Revista de la Facultad de Ciencias, *Rev. Fac. Cienc.* Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
V 6 N°2 julio-diciembre de 2017 • ISSN-e 2357-5749 • Artículo Revisión • Páginas 141 a 162
DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64535

SOBRE EL CONTROL EN SISTEMAS DINÁMICOS DE DIMENSIÓN INFINITA EN ESPACIOS DE HILBERT Y DE FRECHÉT[a]

ON THE CONTROL OF INFINITE DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS ON HILBERT AND FRECHÉT SPACES

NANCY LÓPEZ REYES[b]

Recibido 30-04-2017, aceptado 16-10-2017, versión final 19-10-2017.
Artículo Revisión

RESUMEN: Se revisa el Control sobre sistemas dinámicos lineales de dimensión infinita que evolucionan en espacios con propiedades geométrico-algebraicas diferentes. En un caso, sobre espacios de Hilbert, los cuales poseen una rica estructura geométrico-algebraica, muy útil para el tratamiento del control, desde el punto de vista del enfoque dominio-frecuencia y del enfoque espacio-estado. En el otro caso, sobre espacios de Frechét, en particular sobre $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, cuyas propiedades geométricas implican un tratamiento diferente del Control. Ambos casos se ilustran con sendos ejemplos de aplicaciones interesantes, uno relacionado con Sistemas Integrables y el otro con la conocida Ecuación de Loewner.

PALABRAS CLAVE: Teoría de sistemas, sistemas de control, jerarquía KP discreta, ecuación de Loewner.

ABSTRACT: The Control theory of infinite-dimensional lineal systems on spaces with quite different algebro-geometric properties is reviewed. Firstly, is revised the case where the systems evolve on Hilbert spaces which, as it known, have a rich algebro-geometric structure, very useful to study of both, frequency-domain and state-space approaches. In the another case, the systems evolve on Frechét spaces, in particular on the $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, that requires a qualitative different treatment of control. Both cases are illustrated with two examples, which are applications related with the integrable systems and the Loewner equation.

KEYWORDS: system theory, control systems, discrete KP hierarchy, Loewner equation.

1. INTRODUCCIÓN

El control de los sistemas de dimensión infinita es una conocida área de investigación y aplicación en el desarrollo de nuevas tecnologías, a la que se le han dedicado innumerables libros y artículos, por ejemplo, Bensoussan et al. (1993), Jurdjevi (1997), Jacob & Zwart (2002), Brockett & Faybusovich (1991). Algunos de ellos, como Curtain & Zwart (1995), han abordado el estudio de estos sistemas con un enfoque bastante

[a]López, N. (2017). Sobre el control en sistemas dinámicos de dimensión infinita en espacios de Hilbert y de Frechét. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(**2**), 141–162. DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64535

[b]PhD en Matemáticas. Profesora Titular. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Antioquia. nancy.lopez@udea.edu.co

integrador, tratando tanto los métodos relacionados con los aspectos del enfoque espacio-estado, así como los relacionados con el enfoque dominio-frecuencia. En ambos enfoques, los espacios sobre los que se definen los sistemas de control son espacios de Hilbert de dimensión infinita (Akhiezer & Glasman, 1993), los cuales poseen una estructura geométrico-algebraica que brinda muchas posibilidades.

Por otro lado, también se han abordado, con cierto interés, en el estudio de problemas extremales, sistemas sobre $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, espacio de funciones analíticas del disco unitario $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^n$ *en* $\mathbb{C}$ Duren (1983), Pomemrenke (1975), Shoikhet (2001). En este caso, las propiedades geométrico-algebraica de este tipo de espacio llevan a un tratamiento diferente del control (Roth, 1998).

Este trabajo es una revisión de algunos aspectos del control de sistemas de dimensión infinita, en los casos antes mencionados. Se exponen así, algunos elementos fundamentales de los sistemas de control en espacios de Hilbert (Bensoussan et al., 1993) y en el espacio de Frechét $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (Goodman, 1968).

En los sistemas lineales de dimensión infinita, el control se realiza sobre espacios de dimensión infinita, es decir, el conjunto alcanzable, que es el conjunto de elementos que definen la trayectoria del sistema, es de dimensión infinita. Abordamos este tema en dos partes fundamentales: en la primera, los conjuntos alcanzables son espacios de Hilbert (muchos resultados se pueden considerar también sobre espacios de Banach), y en la segunda, los conjuntos alcanzables son familias de funciones analíticas de una variable compleja.

En la primera parte se ven aspectos cualitativos del control como las propiedades duales de controlabilidad y la observabilidad, a la luz del enfoque espacio-estado. Además, se trata la teoría de realización, a la luz del enfoque dominio-frecuencia. Esta parte incluye también, el problema de Cauchy y el problema con fronteras. En la segunda parte se ven los sistemas de control en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, considerándose el problema de valor inicial y su solución, a partir de familias de evolución definidas en ciertas clases de funciones analíticas.

De forma sumarizada, a manera de ilustración, los problemas que se abordan en ambas partes son:

	teoría de control en Z	*teoría de control en* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$
sistema de control	$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t) = f(z(t),u(t))$	$\frac{d}{dt}w(z,t) = h(z,w(z,t),t)$
conjunto de entradas	$U \subseteq Z$	$\Omega \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$
función de control	$u \in L^1(I;U)$	$h \in L^1(I;\Omega)$
soluciones del sistema	$t \to z(t) \in Z$	$t \to w(\cdot,t) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$

Z: espacio de Hilbert, $I \subseteq \mathbb{R}^+$.

El contenido del trabajo es el siguiente: en la sección 2 se exponen, de manera general, algunos aspectos de la teoría de sistemas en dimensión finita (Curtain & Pritchard, 1977), en la sección 3 se tratan los aspectos relacionados con el control en espacios de Hilbert (Bensoussan et al., 1993; Curtain & Zwart, 1995), en la sección 4, los relacionados con el control en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (Goodman, 1968; Roth, 1998), y finalmente, en la sección 5 se dan dos ejemplos de aplicaciones.

2. SISTEMAS DE DIMENSIÓN FINITA

A continuación se exponen, de manera general y resumida, algunos aspectos esenciales de la teoría de sistemas de dimensión finita, para dar una idea de de los aspectos conceptuales que se presentan al pasar del caso finito al infinito.

Se entiende por un sistema lineal de dimensión finita $\Sigma(A,B,C,D)$ en el espacio de estado Z al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t)+Bu(t), \qquad t\geq 0, \qquad z(0)=z_0 \\ y(t) &= Cz(t)+Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

donde z_0 es una condición inicial arbitraria y A,B,C son aplicaciones lineales acotadas tales que $A\in\mathcal{L}(Z)$, $B\in\mathcal{L}(U,Z)$, $C\in\mathcal{L}(Z,Y)$, $D\in\mathcal{L}(U,Y)$, Z,U,Y son espacios vectoriales lineales de dimensión finita, conocidos como espacio de estado, espacio de entrada y espacio de salida, respectivamente ($Z=\mathbb{C}^n, U=\mathbb{C}^m, Y=\mathbb{C}^k$). Estos espacios vectoriales son casos particulares de $\mathcal{L}(\Omega,\Gamma)$, espacio de aplicaciones lineales acotados de Ω en Γ. El estado $z(t)\in Z$, la entrada $u(t)\in U$ y la salida $y(t)\in Y$ están relacionados por las ecuaciones (1).

