El uso histórico del concepto de proporción en el arte: ¿una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas?

David Hernando Jaramillo Fernández

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Asesores
Diana Victoria Jaramillo Quiceno, Doctora en Educación Matemática
Diego Alejandro Pérez Galeano, Doctor en Educación Matemática

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Medellín, Antioquia, Colombia
2022

Cita	(Jaramillo Fernández, 2022)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Jaramillo, D. H. (2022). *El uso histórico del concepto de proporción en el arte: ¿una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas?* [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Centro de Documentación Educación

Dedicatoria

A mi madre Inmaculada Fernández y mi padre Hernando por ser los primeros y mejores maestros, porque con su ejemplo y dedicación me acompañaron en cada proceso de mi vida.

A mi esposa Sorany y a mi hija Selena por su paciencia y amor en cada uno de los momentos difíciles.

Agradecimientos

Es para mí una satisfacción y orgullo dar por terminado este proyecto de investigación. Por tal motivo, quisiera agradecer a la Universidad de Antioquia por tan valiosas enseñanzas en este proceso de formación, así como también a mis asesores la Dra. Diana Victoria Jaramillo Quiceno y al Dr. Diego Alejandro Pérez Galeano por su paciencia, su dedicación; a mis compañeros de Práctica Pedagógica que con sus palabras y cuestionamiento me animaron a no desfallecer y quienes me motivaron a creer que era posible realizar esta investigación.

Quisiera agradecerle a la Institución Educativa Compartir por permitirme realizar las prácticas en ella, por darme la oportunidad de conocer seres humanos tan especiales y por acogerme como a un colega que quiere aprender. Agradezco a mi profesor cooperador Dr. Jorge Andrés Toro por sus aportes y su buena disposición para atender mis dudas sobre las guías y sobre el grupo del semillero, por sus consejos y sus consideraciones que me permitieron entender los diferentes procesos que se pueden presentar en el aula de clase.

También quisiera agradecerles a los cinco estudiantes que participaron en mi práctica I, por permitirme acompañarlos en ese momento de dificultades y permitirme aprender al lado de ellos, a los estudiantes del semillero que dirigí en la Institución Educativa Compartir, por acogerme en este espacio, por su participación y porque al igual que los otros estudiantes, hicieron posible que esta investigación se realizara.

Quiero darle las gracias a mi familia, en especial a mi madre y a mi esposa, por el apoyo anímico en el cumplimiento de esta meta, y aunque estuve ausente en algunos momentos, siempre estuvieron ahí animándome en los momentos donde pensé que no culminaría este proceso. Gracias a mi padre que me apoyo hasta el último día de su vida y gracias por ser siempre un ejemplo a seguir.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

La pregunta de investigación que movilizó este estudio fue ¿Cuáles usos del concepto de proporción en el arte a través de la historia, se constituyen en una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas? consecuentemente, el objetivo de investigación fue identificar históricamente los usos del concepto de proporcione en el arte, como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas.

Este trabajo de investigación fue realizado bajo un paradigma cualitativo de investigación en educación, apoyado de un enfoque hermenéutico-interpretativo. La metodología utilizada fue historiográfica. Los conceptos claves que permitieron que constituyeron el archivo para este estudio estuvieron basados en la proporción como objeto matemático y el arte como una posibilidad para su enseñanza. Estos registros ayudaron identificar los usos del concepto en arte como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas, principalmente los usos en la música, la pintura y la arquitectura.

El análisis de los datos fue realizado a partir de dos categorías *"El arte: proporción y belleza"* y *"La armonía musical y la divina proporción en la pintura y arquitectura"*. Entre los hallazgos, se identifican tres posibilidades para la enseñanza del concepto de proporción en el arte, el cuerpo humano como representación de belleza y su utilización para realizar obras de arte, la música como instrumento para identificar las proporciones musicales, la pintura y la arquitectura como una posibilidad reproducir, estudiar y reinventar, las proporciones que los artistas han usado en sus obras.

Palabras claves: razón, proporción, enseñanza de las matemáticas, metodología historiográfica, belleza, música, pintura, arquitectura.

Abstract

The research question that mobilized this study was: What uses of the concept of proportion in art throughout history, constitute a possibility for teaching in mathematics class? Consequently, the research objective was to historically identify the uses of the concept of proportion in art, as a possibility for teaching in mathematics class.

This research work was carried out under a qualitative paradigm of research in education, supported by a hermeneutical-interpretive approach. The concepts that allowed the archive for this study were based on proportion as a mathematical object and art as a possibility for its teaching.

These records made it possible to identify the uses of concept in art as a possibility for teaching in mathematics class, mainly the uses in music, painting and architecture.

The analysis of the data was carried out from two categories "Art: proportion and beauty" and "Musical harmony and divine proportion in painting and architecture". Among the findings, I identify three possibilities for teaching the concept of proportion in art, the human body as a representation of beauty and its use to make works of art, music as an instrument to identify musical proportions, painting and architecture as a possibility to reproduce, study and reinvent the proportions, painting and architecture as a possibility to reproduce, study and reinvent the proportions that artists have used in their works.

Keywords: proportion, reason, art, methodology historiography, beauty, music, painting, architecture.

1. Presentación

Este trabajo de investigación fue realizado bajo una perspectiva histórico-cultural de la educación matemática con una metodología historiográfica; esta metodología me ayudó a identificar históricamente los usos que ha tenido el concepto de proporción en el arte, con el fin de encontrar en ellos una posibilidad para enseñar en la clase de matemáticas el concepto de proporción. Para lograr el objetivo investigación tomé como referencias algunos libros de la historia de las matemáticas y algunos artículos de tipo histórico y artístico, que me permitieron entender algunos momentos y hechos fundamentales en desarrollo del concepto de proporción.

En el capítulo dos llamado "Planteamiento del problema" muestro cómo fue el camino que transité a lo largo de mi proceso de práctica pedagógica, las dificultades que surgieron a partir de la pandemia originada por el COVID-19 y las alternativas que asumí como investigador y como futuro profesor de matemáticas. En este capítulo destaco las experiencias y aprendizajes que tuve como practicante y las interacciones que realicé tanto con niños de mi contexto cercano (para apoyarlos en tareas matemáticas), como a los niños del centro de práctica.

En el capítulo tres llamado "Marco teórico y metodológico" discuto dos aspectos importantes para la presente investigación: en primer lugar, el concepto de razón y proporción y la evolución de las aproximaciones que se han tenido desde hace más de 4000 años. En este sentido, retomo a trabajos como "Los Elementos" para comprender el concepto de razón y proporción, a la vez que los discuto frente a las metodologías de enseñanza que se suelen usar para socializar estos saberes en el aula. En segundo lugar, me aproximo a la metodología de investigación, al método historiográfico y la consolidación del archivo como instrumento que medió para comprender y construir las categorías de análisis.

A propósito, en el capítulo 4 llamado "Análisis", discuto las posibilidades que observo para la enseñanza de la proporción en la escuela a través de dos categorías que emergieron del proceso de sistematización en el archivo. En la primera categoría, llamada "El arte: proporción y belleza" retomo las ideas de civilizaciones como la egipcia y la griega para comprender los cánones de belleza y cómo la proporción sirvió como forma de expresión de lo que la humanidad, a través del tiempo, ha venido construyendo como "bello" o "armonioso".

Con base en estas reflexiones y exposición de imágenes que muestran estas ideas de belleza, en la segunda categoría llamada "La armonía musical y la divina proporción en la pintura y arquitectura" discuto teóricamente las posibilidades que se abren para enseñar el concepto de proporción en la escuela a partir de tres artes diferentes: la música, la pintura y la arquitectura. En estas dimensiones artísticas, observo y analizo cómo algunos filósofos, matemáticos y artistas usaron la armonía de los sonidos musicales y la proporción áurea para mostrar las ideas de belleza y armonía que discutí en la primera categoría. En todos los casos, puedo observar cómo en la escuela se pueden abrir espacios otros para comprender el mundo que nos rodea en términos de las razones y proporciones que nos permiten representarlo y apropiarnos de él.

Finalmente, en el capítulo 5 llamado "A modo de cierre" retomo la pregunta y el objetivo de la investigación, para comentar cuáles son las posibilidades que encontré para la enseñanza de la proporción en la escuela. Estas ideas plasman mi interés por superar una enseñanza centrada en los algoritmos o comprensiones parciales de la proporción como una forma mecánica de razonar u operar magnitudes, sino como algo que constantemente nos rodea y nos permite contemplar la armonía (o a veces el caos) que nos rodea.

2. Planteamiento del problema

El uso de las matemáticas dentro y fuera del ámbito escolar es, sin duda, una de las actividades que debe desarrollar cada estudiante; sin embargo, ese uso tiene algunas dificultades en cuanto a lo práctico. Parece ser que ese uso matemático en el aula de clase se limita, a veces, a lo algorítmico, dejando de lado la identidad de los conceptos, su génesis, su practicidad en los diferentes contextos y de la capacidad para que los estudiantes involucren otros conceptos matemáticos en la solución de problemas de toda índole.

Por ejemplo, y direccionado a mi trabajo de investigación, está el concepto de proporción, que tiene importancia dentro del aula de clase y fuera de ella por su uso práctico; sin embargo, el hecho de ser visto mayormente de forma algorítmica invisibiliza las incidencias que este concepto ha tenido en diferentes civilizaciones o hechos históricos del hombre y que han sido reflejadas en diversos campos de estudios.

Aunque en los últimos años han aumentado las investigaciones que se han realizado en torno a mejorar la enseñanza del concepto de proporción, autores como Edgar Alberto Guacaneme, Gilberto Obando, Joaquín Giménez entre otros, resaltan que se requiere de más investigación para disminuir las falencias que se tienen al momento de abordar este concepto en las aulas de clase. Así mismo, los autores recalcan su interés por clarificar lo que se entiende y la forma en cómo se enseña el concepto de proporción, el cual en ocasiones se presenta como una relación entre razones, en el que, a su vez, la razón se presenta como una relación entre dos números; esta mirada deja de lado otras relaciones como la relación que se puede dar entre dos magnitudes que, si se comparan, también pueden formar una razón, además de que no se considera la proporción como esa relación entre las partes y el todo y entre el todo y la parte.

Parece no entenderse, por ejemplo, que la razón es una comparación o cierta relación entre magnitudes de igual o diferente naturaleza, con lo cual se empiezan a visualizar cómo esas relaciones entre los usos y los conceptos no se profundizan en las aulas de clase. Una posible causa de esto, puede ser que en ocasiones, en las aulas de clase no se asocian los procesos prácticos al momento de enseñar los conceptos; por ejemplo, la forma en cómo se aborda el concepto de razón en las aulas de clase, en la que en ocasiones se privilegia la identificación de una razón como número racional y no como una relación entre magnitudes, lo que finalmente dificulta la interpretación no solo del concepto de razón si no también del concepto de proporción al ser llevados a ser representados en un proceso aritmético o algorítmico como la regla de tres, dejando la parte práctica o utilidad del concepto en el cotidiano.

Como ya lo he mencionado, el concepto matemático que tomé como referencia para mi investigación es el concepto de proporción. Debido a su complejidad y su relación con otros objetos matemáticos, se hace necesario para mi investigación optar por esclarecer otros objetos matemáticos que están relacionados con dicho concepto, como lo son: las razones, las magnitudes y la proporcionalidad. Estos conceptos los presento debido a que no se puede hablar del concepto de proporción por sí solo sin que los demás no estén presentes en el discurso y en la aplicación. Una muestra de esta relación entre conceptos se puede observar en el arte donde conviven y fluyen de una manera armoniosa, por ejemplo, en la arquitectura y la pintura; para esto mostraré cada uno de ellos desde una mirada histórica que dé cuenta de los usos e interpretaciones que han tenido estos conceptos en el arte.

A continuación, narraré mi experiencia en la práctica pedagógica, mostrando cómo surgió mi interés por trabajar las dificultades que presentan los estudiantes en torno al aprendizaje del concepto de proporción.

2.1 Mi camino por la práctica pedagógica

En este apartado quisiera resaltar los motivos que me llevaron a realizar esta investigación; el primer motivo se lo atribuyo al seminario de práctica, junto con las lecturas y las asesorías de mis profesores que, durante todo el tiempo, me permitieron abrir a nuevas posibilidades de ver y entender la educación. Mis asesores también me ayudaron a tomar una postura crítica frente la responsabilidad que se asume cuando se quiere llevar un concepto al aula de clase, a tener presente aspectos como el contexto, los tipos de estudiantes y los usos que puede tener un objeto matemático en la cotidianidad.

En otras palabras, mis asesores y las actividades al interior del seminario de práctica me permitieron entender que la enseñanza de la matemática no se trata de llevar al aula el concepto, por el concepto, sino tener presente la utilidad del mismo, considerando no solo, lo que se quiere llevar al aula, sino también lo que van a aprender los estudiantes y el para qué se quiere que lo aprendan.

El segundo motivo se lo atribuyo a mi práctica pedagógica. A pesar de que esta práctica no fue para nada sencilla, ya que se realizó en un momento muy difícil para todos, pues fue atravesada por la pandemia del Covid-19, esta pandemia de carácter mundial no fue ajena a ninguno de nosotros, y como grupo de práctica nos vimos obligados al igual que la escuela, a pasar de la presencialidad a la virtualidad. Aunque esta práctica fue atípica, distinta a lo que muchos llamarían *normalidad*, o a lo que normalmente se acostumbra a hacerse cuando se es practicante de una licenciatura, me atrevería a decir que estuvo llena de aprendizajes y buenos momentos.

Alrededor de la escuela fueron muchas las problemáticas que se generaron por el confinamiento, sentimos miedo, nostalgia e incertidumbre por lo que pasaría con nuestros familiares y amigos; pero aun así con todas esas problemáticas, en nuestro grupo del seminario de práctica no desistimos, y quisimos cumplir con el compromiso que en ese momento sentíamos con la escuela. Era claro que no podíamos estar allí en la escuela física, pero aun así queríamos aportar algo que hiciera más llevadera la pandemia; por esto, decidimos en nuestro primer semestre de práctica hacer escuela desde nuestras casas, ayudando a familiares y amigos a profundizar en los temas vistos en sus clases y ayudándolos con algunas guías o talleres que eran propuestos por sus instituciones educativa.

Atendiendo a este llamado, por mi parte, quise aportar al reunirme con cinco estudiantes con edades entre los 10 y 12 años, que cursaban el grado quinto de escolaridad, en una institución educativa en zona rural del municipio de Girardota (Antioquia). Estos encuentros no fueron oficialmente parte de la práctica, pero aun así fue una manera de hacer frente a la pandemia y hacer de esta algo más llevadero, al menos para estos cinco niños.

En la institución donde estudiaban estos niños, la mayoría de los estudiantes no contaban con acceso a internet, por tal motivo la institución educativa decidió no realizar clases virtuales; a cambio de esto, envió algunas guías con los temas, con el fin de que los niños estudiaran en sus casas de forma autónoma. Dichas guías se caracterizaban por tener la siguiente estructura: primero una introducción al tema, luego una explicación teórica, seguido se presentaban unos ejemplos y ejercicios, para finalmente realizar la evaluación. Estas guías debían ser resueltas y enviadas por los estudiantes con un tiempo límite 15 días, con el fin de ser revisadas por la profesora encargada de este grado.

Durante los encuentros realizados con estos cinco estudiantes, retomamos temas como la multiplicación, la división, las fracciones, la proporción y algunas situaciones problema que giraban en torno a estos objetos matemáticos. A continuación, presento uno de los ejercicios propuestos en estas guías, algunas de las dificultades que se observaron en el desarrollo de las guías y la forma en general en la que abordamos las situaciones allí propuestas:

Tabla 1 Problema del aserrador

Un aserrador saca 15 tablas de cada tronco de madera. ¿Cuántas tablas saca de 255 troncos?

Fuente: Guía enviada por la institución donde estudiaban los niños durante mi primer semestre de práctica.

Durante el desarrollo de las guías, pude observar en los niños algunas dificultades entorno para la aplicación del algoritmo de la multiplicación; además, durante el desarrollo de esta situación problema los estudiantes presentaron algunas dificultades en el manejo a las tablas de multiplicar, lo cual dificultó un poco el desarrollo de la sesión, además de que al principio se dificultó la interpretación del problema. Para atender a esta dificultad decidimos reescribir el ejercicio de la siguiente manera, con el fin de entender mejor el ejercicio.

Tabla 2 Modificación del problema del aserrador

Un carpintero necesita un tronco de madera para sacar 15 tablas. ¿cuántas tablas sacará de 255 troncos?

Fuente. Elaboración propia.

Este pequeño cambio hizo posible que se mejorara notablemente la interpretación del ejercicio. Aunque los cambios que realizamos de la situación problema, en esencia no hayan variado demasiado, pude notar que para los estudiantes es natural partir de un objeto determinado y a este dividirlo en varias partes, para luego poder comparar lo que sucede con este y de esta manera aplicarlo a valores o cantidades mayores.

A los estudiantes en esta situación problema se dificultó pasar de la parte al todo, por este motivo, el ejercicio se reformuló con el fin de mejorar la interpretación de la situación. Desde mi mirada, esta situación problema no tiene en cuenta la realidad de los participantes, debido a que en su contexto y cotidianidad no se costumbra relacionarse con este tipo de actividades. Partir de la premisa de tener un tronco y sacarle las partes (es decir del todo a las partes) ayudó a que el ejercicio se interpretara mejor. Personalmente pienso que en ocasiones, presentar este tipo de ejercicio de forma contraria, es decir de la parte al todo, puede generar en algunos estudiantes dificultades para la interpretación y más cuando no se ha profundizado en este tipo de situaciones.

A continuación, presento la metodología con la que fueron abordados los ejercicios propuestos en la guía y los pasos con los cuales le dimos solución a estos:

Tabla 3 Metodología para abordar los ejercicios

Paso 1: Leer el problema.
Paso 2: Identificar lo que está sucediendo en el problema e identificar la pregunta.
Paso 3: Preguntarnos cómo le daríamos solución a ese problema.
Paso 4: Aplicar el método para darle solución al problema.
Paso 5: Verificar si la respuesta del paso anterior es correcta o no.
Paso 6: Socializar los resultados.

Fuente: Elaboración propia.

En cada ejercicio nos tomamos el tiempo para socializar los resultados con la ayuda de un tablero y marcadores; allí los participantes presentaban las estrategias que utilizaron en el momento de darle solución a los ejercicios. Finalmente esta metodología o estrategia nos ayudó a comprender algunos de los ejercicios, facilitó el desarrollo de la clase gracias al orden que se estableció y nos permitió como grupo identificar las situaciones que estaba sucediendo en los ejercicios. Esta experiencia fue enriquecedora, pues personalmente me ayudó a ser más sensible, y a buscar estrategias para hacerle frente a las dificultades que presentan los estudiantes sobre un tema o concepto matemático.

Otro de los momentos importantes en mi práctica pedagógica, se dio en el tercer semestre de práctica, en el que tuve la oportunidad de acompañar un semillero de matemáticas, el cual fue dirigido para niños del grado sexto, con edades entre los 11 y 13 años de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

Por motivos asociados a la pandemia, en mi práctica no tuve la oportunidad de estar en presencialidad con los estudiantes. Aun así, al iniciar el semillero, se inscribieron un total de 29 niños; debido a la virtualidad, los estudiantes fueron divididos en dos grupos, de modo que tomé la decisión en compañía del profesor cooperador y de mis asesores de práctica, de llevar a cabo los encuentros con los estudiantes de manera escalonada, de tal forma que los encuentros por grupo se realizaron cada 2 semanas. Se podría decir que este fue oficialmente mi primer acercamiento a una institución educativa. Aunque esta práctica fue diferente y atípica a lo que se acostumbra a hacer en la escuela, no dejó de ser una experiencia enriquecedora y llena aprendizajes.

