



**Estudio numérico del acoplamiento pasivo de modos en una cavidad EDFL, usando grafeno como absorbedor saturable, sobre la punta de un conector óptico**

Jaime Arturo Bedoya Correa

Maestría en ingeniería de telecomunicaciones

Tutor

Ana Maria Cardenas Soto. PhD

Asesor

Juan Diego Zapata Caro. PhD

Universidad de Antioquia

Facultad de ingeniería

Posgrado

Medellin

2022

---

|                    |   |
|--------------------|---|
| <b>Cita</b>        | Bedoya Correa, 2022 [1]   |
| <b>Referencia</b>  | [1] Bedoya correa, J. “Estudio numérico del acoplamiento pasivo de modos en una cavidad EDFL, usando grafeno como absorbedor saturable sobre la punta de un conector óptico”, [Maestría en ingeniería de telecomunicaciones]. Universidad de Antioquia, Medellín, 2022. |
| Estilo IEEE (2020) |   |

---



Maestría en ingeniería de telecomunicaciones, Cohorte XIX.  
Grupo de Investigación GITA.



**Repositorio Institucional:** <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - [www.udea.edu.co](http://www.udea.edu.co)

**Rector:** John Jairo Arboleda Céspedes.

**Decano/Director** Jesús Francisco Vargas Bonilla.

**Jefe departamento:** Augusto Enrique Salazar Jiménez.

# Resumen

En esta investigación se estudia el efecto del grafeno como absorbedor saturable en la generación de pulsos ultracortos en una cavidad láser de fibra dopada con erbio (EDFL). El interés en dicho fenómeno radica en la comprensión del mecanismo de formación de pulsos ultracortos que permitan generar gran ancho espectral lo que a su vez nos permitirá mejorar aspectos fundamentales en la transmisión en sistemas de comunicaciones por fibra óptica. Para lograr este objetivo se estudiarán las propiedades físicas del grafeno y su interacción con la radiación, a través de la ecuación de Ginzburg-Landau, y su solución numérica. Dicha solución nos permitirá entender el papel del grafeno como absorbedor saturable o material no lineal en la formación de pulsos de luz en cada vuelta de la cavidad EDFL. Esta solución, se investigará considerando como semilla inicial las componentes espectrales del ruido generado por la fibra dopada con Erblio; además, se estudiará cómo afecta el aumento de la longitud o dispersión en la cavidad la duración del pulso. Finalmente, los resultados numéricos se contrastarán con resultados experimentales encontrados en el estado del arte, con el propósito de validar el modelo propuesto.

# Agradecimientos

Este trabajo no se habría podido realizar sin la colaboración de muchas personas que me han brindado su ayuda y sus conocimientos, como el doctor Juan Diego Zapata Caro que con su capacidad para crear nuevo conocimiento y su espíritu de investigador me mostró la belleza de la física aplicada, de una manera sencilla, a la Doctora Ana María Cárdenas Soto por esas mañanas de los miércoles donde con paciencia, humildad y mucha sabiduría me mostró los caminos para hacer investigación, al grupo de investigación GITA que me acogió en este proceso, en especial al doctor Juan Felipe Botero Vega que generó en mi, interés en otras ramas del conocimiento científico.

# Tabla de contenido

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1      | Planteamiento del problema . . . . .  | 4         |
| 1.2      | Antecedentes . . . . .  | 4         |
| 1.3      | Objetivos . . . . .   | 5         |
| 1.3.1    | Objetivo general . . . . .  | 5         |
| 1.3.2    | Objetivos específicos . . . . .   | 5         |
| 1.4      | Alcance . . . . .   | 6         |
| 1.5      | Aportes . . . . .   | 6         |
| <b>2</b> | <b>Marco teórico</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Acoplamiento de modos . . . . .   | 7         |
| 2.2      | Acoplamiento Activo de modos . . . . .  | 7         |
| 2.3      | Acoplamiento pasivo de modos . . . . .  | 7         |
| 2.4      | Propiedades del grafeno útiles para el acoplamiento pasivo de modos . . . . .               | 7         |
| 2.4.1    | Modelado de la red cristalina . . . . .   | 8         |
| 2.4.2    | Acoplamiento pasivo de modos utilizando grafeno como absorbedor saturable                   | 18        |
| 2.4.3    | Grafeno monocapa como absorbedor saturable . . . . .  | 19        |
| 2.4.4    | Medio de ganancia . . . . .   | 20        |
| 2.4.5    | Ecuación de Ginzburg-Landau . . . . .   | 21        |
| 2.4.6    | Método Split step Fourier . . . . .   | 27        |
| <b>3</b> | <b>Resultados</b>   | <b>29</b> |
| 3.1      | La función del grafeno como absorbedor saturable en una cavidad EDFL . . . . .              | 29        |
| 3.1.1    | Comportamiento de la fibra dopada con erbio en función de la longitud de ganancia . . . . . | 33        |
| 3.1.2    | Efectos de la variación en la longitud de la cavidad en la duración del pulso .             | 34        |
| <b>4</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>39</b> |
|          | <b>Apendices</b>  | <b>39</b> |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Planteamiento del problema

Actualmente, el aumento en la cantidad de información que se necesita transmitir requiere de una mayor capacidad y procesos de transmisión más eficientes. El proceso de transmisión exige cada vez mejorar significativamente el rendimiento de sus dispositivos en términos de ancho de banda, tamaño, pérdida de inserción, bajo consumo y disipación de energía; lo que a su vez representa una optimización de las fuentes de luz en la etapa de transmisión. Una de las formas de optimizar los procesos de transmisión es diseñar fuentes de gran ancho espectral, estas fuentes deben cumplir con ciertos requisitos impuestos por el canal de transmisión; de hecho, las fuentes ópticas deben ser estables, con un alto nivel de coherencia espacial y temporal. La generación de pulsos ultracortos en cavidades EDFL (láser de fibra dopada con erbio) con bloqueo de modo, puede ser una solución al problema del envío de información, debido a su alta estabilidad, alta tasa de repetición, alta potencia, fácil integración, bajo costo y un gran ancho espectral. [1]

### 1.2 Antecedentes

Existen diferentes formas para la generación de pulsos ultracortos utilizando diferentes técnicas ópticas que hacen uso de efectos no lineales, por ejemplo: a) Conmutación Q ó Q-switching que genera pulsos de aproximadamente 10 ns [2], b) efecto óptico Kerr [3], c) Mode locking activo [4] y d) Mode locking pasivo [5]. En el mode locking activo es necesario insertar en la cavidad un modulador de electroabsorción controlado de forma externa; bajo esta técnica es posible generar pulsos ópticos con una duración de pocos picosegundos y tasa de repetición del orden de GHz. Por otro lado, el mode locking pasivo utiliza un material no lineal como automodulador, impulsando la absorción en función de la potencia óptica. En el mode locking pasivo, es posible generar pulsos de picosegundos a femtosegundos con gran ancho espectral y tasa de repetición del orden de MHz [5, 6, 7, 8, 9]. Este efecto se puede generar con diferentes materiales: absorbentes saturables, espejos absorbentes saturables de semiconductores o (semiconductor saturable-absorber mirrors) SESAM [10, 11], nanotubos de carbono de pared simple o (single-wall carbon nanotubes) SWCNT [12, 13], grafeno y semiconductores en capas de dicalcogenuros de metales de transición o (transition metal dichalcogenides) TMD como  $MoS_2$ ,  $WS_2$ ,  $MoSe_2$  y  $WSe_2$  con una estructura química dada por  $MX_2$  (metal de transición M y elemento del grupo X-VI). La capa hexagonal de átomos M está intercalada entre dos capas de átomos de X (diclogenuro de materiales 2D)[5],[8],[14, 15]. Los (SESAMs) presentan algunos inconvenientes como espectro estrecho en la región del infrarrojo, bajo daño umbral; los SWCNT presentan altas pérdidas no saturables y selectividad de diámetro, lo que disminuye el desempeño como material automodulador en láseres a fibra dopada con erbio

---

en la ventana del infrarrojo [16]. Las técnicas recientes utilizan grafeno monocapa y materiales 2D para la generación de pulsos ultracortos. De hecho, el grafeno se ha utilizado como absorbente saturable para la generación de pulsos ultracortos en cavidades en anillo basadas en fibra óptica o erbio doped fiber laser EDFL, debido al tiempo de recuperación ultrarrápido, alta profundidad de modulación y baja pérdida lineal. Experimentalmente existen diferentes maneras de diseñar absorbentes saturables basados en grafeno monocapa, lo cual se traduce en una mejor interacción entre la luz que circula en la cavidad y el grafeno. Particularmente dos tipos de configuración han llamado significativamente el interés para el diseño de láser a fibra dopada con erbio. La primera configuración consiste en grafeno monocapa sobre el núcleo de una fibra óptica y la segunda es grafeno depositado sobre fibra D la cual consiste en usar un segmento de fibra al que se le ha pulido el revestimiento. Algunos trabajos experimentales publicados recientemente utilizan grafeno en la punta de la fibra óptica como absorbente saturable en las cavidades EDFL [6, 12, 14, 17, 18, 19]. En estos trabajos la interacción entre la luz y el grafeno se da via incidencia normal de la onda electromagnética, y en algunos de ellos se consigue generar pulsos del orden de 168 y 599 fs [6]. Adicionalmente, desde el punto de vista teórico, se han desarrollado diferentes simulaciones numéricas para estudiar la dinámica de formación y evolución de pulsos ultracortos en cavidades EDFL [20]. Además, se mostró que en sistemas basados en la segunda configuración, un parámetro relevante que ayuda a la generación de pulsos ultracortos es la razón de extinción de la polarización (PER). En el caso de la primera configuración el grafeno monocapa sobre el núcleo de una fibra óptica. La absorción es independiente del estado de polarización de la luz incidente al plano del grafeno, ya que el grafeno es isotrópico. Esto simplifica notablemente el análisis y nos permite extraer las características fundamentales del efecto del grafeno en la generación de pulsos ultracortos, cuando variamos el coeficiente de absorción no saturable en función del número de vueltas en la cavidad, logrando una mejor comprensión del papel grafeno actuando como absorbente saturable y polarizador [12]. Sin embargo, considerando la importancia del grafeno en la formación de pulsos, es fundamental comprender su papel como material no lineal en dicha formación a partir del ruido en una cavidad EDFL, papel que no ha sido claramente explicado en trabajos previos. En el capítulo 2 de este documento se hará un estudio teórico del grafeno a partir de su relación de dispersión, con el fin de entender sus propiedades como absorbente saturable, luego se analizará la generación de pulsos ultracortos, en una cavidad (EDFL) con grafeno monocapa como absorbente saturable, a través de la ecuación de Ginzburg-Landau y su posterior simulación. Los resultados se mostrarán en el capítulo 3 y en el capítulo 4 las conclusiones del estudio.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

Entender la dinámica de generación y evolución de los pulsos ultracortos en láser EDFL basados en absorbentes saturables diseñados con grafeno monocapa.

### 1.3.2 Objetivos específicos

1.3.2.a Resolver numéricamente la ecuación de Ginzburg-Landau para un estado de polarización con el fin de entender el mecanismo de generación de pulsos ultracortos en la cavidad láser de fibra dopada con erbio.

1.3.2.b Estudiar la evolución del ruido en una cavidad (EDFL) para diferentes porcentajes de absorción de grafeno monocapa y diferente número de vueltas en la cavidad, con el fin de obtener

---

los parámetros que permiten optimizar la construcción de láseres a fibra.

1.3.2.c Comparar los resultados numéricos obtenidos bajo simulación con datos experimentales reportados en la literatura con el propósito de calibrar el modelo.

## 1.4 Alcance

Se espera con esta investigación fortalecer la línea de comunicaciones ópticas basadas en nuevos materiales como el grafeno, que permitan diseñar e implementar dispositivos con mejores características para beneficio de la medicina, como en tratamientos contra el cáncer y en la creación de férulas y prótesis en la ortopedia. En las telecomunicaciones que son tan importantes en la sociedad moderna, a través del entendimiento del funcionamiento de fuentes pulsadas ultrarrápidas. También habría un impacto ambiental y económico ya que el grafeno a temperatura ambiente se comporta como un conductor por lo que no necesita mecanismos para regular la temperatura y compensar el efecto Joule. De otro lado la producción del grafeno es económicamente viable, ya que el grafeno es un material basado en el carbono, elemento abundante en la naturaleza y fácil de obtener. Además, se tendrá un entendimiento de esta estructura para generar pulsos cortos, permitiendo optimizar los resultados de este tipo de estructura tales como: La coherencia espacial y temporal, el ancho espectral, potencia pico y estabilidad, lo cual permite diseñar fuentes ópticas para diversas aplicaciones. también Se tendrá un entendimiento de la generación y evolución de pulsos cortos, vuelta por vuelta en una cavidad EDFL, permitiendo optimizar los resultados de este tipo de estructuras tales como: porcentaje de absorción del grafeno, profundidad de modulación y número de vueltas del pulso en la cavidad para lograr reducir el tiempo de duración del pulso. Además, se dejará el estudio del absorbedor saturable basado en grafeno y su forma de generar pulsos ultracortos, también este trabajo es la base para futuros estudios de dichos materiales 2D, ya que el grafeno es uno de los muchos materiales que ofrecen nuevas propiedades, lo que genera una interesante perspectiva en la creación de una amplia gama de dispositivos ópticos y además este trabajo puede ser la base en la implementación de una modulación para transmisión de alta capacidad

## 1.5 Aportes

Se aporta en el entendimiento de la generación y evolución de pulsos cortos, vuelta por vuelta en una cavidad (EDFL) permitiendo optimizar los resultados de este tipo de estructuras tales como: porcentajes de absorción del grafeno, profundidad de modulación, número de vueltas y longitud óptica de la cavidad, esto apunta a brindar parámetros para el diseño de la cavidad EDFL.

Se participó en Colcom 2020 (IEEE Colombian conference on communications and computing) y en las memorias se publicó el artículo "Numerical study of noise evolution for ultrashort pulses generation using graphene as saturable absorber".



