niños operan correctamente con los algoritmos de suma y resta teniendo en cuenta los esquemas de sustitución y de equivalencia respectivamente y la relación de las partes con el todo para averiguar el término faltante ya sea en uno de los componentes de la operación o en una de las cifras de las cantidades dadas. Por ejemplo al solicitarle a los niños resolver el siguiente algoritmo

```
1 3 2 +      7 4 2 -
4 5 []       1 [] 3

            [ ] 7 [ ]
```

Los niños retomando el esquema del algoritmo directo responden:

```
1 3 2 +          7 4 2 -
4 5[7]            1[6]3

5 8 9            C537C9]
```

Lo anterior nos indica una comprensión del esquema reversible por parte de los niños y la generalización de un esquema previo como es el algoritmo del tipo a+b=x y a-b=x.

Los seis niños restantes no reconocen el algoritmo de las operaciones y recurren a las siguientes estrategias para encontrar las respuestas:

Dos niños obtienen el resultado de la resta quitando del mayor el menor, independientemente del lugar que ocupa dentro del algoritmo, además la columna donde aparece una incógnita la ignoran y no verifica su respuesta. En la suma cambiaron ambas operaciones para dar respuesta al algoritmo. Como ejemplo tenemos: se le solicita al niño resolver las siguientes operaciones:

```
7 4 2 -          1 3 2 4 -
1[ ]3            4 5[ ]
```

El alumno responde:

```
7 4 2 -          1 3 2  +
1[ ]3            4 5[ ]

[6]7[1]           3 2 7
```

Obsérvese que en la resta el resultado [1] en la columna de las unidades es obtenido mediante la resta de 3-2=1, en la columna de las decenas, el niño ignora la incógnita y las cifras dadas es como si pensara que del 4 no se puede restar ninguna cantidad que el resultado sea 7; en la columna de las centenas opera correctamente con el algoritmo y resta 7-1=6.

En la operación suma, el mismo niño anterior suma las unidades 2+5=7, en las decenas resta 5-3=2 y en las centenas también resta, teniendo en cuenta que del número mayor resta el menor así 4-1=3. El otro niño opera correctamente con el algoritmo. Lo anterior indica que el niño no ha interiorizado la ejercitación algorítmica como proceso reversible, ni el valor posicional de los números y en el caso de la resta el esquema de equivalencia.

Dos niños utilizan la misma operación, es decir la suma, para resolver ambos algoritmos. Veamos el ejemplo:

```
7 4 2 -        1 3  2
1[3]3          +
               4  5[0]
[8]7[5]
               5  8 2
```

Observemos que en la operación resta los niños suman las unidades 2+3=5 las decenas 4+3=7 y las centenas 7+1=8 sin reconocer el signo de la resta. Lo que indica que aún no han interiorizado el algoritmo de la resta y la reversibilidad algorítmica dentro del esquema aditivo.

Otro niño opera con el algoritmo de la resta sin tener en cuenta el esquema de equivalencia y sin verificar si la respuesta coincide con lo requerido en el algoritmo. Para la suma opera correctamente con el algoritmo.

Veamos un ejemplo: Se le propone al niño resolver la siguiente operación.

7 4 2 -

1[ ]3

[ ]7[ ]

El niño responde:

7 4.2 -

1[3]3

[6]7[9]

Obsérvese que el niño combina ambas operaciones ante la exigencia de aplicar el esquema de equivalencia y la reversibilidad. Suma las decenas sin considerar el cambio anterior y resta las centenas aplicando el algoritmo directo.

Podemos deducir de las respuestas dadas por los niños que aún no han interiorizado el algoritmo como proceso reversible ni los esquemas de sustitución en la suma ni de equivalencia en la resta.

Un niño en la resta no reconoce los términos de la operación es decir de la cifra mayor resta la menor independientemente si pertenece al minuendoo al sustraendo. Veamos un ejemplo:

Se le propone al niño resolver la siguiente operación

```
7 4 2 -              Su respuesta es 7 4 2
1[ ]3                                1[6]3

[ ]7[ ]                              [6]7[1]
```

Se observa que para obtener el resultado 1 en las unidades el niño resta 3-2 siendo el 3 la cantidad mayor; en las centenas para obtener el 6 resta 7-1 sin tener en cuenta que ese 7 tenía como valor un 6 por el cambio realizado a las decenas que se convirtieron en 13 de las cuales resta correctamente 6 para obtener 7; pero no tuvo en cuenta ese esquema de equivalencia al restar unidades.

Las anteriores respuestas indican que el niño opera inadecuadamente en el algoritmo de la resta, ya que aplica mecánicamente el esquema de equivalencia como observamos en el anterior ejemplo. El mismo niño el algoritmo de la suma lo resuelve correctamente.

Comparativamente con la prueba final se observó que:

De los 11 niños que resolvieron comprensivamente las operaciones en la prueba inicial, 10 continuaron recurriendo a las mismas estrategias y operan con ambos algoritmos teniendo en cuenta la reversibilidad algorítmica pero en general presentan fallas en el cálculo mental y se les olvida aplicar los esquemas de sustitución y de equivalencia según sea la operación suma o resta, en algunos casos.

Tres niños operan adecuadamente con el algoritmo de la suma y aplican el esquema reversible pero si la operación posee dos sumandos; cuando hay tres sumandos, colocan arbitrariamente números en los cuadros que aparecen en blanco sin tener en cuenta el esquema de sustitución y sin verificar la respuesta. Veamos el ejemplo:

```
   3 [ ] 8 + El niño responde          3 [1] 8 +
       6 5                               1 6 5
   2[ ][ ][ ]                          2[8][7][3]

3  1  5  2                            3  1  5  2
```

Observemos que los números colocados en los cuadros no corresponden al valor que permitirla obtener el total según sea la posición que ocupen. Lo anterior indica la no generalización del algoritmo de la suma.

Finalmente cuatro niños no operan comprensivamente con los algoritmos de la suma y de la resta cuando su solución implica la reversibilidad algorítmica.

En la resta obtienen los resultados restando del número mayor el número menor pero sin respetar el valor posicional del número. Veamos un ejemplo:

Se le solicita realizar las siguientes operaciones

```
5  0  0  8  -              [ ] 4 3 [ ] -
1 9 [7] 3                   1 0[ ] 7

[ ][ ] 7 5                   1 3 9 [ ]
```

Su respuesta es

```
5 0 0 8 -                 [0] 4 3 [8] -
1 9 [7]3                   1 0[13] 7

[6][9] 7 5                 [1] 3 9 [1]
```

Observemos que en ambas operaciones del número mayor saca el número menor sin tener en cuenta el valor posicional ni el esquema de equivalencia, en la primera resta, en las unidades resta 8-3=5, en las decenas colocar el 7 en las centenas 9 centenas menos 0 centenas es igual a 9 centenas y en los miles los suma. Lo anterior indica la no interiorización del algoritmo ni el significado del valor posicional, como tampoco su reversibilidad algorítmica.

RESOLUCION DE PROBLEMAS

La resolución de problemas dentro del esquema aditivo que requerían de utilizar la operación inversa para su solución, permitió observar que en la prueba inicial los niños aun no poseen totalmente el esquema reversible aplicado a las operaciones de suma y resta, pero para dar cuenta del problema recurren a la aplicación de esquemas previos.

A continuación presentamos la variedad de estrategias utilizadas.

Seis niños comprenden el planteamiento del problema y lo resuelven complementando una parte a la parte conocida hasta obtener el todo, pero no realizan la operación inversa sino una suma, la cual indica que sumaron por complemento. Demos un ejemplo. Ante el problema un niño tiene 52 caramelos, le regalaron otros caramelos y reunió 165 caramelos. Cuántos caramelos le regalaron? El niño responde

52 +
113
165

Lo que nos permite deducir que el niño por cálculo aproximado complementa la cantidad faltante hasta obtener el todo sin recurrir a realizar la operación inversa es decir

165 -
52
113

Cuatro niños comprenden el planteamiento de los problemas que implican la reversibilidad algorítmica para su solución relacionando y simbolizando significativamente la operación inversa.

Seis niños no comprenden el planteamiento de los problemas que implique la reversibilidad algorítmica y no relacionan significativamente la operación a cada problema, recurren a sumar las dos cantidades dadas sin verificar su respuesta. Por ejemplo ante el problema planteado anteriormente los niños realizan la operación

52 +
165

217

Lo que nos indica la no comprensión de la reversibilidad algorítmica dentro del esquema aditivo.

Un niño comprende el planteamiento de los problemas la respuesta la obtiene por cálculo mental aproximado; pero no simboliza la operación.

Comparando los anteriores resultados con los de la prueba final podemos concluir que de los 11 niños que demostraron comprender el planteamiento de los problemas, así hubieran utilizado diferentes^ estrategias, en la prueba inicial; siete manifiestan el mismo nivel de comprensión pero su estrategia se cualifica ya que logran simbolizar directamente la operación inversa solicitada en el problema.

Los otros cuatro niños presentaron un nivel menos de comprensión y su estrategia no se cualificó en la medida en que dieron parcialmente respuestas a los problemas: tres niños realizan una suma con los datos de uno de los problemas y recurren a la operación inversa en otro, demostrando que no han generalizado la reversibilidad algorítmica. Un niño no aplica ninguna estrategia deja el espacio en blanco.

Finalmente los seis niños que no comprendieron los problemas en la prueba inicial, no manifestaron ningún tipo de movilización ya que su estrategia permaneció, es decir que en vez de recurrir a la operación inversa, generalizan la operación suma y la aplican a cada uno de los problemas, sin analizar comprensivamente el problema ni relacionan significativamente la operación.

5.3.2.2 Esquema Multiplicativo

COMPRENSION DEL CONCEPTO "TANTAS VECES"

Las respuestas de los niños frente al significado de la multiplicación nos permitieron, en la prueba inicial, ubicar las estrategias en tres niveles:

Un grupo de cinco niños reconocen que la suma sucesiva de un mismo sumando puede ser reemplazada por una multiplicación, pero no tienen en cuenta la relación entre el factor que se repite y el número de veces que lo hace dicho factor, es decir no ubican como primer factor las veces que se repite el número y como segundo factor el sumando que se está repitiendo. Veamos un ejemplo. Se les solicita representar con una multiplicación 4+44-4+4+4= La respuesta de 4 de estos niños es 4x5=20. El otro niño busca dos números diferentes que multiplicados le den el producto por ejemplo ante el anterior ejercicio el niño responde: 10x2=20.

Cuando la relación se invierte y se les solicita que representen con una multiplicación 5+5+5+5= los niños no la realizan sino que suman las cantidades y dan como respuesta el total. Lo anterior indica que los niños no tienen claro la conmutatividad dada en la multiplicación.

- Seis niños logran establecer la relación entre una suma sucesiva y una multiplicación teniendo en cuenta que el número que se repite se convierte en el segundo factor y las veces que este aparece sería el primer factor, tanto cuando la relación es directa como cuando se invierte.

El resto de los niños o sea seis, no representan una suma sucesiva de sumandos iguales con una multiplicación, realizan un conteo de las cantidades dadas mentalmente y representan el total de la suma.

Si bien las estrategias utilizadas por los primeros once niños demuestra comprensión de la relación suma sucesiva con multiplicación, aun no tienen claridad frente al ^ significado de cada factor y su organización en la operación.

En la prueba final las estrategias se ubican en dos niveles.

Doce niños establecen la relación entre las sumas sucesivas y la- multiplicación y tienen en cuenta el proceso inverso y la conmutatividad de la multiplicación.

Del resto: cuatro establecen la reclación de una suma sucesiva con la multiplicación pero la representan en un sentido inverso sin tener en cuenta la ubicación de cada factor. Por ejemplo al solicitarle al niño representar con una multiplicación:

56+56+56+56+56+56 responden 56x6

Observemos que invierte la posición de los factores y no discrimana la función del multiplicando en este caso el 6 ni del multiplicador o sea el 56.

Finalmente un niño no logra establecer la relación y realiza una réplica del modelo presentado.

COMPRENSION DE LOS CONCEPTOS REPAETIR "DE A" Y "ENTRE"

La categoría número dos evaluó el significado de la división a partir de la interpretación que los niños hacen del concepto repartir, tanto "de a" como "entre", asociado a la división. Las respuestas dadas por los niños permitieron ubicar las siguientes estrategias:

En la prueba inicial se observó que;

14 niños comprenden la instrucción en la cual aparecen los conceptos repartir "de a" y "entre" y realizan una representación gráfica de lo solicitado; recurren al conocimiento que tienen de las tablas de multiplicar, para ubicar el cociente requerido, ya que el divisor que ya conocen lo multiplican por un número que les de el dividendo y obtienen lo solicitado.

Veamos un ejemplo

Se les solicita repartir 18 manzanas de a 6.