A continuación, presento un fragmento de mi diario de campo, que desde mi parecer resalta uno de los momentos más significativos de lo que sería mi acompañamiento en el semillero; además, este fragmento muestra los motivos que movilizaron esta investigación.

> Durante el segundo momento de la clase, los estudiantes participaron y estaban a la expectativa de lo que se trabajaría en esta sesión del semillero. La actividad planeada para esta sesión buscaba conocer las nociones tenían los participantes sobre proporción y como este concepto está presente en algunas actividades que realizamos a diario.
>
> Al principio de la actividad los estudiantes no encontraban una relación entre lo que estábamos realizando y un objeto matemático; para esto fue necesario hacer la aclaración

sobre algunas acciones y actividades que hacemos diariamente que pueden tener en ellas un concepto matemático o pueden estar ligadas a la matemática, y que en ocasiones realizamos mecánicamente sin darnos cuenta de la presencia de dichos conceptos matemáticos, como por ejemplo la cantidades que se necesitan para preparar los alimentos como el arroz, la pasta, la cantidad de objetos que se pueden comprar con una cantidad de dinero determinado. Este tipo de ejemplos permitió que se identificara en la clase los posibles usos de este concepto.

De esta situación me surge el siguiente interrogante ¿cómo los estudiantes perciben las matemáticas?, lo que pude observar de esta clase es que para algunos de los estudiantes la matemática está ligada sólo al reconocimiento de una fórmula o un algoritmo, sin que le presten mucha atención a los procesos que se realizan dentro de una actividad o situación que se les presente en la vida cotidiana; a partir de esto, me surgen otras preguntas: *¿por qué los estudiantes presentan dificultades a la hora de reconocer las operaciones que deben realizar en la solución de un problema matemático? - ¿por qué culturalmente en la enseñanza de las matemáticas, se acostumbra primero a presentar el concepto o el algoritmo, para luego abordar los problemas?*

(Diario de campo, 28 de abril 2021).

A partir de esta sesión empecé a identificar la problemática que movilizarían esta investigación. Desde mi postura como observador y practicante, pude identificar que para los estudiantes la matemática está ligada sólo al reconocimiento de una fórmula o un algoritmo, ya que, al parecer, si no se presenta una fórmula en la clase de matemáticas, no estamos aprendiendo matemáticas.

Vi entonces que los estudiantes enfocan su interés en aprender el algoritmo y olvidan la importancia de prestarle atención a los procesos que se realizan entorno a los conceptos matemáticos, tanto dentro del aula clase, como en las diferentes actividades o situaciones, en las que está presente la matemática o su uso en la vida cotidiana; esto se vio reflejado en el momento de abordar el concepto de proporción, ya que a algunos de ellos les pareció extraño que los materiales que se pidieron para esta clase no eran lo que se acostumbran a pedir en la clase de matemáticas, como lo son el compás, el lápiz, el transportador, la calculadora, eso por mencionar algunos, que con frecuencia se usan en la clase de matemáticas.

Los materiales que se pidieron para esta clase fueron alimentos como arroz, pastas, chocolate, frijol y lentejas. Estos se solicitaron con el fin de que los estudiantes nos contaran en el grupo cómo son preparados y qué se necesita para que los alimentos queden bien cocidos; para esto, no solo tuvimos en cuenta la opinión de los estudiantes, sino que también nos tomamos el tiempo, para que los estudiantes preguntaran a sus familiares cómo eran preparados. De esta situación pude observar que algunos de los estudiantes no se percataron de que, por ejemplo, al preparar los alimentos se hace uso del concepto de proporción, ya que para que los alimentos queden bien preparados, es necesario que se suministre una cantidad de alimentos proporcional a las porciones que se desean preparar, de manera que se encuentre un equilibrio entre las cantidades y el sabor que se desea.

Es así entonces como, a partir de esta problemática, empecé a tener algunas consideraciones frente a las actividades que se presentarían en el semillero tales como: ¿Cuáles son los usos y las aplicaciones que tiene los conceptos que se llevan a la clase de matemáticas? ¿Cuáles son los contextos en los que se pueden estudiar y desarrollar los conceptos matemáticos?, además también tuve presentes otras preguntas como: ¿el qué?, ¿el por qué?, ¿el para qué? y ¿el cómo? que fueron esenciales y marcarían el antes y el después de cada actividad, cambiando mi forma de ver y entender el concepto matemático. Estas preguntas me llevaron a centrar mi interés en la utilidad de las matemáticas, en su relación con el contexto y en aquellos conceptos que pueden estar en paralelo al concepto que se presentaría en cada sesión del semillero.

En este sentido, el seminario de práctica y las experiencias vivenciadas durante la práctica me ayudaron abrirme a otras formas de ver y entender los conceptos matemáticos, mirada que va en relación a la de Moura (2011) quien señala que:

> Un concepto matemático es como un objeto concreto producido para ser útil a un sujeto que quiere comprender un cierto fenómeno, sea él físico o social. El concepto matemático es un objeto de la mente humana, producido al producir objetos y al reflexionar sobre formas naturales que puedan tener algún significado para la vida. (p. 55)

La forma de reflexionar de Moura, sobre la utilidad de los conceptos matemáticos en la vida cotidiana, me llevó a hacerme las siguientes preguntas: ¿en qué situaciones o contextos está presente el concepto de proporción? y ¿Cuáles son los usos que este puede tener? Estas preguntas me permitieron identificar en el arte un posible contexto. Así en el siguiente apartado presento el arte como un posible contexto en el que se puede visualizar los usos o situaciones en las que está presente en concepto de proporción.

2.2 Una posibilidad: el uso del Arte

Una de las preguntas que rodea la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las aulas de clase es: ¿para qué sirve o cual es el uso que tienen los conceptos matemáticos en la cotidianidad? Aunque pensar en los usos no es una tarea fácil, algunos autores resaltan la importancia de que maestros y estudiantes identifiquen sus conocimientos matemáticos en las diferentes situaciones en las que está presente la matemática.

Autores como Chaverra (2018), Rodríguez (2010) y el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en Colombia, destacan la importancia que tiene la identificación de las situaciones del cotidiano y los saberes previos de los estudiantes para la enseñanza de la matemática en las aulas de clase. Además de esto, dichos autores plantean la necesidad de que en las aulas clase se propongan espacios en los que se puedan desarrollar situaciones que ayuden a estudiar y comprender las matemáticas.

Dichos autores también señalan que al momento de enseñar los conceptos matemáticos, se debe tener presente el contexto en el que se desarrollan las clases, con el fin de disminuir las dificultades en la aplicación de los conceptos y, de esta manera, aportar a la disposición y las expectativas que tienen los estudiantes frente a la clase de matemáticas.

Así al iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, es necesario comenzar por la identificación de los aprendizajes que trae, o tiene el estudiante sobre el tema en estudio, así se hace necesario la identificación del conocimiento matemático formal o informal que trae el estudiante, en relación con las actividades prácticas de su entorno. De esta manera cuando se inician los aprendizajes con la identificación de las concepciones previas, las potencialidades y las actitudes que tienen los estudiantes, frente al tema de estudio, se pueden tornar, como la base para mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

En esta dirección, Rodríguez (2010) señala que: “Posiblemente explorando estas experiencias en los educandos y mostrándoles que de alguna manera ellos usan la ciencia lógica y la necesitan, se puede mejorar notablemente su predisposición hacia ella [las matemáticas]” (p. 115). De esta forma, el cotidiano y los saberes previos de los estudiantes toman un papel importante al momento de querer abordar un concepto matemático en las aulas de clase, ya que les permite a los estudiantes relacionar los conceptos con los usos, problemas o situación que se les pueda presentar en su cotidianidad, permitiendo a la vez encontrar la aplicabilidad de los conceptos matemáticos en el cotidiano en el que se desenvuelven los estudiantes.

Finalmente con esto se busca que la enseñanza de las matemáticas, pase de ser una reproducción de contenidos a tornarse una posibilidad para el desarrollo de habilidades que le sirvan al estudiante, tanto dentro del aula clase, como es su cotidianidad. En dicho sentido

> Se hace necesario pasar de una enseñanza orientada sólo hacia el logro de objetivos específicos relacionados con los contenidos del área y hacia la retención de dichos contenidos, a una enseñanza que se oriente a apoyar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas. (MEN, 2003, p.48)

Lo expuesto hasta ahora muestra la necesidad de relacionar las experiencias y las aplicaciones en las que está presente la matemática, las cuales buscan reconocer en el contexto cotidiano una posibilidad para enseñar y relacionar los usos que tiene los conceptos matemáticos que están presentes tanto dentro el aula de clase como fuera de ella. En este sentido, la literatura ha reportado que en algunas ocasiones las relaciones entre los usos de los objetos matemáticos y el cotidiano se puede limitar a presentar los conceptos matemáticos a partir de representaciones, fórmulas o algoritmos, lo cual puede llevar a generar dificultades, en los usos y la comprensión que los estudiantes tienen sobre los conceptos matemáticos. Al respecto, Chaverra señala que

> El habitual discurso Matemático Escolar, centra su atención en los objetos matemáticos y en la forma como se comparten los conocimientos en las prácticas de aula, sin cuestionarse en el cómo propiciar aprendizajes con base en los usos del objeto de conocimiento matemático, ni atender a direccionar los aprendizajes mediante problemas que ayuden a reflexionar y poner en relieve el conocimiento que tiene el estudiante. (2018, p. 5).

Es así entonces como la literatura reporta que el discurso matemático escolar invisibiliza los usos que tienen los objetos matemáticos y su capacidad para relacionarlos en las diferentes situaciones de la vida cotidiana; de esta manera la problemática observada hasta aquí, muestra como *el estudiante, al no comprender la relación entre los objetos matemáticos y sus aplicaciones en la cotidianidad, termina por no comprender y posteriormente no reflexionar sobre los aprendizajes y conocimientos que se enseñan en la clase de matemáticas*; una posible causa de esto, se da debido a que en ocasiones no se trabajan los objetos matemáticos desde un contexto cercano al estudiante, lo que finalmente puede llevar a que se generen dificultades a la hora de construir los significados que tienen los objetos matemáticos en la cotidianidad.

Teniendo presente lo anterior y mi camino sobre la práctica pedagógica, me han surgido algunas preguntas que van en dirección a comprender la educación matemática; una de estas por ejemplo: ¿cómo se enseña el concepto proporción en las aulas de clase? Se podría decir que esta pregunta fue una de las primeras en movilizar esta investigación, ya que me permitió cuestionarme sobre la forma en cómo se aborda este objeto matemático y las dificultades que se presentan en las aulas de clase, al ser presentado bajo el algoritmo de la regla de tres.

Por tal motivo, esta investigación centrará su atención en el concepto de proporción, que al igual que otros objetos matemáticos, como lo muestran algunas investigaciones, en ocasiones al momento de ser enseñados en la clase de matemáticas, no se tiene en cuenta los diferentes usos que estos conceptos tiene en el cotidiano. Al respecto una de las problemáticas que se han encontrado alrededor de la enseñanza del concepto de proporción se procede debido a que su enseñanza apunta a la resolución de problemas, basados en la aplicación de un método algorítmico o regla de tres, lo que podría generar dificultades en los estudiantes, al momento de identificar y reflexionar sobre un problema o situación del cotidiano.

Por lo tanto, dicha forma de abordar la proporción en ocasiones no permite que el estudiante relacione sus conocimientos con aquello que lo rodea el (contexto). En ese sentido “La idea de proporción en la escuela, se ha presentado tradicionalmente como un modo puramente formal y descontextualizado, enfocado siempre a la justificación de técnicas algorítmicas” (Garín y Oller, 2012, p.258). Esta forma de presentar y representar la proporción en aula de clase, deja de lado algunos aspectos importantes, en el desarrollo de las ideas de razón y proporción.

En ese sentido la problemática expuesta hasta ahora muestra que el estudiante en la clase de matemáticas, no alcanza a entender las relaciones que se dan entre las razones y las proporciones, y por tal motivo utilizar el algoritmo de la regla de tres indiscriminadamente llevándolo a cometer errores, al generalizar la regla de tres.

Si bien el concepto de proporción juega un papel importante dentro y fuera del aula de clase, como ya se ha mencionado arriba, existen dificultades en los estudiantes, que generan confusiones frente a la forma de abordar una situación en la que esté presente dicho concepto. Una posible forma de atender a estas dificultades podría ser la de visibilizar las incidencias y los usos que este concepto ha tenido en la historia de la matemática, que podrían ayudar a comprender otros campos de estudios (como la física, la química, la astronomía, la música, la arquitectura, entre otros) en los cuales está inmerso el concepto de proporción, y que en ocasiones en la clase de matemáticas no se hacen visibles, o no se tienen en cuenta al momento de querer abordar dicho concepto, dejando de lado los posibles contexto en los que se puede desarrollar el concepto de proporción.

Frente a este panorama encuentro desde la práctica y desde la literatura *el uso del arte como una posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción*, de este modo la pregunta que orienta mi investigación es la siguiente *¿Cuáles usos del concepto de proporción en el arte a través de la historia, se constituyen como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas*?

En este sentido, el objetivo que pretendo alcanzar en esta investigación es: *Identificar históricamente los usos del concepto de proporción en el arte, como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas.*

3. Marco teórico y metodológico

Uno de los objetivos de la práctica docente frente a la enseñanza de los conceptos matemáticos se enfoca en que los estudiantes alcancen una serie de competencias y habilidades que sean utilizadas tanto en la aplicación de situaciones problemas como en la solución de situaciones del cotidiano; esta mirada sobre la enseñanza de la matemática apunta hacia la utilidad que tienen los conceptos matemáticos y buscan que el estudiante aporte con sus conocimientos a esa sociedad en la que se moviliza.

En ese sentido, en los diferentes niveles de las matemáticas se enfatiza sobre la importancia que tiene la proporcionalidad, buscando que el estudiante identifique su aplicación en las diferentes situaciones del cotidiano en las que está presente este concepto. Según Mochón este énfasis se da gracias a que:

> La proporcionalidad es una de las principales ideas presente en todos los niveles de las matemáticas escolares y es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias. La mayoría de las actividades matemáticas de nuestra vida cotidiana están basadas en este concepto por ser el más sencillo de utilizar (5 piezas cuestan 5 veces lo que una pieza). (2012, p.134)

A pesar de esto, y de la alta cantidad de trabajos de investigación en torno a problematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de proporción, se siguen presentando dificultades que están asociadas al aprendizaje de este objeto de conocimiento. Al respecto Mochón (2012) señala también que: “las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas por los estudiantes, debido a que es común que en el aula de clase, se enseñe el concepto de proporcionalidad de manera mecánica utilizando la regla de tres.” (p. 134). En ese sentido Arboleda, Obando y Vasco (2014) mencionan que

> Si bien se reconoce la valoración que a nivel curricular tienen los ejes temáticos en torno a la razón, la proporción y la proporcionalidad, éstas continúan siendo un problema complejo en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje. A pesar de los importantes avances logrados en la investigación en didáctica de las matemáticas (caracterizaciones finas de los problemas cognitivos y didácticos) aún no se logran consolidar propuestas que modifiquen la forma como se abordan en los contextos escolares. (p. 61)

Por consiguiente, el estudio de las razones, las proporciones y la proporcionalidad sigue siendo un tema que está presente en la investigación en Educación Matemática, donde los investigadores en este campo han propuestos nuevas alternativas en busca de mejorar la enseñanza y el aprendizaje que tienen los estudiantes en los diferentes niveles de educación. Al respecto Arboleda, Obando y Vasco (2014) también señalan que:

> Las Razones, las proporciones y proporcionalidad, han sido conceptos ampliamente problematizados desde los procesos de aprendizaje y de enseñanza. Desde los años sesenta con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de carácter cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de estos objetos de conocimiento sigue vigente. (p. 60).

Por consiguiente, la idea que se presenta en las aulas de clase frente al concepto de proporción puede ser mal entendida debido a la forma como esta se presenta en la clase de matemáticas, donde el docente a veces direcciona su enseñanza basado en los libros de textos, que inician con una definición de razón no muy clara, para luego abordar el concepto de proporción de una manera rápida, y así poder pasar finalmente a presentar la regla de tres como el algoritmo que facilita resolver estos problemas de proporcionalidad sin tener presente las relaciones que se producen entre las magnitudes.

Esta manera de resaltar el proceso algorítmico en los libros de texto puede conllevar a que el estudiante termine por utilizar la regla de tres de manera indiscriminada, llevándolo a construir posibles generalizaciones erróneas, al momento de querer darles solución a problemas en los que no es correcto aplicar la proporcionalidad directa.

Dicha problemática se puede observar en una de las investigaciones de Obando (2015) quien señala que: "la enseñanza de la proporcionalidad se centra en proceso algorítmico (fundamentalmente la regla de tres) sin que sean explícitas las relaciones y proporciones que se exige en este tipo de situaciones de proporcionalidad directa" (p.28). Lo anterior puede conllevar a que el estudiante intente resolver por medio de la regla de tres cualquier tipo de problema en el que estén involucradas cuatro cantidades, de las cuales se conocen tres de estas y se requiere encontrar una cuarta cantidad. Para atender a esta problemática algunos autores señalan la importancia que tiene el contexto en la interpretación de los problemas:

> Lo más importante es dejar atrás la enseñanza que muestra a la regla de tres como la llave mágica con la que se puede resolver todo problema de cuatro números con uno faltante. Para esto se debe seguir una enseñanza conceptual basada en entendimiento y no perdiendo el contexto del problema que le da sentido al proceso utilizado. (Mochón, 2012, p.156).

Superar estas problemáticas implicaría que en la enseñanza del concepto de proporción se puedan observar otras relaciones e interpretaciones que contribuyen a entender la razón, la proporción y la proporcionalidad más allá del campo de lo aritmético o desde el campo numérico.

Estas nociones sobre la proporción se pueden entender como esa relación o proporción que se dan entre razones, mientras que si ve como la variación de dos cantidades, se entiende como ese cociente de proporción. A propósito, algunos autores señalan que la enseñanza se ha caracterizado por presentar las ideas de razón y de proporción en el campo numérico; al respecto Gairín y Oller señalan que "este tipo de instrucción no favorece la construcción de ideas por parte del alumno puesto que no tiene un modelo físico desde el que pueda alcanzar una buena comprensión de los conceptos puestos en juego". (2012, p.259)

De esta manera se hace necesario entender los conceptos de razón a partir de otros campos, como el geométrico, el artístico y el arquitectónico, que se pueden tornar como una posibilidad para ayudar comprender la utilidad de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, al ser presentados como un contexto que le da sentido a los procesos y a los objetos matemáticos. En esta dirección el MEN, en los Estándares Básicos de Competencias menciona la importancia que tiene las situaciones de aprendizaje al señalar que: "es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular el razonamiento proporcional apoyado en el uso grafico" (2003, p. 54)

Por otro lado, Vergnaud (citado por Cortes y Cruz) señala además que: "los conceptos se construyen a partir de otros conceptos, es decir que ningún concepto se construye en solitario y que estos están ligados a una red de conceptos que le aportan sentido al mismo" (p. 14).

En relación a esto, la presente investigación busca identificar las relaciones que se han tejido alrededor de arte y la matemática a través de la historia, en especial la idea de la posible conexión entre el concepto de proporción y el arte, teniendo presente tres de las disciplinas del arte: la música, la pintura y la arquitectura. Finalmente, esta investigación es oportuna, en la medida en que las matemáticas se pueden integrar, enriquecer y complementar con otras disciplinas, como es el caso del arte y en especial en la música, la pintura y la arquitectura; además, esta investigación pretende servir de insumo a profesores en ejercicio y estudiantes en formación en la que puedan hacerse a una herramienta conceptual, que ofrezca una mirada diferente de las matemáticas a través del arte.