## Capítulo 2

# Marco teórico

### 2.1 Acoplamiento de modos

Para generar pulsos del orden de femtosegundos normalmente se utiliza la técnica de acoplamiento de modos (mode-locking). Esta técnica se basa en el acoplamiento de modos que se propagan en la cavidad, a través de un modulador que fija las fases. Dicha técnica se divide en acoplamiento activo de modos y acoplamiento pasivo de modos. [12, 21]

### 2.2 Acoplamiento Activo de modos

El acoplamiento activo de modos se realiza mediante un mecanismo sincrónico o asincrónico de las fases en la cavidad, para esto es necesario insertar una fase controlada a través de insertar un elemento externo o un modulador de electro absorción en la cavidad láser. Bajo esta técnica es posible generar pulsos ópticos con una duración de pocos pico-segundos y tasas de repetición del orden de GHz.

### 2.3 Acoplamiento pasivo de modos

Por otro lado, el acoplamiento pasivo de modos utiliza un material no lineal (absorbedor saturable) como automodulador, impulsando la absorción en función de la potencia óptica, con esta técnica es posible generar pulsos del orden de femtosegundos. En este trabajo simularemos grafeno monocapa en la punta de la fibra óptica como absorbedor saturable debido a sus características las cuales mencionaremos a continuación.

### 2.4 Propiedades del grafeno útiles para el acoplamiento pasivo de modos

El grafeno es un material bidimensional que tiene grandes y potenciales aplicaciones por sus propiedades eléctricas y ópticas. El grafeno posee propiedades como el excelente transporte electrónico, alta movilidad intrínseca de carga y gran densidad de corriente a una temperatura dada, además de una alta transmitancia, gran flexibilidad, dureza y extraordinaria conductividad térmica [22]. El transporte electrónico y su alta movilidad contribuyen en el desarrollo de dispositivos de alta velocidad con bajo calentamiento y menor consumo energético. Teniendo en cuenta su alta transmitancia, el grafeno tiene una absorción de 2,3% [23], desde el infrarrojo lejano hasta el visible, lo

cual lo hace prácticamente transparente en estas longitudes de onda. Otras características asociadas a la interacción de la luz con este material es su alta no linealidad [24] que permite aprovecharlo para moduladores de gran ancho espectral. Su flexibilidad permite construir dispositivos basados en fibra, con lo cual se disminuyen las pérdidas de inserción.

Las propiedades de absorción atribuidas al grafeno pueden ser estudiadas analizando la relación de dispersión que da lugar al cono de Dirac en los puntos  $k$  y  $k'$ . El cono de Dirac se trata de un cono formado por la banda de valencia y la banda de conducción que se interceptan en un único punto llamado punto de Dirac. La relación de dispersión se puede deducir a partir de la estructura cristalina del grafeno.

### 2.4.1 Modelado de la red cristalina

La red cristalina del grafeno está constituida por 2 átomos de carbono por celda unitaria, la cual se define como la parte más simple de la red con la propiedad de reproducir todo el cristal y donde la distancia  $a$  entre dos átomos de carbono es 0.143nm como se observa en la figura (2.1).

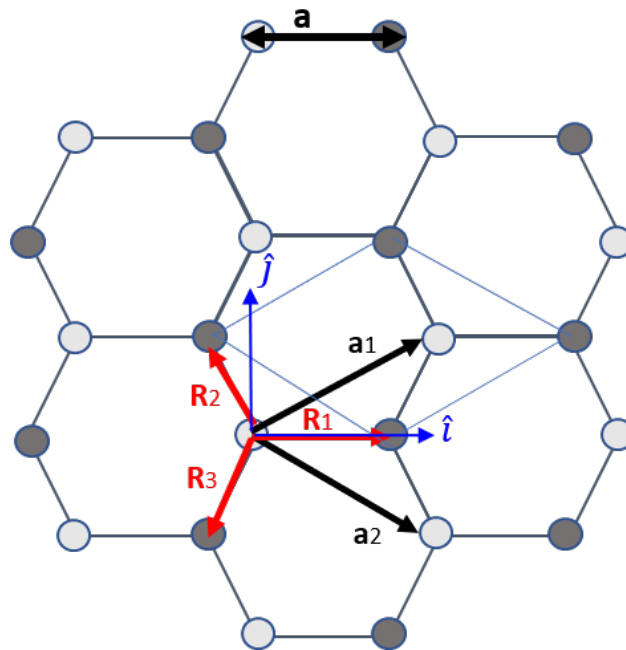


Figura 2.1: Red cristalina del grafeno. Cada esfera representa un átomo de carbono. El color de la esfera indica a qué subred pertenece cada átomo de carbono.

Donde los vectores  $\{a_i\}$  son vectores de la red real y forman una base para  $\mathbf{R}_2$ , donde el vector de Bravais se escribe como  $\mathbf{T} = n_1 a_1 + n_2 a_2$ , estos vectores definen un paralelogramo y cuyas translaciones dejan invariante la estructura periódica del cristal. Subsecuentemente, la base atómica se puede escribir con un vector  $\mathbf{R}$ , el cual describe la separación entre un átomo de carbono y sus vecinos más cercanos y puede ser escrito como combinación lineal de  $\{a_i\}$  entonces  $\mathbf{R} = \alpha a_1 + \beta a_2$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares no necesariamente enteros. La celda unitaria se define como el mínimo volumen que reproduce todo el cristal. Los vectores de la red real los podemos a su vez escribir en términos de la base canónica usual, representada por los vectores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  en la figura 2.1, de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2} (3, \sqrt{3}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2} (3, -\sqrt{3}) \quad (2.2)$$

Estos resultados se pueden comprobar fácilmente utilizando el resultado de la geometría que dice que los ángulos internos de un hexágono miden  $120^\circ$  y el ángulo  $\alpha$  entre  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  es  $60^\circ$ . Podemos escribir de forma matricial a los vectores de la red real descritos en las ecuaciones (2.1) y (2.2)

$$[A] = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Los vectores  $R_i$  descritos en la figura 2.1 en color rojo, también pueden ser escritos en términos de la base canónica como:

$$R_1 = (a, 0) \quad (2.4)$$

$$R_2 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \quad (2.5)$$

$$R_3 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \quad (2.6)$$

A continuación se describirán los vectores en la red recíproca, la cual es la transformada de Fourier de una red en el espacio real. Los puntos en la red recíproca corresponden a las direcciones en las que se puede observar difracción por un cristal, esto se puede lograr fácilmente utilizando la ley de Bragg en forma matricial. Esta ley relaciona los vectores de la red recíproca con los vectores de la red real a través de la siguiente ecuación:  $B^T A = 2\pi I$  donde  $B^T$  es la matriz que representa los vectores de la red recíproca,  $A$  es la matriz descrita en (2.3) e  $I$  es la matriz identidad, o equivalentemente  $\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{a}_i = 2\pi \delta_{ij}$  donde  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker, entonces:

$$\frac{a}{2} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Al multiplicar por la inversa de  $A$ , a ambos lados de la ecuación (2.7) obtenemos los valores de  $B$ :

$$[B] = \frac{2\pi}{3a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Por tanto los vectores base en la red recíproca se pueden escribir a partir de  $B$ , como:

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\right) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{b}_2 = \left(\frac{2\pi}{3a}, -\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\right) \quad (2.10)$$

---

Utilizando la definición de producto punto se encuentra el ángulo  $\alpha$  entre  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$  cuyo valor es  $\alpha = 120^\circ$ , cabe recordar que los vectores  $\mathbf{b}_i$  forman la base en la red recíproca, por tanto podemos graficar la red real y la red recíproca.

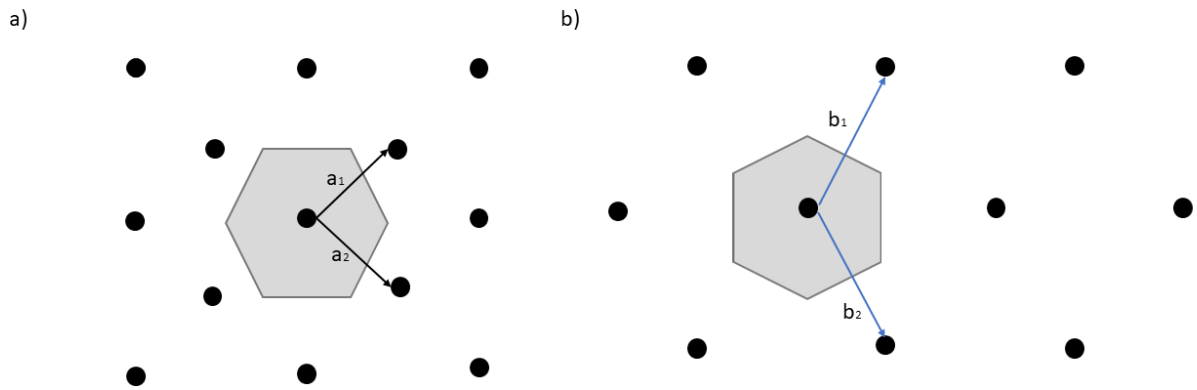


Figura 2.2: a) Red cristalina del grafeno. b) Correspondiente red recíproca

La red recíproca del grafeno es una red hexagonal rotada  $90^\circ$  con respecto a la red real, a continuación mostraremos las propiedades de la red recíproca.

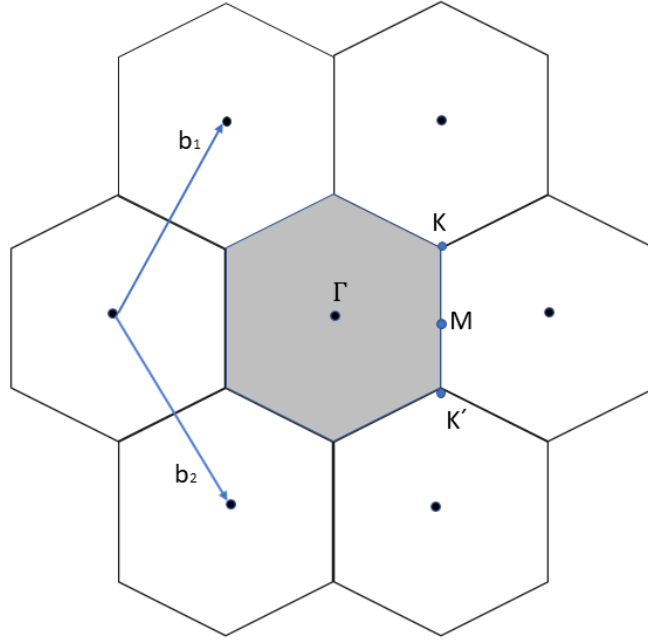


Figura 2.3: Red recíproca del grafeno.

Se puede definir la primera zona de Brillouin como la celda primitiva en la red recíproca y definida por los vectores  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$ , dicha celda se representa en la figura 2.3 como el hexágono gris, también se observan los puntos de simetría  $\Gamma$ , K y M.

Ya teniendo definida la estructura periódica del grafeno, podemos estudiar su estructura electrónica a partir de la ecuación de Schrödinger, con el fin de encontrar la relación de dispersión la cual nos dirá cómo es la dependencia de la energía de los electrones con respecto al vector de onda. la ecuación de Schrödinger es una ecuación de autovalores descrita por:

$$H\Psi(k, r) = E(k)\Psi(k, r) \quad (2.11)$$

Donde  $H$ : operador Hamiltoniano,  $\Psi$ : la función de onda y  $E(k)$ : las bandas energías permitidas. El operador Hamiltoniano de un electrón independiente,  $k$ : el número de onda y  $r$ : el vector posición (aproximación monoeléctronica), está descrito por:

$$H_i = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \sum_i^n U(r_i - R_i) \quad (2.12)$$

Donde  $R_i$ : es un vector arbitrario en la red real e invariante bajo translación,  $N$ : es el número de celdas primitivas y  $U(r_i - R_i)$ : la energía potencial del átomo  $i$ -ésimo.

Ahora, la función de onda debe ser invariante bajo translación ya que una estructura cristalina tiene simetría translacional, por tanto ésta se puede escribir como funciones de onda de Bloch, como en la ecuación (2.13)

$$\Psi(r + R_i) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i}\Psi(r) \quad (2.13)$$

Se puede mostrar fácilmente que  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i}$  funciona como un operador de trans- lación, como el grafeno tiene dos átomos por celda primitiva y suponiendo  $N$  átomos en el cristal, podemos escribir una función de onda para cada átomo en la celda de la siguiente forma:

$$\Phi_A(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{R_A=1}^3 e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_A} \phi_A(\mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \quad (2.14)$$

$$\Phi_B(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{R_B=1}^3 e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_B} \phi_B(\mathbf{r} - \mathbf{R}_B) \quad (2.15)$$

Así, la función de onda del grafeno (ecuación (2.16)) puede escribirse como una combinación lineal de las funciones descritas en las ecuaciones (2.14) y (2.15), las cuales forman una base orto-normal, donde  $\phi_A$  y  $\phi_B$  representan los orbitales atómicos del átomo A y B de la celda primitiva.

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = C_A\Phi_A(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + C_B\Phi_B(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad (2.16)$$

Donde:  $C_A$  y  $C_B$  en general son números complejos que corresponden a los pesos de las funciones de onda de los 2 átomos del grafeno y donde interesa su modulo al cuadrado.