Si $u\in L_2([0,\tau];U)$ entonces $z\in C([0,\tau];Z)$ y $y\in L_2([0,\tau];Y)$ están dados por

$$z(t)=e^{At}z_0+\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{2}$$

y

$$y(t)=Ce^{At}z_0+\int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds+Du(t), \tag{3}$$

donde $L_p(\Omega;\Gamma)$ es el conjunto de aplicaciones de $L_p(\Omega)$ en Γ, siendo $L_p(\Omega)$ el conjunto de funciones medibles Lebesgue sobre Ω y $C(\Omega;\Gamma)$ es el conjunto de funciones continuas de Ω en Γ.

Haciendo $z_0=0$ en (3) y tomando la transformada de Laplace de $y(t)$ obtenemos la representación dominio-frecuencia del sistema $\Sigma(A,B,C,D)$

$$\widetilde{y}(s)=D\widetilde{u}(s)+C(sI-A)^{-1}B\widetilde{u}(s), \quad s\in\mathbb{C}^+_\omega=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)>\omega\}$$

y así la función de transferencia del sistema queda dada por

$$G(s)=D+C(sI-A)^{-1}B \tag{4}$$

en este caso (4) es una función racional propia con coeficientes complejos. Las propiedades algebraicas de esta clase de funciones han sido muy explotadas en el control de los sistemas de dimensión finita, dando lugar a resultados muy útiles de la teoría de realización de sistemas dinámicos.

Diferentes conceptos, asociados a los aspectos cualitativos del control, como la controlabilidad, la observabilidad y la estabilidad, han sido caracterizados de diversas maneras. Revisaremos algunas de ellas.

El sistema $\Sigma(A,B,-)$ es ***controlable*** si para algún $0<\tau<\infty$, la ***aplicación de controlabilidad*** $\mathcal{B}^\tau : L_2([0,\tau];U)\to Z$ y definida como

$$\mathcal{B}^\tau u := \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}Bu(s)ds \tag{5}$$

tiene a Z como la clausura de su rango, es decir $\overline{ran(\mathcal{B}^\tau)} = Z$.

El sistema $\Sigma(A,-,C)$ es ***observable*** si para algún $0<\tau<\infty$, la ***aplicación de observabilidad*** $\mathcal{C}^\tau : Z \to L_2([0,\tau];Y)$, definida como

$$(\mathcal{C}^\tau z_0)(t) := Ce^{At}z_0 \tag{6}$$

es tal que $ker(\mathcal{C}^\tau) = \{0\}$.

Se tiene fácilmente que $\Sigma(A,B,C)$ es controlable, si y sólo si,

$$ran(BAB...A^{n-1}B) = dim(Z) = n$$

y análogamente obsevable, si y sólo si,

$$ran(C^*A^*C^*...(A^{n-1})^*C^*) = dim(Z) = n$$

donde A^* es el adjunto de A.

Otro criterio para el estudio de la controlabilidad y la observabilidad es mediante el gramiano.

El sistema $\Sigma(A,B,C)$ es controlable si su gramiano de controlabilidad en $[0,\tau]$ para $0<\tau<\infty$, definido como

$$L_B^\tau := \mathcal{B}^\tau(\mathcal{B}^\tau)^* = \int_0^\tau e^{As}BB^*e^{A^*s}ds, \tag{7}$$

satisface que $L_B^\tau > 0$, y observable si su gramiano de obsevabilidad en $[0,\tau]$ para $0<\tau<\infty$, definido como

$$L_C^\tau = (\mathcal{C}^\tau)^*\mathcal{C}^\tau = \int_0^\tau e^{A^*s}C^*Ce^{As}ds \tag{8}$$

satisface que $L_C^\tau > 0$.

Se dice que A es ***exponencialmente estable*** si

$$\exists M > 0, \omega > 0 : \quad \|e^{At} z_0\| \leq M e^{-\omega t} \|z_0\|, \; t > 0 \tag{9}$$

En los sistemas exponencialmente estables, (7) y (8) alcanzan, respectivamente, las condiciones de controlabilidad y obsevabilidad para $\tau = \infty$. Así los gramianos de controlabilidad y obsevabilidad $L_B = L_B^\infty$ y $L_C = L_C^\infty$ satisfacen las ecuaciones de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AL_B + L_B A^* &= -BB^* \\ A^* L_C + L_C A &= -C^* C \end{aligned} \tag{10}$$

De hecho, L_B y L_C son las soluciones únicas de (10).

A continuación, veremos cómo algunos de los aspectos antes mencionados, se generalizan al caso de dimensión infinita. Esto ha permitido el desarrollo de una teoría útil para el diseño del control de un conjunto significativo de problemas.

3. SISTEMAS DE DIMENSIÓN INFINITA. EL CONTROL EN ESPACIOS DE HILBERT

En esta sección se presentan los sistemas lineales de estado (sistemas espacio-estado, sistema entrada-salida), que sirven para modelar problemas de ecuaciones diferenciales como sistemas de control en un espacio abstracto, y estudiar sus propiedades.

3.1. Nociones preliminares (Chicone & Latushkin, 1999; Hille & Phillips, 1948; Pazy, 1992)

Definición 3.1. *Una función operador-evaluada $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$ es un* ***semigrupo*** *sobre un espacio de Hilbert Z, si satisface*

$$T(0) = I \tag{11}$$

$$\forall t, s \geq 0, \quad T(t+s) = T(t)T(s). \tag{12}$$

Definición 3.2. *Un* ***semigrupo*** *$T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$ es* ***fuertemente continuo*** *sobre un espacio de Hilbert Z, si satisface:*

$$\forall z \in Z, \quad \|T(t)z - z\| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to 0^+. \tag{13}$$

Usaremos la notación usual c_0**-semigrupo** para referirnos a un semigrupo fuertemente continuo.

Definición 3.3. *El **generador infinitesimal** A del semigrupo $T(t)$ se define como*

$$Az = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)-I)z \tag{14}$$

siempre que el límite exista. El dominio de A, D(A), es definido como el conjunto de elementos en Z para los cuales el limite existe.

Definición 3.4. *Sea el conjunto $\Delta(\tau) = \{(s,t) : 0 \leq s \leq t\}$.*
*$U(t,s) : \Delta(\tau) \to \mathcal{L}(Z)$ es un **operador de evolución débil** si satisface*

a- $U(s,s) = I$.

b- $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ *para todo* $0 \leq s \leq r \leq t < \tau$.

c- $U(\cdot,s)$ *es fuertemente continuo en* $[s,\tau]$ *y* $U(t,\cdot)$ *es fuertemente continuo en [0,t], o sea,* $U(t,s)$ *es un* c_0*-semigrupo en t sobre* $[s,\tau]$ *para cada s fijo, y un* c_0*-semigrupo en s sobre* $[0,t]$ *para cada t fijo.*

3.1.1. El problema de Cauchy

Sea A el generador infinitesimal de un c_0-semigrupo $T(t)$ en un espacio de Hilbert Z, $f \in C^1([0,\tau];Z)$ y $z_0 \in D(A)$. La solución del **problema de Cauchy abstracto homogéneo**

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0, \qquad z(0) = z_0 \in D(A) \tag{15}$$

es

$$z(t) = T(t)z_0.$$

Para el **problema de Cauchy abstracto no homogéneo**

$$\dot{z}(t) = Az(t) + f(t) \quad t \geq 0, \qquad z(0) = z_0. \tag{16}$$

la función $z(t)$ es una **solución clásica** en $[0,\tau]$ si $z \in C^1([0,\tau];Z)$, $z(t) \in D(A)$ para todo $t \geq [0,\tau]$ y $z(t)$ satisface (16) para todo $t \in [0,\tau]$, donde $C^n(\Omega;\Gamma)$ es el conjunto de funciones de Ω en Γ con derivada n-ésima continua. La función $z(t)$ es una solución clásica en $[0,\infty)$ si $z(t)$ es una solución clásica en $[0,\tau]$ para todo $\tau \geq 0$. Si $f \in C([0,\tau];Z)$ y z es una solución clásica de (16) en $[0,\tau]$, entonces $Az(\cdot)$ es un elemento de $C([0,\tau];Z)$ y

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{17}$$

es continuamente diferenciable en $[0,\tau]$ y es la única solución clásica de (16).