3.1 Teoría de las razones y las proporciones:

La Teoría de las razones y las proporciones jugó un papel importante en la tradición matemática pitagórica, además de que esta teoría se tornó como uno de los elementos claves para entender la relación entre el arte y las matemáticas. Los pitagóricos consideraban al número como la esencia de todas las cosas, en el que el número es el encargado de regir el universo al otorgarle orden y belleza. Ese misticismo atribuido a los números (naturales o números de contar), se ve claramente reflejado en la frase más célebre de la escuela pitagórica "todo es número". Esta mirada, en la que los números se consideran como el principio de las cosas, se puede ver en lo que menciona Bonell (citado en Martínez, 2004) como "todos los cuerpos consisten en puntos o unidades en el espacio que cuando se toman juntos constituye en un número" (p. 60).

En ese sentido, para los pitagóricos la teoría de las medidas se basaba en la creencia de que las magnitudes se podían medir a través de razones o números, en la que los números (naturales) eran los únicos que podían medir magnitudes, de manera que siempre se podría encontrar un segmento que pudiera medir dos magnitudes cualesquiera; es decir, siempre era posible encontrar un segmento unidad, que pueda estar contenido exactamente en otras dos magnitudes cualesquiera (esto es conocido como las magnitudes conmensurables).

Esto se puede entender como la capacidad de medir a partir de dos magnitudes A y B, en las que dadas estas magnitudes se podrían encontrar dos magnitudes n y m tales que $nA=mB$, es decir que *"n* veces *A"* es igual a *"m* veces *B";* en otras palabras, esto significa que es posible encontrar una medida en común o un segmento en común para las magnitudes A y B. Esta idea de la conmensurabilidad se puede entender en la siguiente construcción.

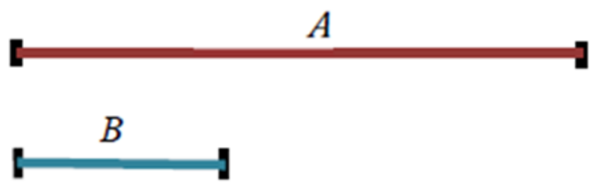

Figura 1 Conmensurabilidad de dos segmentos de medidas A y B.

Fuente: Elaboración propia.

Dadas dos magnitudes *A* y *B* cualesquiera, se puede determinar si existe una medida en común que pueda medir a ambos segmentos

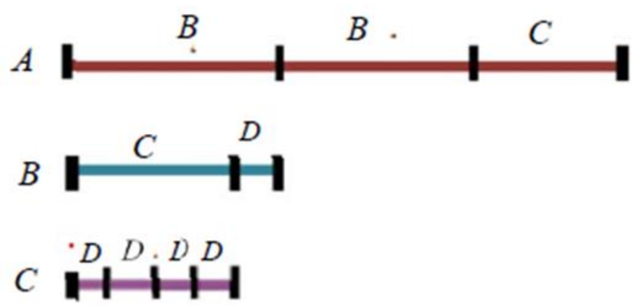

Figura 2 Construcción de la conmensurabilidad de los segmentos de medias A, B, C y D

Fuente: elaboración propia

El primer paso es determinar cuál de los dos segmentos es de menor tamaño, como podemos observar el segmento *B* es de menor tamaño que el segmento *A* (ver figura 2), el segmento B se debe incluir en el segmento A el número de veces que sea posible, como lo muestra la figura 2; para este caso en particular, el segmento B cabe solo dos veces en el segmento A. Cómo podemos observar en la figura 2, al incluir el segmento B en A queda por fuera un segmento C, el cual es de menor tamaño que el segmento B. De esta manera podemos incluir el segmento C en el segmento B cuantas veces sea posible, para este caso en particular el segmento C solo puede ser incluido una vez en el segmento B, generando un nuevo segmento D, el cual es menor que el segmento C como lo muestra la figura 2, este procedimiento se repite introduciendo el segmento D en C cuantas veces sea posible, (para este caso 4 veces) como podemos observar en la figura 2.

Vemos entonces que ya no queda ningún segmento restante, lo que permite establecer que el segmento D es el segmento unidad de los segmentos A y B ya que el segmento D se encuentra contenido un número de veces en cada uno de los dos segmentos A y B, (en otras palabras el segmento D puede entenderse como un común divisor de ambos segmentos), de esta manera se puede determinar que el segmento D queda contenido 5 veces en el segmento B, mientras que el segmento D queda contenido en segmento A 14 veces.

Este intento de los pitagóricos de reducir todo al número, no es llevado solo a las magnitudes, pues para ellos lo bello también es el reflejo de los números, los cuales permiten cuantificar la belleza; así, los números surgen de la concepción de armonía de las proporciones, las cuales consideraban que un objeto es bello en la medida en que se reflejaba su armonía y proporción. Dicha idea se fundamentaría en la música y su teoría de vibración de cuerdas, aspectos que se profundizaran más adelante en las categorías de análisis.

3.1.1 Magnitudes

Grattan-Guinness (1996), señala que en el libro de los *Elementos de Euclides*: "Las magnitudes varían considerablemente en carácter (de una línea a un sólido) no siempre usa la misma palabra para el mismo tipo de combinación y, en algunos casos, ninguna palabra en absoluto" (p.364). algunos autores como Guacaneme (2010) y Cortez y Cruz (2018) señalan que el libro V de los *Elementos* centra su interés en las magnitudes que, aunque no sean iguales mantienen una relación; dicha relación no se aclara en ningún apartado de dicho libro. Al respecto Corry (1994) señala que:

> En los *Elementos de Euclides*, no obstante, no encontramos las definiciones mismas de magnitud o de razón excepto por la frase vaga: "una razón es una especie de relación entre los tamaños de dos magnitudes del mismo tipo" (V. Def. 3) o como también se les ha llamado posteriormente "magnitudes homogéneas" son magnitudes capaces de entrar en razón la una con la otra. Como se establece en la definición 4, esto sucede cuando cierto múltiplo de una de ellas puede sobrepasar a la otra. Esta propiedad es fundamental importancia para entender el concepto de Eudoxo. (p.3)

A continuación presento las primeras cinco definiciones del libro V de los elementos para ejemplificar el manejo que le daban los griegos a las magnitudes. Cortez y Cruz (2018)

> Definición 1: Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor cuando mide a la mayor. Definición 2: la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor. Definición 3: una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. Definición 4: se dice que las magnitudes guardan razón entre sí, cuando, al multiplicarse, pueden exceder la una a la otra. Definición 5: se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimultiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimultiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (p.13)

El tratamiento que le daba Euclides a las magnitudes en su libro, en el que se muestra que predominaba el uso y la comparación entre magnitudes de la misma naturaleza, solo se comparan áreas con áreas, lados con lados y volúmenes con volúmenes.

Al respecto Corry (1994), señala que en los *Elementos de Euclides* y en la matemática griega "no encontramos producto de dos cantidades (homogéneas o no) cuyos resultados son magnitudes de tipo diferente a los factores dados. Toda comparación o toda operación con magnitudes homogéneas en los elementos se efectúa únicamente entre magnitudes homogéneas" (p.4). Aunque en el libro 10 de los Elementos aparecen líneas y regiones de líneas, se podría decir que no ocurre una combinación o comparación entre estas.

Siguiendo con esta idea, Guacaneme (2008), señala que: "la idea griega reconoce los números y las magnitudes como cantidades no abstractas asociadas respectivamente al contar y medir, en tanto que la idea moderna se refiere a la cantidad como abstracta y general". (p. 6).

3.1.2 La razón:

Frente a la definición que se le atribuye al concepto de razón, han sido varios los historiadores que han tratado de establecer una noción definitiva de lo que se entiende por esta. Algunos de estos autores parten de la definición 3 que se presenta en el libro V de los Elementos de Euclides (Puertas, 1994, p. 9- 10) donde se define la razón como: *"una determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas"* (V, Def. 3) y de la definición 4 del mismo libro que "guardan razón entre si las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra" (V, Def. 3).

Aunque autores como Gratan-Guinness (1996), señalan que: "En la obra euclidiana existen tres tipos de cantidades, a saber: los números, las magnitudes y las razones para comparar" (p.361). Corry (1994) señala que la idea de razón griega no puede concebirse como una cantidad, ya que la idea griega de cantidad no la admite, de hecho señala que "la razón, a diferencia del número y de la magnitud no mide nada ni es cantidad" (p.10). Así, estas dos definiciones 3 y 4 del libro V de los *Elementos* dejan claro que la razón no es por lo menos un número; en ese sentido, para ejemplificar la mirada y el manejo que les daban los griegos a las razones, mostraré un ejemplo de un fragmento de texto extraído de la física de Aristóteles el cual es citado por Oller y Garín (2013):

> Supongamos que A es el moviente, B la cosa movida, C la distancia según la cual es movida y T el tiempo en el cual es movida. Entonces, en el tiempo T una fuerza igual a A hará que algo que es la mitad de B se mueva sobre el doble de la distancia C, y lo hará mover sobre la distancia C en la mitad del tiempo T, pues de esta manera se mantendrá la proporción. Y si la fuerza de A hace mover a B sobre la distancia C en el tiempo T, también hará mover a B sobre la mitad de C en la mitad del tiempo T, y una fuerza igual a la mitad de A moverá a la mitad de B sobre la distancia C en el tiempo T. (p. 326)

Este fragmento muestra el tratamiento que le daban los griegos a la razón, donde las relaciones de proporción entre dos magnitudes sólo tienen sentido si estas dos son de la misma naturaleza, es decir, consideran las razones internas y no las externas, debido a que para los griegos no es lógico manipular dos magnitudes con naturalezas diferentes. En este ejemplo se muestra claramente cómo las razones están dadas en sí, entre tiempos con tiempos y entre distancias y distancias, pero no entre ambas a la vez como lo hacemos en la cotidianidad.

Lo anteriormente señalado muestra cómo los griegos estudiaban las relaciones entre magnitudes por separado, primero entre magnitudes homogéneas (de la misma naturaleza) y luego se comparaban dichas relaciones entre magnitudes heterogéneas (diferente naturaleza). Ese carácter no numérico del manejo que se le atribuye a las razones en el libro de los *Elementos* está reforzado en el hecho de que en dicho libro no hay ningún intento por definir sistemáticamente las operaciones entre razones; además, en este libro, nunca se habla de igualdad de razones, si no que se habla de *"guardar la misma razón"* (V, Def. 5) o de "*guardar una razón mayor"* (V, Def.7) (Oller y Gairín, 2013, p. 322).

Esta idea griega del manejo de las razones, basada en las relaciones entre magnitudes de la misma naturales, va en relación con lo que mencionan Mansilla y Bujanda (citado en Oller y Gairín

2013) quienes definen la razón así: “si *a* y *b* son cantidades de una misma magnitud, la medida de *a* cuando se toma por unidad a *b*, se llama razón entre *a* y *b*” (p. 334); así mismo, en la mirada de Baratech (citado en Oller y Gairín 2013) “se denomina razón entre dos números al cociente exacto de dichos números” (p.334). Esta idea sobre el concepto de razón es apoyada por otros autores como Oller y Gairín (2013), quienes señalan que: “los dos posibles caminos que conducen a una aritmetización del concepto Euclídeo de razón se presentan en el sentido que tiene definir la razón entre dos cantidades de una misma magnitud y entre dos números”. (p. 333)

En ese intento por acercarse al concepto griego de razón algunos autores como Guacaneme (2008) señala que la idea de razón está ligada a la división y en algunos casos está ligada a su resultado o cociente indicado; también señala el autor que estas dos miradas sobre la idea de razón son ligeramente diferentes. Por un lado, entender la razón como el cociente exacto entre dos números o como el cociente de la división, es decir como resultado de la división, implicaría que la razón es un número y por ende pertenece a un conjunto numérico. Por otro lado, el mismo autor señala que “entender la razón como la división indicada es decir como la división sin realizar, se puede considerar como un elemento de un producto cartesiano de los conjuntos donde dividendo y divisor tomen respectivamente valores” (p. 8).

Para ejemplificar estas dos miradas presento los siguientes dos casos:

Tabla 4 La razón como cociente exacto

La razón como cociente exacto: Se puede observar en la relación que hay entre la cantidad de hombres que hay en un salón con respecto a la cantidad de mujeres. Por ejemplo, si en un salón hay 24 mujeres y 18 hombres se puede representar como 24/18, 24:18 y se lee “24 es a 18”.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5 La razón como cociente indicado

La razón como cociente indicado: El rendimiento de un auto ejemplifica la razón como cociente indicado debido a que la razón se presenta en este como la relación que hay entre la distancia que un auto puede recorrer y la cantidad de galones que consume al recorrer una distancia; esta relación se expresa como kilómetros por galón; por ejemplo un automóvil que recorre 45 kilómetros por galón.

Fuente: Elaboración Propia.

Es importante observar que, en la mayoría de los casos en la actualidad, el sentido que se le atribuye el concepto de razón es el de la división o cociente exacto, aunque algunos autores la definen bajo la relación entre dos números. Es de aclarar que desde este sentido se deja de lado la relación que se da entre dos magnitudes, lo que lleva a que no se comprendan los procesos que se pueden dan entre la comparación de dos magnitudes de igual o diferente naturaleza, debido a que en algunos caso no se asocian los procesos en la enseñanza de la razón, privilegiando la identificación de una razón como número racional lo que finalmente puede dificultar la interpretación del concepto de razón; así, el concepto de razón es llevado al aula, en algunos casos como un proceso aritmético o algorítmico (por ejemplo, la regla de tres).

Así, estas dos miradas muestran lo complejo del concepto de razón y las diferentes formas de interpretarlo en un texto como es el de *Los Elementos de Euclides*, y mucho más, entender la forma en cómo los griegos concebían el concepto de razón. Por tal motivo es mi interés reconocer en mi investigación la idea de razón entre cantidades de diferentes magnitudes, que se tornan importantes para comprender otras miradas sobre el concepto de proporción. Al respecto Oller y Gairín (2013) señalan que:

> Esta idea de razón entre cantidades de diferentes magnitudes puede proporcionar una visión más clara de las situaciones puesto que posee un importante significado “tanto por tanto”,

es decir, la cantidad de una magnitud que se corresponde con una unidad de la otra bajo la relación que las liga. (334)

Finalmente, pensando en lo anterior, la definición que mejor se acopla a mi investigación es la de Chaverra (2018) quien define la razón como: "una expresión numérica de comparación entre las medidas de dos magnitudes. La razón entre a y b se escribe a/b o *a:b*, y se lee "*a* es *b*" (p 99).

3.1.3 Proporción

Guacaneme (2008) menciona que en el libro V de Los Elementos de Euclides en su definición 5, se establece las condiciones necesarias que se deben considerar para que dos magnitudes estén en la misma razón. A continuación presento la definición 5, que fue escrita tal cual está en el libro de los *Elementos* de la versión de Puertas (1994) citada en Guacaneme (2008)

Tabla 6 Definición 5 de libro V, de los Elementos de Euclides

Definición V.5: Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente. (p.2).

Fuente: Puertas (1994)

Frente a esta definición algunos autores como Guacaneme (2008) y Puertas (1994) señalan que las condiciones que se deben cumplir para que magnitudes estén en la misma razón es demasiado general, de ahí que surjan una serie de interpretaciones alrededor del concepto de proporción; en primer lugar, porque el término "proporción" se introduce por primera vez en la definición 6 del mismo libro. Para ilustrar un poco más esta postura presento a continuación dicha definición, la cual hace referencia a aquellas magnitudes que se pueden comparar entre ellas y que están en la misma razón.

Tabla 7 Definición 5, Libro V de los Elementos

Llámese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.

Fuente: (Guacaneme, 2008, p.2) y (Puertas, 1994, p.12)

Al respecto Knorr citado por Guacaneme 2008) establece que:

> Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que “no tener la misma razón” sea equivalente a “tener una razón mayor o menor razón”. Pero, de hecho, algunas veces supone esta afirmación (por ejemplo en el libro V, proposiciones 9 y 10), por lo cual es preciso pensar que lo entendían tanto él como lo geómetras que lo precedieron. (p. 7)

Por tal motivo a continuación presentaré algunas interpretaciones que han surgido alrededor de la definición 5 del libro V de *los Elementos de Euclides,* dada la forma tan general como es presentada en dicho libro. Un ejemplo de esto se presenta en la siguiente interpretación:

> Ya que según la definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: si los múltiplos de A, 2A, 3A, … y B, 2B, 3B, … son dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X, … y Y, 2Y, 3Y, …, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de múltiplos X entre aquellos de Y. De ahí que “la identidad” de las razones A:B y X:Y significa que la identidad de las dos leyes de distribución, y la razón A:B en si misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B. (Fine, citado en Guacaneme, 2008, p. 5)

Al respecto Guacaneme (2008), señala que: "esta interpretación se puede resumir en una correspondencia entre dos sucesiones ordenadas de múltiplos, cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de la razón" (p.5). Además Guacaneme (2008) apoyado en Fine (1917) Argumenta a favor de esta interpretación al advertir como esta se pone en juego en varios de los teoremas (proposiciones 7 a 10, 11, 13, 16, 18, 22, 24), además también argumenta que esta idea Fine (1917) no impide que las magnitudes de las dos razones tengan que ser todas de la misma naturaleza.

Otra de las interpretaciones es la de Corry (1994) quien señala que "si la razón entre *a* y *b* es la misma que la razón entre *c* y *d* (en el sentido de Eudoxo), no se sigue aquí directamente que el producto *ad* sea igual al producto *bc* ni que la razón entre *a* y *c* sea la misma que la razón entre *b* y *d"* (p.4).

Corry (1994) también señala que en el caso general, estas razones no estarían definidas, debido a que si el par de magnitudes *a, b* son por ejemplo rectas y el par de magnitudes *c, d* son por ejemplo un par de áreas, no es posible que se forme la razón *a c* al no ser estas magnitudes homogéneas, luego en la (p. 10) señala que "la razón entre dos cantidades del mismo tipo (bien sean dos número o dos magnitudes homogéneas), permite compararlas aun siendo desiguales". Esto se produce al parecer porque algunas de las definiciones de Eudoxo no consideran la proporción como una igual de fracciones. Finalmente, Corry (1994) señala que "la proporción es, por lo tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades" (p.5).

A continuación, presento tres interpretaciones simbólicas equivalentes a la definición V del libro de los *Elementos de Euclides* con el fin de esclarecer un poco más dichas interpretaciones "sí a, b, c, d son magnitudes (de la misma clase), entonces $a{:}b = c{:}d$ si y solo si para cualesquiera enteros positivos ("números" en el uso griego) n, m, $ma \leq nb \Rightarrow mc \leq nd$." Filep (citado por Guacaneme, 2008, p. 7)

"$a{:}b = c{:}d$, si para todo par de enteros m, n, se tiene *ma>nc (o ma<nc, o ma=nc)* si y solo si *mb>nd (o mb<nd, o mb=nd)*, respectivamente)". (Corry, 1994, p.3).

"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, e da una proporción $a{:}b :: c{:}d$ si y solo si: *((ma>nb) y (mc>nd)) o ((ma=nb) y (mc=nd)) o ((ma<nb) y (mc<nd).*" Puertas (1994) (citado por Guacaneme, 2008, p. 7)

Finalmente, de las anteriores interpretaciones de la definición V del libro de los *Elementos de Euclides* se puede rescatar el interés que sigue presente y que se muestra en los resultados de las investigaciones realizadas por Corry, Filep y Puertas con el fin de fundamentar una dimensión matemática sobre los conocimientos de razón y proporción.