El niño retoma el 6 y busca un número que multiplicado por él le de 18 el cual da como respuesta.

Dos niños comprenden la instrucción en la cual aparece el concepto repartir entre y recurren a la estrategia anterior, pero al tener que resolver el problema donde la instrucción es repartir "de a" no logran realizar comprensivamente una representación, dando como respuesta lo siguiente: Uno de ellos no aplica ninguna estrategia y otro niño busca un número que multiplicado por el divisor le dé el dividendo y el número obtenido lo representa gráficamente generalizando la misma estrategia utilizada para operar con el concepto "entre".

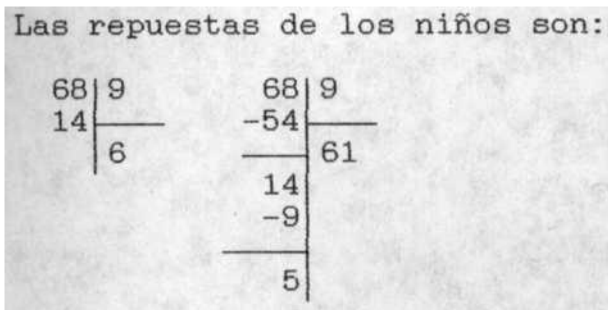
Lo anterior nos permite concluir que los niños han interiorizado las reparticiones "de a" y "entre" como conceptos básicos de la división a nivel gráfico, además establecen la relación entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.

En la prueba final se evaluó la significación de la división pero ya a nivel simbólico donde se proponían a los niños resolver problemas simples en cuyo texto aparecía el concepto repartir "de "a o "entre"; a diferencia de la prueba inicial que fue gráficamente. Al respecto podemos ubicar varios niveles de respuesta cada uno caracterizado con estrategias específicas que se diferenciaban en detalles:

Ocho niños logran interpretar los conceptos repartir de a y entre y recurren al algoritmo estándar para su representación. En tres de ellos se observa que: uno se apoya en la representación gráfica de cada uno de los subgrupos formados a partir de la repartición entre; los otros dos frente al problema que implicaba repartir de a se observó que uno lo resuelve por cálculo mental, y da la respuesta directamente y el otro recurre al algoritmo estándar pero opera incorrectamente con él sin verificar si la respuesta coincide con el dividendo. Dos niños si bien simbolizan el algoritmo estándar para interpretar el concepto repartir entre, al operar con dicho algoritmo lo hacen inadecuadamente. Veamos los dos tipos de

respuesta. Al plantearles a los niños el siguiente problema:

Reparte en partes iguales 68 confites entre 9 niños. Cuántos sobran?



Obsérvese que los niños operan con el algoritmo pero en forma mecánica sin tener en cuenta si las cantidades ubicadas en el cociente si coinciden con las cantidades planteadas tanto en el dividendo como en el residuo. No recurren a la multiplicación como operación que le permite comprobar si la multiplicación de cociente por divisor más residuo les da el dividendo.

En cuanto a la interpretación del concepto repartir de a uno de ellos lo resuelve por cálculo mental dando una respuesta aproximada por encima de lo solicitado, es decir ante el problema si repartes 45 chocolatinas de a 15. Para cuántos niños alcanza? El niño responde les toca de a 4 chocolatinas. El último niño de este subgrupo aplica la misma estrategia que utilizó al interpretar el concepto repartir entre.

Tres niños al resolver el problema que implicaba repartir "entre" recurren al algoritmo estándar y dan una respuesta correcta, pero al resolver el problema donde aparece el concepto repartir de a cada niño recurre a una estrategia diferente.

Veamos por qué.

Ante el problema: Si repartes 45 choco latinas de a 15. Para cuántos niños alcanza?

Aparece que un niño responde: 15 + Alcanza para 3 niños

15
15

45

Otro de los niños: 15x3=45 45 chocolatinas alcanzan para 3 niños.

Y el tercer niño: 45-
15 Alcanza para 30 niños

30

Obsérvese que todos los niños recurren al conocimiento previo que tienen sobre las operaciones anteriores como son la multiplicación y la resta y de una forma a otra las retoman para dar respuesta al problema. De los dos primeros uno, recurre a la suma sucesiva del divisor hasta obtener el dividendo, dando como respuesta el número de veces que este se repite y el otro a la multiplicación del divisor por un número exacto que le dé el dividendo, ubicando como respuesta dicho factor.

Finalmente el último niño de este subgrupo inicia una resta sucesiva entre el dividendo y el divisor, pero solamente resta este último una vez, sin tener en cuenta la "n" veces que se puede restar dicho término.

Lo anterior nos indica que estos niños aún no han interiorizado el algoritmo de la división.

Dos niños recurren a la operación inversa, es decir la multiplicación para resolver los problemas: Veamos un ejemplo.

Ante los mismos problemas anteriormente presentados el niño responde: Para el primer problema la respuesta es: "Para repartir 68 confites tengo que multiplicar 6x11=68 sobran dos.

Para el segundo problema la respuesta es: "A tres niños le tocan 15 confites porque 3x15=45

Si bien el niño no ha establecido la relación del concepto repartir de a o entre con el algoritmo de la división, recurre al conocimiento de un algoritmo previo y que tiene relación estrecha con la división por ser su operación inversa como es la multiplicación.

Dos niños frente al problema repartir entre no recurren a ninguna estrategia y deja el espacio en blanco. En cuanto al problema que requiere interpretar el concepto repartir de a representa simbólicamente el algoritmo y sin aplicarlo da una respuesta que no se aproxima a la respuesta requerida. Veamos un ejemplo.

El niño ante el mismo problema responde:
45 15 Alcanza de a 15 chocolatinas para 30 niños.

Dos niños en el problema donde aparece el concepto repartir "entre" indican una división que no intenta resolver y donde la posición de los términos se invierte y ubica el divisor como dividendo.

En el problema donde aparece el concepto repartir "de a" no recurren a ninguna estrategia y deja el espacio en blanco.

EJERCITACION ALGORITMICA DE LA MULTIPLICACION

Con respecto a las estrategias utilizadas por los niños al resolver algoritmos donde aparecen una o más incógnitas encontramos que;

En la prueba inicial

Nueve niños colocan arbitrariamente números en los espacios vacíos sin verificar si estos pueden complementar correctamente las cantidades y resultados desde el algoritmo estándar.

Veamos algunos ejemplos:

Se solicita a los niños resolver el siguiente algoritmo:

```
[]8X
[ ]

 14 4
```

Algunos respuestas son;

```
[7] 8 X       [1] 8        [13] 8 X
  [3]           [2]           [2]

 144           144          144
```

Obsérvese que los niños realizan mecánicamente el algoritmo y no intentan confrontar las respuestas dadas con la lógica del algoritmo.

Ocho niños no aplican ninguna estrategia dejan el espacio en blanco.

Lo anterior indica una interiorización mecánica del algoritmo de la multiplicación en forma directa y la no comprensión del esquema reversible.

En la prueba final las respuestas se cualificaron en la medida en que la mayoría de los niños lograron aplicar la reversibilidad algorítmica de la multiplicación y ubicar en cada incógnita el número requerido.

16 niños recurren a la aplicación del algoritmo estándar y al conocimiento que poseen de las tablas, de multiplicar. De los 16, la mitad tiene en cuenta el significado del esquema de sustitución y del valor posicional al operar el resto, ocho, falla en el cálculo mental o a veces no tiene en cuenta el esquema de sustitución y se les olvida "llevar"

Un niño coloca arbitrariamente números en los espacios en blanco y no verifica si estos al operarlos dan el resultado correcto.

Veamos un ejemplo. Al niño se le presenta el siguiente ejercicio:

```
           6 4 5
           x 2 7
      ---------------
        4 [ ] 1 5
   [ ][ ] 9 [ ]
   --------------------
     1 [ ][ ] 1 5
```

La respuesta es:

```
           6 4 5
           x 2 7
         ---------
          4 [3] 1 5
     [3][2] 9 [7]
     ----------------
      1 [3][9] 1 5
```

Obsérvese que los números [3], [7], [2], [5], [9], [3] al multiplicarlos no dan el resultado requerido, ni en cálculo aproximado.

Todo lo anterior nos permite concluir que los niños lograron avanzar en la comprensión de la reversibilidad algorítmica, a pesar de que persistan problemas de cálculo mental. Hacen más consiente el significado de las incógnitas y la necesidad de recurrir a un esquema previo como son las multiplicaciones directas, las tablas de multiplicar.

EJERCITACION ALGORITMICA DE LA DIVISION

Proceso directo; Las respuestas dadas por los niños al evaluarles el manejo del algoritmo de la división del tipo a—b=x, permitió ubicar las siguientes estrategias:

En la prueba inicial:

Siete niños no aplican ninguna estrategia, dejan el espacio en blanco.

Tres niños resuelven comprensivamente el algoritmo recurriendo al método estándar.

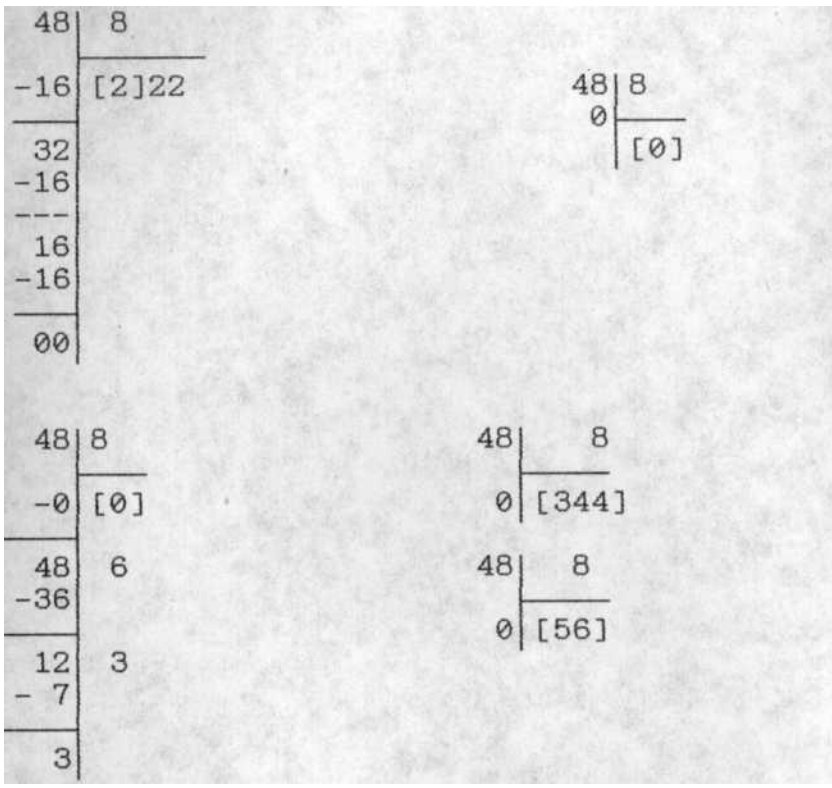
Siete niños colocan arbitrariamente números en el cociente sin verificar si estos coinciden con las respuestas, requeridas. Veamos algunos ejemplos:

Se le solicita a los niños resolver el siguiente algoritmo:

48	8
0	[ ]

Sus respuestas son:

48	8
10	[18]
58	



En la prueba final se observaron pocos cambios a nivel cualitativo, las respuestas de los niños mostraron poca comprensión del algoritmo de la división, las estrategias utilizadas se ubican en dos bloques así:

Diez niños, entre ellos los siete anteriores, colocan arbitrariamente números en el cociente y no operan correctamente con el algoritmo son respuestas similares a la prueba inicial.

Siete niños resuelven comprensivamente el algoritmo y recurren al método estándar, dos de ellos calculan incorrectamente.

Lo anterior indica que la mayoría no ha logrado ni la comprensión ni ejercitación de dicho algoritmo, ni establecer la relación que se da entre la división con las tres operaciones anteriores, es decir la multiplicación como su operación inversa, la resta como la operación que le permite dar su significación y la suma.

Proceso inverso: Las respuestas dadas por los niños frente a la comprensión de la reversibilidad algorítmica permitieron ubicar las siguientes categorías.

En la prueba inicial

-13 niños no aplican ninguna estrategia, dejan los espacios en blanco.