Introduciendo la ecuación (2.16) en la ecuación de Schrödinger, obtenemos la siguiente expresión:

$$H(C_A\Phi_A(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + C_B\Phi_B(\mathbf{r}, \mathbf{k})) = E(k)(C_A\Phi_A(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + C_B\Phi_B(\mathbf{r}, \mathbf{k})) \quad (2.17)$$

Por simplicidad utilizaremos la notación de Dirac, donde la función de onda  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  la denotaremos por  $|\Psi\rangle$  y  $\Psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \langle\Psi|$  con  $\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int \Psi_1^*\Psi_2d^3\mathbf{r}$  y  $\langle\Psi_1|H|\Psi_2\rangle = \int \Psi_1^*H\Psi_2d^3\mathbf{r}$ , entonces, como el operador hamiltoniano  $H$  es un operador lineal, la ecuación (2.17) la podemos escribir de la siguiente forma:

$$C_AH|\Phi_A\rangle + C_BH|\Phi_B\rangle = E(k)C_A|\Phi_A\rangle + E(k)C_B|\Phi_B\rangle \quad (2.18)$$

Al aplicarle  $\langle\Phi_A|$  y luego  $\langle\Phi_B|$  a la ecuación (2.18), obtenemos el sistema de ecuaciones descritos por las ecuaciones (2.19) y (2.20) :

$$\langle\Phi_A|C_AH|\Phi_A\rangle + \langle\Phi_A|C_BH|\Phi_B\rangle = \langle\Phi_A|E(k)C_A|\Phi_A\rangle + \langle\Phi_A|E(k)C_B|\Phi_B\rangle \quad (2.19)$$

$$\langle\Phi_B|C_AH|\Phi_A\rangle + \langle\Phi_B|C_BH|\Phi_B\rangle = \langle\Phi_B|E(k)C_A|\Phi_A\rangle + \langle\Phi_B|E(k)C_B|\Phi_B\rangle \quad (2.20)$$

Igualando a cero las ecuaciones (2.19) y (2.20) obtenemos:

$$C_A[\langle\Phi_A|H|\Phi_A\rangle - E(k)\langle\Phi_A|\Phi_A\rangle] + C_B[\langle\Phi_A|H|\Phi_B\rangle - E(k)\langle\Phi_A|\Phi_B\rangle] = 0 \quad (2.21)$$

$$C_A[\langle \Phi_B | H | \Phi_A \rangle - E(k) \langle \Phi_B | \Phi_A \rangle] + C_B[\langle \Phi_B | H | \Phi_B \rangle - E(k) \langle \Phi_B | \Phi_B \rangle] = 0 \quad (2.22)$$

Lo cual se pueden escribir de forma equivalente a:

$$\begin{pmatrix} H_{AA} - E(k)\delta_{AA} & H_{AB} - E(k)\delta_{AB} \\ H_{BA} - E(k)\delta_{BA} & H_{BB} - E(k)\delta_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

con:

$$H_{AA} = \langle \Phi_A | H | \Phi_A \rangle, \delta_{AA} = \langle \Phi_A | \Phi_A \rangle \text{ y } \delta_{BB} = \langle \Phi_B | \Phi_B \rangle \\ H_{AB} = \langle \Phi_A | H | \Phi_B \rangle, \delta_{AB} = \langle \Phi_A | \Phi_B \rangle \text{ y } \delta_{BA} = \langle \Phi_B | \Phi_A \rangle$$

Si queremos tener soluciones diferentes a la trivial se debe cumplir que  $\det(H_{ij}) = 0$  o equivalentemente

$$\begin{vmatrix} H_{AA} - E(k)\delta_{AA} & H_{AB} - E(k)\delta_{AB} \\ H_{BA} - E(k)\delta_{BA} & H_{BB} - E(k)\delta_{BB} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

Para determinar las posiciones de los átomos A y B, definimos los vectores de la red  $\mathbf{R}_{Aj} = r_A - \mathbf{R}_j$  y  $\mathbf{R}_{Bl} = r_B - \mathbf{R}_l$ , donde  $r_A$  y  $r_B$  son vectores que apuntan de un punto arbitrario de la red a un átomo A o B respectivamente, entonces utilizando (2.14) y (2.15):

$$H_{AA} = \langle \Phi_A | H | \Phi_A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Aj}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Al}} \langle \phi_A(r - \mathbf{R}_{Aj}) | H | \phi_A(r - \mathbf{R}_{Al}) \rangle \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) se convierte en:

$$H_{AA} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)} \langle \phi_A(r - \mathbf{R}_{Aj}) | E | \phi_A(r - \mathbf{R}_{Al}) \rangle \quad (2.26)$$

Por tanto:

$$H_{AA} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)} E_A \langle \phi_A(r - \mathbf{R}_{Aj}) | \phi_A(r - \mathbf{R}_{Al}) \rangle \quad (2.27)$$

Donde

$$H_{AA} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)} E_A \delta_{jl} \quad (2.28)$$

Entonces  $H_{AA} = E_A$ , donde  $E_A$  es la energía de un átomo A en su estado ligado más bajo y  $\delta_{jl}$  es la delta de Kronecker, como  $E_A$  es una energía potencial entonces, sin pérdida de generalidad la podemos hacer cero, y de la misma forma  $H_{BB} = E_B = 0$ .  
calculemos ahora los terminos  $\delta_{AA}$  y  $\delta_{AB}$ .

$$\delta_{AA} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Aj}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Al}} \langle \phi_A(r - \mathbf{R}_{Aj}) | \phi_A(r - \mathbf{R}_{Al}) \rangle \quad (2.29)$$

Donde

$$\delta_{AA} = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N \sum_{B=1}^N e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j)} \langle \phi_A(r - \mathbf{R}_{Aj}) | \phi_A(r - \mathbf{R}_{Al}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N \sum_{B=1}^N e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l)} \delta_{jl} = 1 \quad (2.30)$$

Ahora:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Aj}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Bl}} \langle \phi_A | \phi_B \rangle = 0 \quad (2.31)$$

La ecuación anterior es cero ya que las funciones  $\phi_A$  y  $\phi_B$  son ortonormales, lo cual hace que el solapamiento entre los orbitales sea cero.

Ahora encontremos  $H_{AB}$  utilizando aproximación a primeros vecinos. En esta aproximación suponemos que la función de onda de un átomo solo interactúa con la función de onda de los átomos vecinos más cercanos.

$$H_{AB} = \langle \Phi_A | H | \Phi_A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Aj}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_{Bl}} \langle \phi_A | H | \phi_B \rangle \quad (2.32)$$

Donde  $\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$  es la distancia de un átomo de carbono con sus primeros vecinos, distancias definidas en (2.4), (2.5) y (2.6); como se observa en la figura 2.1 un átomo de carbono tiene tres primeros vecinos, de esta forma la ecuación anterior la podemos escribir como:

$$H_{AB} = \frac{1}{N} \sum_{B=1}^N \sum_{A=1}^3 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_A} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_B} \langle \phi_A | H | \phi_B \rangle = t(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_1} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_2} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_3}) \quad (2.33)$$

$t$ : se conoce como la integral de intercambio y es la energía de interacción de un átomo con sus primeros vecinos.

Calculando el modulo cuadrado de  $H_{AB}$ :

$$H_{AB}(K)H_{AB}^*(k) = t^2(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_1} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_2} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_3})(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_1} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_2} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_3}) \quad (2.34)$$

De donde:

$$H_{AB}(K)H_{AB}^*(k) =$$

$$t^2(3 + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)} + e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)} + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3)} + e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3)} + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)} +$$

$$e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)})$$

Usando la Identidad  $\frac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2} = \cos\theta$  en la ecuación anterior, tenemos:



$$H_{AB}(K)H_{AB}^*(k) = t^2(3 + 2\cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)] + 2\cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3)] + 2\cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)]) \quad (2.35)$$

Las diferencias de los vectores  $\mathbf{R}_i$  y posteriormente el producto punto con  $\mathbf{k}$  quedan establecidas como:

$$\cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)) = \cos\left(\frac{3a}{2}k_x - \frac{\sqrt{3}a}{2}k_y\right) \quad (2.36)$$

$$\cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3)) = \cos\left(\frac{3a}{2}k_x + \frac{\sqrt{3}a}{2}k_y\right) \quad (2.37)$$

$$\cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)) = \cos(\sqrt{3}ak_y) \quad (2.38)$$

Empleando  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$  y las ecuaciones (2.36), (2.37) y (2.38) podemos escribir (2.35) como:

$$H_{AB}(K)H_{AB}^*(k) = t^2\left(3 + 2\cos(\sqrt{3}ak_y) + 4\cos\left(\frac{3a}{2}k_x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}k_y\right)\right) \quad (2.39)$$

El determinante (2.24) toma la forma:

$$\begin{vmatrix} -E(k) & H_{AB} \\ H_{BA} & -E(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.40)$$

Donde  $H_{BA} = H_{AB}^*$ , y de esta forma obtenemos

$$E(k)^2 - H_{AB}^*H_{AB} = 0 \quad (2.41)$$

Introduciendo (2.39) en (2.41) y luego despejando obtenemos las bandas de energía.

$$E(k) = \pm t \sqrt{3 + 2\cos(\sqrt{3}ak_y) + 4\cos\left(\frac{3a}{2}k_x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}k_y\right)} \quad (2.42)$$

En la figura 2.4, las bandas de valencia y de conducción están representadas por  $E < 0$ , (en naranja) y  $E > 0$  (en azul), respectivamente, y como en el grafeno hay dos átomos por celda y cada uno contribuye con un electrón, los cuales pueden ocupar un estado de espín arriba o abajo, podemos decir que la banda de valencia está completamente llena y la banda de conducción está completamente vacía, lo cual pone al nivel de Fermi en los puntos donde se cruzan las bandas de energía, éstos puntos se conocen como puntos de Dirac y en la figura 2.4 se resaltan en óvalos verdes. Dichos puntos son de interés ya que las excitaciones electrónicas se realizan al rededor de estos, contribuyendo así al transporte electrónico.

Estamos suponiendo que las funciones de onda de los dos átomos vecinos no se solapan, por lo que  $\delta_{AB} = 0$ .

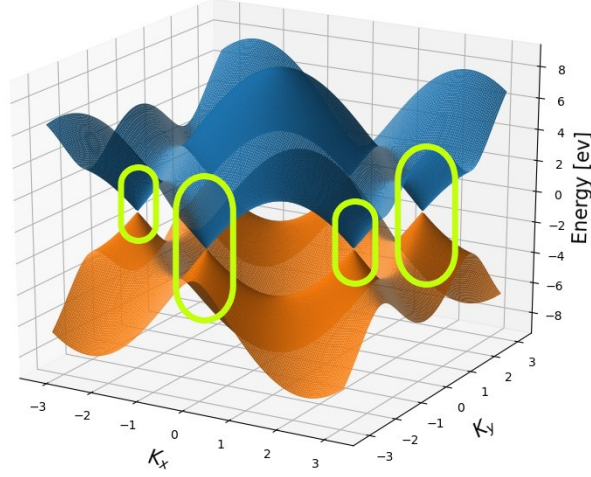


Figura 2.4: Gráfico de la relación de dispersión del grafeno.

A partir de la relación de dispersión, podemos encontrar la densidad de estados del grafeno, para ello encontremos los puntos donde la energía de dispersión se hace cero. Si hacemos  $k_x = 0$  cuando  $E(k) = 0$  podemos comprobar fácilmente que la energía de dispersión se hace cero solo cuando  $k_y = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}$ , solución que corresponde con los puntos de Dirac  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  situados en las esquinas de la primera zona de Brillouin donde las bandas se cruzan. Hagamos una aproximación lineal del hamiltoniano efectivo al rededor de los puntos  $\mathbf{K}$ , para ello definamos el vector de onda  $\mathbf{k} = \mathbf{K} + \mathbf{q}$ , donde  $\mathbf{q}$ : vector en la red recíproca alrededor de una zona muy pequeña de los puntos  $\mathbf{K}$ , donde  $\mathbf{q} \ll |\mathbf{K}| \sim \frac{1}{a}$ , de esta forma podemos desarrollar el hamiltoniano  $H_{AB}(\mathbf{k})$  en torno a  $\mathbf{K}$ . De la ecuación (2.33) alrededor de  $\mathbf{K}$ :

$$H_{AB}(\mathbf{K} + \mathbf{q}) = t(e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\mathbf{R}_1} + e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\mathbf{R}_2} + e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\mathbf{R}_3}) \quad (2.43)$$

Donde los productos internos  $\mathbf{K}\mathbf{R}_1 = 0$ ,  $\mathbf{K}\mathbf{R}_2 = \frac{2\pi}{3}$  y  $\mathbf{K}\mathbf{R}_3 = -\frac{2\pi}{3}$  y  $\mathbf{q}\mathbf{R}_1 = q_x a$ ,  $\mathbf{q}\mathbf{R}_2 = -q_x \frac{a}{2} + q_y \sqrt{3} \frac{a}{2}$  y  $\mathbf{q}\mathbf{R}_3 = -q_x \frac{a}{2} - q_y \sqrt{3} \frac{a}{2}$

Introduciendo estos valores en (2.43) y utilizando  $e^{\pm i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ , obtenemos:

$$H_{AB} = t(e^{-iq_x a} + (-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2})e^{iq_x \frac{a}{2}} e^{-iq_y \frac{\sqrt{3}a}{2}} + (-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})e^{iq_x \frac{a}{2}} e^{iq_y \frac{\sqrt{3}a}{2}}) \quad (2.44)$$

Como  $qa \ll 1$  podemos hacer la aproximación  $e^{iqa} \approx 1 + iqa$  en (2.44), obteniendo:

$$H_{AB} = (1 - iq_x a + (1 + iq_x \frac{a}{2})((- \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2})(1 - iq_y \frac{\sqrt{3}a}{2}) + (- \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})(1 + iq_y \frac{\sqrt{3}a}{2}))) \quad (2.45)$$

Simplificando se obtiene:

$$H_{AB} \approx t(-iq_x \frac{3a}{2} - q_y \frac{3a}{2} - iq_x q_y 3 \frac{a^2}{2}) \quad (2.46)$$

Ahora, la velocidad de Fermi se define como  $v_f = \frac{-3ta}{2\hbar}$  y considerando solo los términos de primer orden, se obtiene la aproximación del hamiltoniano a primer orden:

$$H_{AB} = v_f \hbar (iq_x + q_y) \quad (2.47)$$

A partir del hamiltoniano anterior es fácil encontrar la aproximación a la energía de dispersión a primer orden, utilizando el hecho de que  $H_{AB}H_{AB}^* = E(k)$ . Donde  $E(\mathbf{q}) = \pm \hbar v_f |\mathbf{q}|$ . A partir de la velocidad de Fermi, podemos escribir la energía de dispersión como:

$$E(\mathbf{q}) = \frac{3ta |\mathbf{q}|}{2} \quad (2.48)$$

Calculemos ahora la densidad de estados.

La densidad electrónica de estados  $\rho(E)$  nos da el número de estados cuánticos alrededor de una energía fija, y puede ser obtenida a través del número total de estados  $N$ , con  $N = g \sum_{E_k \leq E} n_k(E(k)) = g \int_0^E \rho(E) dE$  donde  $g$  es el factor de degeneración que en el caso del grafeno es 4, debido a la degeneración doble de los electrones y  $n_k$  es la ocupación de los niveles  $E(k)$ .