Con relación a mi investigación entenderé el concepto de proporción bajo la mirada de Hemmenway (2008), ya que se esta se acopla a la intencionalidad de mi propuesta de investigación, para ejemplificar dicha mirada me remonto Vitruvio (citado por Hemmenway, 2008) quien señala que: "La proporción es la correspondencia existente entre las dimensiones de los componentes de un conjunto o de este conjunto con una determinada parte seleccionada que hará que sirve de pauta." (p.94). Es decir la proporción para este trabajo es entendida como esa correspondencia existente entre las partes de un todo y entre el todo y las partes.

3.2 Metodología cualitativa:

Para responder a la pregunta orientadora: ¿Cuáles usos del concepto de proporción en el arte a través de la historia, se constituyen como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas? la metodología de investigación que usé como eje central fue de tipo cualitativo, con un enfoque hermenéutico-interpretativo utilizando como método el estudio historiográfico. El método historiográfico permitió que se diera un acercamiento a lo planteado en el objetivo: *identificar históricamente los usos del concepto de proporción en el arte, como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas*. Para realizar esta investigación usé como herramienta el archivo, el cual construyó con el fin de que sirviera como base para contar una historia de la historia y así poder darle sentido a los registros encontrados y a los datos construidos.

Según Vanegas (2010), la investigación cualitativa “permite reconocer la existencia de múltiples realidades y no una realidad única y objetiva, sino una construcción o un constructo de las mentes humanas; y, por tanto, la “verdad” está compuesta por múltiples constructos de la realidad” (p. 130). Así la investigación cualitativa permite entender las diferentes miradas sobre los fenómenos que pueden ocurrir en el mundo, además de que al ser un enfoque interpretativo permite comprender que no hay una única forma de ver y entender el mundo.

Así mismo, Denzin y Lincoln (p. 48) (como se citó en Quiroz 2018) mencionan que

> La investigación cualitativa implica un enfoque interpretativo y naturalista del mundo, lo cual significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en sus escenarios naturales, tratando de entender o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas les dan.

La investigación cualitativa en este trabajo permitió estudiar y entender algunos fenómenos que se presentaron en tres momento históricos particulares: el antiguo Egipto, el medioevo y el renacimiento y su relación con el arte, en especial, el tratamiento que le daban en estos lugares y momentos históricos al concepto de proporción, particularmente su aplicación en la música, la arquitectura y la pintura; además la investigación cualitativa permitió interpretar algunos significados a partir de lo presentado por algunos investigadores como Guacaneme (2010), Corry (1996), Oller y Gairín (2013), sobre el concepto de proporción.

Los hechos, conceptos y categorías de análisis que se encontraron en mi investigación surgieron gracias a las fuentes documentales. Dichas fuentes fueron abordadas bajo una metodología de investigación cualitativa, la cual permitió profundizar en el estudio del concepto de proporción, al constituirse en los registros que fueron analizados bajo la mirada de uno de los enfoques de la investigación cualitativa: el hermenéutico interpretativo.

La hermenéutica permite analizar, observar e interpretar a partir de la lectura de los escritos históricos el sentido o significado de la realidad en que la está inmerso el ser humano, así

> La hermenéutica permite plantear la interpretación de los motivos de las expresiones humanas no solo a nivel individual si no también en colectivo, considerando la historicidad como la posibilidad de comprender las manifestaciones humanas de tiempos pasados teniendo como base el presente. (Ruedas, Ríos, y Nieves, 2009, p. 186)

Es decir, "la hermenéutica no es solamente la interpretación por la interpretación, sino la experiencia de lo ajeno, de lo distinto y la posibilidad del diálogo" (Ruedas, Ríos, y Nieves, 2009, p. 185). De esta manera este enfoque hermenéutico interpretativo me permitió analizar, comprender y reconocer los discursos que giran alrededor del concepto de proporción en tres momentos históricos: el egipcio, el medioevo y el renacimiento.

3.3 El archivo

Para desarrollar esta investigación construí un archivo, el cual consta de todos los documentos consultados que durante la lectura se tornaron una herramienta que me ayudó a reconstruir e interpretar los discursos que han sido elaborados alrededor de los dos ejes que rigen esta investigación: la proporción y el arte. Así, para este trabajo entenderé el archivo bajo la mirada de Rodríguez (2011) quien lo define como: “el conjunto de documentos que se transforman en el material de trabajo para la investigación histórica” (p.25).

En cada una de estas fuentes se encontraron documentos de diversa naturaleza tales como: artículos de revista sobre investigación en educación matemática, libros sobre historia de la matemática, trabajos de grado de maestrías y doctorado sobre el concepto de proporción, ponencias y presentaciones de congresos en matemática, entre otros. Cada uno de estos registros se tornaron como la fuente documental de esta investigación.

Así mismo, para esta investigación entiendo los documentos bajo la mirada Zuluaga (como se citó en Rodríguez, 2011) quien señala que

> Los documentos no son solo fuentes, si no que se constituyen como los registros de las practicas, son una fuente que permite ser hablada desde otra discursividad, en la que ya se ha hablado desde un ejercicio de saber, de discursos, sujetos y practicas diferentes. (p.25)

De esta manera el documento como instrumento permite conocer otros discursos, otras prácticas y otras miradas sobre el objeto de la investigación, que sirven como apoyo para que el investigador pueda comprender e interpretar eso que se está investigando; finalmente el documento permite tejer una historia propia de eso que se investiga, en la que el investigador aporta su propia mirada, su propia discursividad, apoyado de esas experiencia y discursos ajenos.

Por otro lado, el archivo se clasificó en dos categorías: fuentes primarias y fuentes secundarias. Estas fuentes consultadas tenían como temática central el arte y la proporción. De acuerdo con Sampieri, et al citado en Quiroz (2018)

> Las fuentes primarias fueron aquellas que poseían información original y que fueron el resultado de un trabajo intelectual de primera mano; mientras que las fuentes secundarias fueron aquellas que poseían información que fue analizada y procesada de una fuente

primaria, es decir, son las interpretaciones y extracciones que se realizan a una fuente principal. (p.24)

En esta investigación los datos surgieron de las fuentes primarias y secundarias. Los datos se entenderán aquí bajo la mirada de Quiroz (2018) quien señala que estos son aquellos que hablan particularmente del objeto de investigación y se destacan por ser el resultado de la interpretación que el investigador le da a esa realidad o a eso que lee de las fuentes primarias y secundarias. De esta manera, los datos que se encontraron surgieron en tres contextos históricos: el egipcio, el griego y el renacimiento; así, los datos se encontraron gracias a los libros de historia de la matemática, artículos y tesis sobre el concepto de proporción. Para esto tuve presente el uso que tenían estos tres contextos históricos sobre el concepto de proporción y sus posibles relaciones con el arte en especial con tres ramas del arte: la música, la pintura y la arquitectura.

A continuación, presento las fuentes consultadas que se sirvieron para analizar el archivo de mi investigación.

Tabla 8 .Fuentes consultadas para elaborar el archivo

Título de fuente	**Autor**	**Tipo de fuente**	**Primaria/ secundaria**
La proporción arte y matemáticas: Semejanza Belleza y educación matemática	Joaquín Giménez	Libro	Primaria
Historia de la matemática.	Carl B. Boyer – Versión española de Mariano Martínez Pérez.	Libro	Primaria
Euclides Elementos. Libro V-IX	María Luisa Puertas Castaño	Libro	Primaria
La sección aurea en el arte, la música y la arquitectura	Yolanda Toledo Agüero	Libro	Primaria
Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.	Matilda c. Ghyka	Libro	Secundaria

La proporción Aurea en la arquitectura y la música.	Priya Hemmenway	Capitulo de libro	Secundaria
la relación "arte-matemáticas" como contexto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: estudio del trabajo de la artista Cornelia Vargas Koch	Fabian Hernando Quintana	Tesis de pregrado	Secundaria
Interpretaciones de las definiciones de razón y proporción	Edgar Alberto Guacaneme Suárez	Artículo de Revista	Secundaria
Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción	José María Gairín Sallan, Antonio M. Oller Marcen	Articulo	Secundaria
Número, magnitud, razón y proporción en los elementos de Euclides ¿Cómo era su manejo?	Grattan Guinnes	Articulo	Secundaria
Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte.	Irene Ferrando y Carlos Segura	Articulo	Secundaria
La Genesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización	Antonio M. Oller Marcen, José María Gairín Sallan.	Articulo de Revista	Secundaria
Enseñanza **y** aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte.	Obando G, Vasco C. E, y Arboleda L. C	Articulo	Secundaria
Algunas anotaciones históricas sobre arte y matemáticas: una herramienta didáctica en perspectiva.	Vivian Lizbeth Martínez Rondón	Tesis de pregrado	Secundaria
La matemática en la música	Emilio Luis Puebla	Conferencia	Secundaria

Fuente: Elaboración propia

Esta investigación se realizó también con base en la consulta de varios documentos los cuales fueron consultados en varias fuentes documentales. Entre estas fuentes destaco: Biblioteca digital Colombia aprende, Dialnet, Scielo, Redalyc, Academia, Google académico, Repositorio digital de documentos en educación matemática, Biblioteca digital Universidad del Valle, Repositorio institucional UPN, Repositorio institucional universidad de Medellín, Repositorio Institucional Universidad de Antioquia, y buscadores como Google Académico.

Cada una de las fuentes aportó en la construcción de esta investigación y fueron seleccionados bajo el criterio de que fuese un libro de texto sobre la historia del arte y la matemática o que fuese un texto de investigación sobre el concepto de proporción. Cada uno de estos textos fue revisado, tratando de encontrar algunas posibles relaciones entre el concepto de proporción y el arte, y en especial tratando de hallar algunos posibles significados y los posibles usos que podría tener el concepto de proporción con el arte. Las fuentes fueron clasificadas según su importancia y sus aportes a la investigación, para esto se tomó como base tres categorías, historia, arte y proporción, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 9 Codificación de los aportes para la investigación

Importancia del documento para la investigación	**Color**
Aporta a Relacionar el arte y la historia del concepto de proporción	Color Verde
Apuntan a entender el concepto de proporción y el concepto del arte	Color Amarillo
Aportan a la investigación pero no tienen relación con el arte y la proporción	Color Naranja
No aporta a esta investigación	Color Rojo

Fuente Elaboración propia

A continuación presento un fragmento de la "sábana de investigación", la cual permitió sistematizar la información de cada uno de los documentos consultados para esta investigación. En esta podemos encontrar: fecha de elaboración, el título y subtitulo, el autor y año, el tipo de fuentes (libro, articulo, tesis entre otros), registro (primaria o secundaria), base de datos utilizado, resumen, conceptos o palabras claves, evento o acontecimientos claves para la investigación, observaciones (sobre los acontecimientos), ¿Qué me deja la lectura para mi investigación? (respuestas, preguntas o aporte), referencias bibliográficas.

Tabla 10 Fragmento de la sábana de sistematización

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA **Facultad de educación** **Seminario de práctica III**				
Estudiante: David Hernando Jaramillo Fernández **Asesores de practica:** Diego Alejandro Pérez Galeano y Diana Victoria Jaramillo Quiceno **Objeto matemático**: Razón y Proporción	***Preguntas orientadoras:*** • *¿Las prácticas y usos que a través de la historia han tenido los conceptos de proporción, todavía retribuyen a la enseñanza en la escuela?* • *¿Qué quiero yo que surja de esa historia del arte?* • *¿Cuál es el papel juega en la historia de las matemáticas los conceptos de proporción?* • *¿las prácticas y usos de la proporción son suficientemente conocidas y aplicadas en la enseñanza en la escuela, un ejemplo en arte?* • *¿Qué valor puede tener para la escuela conocer esas prácticas y usos del arte antiguo en el conceptos de proporción?*			
Titulo y Subtitulo	***Autor (año)***	***Tipo de fuente***	***Primaria/Secundaria***	***Base de datos utilizado***
USOS Y RESIGNIFICADOS DE LA PROPORCIONALIDAD	Paola Alejandra Balda Álvarez	Revista de Investigación e Innovacion en Matemática Educativa	Primaria	Repositorio Digital de documentos en eduacaion matemática
UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD DESDE LA PERSPECTIVA DE LA GEOMETRÍA Y EL ARTE PICTÓRICO, PARA FOMENTAR EL APRENDIZAJE EN EL GRADO QUINTO DE EDUCACIÓN BÁSICA	Lina Paola Sarria Sánchez1 , Adriana García Moreno2	Tesis pregrado	secundaria	bibliotecadigital.univalle.edu.co
Algunas anotaciones historicas sobre arte y matematicas: una herramienta didactica en perspectiva	Vivian Lizbeth Martinez Rondon (2014)	Trabajo de grado	Secundaria	bibliotecadigital.univalle.edu.co
La proporcion arte y matematicas: Semejanza, belleza y educación matemática	Joaquin Giménez (2010)	Libro	Primaria	https://www.academia.edu/190053/SEmejanza_belleza_y_educaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

Fuente: Elaboración propia

3.4 Historiografía como método

Durante el proceso de mi investigación, fue necesario pensar en una metodología que se adaptara a las realidades en las que se ha desarrollado esta investigación; en este sentido, se hizo necesario pensar en una metodología que me permitiera estar involucrado con el objeto matemático a investigar, una metodología que me permitiera encontrar ese objeto matemático en el cotidiano, además de que permitiera entender sus usos y los sus significados en la cultura. Por tal motivo me parece necesario aclarar un concepto, que desde mi parecer fue clave para realizar esta investigación; dicho concepto es “la historiografía”.

La historiografía como metodología de investigación busca entender el presente a través del estudio de la historia; esta metodología tiene en cuenta aspectos culturales, políticos y sociales, por lo que Quiroz (2018) menciona que esta metodología “crea la posibilidad de analizar críticamente los discursos del pensamiento histórico que se han expuesto a partir de fuentes, manifestaciones y representaciones” (p. 28). Es decir, la historiografía permite entender y comprender el pensamiento que se tenía en un determinado tiempo histórico, esto se da a través del análisis de los discursos que se exponen en las fuentes documentales o en las diferentes representaciones históricas que una cultura o sujeto haya dejado; en palabras de Héller esos rastros y sucesos que se presentan en la historia y que rodean al objeto investigado.

Para ilustrar un poco de que se trata la metodología historiográfica o historiografía presento a continuación tres posturas sobre dicha metodología Rama (1996), Quiroz (2018) y Foulke (2009)

Rama (1996) citado por Quiroz (2018) señala que:

> La historia de la historia tiene en cuenta el desarrollo del pasado cultural, su inclusión en el mundo político-social y al mismo tiempo tiene en cuenta las circunstancias concretas y eventuales de todos y cada uno de los creadores individuales de ese pasad. (p. 28)

Por su parte Quiroz (2018) entienden la historiografía como:

> Aquella dialéctica que se traza entre el pasado y el presente, entre la historia de las historias, particularmente en las condiciones de posibilidad, para conocer aspectos sociales, culturales, políticos e incluso religiosos que influyeron en un periodo determinado para crear la historia que puede ser narrada y vivenciada desde el presente (p. 30).

Al respecto Foulke (2009) describe la historiografía de dos maneras

> “Historiografía subjetivante” que reabre un lugar para el sujeto al horadar los imaginarios de cierta historia y una “Historiografía reconfigurante” capaz de producir nuevas

perspectivas y relatos en el momento mismo en que hace caer el gran relato de la historia. (p.48)

Para ejemplificar un poco sobre la historiografía como método de investigación presento los pasos que debe seguir un historiógrafo al momento de querer indagar en la historia. Heller (como se citó en Ruiz 1993) menciona que, el primer paso para indagar sobre la historia de la historia, es que los sujetos involucrados se tornen como investigadores y que su vez, sean movilizados en un primer momento por una curiosidad hacia ese objeto a investigar; en otras palabras, que sea de su interés indagar en la historia sobre ese objeto que moviliza al investigador. El segundo paso que propone Heller es que el investigador establezca un método que le permita descifrar esos rastros y sucesos que se presentan en la historia y que rodean al objeto investigado.

Luego de los dos pasos anteriores, en el tercer paso se le atribuyen los rastros y los sucesos, que son los que le permiten al investigador descifrar y entender los mensajes que dicho objeto ha dejado durante el transcurso de la historia o de la historia del mismo objeto, y de esta manera le permiten al investigar llenar algunas lagunas que algunos mensajes han dejado o que algunos individuos han dejado sobre ese objeto investigado. De esta manera el investigador con esos rastros y sucesos puede llegar crear conclusiones e hipótesis frente a eso que se está investigado. El cuarto momento que establece Heller es que se debe observar y analizar lo identificado de tal manera que se pueda realizar una reconstrucción de los hechos a partir de una lectura crítica sobre los documentos encontrados.

La historiografía como método de investigación posee algunas corrientes que se centran en el estudio de la historia entre estas podemos encontrar: el materialismo histórico, la escuela de los anales, historicismo y el positivismo (Quiroz, 2018). Para efectos de este trabajo recurro al materialismo histórico, el cual, de acuerdo con Hernecker, (1976 citado por Quiroz, 2018) tiene por objetivo el estudio de los diferentes modos de producción y la producción de conocimiento históricos necesarios para las formaciones sociales y políticas.

Por lo anterior, puedo decir que entenderé la historiografía como un método de investigación que busca analizar sucesos históricos a partir de los discursos que otros han realizado, representado y manifestado, como una metodología de investigación que permite narrar una historia, en la que se pueda vivenciar en el presente el objeto que se investiga. En esta perspectiva el sujeto (historiador o historiógrafo) puede tomar una postura crítica frente al objeto investigado, frente a los datos o rastros encontrados y en la que se debe tener en cuenta que dichos aspectos a identificar pueden ser culturales, políticos y sociales.

4. Análisis

4.1 El arte: Proporción y belleza

Definir qué es arte no es una tarea fácil, sobre todo cuando no se encuentra una definición clara y acabada de lo que es el arte; en general se ha considerado como arte a algunas producciones del hombre, en las que la imaginación y creatividad del ser humano juega un papel importante para la representación de eso que lo rodea. Este tipo de representaciones artísticas se puede encontrar en la pintura, la escritura, la escultura, en la música, en la arquitectura, entre otras.

En la antigüedad se consideraba el arte como la destreza del ser humano para construir un objeto. Esta concepción del arte surge en Grecia, y predominaría por varios siglos pasando por la Edad Media, hasta llegar al Renacimiento. Esta mirada del arte permite entender que toda actividad del hombre que fuera el resultado de sus labores se consideraba arte; bajo esta mirada se puede considerar como arte a la destreza para construir una casa, para hacer una pintura o la destreza de un hombre para construir una herramienta de uso cotidiano. Es decir que el arte es el resultado de las labores del hombre quien, con la ayuda de sus manos, convierte o transforma esos objetos en ese intento por expresarse o en ese intento de construir herramientas para suplir sus necesidades.

> Todas estas destrezas se denominaban artes: el arte del arquitecto, del escultor, del alfarero, del sastre, del estratega, del geómetra, del retorico. Una destreza se basa en el conocimiento de unas reglas, y por lo tanto no existía ningún tipo de arte sin reglas sin preceptos: el arte del arquitecto tiene sus reglas diferentes de las del escultor, del alfarero, del geómetra, y del general. (Tatarkiewicz, 1997, p. 39).

Los antiguos dividieron las artes en dos tipos: las liberales y las vulgares. Las artes liberales se consideraban superiores por su sentido científico; entre estas se encontraban la gramática, la lógica, la geometría, astronomía y la música. Por otro lado, las artes vulgares se referían a la práctica, a esas actividades u oficios en los que se construían objetos o en las que se requería el uso de las manos entre estas se encontraban: la agricultura, la sastrería, la arquitectura, la medicina, la militar entre otros. La música se consideraba como parte de las artes liberales debido a que eran consideradas como una teoría de la armonía; por otro lado, la pintura y la escultura no se incluían entre las artes vulgares o mecánicas, ni mucho menos entre las artes liberales, esto debido a que la pintura y la escultura requerían de un esfuerzo físico y su utilidad frente a otras artes manuales o vulgares no era relevante.