Un niño conoce la relación entre el divisor y el cociente como una multiplicación la cual resuelve por sumas sucesivas para obtener el dividendo, pero no tiene en cuenta el residuo en la relación total. Veamos un ejemplo:
Ante el algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} [\ \ ] & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 15 \end{array}$$

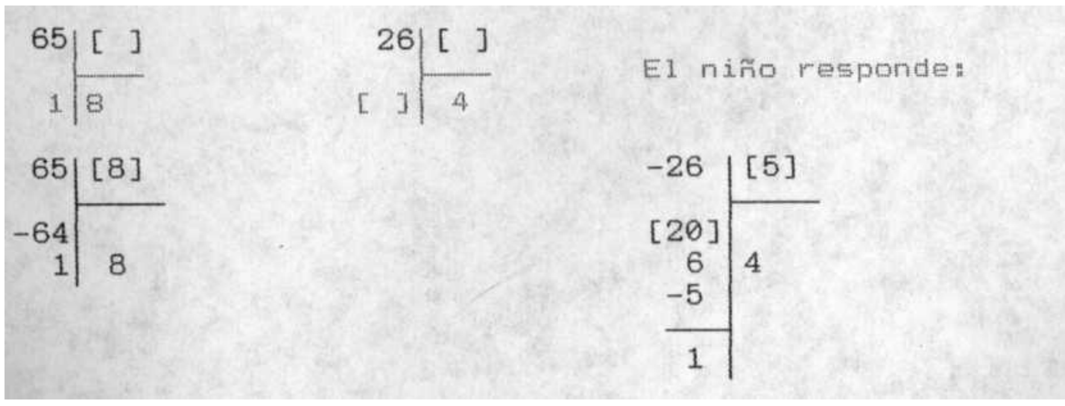
El niño responde

$$\begin{array}{r|l} [45] & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 15 \end{array}$$

15+15+15=45

Un niño resuelve correctamente los algoritmos y recurre al método estándar y al establecimiento de la relación cociente por divisor más residuo, o a las tablas de multiplicar buscando un número que multiplicado por el cociente le de el dividendo más el residuo, lo anterior según sea el caso.

Un niño retoma la mecánica del algoritmo estándar y aproximadamente ubica cifras hasta obtener el resultado, en uno de los casos obvia lo planteado en el algoritmo y reubica las cifras según su conveniencia, por ejemplo. Ante los algoritmos:



Obsérvese que en el primer algoritmo el niño ubica el divisor buscando un número que multiplicado por el cociente 8 se le aproxime al dividendo 65, pero no tiene en cuenta que el residuo ya está dado y que solamente debe hacer el cálculo y restar 65-64=1 sino que realiza la resta "acomodando" el producto de 8x8=64

En el otro algoritmo se observa que por cálculo aproximado el niño resuelve la operación sin retomar el máximo divisor que multiplicado por el cociente le dé o se le aproxime al dividendo. No verifica la respuesta con el residuo.

Un niño coloca arbitrariamente números sin verificar si coinciden con el resultado.

En la prueba final

Once niños resuelven correctamente el ejercicio, recurren al algoritmo estándar ya la operación inversa para su confirmación, tres de ellos calculan incorrectamente.

Tres niños no aplican ninguna estrategia, dejan los espacios en blanco.

Tres niños colocan números arbitrariamente sin verificar si coinciden con el resultado. En síntesis, la mayoría de los niños reconocen el algoritmo de la división sin una completa interiorización.

RESOLUCION DE PROBLEMAS

En la prueba inicial

Seis niños dejan los espacios en blanco y no aplican ninguna estrategia.

Cinco niños realizan o una resta o una suma con los datos del problema y dan como respuesta el total por ejemplo ante el problema: Cuántos borradores puede comprar una señora con $738 si cada borrador vale $123.

Los niños dan la siguiente respuesta:

```
738 -          738 +
123              123

615              861
```

Cuatro niños suman sucesivamente el divisor hasta obtener el dividendo, dando las respuestas a partir del número de veces que suma el divisor. Por ejemplo ante el mismo problema anterior los niños responden;

```
123 +
123
123
-
123
123
123


738
```

Obsérvese que los niños aplican el esquema aditivo previamente construido para dar respuesta al problema

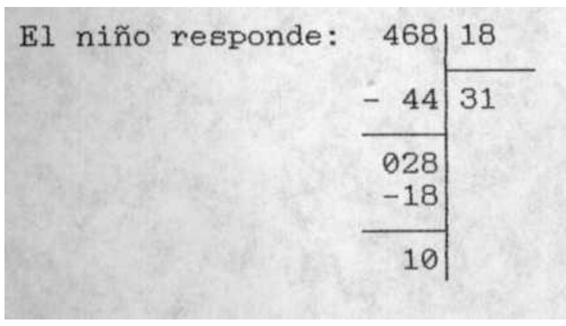
Un niño recurre a la operación inversa, relacionando significativamente la operación al problema, recurre al algoritmo estándar.

Un niño opera por cálculo mental, sin representar ningún algoritmo, dando la respuesta correcta al problema.

En la prueba final:

Ocho niños aplican la operación inversa para resolver el problema. De ellos 6 fallan al operar con el algoritmo en el cálculo o al restar la cantidad repartida con la cantidad que se tiene, veamos un ejemplo.

Ante el problema cuántas filas se puede formar con 468 niños si en cada fila hay 18 niños.



El niño responde: 468 | 18
- 44 | 31
028
-18
10

- Tres niños recurren a la operación inversa para resolver el problema, pero previamente realizan una suma sucesiva del divisor hasta obtener el dividendo al efectuar la suma borran y colocan el algoritmo de la división, o representan gráficamente el número de grupos que indica el divisor hasta obtener el total del dividendo. Es decir, recurren al apoyo concreto del esquema aditivo para darle significado al esquema multiplicativo.

Dos niños recurren a las operaciones suma y multiplicación, operando con las dos cantidades dadas en el problema, pero sin relacionar significativamente la operación.

Dos niños indican la operación inversa que se debe realizar pero no intentan operar con el algoritmo.

Un niño en uno de los problemas elige un número que multiplicado por el divisor le dé el dividendo y ese lo da como respuesta. En el otro problema aplica la operación inversa y opera adecuadamente con el algoritmo.

Un niño no recurre a ninguna estrategia y deja el espacio en blanco.

De lo anterior se deduce que no hay una total interiorización del esquema multiplicativo y su integración dentro de la resolución de problemas, persiste la no apropiación del esquema reversible.

5.3.3 Grado Quinto

5.3.3.1. Esquema aditivo

CONTEO

De acuerdo con la descripción de las pruebas sabemos que a los niños se les plantearon dos tipos de secuencias numéricas: con regla de formación y sin regla de formación.

Para completar las series numéricas sin regla de formación los estudiantes emplearon dos estrategias, claramente diferenciadas.

(1) 23 de los 25 alumnos que presentaron la prueba completaron las secuencias numéricas sin saltarse ningún número y con apoyo concreto.

En algunos niños (9) este apoyo concreto lo constituyó la tabla de multiplicar que repiten oralmente hasta ir acomodando todos los números de la secuencia.

Otros niños (14) recurren a los dedos, completando la secuencia a partir de sumas sucesivas de sumandos iguales.

De estos 14 niños hay seis que emplean los dedos y la tabla de multiplicar. Indican con los dedos el número de veces que van repitiendo el sumando. Ellos procedieron de la siguiente forma: repiten oralmente la tabla (ejemplo; 7x1=7, 7x2=14,...), van escribiendo los números obtenidos (7, 14,...), y marcan el 1, el 2, el 3, etc. mediante la acción de flexionar los dedos.

(2) Dos niños escriben el cardinal que determina la serie el número de veces que se requiere para completarla. Por ejemplo, si se pide "escribir los números de 7, en 7, empezando en 7 y hasta 84", estos niños no escriben la escala ascendente 7, 14, 21,..., 84, sino que realizan un conteo (apoyados en la tabla) y repiten el 7, 12 veces, o sea: 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7.

En cuanto a las secuencias numéricas sin regla de formación, las estrategias empleadas fueron las siguientes:

(1) Los niños completan la secuencia sin saltarse ningún número, con identificación de la regla de formación. No escribieron adicionalmente ningún dato que permitiera inferir cualquier procedimiento. Al ser consultados sobre la forma en que determinaron los números adecuados simplemente manifestaron; "lo sacamos de la mente".

(2) Los alumnos ubicados en este segundo subgrupo no logran descubrir el número que determina la secuencia. Escriben dentro de los cuadros "cualquier número", sin establecer una relación lógica con los números previamente dados.

(3) Una niña utilizó una estrategia para completar las secuencias numéricas, que puede resumirse así: obtiene mediante cálculo mental el número que determina la secuencia. Luego escribe el primer término de la secuencia, pero en las demás casillas intercala el cardinal inicialmente encontrado.

Para una mejor comprensión, ilustramos con un ejemplo la forma como la niña completó la secuencia.
Disposición original de la secuencia propuesta;

	108	96		72		

La niña llenó las casillas en la siguiente forma:

120	108	96	12	72	12	60

Obsérvese que escribió el número inicial de la secuencia, pero entre el 96 y el 72, al igual que entre 72 y 60 puso el 12. Esta estrategia permite inferir que no efectuó el cálculo mental para obtener la diferencia entre los dos números; es como si hubiera pensado "72-12=60", para cubrir las dos últimas casillas, sin embargo este razonamiento fue equivocado cuando procedió en la misma forma para 96-12=72. Posiblemente el tener a 72 como número "fijo" le impidió completar la casilla de acuerdo con su procedimiento inicial.

(4)Cuatro niños relacionan cada dato con el siguiente o con el anterior, pero sin descubrir la regla de formación que determina la secuencia. Los niños suman o restan dos o cualquier otro número al cardinal dado.

Dos niños no aplicaron ningún criterio para intentar descubrir la regla de formación de la secuencia. Dejaron los cuadros en blanco y expresaron "no ser capaces de hacerlo".

Varias apreciaciones pueden hacerse sobre las formas como los niños afrontaron las tareas de completación de secuencias numéricas.

De la estrategia (1) para las secuencias sin regla de formación deducimos que los niños aun recurren a patrones de conteo verbales, acompañados de un referente motriz que en este caso es la flexión de los dedos.

El procedimiento de los niños que clasificamos como estrategia (2) muestra como son incapaces de diferenciar el término numérico que se repite para completar la secuencia, de los diferentes números que se van obteniendo al repetirlo como sumando o como factor.

No asumir las secuencias como un todo puede concluirse de las estrategias (2) (secuencias con regla de formación) y
(4) estrategias con regla de formación. En estos dos casos los alumnos se limitan a buscar relaciones entre cada par de términos aislados.

La estrategia (3), aunque aproximad a una solución adecuada, deja entrever que la niña no confrontó el número que determinaba la secuencia con la operación que permitía calcular los demás.

En la prueba final las secuencias numéricas se plantearon con un grado de mayor complejidad. Sólo se propusieron secuencias sin regla de formación.

Veamos como las enfrentaron los alumnos.

La estrategia (1) (secuencias sin regla de formación) de la prueba inicial ahora fue empleada por 19 niños. En la prueba inicial sólo 9 niños habían empleado dicha estrategia que ya fue descrita ampliamente.

Un niño que en la primera prueba empleó esta estrategia, demostrando competencia cognitiva para completar secuencias numéricas sin regla de formación, en la prueba final fue incapaz de hacerlo.

Seis niños no mostraron ningún cambio en sus estrategias finales y se limitaron, como en la prueba inicial a escribir dentro de loa cuadros, cualquier número, sin establecer ninguna relación lógica con los números previamente dados. Resaltemos que ningún niño dejó casillas en blanco y enfrentó de alguna manera la solución de la tarea. Los dos niños que habían dejado los espacios vacíos, (en prueba inicial) ahora se ubican

dentro de los 19 que completaron con éxito las secuencias, cualificando ampliamente su estrategia.

COMPOSICION Y DESCOMPOSICION ADITIVA

Alrededor de tres estrategias se agruparon los niños para solucionar las tareas de esta categoría.

(1) **Catorce niños completan las igualdades con números que no satisfacen la ecuación propuesta y que no permiten efectuar ninguna operación con los términos dados.**

Una segunda estrategia consiste en ubicar en el cuadro vacío un número que sumado o restado con otro de los dos conocidos, determine el tercero, pero sin importar si cumple la igualdad. Este fue el procedimiento de 9 niños, que presentaremos a continuación.

Igualdad propuesta:

[   ] - 1.850 = 300

Solución dada por este grupo de niños;

[1.550] - 1.850 = 300

Obsérvese que 300 + 1.550 = 1.850

(3) Los dos niños restantes aplicaron la operación inversa para calcular el término desconocido en la igualdad.

Las estrategias (1) y (2) nos permiten afirmar que los niños que las emplearon no han identificado la suma y la resta como operaciones inversas. Esto les impide utilizar la reversibilidad algorítmica para tener éxito en estas tareas. Pero dos aspectos trascendentales, también son consecuencia de la forma como resolvieron estas preguntas:

No hay distinción de la relación parte - todo, ya que en varios de los ejercicios propuestos obtuvieron resultados donde una de las partes era mayor que el todo.