Derivando el número de estados  $N$  respecto a la energía  $E$  se obtiene la densidad de estados, entonces  $\rho(E) = \frac{\partial N}{\partial E}$

Alrededor de los puntos de Dirac los niveles de energía están muy juntos, se puede sustituir la integral sobre los estados de energía por una integral sobre el volumen en el espacio de fase, de la siguiente forma:

$$N = g \sum_{E_k \leq E} n_k(E(k)) = 4 \int d\mathbf{q} \approx \frac{4A}{(2\pi)^2} \int \int d^2q \quad (2.49)$$

El número de estados toma la forma:

$$N = \frac{4A}{(2\pi)^2} \int_0^{q(E)} 2\pi q dq = \frac{4A}{(2\pi)} \frac{q^2(E)}{2} \quad (2.50)$$

Y como  $\rho(E) = \frac{\partial N}{\partial E}$ , la densidad de estados puede escribirse como:

$$\rho(q(E)) = \frac{4A}{2\pi} \frac{q(E)}{\frac{\partial E}{\partial q}} \quad (2.51)$$

Y en términos de la energía, derivando  $E(\mathbf{q}) = \pm \hbar v_f |\mathbf{q}|$  respecto a  $\mathbf{q}$ , obtenemos:

$$\rho(E) = \frac{4AE}{2\pi \hbar^2 v_f^2} \quad (2.52)$$

Donde  $A$  es el área de una celda unitaria.

Ahora la densidad de estados encontrada, servirá para conocer el porcentaje de absorción del grafeno. Cuando una onda de luz con campo eléctrico  $A$  incide perpendicular al grafeno, el flujo de energía de la luz incidente esta dada por  $w_i = \frac{c}{4\pi} |A|^2$ , y la energía absorbida por el grafeno se escribe como  $w_a = \eta \hbar \omega$  [25], donde  $\omega$  es la frecuencia de la luz incidente y  $\eta$  es el número de absorciones por unidad de tiempo,  $\eta$  puede ser calculado a través de la regla de oro de Fermi, donde:  $\eta = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 D(E)$  [25], con  $M$ : el elemento de matriz para la interacción entre la luz y

los electrones en la vecindad de los puntos K, y  $D(E) = \frac{\rho(E)}{A}$  la densidad de estados por unidad de celda.

La densidad de estados para una energía igual a  $\frac{\hbar\omega}{2}$  puede ser escrita a partir de (2.52), donde  $D(\frac{\hbar\omega}{2}) = \frac{\omega}{\pi\hbar v_f^2}$  y  $|M|^2 = \frac{1}{8}e^2 v_f^2 \frac{|A|^2}{\omega^2}$  con  $e$ : la carga del electrón, introduciendo estos valores en  $w_a$  se obtiene  $w_a = \frac{e^2 |A|^2}{4\hbar}$ . La absorción  $P$  se define como la energía absorbida sobre la energía incidente de la siguiente forma:  $P = \frac{w_a}{w_i} = \frac{\pi e^2}{\hbar c} = \pi\alpha = 0.0229 \approx 2.3\%$

Las deducciones matemáticas realizadas en la sección (2.4) fueron basadas en los resultados obtenidos en [26]

### 2.4.2 Acoplamiento pasivo de modos utilizando grafeno como absorbedor saturable

En general el acoplamiento de modos es una técnica que explica cómo los modos longitudinales en una cavidad entran en fase. En este caso podemos pensar que el campo puede ser descrito de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n E_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2.53)$$

Donde  $E_n$  es la amplitud del  $n$ -ésimo modo longitudinal,  $t$  el tiempo y  $\omega_n$  la frecuencia del  $n$ -ésimo modo longitudinal dada por:  $\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega$ , siendo  $n$ : número del modo longitudinal.

Cuando la fase de cada modo longitudinal oscila de forma aleatoria, la suma de los cosenos genera un patrón aleatorio, originando ruido. Cuando se fijan las fases se obtiene un patrón entre los modos, formando pulsos, una manera de fijar las fases es a través de un material no lineal o absorbedor saturable [27], esto puede verse en la figura (2.5).

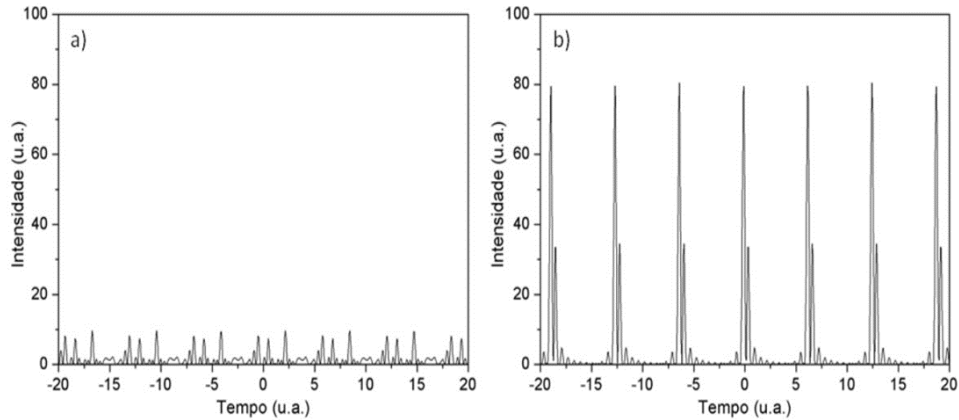


Figura 2.5: Patrón de intensidad de un láser EDFL a) muestra la radiación sin absorbedor, b) radiación cuando se introduce el absorbedor se observa un patrón pulsado. Tomada de [27].

Diferentes montajes han sido utilizados para generar modelocking y pulsos ultracortos: la técnica

que usa espejos no lineales con coeficiente de reflexión dependiente de la intensidad [28]; la técnica que utiliza la interacción de dos pulsos en direcciones opuestas en un absorbedor saturable, la cual es conocida como (colliding pulse mode locking) CPM [29]; la técnica que utiliza un absorbedor saturable en una cavidad en anillo que se ilustra en la figura 2.6, la cual es una cavidad en anillo a fibra dopada con erbio, conocida como cavidad (EDFL). En este trabajo utilizaremos esta última técnica, que consiste en una fuente de bombeo continua a 980nm, un amplificador de fibra dopada con erbio y un absorbente saturable de grafeno en la punta de la fibra. Además, la figura 2.6 muestra el escenario de simulación que nos ayudará a entender los efectos del grafeno como modulador pasivo y absorbedor saturable, dicha simulación se realizará a través de la ecuación de Ginzburg-Landau.

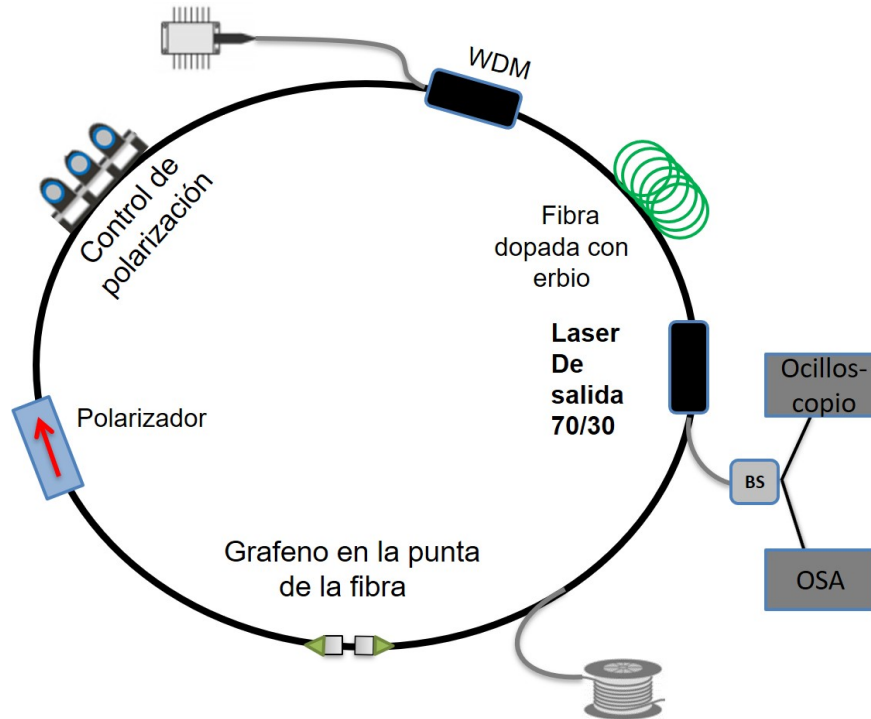


Figura 2.6: Configuración de una cavidad EDFL con grafeno como absorbedor saturable

A continuación, se describirán los elementos principales de la cavidad EDFL mostrada en la figura 2.6 para su posterior simulación.

### 2.4.3 Grafeno monocapa como absorbedor saturable

El grafeno monocapa es un material bidimensional que actuando como absorbedor saturable o material no lineal, en presencia de campos electromagnéticos intensos se torna transparente, esto significa que se encuentra en estado saturado y por tanto deja de absorber radiación. En este instante las ganancias son mayores que las pérdidas, generando un intervalo temporal, lo cual permite el acoplamiento pasivo de modos en una cavidad (EDFL) y por tanto la generación del pulsos [20] [21],[22]. Estos elementos se dividen en absorbedores saturables rápidos y lentos dependiendo del tiempo de recuperación  $\tau_A$  de éstos.

La ecuación (2.54) [30] describe la tasa de absorción saturable para cada vuelta en la cavidad:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q - q_0}{\tau_A} - q \frac{|A|^2}{E_A} \quad (2.54)$$

Donde  $q$  es el coeficiente de absorción,  $q_0$  es el porcentaje de absorción no saturable,  $\tau_A$  es el tiempo de recuperación del absorbedor saturable,  $|A|^2$  es la intensidad del campo eléctrico y  $E_A$  es la energía de saturación del absorbedor saturable.

En este trabajo, para generar pulsos ultracortos es necesario un absorbedor saturable rápido cuya característica principal es que el porcentaje de absorción varía muy rápido con el tiempo, por tanto en la ecuación (2.54) podemos hacer la aproximación:  $\frac{dq}{dt} \approx 0$  y despejando  $q$  obtenemos la ecuación que caracteriza un absorbedor saturable rápido.

$$q = \frac{q_0}{1 + \frac{|A|^2 \tau_A}{E_A}} \quad (2.55)$$

En el caso específico de este trabajo  $\tau_A = 100 \text{ fs}$  [23]

El absorbedor saturable lento se caracteriza por la ecuación (2.56) :

$$q = q_0 \exp\left(-\frac{1}{E_A} \int |A(t)|^2 dt\right) \quad (2.56)$$

La aproximación usada es que  $\tau \ll \tau_A$  donde  $\tau$  es el tiempo de duración del pulso.

#### 2.4.4 Medio de ganancia

La fibra dopada con erbio se utiliza para la amplificación de señales ópticas y su funcionamiento se puede explicar a partir de un esquema de tres niveles de energía. La amplificación óptica es un proceso de emisión estimulada donde la energía incide sobre el amplificador a través de una fuente de bombeo de 980 nm. Esta energía es absorbida por los electrones del dispositivo amplificador (fibra dopada con erbio), que son excitados a un nivel superior de energía, desde donde decaen rápidamente y sin radiar a un nivel meta-estable, que tiene una vida media mucho más larga, lo que permite la inversión de población (fenómeno en el cual hay más electrones en un estado excitado que en los estados de menor energía). A partir de aquí algunos electrones decaen por emisión espontánea generando ruido, y otros electrones que son alcanzados por la señal óptica decaen por emisión estimulada, emitiendo un fotón que amplifica la señal óptica en la banda de comunicación C, especialmente para la longitud de onda de 1550nm. La ganancia se caracteriza por la siguiente función:

$$G(n) \widetilde{A}_n = \left\{ 1 + g \left[ 1 - \frac{(n\Delta\omega)^2}{\Omega_g^2} \right] \right\} \widetilde{A}_n \quad (2.57)$$

Donde:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{P_m}{P_s}} \quad (2.58)$$

Con  $g$ : la ganancia de saturación,  $n$ : el orden del modo longitudinal,  $\Omega_g$ : el ancho de banda de ganancia,  $\Delta\omega$ : la separación entre los modos longitudinales,  $\widetilde{A}_n$ : la amplitud del modo  $n$ ,  $g_0$ : ganancia de pequeña señal,  $P_s$ : potencia de saturación del erbio y  $P_m$ : potencia media de la señal. La ecuación (2.58) caracterizará el medio de ganancia en nuestra simulación, introduciendo los parámetros específicos del erbio.

El esquema de tres niveles se puede observar en la figura (2.7):

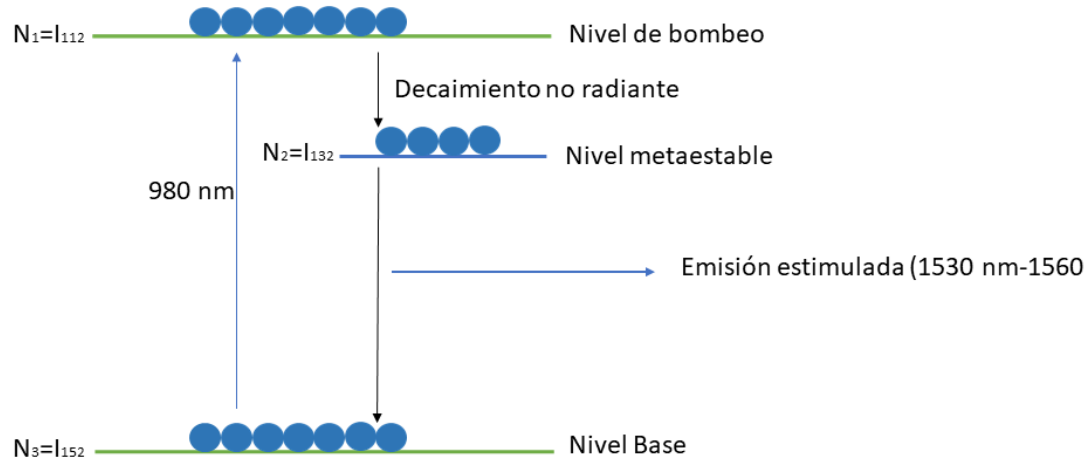


Figura 2.7: Esquema de tres niveles de amplificación de fibra dopada con erbio

Uno de los objetivos en esta investigación es estudiar el acoplamiento pasivo de modos en una cavidad Láser a Fibra Dopada con Erbio (EDFL), con grafeno como absorbedor saturable. La propagación y la generación del pulso será modelada a partir de una ecuación diferencial parabólica, la ecuación de Ginzburg-Landau, la cual simula la propagación de campo en una cavidad y cuya solución se debe encontrar numéricamente. Las técnicas más recomendadas para encontrar una solución a una ecuación parabólica son las diferencias divididas, en nuestro caso y por la estructura de la ecuación se utilizará el método Split-Step Fourier simetrizado, la solución se simulará en Matlab.