A partir del siglo XVI hasta el XVIII se fueron presentando una serie de cambios frente a la noción de arte. Estos cambios buscaban diferenciar las producciones artísticas de otras producciones; en esta se empieza a infundir la idea de que el arte "produce belleza, es decir, el arte es aquella clase actividad humana consciente que aspira, y logra, la belleza. La belleza es su propósito, su logro y su valor principal" (Tatarkiewicz, 1997, p. 56). Esta noción del arte acabaría por desplazar la idea el concepto antiguo de arte, en que el arte se limita a la belleza. Martínez (2014) hace una crítica frente a esta mirada del arte a partir del concepto de belleza y señala que:

> Limitar, hoy en día, el arte simplemente aquella actividad que produce belleza, sería un gran error. Esta definición limitadora del arte, constituyo, a mediados de 1900, un obstáculo para comprender nuevas corrientes del arte como el dadaísmo. Los diferentes creadores entendieron que el arte no solo se debía limitar a lo bello, sino también a lo sublime, a lo trágico, lo horroroso, lo grotesco o lo cómico. Es decir, a todas aquellas producciones que estimulas los diversos espacios perceptivos del hombre. (p.19)

Por otro lado, Tatarkiewicz señala que una definición del arte debe tener en cuenta la intención y el efecto y que estas pueden ser de diferente tipo. Finalmente señala el autor que:

> El arte es actividad humana consciente capaz de reproducir cosas, construir formas, o expresar una experiencia, si el producto de esta reproducción, construcción o expresión puede deleitar, emocionar o producir un choque. La definición de obra de arte no muy diferente: una obra de artes es la reproducción de cosas, la construcción de formas, o la expresión de un tipo de experiencias que deleiten, emocionen o produzcan un choque (Tatarkiewicz, 1997, p. 67).

Con lo expuesto hasta ahora en esta investigación, entiendo el arte como aquella actividad humana en la que se plasman los pensamientos de un artista, sus deseos, sus miedos, sus angustias, sus alegrías, donde dichos sentimientos se tornan importantes no solo en el momento de crear la obra, sino en momento en que se materializan la obra. Estos sentimientos inciden no solo en el artista sino también en aquellos que observan la obra de arte, de manera que estos sentimientos transcienden a cada uno de los observadores logrando despertar emociones y sensaciones únicas que solo una obra de arte puede reflejar. Dichos pensamientos del artista se mantienen en la obra, gracias a que son el resultado de esa representación del mundo que rodea al artista.

Una forma en como los artistas y arquitectos expresan belleza y armonía es a través del sentido común que, al momento de representar una pintura, una escultura o una obra arquitectónica, le da un buen manejo a las proporciones de aquello que se quiere representar; al respecto la Asociación de Industrias y Dibujo (citado en Ghyka) sostienen que:

> Nuestro error en todas las ciencias aplicadas es suponer que había incompatibilidad, conflicto inevitable entre las facultades artísticas, por un lado, y las facultades mecánicas, científicas o comerciales por el otro porque, de hecho, el arte y el sentido común no tenían ningún punto de contacto. Pero no se puede (en el arte aplicado) tener arte sin sentido común, ni sentido común si arte. (p. 17)

En ese sentido algunos objetos que se usan en la cotidianidad se caracterizan por tener un fin práctico y han servido como inspiración para producir obras de arte, aunque ha sido el mismo ser humano el que se ha encargado de transformarlo o de catalogarlo como arte; un ejemplo de lo que se considera como arte podrían ser los vasos, que cumplen una función en la cotidianidad, pero que se tornan arte cuando son decorados y ornamentados por un artista con el fin de representar algo dirigido a la divinidad o simplemente para embellecerlos.

De esta manera y según lo expuesto hasta ahora se puede considerar la matemática como parte del arte, de manera que el matemático, al igual que un artista, plasma sus ideas a través de fórmulas, representaciones geométricas, pensando siempre en un fin práctico de aquello que pasa de ser una idea a algo material en campo de la matemática.

En lo que respecta a la historia, el ser humano se ha mostrado interesado en representar el concepto de belleza; esto se puede ver reflejado en las culturas antiguas que buscaban representarla a través de la arquitectura, la pintura, y la escultura, y se mostraban como parte esencial en la construcción y representación de lo que se entendía por belleza, no solo en las culturas, sino también en la cotidianidad en la que se movilizaba el ser humano. Esta teoría de la belleza se empezó a formular en la antigüedad, con la idea que la belleza se fundamentaba en la proporción de las partes con respecto al todo, es decir, en la proporción el orden de las partes y sus relaciones internas y externas. Respecto a esta teoría, Tatarkiewicz menciona que un ejemplo de esta se puede visualizar en la arquitectura, donde la belleza de un pórtico se debe al volumen, al número y al orden que tienen las columnas.

De esta manera, en ese intento del ser humano por representar de belleza, se han tenido presente el concepto de proporción como un elemento que hace parte del arte, el cual ha ayudado a pintores, músicos y arquitectos, a representar esa teoría de belleza o esos cánones de belleza. Para algunas culturas estas representaciones parten por ejemplo del cuerpo humano como elemento de medida y como la máxima representación de esa belleza; así, algunos artistas han buscado plasmar en sus obras una relación entre una parte del cuerpo humano y eso que se quiere construir o representar. En este sentido se empieza a visualizar uno de los usos que ha tenido el concepto de proporción en el arte y como este se puede constituir como una posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción: a partir de las medidas del cuerpo humano.

Algunos autores señalan que el primer criterio artístico que se encontró sobre proporción se originó en Egipto. Para los egipcios la escultura directamente relacionada con arquitectura, y se basaba en la figura humana de pie (ver figura 3). Estos centraban su interés en algunas partes del cuerpo humano como el puño, el cúbito y el pie, como una forma para representar dibujos y aplicados a la arquitectura, como una forma precisa de usar las proporciones, entre las partes del cuerpo y eso que se representa; es decir, en lo que llamaríamos ahora una especie de sistema o regla de proporción que se expresaba a través del cuerpo humano.

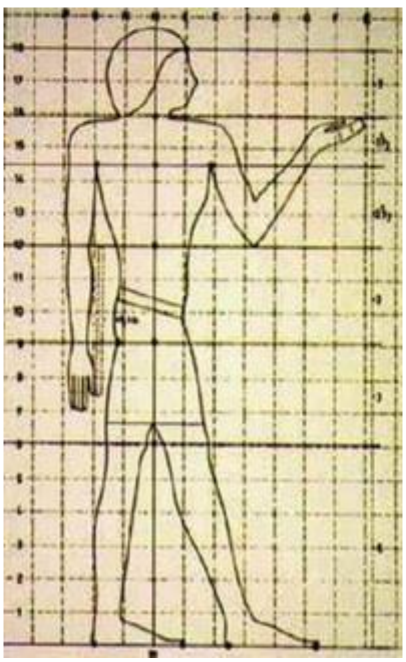

Figura 3 El canon egipcio sobre la figura humana de pie.

Fuente: https://www.arteehistoriaviajandoporelmundo.com/pasion-por-egipto-canones-y-proporciones-en-el-antiguo-egipto/

Para los egipcios era fundamental usar las medidas de la mano y el antebrazo, ya que tenían un valor simbólico al ser consideradas como las partes del cuerpo que crea las cosas; los egipcios se apoyaban a partir del uso de cuadrículas para representaban los dibujos o pinturas a escala, donde el tamaño de la cuadrícula correspondía al tamaño del puño. Con estas cuadrículas los egipcios buscaban que el dibujo o la pintura quedara en la misma posición y con las mismas proporciones que se querían dibujar o al que se tenía como muestra.

El antebrazo era usado por los egipcios como una forma de representar la belleza del cuerpo humano al plasmarlo como medida para la construción de templos. Las medidas del antebrazo se dividian en dos tipos:el cúbito pequeño y el cúbito real. El cúbito real era un sexto mayor que el cúbito pequeño y sus medidas se establecian de la siguiente manera: el cúbito real inciaba desde la uña del dedo corazón hasta el hoyo en la parte interior del brazo al nivel del codo, y el cúbito pequeño desde el inicio de la uña de dedo pulgar hasta el hoyo en la parte interior del brazo al nivel del codo. (Ver figura 4).

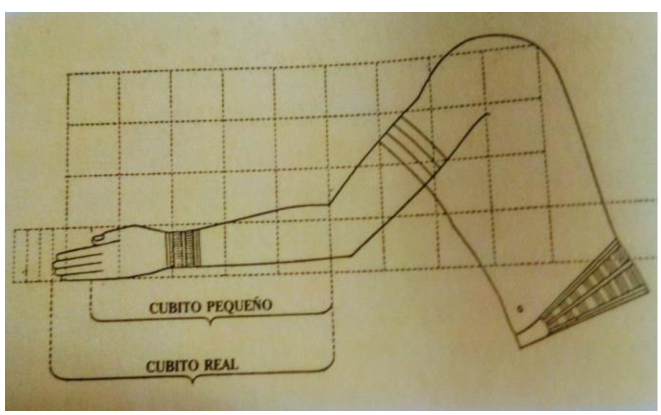

Figura 4 Cúbito pequeño y cúbito real como instrumento de medida para la construcción templos

. Fuente: https://www.arteehistoriaviajandoporelmundo.com/pasion-por-egipto-canones-y-proporciones-en-el-antiguo-egipto/

El concepto de proporción era usado por los egipcios como un instrumento para representar y reproducir a través de las medidas del cuerpo humano. Ese canon de belleza, como ya lo he mencionado, era reflejado en la construcción de templos, pinturas y esculturas; "En este caso la proporción no es más que una relación que permite al artista reproducir cualquier figura cambiando el tamaño sin cambiar la forma" (Ferrando y Segura, 2013, p. 63). Esta idea de representación de los egipcios estaba basada en estimaciones y buscaba que las proporciones se manejaran de manera precisa, en la que prima la forma y no el tamaño de lo que se buscaba representar.

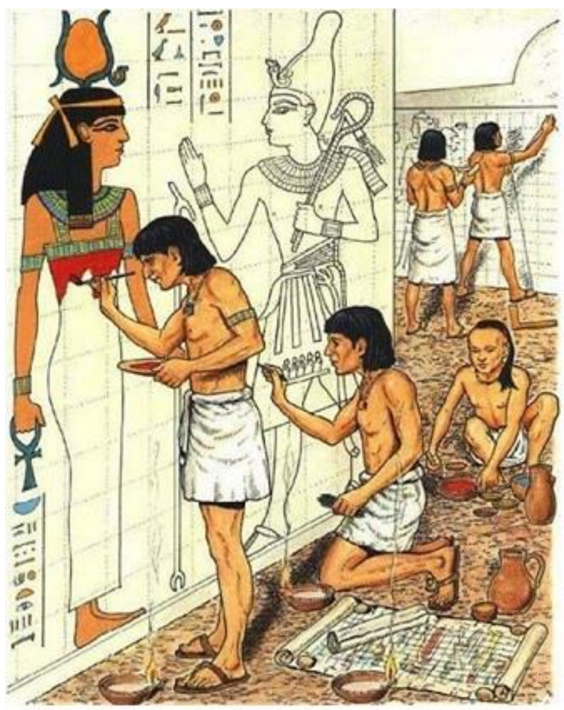

Figura 5 Representación basada cuadriculas.

Fuente: https://www.arteehistoriaviajandoporelmundo.com/pasion-por-egipto-canones-y-proporciones-en-el-antiguo-egipto/

Bajo esta mirada egipcia sobre las formas se empieza a visualizar una manera de entender y abordar el concepto de proporción como una relación entre las partes y el todo y entre el todo y las partes. Esta mirada puede constituirse una posibilidad en la clase de matemáticas, teniendo presente las partes del cuerpo humano como unidades de medida a la hora de construir o replicar una obra de arte. De esta manera “Trabajar con las formas implica identificar relaciones parte/todo que nos permite observar que en objetos diferentes (entendidos como un todo) hay estructuras semejantes o semejantes y transformadas” (Giménez, et al., 2010, p.13). Así trabajar la proporción como una relación parte todo, tenido presente las formas, permite entender la proporción a partir de esas representaciones artísticas, como también entender esos cánones de belleza, que están presentes en la distribución de las formas y en la armonía que se presentan en algunas obras de arte.

La mirada sobre la belleza en las proporciones del cuerpo humano no solo fue del interés de los egipcios; esta tradición pasó a los griegos, gracias a sus viajes en los que establecían relaciones comerciales con otras culturas como la egipcia y la babilónica. Se puede decir que estas culturas influenciaron no solo en los conocimientos sino también en el desarrollo artístico de las obras griegas. Los griegos estudiaron el cuerpo humano. Por ejemplo Policleto, quien se destacó por sus estudios sobre las proporciones del cuerpo humano, en su tratado “Canon” indicaba que la belleza del cuerpo humano está directamente relacionada sus proporciones numéricas.

Esta mirada fue adoptada por otros artistas en la época Helénica lo que permitió que se crearan una cantidad de obras que representaban la belleza de cuerpo humano a través de las proporciones. De esta manera los griegos continuaron con esta idea de plasmar en el arte esa relación de proporción entre las partes y el todo, y entre el todo y las partes, que se puede observar en el cuerpo humano. Así, por ejemplo, partir de la belleza del cuerpo humano como unidad de medida para representar las formas y aquello que rodea, se puede tornar en la clase de matemáticas como una forma para construir y representar proporciones.

Esta relación de proporción se puede observar en la obra "*La Estética"* de Aristóteles (como se citó en Giménez, et al., 2010) en la que se señala que: "la idea de belleza es asociada a la de organizar la totalidad con relación a sus partes" (p. 14). Así, esta manera de ver la belleza se puede entender a partir del arte como esa armonía que se produce entre las partes de la obra y la obra en su totalidad, y estaría ligada a ese concepto de proporción mencionado anteriormente.

Por su lado fueron los pitagóricos los encargados de que la teoría de la belleza se fundamentara; para esto se valieron de la música, al observar la armonía que tenían los sonidos al establecer las proporciones y longitudes de las cuerdas, para crear toda una teoría de las proporciones sobre la armonía de los sonidos. Este hecho en particular se le atribuye a Pitágoras, quien según varios historiadores fue el que estableció la teoría de la armonía de los sonidos a partir del monocordio. La teoría sobre la belleza que se estableció desde el siglo V a.C. hasta el XVII d.C. determinaría que lo que se observa o se escucha es realmente bello gracias al orden, la proporción y los números. Al respecto los pitagóricos consideraban que son los números los que hacen que todo parezca bello y que el orden y la proporción producen armonía y belleza.

Esta construcción pitagórica sobre la teoría de la armonía de los sonidos, es otro de los hallazgos que se tornan como una posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción al permitir construirlo en la clase de matemáticas, en las que se pueden comparar no solo los sonidos que producen la música, sino también sus representaciones simbólicas, para de esta manera fundamentar la teoría de la belleza no solo en la música si no en la matemática misma. Esta construcción pitagórica sobre la teoría de la armonía de los sonidos y su posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción en la escuela se profundizará más adelante.

Continuando con la teoría de la belleza, para Platón la medida y la proporción producen belleza, muy contrario de la fealdad en la que no hay una medida. Así, para Platón el concepto de belleza no se limita solo a las cosas bellas, para Platón la belleza también comprende los colores, las costumbres, la belleza de las almas, los pensamientos y los sonidos. Platón consideraba que lo bello no es aquello que es visible, sino aquello que trasciende al nivel de la idea o al espíritu. Para platón lo bello se puede categorizar en una especie de escalones: en el primer escalón se encuentra la belleza física o belleza visible, en el segundo se encuentra la belleza del alma a través de la virtud, y por último se encuentra la belleza en sí como idea suprema junto al bien. En ese sentido Martínez (2014) señala que para Platón:

> lo bello absoluto es el ser que contiene en su esencia todas las realidades por las cuales las cosas son bellas determinando finalmente el hecho de ser una idea o esencia que posee sus reflejos en el mundo sensible. (…) para captar la belleza suprema se debe partir de la belleza visible, para ascender en una belleza espiritual, intelectual y oral que culmina con la contemplación de la belleza suprema la cual se encuentra en el mundo de las ideas. (p.26).

De esta manera se puede considerar entonces la matemática misma como algo bello, este tipo de consideraciones puede posibilitar que la enseñanza de los conceptos matemáticos, por ejemplo, el de proporción, no se considere como algo ajeno al estudiante sino como algo cercano a él, en el que pueda contemplar la belleza de los conceptos no solo en el mundo de las ideas, sino también en las representaciones físicas o concretas de su entorno.

Un ejemplo de esa belleza en lo concreto son los descubrimientos de la escuela platónica sobre los sólidos platónicos que fueron usados en otras ciencias y en otros campos como el arte. Estos sólidos se inspiran en algunas de las formas que se encuentran presentes en la naturaleza, sirviendo como inspiración a algunos artistas para representar eso que los rodea y que para ellos representa belleza y armonía.

Alguna de estas son por ejemplo: las formas cilíndricas en el tallo de una flor o en los organismos unicelulares; en las formas o esquemas hexagonales de los paneles de las abejas o en los cristales de nieve; y en las formas circulares de algunas frutas como las uvas y naranjas. De esta manera identificar las posibles formas que se encuentran en el cotidiano permite por ejemplo que el estudiante identifique la belleza de las matemáticas en su entorno y en especial que identifique las proporciones con la cuales están conformadas.

En ese sentido, Platón citado por Magistrali (2019) menciona que este “describe la astronomía y la música, como estudios gemelos para los fenómenos perceptivos: la astronomía para los ojos, la música para los oídos, y ambos requieren del conocimiento de las proporciones numéricas” (p.98). Por otro lado, Platón veía “el cambiante mundo físico como una pobre copia en descomposición de un mundo original, perfecto, racional, entero e inmutable. La belleza de una flor, o una puesta de sol, una pieza musical o una historia de amor, es una copia imperfecta de la belleza misma.” (Magistrali, 2019, p.98). Esta forma de comprender la belleza del mundo concibe la belleza, la justicia y el círculo como una forma de interpretación de eso que Platón llama “realidad real”, este ideal de lo perfecto enmarca el pensamiento Platónico al señalar que en lo tangible estas tres formas no son perfectas, pero en lo intangible si lo son, y esto se da debido a que en lo tangible estas formas se tornan relativas.

La mirada egipcia y griega sobre el concepto de belleza y su relación con el concepto de proporción, fue retomada por algunos artistas del renacimiento como es el caso de Vitruvio, quien en su tratado sobre arquitectura (como se citó en Hemmenway, 2008) define la proporción así: “La proporción es la correspondencia existente entre las dimensiones de los componentes de un conjunto y de este conjunto con una determinada parte seleccionada para que sirva de pauta" (p. 94).