Los niños invierten el orden convencional del algoritmo de la resta entre números naturales. (Como puede verse en el ejemplo presentado para ilustrar la estrategia 2). Identifican (en este caso) el sustraendo como la cantidad mayor a la que hay que restarle algo para obtener la diferencia.

Para la prueba final predominaron las tareas que pedían el cálculo del sustraendo y el minuendo, con mayor énfasis en aquellos del esquema [ ] - a = c.

15 alumnos utilizaron la estrategia (1) de la prueba inicial, dos de los cuales ya habían empleado dicha estrategia y los catorce restantes cualificaron enormemente su estrategia inicial.

De acuerdo con el análisis previo los niños tienen ahora una mejor competencia cognitiva refrendada en los siguientes hechos:

Reconocimiento de la reversibilidad algorítmica.
Diferenciación entre el todo y las partes.
Respeto del algoritmo convencional de la resta entre números naturales.

Los nueve niños restantes desarrollaron idéntica estrategia en ambas pruebas, cuatro la estrategia (2), antes descrita y cinco la estrategia (3).

Ejercitación algorítmica de la suma:

Cuatro estrategias emplearon para solucionar las tareas de esta categoría.

(1) Cuando se trata de calcular las cifras desconocidas de un sumando sólo lo hace si para obtener el total "no hay que llevar", "si hay que llevar", omite la cantidad. Este procedimiento lo efectuaron siete niños.

Otros cuatro niños trabajaron en forma similar pero además al sumar un número con cero, obtenían como resultado cero.

Los niños que efectuaron el algoritmo mediante esta estrategia muestran que no manejan el esquema de sustitución, indispensable para una adecuada ejercitación de la suma. Aquellos que obtuvieron "cero" en las sumas x+0 no han interiorizado el concepto de invarianza de cualquier número al sumarse con cero. En otras palabras no hay reconocimiento del cero como módulo o elemento neutro de la suma entre naturales.

(2) Un niño escribe dos cifras en una de las casillas, al intentar descubrir el sumando faltante.

Su procedimiento es el siguiente:

```
Disposición inicial del ejercicio 7 4 6+
                                  1[ ]8
                                  -------
                                  [ ]0[ ]
```

Resolución efectuada por el niño

```
 7  4 6  +
 1[15]8
-----------
1[0] 0[4]
```

De este procedimiento podemos hacer las siguientes observaciones:

Aplica parcialmente el esquema de sustitución (Ver primera y tercera columnas de su solución).

Al sumar la segunda columna, procede así: 4 + 1 5 más una (que llevaba), igual 20, escribe el cero y lleva dos; en la tercera columna dice 7+1, más dos que llevaba igual diez. Nótese que aunque comete el error al afectar el valor posicional escribiendo dos cifras en lugar de 1, termina el algoritmo normalmente, incluso sumando las "dos" que supuestamente "llevaba" de la columna anterior.

(3) Una tercera estrategia fue realizada por un estudiante que efectuó restas en vez de sumas.

(4) Once niños determinaron las cifras faltantes de cada sumando mediante una correcta aplicación del esquema de sustitución, respeto por el valor posicional y adecuado encolumnamiento.

En la prueba final cuatro niños presentaron idéntica estrategia a la prueba inicial. No aplicaron el esquema de sustitución según se describió en la estrategia (1).

Veintiún niños incluyendo los dos de las estrategias (2) y (3) antes mencionadas, calcularon por complemento las cifras faltantes de los sumandos o el total, aplicaron el esquema de sustitución y "respetaron" el valor posicional, al encolumnar las cifras faltantes.

Ejercitación algorítmica de la resta:

Los ejercicios propuestos para determinar el logro de esta categoría fueron de dos clases, como se dijo en la descripción de las pruebas. Lo recordaremos aquí, brevemente, ya que de la forma de ítem, se derivó una estrategia específica.

Estas dos clases de ejercicios se pueden resumir así: Las restas de la forma a-x=b, que pedían averiguar el substrayendo y restas de la forma x-c=m, que preguntaban por el minuendo, conociendo el sustraendo y la diferencia.

Inicialmente describiremos los diferentes procedimientos empleados para averiguar por el minuendo conociendo los otros dos términos.

(1) - Siete alumnos calculan el minuendo aplicando la reversibilidad algorítmica de la suma con respecto, a la resta.

(2) - Dieciocho estudiantes invirtieron el orden convencional de la resta entre números naturales. Partieron del segundo término (sustraendo) como la cantidad mayor a la que hay que restarle algo para determinar la diferencia.

Varias consecuencias importantes para el diseño de una intervención pedagógica se derivan de una estrategia como ésta:

Los niños no han interiorizado una reversibilidad algorítmica que les permita reconocer la sustracción como operación inversa de la suma.

Han mecanizado un algoritmo rígido (el directo) que no les permite flexividad operativa para afrontar ejercicios alternativos.

No recurren al algoritmo convencional para verificar si el número "supuesto" cumple efectivamente la operación.

En la prueba final once (de los dieciocho citados en la estrategia (1) aplican la reversibilidad algorítmica para obtener el minuendo. Estos niños cualificaron su estrategia procedimental. Los siete restantes no modificaron su procedimiento y mantuvieron la misma estrategia para las dos pruebas.

Veamos ahora que ocurrió cuando los niños se enfrentaron a ejercicios en los cuales se desconocía el sustraendo, conociendo el minuendo y la diferencia.

(1*) Dieciocho alumnos suman el minuendo con la diferencia obteniendo un sustraendo mayor que el minuendo.

(2) Siete alumnos calculan el sustraendo por complemento, aplicando el algoritmo de la resta mediante una acertada utilización de los esquemas de sustitución y equivalencia.

Analizaremos aparte una variación de los ejercicios en los cuales no se pregunta por los términos de la resta en particular, sino que se pide buscar cifras de ellos sin discriminar, para el sustraendo o el minuendo.

Para esta parte de la prueba los alumnos emplearon estrategias que nos permitieron clasificarlos en seis grupos.

(1) Un niño resta (sin importarle si la cifra pertenece al sustraendo o al minuendo) de la cifra mayor (dada) la menor. Es decir resta hacia "abajo" o hacia "arriba" según la posición que ocupe dicha cifra en la columna.

(2) - Cuatro alumnos realizan una suma.

(3) - Un niño llena las casillas, sin una estrategia clara, que lo conduzca a calcular en forma correcta.

(4) - Tres niños efectúan dos operaciones: unas cifras las obtienen mediante resta y otras mediante sumas.

(5) - Cinco alumnos calculan las cifras desconocidas aplicando la operación inversa.

(6**) - Once niños restan aplicando el "algoritmo" para cada columna independiente de las otras. No tienen en cuenta el número como un todo, no respetando el cardinal y ocupándose únicamente del valor relativo de las cifras. En otras palabras hacen una resta "aparte" para cada pareja de cifras.

Con un ejemplo esperamos hacer mayor claridad del procedimiento descrito:

Ejercicio propuesto:

```
 4 [ ] 3   2  -
[ ] 3 [ ] [ ]
---------------
 3  5  7   4
```

Solución presentada:

```
 4 [8] 3   2  -
[1] 3 [6] [8]
---------------
 3  5  7   4
```

Nótese que aplican el esquema de equivalencia cuando al restar las cifras de la primera columna "prestan" una decena de 3, y pueden decir "12-8=4", pero luego al restar en la segunda columna olvidan la decena que prestaron y dicen: "13-6=7". Y en la tercera columna "8-3=5", olvidando nuevamente que "prestaron" una centena.

De las estrategias descritas puede concluirse que el análisis hecho para los procedimientos de la primera clase de ejercicios propuestos para esta categoría, se mantiene y la mayoría de los niños que fallaron en esa primera tarea también fallan en esta variación.

Sin embargo y aunque sólo cinco alumnos tuvieron éxito en este tipo de trabajo, en la prueba final trece alumnos mostraron serios progresos, sobre todo el interiorizar la reversibilidad algorítmica y asumir el cardinal como una totalidad y no como una reunión aislada de cifras.

RESOLUCION DE PROBLEMAS

Se propuso a los estudiantes un problema cuya solución esperada podía ser una operación de la forma c-a=x ó a+x=c. La primera implica un reconocimiento de la resta como operación inversa de la suma. La segunda permite un cálculo de la incógnita, por complemento. Las soluciones presentadas por los alumnos correspondieron a las siguientes estrategias:

(1) Quince alumnos realizan una suma de la forma a+c=x.

(2) Dos niños expresan la respuesta haciendo x=c.

(3) Una niña soluciona el problema planteando la operación adecuada c-a=x, pero al efectuar el algoritmo obtiene un número mayor que c. Esta niña plantea la

resta pero al operar se "confunde": unas cifras las resta y otras las suma. (En las cifras que resta comete errores).

A continuación presentamos el texto del problema y el procedimiento realizado por la niña.

Texto del problema: A las 2:00 p.m. hay 23.740 aficionados en las tribunas de un estadio. A las 4:00 p.m. hora de iniciación del partido, se han completado 45.000 aficionados. ¿Cuántos aficionados llegaron al estadio entre las 2:00 p.m. y las 4:00 p.m.?

Solución:

```
 45000 -
 23740        R= 62000 aficionados
--------
 62000
```

La niña operó así:

```
0 - 0 = 0

0 - 4 = 0
0 - 7 = 0
5 - 3 = 2
4 + 2 = 6
```

(4) Dos estudiantes obtienen la solución mediante la forma a+x=c

(5) Cuatro niños resuelven el problema mediante una operación de la forma c-a=x y efectúan el algoritmo en forma correcta.

Un alumno deja el espacio asignado para la resolución, en blanco, aduciendo "no saber solucionar el problema".

La estrategia (1) guarda una estrecha relación con las estrategias (1*) y (2) de la ejercitación algorítmica de la resta proceso inverso.

Los problemas planteados sugieren dos partes para el análisis: Una que tiene que ver con la forma de razonar la solución del problema mediante una adecuada elección de la operación; la otra, estrictamente operativa, que nos dice cómo trabaja el algoritmo de la operación elegida.

Según la solución presentada mediante las estrategias (1) y (2) los alumnos no comprenden el planteamiento del problema, no relacionan significativamente la operación a situaciones problema. Además no verifica la respuesta con los datos del enunciado.

En cuanto a la operación elegida encontramos una estrecha relación con las estrategias (2) y (1*) de la ejercitación algorítmica proceso inverso. De esas observaciones y de la forma de operar en los problemas se confirma la no interiorización de la reversibilidad algorítmica del esquema aditivo, que en este caso llevó a la mayoría de los niños a sumar en vez de restar. Además, se reafirma la indiferenciación de los términos de la resta que ya desde las tareas de composición y descomposición como proceso reversible, evidenciaban como estos alumnos tienen grandes dificultades para efectuar cálculos operativos que no correspondan a una ejercitación "mecánica" directa de los algoritmos.

La estrategia (3) deja entrever cierto grado de desconcentración de un niño al restar y sumar dentro de una operación que sólo admitía sustraer. La niña planteó la solución en forma correcta pero falla al operar. Hasta aquí podría decirse que su solución es muestra de una competencia cognitiva para resolver problemas aditivos inversos. Pero admitiendo incluso que su error fue motivado por una confusión momentánea de la operación que eligió correctamente, un detalle del procedimiento no deja dudas: la respuesta.

Si la niña tuviera la capacidad para solucionar la situación problema planteada, hubiese confrontado la respuesta con los datos y no hubiera reiterado el error que ya hemos mencionado en la composición y descomposición: el desconocimiento de la relación parte- todo.

Esto la llevó a dar una respuesta (62.000), mayor que el todo (45.000).

Ya habíamos anotado al iniciar la descripción de las estrategias de esta categoría, que el problema también podía resolverse mediante una operación de la forma a4-x=c. Sólo dos estudiantes recurrieron a esta forma de obtener el valor de x, por complemento. Aunque su respuesta y procedimiento demuestran capacidad de estos niños para afrontar problemas de esta clase nos dejan serias dudas sobre la interiorización de la reversibilidad algorítmica y nos reafirman que cuando un individuo se enfrenta a situaciones nuevas, recurre a esquemas primitivos de tanteo para resolverlas.

En la prueba final siete estudiantes persisten en aplicar la estrategia (1) para resolver problemas de este tipo.

Un alumno que en la prueba inicial utilizó la estrategia (2), en la prueba final cualificó su estrategia procedimental para solucionar los problemas de acuerdo con la estrategia (5), pero falló en los cálculos.

Los 16 alumnos restantes también trabajaron de acuerdo con la estrategia (5). Es decir comprendieron el problema, plantearon una operación de la forma c-a=x y relacionaron significativamente la operación con la situación problema. De estos 16 alumnos, siete habían recurrido a la estrategia (1) en la prueba inicial; dos a la estrategia (2); dos a la estrategia (4) y cinco reafirmaron su correcto procedimiento inicial.