3.1.2. El problema de control con frontera

Problemas de este tipo son frecuentes en diferentes aplicaciones. La formulación que trataremos a continuación nos permite modelar una gran variedad de estos problemas. Sea el sistema abstracto:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathfrak{U}z(t), \qquad z(0) = z_0, \\ \mathfrak{B}z(t) &= u(t) \end{aligned} \tag{18}$$

donde el operador $\mathfrak{U} : D(\mathfrak{U}) \subset Z \to Z$, $u(t) \in U$, siendo U un espacio de Hilbert separable y el operador de frontera $\mathfrak{B} : D(\mathfrak{B}) \subset Z \to U$ satisface que $D(\mathfrak{U}) \subset D(\mathfrak{B})$.

Definición 3.5. *El sistema de control definido en (18) se denomina* ***sistema de control con frontera*** *si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *El operador $A : D(A) \to Z$, con $D(A) = D(\mathfrak{U}) \cap ker(\mathfrak{B})$ y*

$$Az = \mathfrak{U}z \quad para \quad z \in D(A) \tag{19}$$

es el generador infinitesimal de un c_0-semigrupo en Z.

2. *Existe un operador $B \in \mathcal{L}(U,Z)$ tal que para todo $u \in U$, $Bu \in D(\mathfrak{U})$, el operador $\mathfrak{U}B$ es un elemento de $\mathcal{L}(U,Z)$ y*

$$\mathfrak{B}Bu = u, \quad u \in U \tag{20}$$

Si suponemos que (18) es un sistema de control con frontera, con $u \in C^2([0,\tau];U)$, entonces la siguiente ecuación diferencial abstracta para $v \in Z$ está bien planteada

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= Av(t) - B\dot{u}(t) + \mathfrak{U}Bu(t) \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{21}$$

Esto se debe, a que bajo la suposición de que A es el generador infinitesimal de un c_0-semigrupo y los operadores B, $\mathfrak{U}B$ son lineales acotados, la función $f(t) = -B\dot{u}(t) + \mathfrak{U}Bu(t)$ es un elemento de $C^1([0,\tau];Z)$.

Podemos reformular (18) como una ecuación de evolución abstracta (21). En esta ecuación aparece la derivada del término de control, lo que es no deseable. Este hecho puede resolverse reformulando (21) en un nuevo espacio de estado $Z^e = U \oplus Z$, definido como la suma directa de los espacios U y Z; obteniéndose así, la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{z^e}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{U}B & A \end{pmatrix} z^e(t) + \begin{pmatrix} I \\ -B \end{pmatrix} \widetilde{u}(t) \\ z^e(0) &= \begin{pmatrix} (z_0^e)_1 \\ (z_0^e)_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

Si $v_0 \in D(A)$ y $u \in C^2([0,\tau];U)$, entonces (22) con $(z_0^e)_1 = u(0)$, $(z_0^e)_2 = v_0$ y $\widetilde{u} = \dot{u}$, tiene solución clásica única

$$z^e(t) = \begin{pmatrix} (z^e(t))_1 \\ (z^e(t))_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

donde $v(t)$ es la solución clásica única de (21). Más aún, si $z_0 = v_0 + Bu(0)$ entonces la solución clásica de (18) está dada por

$$z(t) = \begin{pmatrix} B & I \end{pmatrix} z^e(t) \tag{23}$$

$$= Bu(t) - T(t)Bu(0) + T(t)z_0 - \int_0^t T(t-s)B\dot{u}(s)ds + \int_0^t T(t-s)\mathfrak{U}Bu(s)ds \tag{24}$$

3.2. Sistema lineal de estado. Teoría espacio-estado

Definición 3.6. *El sistema infinito-dimensional con entrada u y salida y:*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), \qquad t \geq 0, \qquad z(0) = z_0 \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{25}$$

es un sistema lineal de estado, denotado por $\Sigma(A,B,C,D)$*, donde* A *es el generador infinitesimal de un* c_0*-semigrupo* $T(t)$ *en un espacio de Hilbert* Z*,* B *es un operador lineal acotado de un espacio de Hilbert* U *en* Z*,* C *es un operador lineal acotado de* Z *en un espacio de Hilbert* Y *y* D *es un operador acotado de* U *en* Y*.*

La solución de (25) es dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)dx, \qquad t \geq 0 \tag{26}$$

Si $u \in C([0,\tau];Z)$, $z(t)$ será una solución clásica de (25). Si $u \in L_p([0,\tau];Z)$, $z(t)$ será una solución débil de (25).

3.3. Controlabilidad y observabilidad

La controlabilidad es la propiedad que nos permite controlar lo que sucede entre dos puntos arbitrarios del espacio de estado (dos estados arbitrarios). En particular, se dice que z es ***controlable*** hasta $\widehat{z}$, si existe un tiempo α y un control u tal que $\widehat{z} = z(\alpha)$. Hay varias caracterizaciones del concepto de controlabilidad, las cuales coinciden si el espacio de estado es de dimensión finita. En dimensión infinita la situación es más compleja.

Definición 3.7. *Sea el sistema lineal de estado* $\Sigma(A,B,\_)$.

(i) La **aplicación controlabilidad** *de* $\Sigma(A,B,\_)$ *en* $[0,\tau]$*, para algún* $0 < \tau < \infty$*, es el operador lineal y acotado* $\mathcal{B}^\tau : L_2([0,\tau];U) \to Z$ *definido como*

$$\mathcal{B}^\tau u := \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds \tag{27}$$

(ii) *El* **gramiano de controlabilidad** *de* $\Sigma(A,B,\_)$ *en* $[0,\tau]$ *se define como el operador*

$$L_B^\tau := \mathcal{B}^\tau(\mathcal{B}^\tau)^* \tag{28}$$

(iii) *El sistema* $\Sigma(A,B,\_)$ *es* **aproximadamente controlable** *en* $[0,\tau]$*, para algún* $0<\tau<\infty$*, si dado* $\varepsilon>0$ *arbitrario, todos los puntos de* Z *pueden ser alcanzados, en un tiempo* τ*, desde el origen hasta una distancia* ε *de ellos, es decir*

$$\overline{ran(\mathcal{B}^\tau)} = Z$$

(iv) *El sistema* $\Sigma(A,B,\_)$ *es* **exactamente controlable** *en* $[0,\tau]$*, para algún* $0<\tau<\infty$*, si todos los puntos de* Z *pueden ser alcanzados desde el origen en un tiempo* τ*, es decir*

$$ran(\mathcal{B}^\tau) = Z$$

Notemos que en la definición anterior C y D no intervienen.