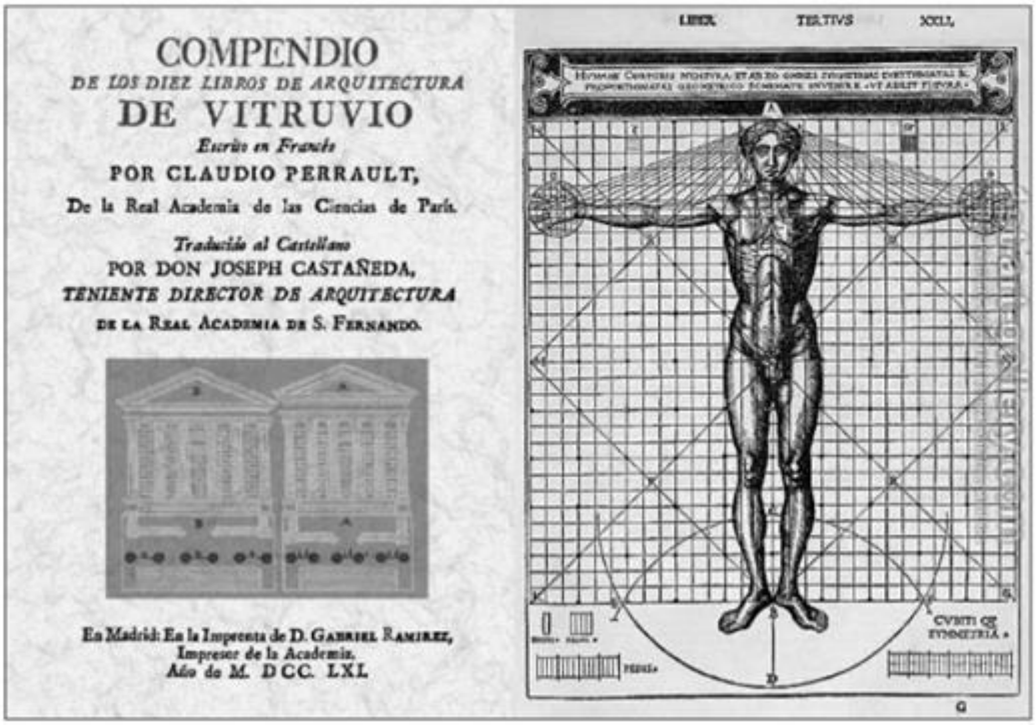

Figura 6 Imagen clásica de la mirada de Vitruvio

Fuente: (Giménez et al, 2010, p. 12)

De esta manera se puede ver esa relación entre una parte de la obra y la obra en su totalidad, en las que la idea de proporción a partir del cuerpo humano permite plasmarla y reproducirla. Esta idea predominaba no solo con Vitruvio sino también con otros artistas del renacimiento en los que el concepto de proporción era importante para tratar de representar en sus obras la belleza y armonía; estos a su vez resaltaban el concepto de proporción como la relación entre las partes y el todo, y entre el todo y las partes. Algunos de estos artistas fueron: Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Georges Seurat, Fidias y Miguel Ángel, que alcanzaron fama y renombre gracias a estas representaciones artísticas en las que está presente el concepto de proporción, y en la que las proporciones de las extremidades del cuerpo humano eran tenidas en cuenta para ser aplicadas en sus obras arquitectónicas, en sus pinturas y en la escultura. Con este uso de las proporciones en el arte se buscaba de darle un cierto realismo a la obra misma.

Esto se puede observar en Leonardo da Vinci, quien, en su traducción de Vitruvio, el arquitecto romano, dice en su obra sobre arquitectura que la naturaleza distribuye las medidas del cuerpo humano, como se visualiza en el siguiente fragmento:

> que 4 dedos hacen 1 palma, y 4 palmas hacen 1 pie, 6 palmas hacen 1 codo, 4 codos hacen la altura del hombre. Y 4 codos hacen 1 paso, y que 24 palmas hacen un hombre; y estas medidas son las que él usaba en sus edilicios. Si separas las piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya 1/14 y estiras y subes los hombros hasta que los dedos estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero. La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura. Desde el nacimiento del pelo hasta la punta de la barbilla es la décima parte de la altura de un hombre; desde la punta de la barbilla a la parte superior de la cabeza es un octavo de su estatura; desde la parte superior del pecho al extremo de su cabeza será un sexto de un hombre. Desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo. Desde los pezones a la parte de arriba de la cabeza será la cuarta parte del hombre. La anchura mayor de los hombros contiene en sí misma la cuarta parte de un hombre. Desde el codo a la punta de la mano será la quinta parte del hombre; y desde el codo al ángulo de la axila será la octava parte del hombre. La mano completa será la décima parte del hombre; el comienzo de los genitales marca la mitad del hombre. El pie es la séptima parte del hombre. Desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte del hombre. Desde debajo de la rodilla al comienzo de los genitales será la cuarta

> parte del hombre. La distancia desde la parte inferior de la barbilla a la nariz y desde el nacimiento del pelo a las cejas es, en cada caso, la misma, y, como la oreja, una tercera parte del rostro. (Giménez et al., 2010, p.11-12).

Hasta ahora he mostrado cómo el ser humano se ha valido del arte para representar esa armonía que lo rodea y cómo el concepto de proporción ha estado presente en la representación del concepto de belleza de los egipcios, de los griegos y en algunos artistas del renacimiento. Pero estos hechos no solo muestran la necesidad del hombre de plasmar ese canon de belleza, también muestra la importancia que tiene la matemática para el hombre al ser tomada como argumento para una explicación a eso que lo rodea.

Esta muestra de cómo las matemáticas están presentes en cada una de estas representaciones hace que la matemática misma se torne como arte, donde la matemática se ocupa de representar la armonía y la belleza de una obra. Esto se puede entender bajo la mirada de Aristóteles en su obra *Metafísica* (citado por Vallejo 2011) quien expresa que: "las formas que mejor expresan la belleza son: El orden, la precisión y la simetría. Y las ciencias matemáticas, son las que se ocupan de ellas especialmente" (p.76). Bajo esta mirada las matemáticas son en sí bellas al ser la base del orden, la precisión y la simetría.

Al considerar que las matemáticas son bellas, implica también considerar que la matemática es en sí misma arte y por ende también puede ser contemplada, creada y representada por los estudiantes. A pesar de que en general la matemática se ocupa de abstracciones, también se convierte en una herramienta que primero permite al estudiante poder pasar de una idea a algo concreto, y segundo se convierte en una posibilidad para para crear y recrear eso que lo rodea. Esto es algo parecido a lo que hace un artista, al plasmar su idea en un lienzo o un arquitecto en una obra.

Para ejemplificar más la belleza de la matemática, retomaré la definición de belleza de Santo Tomas de Aquino (citado por Vallejo 2011) quien señala que:

> Bello, es aquello que resplandece luminoso en su propio ser de modo que a quien lo contempla, le proporciona el sosiego y la felicidad de una percepción perfecta. Esto es; la contemplación estética. Bello, es aquello que se manifiesta de tal forma que produce una actividad armoniosa en las capacidades anímicas del hombre (p.77).

Esta mirada de lo bello de Santo Tomas de Aquino se relaciona con la matemática gracias a la capacidad de esta, de despertar en el hombre una serie de sentimientos como serenidad y satisfacción a la hora de querer aprender un concepto y al momento de encontrar en él una utilidad en su contexto; es decir, la matemática le permite al estudiante darle un significado a aquello que lo rodea plasmando su idea en algo concreto. Así, es importante animar a los estudiantes a desarrollar su capacidad para abstraer, y fomentar en ellos las maneras de concretar y "convertir en objetos" las ideas abstractas (Gómez, 2005). De esta forma la matemática al igual que las representaciones artísticas pueden generar placer a quien le contempla y a quien hace de ella algo concreto en su cotidianidad.

Se podría decir que ese interés y curiosidad del hombre por entender los fenómenos a través de la matemática son dos de los factores claves en el aula de clases para la enseñanza de las matemáticas ya que le permite al estudiante despertar sensaciones como: asombro, deseo y aspiración de aprender nuevos conceptos matemáticos.

Por otro lado, como ya lo he mencionado anteriormente, uno de los retos de la educación es generar en el estudiante la capacidad para enfrentarse a situaciones en las que estén presentes los conceptos matemáticos; así como también, el de generar espacios que motiven al estudiante a encontrar la utilidad de estos en los diferentes contextos, en los que están inmersos los conceptos matemáticos. Es claro que para encontrar esto, es necesario que el estudiante se muestre interesado sobre eso que se estudia o sobre eso que se investiga.

Una posible forma de atender a estas dificultades es la de visibilizar las incidencias y los usos que los conceptos matemáticos han tenido en la historia, como también tener presente la historia y los usos de los conceptos en un contexto particular, por ejemplo, el arte, la belleza y la proporción. Es ahí entonces donde el concepto de belleza se torna como una posibilidad, para movilizar al estudiante a comprender los usos que ha tenido el concepto de proporción en el arte; así como también a despertar en ellos esos sentimientos que ha movilizado a través del tiempo el arte y la matemática.

En el siguiente apartado profundizare un poco más sobre la proporción en la música, la arquitectura y la pintura y como estos se pueden tornar como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas.

4.2 La armonía musical y la divina proporción en la pintura y arquitectura

En algún momento de nuestras vidas hemos escuchado que la matemática y el arte están relacionadas, y que hay matemáticas en la música, en especial porque desde la antigüedad filósofos y matemáticos se han interesaron en buscar las relaciones entre el Arte y la matemática. Al respecto, fue Pitágoras el primer filósofo y matemático en relacionar estas dos áreas, así como el primero en establecer una teoría matemática de la música, teoría que se basa en el concepto de proporción, que serviría además para ilustrar su filosofía “todo es número”. Pitágoras centro su interés en el estudio de los sonidos musicales y su capacidad para producir música; gracias a esto descubrió que existía una relación entre los sonidos armónicos y los números, lo que lo llevaría a establecer dicha teoría.

Cuenta la historia que Pitágoras, guiado por la divinidad, descubrió los fundamentos de la música. Al pasar por enfrente de una herrería, le llamó la atención cuando escuchó el sonido que producían cuatro martillos y, al observar detenidamente los sonidos que producían, estos eran armoniosos; los timbres musicales provenían de los martillos que, al ser golpeados de manera simultánea producían sonidos consonantes y disonantes. Al parecer Pitágoras notó que el martillo A producía consonancia con el martillo B cuando se golpeaban juntos, y que el martillo C producía consonancia con el martillo A. Al parecer Pitágoras notó que al golpear los martillos B y C estos producían disonancia entre ellos, y también notó que el matillo D producía una consonancia con el martillo A en la que parecía que estuvieran tocando la misma nota.

Parece además que Pitágoras había buscado por largo tiempo los criterios racionales para determinar las consonantes musicales. Algunos historiadores señalan que Pitágoras descubrió las consonancias musicales en sus viajes a Egipto y Babilonia. Otros historiadores señalan que su descubrimiento se dio a partir de las proporciones entre los pesos de los martillos. Según estos, los martillos pesaban 12, 9, 8 y 6 respectivamente, en donde los martillos A y D estaban en una proporción de 2:1 que es una relación de octava y, las proporciones de los martillos B (9) y C (8) con el martillo A (12) fueron respectivamente (12:9 = 4:3 que producían un intervalo de cuarta) y (12:8 =3:2 que producían un intervalo de quinta). Frente a este señalamiento Magistrali (2019) señala que:

> Esta leyenda es falsa en virtud del hecho de que estas relaciones son solo relevantes para la longitud de cuerdas (por ejemplo, las cuerdas de un monocordio) y no para el peso de un martillo. Sin embargo, puede ser que Pitágoras fuera el responsable del descubrimiento de estas propiedades de las longitudes de las cuerdas. (p. 97).

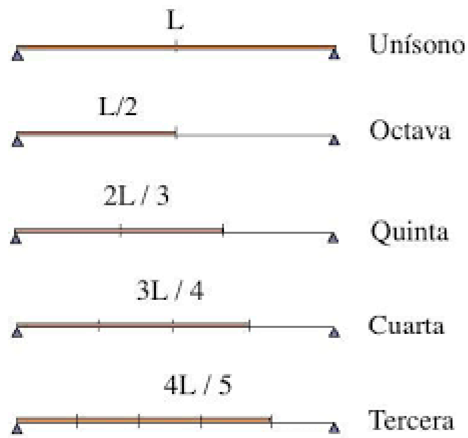

Figura 7 Intervalos consonantes pitagóricos

Fuente: https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/18491/Memoria.pdf?sequence=1

Para la construcción de las consonancias musicales a partir de la teoría de cuerdas, es necesario tomar una cuerda y tensarla sobre un objeto que pueda reflejar el sonido que esta produce, dicho experimento consiste en tensar una cuerda que al momento de ser pulsada generara un sonido, dicho sonido dependerá del tamaño de la misma, teniendo como base esto, se pueden construir las ocho notas musicales que componen la escala musical, en la que es necesario partir cuerda en ocho porciones de cierta longitud, en las que parte o longitud de la cuerda represente una nota musical. Este experimento fue realizado por Pitágoras con la ayuda de un monocordio, este instrumento que consiste de una sola cuerda, que se desliza un puente móvil, la aplicación de este instrumento se explicara más adelante. (Ver figura 8).

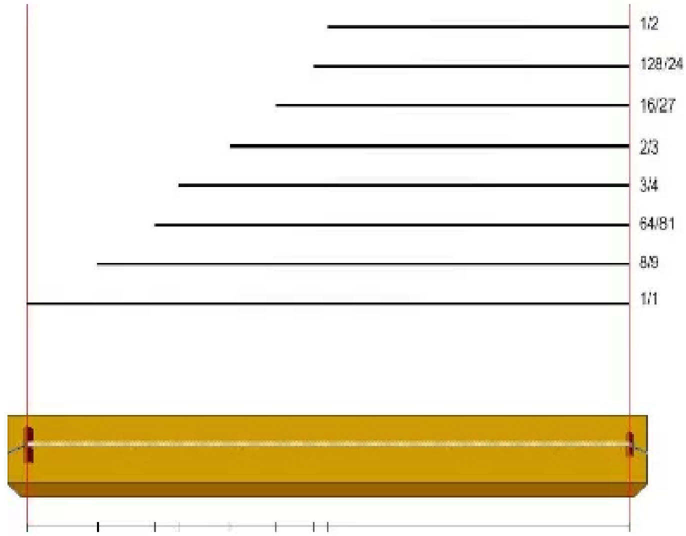

Figura 8 Consonancias pitagóricas en un monocordio esquemático.
Fuente: https://1library.co/document/ky6o47gy-monocordio-instrumento-cientifico-rupturas-continuidades-revolucion-cientifica-mersenne.html

Los pitagóricos le atribuyeron a la música dos nociones básicas: la armonía y el número. Concebían la armonía como un principio de síntesis, es decir un principio al que se le determinaba la construcción del cosmos, el orden y la belleza, y estaba en relación con el macrocosmo y el microcosmo y el alma de los seres humanos (Giménez 2010). De esta manera, para los pitagóricos la armonía se representaba a través de razones de número, de ahí que todas las cosas se podían interpretar a parir de estas.

> Los pitagóricos establecieron una construcción matemática de la escala musical utilizando tres consonancias griegas octava, quinta y cuarta, así como de la composición de sus respectivas razones subyacentes. Como la cuarta es una octava restada de una quinta, es suficiente con utilizar octavas y quintas para generar la escala pitagórica. Así, partiendo, por ejemplo de la nota do, al componerse una quinta con una quinta, lo que matemáticamente significa 2:3 de 2:3, se obtiene un re en la octava superior correspondiente a la razón de 4:9, que después de bajar una octava, decir de restar 1:2, l resultado es un re

con razón 8:9. Al componer ahora 8:9 con una quinta, lo que matemáticamente significa tomar de eso 2:3, se obtiene la nota correspondiente a la razón 16:27 y así sucesivamente. (Giménez, 2010, p.71-72).

A propósito, a continuación, se presenta la escala pitagórica:

Tabla 11 Proporciones en las notas musicales

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1:1	8:9	64:81	3:4	2:3	16:27	128:243	1:2

Fuente: Elaboración propia

Otra de las ideas de Pitágoras es la de música de las esferas. Este es otro concepto antiguo filosófico que considera las proporciones en los movimientos de los cuerpos celeste como el sol, la luna y los planetas; este antiguo concepto filosófico se basaba en que los siete planetas conocidos en ese entonces, dichos planetas producen una nota particular en función con su distancia a un centro inmóvil. Para este tiempo, los pitagóricos consideraban que dicho centro inmóvil era la tierra, además de que los sonidos que estos producían no podían ser captados por nuestros oídos. Esta forma tan particular de Pitágoras de ver la proporción a través de la música, se torna como una posibilidad para entender dicho concepto desde la observación, creación y sus usos, permitiendo que el concepto se reconozca desde su aplicación en la cotidianidad, lo que facilita la asimilación de este.

En esa dirección, la forma de Pitágoras de entender y conocer los conceptos matemáticos, se torna como una posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción, ya que permite el reconocimiento de los usos que tiene el concepto de proporción en la música, a la vez que permite incursionar en otros campos como la arquitectura y la pintura; permitiendo además, que el estudiante comprenda dicho concepto desde la cotidianidad, en la que se pueda explorar su utilidad, a partir de la construcción y reconstrucción del concepto de proporción en la música y su aplicación en las escalas musicales.

Pitágoras no fue el único que se intereso en el estudio de las consonancias musicales, pero su teoría sobe las proporciones musicales, tendría mucha influencia varios siglos después de su muerte, que influenciarían al arquitecto, matemático y musico León Battista Alberti, quien en su tratado *De re aedificatoria*, le daría nuevamente un protagonismo a las matemáticas como instrumento para explicar las consonancias musicales y su aplicación a la arquitectura. Como se puede apreciar en el siguiente apartado

> …intervalos musicales de octava, quinta y cuarta son agradables al oído, se corresponden a la división de cuerda en 2, 3 y 4 (1/2, 2/3 y 3/4), proporciones conocidas en la época como: diapasón, diapente y diatesarón. Estas proporciones servirían en la pintura y en la escultura, como relación armónica que se instaura entre las formas que, partiendo de un cuadrado, se diversifican en rectángulos que tienen por lados 1/2, 2/3 o 3/4, relaciones que se utilizaran para proporcionar las construcciones no solo en planta si no en fachada. Estas proporciones se pueden utilizar duplicadas y combinadas. Se definen así los números musicales, como los siguientes: uno, dos, tres, cuatro. (Garfias, 2019, p. 73)

Este es un claro ejemplo, de cómo las proporciones musicales, pueden trascender más allá de su aplicación en las consonancias musicales, en la que estas proporciones o intervalos de octava permiten no solo fundamentar la música, si no que también permiten materializar la armonía que transmiten en una obra concreta y tangible, como es el caso de su aplicación en la arquitectura.

Siguiendo con esta línea, y pensando en los usos del concepto de proporción en el arte como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas, me remonto nuevamente a la antigüedad, para analizar un poco más a fondo dicha posibilidad. Ese interés por encontrar dicho vínculo entre la matemática y el arte, en especial en la pintura y la arquitectura, se ve reflejado en las numeras obras de arte, que se han creado a través de la historia y que hasta el día de hoy se siguen creando, en la que los artistas han buscado fundamentar la dimensión artística de las matemáticas, en especial la belleza y la armonía de la matemática, y como esta se refleja en la naturaleza.

Uno de los objetivos de este apartado es precisamente este: el de resaltar la dimensión artística de las matemáticas, que puede llegar a tornarse en la clase de matemáticas como una posibilidad para su enseñanza, en especial la enseñanza del concepto de proporción, que se puede contemplar, trabajar y crear a partir de diferentes representaciones artísticas como la pintura, la arquitectura y la ya mencionada música. Con estas reflexiones busco comprender aspectos tanto básicos como complejos de la matemática misma, en la que estudiante pueda apropiarse de los conceptos a partir de su creación o representación, en especial enfocado hacia el concepto de proporción, el cual ha sido uno de los principios de diseño y que ha sido usado por los artistas para organizar sus obras de arte, entendiendo a la obra como un todo relacionado con su partes.