El niño que no presentó ninguna solución en la prueba inicial, ahora empleó la estrategia (1).

5.3.3.2 Esquema Multiplicativo

COMPRENSION DEL CONCEPTO "TANTAS VECES"

Recordemos que los ítems propuestos para determinar la comprensión del concepto "tantas veces" buscaban expresar una suma de sumandos iguales como una multiplicación y viceversa.

En primer lugar detengámonos en las estrategias utilizadas por los alumnos para expresar una suma de sumandos iguales como una multiplicación.

(2) Realiza una suma de (n-2) sumandos. El total así obtenido lo multiplica por la suma de los dos sumandos restantes, (n: número de sumandos).

Un ejemplo de este procedimiento es el siguiente:

La suma propuesta para representar por medio de una multiplicación fue: 6+64-6+6+6+6+6+6.

Así lo presentó:

```
36
x12
72
36
432
```

Obsérvese: La suma de los n-2, sumandos es

6+6+6+6+6+6=36. Los dos restantes suman 12.

(2) Dos alumnos efectúan una multiplicación. Los dos factores los obtienen así: el primer factor es un número de n-2 cifras, el segundo factor lo forman dos cifras, que son los dos sumandos restantes. (N: número de sumandos). Veamos como lo hicieron:

Retomamos la suma del ejemplo correspondiente a la estrategia (1): 6+6+6+6+6+6+6+6.

Multiplicación representada; 666666

```
666666
   x66

3999996
3999996

43999956
```

(2) Esta estrategia es similar a la (2); su diferencia radica en que el multiplicando ahora tiene n-1 cifras y el multiplicador sólo tiene la cifra restante. (Dos alumnos).

(3) Tres estudiantes reescriben la suma dada como una multiplicación. Repiten el sumando como factor el número de veces que aparece en la suma y calculan el producto.

Dos niños realizan un procedimiento similar que se diferencia porque dejan la operación indicada.

(4) Un alumno efectúa una suma y totaliza. En su procedimiento va sumando los números por parejas y escribe los resultados parciales como una secuencia numérica, hasta obtener el total que siempre aumenta en un sumando más. En otras palabras obtiene la suma n+1 (n: número de veces que se repite el sumando).

Otro niño utiliza una estrategia similar pero suma el número exacto de veces que se repite el sumando.

(6) Dos alumnos efectúan una multiplicación cuyos factores los obtienen así: El multiplicando es la suma (n-1) términos y el multiplicador, es el término restante.

Suma indicada para expresar como multiplicación:

8+8+8+8+8+8
Solución presentada: 8+8+8+8+8+8=

```
40x
8
-------
320
```

(7) Multiplica por sí mismo el sumando que se repite:

6+6+6+6+6+6+6+6= 6x6=36.

(8) Cinco alumnos invierten el orden dado por la definición de multiplicación:

8+8+8+8+8+8= 8X6=48

6+6+6+6+6+6+6+6= 6x8=48

(9) Siete niños expresan la suma de sumandos iguales mediante la multiplicación.

Ocho de las nueve estrategias descritas plantearon en su representación una multiplicación. Aunque sólo dos (8) y (9) hicieron una aplicación de la definición de multiplicación partiendo de la suma, no obstante que los niños de la estrategia (8) aplicaron la propiedad conmutativa en una situación donde no se pedía. Puede decirse entonces que los niños recurrieron a procedimientos muy diversos pero "se abrieron camino" para indicar una suma como una multiplicación.

Sin embargo sus respuestas dejan entrever con toda claridad que la mayoría de los alumnos no asocia una suma de sumandos iguales con una multiplicación donde el primer factor indica el número de veces que se repite el sumando y el segundo factor cuál es el número que se suma.

Además puede deducirse que no comparan el total obtenido en la suma, con el producto de la multiplicación por ellos realizada. No hay verificación entre los resultados obtenidos, lo cual de paso señala que no identifican la transitividad de una igualdad.

Veamos ahora como enfrentaron la tarea inversa a la precedente, o sea expresar una multiplicación dada, mediante una suma de sumandos iguales.

(1) Ocho niños suman los factores dados. Pero estos ocho niños presentan "su suma" de diferentes formas: Cuatro suman mentalmente los dos factores: Multiplicación dada: 7x6=

Solución presentada: 7x6=13;

Tres escriben la suma; 7x6= 7+6=13

Uno expresa una suma a partir de la descomposición, su solución es: 6x7, 10+3=13.

(2) Tres alumnos calculan el producto y luego expresan una suma con los factores.

Procedieron así: 7x6=42, 7+6=13

(3) Cuatro estudiantes calculan el producto y luego lo descomponen en dos sumandos:

```
6x7=42,    20+
           22
           ---
           42
```

(4) Un alumno reúne dos de los Ítems propuestos para representar como suma. Forma dos números de dos cifras con cada pareja de factores y luego los suma.

Este fue su procedimiento:

Multiplicaciones dadas: 7x6 Solución 76
6x7 +67
143

(5) Dos alumnos invierten el orden de los factores al expresar la multiplicación como suma de sumandos iguales:

7x6 = 7+7+7+7+7+7=42

(6) Seis alumnos expresan las multiplicaciones propuestas como sumas de sumandos iguales y totalizan.

Observamos como la mayoría de los alumnos reiteran la no verificación de los resultados obtenidos al efectuar operaciones que deberían llevarlos a una misma respuesta. Puede afirmarse que los niños muestran una gran dificultad para comprender el concepto "tantas veces" asociado a la multiplicación, dificultad que se generó muy posiblemente en un aprendizaje mecánico, repetitivo y memorístico de las "tablas de multiplicar".

En la prueba final 15 alumnos muestran una comprensión del concepto tantas veces, ya que expresan una suma de sumandos iguales como una multiplicación y viceversa.

Diez alumnos, aunque cualifican ampliamente su estrategia inicial, aplican indiscriminadamente la propiedad conmutativa de la multiplicación y sus representaciones aparecen invertidas como ocurrió con las estrategias (8) y (5) respectivamente.

EJERCITACION ALGORITMICA DE LA MULTIPLICACION

Las tareas propuestas para determinar el logro de esta categoría obligan a calcular uno o dos términos de la multiplicación.

La forma de los ejercicios pide calcular una o varias cifras del multiplicando, el multiplicador y el producto (incluyendo los productos parciales).

Los procedimientos efectuados por los alumnos se pueden resumir en las siguientes estrategias:

(1) Once alumnos escriben dentro de los cuadros las cifras faltantes de los factores pero sin constatar que

al multiplicarlos den como resultado las cifras de los productos parciales previamente dadas.

(2) Siete alumnos calculan las cifras faltantes de los factores, los productos parciales y el total.

(3) cuatro alumnos calculan las cifras faltantes de los factores, pero al multiplicar cometen errores. En los productos parciales escriben dos cifras en cuadros donde sólo va una.

Los tres estudiantes restantes dejan las casillas en blanco y manifiestan no ser capaces de hacerlo.

Al analizar los procedimientos empleados por los alumnos para resolver las tareas de esta categoría varias son las observaciones que pueden hacerse:

Dificultades evidenciadas en las tareas del esquema aditivo se reiteran en el esquema multiplicativo, cuando las tareas de este retoman conceptos de aquel. Por ejemplo en la estrategia (3) se nota la carencia del esquema de sustitución ya señalado en la ejercitación algorítmica aditiva proceso inverso.

Cuando se pide calcular términos desconocidos de una operación (o cifras de ellos), los números supuestos no son verificados mediante la resolución de los algoritmos.

Si falla la memoria (sobre todo para recordar las tablas de multiplicar) el alumno no recurre al esquema de calcular mediante sumas de sumandos iguales. Esto sólo corrobora el hecho de que la mayoría de niños evaluados no comprenden el "concepto tantas veces" asociado a la multiplicación.

Los estudiantes no poseen la reversibilidad algorítmica de la multiplicación que les permita calcular los términos desconocidos en ejercicios de la forma x.c=m ó a.x = b.
En la prueba final ésta fue una de las categorías donde hubo una mayor cualificación de las estrategias empleadas en la prueba inicial.

Veintidós alumnos determinaron las cifras faltantes de los factores y verificaron mediante una adecuada aplicación del algoritmo que los números supuestos satisfacían la operación. Además establecieron los productos parciales y el total respetando el valor posicional y aplicando correctamente el esquema de sustitución.

Tres alumnos mantuvieron su estrategia inicial, la (1), sin cualificar su procedimiento.

Cabe resaltar que los tres niños que habían dejado los espacios en blanco, en la primera prueba, ahora hacen parte de los veintidós que superaron la dificultad.

COMPRENSION DE LOS CONCEPTOS "REPARTIR DE A" Y "REPARTIR ENTRE"

Describiremos separadamente las estrategias empleadas para cada concepto. Primero el concepto "de a".

(1) Reparten cuando la situación planteada les permite apoyarse en la tabla de multiplicación. En caso contrario dejan el espacio en blanco. (Estrategia de 7 niños).

(2) Hacen una repartición escribiendo el divisor el número de veces necesario para obtener por suma el dividendo o una aproximación (por defecto o por exceso).

El divisor aparece escrito el número de veces que resulta de efectuar la repartición pero el alumno no da respuesta. (Estrategia de siete alumnos).

Ilustraremos con un ejemplo el procedimiento descrito.

Pregunta de la prueba; ¿Cuál es el resultado de repartir 137 de a 15?

Solución; 15-15-15-15-15-15-15-15-15

Nótese que 137 + 15 = (9x15)+2 y que el 15 aparece repetido 9 veces. En este caso los niños omiten mencionar el residuo, obteniendo una aproximación por defecto. Además no hay ninguna respuesta a la pregunta.

Otro alumno presenta un procedimiento similar, pero además escribe la respuesta.

(3) Efectúan la división para obtener una repartición equitativa. Incluso señalan el residuo al dar la respuesta a la pregunta formulada. (Estrategia de tres niños).

(4) Plantea y realiza una resta cuyo minuendo es el número a repartir y el sustraendo es el número de veces en que se va a repartir.

(5) Multiplican los números dados. (estrategia de dos alumnos).

(6) Hace una repartición que representa gráficamente.

(7) Efectúa la división pero falla en la ejecución algorítmica. Dos alumnos no emplean ninguna estrategia y dejan los espacios en blanco.

Las tareas propuestas para determinar si los alumnos asociaban el concepto "repartir entre" con la división fueron resueltas según las siguientes estrategias:

(1) Seis estudiantes reparten a través de la división.

(2) Dos estudiantes reparten por el "método" de restas sucesivas: parten del número a repartir y va restando cada vez el divisor. Cometen errores de cálculo en la secuencia.

(3) Dos niños suman los números de la propuesta.

(4) Un niño efectúa una multiplicación.

(5) Aunque en las categorías previas no hemos asumido los espacios en blanco como una estrategia, esta vez sí debido al alto número de estudiantes (14) que no presentaron ningún procedimiento para "repartir entre".

Para analizar los procedimientos que emplearon los niños partiremos de dos aspectos básicos:

La comprensión de los conceptos "repartir entre" y "repartir de a".

La asociación de los conceptos "repartir entre" y "repartir de a" con la división.

De los resultados mostrados por las diferentes estrategias puede concluirse que los alumnos comprenden y asocian mejor con la división el concepto "repartir de a".

Esta afirmación está sustentada en dos observaciones:

De las siete estrategias utilizadas en las preguntas que involucran este concepto, cinco muestran como los niños de alguna manera identifican el significado de la palabra "repartir de a". En estas cinco estrategias se ubican veinte niños.

De esos veinte niños, once asocian el concepto repartir "de a "con la división. (Ver estrategias (1), (7)).
Mientras que el análisis de las respuestas a las cinco preguntas de las tareas propuestas para el reconocimiento del concepto "repartir entre", sólo ocho niños presentan procedimientos que permiten inferir su comprensión.

Los diecisiete restantes, incluyendo catorce que no emplean ninguna estrategia son un dato irrefutable para mostrar su no comprensión del concepto. Resaltemos también que sólo seis estudiantes asocian el concepto con la división. Pero aunque la mirada analítica sobre la comprensión de los conceptos "repartir de a" y "repartir entre" es fundamental, también hay otras consecuencias importantes después de revisar las diferentes estrategias.

Una de ellas tiene que ver con el empleo de algoritmos no convencionales para resolver situaciones en las cuales el alumno no alcanza a precisar la operación. Recurre entonces a "algoritmos diferentes" que evidencian poca interiorización de la operación. Esto lo lleva a resolver las reparticiones mediante tanteo, por aproximación tal como puede verse en la estrategia (2) del concepto "repartir de a", y (12) del concepto repartir "entre".