Las aplicaciones controlabilidad y el gramiano de controlabilidad satisfacen las siguientes propiedades:

a- $\mathcal{B}^\tau \in \mathcal{L}(L_2([0,\tau];U),Z), \quad \mathcal{B}^t \in \mathcal{L}(L_2([0,\tau];U),L_2([0,\tau],Z)), \quad 0\le t\le\tau$

b- $(\mathcal{B}^{\tau *}x)(s) = B^*T^*(t-s)z$

c- $L_B^\tau \in \mathcal{L}(Z), \quad L_B^\tau z = \int_0^\tau T(s)BB^*T^*(s)zds, \quad z\in Z$

El sistema $\Sigma(A,B,-)$ tiene, en cierto sentido, una propiedad de invarianza bajo la traslación y el escalamiento del generador infinitesimal, esto significa que $\Sigma(A,B,-)$ es exactamente (aproximadamente) controlable si y sólo si, el sistema $\Sigma(\mu I+A,B,-)$ es exactamente (aproximadamente) controlable para todo $\mu\in\mathbb{C}$.

La observabilidad es un concepto dual al de controlabilidad, según el cual el conocimiento de los datos de salida (entrada) del sistema están determinados únicamente por el estado inicial.

Definición 3.8. *Sea el sistema lineal de estado* $\Sigma(A,\_,C)$.

(i) *La* **aplicación observabilidad** *en* $[0,\tau]$*, para algún* $0<\tau<\infty$*, es el operador lineal acotado* $\mathcal{C}^\tau : Z\to L_2([0,\tau];Y)$ *definido como*

$$\mathcal{C}^\tau z := CT(\cdot)z \tag{29}$$

(ii) *El* **gramiano de observabilidad** *del sistema* $\Sigma(A,\_,C)$ *en* $[0,\tau]$ *se define como el operador*

$$L_C^\tau = (\mathcal{C}^\tau)^*\mathcal{C}^\tau \tag{30}$$

(iii) *El sistema* $\Sigma(A,\_,C)$ *es* **aproximadamente observable** *en* $[0,\tau]$*, para algún* $0<\tau<\infty$*, si el conocimiento de la salida en* $L_2([0,\tau];Y)$ *determina el estado inicial de forma única, es decir*

$$ker(\mathcal{C}^{\tau})=\{0\}$$

(iv) *El sistema* $\Sigma(A,\_,C)$ *es* **exactamente observable** *en* $[0,\tau]$*, para algún* $0<\tau<\infty$*, si el conocimiento de la salida en* $L_2([0,\tau];Y)$ *determina el estado inicial de forma única y continua, es decir* $\mathcal{C}^{\tau}$ *es inyectiva y su inversa es acotada en el* $ran(\mathcal{C}^{\tau})$*.*

El sistema $\Sigma(A,-,C)$

a- es aproximadamente observable en $[0,\tau]$ si y sólo si, el sistema $\Sigma(A^*,C^*,-)$, que denominaremos su dual, es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$.

b- es exactamente observable en $[0,\tau]$ si y sólo si, el sistema dual $\Sigma(A^*,C^*,-)$ es exactamente controlable en $[0,\tau]$.

3.3.1. Pruebas de controlabilidad y de observabilidad

Teorema 3.1. ***(Curtain & Zwart (1995))*** *El sistema* $\Sigma(A,B,-)$

a- *es exactamente controlable en* $[0,\tau]$*, si y sólo si, una de las siguientes condiciones es válida para algún* $\gamma>0$ *y todo* $z\in Z$

(i) $\langle L^{\tau}_{\mathcal{B}}z,z\rangle \geq \gamma\|z\|^2$

(ii) $\|\mathcal{B}^{\tau *}z\|^2 := \int_0^{\tau}\|(\mathcal{B}^{\tau *}z)(s)\|^2 ds \geq \gamma\|z\|^2$

(iii) $\int_0^{\tau}\|B^*T^*(s)\|^2\, ds \geq \gamma\|z\|^2$

(iv) $ker(\mathcal{B}^{\tau *})=0$ *y* $ran(\mathcal{B}^{\tau *})$ *es cerrado*

b- *es aproximadamente controlable en* $[0,\tau]$*, si sólo si, una de las condiciones es válida*

(i) $\mathrm{L}^{\tau}_{\mathcal{B}}>0$

(ii) $ker\mathcal{B}^{\tau *}=0$

(iii) $B^*T^*(s)z=0$ *en* $[0,\tau]$ *implica que* $z=0$*.*

Corolario 3.1. ***(Curtain & Zwart (1995))*** *Para el sistema de estado lineal* $\Sigma(A,-,C)$ *se tienen las siguientes condiciones necesarias y suficientes para la observabilidad exacta y observabilidad aproximada:*

a- $\Sigma(A,-,C)$ *es exactamente observable en* $[0,\tau]$*, si y sólo si, una de las siguientes condiciones es válida, para algún* $\gamma>0$ *y todo* $z\in Z$*.*

(i) $\langle \mathrm{L}^{\tau}_{\mathcal{C}}z,z\rangle \geq \gamma\|z\|^2$

(ii) $\|\mathcal{C}^{\tau}z\|^2 = \int_0^{\tau} \|(\mathcal{C}^{\tau}z)(s)\|^2 ds \geq \gamma\|z\|^2$

(iii) $\int_0^{\tau} \|CT(s)z\|^2 ds \geq \gamma\|z\|^2$

(iv) $ker(\mathcal{C}^{\tau}) = \{0\}$ *y* $\mathcal{C}^{\tau}$ *tiene rango cerrado.*

b- $\Sigma(A,-,C)$ *es aproximadamente observable en* $[0,\tau]$*, si y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones.*

(i) $\mathrm{L}_{\mathcal{C}^{\tau}} > 0$

(ii) $ker(\mathcal{C}^{\tau}) = \{0\}$

(iii) $C\mathrm{T}(s)z = 0$ *en* $[0,\tau] \Rightarrow x = 0$

3.4. Alcanzabilidad

Definición 3.9. *El subespacio de alcanzabilidad del sistema* $\Sigma(A,B,\_)$ *es el subespacio de todos los estados que pueden ser alcanzados desde el origen:*

$$\mathcal{R} := \left\{ z \in Z : \quad \exists\tau > 0, u \in \mathcal{L}([0,\tau];U), \quad z = \int_0^{\tau} T(\tau - s)Bu(s)ds \right\} = \bigcup_{\tau>0} ran(\mathcal{B}^{\tau})$$

Por tanto, diremos que el sistema $\Sigma(A,B,\_)$ *es aproximadamente controlable, si dado un elemento arbitrario* $z_1 \in Z$ *y* $\varepsilon > 0$*, es posible dirigirlo desde el origen hasta una distancia no mayor de* ε *del elemento* z_1*, es decir,* $\mathcal{R}$ *es denso en Z.*

El subespacio no observable de $\Sigma(A,\_,C)$ *es el subespacio de todos los estados iniciales que producen salida cero para todo* $t \geq 0$*:*

$$\mathcal{N} := \{z \in Z : CT(t)z = 0 \text{ para todo } t \geq 0\} = \bigcap_{\tau>0} ker(\mathcal{C}^{\tau})$$

El sistema $\Sigma(A,\_,C)$ *es aproximadamente observable si el único estado inicial que produce salida cero en* $[0,\infty)$ *es el estado cero, es decir, si* $\mathcal{N} = \{0\}$.