La arquitectura y la pintura, al igual que la música, son el resultado de esas representaciones artísticas, en las que los artistas han encontrado en la matemática otra forma para plasmar en sus obras, la ya mencionada belleza y armonía que genera el concepto de proporción, además de que dicho concepto les permitirle plasmar sus propias percepciones visuales, aunque muchas de estas obras pueden estar compuestas, de partes desiguales, aun así, llegan a ser agradables para la mirada, gracias en gran medida, a la armonía que se encuentra presente que en este tipo de representaciones artísticas. De esta manera, la proporción representa para el artista un elemento que le da a la obra un equilibro entre el todo y las partes, y entre las partes y el todo que conforman la obra. De esta manera la proporción le permite al artista diferenciar entre una obra estética y una creación caótica.

Una de las representaciones artísticas más conocidas sobre la proporción humana ideal y la belleza que representaba el cuerpo humano como “perfecto”, es atribuida a Leonardo da Vinci, en su representación de *El Hombre Vitrubio*. En esta, se puede observar a un hombre que al entender sus piernas, el espacio que se crea en el suelo y la figura formada con sus piernas, forman un triángulo equilátero, en este dibujo también se puede observar como la longitud de los brazos estirados es igual a la altura del hombre, lo que muestra claramente como el cuerpo humano está distribuido en proporción.

Por tal motivo, El Hombre Vitrubio se torna en una posibilidad para enseñar el concepto de proporción, ya que permite realizar un trabajo parecido al que realizó Leonardo da Vinci, al medir cada parte del cuerpo humano en proporción a todo el conjunto, donde se pueda buscar en la clase de matemáticas, las relaciones que existen entre una parte del cuerpo humano y el cuerpo completo. A continuación presento el dibujo realizado por Leonardo da Vinci. (Ver figura 9)

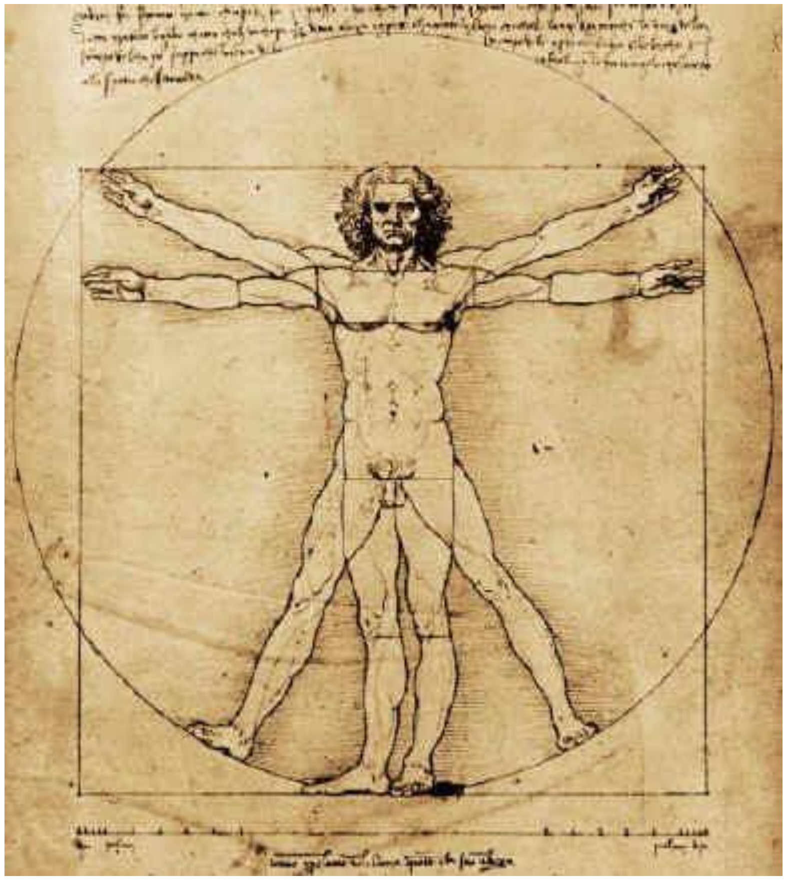

Figura 9 El Hombre Vitrubio – Leonardo da Vinci
Fuente: (Toledo, 2005, p. 1)

Por su parte este dibujo no solo permite trabajar el concepto de proporción, sino que también permite estudiar la relación que tiene el arte con la matemática en general y en especial con la geometría. Un ejemplo de esto lo podemos observar en la proporción aurea o divina proporción, que se caracteriza por representar una proporción geométrica, y que serviría de pauta para la representación de dicho número en este dibujo. Para explicar esto a más profundidad, analicemos un poco más este dibujo y su relación con el número de oro o sección aurea:

En El Hombre Vitruvio, (Ver figura 9) se puede observar como la distancia que hay entre el suelo y la parte más alta de la cabeza dividida entre la distancia del ombligo al suelo, da como resultado el número de oro PHI = 1,618 Aprox. La distancia que hay desde el hombro hasta la punta de los dedos, divida entre la distancia del codo a la punta de los dedos, también da como resultado el número PHI; la distancia entre la cabeza y el suelo dividida por la distancia que hay entre la rodilla al suelo, se encuentran en la misma proporción, esta proporción se encuentra al relacionar otras partes del cuerpo humano, por ejemplo: entre el primer hueso de los dedos y la falange, entre el diámetro de la boca y el de nariz. Entre otras.

Pero; ¿de qué se trata la sección aurea? la sección aurea o divina proporción se remonta a Platón y Euclides, y es el resultado de dividir un segmento en dos, de manera que la relación entre las longitudes mayor y menor sea igual que la relación entre las longitudes del total y la del trozo mayor. La proporción aurea ha sido usada frecuentemente por pintores y arquitectos en la composición de pinturas y edificios, y en especial por algunos pintores y escultores del renacimiento que, en su intento de representar la belleza, le han atribuido una especie de carácter espacial y místico, por ser considerada la razón que hacía posible la construcción de la estrella pentagonal, (el emblema que adornaba a la escuela pitagórica). Se podría decir que la sección aurea o divina proporción representa una ley universal para la armonía, tanto en el arte como en la naturaleza.

Otro ejemplo en que esta presenta la razón aurea o sección aurea, se puede observar en la relación que se da entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, que al unir sus vértices forma la estrella pentagonal regular. Dicha proporción va más allá del arte, como es el caso de las magnitudes inconmensurables, en la que algunos historiadores le atribuyen su aparición al problema del pentágono regular, problema que resulta, al querer encontrar un segmento unidad que mida la diagonal del pentágono regular con uno de sus lados; esto representaría un problema debido a que no es posible encontrar un segmento o un número natural que mida al tiempo a ambas magnitudes. De esta manera, la creencia de los pitagóricos de que tomadas dos magnitudes o segmentos cualesquiera, siempre se puede encontrar un segmento unidad que se pueda medir a través de la razón, generaría un gran golpe a su teoría de números, en la que todo se puede representar a partir del número, a pesar del golpe a su teoría, los pitagórico continuarían usando la proporción aurea en su emblema. (Ver figura 10)

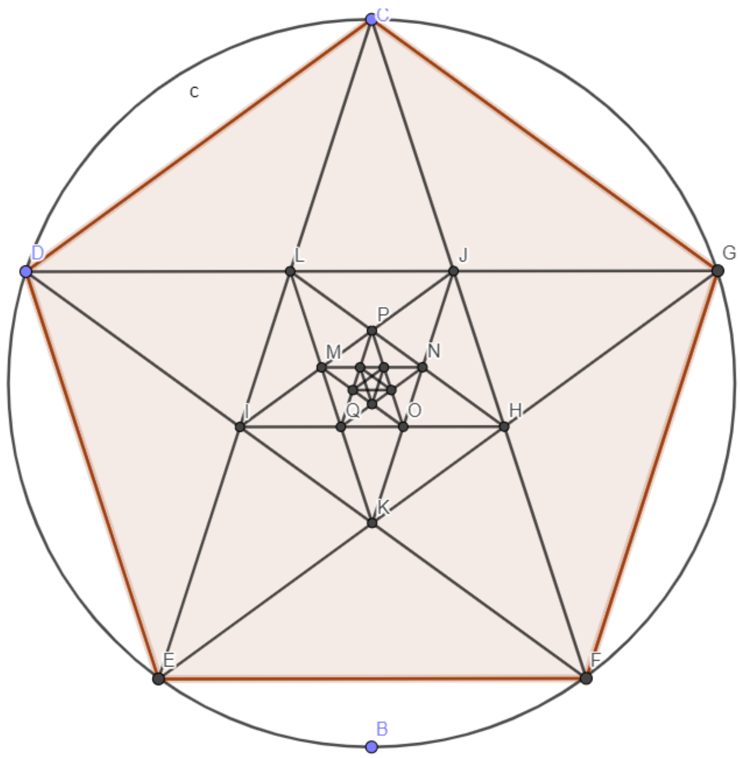

Figura 10 Pentágono regular estrellado inscrito en un pentágono regular

Fuente: Elaboración propia.

Una manera de entender la belleza de las matemáticas y su relación con la proporción aurea es precisamente la que se refleja al encontrar las relaciones que se dan en el pentágono regular estrellado. Para encontrar dicha relación, debemos medir las longitudes de los segmentos que componen dicho pentágono y realizamos las siguientes operaciones (Ver tabla 12).

Tabla 12 Operaciones para encontrar las relaciones que se dan en el pentágono regular.

1. Dividamos el segmento CF entre el segmento EF
2. Dividamos el segmento CI entre el segmento IE
3. Dividamos el segmento IE entre el segmento IK

Fuente: Elaboración propia.

Estas operaciones dan como resultado el número PHI = 1.61803 aprox. No importa que tan grande sean las medidas del pentágono regular estrellado, siempre encontraremos esta proporción aurea y su estrecha relación con la belleza de matemática. Este tipo de construcciones y aplicaciones de la proporción aurea, aplicadas en el pentágono regular, se torna como una posibilidad en la enseñanza del concepto de proporción, ya que permite construir y visualizar las relaciones que se dan entre los segmentos que lo conforman.

Retomando un poco más la dimensión artística de la matemática y su relación con el concepto de proporción, me remonto al uso que pintores y arquitectos, han tenido de la proporción aurea en la construcción de sus obras, proporción que se puede encontrar en la naturaleza. Dicha proporción se halla de manera natural en cuerpo humano, y se puede encontrar en la altura de una persona y la distancia de la cabeza al ombligo, proporción que sería tomada como una medida precisa o unidad esencial para las construcciones de obras arquitectónicas y pictóricas.

Este es el caso de algunas obras arquitectónicas de la antigua Grecia y de algunas obras de arte creadas en el renacimiento, de las que se ha encontrado una cantidad numerosa de evidencias sobre su aplicación. Uno de los ejemplos más conocido sobre el uso que ha tenido la proporción aurea en la arquitectura griega, es la del Partenón de Atenas. Este templo fue construido en honor a la diosa griega Athenea Parthenos, alrededor 430 a.C. El Partenón de Atenas es considerado como la obra cumbre de la arquitectura universal por su monumentalidad, sereno equilibrio y armoniosa proporción, además de sus innovaciones en la distribución del espacio interior, que serviría como base para las construcciones de otros templos posteriores a esta época, como el medioevo y el renacimiento.

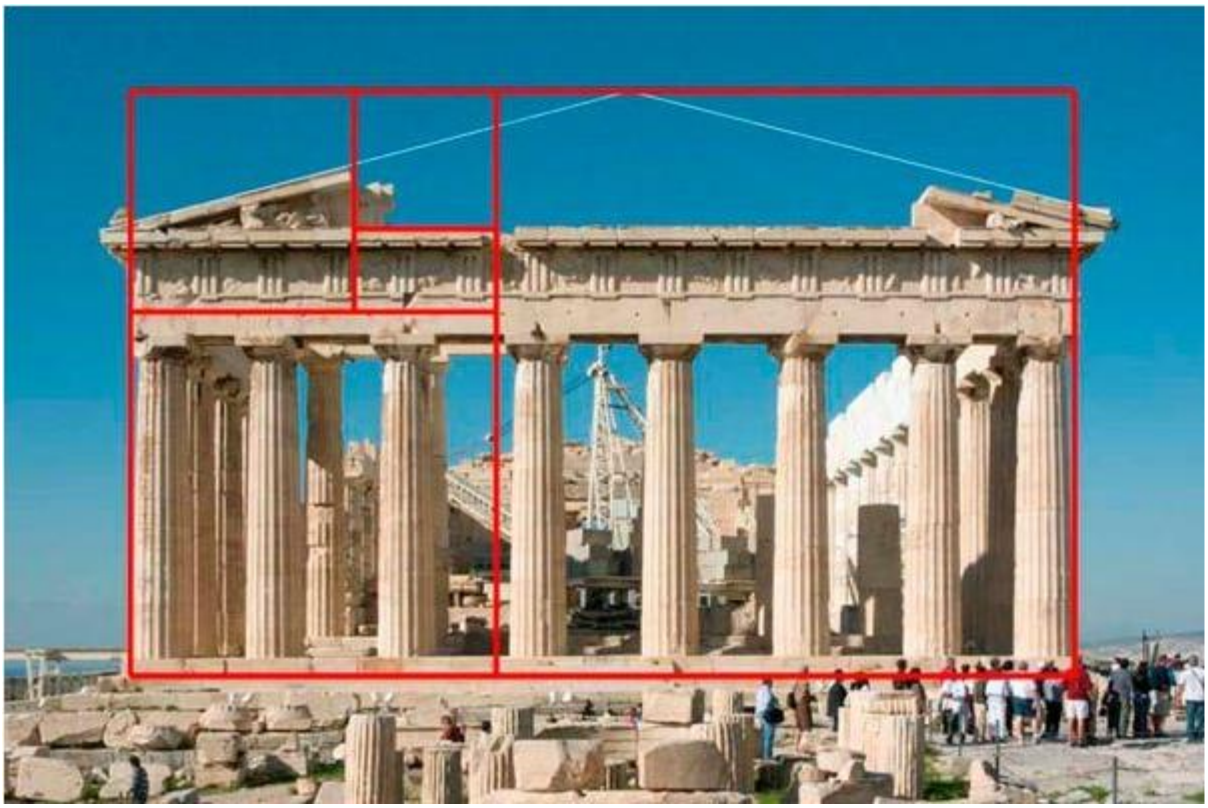

Figura 11 .Partenón de Atenas con la espiral aurea mostrando las relaciones entre las dimensiones de sus partes.

Fuente: https://academiaplay.es/wp-content/uploads/2016/06/partenon.jpg

Veamos a fondo la relación que tiene esta obra arquitectónica con el número de oro y como esta obra, se puede tornar como una posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción en el aula de matemáticas. Tomando como base el número de oro y siguiendo con la idea griega del cuerpo humano como perfecto, el Partenón de Atenas recoge estas dos ideas al analizar las distancias que hay entre las columnas y su altura; se puede notar que ambas medidas están expresadas en términos del diámetro de la columna, frente a esto Vitruvio señala que ese elemento elegido para expresar las proporciones de la estructura completa se llama módulo, y cumple un papel importante en la arquitectura, de la misma forma que lo haría una parte del cuerpo humano con respecto a las proporciones del cuerpo completo.

> La altura de las columnas del *Partenón* contiene cinco veces y media el ancho de la base de la columna. Los capiteles consisten en simples losas cuadradas que descansan sobre formas, cuyos contornos se asemejan a dos manos extendidas. La parte superior de los capiteles de las columnas está cerca del punto de la sección áurea de la altura total, y las líneas centrales de las dos columnas de las esquinas, más las líneas del piso y la parte superior del entablamiento forman un rectángulo de $\sqrt{5}$, que consta de dos rectángulos áureos recíprocos, Las columnas frontales del Partenón con sus siete espacios intermedios incorporan tanto el coeficiente 3/4 del triángulo pitagórico y la correspondiente armonía musical de cuarta-diatéssaron, como afinidad con proporciones áureas o armonía de quinta-diapente. (Toledo, 2005, p.116).

Esta forma de entender las proporciones en la arquitectura aplicado al Partenón, abre un camino para comprender como cada parte o elemento de un edificio puede estar en proporción con el conjunto en general, teniendo como pauta una serie de reglas geométricas y matemáticas, como es el caso del número de oro. Frente a esto Vitruvio citado por Garfias (2019) quien señala que:

> la composición de los templos es el resultado de la “simetría” y los arquitectos deben observar escrupulosamente los principios de la misma. Esta surge de la proporción que en griego se llamaría analogía. La proporción es la conmensurabilidad sobre la base de unidad determinada por sus miembros en cada estructura y en toda la obra, con la que el criterio de

> las relaciones modulares se traduce en práctica. Y de hecho, ningún tempo puede tener principio racional de composición sin “simetría” ni proporción, si no se ha adherido al principio racional precisamente definido por los miembros de un hombre de formas proporcionadas. (Garfias, 2019, pp. 73-74)

La Catedral de Valladolid (1500) es una de las obras cumbres de Juan de Herrera, quien concibe la proporción como la relación entre las partes y el todo, esto se puede observar gracias que todo el conjunto que compone la Catedral Valladolid, está en función de proporciones. Se puede apreciar en este sentido que la fachada hasta la base del remate de la torre dibuja un rectángulo en proporción 4/3; esta relación se repite en el centro de la ventana superior y las diagonales que parten de los cuatro ángulos, por otra parte los triángulos que se forman están en proporción 3/4/5.

Figura 12 Catedral de Valladolid

Fuente: https://www.uv.es/estalmat18/pres/CyL.pdf

Por otro lado, una de las obras de arte pictórico basado en el número de oro es *El nacimiento de Venus*, pintado por Sandro Botticelli entre los años 1482 y 1485. Esta pintura en sus dimensiones es un rectángulo de oro, donde las dimensiones son 172.5 cm por 278.5, dichas medidas corresponden a un rectángulo áureo, además de esto, esta pintura usa la regla de los rectángulos de oro, al ubicar los personajes que la conforman. (ver figura 13).