Es paradójico que niños que llevan, por lo menos, tres grados dividiendo tengan tanta dificultad para asociar las reparticiones con la división. Es más, metodológicamente la introducción del niño hacia dicho concepto se inicia a través de reparticiones hechas con material concreto.
Catorce estudiantes que dejaron su espacio en blanco, al solicitárseles efectuar "reparticiones entre", son un indicio de que el vocabulario empleado en las clases de matemática es pobre, alejado de toda comprensión y centrado en un algoritmo mecánico carente de toda significación.

Para la prueba final se propusieron a los alumnos varios problemas en los cuales se buscaba ante todo determinar la asociación de los conceptos "de a" y "entre" con la división

Veintiún niños mostraron un avance significativo porque al pedirles "repartir de a" o "repartir entre" efectuaron divisiones. Lograron comprender los conceptos, efectuaron la operación y escribieron la respuesta.

EJERCITACION ALGORITMICA DE LA DIVISION

Proceso directo: Las tareas propuestas para esta categoría son divisiones de la forma a-^b=x. La variación sólo esté en que el divisor puede tener una o dos cifras.

(1) Trece niños efectúan las divisiones que tienen un divisor con una sola cifra.

En la ejercitación algorítmica, cuando el divisor tiene dos cifras, cometen los siguientes errores:

Al calcular las cifras del cociente escribe un número menor de veces del que realmente resulta de dividir el correspondiente período del dividendo entre el divisor.

Como consecuencia los residuos parciales que van resultando son mayores que el divisor.

De la cifra mayor resta la menor sin importar su ubicación en la operación. (Este procedimiento lo elaboraron trece alumnos).

(2) Con una estrategia similar a la (1), cuatro estudiantes operan las divisiones de esta categoría, pero cometen los errores tanto en las divisiones que tienen una cifra en el divisor, como los que tienen dos cifras.

(3) Calculan los cocientes y los residuos en divisiones por una y dos cifras en el divisor. (ocho alumnos).

Diecisiete alumnos tienen dificultades para efectuar divisiones con dos cifras en el divisor. La estrategia con la cual enfrentaron las divisiones de este tipo deja entrever algunas dificultades ya mencionadas a lo largo de este análisis y que nos permiten ver como los niños son "solidarios" con sus errores cuando se enfrentan a la misma situación pero en contextos diferentes.

Una de estas observaciones tiene que ver con la inversión de los términos de la resta en la disposición convencional del algoritmo. Como ya se dijo no hay identificación de los términos de la resta. Para estos niños, (estrategias (1) y (2)) el minuendo y el sustraendo son indiferenciados variando cada que las cifras lo obliguen.

Pero esta dificultad para precisar los términos de la resta tiene una connotación mucho mayor, ya señalada antes, los niños no han interiorizado el esquema de sustitución.

Otra consecuencia que nos proporciona información valiosa previa a un proceso de intervención tiene que ver con el proceso de verificación dentro de la operación. Como puedo, notarse en los análisis de la composición y descomposición, categorizados dentro del esquema aditivo, los números una vez colocados en las casillas vacías no se utilizaban para comprobar si satisfacían las igualdades. Pues bien, para este caso, el alumno tantea (apoyado en la tabla de multiplicar) la cifra respectiva del cociente pero al multiplicar dicho número con el divisor parece no importarle que dicho producto sea mayor que el respectivo período del dividendo o que sea tan pequeño, que el residuo parcial sea mayor que el divisor.

En ambas situaciones la operación se trunca porque el algoritmo queda viciado y los datos posteriormente obtenidos tendrán las mismas fallas.

En la prueba final quince alumnos efectúan divisiones de una y dos cifras en el divisor.

Dos de los cuatro alumnos que en la prueba inicial no dividían ni una ni por dos cifras, ahora lo hacen por una cifra. En las divisiones por dos cifras cometen los errores ya imputados en la estrategia (1) inicial.

Proceso Inverso: La división es una operación valiosa por la gran cantidad de información que puede darnos, ya que su ejercitación algorítmica obliga el manejo de tres operaciones: resta, multiplicación y división.

En su ejecución explícitamente debe aplicarse su inverso. No de otra manera se reparte y luego multiplica para comprobar si el número supuesto al multiplicarse por el divisor es igual o menor que el dividendo.

Hacemos este pequeño comentario marginal sobre la división porque de acuerdo con él la categoría, ejercitación algorítmica de la división proceso directo.

Debería ser suficiente para determinar si los niños sometidos a esta prueba tienen la competencia cognitiva reversible de la división. Sin embargo adicionamos esta categoría por la variedad de ejercicios que divisiones de la forma x4-a=m, a-fx=c, x-ra=y, m4-x=y, donde x, y son incógnitas, proporcionan, aunado a la variedad de estrategias que los estudiantes pueden elaborar para solucionarlos.

Precisemos con palabras el significado de la presentación simbólica de los ejercicios.

Los alumnos se enfrentaron a divisiones donde se desconocen el dividendo o el divisor o el cociente o el residuo. También se dan otras variaciones como la falta de algunas cifras de los términos.

(1) Veintiún niños escriben dentro de los cuadros números que no guardan lógica operativa aparente con los demás.

(2) Un alumno coloca cero como primera cifra del cociente; divide por cero {llena las correspondientes casillas del divisor con ceros) y se reitera en el mismo procedimiento de la estrategia (1).

(3) Un alumno calcula los términos desconocidos de cada ejercicio.

Dos niños dejan las casillas en blanco.

No es necesario ampliarnos mucho en las consideraciones respecto del análisis en esta categoría.
fl

Muchas de las anotaciones de la categoría: "Ejercitación algorítmica de la división proceso directo" son válidas aquí. Bástenos agregar que, como ya se deducía del análisis anterior, los alumnos no poseen la reversibilidad algorítmica para reconocer la división como operación inversa de la multiplicación y viceversa. En la prueba final 17 alumnos calculan las cifras desconocidas en los términos de la división. Ocho no cualifican su primera estrategia.

RESOLUCION DE PROBLEMAS

Proceso directo; Recordemos que los problemas de esta categoría se resuelven por multiplicaciones o divisiones directas (a.b=x. a4-b=x).

(1) Siete alumnos efectúan una suma con los datos del problema.

(2) Diez alumnos realizan la operación directa requerida, con una correcta aplicación del algoritmo.

Cinco alumnos eligen la operación adecuada pero realizan un algoritmo incorrecto.

(3) "Resuelven" el problema mediante una operación inversa, a la que admite la situación (multiplicación por división o viceversa). (Dos niños).

(4) Trata de obtener el resultado por aproximación mediante sumas (para la multiplicación) o restas (para la división) pero falla al calcular.

De las estrategias (1) y (3) se concluye que nueve niños no comprenden el problema ya que su relación operación - situación problema dista mucho de una adecuada solución.

El alumno de la estrategia (4) recurre a un esquema previo que nos muestra como el niño no ha interiorizado la operación y sólo la realiza cuando se le presenta aislada de cualquier situación.

En la prueba final siete de estos diez niños cualifican su estrategia. Relacionan la operación con la situación problema y verifican la respuesta con los datos del enunciado.

Proceso inverso: Dos problemas se propusieron en la prueba para determinar los logros de esta categoría. Los esquemas de solución aplicando la reversibilidad algorítmica son;

Para el primero $23.x= 22.080$, que admite para $x= \frac{22.080}{23}$

Para el segundo la operación es la misma pero el esquema es $X. 925 = 7.400$, luego $x= \frac{7.400}{925}$

Las estrategias de solución se agruparon así:

(1) Ocho alumnos utilizan dos operaciones^ diferentes (una para cada problema), para la resolución. De los siete, tres solucionan el primer problema mediante la división y el segundo por medio de la multiplicación.

Dos por multiplicación y suma; dos usan suma y resta; el niño restante procede dividiendo en el primer problema y restando en el segundo.

(2) Cinco alumnos realizan una suma con los datos de cada problema.

(3) "Solucionan" los dos problemas mediante multiplicación (4 niños).

(4) Plantean divisiones para resolver los dos problemas pero cometen errores al efectuar el algoritmo. (4 niños).

(5) Un niño "soluciona" el primer problema por medio de una suma cuyos sumandos son los datos del problema; el segundo problema lo "resuelve" por sumas, sucesivas que lo llevan a una respuesta aproximada.

(6) Una niña efectúa restas con la particularidad de que al escribir la respuesta toma las tres últimas cifras de la diferencia en el primer problema y la primera cifra en el segundo.

Las dos restas que la niña presentó fueron;

```
22.080              7.400
 -  23              - 925
--------            --------
22.057               6.475
Problema 1          Problema 2
```

En el problema uno dio como respuesta 057 En

el problema dos su respuesta fue 6.

(7) Retomando los esquemas de solución presentados al iniciar esta categoría sabemos que el primer problema se resuelve mediante la división 22.080/23 que da un cociente de 960.

Este niño buscó este cociente a partir de un esquema de aproximación, multiplicó 23x9, obteniendo como producto 207 que multiplicado por 100 da como resultado 20.700. Su respuesta fue 900.

Para el segundo problema, cuya división era 7.400/925=8

sumó el 925 siete veces, es decir presentó la suma 925+925+925+925+925+925+925 que totalizó como 7.375, cálculo erróneo que lo llevó a dar una respuesta de 7.

Obsérvese que aunque el alumno falló al sumar su razonamiento cobra validez al comparar 7.400 con 7.375 y ver como es imposible sumar una vez más 925.

(7) Un estudiante deja el espacio para solución del primer problema en blanco y soluciona el segundo mediante división.

Una primera apreciación general de las diferentes estrategias muestra cómo, con excepción de cinco alumnos, los estudiantes sometidos a la prueba no resuelven problemas cuya solución exige un proceso inverso, eligiendo la operación adecuada.

Dieciocho alumnos no establecen ninguna relación lógica entre los datos del problema y la operación escogida para resolverlo. Estos niños no confrontaron la respuesta con la situación problema que les hubiera permitido una verificación.

Aunque hay algunos alumnos que optaron por la división en alguno de los problemas no reflejan una reflexión lógica cuando enfrentan idénticas situaciones con otras operaciones, como sumas, restas y multiplicaciones. Encontramos una estrecha relación entre los resultados de

la ejercitación algorítmica inversa y la resolución de problemas inversos. Las diferencias entre los que resolvieron con éxito dichas categorías son muy pequeño. Esto, como era de esperarse, demuestra que quien no posee la competencia cognitiva para tareas que involucren ejecuciones operativas inversas, mucho menos solucionan problemas que requieran para su solución de operaciones inversas.

Nos queda por agregar que sólo un estudiante resuelve los problemas mediante el empleo de algoritmos diferentes, que muestran un alumno recursivo pero que tampoco ha interiorizado la reversibilidad algorítmica que le permita trabajar con una economía de pensamiento. En la prueba final dieciocho alumnos resuelven los problemas relacionando significativamente la situación problema con la operación, efectuando correctamente el algoritmo y formulando la respuesta.

O sea que trece alumnos cualifican su estrategia inicial, seis la mantienen (efectúan operaciones diferentes) y un alumno que resolvió los problemas de la prueba inicial ahora utilizó una operación diferente desmejorando su estrategia inicial.

5.4 SINTESIS DEL ANALISIS DE LAS PRUEBAS

Según Mesa (1990), tres conceptos fundamentales debe manejar toda evaluación que pretenda conocer el estado cognitivo que frente a una operación tenga un estudiante. Estos conceptos son:

Comprensión de la operación: Diremos que un sujeto posee la comprensión básica de un esquema cuando ha logrado interiorizar el significado que le dio origen culturalmente: Por ejemplo que comprenda el esquema 3.5 como 5+5+5 o 3 veces 5 y el esquema 5x3 como 3+3+3+3+3 o 5 veces 3; similarmente para todos los esquemas y sus relaciones más complejas.

Ejercitación algorítmica: Se trata aquí de la habilidad para repetir un esquema simple o un algoritmo. Por ejemplo cuando realiza la adición de fracciones, el cálculo de un promedio, el ordenamiento de unos números y, en general, la "aplicación" de cualquier fórmula estándar o no.

Solución de problemas: Polya (1979), distingue cuatro fases de trabajo al tratar de encontrar la solución de un problema: "Primero, tenemos que comprender el problema, es decir, ver claramente lo que pide; segundo, tenemos

que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero, poner en ejecución el plan. Cuarto, volver atrás, una vez encontrada la solución revisarla y discutirla".

A lo largo de las pruebas que hemos presentado y analizado estos tres conceptos señalan su estructura básica. Por esta razón, y aunque no se diga explícitamente, las diferentes tareas propuestas las incluyen y su análisis por categorías nos brindó un panorama parcial de su presencia o no en el desarrollo mental de los niños evaluados.