3.5. Relación entrada-salida. Aplicación entrada-salida. Función de transferencia

En el sistema $\Sigma(A,B,C,D)$ se determinan relaciones particulares entre la entrada, el estado y la salida (Fuhrmann, 1973; Jacob & Zwart, 2002; Zwart, 2004). El semigrupo asociado al sistema especifica la relación entre los estados, mientras que la aplicación controlabilidad (27) especifica la relación entre las entradas y los estados, y la aplicación observabilidad (29) especifica la relación entre el estado inicial y la salida.

Definición 3.10. *Sea el sistema lineal de estado $\Sigma(A,B,\_)$ con estado inicial $z_0 = 0$.*
La **aplicación entrada-salida** *de $\Sigma(A,B,\_)$ en $[0,\tau]$ es la aplicación lineal y acotada*

$$\mathcal{F}^{\tau} : L_2([0,\tau];U) \to L_2([0,\tau];Y)$$

definida como

$$\mathcal{F}^{\tau}u := Du(t)\int_0^t CT(t-s)Bu(s)ds,\ t \in [0,\tau] \tag{31}$$

Las relaciones que expresan $T(t), \mathcal{B}^{\tau}, \mathcal{C}^{\tau}, \mathcal{F}^{\tau}$ muestran las características intrínsecas del sistema de control, estos operadores son relevantes para el análisis y la síntesis del sistema en el enfoque espacio-estado (entrada-salida).
La función de transferencia es una relación entre la transformada de Laplace de las entradas al sistema y la transformada de Laplace de las salidas del sistema. Esta función constituye, lo que se denomina, la Realización del sistema, debido a que en cierto modo es una descripción del mismo, a partir del enfoque entrada-salida.

Definición 3.11. *Sea el sistema lineal $\Sigma(A,B,C,D)$ con estado inicial cero. Si existe un número real α tal que $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, donde $\hat{u}(s)$, $\hat{y}(s)$ son las transformadas de Laplace de u y y respectivamente, $G(s)$ es una función $\mathcal{L}(U,Y)-$evaluada de una variable compleja, entonces $G(s)$ es la* ***función de transferencia*** *de $\Sigma(A,B,C,D)$. La transformada de Laplace inversa de $G(s)$, es la* ***función impulso*** *$h(t)$. Se tiene que*

$$G(s) = D + C(sI-A)^{-1}B,\ s \in \mathbb{C}^{+}_{\omega},$$

$$h(t) = \begin{cases} D\delta(t) + CT(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Las funciones de una variable compleja, a veces pueden se extendidas a regiones mas grandes, por ello, la función $G(s)$ podría se extendida a una región mayor que $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. Sin embargo, en general no se requiere que $G(s)$ esté definida sobre todo el plano complejo, muchas veces es suficiente solamente sobre algún semiplano abierto (Markushevich, 2005).

4. EL CONTROL EN EL ESPACIO DE FRECHÉT $\mathcal{H}(\mathbb{D})$

4.1. Nociones preliminares (Caratheodory, 1932)

Definición 4.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio.*
Una función $h : \mathbb{D} \times D \times I \to \mathbb{C}$ es una ***función de Carathéodory*** *si las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) La aplicación $(z,w) \to h(z,w,t)$ es analítica en $\mathbb{D} \times D$ para casi todo $t \in I$.

(ii) La aplicación $t \to h(z,w,t)$ es medible en I para cada $(z,w) \in \mathbb{D} \times D$ fijo.

(iii) *Para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{D} \times D$ y todo subintervalo compacto $J \subset I$ existe una función $m = m_{K,h} \in L^1(J;\mathbb{R})$ tal que para casi todo $t \in J$*

$$|h(z,w,t)| \leq m(t) \quad \forall (z,w) \in K$$

El conjunto formado por todas las funciones de Carathéodory $h : \mathbb{D} \times D \times I \to \mathbb{C}$ forma un $\mathbb{C}$-espacio vectorial bajo la suma y el producto usual por escalares, lo denotaremos por $L^1(I;\mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$.

Las funciones de Carathéodory $h \in L^1(I;\mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$ tienen las siguientes propiedades. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $D \subset \mathbb{C}$ un dominio.

(i) La aplicación
$$(z,w) \to \int_J v(s)h(z,w,s)ds \tag{32}$$
es analítica en $\mathbb{D} \times D$ para cada subintervalo compacto $J \subset I$ y cada $v \in L^\infty(J;\mathbb{C})$.

(ii) La función
$$t \to \max_{(z,w) \in K} |h(z,w,t)| \tag{33}$$
es un elemento de $L^1(J;\mathbb{R})$ para cada subintervalo compacto $J \subset I$ y para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{D} \times D$.

(iii) Si el disco $B(w_0,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r\}$, con $r > 0$, está contenido en $\mathbb{D}$, y si
$$h(z,w,t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k.l}(t) z^k (w - w_0)^l \quad z \in \mathbb{D}, w \in K(w_0,r)$$
entonces los $c_{k,l} \in L^1(J;\mathbb{C})$ para todo $k,l \geq 0$ y para cada subintervalo compacto $J \subset I$.

4.2. El problema de Cauchy

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(z,t) =& h(z,w(z,t),t), \quad t \geq t_0 \\ w(z,t_0) =& f_0(z) \end{aligned} \tag{34}$$

donde $h \in L^1(I;\mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$ y f_0 es una función analítica.

Una solución de la ecuación (34) es una función $w : \mathbb{D}_r \times J \to D$ definida para algún $r \in [0,1]$ y algún intervalo $J \subseteq I$ que contiene a t_0, y que cumple las siguientes condiciones:

(i) La aplicación $z \to w(z,t)$ es analítica en $\mathbb{D}_r$, para cada $t \in J$ fijo.

(ii) La aplicación $t \to w(z,t)$ es (localmente) absolutamente continua en J para cada $z \in \mathbb{D}_r$ fijo, y se tiene que para todo $t \in J - E$, $\frac{d}{dt}w(z,t) = h(z,w(z,t),t)$, donde $E = E(z)$ es un conjunto de Lebesgue de medida 0.

(iii) $w(z,t_0) = f_0(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r, r \in (0,1]\}$.

El problema (34) tiene solución única y absolutamente continua en cada subintervalo compacto de J. Denotaremos por $w(z,t;t_0,f_0,h)$ a la solución del sistema (34), para enfatizar la dependencia de los parámetros iniciales t_0, f_0 y de la función de Carathéodory h que determinan el sistema (34).

Definición 4.2. *Un **sistema de control** en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es una familia $\mathbb{F} \subset L^1(I;\mathcal{H}(\mathbb{D}\times D))$ de funciones de Carathéodory.*

Consideraremos el caso en que

$$\mathbb{F} = L^1(I;\Omega) = \{h \in L^1(I;\mathcal{H}(\mathbb{D}\times D)) : (z,w) \to h(z,w,t) \in \Omega \text{ para casi todo } t \in I\}$$

donde $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D}\times D)$. El conjunto $L^1(I;\Omega)$ es el conjunto de L^1-funciones Ω-evaluadas en el intervalo I. El conjunto Ω se denomina *entrada* o *familia de entrada*.