### 2.4.5 Ecuación de Ginzburg-Landau

La propagación de un campo electromagnético en un medio material puede ser estudiada por las ecuaciones de Maxwell y su desarrollo nos llevará a la ecuación de Helmholtz y posteriormente a la de Ginzburg-Landau. las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.59)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.62)$$

Donde  $\mathbf{E}$  es el vector de campo eléctrico,  $\mathbf{H}$  es el vector de campo magnético,  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico y  $\mathbf{B}$  es el vector de inducción magnética. Los vectores de desplazamiento eléctrico e inducción magnética se relacionan con el campo eléctrico y el campo magnético que se propagan en un medio sin cargas ni corrientes, de la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (2.64)$$

Donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $\mathbf{P}$  es el vector de polarización eléctrica y  $\mathbf{M}$  es el vector de polarización magnética. Utilizando la identidad  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  en la ecuación (2.59) obtenemos:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.65)$$

En un medio sin cargas ni corrientes, la ecuación (2.61) toma la forma :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.66)$$

Y aplicando el operador divergencia a la ecuación (2.63), donde  $\mathbf{P} = \chi_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}$  se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \chi_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.67)$$

Por tanto de la ecuación (2.67) podemos decir que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , introduciendo este valor en (2.65) obtenemos:  $-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \right)$  y utilizando el hecho de que la luz  $c$  se puede escribir como  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$  llegamos a:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.68)$$

Si se divide la polarización en una parte lineal y una parte no lineal, la ecuación (2.68) puede escribirse como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.69)$$

Para resolver la ecuación (2.69) es necesario hacer algunas aproximaciones. Asumiremos la polarización no lineal como una pequeña perturbación sobre polarización lineal, además se puede asumir que la polarización del campo eléctrico se mantiene a lo largo de la fibra, de modo que una aproximación escalar es válida. El campo eléctrico puede ser escrito de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}} [E(r, t) \exp(-i\omega_0 t)] \quad (2.70)$$

Donde:  $\hat{\mathbf{i}}$  es el vector unitario de polarización,  $E(r, t)$  es una función que varía lentamente con el



tiempo. Además  $\mathbf{P}_L$  puede ser escrita como:

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\chi} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)] \quad (2.71)$$

Ya que la fibra es un medio dispersivo, la polarización lineal se puede definir como en la ecuación (2.72)

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (2.72)$$

Introduciendo la ecuación (2.70) y (2.71) en (2.72) y utilizando la transformada de Fourier para el campo eléctrico:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega \quad (2.73)$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{2} \hat{\chi} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)] = \epsilon_0 \int \chi^{(1)}(t - t') \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}} [E(\mathbf{r}, t') \exp(-i\omega_0 t')] dt' \quad (2.74)$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\chi} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)] = \\ \epsilon_0 \int \chi^{(1)}(t - t') \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}} \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t'] \exp(-i\omega_0 t') d\omega dt' \end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (2.74) por  $\exp(i\omega_0 t)$  y luego integrando en el tiempo llegamos a:

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int \chi_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i(\omega - \omega_0)t) d\omega \quad (2.75)$$

De la misma forma se obtiene:

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int \epsilon_{NL}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i(\omega - \omega_0)t) d\omega \quad (2.76)$$

Donde  $\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2$

Introduciendo la transformada de Fourier del campo en (2.70)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}} \left[ \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i(\omega - \omega_0)t) d\omega \exp(-i\omega_0 t) \right] \quad (2.77)$$

De esta forma se obtiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.78)$$

De la misma forma que para la ecuación anterior, podemos introducir (2.75) en (2.71) y obtener (2.79)

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.79)$$

Igual que en (2.78) y (2.79) podemos escribir la polarización no lineal:

$$\mathbf{P}_{NL} = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int \epsilon_{NL} \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.80)$$

Sustituyendo (2.78), (2.79) y (2.80) en la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \left[ \frac{1}{4\pi} \int \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{4\pi} \int \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \right] = \\ & \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \right] + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int \epsilon_{NL}(\omega) \tilde{E} \exp(-i\omega t) d\omega \right] \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación anterior y luego utilizando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{E} + \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E} = 0 \quad (2.81)$$

Donde  $\epsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL}(\omega)$  y  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

La ecuación (2.81) la podemos resolver por separación de variables asumiendo una solución de la forma:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z) \quad (2.82)$$

$F(x, y)$ : es la distribución del campo eléctrico en una sección transversal,  $\tilde{A}$ : es una función que varía lentamente con  $z$ , y  $\beta_0$ : es el número de onda.

Sustituyendo (2.82) en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z) + \epsilon(\omega) k_0^2 F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z) = 0 \quad (2.83)$$

Aplicando el operador laplaciano  $\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y) [\tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y) [\tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x, y) [\tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)] + \end{aligned}$$

$$F(x, y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)]$$

Donde al derivar dos veces el último término de la expresión anterior:

$$F(x, y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)] = F(x, y) \frac{\partial}{\partial z} [\exp(i\beta_0 z) \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega)}{\partial z} + i\beta_0 \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)]$$

Derivando nuevamente respecto a  $z$  y despreciando el término  $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}$  ya que estamos suponiendo que el campo varía lentamente con  $z$ , luego introduciendo el laplaciano obtenido en la ecuación de Helmholtz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} [\tilde{A} \exp(i\beta_0 z)] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\tilde{A} \exp(i\beta_0 z)] + F(x, y) [2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \exp(i\beta_0 z) - \beta_0^2 \tilde{A} \exp(i\beta_0 z)] + \\ + \varepsilon_0 k_0^2 F \tilde{A} \exp(i\beta_0 z) = 0 \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, sacando factor común  $\exp(i\beta_0 z)$  y luego multiplicando por  $\frac{1}{F(x, y) \tilde{A}(z, \omega)}$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{F(x, y)} \right] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{F(x, y)} \right] + \frac{1}{\tilde{A}(z, \omega)} \left[ 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega) \right] + \varepsilon_0(\omega) k_0^2 = 0 \quad (2.84)$$

Definamos una constante de separación  $\tilde{\beta}$  con unidades de número de onda, y podemos entonces separar la ecuación anterior en dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{F(x, y)} \right] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{F(x, y)} \right] + \varepsilon_0(\omega) k_0^2 = \tilde{\beta}^2 \quad (2.85)$$

y

$$\frac{1}{\tilde{A}(z, \omega)} \left[ 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega) \right] = -\tilde{\beta}^2 \quad (2.86)$$

La ecuación (2.86) puede ser resuelta utilizando teoría de perturbaciones, en aproximación de primer orden para  $\tilde{\beta}$ :

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (2.87)$$

Donde  $\Delta\beta$  incluye los efectos no lineales y de atenuación:

$$\Delta\beta = \gamma |A|^2 + \frac{i\alpha}{2} \quad (2.88)$$

$\gamma$  es el parámetro no lineal y  $\alpha$  es la atenuación.

A partir de la serie de Taylor en torno a  $\beta_0$  y teniendo en cuenta los términos de orden cero y primer orden, podemos hacer la siguiente aproximación  $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$ , entonces la ecuación (2.86) toma la forma:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0]\tilde{A} \quad (2.89)$$

Podemos escribir  $\beta(\omega)$  en serie de Taylor en torno a  $\omega_0$ :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \dots \quad (2.90)$$

Despreciando los términos de orden mayor a 2 e introduciendo en (2.89):

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2) + \Delta\beta - \beta_0]\tilde{A} \quad (2.91)$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  obtenemos la expresión  $A(z, t)$  donde la transformada inversa de Fourier de  $(\omega - \omega_0)$  puede ser reemplazada por  $i\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = [-\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A - \frac{\alpha}{2} A] \quad (2.92)$$

Donde  $A(z, t)$ : es la envolvente del campo eléctrico,  $\alpha$ : es el coeficiente de atenuación,  $\beta_1$ : es el coeficiente de dispersión de primer orden y  $\beta_2$  es el coeficiente de dispersión de segundo orden, estos coeficientes se relacionan con el parámetro de dispersión  $D$ , de la siguiente forma:

$$D = \frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda} = \frac{-2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (2.93)$$

La ecuación (2.92) es conocida como la ecuación no lineal de Schrödinger y cuando tenemos un medio con ganancias y pérdidas saturables, como en el caso de una cavidad EDFL, entonces podemos introducir un parámetro  $g$  responsable de las ganancias y otro término  $q$  responsable de las pérdidas de absorción saturable en la cavidad. Dichos parámetros están descritos por las ecuaciones (2.55) y (2.58).

Por tanto la ecuación de Schrödinger toma la forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = [-\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A - \frac{\alpha}{2} A] + [g(1 + \frac{1}{\Omega_g^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) - q]A \quad (2.94)$$

La ecuación anterior se conoce como la Ecuación de Ginzburg-Landau y describe la dinámica en una cavidad láser a través del acoplamiento pasivo de modos. Esta ecuación se simulará en el ambiente Matlab, utilizando el método Split step Fourier.

## 2.4.6 Método Split step Fourier

La ecuación de Ginzburg-Landau es una ecuación diferencial parabólica y no lineal, cuya solución puede ser obtenida por métodos de diferencias finitas. En nuestro caso utilizaremos el método Split step Fourier, ya que converge más rápido en comparación con otros métodos de diferencias finitas. La ecuación de Ginzburg-Landau puede escribirse de la siguiente forma.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = [\hat{D} + \hat{N}]A \quad (2.95)$$

donde

$$\hat{D} = -\beta_1 \frac{\partial}{\partial T} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\alpha}{2} + g \left( 1 + \frac{1}{\Omega_g^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right) \quad (2.96)$$

y

$$\hat{N} = \gamma |A|^2 - q \quad (2.97)$$

$\hat{D}$  es responsable por los efectos lineales como la atenuación, dispersión y ganancia y  $\hat{N}$  es responsable de los efectos no lineales en el absorbedor saturable.

$T = t - \frac{z}{v_g}$  es el tiempo de un observador que se mueve con velocidad de grupo  $v_g$ .

Ahora, la fibra se divide en pequeños intervalos de longitud  $h$  donde se evaluará la evolución del campo  $A$ , esto se logrará aplicando los operadores  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$  para cada paso  $h$ . Debido a que  $\hat{D}$  está en el dominio de la frecuencia y  $\hat{N}$  en el dominio del tiempo, el método se implementa de la siguiente forma:

$$A(z + h, T) \approx \exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})A(z, T) = \left\{ F^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)] \right\} F \left\{ \exp[h\hat{N}(t)]A(z, T) \right\} \quad (2.98)$$

Donde  $F$  y  $F^{-1}$  son la transformada y la transformada inversa de Fourier respectivamente. Esta solución permitirá analizar el comportamiento del grafeno, y también considerar los parámetros relevantes para optimizar este tipo de láser EDFL. El operador  $\hat{D}(i\omega)$  es obtenido utilizando  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$  en (2.87).

Para intervalos  $h$  pequeños, podemos despreciar las variaciones de  $\hat{N}$  entonces la solución a la ecuación toma la forma:

$$A(z + h, T) \approx \exp[h(\hat{D} + \hat{N})]A(z, T) \quad (2.99)$$

Para dos operadores que no conmutan, tenemos la siguiente identidad:

---


$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B) + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{3!}\{(B + 2A)[A, B] + [A, B](A + 2B)\} + \dots \quad (2.100)$$

Comparando las ecuaciones (2.98) y (2.99)

$$\exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})A(z, T) = \exp(h(\hat{D} + \hat{N}))A(z, T) \quad (2.101)$$

y reemplazando  $A = h\hat{D}$  y  $B = h\hat{N}$  en la ecuación (2.100) obtenemos:

$$\exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})A(z + h, T) = \exp(h(\hat{D} + \hat{N}))A(z + h, T) + \frac{1}{2}h^2[\hat{D}, \hat{N}] \quad (2.102)$$

Igualando (2.101) y (2.102) obtenemos el error cometido en el método Split step Fourier

$$e \approx \frac{1}{2}h^2[\hat{D}, \hat{N}] \quad (2.103)$$

Por tanto si tomamos pasos  $h$  pequeños el error en la solución disminuye.

## Capítulo 3

# Resultados

Después de simular la ecuación (2.95), podremos analizar la dinámica de formación y evolución del pulso para variaciones de la longitud en la cavidad.

### 3.1 La función del grafeno como absorbedor saturable en una cavidad EDFL

Para comenzar la simulación, la señal inicial es la señal óptica producida por la evolución de las componentes del ruido generado en el amplificador y representado por una función de ruido con potencia  $P_0 = 0.02W$ , potencia usualmente usada en cavidades EDFL. La señal inicial se muestra en la figura (3,1), y será caracterizada por la función  $U_0 = P_0 * \exp(-i(\text{rand}(l_0)))$ , donde  $\text{rand}(x)$  es la función usada para simular el ruido y  $l_0$  es una función del tiempo

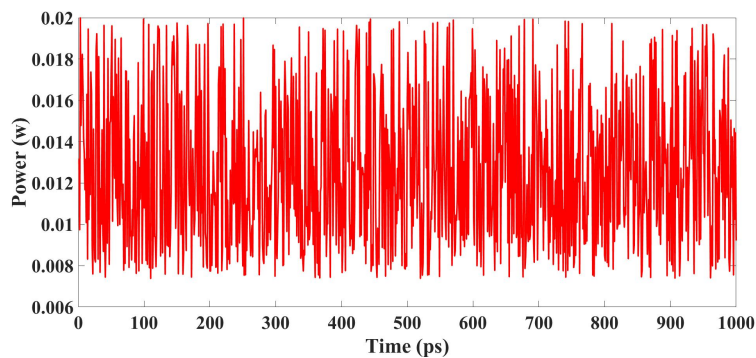


Figura 3.1: Señal inicial (simulada en Matlab)

La señal alimentará la cavidad, pasando a través de los elementos que la constituyen.