De lo que se trata aquí es de retomar esa "mirada parcial" e ir construyendo una más general que nos lleve a interpretar si los conceptos arriba señalados guardan una estrecha relación en los procedimientos de los estudiantes. O si por el contrario se presentan aislados dando origen a incoherencias mentales que impiden al niño una apropiación conceptual de la operación, bloqueando su interiorización y dificultando relacionarla a diversas situaciones.

Según las diferentes categorías establecidas para agrupar los Ítems de las pruebas, las operaciones del esquema aditivo (suma y resta) tienen preguntas específicas para evaluar la ejercitación algorítmica y la solución de problemas. La comprensión de la operación puede apreciarse, implícitamente, en los ejercicios de composición y descomposición.

Las operaciones del esquema multiplicativo (multiplicación y división) tienen preguntas explícitas para determinar los tres conceptos, antes mencionados.

5.4.1 Grado primero. Después del análisis de las estrategias que utilizan los niños para resolver las diferentes tareas resaltamos los aspectos fundamentales:

El primero se refiere a la presencia o no en los niños de esquemas directos y reversibles y su aplicación en las resoluciones de las diferentes tareas. El segundo se refiere a las diferentes estrategias que utilizan los niños para resolver dichas tareas. Estrategias que dan información acerca del funcionamiento de los mismos esquemas.

En el esquema aditivo se deduce entonces que la comprensión de las relaciones entre el todo y las partes es fundamental para la construcción de los diferentes conceptos

Las estrategias que utilizan los niños para resolver las diferentes tareas propuestas tanto en la prueba inicial como en la final dan cuenta del predominio de la presencia de esquemas directos sobre los reversibles. Pero es necesario hacer una precisión: Los procedimientos utilizados por los niños en la prueba final son índice de la movilización de los esquemas conceptuales. Ahora el pensamiento del niño se ha hecho más reversible en el sentido que comprenda aquellas actividades y problemas que exigen un pensamiento reversible aunque para su solución utilizan un procedimiento directo. Es decir, hay comprensión siempre y cuando se pueda llevar el problema al plano de lo concreto.

Retomemos algunos ejemplos antes mencionados:

En la parte de la composición y descomposición aditiva veamos este caso: [ ] + 25 = 68 aunque la tarea exige de la acción reversible, los niños recurren a la acción

directa que está indicada en dicha representación. No deducen la operación inversa que subyace a dicha representación (Pag.).

En los algoritmos de la suma y la resta los niños dan cuenta de la dificultad para manejar dos variables a la vez o de la combinación de variables. Característica propia de un pensamiento operatorio.

Veamos unos ejemplos:

```
48 +            [ ] 7 +
26               1 [ ]
----           --------
                 6  2
```

Para resolver el primer ejemplo los niños hacen el cálculo adecuadamente pero no establecen la relación unidades, decenas, es decir no tienen en cuenta el valor posicional o no aplican el esquema de sustitución. Los niños no logran realizar dos operaciones al mismo tiempo. (Pag.).

En el segundo caso encontramos que la mayoría de los niños no reconocen el algoritmo de la suma como procedimiento inverso. Para encontrar el valor de las incógnitas es necesario que los niños: Reconozcan que se esté sumando dos cantidades totales, tener en cuenta el

valor posicional para poder darle al 2 el valor de 12 unidades y lo que es fundamental tener en cuenta la relación entre las partes y el todo para poder encontrar una parte a partir de la diferencia entre el todo y la otra parte.

Analizando el algoritmo de la ruta encontramos que al igual que en la suma la mayoría de los niños encuentran el resultado adecuado cuando se exige un procedimiento directo y cuando no tienen que realizar dos operaciones al mismo tiempo. Veamos un ejemplo:

53 -
27

Ante el conflicto de restar 7 de 3 recurren a diferentes estrategias.

Unos aplican el esquema de equivalencia para restar 7 de 13 pero no tienen en cuenta el cambio para restar las decenas, otros suman las unidades y restan las decenas (Pag.)

Finalmente en la resolución de problemas la mayoría de los niños comprende los planteamientos y relaciona significativamente la operación siempre que pueda llevar los datos al plano de lo concreto. Los niños necesitan

Los niños necesitan realizar la acción que se sugiere a nivel simbólico. Lo simbólico tiene significado en relación directa con lo concreto (Pag.).

En el esquema multiplicativo nos interés resaltar un punto: Los niños comprenden y dan respuesta a las diferentes situaciones de multiplicación a partir del esquema aditivo.

Retomemos algunos ejemplos:

2 veces 4 = [ ]

La mayoría de los niños suman dos veces el cuatro para encontrar el resultado. (Pag.) Y para resolver los problemas planteados vemos como recurren a la representación gráfica y a la suma para encontrar la respuesta (Pag.) ninguno ha construido el significado de los términos de la multiplicación, básicamente el "operador multiplicativo".

Es importante como los niños desde la comprensión a nivel concreto, es decir en el plano de las acciones y representaciones gráficas, del esquema aditivo logran darle significado a las situaciones que implican el esquema multiplicativo.

5.4.2 Grado Tercero

ESQUEMA ADITIVO

Los niños en su generalidad tienen un aprendizaje, mecánico de los conceptos básicos referentes al esquema aditivo, su mayor dificultad se centra en el manejo de la reversibilidad operando fundamentalmente con un esquema directo o recurriendo a estrategias variadas para dar respuesta a las actividades.

De la prueba inicial y en cuanto a la ordinalidad se puede concluir que la mayoría de los niños (15) pueden organizar series pero en un sólo sentido apropiándose de un conocimiento previo como es el manejo de la serie numérica, el cual generalizan, pero cuando el problema se complejiza y les exige el proceso inverso y retoman el esquema de reversibilidad por reciprocidad, no lo comprenden. En la prueba final se logra mayor cualificación de la estrategia, ya que en el caso de la ordinalidad completan las series describiendo la regla de formación que permite su construcción es decir establecer la relación que se da entre el número que precede o antecede la cantidad solicitada, teniendo en cuenta la relación de transitividad entre ellos.

Lo anterior indica un logro significativo a nivel de la interiorización del esquema de reversibilidad por reciprocidad y el establecimiento de relaciones.

En cuanto a las actividades de composición y descomposición aditiva, en la prueba inicial, la mayoría de los niños (15) logran establecer las relaciones entre las partes y el todo para resolver las operaciones calculando por complemento la cantidad solicitada, esta estrategia se cualifica en la prueba final en cuanto a que ya recurren directamente a la operación inversa para resolver el problema, se observa que algunos de estos niños (5) aplican dicha estrategia cuando la operación expresada es suma y cuando es resta no.

Referente a la ejercitación algorítmica los niños poseen un dominio de los algoritmos cuando se presentan en forma directa, es decir $a + b = x$ y $a - b = x$. Con respecto a los algoritmos que implican la reversibilidad algorítmica, solamente algunos lo resuelven (11) y además tienen en cuenta los esquemas de sustitución y de equivalencia según sea suma o resta respectivamente.

El resto de niños (6) no tienen el esquema reversible por lo tanto no resuelven comprensivamente los algoritmos.

Con respecto a la segunda prueba no se observa un cambio significativo ya que 10 de los 11 niños continuaban aplicando la misma estrategia presentando fallas en el cálculo mental, además se les olvidaba aplicar el esquema de sustitución y equivalencia según sea la operación suma y resta. El resto no cualificó su estrategia.

La resolución de problemas dentro del esquema aditivo que requería de utilizar la operación inversa para su solución permitió observar que en la prueba inicial los niños aun no poseen el esquema reversible aplicado a las operaciones de suma y resta, pero para dar cuenta del problema recurren a la aplicación de esquemas previos.

En la prueba final solamente algunos niños (7) aplican la operación inversa para resolver comprensivamente el problema el resto o sigue recurriendo a las mismas estrategias para dar respuestas (4) o no cualifican su proceso aplicando arbitrariamente cualquier algoritmo sin relacionar significativamente la operación.

En términos generales podemos decir que en la prueba inicial los niños no habían interiorizado el esquema aditivo a nivel reversible y la aplicación de este se realizó en conceptos aislados y no se integró significativamente dentro de un todo. En la prueba final, los niños avanzan en la comprensión de dicho esquema, pero más a nivel de las acciones faltando una interiorización desde la acción mental y su aplicación directa dentro de cualquier situación problema.

ESQUEMA MULTIPLICATIVO

En cuanto al significado de las operaciones multiplicación y división desde los conceptos "tantas veces y repartir" "de a” y "entre", se observó que en la prueba inicial, la mayoría de los niños demuestran comprensión de la relación suma sucesiva con la multiplicación, pero aún no tienen claridad frente al significado de cada factor y su organización en la operación.

En la prueba final la mayoría de los niños (12) establecen la relación entre las sumas sucesivas y la multiplicación y tienen en cuenta el proceso inverso y la conmutatividad de la multiplicación.

Con respecto a los conceptos relacionados con la división, en la prueba inicial se observó que la mayoría (15) comprenden la instrucción en la *cual* aparecen los conceptos repartir "de a" y "entre" y realizan una representación gráfica de lo solicitado; recurren al conocimiento que tienen de las tablas de multiplicar, para ubicar el cociente requerido, ya que el divisor que ya conocen lo multiplican por un número que les de el dividendo y obtienen lo solicitado.

En la prueba final los mismos conceptos se evaluaron pero a nivel simbólico y dentro de la resolución de problemas simples, al respecto podemos concluir que si bien la mayoría de los niños indican el algoritmo de la división operan inadecuadamente con él, algunos, y los demás de manera mecánica.

Con respecto a la ejercitación algorítmica de la multiplicación en la prueba inicial se observó que la mayoría de los niños (9) realizan mecánicamente el algoritmo y no intentan confrontar las respuestas dadas con la lógica del algoritmo.

En la prueba final las respuestas se cualificaron en la medida en que la mayoría de los niños lograron aplicar la reversibilidad algorítmica de la multiplicación y ubicar en cada incógnita el número requerido, por lo tanto 16 niños recurren a la aplicación del algoritmo estándar y al conocimiento que poseen de las tablas de multiplicar. De los 16, la mitad tiene en cuenta el significado del esquema de sustitución y del valor posicional al operar en el algoritmo, el resto, ocho, falla en el cálculo mental o a veces no tiene en cuenta el esquema de sustitución y se les olvida "llevar".
El algoritmo de la división tanto a nivel directo como inverso no ha sido interiorizado por los niños; ante las diferentes incógnitas responden colocando arbitrariamente cantidades sin tener en cuenta la lógica del algoritmo.

En cuanto a la resolución de problemas. En la prueba inicial la mayoría de los niños no relacionan significativamente la operación al problema, aplican otras operaciones que no siempre coinciden con la respuesta. En la prueba final si bien la mayoría de los niños recurren a la operación inversa para resolver el problema, fallan al operar con el algoritmo.

Lo anterior da cuenta de la no interiorización del 'esquema multiplicativo ya que tienden a generalizar lo poco que conocen del esquema aditivo trasladándolo mecánicamente.

5.4.3 Grado Quinto

El análisis de la prueba inicial mostró como un gran número de estudiantes obtuvo resultados muy satisfactorios en la ejecución de los algoritmos directos de las operaciones involucradas en los esquemas aditivo y multiplicativo.

En las tareas que exigían aplicación de las operaciones inversas el número de estudiantes con éxito disminuyó ostensiblemente, para el caso específico de la suma y la resta fueron notorios los errores provenientes de un equivocado empleo del esquema de sustitución. Dificultad manifiesta en la composición, descomposición, solución de problemas e incluso en el algoritmo de la multiplicación. (Al sumar los productos parciales para determinar el total). Dichas fallas tipificaron una situación que hemos denominado "solidaridad de error" y que brinda información valiosa sobre la forma como una mala elaboración conceptual originalmente influye en el fracaso posterior de las tareas donde se utilice.

En las tareas del esquema multiplicativo pocos alumnos resolvieron los ejercicios que pretendían indagar sobre la comprensión de las operaciones de multiplicación y división. Hubo casos donde las respuestas a ítems para determinar el logro de los conceptos "de a" y "entre", fueron sumas y restas sin ninguna relación con la situación planteada.

En la solución de problemas se observaron características muy significativas que nos indican como la ejercitación mecánica de un algoritmo dificulta la comprensión de la operación y su aplicación a situaciones de la vida diaria. Una de esas características es la falta de relación entre la respuesta y los datos del problema. Esto plantea un divorcio entre el acto reflexivo que obliga a confrontar los resultados con la información dada. De paso lleva a soluciones que no respetan la relación parte - todo. (Este aspecto es visible también en los ejercicios de composición y descomposición como proceso inverso).

Cabe señalar adicionalmente que los niños recurren con mucha frecuencia a emplear sumas de sumandos iguales para resolver problemas de multiplicación, demostrando la poca interiorización de esa operación.

En el análisis de las pruebas pueden observarse, categoría por categoría, las diferentes estrategias empleadas por los alumnos y su cualificación o no.