Definición 4.3. *Sea $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$. El **conjunto de puntos extremos** de Ω se define como*

$$extr(\Omega) = \{f \in \Omega : f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \text{ para algún } f_1, f_2 \in \Omega, \lambda \in (0,1) \Rightarrow f_1 = f_2\}.$$

Se pueden relacionar los problemas de Cauchy (16) y (34), si se consideran sistemas de control de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t),u(t)), \qquad t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{35}$$

donde, por ejemplo $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ es una función suave, $U \subset \mathbb{R}^n$ es llamado el conjunto entrada. La función de control u es un elemento de $L^1(I;\mathbb{R}^n)$ que toma valores en U excepto en un conjunto de medida nula. En ese sentido, podemos ver que los sistemas de control sobre espacios de Hilbert pueden ser interpretados como un sistemas de ecuaciones diferenciales en los cuales las funciones control aparecen como parámetros.

4.3. Semigrupo de funciones analíticas y familias de evolución (Berkson & Porta, 1978; Chicone & Latushkin, 1999; Shoikhet, 2001; Goluzin, 1969)

4.3.1. Semigrupo de funciones analíticas

Se enuncian algunos resultados relacionados con semigrupos de funciones analíticas, y con la caracterización de sus generadores infinitesimales.

Definición 4.4. *Un semigrupo T en la familia de funciones $\mathcal{F} := \{\phi : U \to U\}$, cerrada bajo la composición, es un homeomorfismo de un monoide aditivo A (un semigrupo con unidad) a la familia $\mathcal{F}$. Es decir, T es una aplicación*

$$\begin{aligned} T : (A,+) &\to (\mathbb{F},\circ) \\ t &\to T(t) = \phi_t \end{aligned}$$

que cumple
1- ϕ_0 es la función identidad en $\mathbb{F}$,
2- $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$, si $s,t \in A$.
Si además se tiene que para cada $x_0 \in U$, la función $t \to \phi_t(x_0)$ es continua en A, diremos que $T = \{\phi_t\}_{t\in A}$ es un ***semigrupo continuo*** *en $\mathcal{F}$.*

El siguiente teorema asegura la existencia del generador infinitesimal de un semigrupo uni-paramétrico de funciones analíticas, y lo caracteriza cuando U es el disco unidad $\mathbb{D}$.

Teorema 4.1. ***(Berkson & Porta, 1978)*** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\{\phi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uni-paramétrico de funciones analíticas de U en U. Entonces existe una función analítica $G : U \to \mathbb{C}$, tal que*

$$\frac{\partial \phi_(z,t)}{\partial y} = G(\phi_(z,t))$$

para $t \in A, z \in U$.

Definición 4.5. *A la función G asociada al semigrupo, se le denomina el* ***generador infinitesimal*** *del semigrupo.*

Note que $G(z) = \frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t}|_{t=0}$.

4.3.2. Familias de evolución

La noción de familias de evolución está relacionada con la de operador de evolución débil y la de semigrupo uniparamétrico continuo.

Definición 4.6. *Una familia $\{\varphi_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<+\infty}$ de funciones holomorfas de $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una* ***familia de evolución de orden d*** *con $d \in [0,+\infty]$ (o una L^d-familia de evolución) si:*

(i) $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$.

(ii) $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ *para todo* $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$.

(iii) Para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $T > 0$ existe una función no negativa $k_{z,T} \in L^d([0,T];\mathbb{R})$ tal que para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$,

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k_{z,T}(\xi)d\xi$$

Dado que si $d' > d$ entonces $L^{d'}([0,T];\mathbb{R}) \subset L^{d}([0,T];\mathbb{R})$, vemos que toda familia de evolución de orden d es también una familia de evolución de orden d'.

Como mencionamos, las familias de evolución estan relacionadas con los semigrupos continuos, ya que, si $T(t)$ es un semigrupo, entonces para $s < t$ el operador $\varphi_{s,t} = T(t-s)$ es una familia de evolución. La cuestión es que no para toda familia de evolución existe un semigrupo continuo de traslación.

Algunas propiedades de las familias de evolución en $\mathbb{D}$. Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de evolución de orden $d \geq 1$ en $\mathbb{D}$.

1- Para cada $0 < T < +\infty, 0 < r < 1$ existe $R = R(r,T)$ tal que para todo s,t $0 \leq s \leq t \leq T$ se tiene que $|\varphi_{s,t}(z)| \leq R$ para $|z| \leq r$.

2- Para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $s \geq 0$, la aplicación $t \to \varphi_{s,t}(z) \in \mathbb{C}$, con $t \in [s,\infty)$, es localmente absolutamente continua, es decir, para todo $T > s$ la aplicación $t \to \varphi_{s,t}(z) \in \mathbb{C}$, con $t \in [s,T]$, es absolutamente continua.

3- Para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $T > 0$, la aplicación $s \to \varphi_{s,T}(z) \in \mathbb{C}$, con $s \in [s,T]$, es absolutamente continua.

4.4. Espacio alcanzable

Tratemos el concepto de alcanzabilidad y controlabilidad a partir de este enfoque cualitativo.

Definición 4.7. *Para $t \geq 0$, un sistema de control $\mathbb{F} \subset L^1([0,t];\mathcal{H}(\mathbb{D}\times G))$ y una función analítica $f_0 : \mathbb{D} \to G$, definimos el **conjunto alcanzable** de $\mathbb{F}$ en un tiempo t desde f_0, como*

$$\mathcal{R}_t(f_0,\mathbb{F}) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \exists h \in \mathbb{F} \text{ tal que } f(z) \equiv w(z,t;0;f_0;h)\} \tag{36}$$

*y el **conjunto controlable** de $\mathbb{F}$ en un tiempo t, como*

$$\mathcal{C}_t(f,\mathbb{F}) := \{f_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \exists h \in \mathbb{F} \text{ tal que } f(z) \equiv w(z,t;0,f_0;h)\} \tag{37}$$

Hay cierta dualidad entre la noción de conjunto alcanzable y la de conjunto controlable. Básicamente los conjuntos controlables son los conjuntos alcanzables del sistema de control $\widetilde{\mathbb{F}}$ cuyas trayectorias son las de $\mathbb{F}$ pero recorridas en dirección opuesta. El conjunto alcanzable hasta un tiempo $T > 0$ se define como

$$\mathcal{R}_{\leq T}(f_0,\mathbb{F}) := \bigcup_{0\leq t\leq T} \mathcal{R}_t(f_0,\mathbb{F}_t) \tag{38}$$

Es importante resaltar la relación intrínseca que existe entre la definiciones 4.7 y 3.9. Notemos que en ambas, la idea es considerar los elementos del espacio que pueden ser alcanzados desde el origen, es decir, desde f_0 o desde $z = 0$ en un determinado tiempo. Como vemos, en la definición 3.9, la clausura de $\mathcal{R}$ determina si hay controlabilidad aproximada; asi, en virtud de la analogía, entre ambas definiciones, podemos decir que si

$\mathcal{R}_t(f_0, extr(\Omega))$ es denso en $\mathcal{R}_t(f_0,\Omega)$ para algún $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces el sistema (34) es aproximadamente controlable. En Roth (1998) se demuestra que si $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D}\times G)$ es una familia compacta y convexa, entonces los conjuntos alcanzables $\mathcal{R}_T(f_0,\Omega)$ y $\mathcal{R}_{\leq T}(f_0,\Omega)$ son compactos para cada $T>0$, de donde se tiene como consecuencia que, en se caso, $\mathcal{R}_T(f_0,\Omega) = \overline{\mathcal{R}_T(f_0, extr(\Omega))}$ para cada $T>0$.