Un esquema del programa general que simula la cavidad es el siguiente:  $for ii = 2 : vueltas$   
 $u(:, ii) = \text{fibraerbio}(u(:, ii - 1), dt, dz2, nz2, gain, PL, Tr, omega, loss, q0, Ea, tal, D2, gamma2);$   
 $u(:, ii) = \text{fibrasmf}(u(:, ii), dt, dz1, nz1, D1, gamma1, alpha);$   
 $as1 = ((\text{abs}(u(:, ii)).^2 + \text{abs}(d).^2) ./ 2);$   
 $as = q0 ./ (1 + as1 ./ (Ea ./ tal));$   
 $c(:, ii) = as;$   
 $se = \text{abs}(dt * \text{fft}(u(:, ii)) / \text{sqrt}(2 * pi)).^2;$   
 $e(:, ii) = se;$

---

```

p = abs(u(:, ii)).2;
pul(:, ii) = p;
end

```

En el bloque anterior, para cada vuelta en la cavidad, la señal inicial alimentará a las funciones *fibraerbio* y *fibrasmf*, que son llamadas por el programa general y las cuales resuelven la ecuación de Ginzbur-Landau; la primera lo hará para el medio de ganancia y el absorbedor saturable, la segunda lo hará para la fibra monomodo. A continuación se mostrará el esquema de cómo dichas funciones resuelven la ecuación de Ginzbur-Landau utilizando el método Split-Step-Fourier y su posterior simulación en el ambiente matlab.

Un esquema del programa que simula la solución a la ecuación de Ginzburg-Landau para la fibra dopada con erbio y el absorbedor saturable es:

```

function u1 = fibraerbio(u0, dt, dz2, nz2, gain, PL, Tr, omega, loss, q0, Ea, tal, D2, gamma2)
gan = gain. * exp(-(trapz(t, abs(u0).2))./(PL. * Tr));
halfstep1 = ganho - loss + (gan./ (omega.2)) * ((1i * w).2) - 1i * (D2./2). * ((1i * w).2);
halfstep = exp(halfstep1 * dz2./2);
u1 = u0;
for iz = 1 : nz2,
ufft1 = fft(u1);
uhalf1 = ifft(halfstep. * ufft1);
as1 = ((abs(u1).2 + abs(u0).2)./2);
as = q0./ (1 + as1./ (Ea./tal));
uw1 = uhalf1. * exp((-as + 1i * gamma2. * as1) * dz2);
uw1 = fft(uw1);
ufft1 = halfstep. * uw1;
uw1 = ifft(ufft1);
u1 = uw1;
end

```

En el bloque anterior, la función *gan* caracteriza el medio de ganancia, para esto utilizamos la ecuación (2.49) y la función *as* caracteriza el absorbedor saturable, para tal fin se utilizó la ecuación (2.46), la función *halfstep* representa el operador  $\hat{D}$  de la fibra dopada con erbio, y en el ciclo *for*, se resuelve la ecuación de Ginzburg-Landau utilizando split-step-Fourier.

Un esquema que simula la solución a la ecuación de Ginzburg-Landau para la fibra monomodo es:

```

function u1 = fibrasmf(u0, dt, dz1, nz1, D1, gamma1, alpha)
halfstep1 = -alpha - 1i * (D1./2). * ((1i * w).2);
halfstep = exp(halfstep1 * dz1./2);
u1 = u0;
for iz = 1 : nz1,
ufft1 = fft(u1);
uhalf1 = ifft(halfstep. * ufft1);
as1 = ((abs(u1).2 + abs(u0).2)./2);
uw1 = uhalf1. * exp((1i * gamma1. * as1) * dz1);
uw1 = fft(uw1);
ufft1 = halfstep. * uw1;
uw1 = ifft(ufft1);

```



```

u1 = w1;
end

```

En el bloque anterior,  $half\_step$  representa el operador  $\hat{D}$  para la fibra mono- modo, y en el ciclo for, se resuelve la ecuación de Ginzburg-Landau para dicha fibra.

Los resultados obtenidos bajo la simulación se mostrarán a continuación:

Para hablar de pulsos ultra cortos es importante hablar de algunas de sus características; en general, la duración de un pulso ultra corto es del orden de los pico segundos a los femto segundos, en nuestro caso, el pulso tiene duración del orden de fentosegundos y el FWHM se mide como el tiempo entre los puntos mas separados del pulso que tienen la mitad de la intensidad mas alta. El pulso a la salida del absorbedor saturable tiene forma Gaussiana, y después de 100, 500 y 2500 vueltas puede ser observado en la figura (3.2). En las figuras (3.2a, 3.2c y 3.2e) se muestra la dinámica de formación del pulso, cuando el porcentaje de absorción del grafeno monocapa es  $q_0 = 0.05$  y en las figuras (3.2b, 3.2d y 3.2f) se muestra la dinámica de formación cuando  $q_0 = 0.02$ , podemos ver en la figura 3.2e que para 2500 vueltas y  $q_0 = 0.05$  el pulso está completamente formado, ya que luego de este número de vueltas el fenómeno se estabiliza y no se aprecian cambios en su duración, mientras que para el mismo número de vueltas y  $q_0 = 0.02$  el pulso aun no se forma, ya que existen componentes del ruido que aun no han sido filtradas como se observa en la figura 3.2f. Podemos entonces decir que cuando el coeficiente de absorción  $q_0$  disminuye, el pulso tarda más tiempo en formarse.

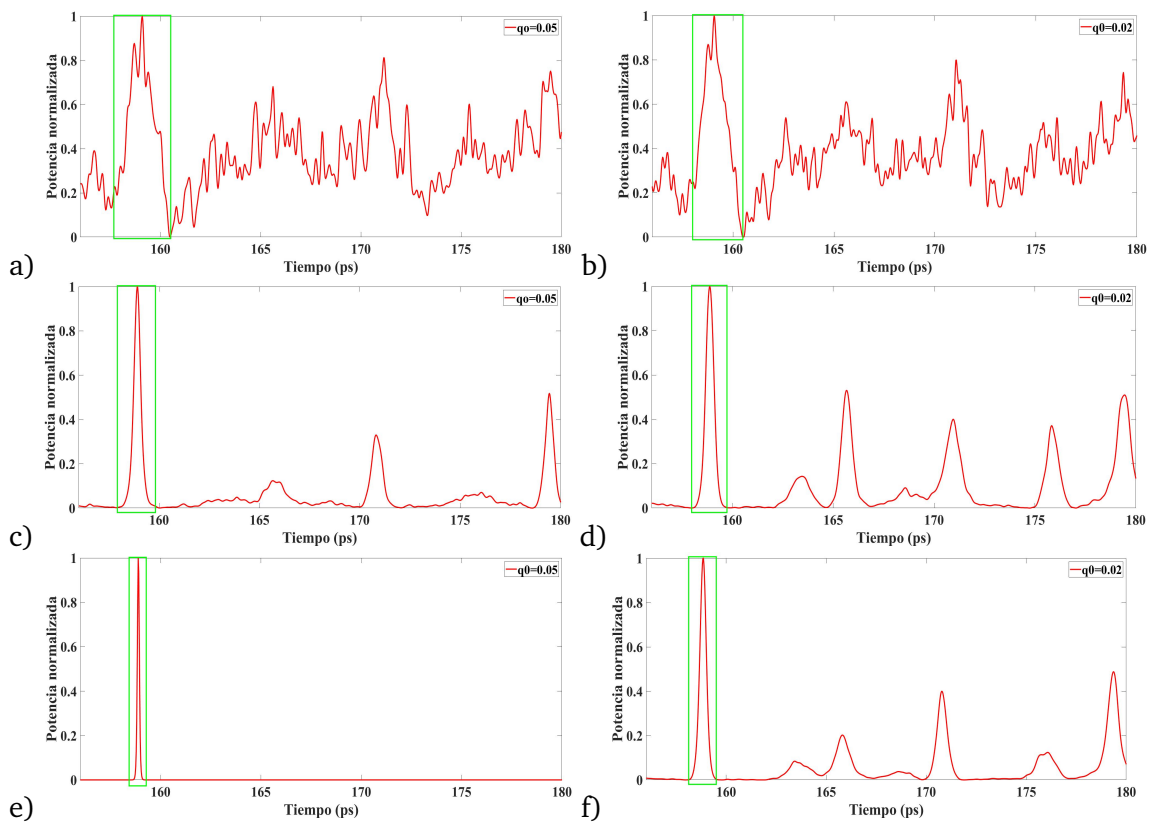


Figura 3.2: Formación del pulso en función del número de vueltas a) Formación del pulso para 100 vueltas y  $q_0 = 0.05$  , b) Formación del pulso para 100 vueltas y  $q_0 = 0.02$  c) Formación del pulso para 500 vueltas y  $q_0 = 0.05$  d) Formación del pulso para 500 vueltas y  $q_0 = 0.02$  e) Formación del pulso para 2500 vueltas y  $q_0 = 0.05$  f) Formación del pulso para 2500 vueltas y  $q_0 = 0.02$

El grafeno filtra las intensidades bajas y deja pasar las intensidades altas, generando un decrec-

imiento en el tiempo de duración del pulso, este proceso se repite para cada vuelta en la cavidad, debido a que el ruido generado en la cavidad es una señal aleatoria, la variación de potencia en el interior de la cavidad, no es una función constante; la figura 3.1. muestra como las componentes del ruido tienen diferentes niveles de potencia. En la figura 3.2. de la a) a la f) podemos ver el grafeno monocapa actuando como absorbedor saturable en la formación del pulso en una cavidad EDFL, de hecho, la figura 3.2.a) muestra en rectángulo verde, la componente del ruido más intensa, en la figura 3.2.c) y 3.2.e) en el rectángulo verde se muestra la evolución de las componentes del ruido a través del absorbedor saturable. También observamos que el papel del grafeno monocapa, este filtra las intensidades bajas y deja pasar las intensidades altas, permitiendo la formación en cada vuelta a la cavidad. Esta simulación se realizó usando valores de  $q_0 = 0.05$  y  $q_0 = 0.02$ .

En la figura 3.3 se muestra la reducción en la duración del pulso cuando aumenta el número de vueltas en la cavidad, evidenciando nuevamente el papel del absorbedor saturable, cuando  $q_0$  es mayor, el grafeno satura rápidamente y filtra las componentes del ruido de menor intensidad de manera más eficiente. Lo contrario ocurre cuando  $q_0$  es menor, en este caso el grafeno es menos eficiente y permite el paso de componentes de baja y alta intensidad, provocando que la generación del pulso sea más lenta en relación al número de vueltas.

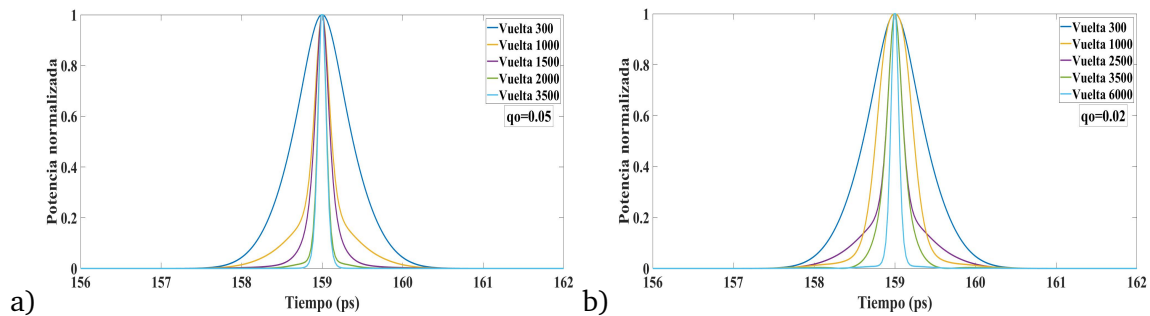


Figura 3.3: Duración del pulso en función del número de vueltas para a)  $q_0 = 0.05$ , b) Para  $q_0 = 0.02$

Las figuras 3.4a) y 3.4b) muestran la estabilidad en la duración del pulso en función de las vueltas en la cavidad. Para dos valores de absorción lineal al  $q_0 = 0.05$  y  $q_0 = 0.02$  encontramos diferentes valores para los cuales se alcanza un pulso estable. De hecho, cuando la profundidad de modulación en el grafeno o absorción lineal fue  $q_0 = 0.05$  la duración del pulso se estabilizó después de 2500 vueltas en la cavidad, con una duración aproximadamente de 0.180ps. Por otro lado, para una profundidad de modulación de  $q_0 = 0.02$  la estabilidad en la duración del pulso fue alrededor de 6000 vueltas y con una duración de 0.153.