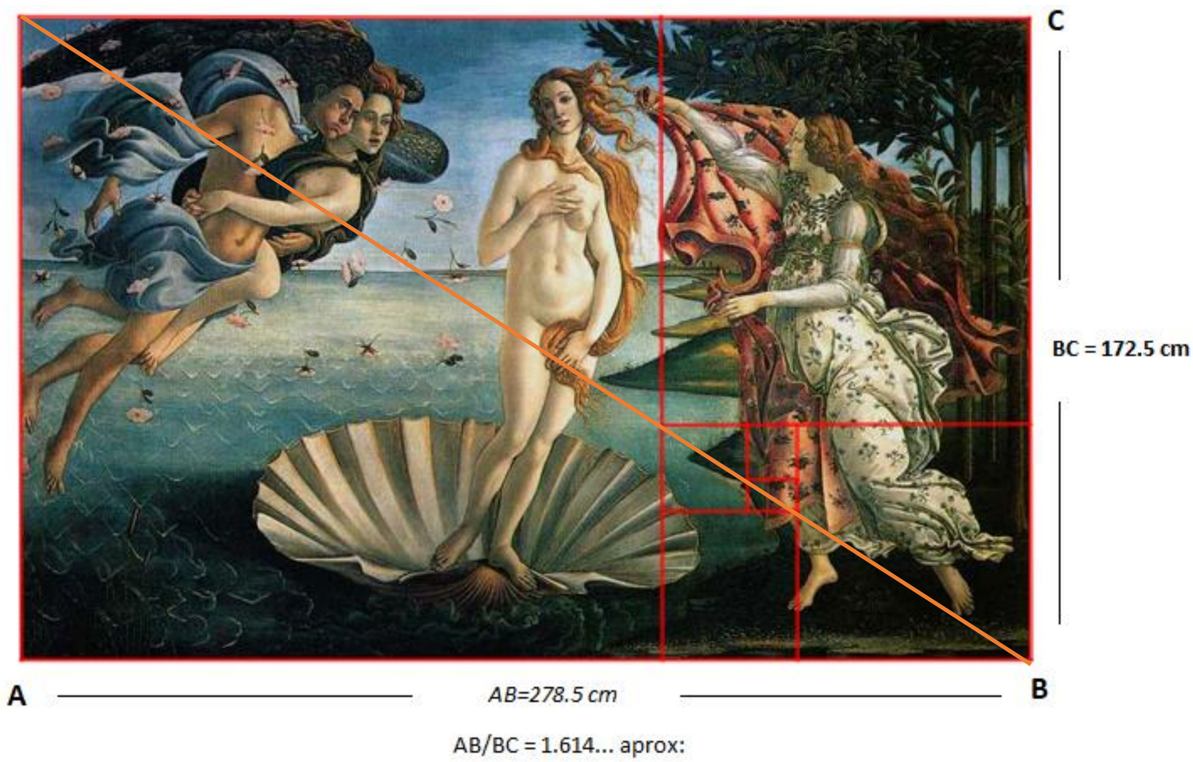

Figura 13 El nacimiento de Venus – el rectángulo de oro

Fuente: https://academiaplay.es/wp-content/uploads/2016/06/El-nacimiento-de-Venus.jpg

Obras como “El nacimiento de Venus” se torna una posibilidad en la clase de matemáticas para la enseñanza del concepto de proporción, gracias a que con la ayuda de instrumentos y software como GeoGebra, se pueden construir y reproducir relaciones sobre proporciones, por ejemplo la de los rectángulos de oro que cumplen con lo siguiente propiedad geométrica: si se le quita un cuadrado cuyo lado es la parte más pequeña del rectángulo original, la región que queda tiene las mismas proporciones que el rectángulo original (ver figura 13). Estudiar las proporciones en las obras de arte, que están basadas en rectángulos áureos, permitirle no solo fortalecer el concepto de proporción, sino fortalecer otros conceptos matemáticos como: tangente, diagonal, recta, segmento, el punto, distancia, circulo entre otros conceptos matemáticos, que están inmersos en la cotidianidad.

Otro acercamiento de la proporción áurea en el arte, se puede observar en la obra de Salvador Dalí (1904 – 1989) "Taza gigante volante, con anexo inexplicable de cinco metros de longitud" aunque esta obra no es precisamente contemporánea, a ninguno de los tres periodos estudiados en este trabajo, llama la atención como el artista Salvador Dalí resalta la importancia del número de oro para representar armonía, orden y belleza en esta obra de arte. Esta fue pintada por Dalí entre los años 1944 y 1945; las medidas del lienzo usado por el pintor tiene las siguiente dimensiones 50x31, que al realizar la división 50/31 su cociente es 1,6129… un número muy aproximado del número de oro, esta pintura es una muestra del conocimiento que tenida el artista de la proporción aurea y de los rectángulos áureos, además de mostrar la belleza y armonía que proporcionan estos rectángulos, por otra parte, en esta obra se puede observar el inicio de una espiral aurea.

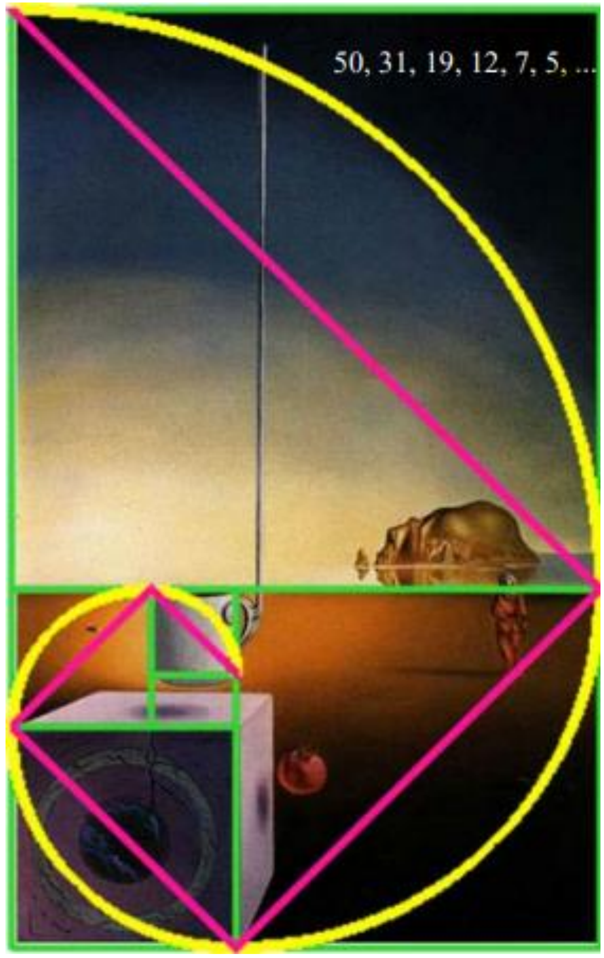

Figura 14 Taza gigante volante, con anexo inexplicable de cinco metros de longitud. Salvador Dalí.

Fuente: https://www.uv.es/estalmat18/pres/CyL.pdf

Otra de las obras en las que se puede observar el uso del rectángulo de oro o la divina proporción, es la obra "Gioconda" más conocida como la Mona Lisa, que fue pintada por Leonardo da Vinci en el siglo XVI. Se podría decir que esta es una de las obras más célebres del artista, en la que la proporción aurea jugaría un papel muy importante para su creación, y para el arte en general. Leonardo da Vinci consideraba que a través de la matemática se podrían crear obras e investigaciones que ayudarían a entender al ser humano, este artista retomaría la idea pitagórica de que el hombre es centro de todo, tomando a este como la obra más perfecta o, en otras palabras, la creación matemática perfecta, y es ahí donde el número de oro o la divina proporción jugaría un papel muy importante en las representaciones artistas de este tiempo. Para su construcción Leonardo da Vinci, utilizaría el número de oro el cual se encuentra presente en varias partes de la pintura como es el caso del rostro y el cuadro, para esto partió de la utilización de varios rectángulos áureos. (Ver figura 15)

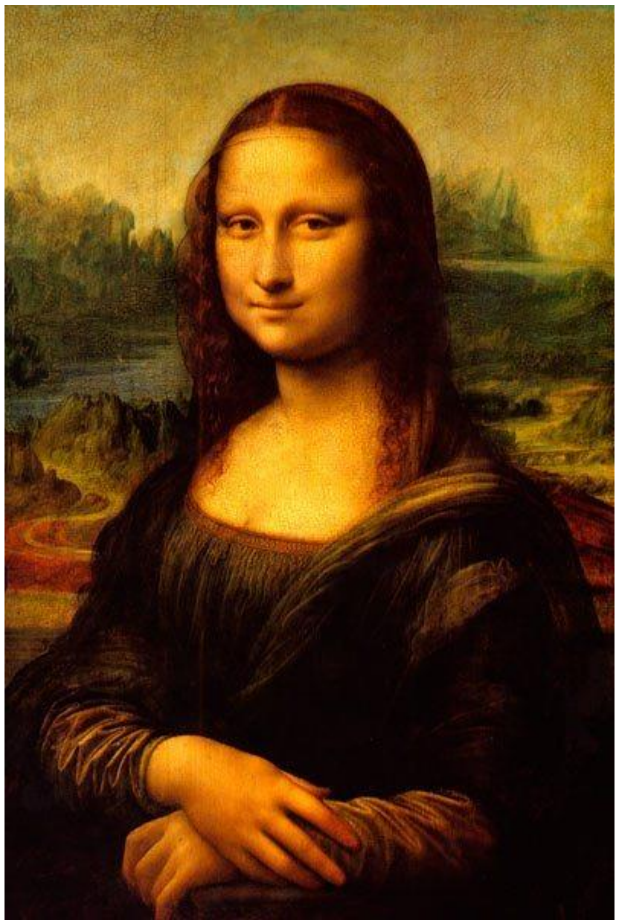

Figura 15 La Gioconda – Leonardo da Vinci

Fuente: https://academiaplay.es/wp-content/uploads/2016/06/La-Gioconda.jpg

La presencia del número de oro en estas obras de arte, se tornan como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas, ya que el número de oro permite darle una explicación matemática, a la forma en cómo se organizan las cosas en una obra, además de que permite conocer la belleza y armonía, se genera este número cuando se aplica en una obra.

En ese sentido, partir por ejemplo de la construcción del rectángulo de oro, teniendo como base estas representaciones artísticas, se tornan en una posibilidad para enseñanza del concepto de proporción en la clase de matemáticas, ya que permite visualizar, construir y reproducir el rectángulo áureo, que consiste en quitar a cada rectángulo áureo, un cuadrado cuyos lados sean el lado menor del rectángulo áureo original, quedando un nuevo rectángulo áureo. Por su parte esta mirada de las matemáticas y su uso en el arte, no solo permite entender la matemática como el lenguaje y el argumento del arte, sino que permite, además entender otros conceptos matemáticos.

5. A modo de cierre.

La pregunta que movilizó este trabajo de investigación fue: ¿Cuáles usos del concepto de proporción en el arte a través de la historia, se constituyen como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas? Para dar respuesta a esta pregunta, realicé un diseño metodológico a partir de un paradigma cualitativo y bajo un enfoque hermenéutico-interpretativo; la metodología que utilice fue de tipo historiográfico, y me permitió analizar ciertos eventos históricos sobre los usos que ha tenido el concepto de proporción en el arte.

Los datos surgieron gracias a las lecturas que permitieron la creación y el análisis de los registros encontrados, referidos a la historia de la matemática, la relación entre el arte y la proporción, y los usos del concepto de proporción en tres momentos históricos: el antiguo egipcio, el medioevo y el renacimiento.

La metodología de investigación cualitativa como eje central, bajo un enfoque hermenéutico-interpretativo permitieron el acercamiento y el posterior análisis de algunos fenómenos, discursos y practicas sociales que permean a los sujetos en la construcción de un conocimiento, permitiendo además interpretar los diferentes significados que han sido presentado por otros autores

El método historiográfico permitió que se diera un acercamiento a lo planteado en el objetivo: identificar históricamente los usos del concepto de proporción en el arte, como una posibilidad para la enseñanza en la clase de matemáticas, ya que permitió rastrear a través de la historia los diferentes usos que ha tenido el concepto de proporción en el arte, en especial en tres momentos históricos particulares: el antiguo egipcio, el medioevo y el renacimiento; en relación con el tratamiento que le daban, al concepto de proporción, en especial a su aplicación en la música, la pintura y la arquitectura.

El archivo de en esta investigación estuvo conformado por 16 documentos, clasificados como fuentes primarias y secundarias, que permitieron la construcción y el análisis de los datos, entre los que se destacan libros, artículos de revista, tesis de pregrado, memorias de congreso. A partir del análisis de los datos, se configuraron dos categorías que sirvieron para responder la pregunta planteada. Las categorías que surgieron fueron: *“Arte: proporción y belleza” y “la armonía musical y la divina proporción en la pintura y arquitectura”*.

A modo de hallazgos planteo algunas posibilidades para la enseñanza del concepto de proporción en la clase de matemáticas.

Uno de los primeros hallazgos se refiere a la necesidad de trabajar en la clase de matemáticas en contextos específicos, como puede ser el del Arte y en especial la música, la pintura y la arquitectura. Esto, considero, es una buena manera de generar espacios que motiven al estudiante a encontrar la utilidad de los conceptos matemáticos en los diferentes contextos, donde se puedan estudiar las diferentes formas de interpretarlos, de esta manera generar espacios que motiven al estudiante a encontrar la utilidad de los conceptos matemáticos en sus actividades.

En el caso del concepto de proporción, estudiar su aplicación en el arte, permite diferenciar por ejemplo en qué momentos se habla de proporción y en cuáles se habla de una fracción, debido a que en la mayoría de los casos, en la escuela, no se diferencias estos dos conceptos matemáticos; se podría decir que esto se produce, debido a las definiciones que con regularidad se presentan en la clase de matemáticas. En estas definiciones se prioriza la parte aritmética y se deja de lado el sentido práctico de las razones; un ejemplo de esta práctica es que las razones no son vistas desde la relación que se puede construir entre magnitudes de diferente naturaleza, en las que se podrían estudiar relaciones como la distancia y el tiempo, el precio y cantidad, entre otras.

Otro de los hallazgos encontrados en esta investigación, es el uso que le daban los egipcios a la proporción en sus representaciones pictóricas. Esta es una muestra de que trabajar la proporción como una relación parte todo, tenido presente las formas, permite entender la proporción a partir de estas representaciones artísticas, como también entender esos cánones de belleza, que están presentes en la distribución de las formas y en la armonía que se puede presentar en una obra de arte. Esta es una forma de ver cómo el arte se torna una posibilidad para la enseñanza en la clase matemáticas, no solo porque permite estudiar un concepto matemático, como es el concepto de proporción, sino que, también, permite movilizar al estudiante a comprender sus usos en esta ciencia, y a despertar en ellos esos sentimientos de asombro y curiosidad, que han movilizado el arte y la matemática a través del tiempo.

En torno al arte como una posibilidad para enseñanza la clase de matemáticas, uno de los hallazgos es la aplicación de este concepto en las artes pictóricas, y su posibilidad para ser reproducidas a partir de construcciones geométricas, que como se ha mostrado en páginas anteriores, pueden ser construidas y analizadas a partir de software educativos o a partir de regla y compás.

Resaltar la dimensión artística de las matemáticas se torna en una posibilidad para la enseñanza del concepto de proporción en la clase de matemáticas, ya que permite contemplar, trabajar y recrear dicho concepto, a partir de las diferentes representaciones artísticas que se pueden encontrar en el arte, como lo pueden ser la pintura, la arquitectura y la música, con las que se buscaría fortalecer aspectos básicos y complejos del concepto de proporción. En la música y el número de oro en la pintura y arquitectura, la proporción juega un papel importante para entender estos principios de armonía, diseño y belleza, que han sido usados por los artistas para organizar sus obras, además de entender que las representaciones artísticas pueden ser entendidas, como un todo en relación con sus partes o como una parte en relación con el todo.

Las construcciones y aplicaciones del número de oro, como es el caso del rectángulo de áureo o del pentágono regular, se tornan en una posibilidad para enseñanza del concepto de proporción en la clase de matemáticas, ya que permite tomar las representaciones artísticas de otros artistas, como la base para entender y aplicar el concepto de proporción, tomando a este con una unidad de medida precisa o como una unidad esencial para la construcción de obras arquitectónicas o pictóricas dentro del aula de clase. Además de que permiten estudiar, construir y visualizar las relaciones que se dan entre las partes que conforman el rectángulo áureo, el pentágono regular y las diferentes representaciones artísticas que estén compuestas por segmentos, diagonales y armonías musicales.

Así mismo, estudiar las proporciones en las obras de arte, que están basadas en rectángulos áureos, permitirle no solo fortalecer el concepto de proporción, sino fortalecer otros conceptos matemáticos como: tangente, diagonal, recta, segmento, el punto, distancia, circulo entre otros conceptos matemáticos, que están inmersos en la matemática y en la cotidianidad del estudiante.

6. Referencias

Boyer, C., & Martínez. P. M. (1985). Historia de la matemática. Español. Alianza Editorial.

Chaverra, L. (2018). Resignificación De La Noción De Proporcionalidad Para Estudiantes De 12 A 17 Años. (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Corry. L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. Mathesis. *Filosofía e Historia de las Matemáticas*, 10(1), 1-24. Recuperado de: https://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf

Cortes Barajas, W. F., & Cruz Beltrán, J. J. (2018). La enseñanza de la proporcionalidad, más allá de la regla de tres.

Ferrando Palomares, I., & Segura, C. (2013). Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte. *Modelling in Science Education and Learning*, 6, 61-71. doi: https://doi.org/10.4995/msel.2013.1840

Foucault, M. (2002). La arqueología del saber. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI Editores. Recuperado de: https://monoskop.org/images/b/b2/Foucault_Michel_La_arqueologia_del_saber.pdf

Foulkes, B. M. (2009). El origen de la historiografía: historiocidad escrita y plus-de-goce. Psicología & sociedade, 21, 43-47. https://doi.org/10.1590/S0102-71822009000400008

Gairín, J.M. y Oller, A.M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 249-259).* Jaén, España: SEIEM.

Garfias, C. (2019). Música y Arquitectura. Consensus V 23(1), (pp. 69-82). Doi: https://doi.org/10.33539/consensus.2018.v23n1.1477

Gómez, I. M. (2005). Valores y conocimientos matemáticos: la belleza matemática. Dialogo Filosófico, *(62)* 285-306.

González, M. J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: Nuevas respuestas para viejos interrogantes. Cuestiones Pedagógicas, 15, 227-246. Recuperado de: https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/12862/file_1.pdf

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica*, 23(4), 355-375.

Ghyka, M. C. (1983). Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. *Ed. Poseídon*. Barcelona.

López, F. (2002). El Análisis de Contenido como Método de Investigación. *XXI Revista de Educación*, (4), pp. 167-179. Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/1912/b15150434.pdf

Magistrali, D. (2019). Matemáticas y Arte: una pincelada. Pensamiento Matemático, 9(1), 7.

Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Bogotá D.C.

Mochón, S. C, (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. E*ducación matemática. 24(*1), 133-157. Recuperado en 14 de oct. de 21, de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000100006&lng=es&tlng=es

Moura, M. (2011). Educar con las matemáticas: saber especifico y saber pedagógico. *Revista Educación y pedagogía. Medellín. Vol. 23, 59, pp 48-57*

Obando, G. (2015*). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica*. (tesis de doctorado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Obando, G; Vasco, C. E; & Arboleda, L. C. (2014). *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17(1), 59-81.

Oller, A. M., & Gairín, J. M. (2013). La Génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16(3), 317–338.* Recuperado de: https://doi.org/10.12802/relime.13.1632

Puertas, M. L. (1994). Euclides. Elementos: Libros V-IX. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Quiroz, L. (2018). Números enteros negativos: condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión en el currículo escolar colombiano (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado de: https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/10062/1/QuirozLorena_2018_NumerosEnterosNegativos.pdf#page=28&zoom=100,0,389

Rodríguez, L. (2011). Las matemáticas en la escuela primaria colombiana: Contribuciones a una historia sobre su enseñanza. (Tesis maestría). Universidad de Antioquia. Colombia. Recuperado de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1384/1/JC0699.pdf

Rodríguez, M. (2010). El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática-cotidianidad. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 21, pp. 113-125.

Ruedas, M., Ríos, M. y Nieves, F. (2009) Hermenéutica: La Roca que Rompe el Espejo. *Investigación y Postgrado, 24* (2), pp. 181-201. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3620425.pdf

Ruiz, P. (1993). Los discursos del método histórico. En P. Ruiz, (Ed), La historiografía. (p. 47-77). Madrid: marcial Pons.

Tatarkiewicz, W. (1997). Historia de seis ideas: arte, belleza, forma, creatividad, mimesis, experiencias estéticas, trad. Rodríguez Martin Francisco. Tecnos, Madrid.

Toledo, Y. (2005). Sección áurea en arte, arquitectura y música. Recuperado de: https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf.

Vanegas, B. (2010). La Investigación Cualitativa: Un Importante Abordaje del Conocimiento para Enfermería. *Revista Colombiana de Enfermería*, 6(6), pp. 128-142. Recuperado de: https://masd.unbosque.edu.co/index.php/RCE/article/view/1441/1047

Vallejo, L. F. (2011). Las matemáticas en el arte: y su didáctica. Revista Digital Ciencia y Didáctica. *50*, 73-83.