5. EJEMPLOS. APLICACIONES

5.1. El control en espacios de Hilbert. La jerarquía KP-discreta

En este ejemplo se conectan los sistemas integrables con la teoría de control de sistemas lineales de dimensión infinita, (López-Reyes et al., 2013). Este tipo de trabajo tiene antecedentes en Brockett & Faybusovich (1991), Nakamura (1991), Felipe & López-Reyes (2008), entre otros. El ejemplo muestra cómo se establece una relación entre las soluciones de la jerarquía KP-discreta y una familia parametrizada de sistemas lineales aproximadamente controlables y aproximadamente observables. También demuestra que la correspondiente familia de funciones de transferencia puede ser expresada como una familia de funciones de variable compleja, que se representan como series de Laurent de potencias negativas.

La jerarquía KP-discreta es un sistema integrable, cuya ecuación es

$$\frac{\partial L(\mathbf{t})}{\partial t_k} = \left[L^k_{\geq}(\mathbf{t}), L(\mathbf{t})\right], \qquad k=1,2,3,... \tag{39}$$

Sus soluciones son matrices de dimensión infinita, de la forma

$$L(\mathbf{t}) = \Lambda + \sum_{k\geq 0} A_k(\mathbf{t})(\Lambda^T)^k = S(\mathbf{t})\Lambda S^{-1}(\mathbf{t}) \tag{40}$$

donde Λ es la matriz infinita que tiene unos en la primera diagonal por encima de la diagonal principal y ceros en el resto de las entradas. Λ^T indica su transpuesta.

La familia (41) de sistemas $\Sigma(\widehat{L}(\mathbf{t}), B(\mathbf{t}), C(\mathbf{t}))$ lineales parametrizados, con parametro $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ...)$, es definida como

$$\dot{x}(\tau) = \widehat{L}(\mathbf{t})x(\tau) + B(\mathbf{t})v(\tau), \quad y(\tau) = C(\mathbf{t})x(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad x(0) = x_0 \tag{41}$$

tal que, para cada valor de $\mathbf{t}$, el generador infinitesimal $\widehat{L}(\mathbf{t})$ del sistema está relacionado con una solución $L(\mathbf{t})$ de la jerarquía. Esta relación se establece a partir de dos elementos:
(i) Una versión en $l^2(-\infty,+\infty;\mathbb{C})$ de la matrix (40), donde $l^2(-\infty,+\infty;\mathbb{C})$ denota el espacio de Hilbert de sucesiones doblemente infinitas $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con $a_n \in \mathbb{C}$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. De manera similar, consideramos $l^2(0,+\infty;\mathbb{C})$ como el espacio de sucesiones infinitas $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ para las cuales $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Usaremos la notación común $l^2(\mathbb{C})$ para ambos casos: $l^2(-\infty,+\infty;\mathbb{C})$ y $l^2(0,+\infty;\mathbb{C})$.
(ii) Una factorización (Felipe & Ongay (2001)) de la solución $L(\mathbf{t}) = S(\mathbf{t})\Lambda S^{-1}(\mathbf{t})$, en virtud de la cual se definen los operadores de control y observación $B(\mathbf{t}) = \widehat{Y}(\mathbf{t})B$ y $C(\mathbf{t}) = C\widehat{S}^{-1}(\mathbf{t})$, respectivamente, donde

$B(\mathbf{0}) = B$ y $C(\mathbf{0}) = C$, siendo B y C los operadores de control y observación del sistema $\Sigma(\widehat{\Lambda}, B, C,)$ aproximadamente controlable y aproximadamente observable, (López-Reyes et al., 2013), definido como:

$$\dot{x}(\tau) = \widehat{\Lambda}x(\tau) + Bv(\tau), \;\; y(\tau) = Cx(\tau), \;\; \tau \geq 0, \;\; x(0) = x_0, \tag{42}$$

donde $\widehat{\Lambda}$ es el generador infinitesimal del c_0-semigrupo $T(\tau) = e^{\tau\widehat{\Lambda}}$, $Cx = \langle c, x\rangle$ y B es el operador diagonal autoadjunto

$$Bv = \sum_{n\geq 0} b_n \langle v, e_n\rangle e_n, \;\; b_n \in l^2(\mathbb{R}).$$

donde $\{e_n\}$ es la base canonica de $l^2(\mathbb{R})$

Teorema 5.1. ***(López-Reyes et al., 2013)*** *(41) es una familia de sistemas aproximadamente controlables y aproximadamente observables en* $[0, \beta]$ *para todo* $\beta > 0$.

La familia de funciones de transferencia parametrizadas de (41) está dada por las series de potencias negativas en z,

$$f(z, \mathbf{t}) = C(\mathbf{t})(\bar{z}I - \widehat{L}(\mathbf{t}))^{-1}B(\mathbf{t})v = \sum_{n\geq 0} \frac{\widehat{U}_n(\mathbf{t}) b_n v_n}{z^{n+1}},$$

donde

$$z \in \mathbb{C}, \; |z| > \left\| \widehat{L}(\mathbf{t}) \right\| = 1$$

Cuando $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ entonces $\widehat{U}(\mathbf{0})$ es un operador constante, por lo cual $f(z, \mathbf{0}) = f(z)$, que es precisamente la funcion de transferencia de (42):

$$f(z) = C(\bar{z}I - \Lambda)^{-1}Bv = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n v_n}{z^{n+1}}$$

5.2. El control en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. La ecuación de Loewner

En este ejemplo, una clase de funciones analíticas define el conjunto alcanzable de un sistema de control. Se revisa la controlabilidad aproximada de la ecuación de Loewner (Abate et al., 2010), mostrando que el conjunto $\mathbb{S}^M$ de funciones univalentes acotadas (Duren, 1983; Pomemrenke, 1975), es un conjunto alcanzable de este sistema.

Sea la ecuación de Loewner

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} v(z,t) = v(z,t) - v(z,t)p(e^{-t}v(z,t), t), \qquad t \geq 0 \\ &v(z, 0) = z \end{aligned} \tag{43}$$

y su versión, la denominada ecuación diferencial radial de Loewner

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dt}(z,t) = -f(z,t)\frac{\lambda(t) + f(z,t)}{\lambda(t) - f(z,t)}, \\ &f(z, 0) = z \end{aligned} \tag{44}$$

donde $\lambda : [0,\infty) \to \partial\mathbb{D}$ definida como $\lambda(t) = g^{-1}(\psi(t),t)$ es una función continua que satisface que $\lim_{t\to\infty} e^t f(z,t) = f(z),\ |z| < 1$, considerando convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.

Es conocido que Loewner estudió un subconjunto denso de $\mathbb{S} \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$, como el conjunto alcanzable del sistema de control (44), considerando para cada función $f \in \mathbb{S}$ una función $f(z,t)$ solucion de la ecuación (44) (Goodman, 1968).

La ecuación (44) puede reescribirse en términos de la función inversa de $f(z,t)$, $g(z,t)$, como

$$\begin{aligned} &\frac{dg}{dt}(z,t) = z\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\frac{\lambda(t)+z}{\lambda(t)-z}, \\ &g(z,0) = z \end{aligned} \tag{45}$$

Intuitivamente, el significado de la expresión $e^t f(z,t)$ puede interpretarse como el *movimiento continuo* a través del tiempo, desde el punto z hasta $f(z)$, cuya dinámica esta regida por la ecuación (44).