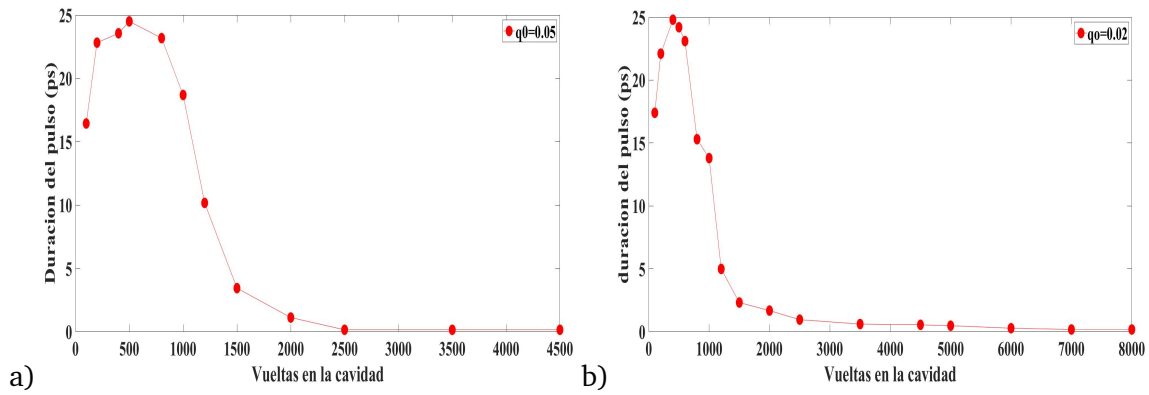


Figura 3.4: Salida del absorbedor saturable. a) Duración del pulso en función de las vueltas en la cavidad para  $q_0 = 0.05$ , b) Duración del pulso en función de las vueltas en la cavidad para  $q_0 = 0.02$

En la figura 3.5 la absorción saturable fue medida como una función del número de vueltas en la cavidad, para dos valores diferentes de  $q_0$ , ( $q_0 = 0.05$  and  $q_0 = 0.02$ ). En los dos casos la absorción saturable  $q_0$  decrece en función del número de vueltas en la cavidad, como es mostrado en la figura 3.5 a). y figura 3.5 b). Esto ya que cuando el número de vueltas se incrementa para una longitud constante de la cavidad, la duración del pulso decrece, causando un incremento en la potencia del campo eléctrico  $|A|^2$ , esto lo podemos ver en la ecuación (2.44). También, vemos que la función de absorción saturable se estabiliza en el número de vueltas en la cavidad para el cual se forma el pulso, esto es debido a que el pulso completará su formación cuando el tiempo de duración sea mínimo y la potencia sea máxima, lo cual implica que la absorción no cambia a partir de este momento.

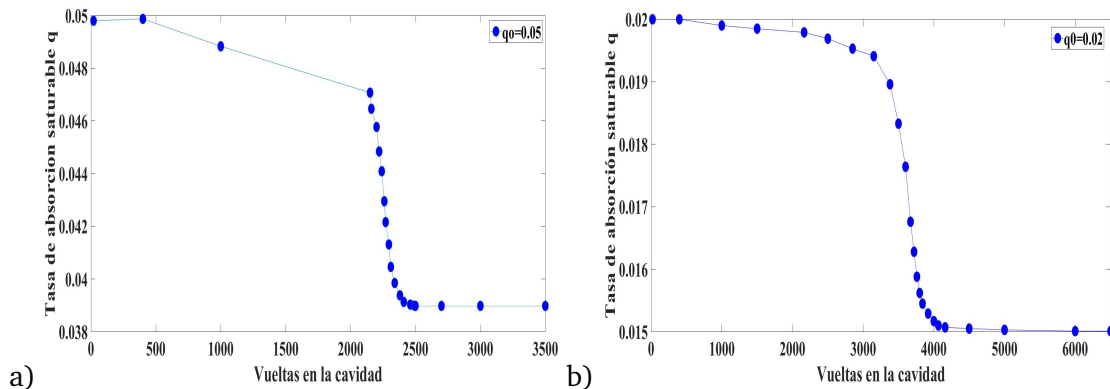


Figura 3.5: Tasa de absorción saturable en función del número de vueltas en la cavidad a) Medida con  $q_0 = 0.05$ , b) Medida con  $q_0 = 0.02$

### 3.1.1 Comportamiento de la fibra dopada con erbio en función de la longitud de ganancia

En esta sección, nosotros investigamos la longitud de ganancia de la fibra dopada con erbio para la cual se forma pulso, la longitud de ganancia se define como la longitud de la fibra dopada con erbio. En la figura 3.6, para ambos casos mantenemos la potencia de bombeo constante con un valor  $P_0 = 0.02mW$ . En la figura 3.6(a) mostramos los resultados obtenidos para  $q_0 = 0.05$ , donde el número de vueltas para el cual el pulso se forma disminuye cuando la longitud de ganancia

aumenta, con un valor mínimo de 0.3m. Por otro lado, para  $q_0 = 0.02$ , nosotros vemos en la figura 3.6(b) un mínimo valor de 0.45 m para el cual se forma pulso. Finalmente, las figuras 3.6(a) y 3.6(b) muestra los valores mínimos para la formación del pulso ultracorto, para los valores menores a 0.3 la pérdida sería mayor que la ganancia, por lo que la formación del pulso no es posible.

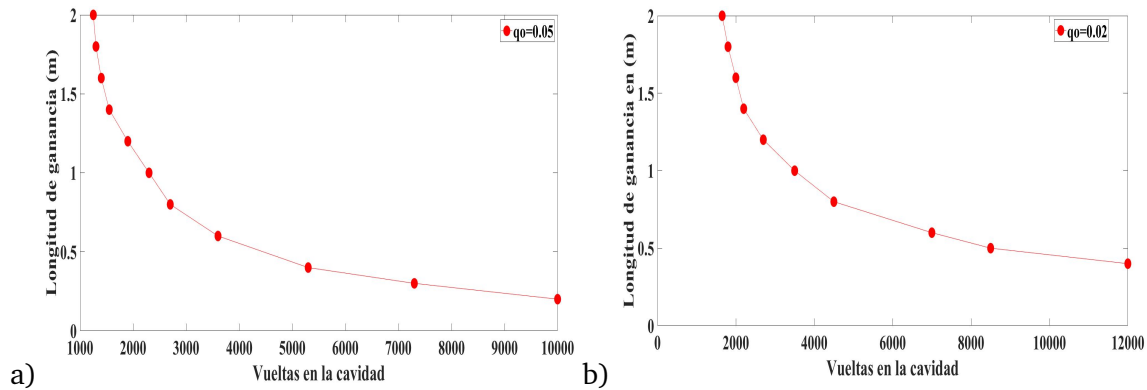


Figura 3.6: Porcentaje de absorción saturable en función del número de vueltas en la cavidad a) Medida con  $q_0 = 0.05$ , b) Medida con  $q_0 = 0.02$

### 3.1.2 Efectos de la variación en la longitud de la cavidad en la duración del pulso

En la figura 3.7 se muestra la medida del ancho espectral y la correspondiente duración del pulso para cavidades cortas. Esto se hizo para valores  $q_0 = 0.05$ , 2500 vueltas en la cavidad y variaciones en la cavidad entre 12m y 20m. También la figura 3.7 muestra como la duración del pulso aumenta cuando aumenta la longitud de la cavidad, a su vez que el ancho espectral disminuye.

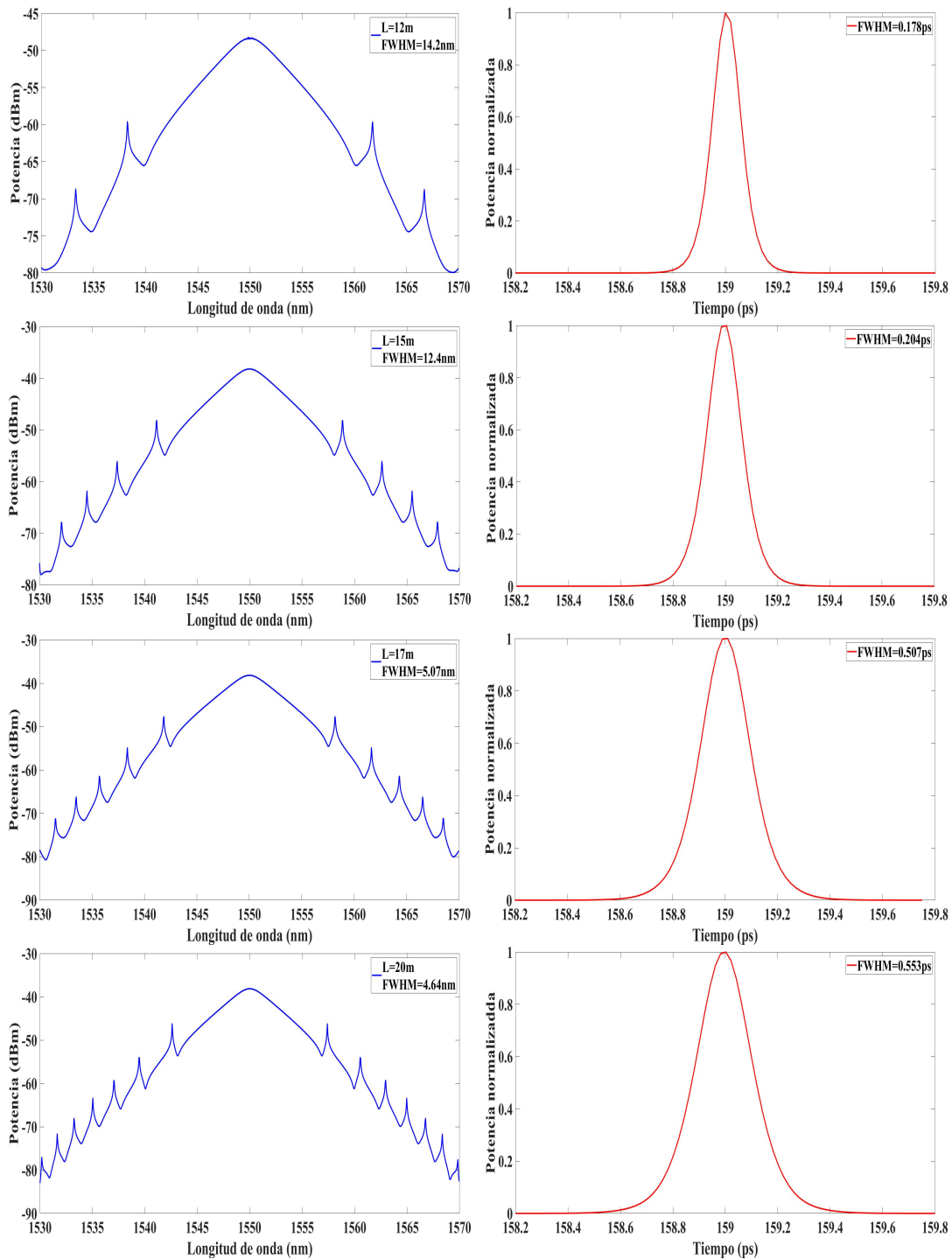


Figura 3.7: Ancho espectral y duraci3n del pulso para diferentes longitudes de cavidad: 12, 15, 17 y 20m.

La figura 3.8 presenta el ancho espectral y la correspondiente duraci3n del pulso para cavidades largas: 200 y 1500 m.

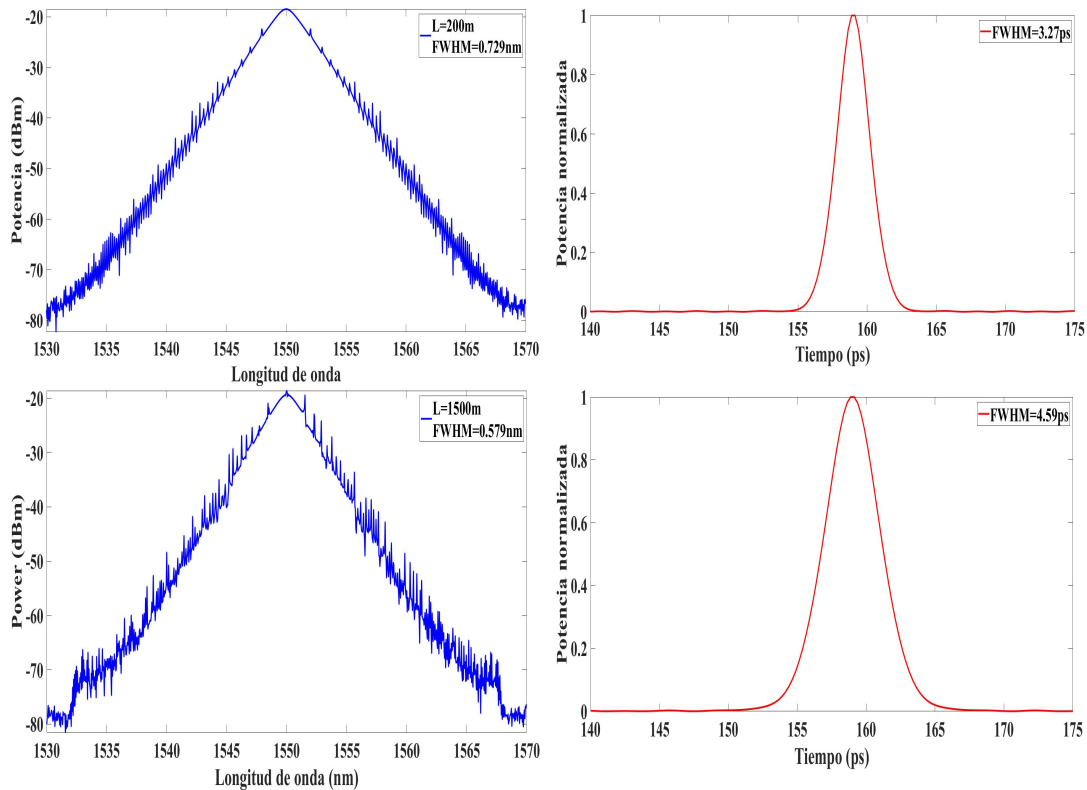


Figura 3.8: Ancho espectral y duración del pulso para longitudes de cavidades grandes 200 y 1500 m.

Para grandes cavidades el rendimiento del laser mode-locked, esta determinado por el soliton y los efectos dispersivos [31].