Detallaremos algunas características generales de dicho análisis, las cuales muestran los progresos alcanzados por los estudiantes en la segunda prueba.

Reconocimiento de la reversibilidad algorítmica.

Diferenciación entre el todo y las partes.

Ejecución de los algoritmos, respetando su orden convencional.

Estas tres afirmaciones se fundamentan en los resultados de la prueba final sobre todo en las categorías, composición y descomposición como proceso reversible, solución de problemas y ejercitación algorítmica. Además la comprensión de las operaciones del esquema aditivo es tácita en las características antes mencionadas. Comprensión que se hace más evidente cuando se resuelven tareas que requieren de las operaciones inversas.

Para los algoritmos de la suma y la resta es notorio el progreso, basado en los siguientes aspectos:

Aplicación del esquema de sustitución.

- Diferenciación del valor posicional mediante el reconocimiento del valor absoluto y el relativo de las cifras.

  En colunnamiento adecuado de las cifras de cada número.

  Un cambio cualitativo importante se obtuvo en la solución de problemas. Cambio manifiesto en: Comprensión del problema (correlación entre los datos del problema y la respuesta).

  Relación significativa de la operación con la situación planteada.

  Ejecución adecuada del algoritmo de la operación correspondiente.

La comprensión de las operaciones, ^ multiplicación y división, del esquema multiplicativo es notoria en el buen número de alumnos que efectuaron las tareas que involucraban algoritmos inversos.

En el caso específico de los conceptos "tantas veces", "repartir de a" y "entre" asociados a la multiplicación y la división respectivamente los logros también, fueron buenos.

LoB conceptos asociados con la división "de a" y "entre" permitieron que por lo menos la mayoría de los niños plantearon la operación adecuada en cada caso.

El concepto "tantas veces" "chocó" contra una mala interpretación de la propiedad conmutativa, que confunde la definición de multiplicación con la conmutatividad de la operación. Es decir al pedirse representar por una suma de sumandos iguales la multiplicación a x b cuya respuesta esperada es: b + b + b . . . , a veces, los estudiantes respondieron: a + a + a . . . b veces, que lleva a un producto igual en los dos casos pero con una aplicación errónea del concepto "tantas veces".

6. CONCLUSIONES

De la evaluación inicial del estado del pensamiento lógico matemático realizada a los niños de primero, tercero y quinto podemos concluir:

Los niños de primero, tercero y quinto no han construido comprensivamente la relación entre el todo y las partes como procedimiento directo y reversible.

Los niños reconocen las relaciones de orden y las operaciones básicas cuando éstas se les presentan en forma directa; es decir bajo el algoritmo directo convencional y no como proceso reversible.

Los niños de tercero y quinto realizan los algoritmos de las cuatro operaciones básicas en forma "mecánica". No reconocen la reversibilidad operatoria ni la inversa de cada una de las operaciones. Además, no aplican los esquemas de "sustitución" y "equivalencia" en los procedimientos.

Los niños de primero y tercero y algunos de quinto no han interiorizado el esquema multiplicativo.

Recurren al esquema aditivo (sumas - restas) para resolver las diferentes tareas.

En la resolución de problemas encontramos que los niños de tercero y quinto no establecen una relación significativa entre el problema y la operación que permite encontrar la solución, ni tampoco confrontan las respuestas obtenidas con los datos del problema. Los contenidos matemáticos son totalmente ajenos a cualquier situación de la vida cotidiana.

El proceso de intervención pedagógica centrado en situaciones de aprendizaje significativas permitió en la mayoría de los niños:

Construir (en primero) y reconstruir (en tercero y quinto) el significado de las cuatro operaciones básicas.

- **En los niños de primero construir el significado de los algoritmos de la suma y la resta.**

En los niños de tercero reconstruir el significado de los algoritmos de la suma, resta y multiplicación como procedimiento directo e inverso.

En los niños de quinto reconstruir el significado de los algoritmos de las cuatro operaciones como procedimiento que se da en ambos sentidos.

Todos los niños logran integrar en forma significativa las operaciones básicas con diferentes situaciones problema.

Reconocen las relaciones entre los datos del problema y los procedimientos (operaciones) que les permite encontrar la respuesta.

A medida que los niños se enfrentan a situaciones que les exige realizar diferentes acciones y relaciones van construyendo esquemas de conexión entre las cuatro operaciones básicas: Suma, resta, multiplicación y división. La comprensión de una nueva acción u operación se da a partir de la relación con esquemas previos, o conocimientos anteriores. Es por esto que ante la tarea de resolver un problema que exige de la multiplicación o división el niño recurra a la suma y la resta para encontrar la respuesta. Es decir el niño logra conectar la nueva situación a la experiencia previa para comprenderla.

RECOMENDACIONES

1. Para potencializar un adecuado desarrollo del pensamiento lógico matemático en los niños en edad escolar es importante partir de situaciones significativas que permitan la integración de diferentes conceptos matemáticos y las relaciones existentes entre ellos.
2. El trabajo en torno a situaciones de aprendizaje le exige al maestro la apropiación del saber específico y del proceso de construcción de ese saber por parte del niño.
3. El diseño de las actividades debe estar centrado en tres aspectos fundamentales: La comprensión, ejercitación y resolución de problemas que se dan en forma interrelacionadas y que a su vez son criterios básicos para una evaluación permanente del proceso de conocimiento de los niños.

   Queremos resaltar la necesidad de hacer énfasis en la comprensión y ejercitación de los esquemas reversibles en las diferentes relaciones y operaciones.

> **En las diferentes situaciones en las que se permite a los niños realizar múltiples acciones y relaciones: Los niños van construyendo esquemas de conexión entre las cuatro operaciones básicas, suma resta, multiplicación y división.**

Esto se deduce de las estrategias que utilizan para resolver las diferentes tareas, es así, como ante una actividad que implique la multiplicación o la división los niños recurren a esquemas previos en este caso la suma y la resta.

El conocimiento previo que tiene un niño, por ejemplo de la suma o la resta le permite resolver problemas diferentes no sólo que correspondan a estas dos operaciones sino también de multiplicación y división.

BIBLIOGRAFIA

ALONSO, Jesús y GUTIERREZ, Francisco. "Comprensión de la inclusión jerárquica de clases, estudio evolutivo. En: Revista Infancia y Aprendizaje. No. 49, 1990, 91-106, Barcelona.

BARRON RUIZ, Angela. "Constructivismo y desarrollo de Aprendizajes significativos". En: Revista de Educación. No. 294, 1991, 301 - 321, Barcelona.

BERMEJO, Vicente. "Factores espacio semánticos y tipicidad en Conductas de clasificación e inclusión", En: Estudios de Psicología, No. 37, 1989, 31 - 44.

BETH, Ever W. y PIAGET, Jean. Epistemología matemática y Psicologial. Barcelona : Editorial Crítica, 1980.

BASSEDAS, Mercedes y SELLARES, Rosa. "La construcción individual del sistema de numeración convencional". En: Revista infancia y aprendizaje, No. 19, 20, 1982. 75 - 88. Barcelona.

BERMEJO, Vicente y RODRIGUEZ, Purificación. "Estructuras semánticas y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición": En: Revista Infancia y Aprendizaje, No. 39 - 40, 1987, 71 - 81. Madrid.

BERMEJO, Vicente y LAGO, María O. "Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos". En: Revista Infancia y Aprendizaje. No. 44, 1988, 109 - 121. Madrid.

CARRETERO, Mario. Constructivismo y Educación. Barcelona : Edel vires, 1980.

CASTELLNUOVO, Emma. Didáctica de la matemática moderna. México : Editorial Trillas, 1980.

CARRETERO, Mario y MARTIN, Elena. "Las operaciones concretas". En: Psicología evolutiva. Desarrollo cognitivo y social del niño. Carretero, Mario y otros. Compiladores. Madrid : Alianza editorial, 1984.

COLL, César. "Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo". En: Revista Infancia y Aprendizaje. No. 41, 1988, 131 - 142. Barcelona.

--------. "Las aportaciones de la psicología a la educación: El caso de la teoría genética y de los aprendizajes escolares". En: Psicología Genética y Aprendizajes escolares. César Coll. Compilador. Madrid : Siglo XXI Editores, 1983.

--------. "La construccción del esquemas de conocimiento en el proceso enseñanza aprendizaje". En: Psicología Genética y aprendizaje escolar. César Coll. Compilador. Madrid : Siglo XXI Editores, 1983.

COLLINS, Kevin. "La matemática escolar y los estadios de desarrollo". En: Revista Infancia y Aprendizaje No. 19 - 20, 1982, 39-74. Barcelona.

DELVAL, Juan. La inteligencia : Su crecimiento y medida. Barcelona :Salvat Editores, 1985.

DICKSON, Linda; BROWN, Margaret y GIBSON, Olwen. El Aprendizaje de las matemáticas. Editorial Labor S.A., 1991.

DREVILLON, Jean. Prácticas Educativas y Desarrollo del pensamiento operativo. Madrid : Ediciones Pirámide S.A., 1980.

DREVILLON, Jean. Prácticas Educativas y desarrollo del pensamiento operatorio. Editorial Pirámide S.A. 1980. Madrid.

GOMEZ, G. Carmen. "La Representación gráfica de la multiplicación aritmética: Una experiencia de aprendizaje. En: Revista Infancia y Aprendizaje. No. 31 - 32, 1985, 229 - 249. Barcelona.

--------. "La Función del dibujo en la construcción de los formalismos matemáticos". En: Cuadernos de Psicología. Barcelona, 1986. v. 8, No. 2.

-------- "Procesos cognitivos en el aprendizaje de la multiplicación". En: Revista Infancia y Aprendizaje. Barcelona, 1981.

KAMMI, Constance y JOSEPH, Linda. "La enseñanza del valor posicional y la adición en las columnas". En: Revista Comunicación, Lenguaje y Educación. No. 6, 27 - 35. 1990.

KAMMI, Constance. "Valor de posición : una explicación de sus dificultades e implicaciones educacionales para los alumnos de primaria". En: Cuadernos de Psicología, Vol. 9 No. 2, 1988, 112 - 135. Cali.

LACASA, Pilar; PEREZ LL., M. Carmen y PEREZ, Concepción. "Conceptualización de la acción propia y material manipulable en una tarea de Seriación, en niños escolarizados de 4 a 8 años". En: Revista de Psicología general aplicada, 1039 - 1063. Madrid.

LERNER, Delia. La matemática en la escuela. Aquí y ahora. Buenos Aires : Arque Grupo Editores, 1992.

MARTINEZ, B. Alberto. "La enseñanza como posibilidad del pensamiento", En: Pedagogía Discurso y Poder Mario Díaz (Compilador), Corprodic, 1990, Bogotá.

MEJIA, M. Mercedes; RAMIREZ, Cristina y URREA, Doris. "Seriación : un proceso de aprendizaje. En: Revista Cuadernos de Psicología, 3 - 40, Universidad del Valle.

MESA B., Orlando. Camino a la Aritmética I. Un enfoque constructivista. Centro de Pedagogía Participativa, Medellín, 1990.

MESA, B. Orlando. Primer coloquio regional de matemáticas y estadística. Antioquia - Chocó. "La Resolución de problemas". Universidad de Antioquia, Departamento de matemáticas. Medellín, 1990.

PALAO, Gladyz D. y CASTORINA, Antonio. Introducción a la lógica operatoria.

PEREZ, Julio. "Inferencias Causales y clasificación : Su relación en niños de 4 a 7 años". En: Revista Infancia y Aprendizaje. Barcelona, 1990 No. 49, p. 91 - 106.

PIAGET, Jean. Psicología de la inteligencia. Editorial Psique, 1965, Buenos Aires.

_________El mecanismo del desarrollo mental. Editorial Nacional, 1979, Madrid.

RIEBEN, Laurence. Inteligencia global, Inteligencia operatoria y creatividad. Barcelona : Editorial Médica y Técnica S.A., 1979.

RODRIGUEZ, María José. "La crísis de la noción de estructura : Análisis experimental del estudio de las opciones concretas". En: Revista Infancia y aprendizaje, 1982, No. 17, 115 - 127. Barcelona.

SERRANO, José M. y DENIA, Ana M. "Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. En: Revista Infancia y Aprendizaje. Barcelona, 1987, No. 39 - 40, 57 - 69.

STEFFE, Leslie y GIASERSFELD, Ernest Von. "Cómo ayudar a los niños a comprender el número". The University Georgia. Traducido por Mariela Orozco.

VASCO, Carlos E. Marcos Generales del Currículo. 1982, M.E.N. Colombia.

VASCO M., Eloisa. "El saber pedagógico : razón de ser de la Pedagogía". En: Pedagogía discurso y poder, Mario Díaz (compilador). Bogotá : Corprodic, 1990.