Sea la familia de funciones univalentes acotadas

$$\mathbb{S}^M := \{f \in \mathbb{S} : |f(z)| < M \text{ para cada } z \in \mathbb{D}\}, \qquad M \in [1,+\infty), \qquad \mathbb{S}^\infty := \mathbb{S}$$

Como conjunto entrada consideraremos a $\Omega = P$, donde P es el conjunto de todas la funciones analíticas ϕ en el disco unitario, tales que $\mathrm{Re}(\phi) > 0$ y $\phi(0) = 1$. P es un conjunto compacto y convexo de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y su conjunto de puntos extremos es

$$extr(P) = \left\{\frac{\lambda+z}{\lambda-z} : \lambda \in \partial\mathbb{D}\right\}$$

Seleccionando $p \in L^1([0,\infty);P)$ y haciendo $v(z,t) := e^t w(z,t)$, se tiene que el sistema (43) generaliza el sistema de control (44) en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Considerando las funciones $p \in L^1([0,\infty);P)$ como las funciones control y denotando la solución del sistema (43) por $v(z,t;0,Id,p)$ y los conjuntos alcanzables en un tiempo t y hasta un tiempo t por $\mathcal{R}_t(Id,P)$, $\mathcal{R}_{\leq t}(Id,P)$, respectivamente. El resultado probado por Loewner queda reformulado como sigue:

Teorema 5.2. ***(Roth, 1998)*** *Sea $M \in [1,\infty]$, entonces el conjunto alcanzable en un tiempo $\log M$ y el conjunto alcanzable hasta un tiempo $\log M$ de la ecuación radial de Loewner (44) es denso en $\mathbb{S}^M$, es decir,*

$$\overline{\mathcal{R}_{\log M}(Id,extr(P))} = \overline{\mathcal{R}_{\leq \log M}(Id,extr(P))} = \mathbb{S}^M$$

Este teorema nos permite concluir que la ecuación diferencial de Loewner es aproximadamente controlable y que como los conjuntos $\mathcal{R}_{\log M}(Id,P)$ y $\mathcal{R}_{\leq \log M}(Id,P)$ son compactos, entonces

$$\mathcal{R}_{\log M}(Id,P) = \mathcal{R}_{\leq \log M}(Id,P) = \mathbb{S}^M \quad \square$$

6. CONCLUSIONES

Se revisaron algunos aspectos cualitativos del control en sistemas dinámicos en espacios con deseables propiedades geométrico-algebraicas, como los espacios de Hilbert y en el espacio de Frechét $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, cuya estructura topológica es diferente, en este caso, por ejemplo, una métrica no necesariamente proviene de una norma.

En el estudio de la controlabilidad en el caso de espacios de Hilbert, se relacionó el enfoque espacio-estado y el enfoque dominio-frecuencia con la teoría de realización, para el problema de Cauchy, que describe el sistema, y su solución. En el caso del espacio de Frechét, $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, en el estudio del control, se abordó el problema de Cauchy y su solución, definido sobre familias de evolución, definidas en ciertas clases de funciones analíticas.

De esta manera, se ilustra la dependencia del estudio del Control (de la naturaleza del problema matemático a abordar), de los conjuntos donde se define la trayectoria del sistema dinámico.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto del Sistema Universitario de Investigaciones de la Universidad de Antioquia, denominado *Dos problemas relacionados con el Control en espacios de Hilbert y en el espacio Np(D)* (Acta No.701). La autora agradece a los revisores por su contribuccion al mejoramiento del artículo.

Referencias

Abate, M.; Bracci, F.; Contreras, M. & Díaz-Madrigal, S. (2010). The evolution of Loewner's differential equation. *Eur. Math. Soc. Newsl,* 78(**31-38**).

Akhiezer, N. & Glasman, I. (1998). *Theory of linear operators in Hilbert spaces*. New York: Dover Publications, Inc.

Bensoussan, A.; Da Prato, G.; Delfour, M. & Mitter, S. (2007). *Representation and control of infinite dimensional Systems.* Boston: Birkhauser.

Berkson, E. & Porta H. (1978). Semigroups of analytic functions and composition operators. *The Michigan Mathematical Journal,* 25(**1**), 101-115.

Brockett, R. & Faybusovich, L. (1991). Toda flows, inverse spectral transform and realization theory. *System and Control Letters,* 16(**2**), 79-88.

Caratheodory, C. (1932). *Conformal representation*. Cambridge University Press.

Chicone, C. & Latushkin, Y. (1999). *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*. American Mathematical Soc.

Curtain, R.F. & Pritchard, A. (1977). *Functional analysis in modern applied mathematics*. London-New York: Academic Press.

Curtain R. & Zwart H. (1995). *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Texts in Applied Mathematics 21, New York: Springer-Verlag. Springer-Verlag. (MR1351248) [978-1-4612-8702-5]

Duren, P. (1983). *Univalent functions*. New York: Springer-Verlag.

Felipe, R. & López-Reyes, N. (2008). The finite discrete KP hierarchy and the rational functions. *Discrete Dynamics in Nature and Society.* Article ID 792632, doi:10.1155/2008/792632.

Felipe, R. & Ongay, F. (2001). Algebraic aspects of the discrete KP hierarchy. *Linear Algebra and Its Applications,* 338(**1-3**), 1-17. (MR1701286) [10.1016/S0167-2789(99)00025-1]

Fuhrmann, P. (1973). On obsevability and stability in infinite-dimensional linear systems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 12(**2**), 173-181.

Fuhrmann, P. (1973). Realization theory in Hilbert spaces for a class of transfer function. *Journal of Functional Analysis,* 18(**4**) 338-349.

Goluzin, G. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable*. Providence: American Mathematical Soc.

Goodman, G. (1968). *Univalent functions and Optimal Control*. Tesis Doctoral, Stanford University.

Hille, E. & Phillips, R. (1948). *Functional analysis and semigroups.* New York:American Mathematical Soc.

Jacob, B. & Zwart, H. (2002). An review on realization theory for infinite-dimensional systems. Disponible en: http:www.math.utwente.nl-twhans.

Jurdjevi, V. (1997). *Geometric Control Theory*. Cambridge: University Press.

Markushevich, A. (2005). *Theory of functions of a complex variable*. Rhode Island: AMS Chelsea Pub.

López-Reyes, N.; Felipe, R. & Castro, T. (2013). The discrete KP hierarchy and the negative power series on the complex plane. *Computational and Applied Math,* 32(**3**), 483-493. (MR3120135) [10.1007/s40314-013-0031-9]

Nakamura, Y. (1991). Geometry of rational functions and nonlinear integrable systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis,* 22(**6**), 1744-1754. (MR1129408) [10.1137/0522108]

Pazy, A. (1992). *Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag.

Pomemrenke, C. (1975). *Univalent Functions*. Gottingen: Vanderhoeck and Ruprecht.

Roth, O. (1998). *Control theory in H(D)*. Tesis Doctoral. Der Bayerischen Julius-Maximilians-Universitat Wurzburg.

Shoikhet, D. (2001). *Semigroups in Geometrical Function Theory*. Kluwer Academic Publishers.

Zwart, H. (2004). Transfer functions for infinite-dimentional systems. *Systems and Control Letters,*, 52(**3**), 247-255. (MR2062597) [10.1016/j.sysconle.2004.02.002]