En la Figura 3.9 se muestra el comportamiento de la duración del pulso y el ancho de banda del láser en función de la longitud de la cavidad para cavidades grandes. En la (Figura 3.9 (a)) el ancho de banda (curva azul) aumenta de 0,57 nm a 14,2 nm cuando la longitud de la cavidad disminuye de 1500 a 50 m; y la duración del pulso (curva roja) disminuye de 4.69 ps a 2.8 ps y en la Figura 3.9 (b) los puntos azules son el producto de ancho de banda y el tiempo de duración del pulso (TBP) que viene del inglés time bandwidth product, y la línea roja representa el límite de la transformada de Fourier 0.315

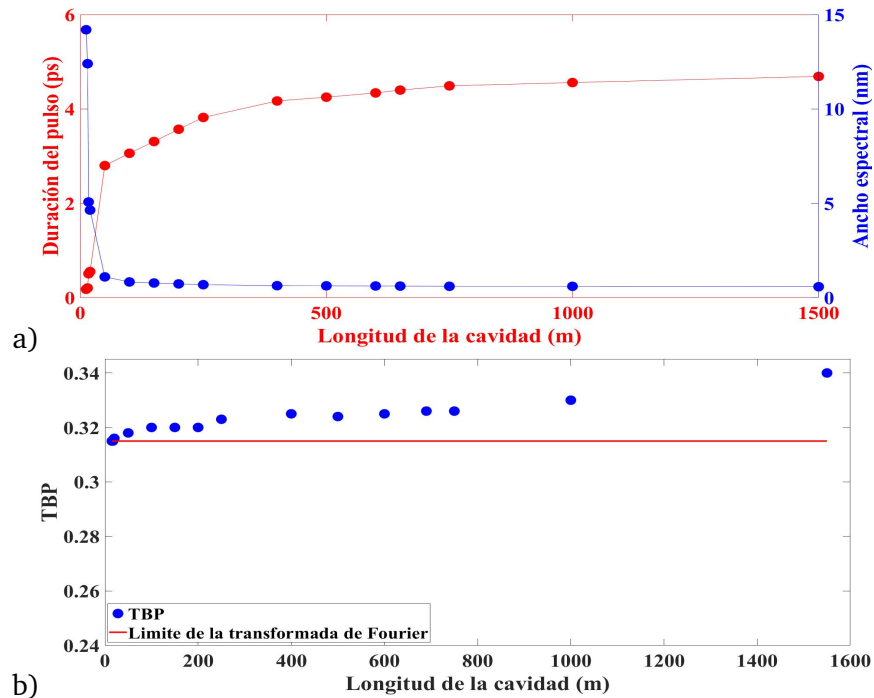


Figura 3.9: Ancho de banda y duración del pulso como función de la longitud de la cavidad a) Cavidades de grandes longitudes b) Time bandwidth product (TBP) vs Longitud de la cavidad

Además, una de las propiedades de los pulsos generados en la cavidad es su estabilidad, confirmada con la Figura 3.9 (a) (en rojo), ya que muestra un fenómeno de saturación, donde la duración del pulso se estabiliza para valores superiores a 600 m de fibra en la cavidad, en la Figura 3.9 (b) vemos que los pulsos se alejan del límite de la transformada de Fourier cuando aumenta la longitud de la fibra.

En la Figura 3.10 podemos ver los datos obtenidos por la simulación (en azul), comparados con los valores obtenidos experimentalmente (en rojo) y descritos en la referencia [5].

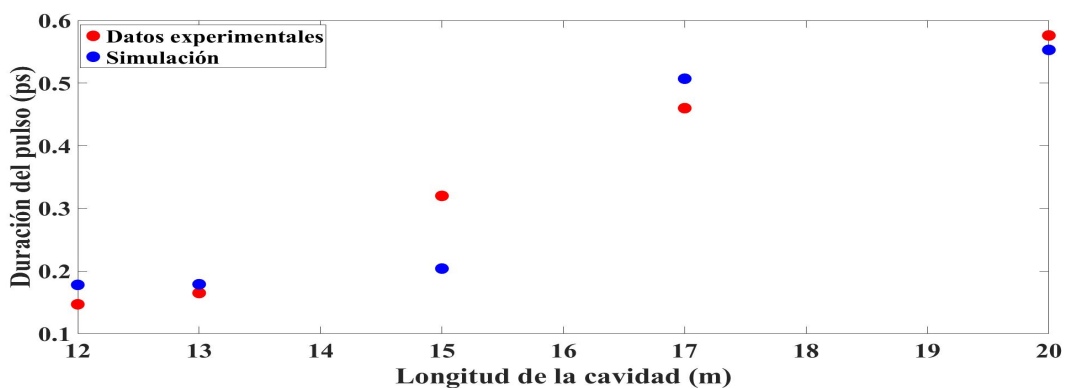


Figura 3.10: Duración del pulso en función de la longitud de la cavidad (los datos experimentales fueron tomados de la información suplementaria de [5])

Los datos fueron comparados cuantitativamente a través del coeficiente de correlación de Pearson, el cual arrojó un resultado de  $R = 0.94$ . Además, el error relativo obtenido al comparar los dos conjuntos de puntos es de 5%. También se usó el estadístico de prueba p con un nivel de

---

significancia  $\alpha = 0.05$  para verificar la hipótesis de autocorrelación entre los datos, donde el valor  $p$  obtenido fue de  $p = 0.7627$ . El coeficiente de correlación y el error relativo obtenidos, muestran una fuerte similitud entre los datos simulados y los datos experimentales, de alrededor de 94%, además el valor  $p$  es mayor al nivel de significancia, lo cual confirma la hipótesis de similitud entre los datos. De lo anterior podemos decir que los resultados de la simulación pueden reproducir con buena aproximación el experimento en función del ancho temporal debido al aumento de la longitud de la cavidad.



## Capítulo 4

# Conclusiones

En resumen, presentamos un estudio del grafeno en la punta de la fibra como absorbente saturable en la formación de pulsos en cavidades EDFL. La generación de pulsos se investigó estudiando la evolución de los componentes de ruido a través del absorbedor saturable en la cavidad cuando el grafeno ayudó al balance entre las pérdidas y las ganancias en la cavidad, generando pulsos ultracortos como su límite de respuesta. Además, la formación del pulso mostró una alta dependencia de la profundidad de modulación o absorción lineal, para dos valores de absorción lineal  $q_0 = 0.05$  y  $q_0 = 0.02$  encontramos diferentes valores de estabilidades. De hecho, cuando  $q_0 = 0.05$ , la duración del pulso fue estabilizado después de 2500 vueltas en la cavidad con una duración de pulso de aproximadamente 0,180 ps. Por otro lado, para  $q_0 = 0.02$ , la duración del pulso fue estabilizada después de 4500 vueltas. Cambiando la longitud de la cavidad láser de 12 a 1500 m en la simulación, se pudo obtener pulsos de 178 fs a 4.72 ps, lo que demostró que la dinámica y la duración se rigen por efectos de dispersión, solitón y absorción saturable. Además, los resultados numéricos mostraron que, la posibilidad de ajustar la longitud de la cavidad, permite controlar la duración del pulso y por lo tanto el ancho espectral. Finalmente, comparamos la simulación y resultados experimentales para cavidades cortas con buena aproximación.

# Bibliografía

- [1] Y. Lyu, J. Li, Y. Hu, Y. Wang, C. Wei, and Y. Liu, “Theoretical comparison of npr and hybrid mode-locked soliton thulium-doped fiber lasers,” *IEEE Photonics Journal*, vol. 9, no. 1, pp. 1–11, 2017.
- [2] G. Xie, J. Ma, P. Lv, W. Gao, P. Yuan, L. Qian, H. Yu, H. Zhang, J. Wang, and D. Tang, “Graphene saturable absorber for q-switching and mode locking at 2  $\mu\text{m}$  wavelength,” *Optical Materials Express*, vol. 2, no. 6, pp. 878–883, 2012.
- [3] A. Latiff, N. Kadir, E. Ismail, H. Shamsuddin, H. Ahmad, and S. Harun, “All-fiber dual-wavelength q-switched and mode-locked edfl by smf-thdf-smf structure as a saturable absorber,” *Optics Communications*, vol. 389, pp. 29–34, 2017.
- [4] H. A. Haus, “Mode-locking of lasers,” *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 6, no. 6, pp. 1173–1185, 2000.
- [5] J. Zapata, D. Steinberg, L. A. Saito, R. De Oliveira, A. Cárdenas, and E. T. De Souza, “Efficient graphene saturable absorbers on d-shaped optical fiber for ultrashort pulse generation,” *Scientific reports*, vol. 6, no. 1, pp. 1–8, 2016.
- [6] J. Zapata, L. Saito, A. Cárdenas, and E. T. de Souza, “Sub-150 fs mode-locked erbium doped fiber laser based on monolayer graphene on a d-shaped optical fiber,” in *CLEO: QELS Fundamental Science*, pp. JTU5A–71, Optical Society of America, 2016.
- [7] D. Steinberg, J. Zapata, E. T. de Souza, and L. Saito, “Ultrashort pulse generation using mechanically exfoliated graphite onto d-shaped optical fiber in erbium doped fiber laser,” in *2017 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*, pp. 1–3, IEEE, 2017.
- [8] D. Steinberg, J. D. Zapata, E. A. T. de Souza, and L. A. Saito, “Mechanically exfoliated graphite onto d-shaped optical fiber for femtosecond mode-locked erbium-doped fiber laser,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 36, no. 10, pp. 1868–1874, 2018.
- [9] L. Saito and E. T. de Souza, “Identifying the mechanisms of pulse formation and evolution in actively mode-locked erbium fiber lasers with meters and kilometers-long,” *Optics & Laser Technology*, vol. 71, pp. 16–21, 2015.
- [10] U. Keller, K. J. Weingarten, F. X. Kartner, D. Kopf, B. Braun, I. D. Jung, R. Fluck, C. Honninger, N. Matuschek, and J. A. Der Au, “Semiconductor saturable absorber mirrors (sesam’s) for femtosecond to nanosecond pulse generation in solid-state lasers,” *IEEE Journal of selected topics in QUANTUM ELECTRONICS*, vol. 2, no. 3, pp. 435–453, 1996.
- [11] B. Zhang, G. Li, M. Chen, Z. Zhang, and Y. Wang, “Passive mode locking of a diode-end-pumped nd: Gdvo 4 laser with a semiconductor saturable absorber mirror,” *Optics letters*, vol. 28, no. 19, pp. 1829–1831, 2003.

- 
- [12] H. G. Rosa, D. Steinberg, and E. A. T. de Souza, "Explaining simultaneous dual-band carbon nanotube mode-locking erbium-doped fiber laser by net gain cross section variation," *Optics express*, vol. 22, no. 23, pp. 28711–28718, 2014.
- [13] S. Y. Set, H. Yaguchi, Y. Tanaka, and M. Jablonski, "Ultrafast fiber pulsed lasers incorporating carbon nanotubes," *IEEE Journal of selected topics in quantum electronics*, vol. 10, no. 1, pp. 137–146, 2004.
- [14] H. Zhang, D. Tang, L. Zhao, Q. Bao, and K. Loh, "Large energy mode locking of an erbium-doped fiber laser with atomic layer graphene," *Optics Express*, vol. 17, no. 20, pp. 17630–17635, 2009.
- [15] R. I. Woodward and E. J. Kelleher, "2d saturable absorbers for fibre lasers," *Applied Sciences*, vol. 5, no. 4, pp. 1440–1456, 2015.
- [16] A. Martinez and Z. Sun, "Nanotube and graphene saturable absorbers for fibre lasers," *Nature Photonics*, vol. 7, no. 11, pp. 842–845, 2013.
- [17] H. G. Rosa, D. Steinberg, J. D. Zapata, L. A. Saito, A. M. Cárdenas, J. C. Gomes, and E. A. T. De Souza, "Raman mapping characterization of all-fiber cvd monolayer graphene saturable absorbers for erbium-doped fiber laser mode locking," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 33, no. 19, pp. 4118–4123, 2015.
- [18] G. Sobon, "Mode-locking of fiber lasers using novel two-dimensional nanomaterials: graphene and topological insulators," *Photonics Research*, vol. 3, no. 2, pp. A56–A63, 2015.
- [19] K. Lau, N. Z. Abidin, M. A. Bakar, A. Latif, F. Muhammad, N. Huang, M. Omar, and M. Mahdi, "Passively mode-locked ultrashort pulse fiber laser incorporating multi-layered graphene nanoplatelets saturable absorber," *Journal of Physics Communications*, vol. 2, no. 7, p. 075005, 2018.
- [20] T. Lei, C. Tu, F. Lu, Y. Deng, and E. Li, "Numerical study on self-similar pulses in mode-locking fiber laser by coupled ginzburg-landau equation model," *Optics express*, vol. 17, no. 2, pp. 585–591, 2009.
- [21] P. W. Smith, "Mode-locking of lasers," *Proceedings of the IEEE*, vol. 58, no. 9, pp. 1342–1357, 1970.
- [22] Z. Lu and W. Zhao, "Nanoscale electro-optic modulators based on graphene-slot waveguides," *JOSA B*, vol. 29, no. 6, pp. 1490–1496, 2012.
- [23] F. Bonaccorso, Z. Sun, T. Hasan, and A. Ferrari, "Graphene photonics and optoelectronics," *Nature photonics*, vol. 4, no. 9, p. 611, 2010.
- [24] M. Glazov and S. Ganichev, "High frequency electric field induced nonlinear effects in graphene," *Physics Reports*, vol. 535, no. 3, pp. 101–138, 2014.
- [25] R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. Peres, and A. K. Geim, "Fine structure constant defines visual transparency of graphene," *Science*, vol. 320, no. 5881, pp. 1308–1308, 2008.
- [26] A. C. Neto, F. Guinea, N. M. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, "The electronic properties of graphene," *Reviews of modern physics*, vol. 81, no. 1, p. 109, 2009.

- 
- [27] P. G. Komninos *et al.*, “Análise da dinâmica do funcionamento de lasers de fibra dopada com érbio sob a óptica da equação de ginzburg-landau,” 2011.
- [28] K. Stankov and J. Jethwa, “A new mode-locking technique using a nonlinear mirror,” *Optics communications*, vol. 66, no. 1, pp. 41–46, 1988.
- [29] R. Fork, B. Greene, and C. V. Shank, “Generation of optical pulses shorter than 0.1 psec by colliding pulse mode locking,” *Applied Physics Letters*, vol. 38, no. 9, pp. 671–672, 1981.
- [30] F. X. Kartner, J. A. Der Au, and U. Keller, “Mode-locking with slow and fast saturable absorbers—what’s the difference,” in *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron*, Citeseer, 1998.
- [31] D. Steinberg, J. D. Zapata, L. A. Saito, and E. A. T. de Souza, “Study of pulse formation in an edfl under a large dispersion variation hybridly mode-locked by graphene and nonlinear polarization rotation,” *IEEE Photonics Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 1–14, 2021.